Diffie-Hellman algoritam

Seminarski rad u okviru kursa
Tehničko i naučno pisanje
Matematički fakultet

Dunja Milenković
mi22056@alas.matf.bg.ac.rs

Jana Vuković
mi22124@alas.matf.bg.ac.rs

Lazar Nikolić
mi22164@alas.matf.bg.ac.rs

Sofija Janevska
mi22035@alas.matf.bg.ac.rs

15. novembar 2022.

Sažetak

Ovde će ići abstrakt

Sadržaj

1 Uvod

Sve rasprostranjenija upotreba interneta širom sveta donosi sa sobom, kako značajne prednosti u načinu istraživanja, rada, povezivanja i sl. tako i povećan rizik od nebezbedne komunikacije i razmene podataka. Bilo da se radi o individualnim, privatnim razmenama informacija između ljudi ili rada nekih od najvećih državnih institucija, bezbedna i neometana interakcija i komunikacija među korisnicima na internetu je od presudnog značaja. Glavni problem nastaje kada spoljni korisnik koji nije predviđen kao deo veze pokuša da je prekine i dođe do određenih informacija koje su originalno bile namenjene jednom od povezanih korisnika. Upravo rešavanjem ovakvih problema bavi se **kriptografija**.

Kriptografija je oblast koja razvija tehnike koje omogućavaju zaštićenu i efikasnu digitalnu komunikaciju [1]. Bez nje, komunikacija nebezbednim i nepoverljivim kanalima, što uključuje sve vrste mreža, a pogotovo internet, ne bi bila moguća. U ovom radu bavićemo se jednom od tehnika kriptografije koja se naziva **Diffie-Hellman algoritam** i predstavićemo način rada algoritma, njegova osnovna svojstva, primene, prednosti i mane.

2 Osnove Diffie-Hellman algoritma

Glavna klasifikacija kriptografskih algoritama deli ih na kriptografiju privatnog ključa (eng. secret key cryptography), kriptografiju javnog ključa (eng. public key cryptography) i heš funkcije (eng. hash functions) [1]. Kako je Diffie-Hellman protokol predstavnik asimetrične kriptografije, nju ćemo posebno izdvojiti i definisati.

Kriptografija javnog ključa ili **asimetrična kriptografija** podrazumeva korišćenje dva ključa – jednog za šifrovanje i drugog za dešifrovanje koda. „Tvorcima“ tj. pokretačima asimetrične kriptografije smatraju se **Whitfield Diffie** (Vitfild Difi) i **Martin Hellman** (Martin Helman), dok je Ralph Merkle (Ralf Merkl) takođe dao svoj doprinos ovoj oblasti radom na distribuciji javnog ključa [2]. Njihova saradnja rezultirala je objavom zajedničkog rada pod nazivom „Novi pravci u kriptografiji“ (eng. "New Directions in Cryptography"), novembra 1976. godine. U njemu su opisane osnove Diffie-Hellman algoritma, koji je upravo otud i dobio naziv.

U spomenutom radu, Diffie-Hellman algoritam opisan je kao algoritam koji koristi dva ključa i tako omogućava korisnicima bezbednu komunikaciju bez potrebe za deljenjem privatnog ključa. Takođe, simetrična kriptografija omogućava postojanje digitalnih potpisa tj. autentifikacije pošiljaoca poruke. Osnovni princip na kome funkcioniše jeste korišćenje tzv. jednosmernih matematičkih funkcija (eng. one-way functions), koje se lako izračunavaju u jednom smeru, dok isto ne važi i za njihove inverzne funkcije [1]. Na ovaj način omogućeno je postojanje javnog ključa, bez rizika da ga treći korisnik koji nije predviđen kao deo mreže može zloupotrebiti.

3 Algoritam

Pre početka razmene ključeva, uspostavljaju se 2 javno poznata broja: p i g.

- p - bezbedan prost broj i modulo po kom radimo, preporuka je da to bude broj dužine 2048 bita (broj reda 10^{616}) [4]

- g - generator, mora da bude primitivni koren od p

Bezbedan prost broj: p je bezbedno prost ako može da se izrazi kao $p = 2q + 1$ gde je q takođe prost broj. q je Sofija Žermen prost (eng. *Sophie Germain prime*). Ovo je bitno kako bi se izbegao specifičan napad na Diffie-Hellman — Silver-Polig-Hellman algoritam (eng. *Silver-Pohlig-Hellman algorithm*) [5]

Primitivni koren: g je primitivni koren po modulu p ako za svaki celi broj a koji je uzajamno prost sa p postoji celi broj k tako da je

$$g^k \equiv a \mod p$$

Takvo k se naziva indeks ili diskretni logaritam od a sa odnovom $g \mod p$.

3.1 Koraci algoritma

Recimo da Anastasija i Boban žele da razmene ključeve.

- Pretpostavljamo da su se Anastasija i Boban već dogovorili oko brojeva g i p
- Anastasija nasumično bira neki tajni broj $x \in \mathbb{N}$ i izračuna njegov *najmanji pozitivni ostatak* (objašnjeno kasnije), čime dobija a, ovo je njen privatni ključ
- Zatim kalkuliše njen javni ključ koji je jednak $A = g^a \mod p$
- Boban će uraditi isto, nakon čega poseduje privatni ključ b i javni ključ $B = g^b \mod p$
- Anastasija i Boban sada razmene njihove javne ključeve (privatni ključevi ostaju tajni)
- Anastasija sada poseduje svoje ključeve, kao i Bobanov javni ključ
- Ona će izračunati tajni broj $K = B^a \mod p$. Ako zamenimo B, videćemo da je

$$\begin{aligned} K = (g^b \mod p)^a &\mod p = \\ (g^b)^a &\mod p = \\ g^{ab} &\mod p \end{aligned}$$

- Boban poseduje svoje ključeve i Anastasijin javni ključ
- On će istim postupkom kao i Anastasija pronaći K

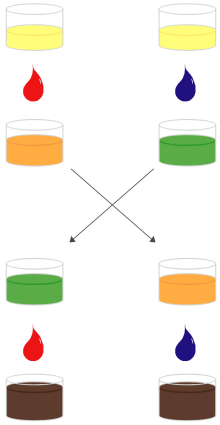
$$\begin{aligned} K = A^b &\mod p = \\ (g^a \mod p)^b &\mod p = \\ (g^a)^b &\mod p = \\ g^{ab} &\mod p \end{aligned}$$

Definicija 3.1.1 *Najmanji pozitivni ostatak nekog x po modulu p je najmanji pozitivni celi broj a tako da je*

$$x \equiv a \mod n$$

Trenutni korak	Anastasija zna	Javno poznato	Boban zna
Početak algoritma		g, p	
Svako računa svoj ključ	$a, A = g^a \mod p$	g, p	$b, B = g^b \mod p$
Razmena javnih ključeva	a, A, B	g, p, A, B	b, B, A
Svako računa isto, tajno K	$a, A, B,$ $K = B^a \mod p$ $= g^{ab} \mod p$	g, p, A, B	$b, B, A,$ $K = A^b \mod p$ $= g^{ab} \mod p$

Tabela 1: **ovo više nije tako očajna tabela**



Slika 1: **Slikoviti prikaz Diffie-Hellman algoritma**

Primetimo da će i Anastasija i Boban izračunati isti broj K (1). K predstavlja ključ za enkripciju ključeva (engl. *Key-Encryption Key (KEK)*). Pomoću tog ključa mogu sinhrono da razmene novi ključ za enkripciju sadržaja (engl. *Content-Encryption Key (CEK)*) i da nastave komunikaciju pomoću njega. [6]

Neko ko je prisluškivao ovoj razmeni zna p, g, g^a i g^b (1). Da bi od ovih brojeva pronašao K, on mora da izračuna vrednost a ili b, problem koji se zove *komputacioni Diffie-Hellman problem* (engl. *computational Diffie-Hellman problem (CDH)*).

3.2 Problemi oslonci

Neka G bude ciklična grupa reda q, sa generatorom g. Drugačije rečeno, svaki broj x iz G je kongruentan sa nekim g^k, gde je k neki celi broj tako da je $0 \leq k \leq q - 1$.

$$x = g^k$$

Ako znamo g i k, lako možemo izračunati x. Međutim, ako znamo x i g, pronalaženje k je veoma teško, i to je zapravo problem diskretnog logarit-

ma.

Definicija 3.2.1 *Problem diskretnog logaritma u cikličnoj grupi G reda q je pronalaženje broja k, $0 \leq k \leq q-1$ tako da $x = g^a$, za neko g i x.*

Ako možemo da rešimo problem diskretnog logaritma, možemo da nađemo i tajni broj K iz Diffie-Hellman ako znamo oba javna ključa. Obrnuto nije dokazano: ako možemo da pronađemo tajni broj K, ne mora da znači da možemo rešiti bilo koji problem diskretnog logaritma.

Ne treba da pretpostavimo da je diskretni logaritam jedini način da se razbije Diffie-Hellman. Dovoljna je bilo koja metoda koja može da pronađe g^{ab} iz g^a i g^b, i otud uvođenje sledećeg problema:

Definicija 3.2.2 *Neka $a, b \in \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$ (a i b su u nekoj cikličnoj grupi reda q), i neka $A = g^a$ i $B = g^b$* ***Komputacioni Diffie-Hellman problem*** *(CDH) je problem nalaženja g^{ab} ako znamo A i B u cikličnoj grupi $G = \langle g \rangle$ reda q.*

Na težini ovog problema se oslanja bezbednost Diffie-Hellman šeme. Najefikasnije rešenje za koje znamo je da rešimo problem Diskretnog Logaritma ali još uvek nije dokazana ekvivalencija između njih. [7] Takođe slična je i ElGamal enkripcija o kojoj će biti reči kasnije. Ona se oslanja na sledeći problem:

Definicija 3.2.3 *Neka $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$ i $A = g^a$, $B = g^b$. Sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$ postavimo $C = g^c$, a inače $C = g^{ab}$. Odlučujući Diffie-Hellman problem (engl.* Decisional Diffie-Hellman problem (DDH)*) je problem odlučivanja da li je $C = g^{ab}$, ako znamo $\langle g \rangle$ i A, B, C.*

Ako znamo da rešimo komputacioni Diffie-Hellman problem, lako je rešiti odlučujući Diffie-Hellman problem. Obrnuto ne važi. [8]

4 Primer Diffie-Hellman algoritma na konkretnim vrednostima

Algoritam opisan u prethodnim poglavljima, primenjen na vrednostima konkretizovanim kroz interakciju dva korisnika izgleda ovako:

- Neka je izabrani prost broj $q = 353$.
- Prost koren za ovu vrednost je $\alpha = 3$.
- Korisnik A bira tajni ključ $X_A = 97$.
- Korisnik B bira tajni ključ $X_B = 233$.
- Korisnik A izračunava javni ključ $Y_A = 3^{97} \mod 353 = 40$.
- Korisnik B izračunava javni ključ $Y_B = 3^{233} \mod 353 = 248$.
- Korisnici A i B razmenjuju javne ključeve Y_A i Y_B, nakon čega oba korisnika mogu da izračunaju tajni ključ K.
- Korisnik A tajni ključ izračunava po formuli:

$$K = (Y_B)^{X_A} \mod 353 = 248^{97} \mod 353 = 160$$

- Korisnik B tajni ključ izračunava po formuli:

$$K = (Y_A)^{X_B} \mod 353 = 40^{233} \mod 353 = 160$$

Po samoj definiciji algoritma možemo slobodno pretpostaviti da napadač na raspolaganju ima samo podatke o vrednosti izabranog prostog broja i njegovog prostog korena, kao i vrednosti javnih ključeva korisnika A i B. Dakle, napadač zna da je:

$$q = 353,\ \alpha = 3,\ Y_A = 40 \text{ i } Y_B = 248.$$

S obzirom da su radi jednostavnosti izabrani brojevi u ovom primeru veoma mali, napadač može da pokuša i teorijski uspe da otkrije vrednost tajnog ključa K, primenjujući čistu metodu grube sile ("brute force").

Da bi napadač otkrio vrednost tajnog ključa K, neophodno je da otkrije bar jednu vrednost koja će zadovoljavati jednačinu za izračunavanje tajnog ključa koju koriste korisnici. Koristeći informacije koje su mu poznate, napadač može da rekonstruiše kako igledaju te jednačine, a potom pokuša da ih reši metodom grube sile:

$$Y_A = 3^a \mod 353 = 40 \text{ ili } Y_B = 3^b \mod 353 = 248.$$

Metoda grube sile u ovom slučaju podrazumeva stepenovanje trojke sve dok dobijena vrednost po modulu 353 ne postane 40 ili 248.

Jednačina biva zadovoljena kada je eksponent $a = 97$. Sa ovim saznanjem, napadač izračunava vrednost tajnog ključa K i dešifruje podatke deljene između korisnika A i B.

Zbog ovoga se u Diffie-Hellman algoritmu koriste vrednosti koje su značajno veće. U tom slučaju razbijanje algoritma grubom silom postaje krajnje nepraktično.

5 ElGamalov sistem enkripcije

Nakon što su Diffie i Hellman uveli koncept kriptografije javnog ključa, mnogo istraživača pokušalo je da pronađe efikasniji sistem enkripcije zasnovan na Diffie-Hellman algoritmu (linkovi 6,7,9 iz originalnog rada). Za razliku od npr. RSA sistema (9) koji se oslanja na kompleksnost faktorisanja velikih celih brojeva, ElGamalov sistem zasnovan je na kompleksnosti izračunavanja vrednosti diskretnih logaritama.

Glavne celine koje se uočavaju u koracima ElGamalovog algoritma su:

1. Javno su poznata dva cela broja - prost broj q i njegov prost koren α koji je ceo broj.
2. Anastasija generiše par ključeva (privatni i javni).
   - Bira privatan ključ X_A, ali takav da je $1 < X_A < q - 1$.
   - Izračunava javni ključ po formuli $Y_A = \alpha_A^X \mod q$
   - Privatni ključ je X_A, a javni ključ je q, α, Y_A
3. Boban šifruje poruku koristeći Anastasijin javni ključ.
   - Predstavi poruku kao ceo broj M iz domena $[0, q - 1]$.
   - Odabere proizvoljan ceo broj k iz domena $[1, q - 1]$.
   - Izračuna privremeni ključ za jednokratnu upotrebu, po formuli: $K = Y_A^k \mod q$.
   - Konačno, broj kojim je reprezentovana poruka šifruje kao par celih brojeva $(C1, C2)$, i to: $C1 = \alpha^k \mod q$, i $C2 = KM \mod q$.
4. Anastasija dešifruje dobijenu šifrovanu poruku M koristeći svoj privatni ključ.
   - Uzima jednokratni ključ $K = C_1^{X_A} \mod q$.

- Izračunava originalnu poruku M po formuli $M = (C_2 K^{-1}) \mod q$.

Dakle, Elgamalov algoritam sastoji se iz tri glavne tačke - generisanje ključa, enkripcija i dekripcija. U datom postupku, Boban želi neometano da pošalje poruku Anastasiji, diskretno i bez mešanja trećeg lica. Na prelazu između prvog i drugog koraka Anastasija šalje Bobanu javni ključ q, α, Y_A koji je sama formirala. Na prelazu između drugog i trećeg koraka Boban šalje Anastasiji uređeni par celih brojeva $(C1, C2)$ kojim je šifrovao poruku M koju želi da joj pošalje. Na osnovu dobijenog para Anastasija prevodi poruku.

Ukoliko je poruka previše dugačka i neophodno ju je razbiti na više delova, za enkripciju svakog pojedinačnog dela neophodno je nasumično izabrati različito k (izbor ove vrednosti dešava se u drugoj tački trećeg koraka u navedenom ElGamal algoritmu). ElGamal algoritam je siguran ukoliko se za enkripciju koriste dovoljno veliki brojevi. Preporučena minimalna veličina za nasumično izabran prost broj q je trista cifara.

5.1 Dokaz ispravnosti ElGamalovog algoritma

Prema definiciji ElGamalovog algoritma, privremeni ključ za jednokratnu upotrebu računa se po formuli $K = Y_A^k \mod q$. Po Diffie-Hellman definiciji, $Y_A = \alpha^{X_A} \mod q$. Kada se ovaj izraz zameni u početnoj formuli, dobije se $K = (\alpha^{X_A} \mod q)^k \mod q = \alpha^{kX_A} \mod q$. Po ElGamalovoj definiciji, $C_1 = \alpha^k \mod q$. Kada se ovaj izraz zameni u prethodnoj formuli, dobije se $K = C_1^{X_A} \mod q$, čime je dokazano da i Anastasija i Boban mogu izračunati istu vrednost privremenog ključa na osnovu sebi raspoloživih podataka.

Boban formira uređeni par celih brojeva kojima šifruje poruku M. Po definiciji ElGamal algoritma, on će drugi broj formirati po formuli $C2 = KM \mod q$. Anastasija će dobiti uređeni par i po definiciji će poruku dešifrovati formulom $M = (C_2 K^{-1}) \mod q$. Ukoliko u ovu formulu zamenimo formulu po kojoj Bobam formira vrednost C_2, dobija se izraz $M = ((KM \mod q)K^{-1}) \mod q = (KMK^{-1}) \mod q = M \mod q = M$, čime je dokazano da Anastasija može da na osnovu dostupnih podataka dešifruje poruku koju joj je poslao Boban.

5.2 Primer ElGamal algoritma na konkretnim vrednostima

Algoritam opisan u prethodnim poglavljima, primenjen na vrednostima konkretizovanim kroz interakciju dva korisnika izgleda ovako:

- $q = 19$, $\alpha = 10$.
- $X_A = 5$, $Y_A = \alpha^{X_A} \mod q = 10^5 \mod 19 = 3$.
- $M = 17$, $k = 6$.
- $K = Y_A^k \mod q = 3^6 \mod 19 = 7$.
- $C1 = \alpha^k \mod q = 10^6 \mod 19 = 5$
- $C2 = KM \mod q = 7 \cdot 17 \mod 19 = 5$
- $K = C_1^{X_A} \mod q = 11^5 \mod 19$

... jos malo lol

6 Primene na bezbednosnim protokolima

Diffie-Hellman algoritam ima široku primenu na različitim internet protokolima, od kojih su najvažniji SSL, SSH i IPSec, koji će biti detaljnije opisani u nastavku.

6.1 SSL

SSL (skraćeno od eng. Secure Socket Layer) je protokol koji omogućava bezbednu onlajn komunikaciju između veb servera i pretraživača, koristeći upravo Diffie-Hellman algoritam [3]. Sastoji se iz dva sloja: donjeg i gornjeg. Donji sloj omogućava privatnu i sigurnu komunikaciju koristeći TCP (skraćeno od eng. Transmission Control Protocol), koji se zasniva samo na simetričnoj kriptografiji. Upravo u gornjem sloju, koji se naziva i protokol rukovanja (eng. handshake protocol), koristi se Diffie-Hellman algoritam. On omogućava autentifikaciju servera klijentu, kao i korišćenje javnog ključa za „dogovaranje“ o načinu šifrovanja i razmene ključeva koju će koristiti za komunikaciju [3].

6.2 SSH

SSH (skraćeno od eng. Secure Shell) je protokol koji se koristi za osiguravanje internet veze između dva računara [3]. Na ovaj način, omogućeno je bezbedno prijavljivanje sa jednog računara na neki drugi, udaljeni računar, vršenje komandi na udaljenom računaru, kao i prenos podataka između njih. Šifrovanje se odvija na sličan način kao u SSL protokolu.

6.3 IPSec

IPSec (skraćeno od eng. Internet Protocol Security) je protokol koji obezbeđuje komunikaciju između dve jedinice povezane IP mrežom [3]. Dok prethodna dva protokola štite samo saobraćaj koji se odvija preko njih tj. njihovih aplikacija, IPSec funkcioniše za sve konekcije ostvarene između bilo koja dva računara u okviru IP mreže [3]. Drugim rečima, IPSec podrzumeva transparentnu komunikaciju, u kojoj ni korisnici ni aplikacija ne moraju znati ništa o šifrovanju veze, što ga dovodi u prednost u odnosu na prethodno navedene protokole.

7 Zaključak

Treba nam zaključak

Literatura

[1] Gary C. Kessler. *An Overview of Cryptography*, 2015.

[2] Maryam Ahmed, Baharan Sanjabi, Difo Aldiaz, Amirhossein Rezaei, Habeeb Omotunde. *Diffie-Hellman and Its Application in Security Protocols*, International Journal of Engineering Science and Innovative Technology (IJESIT), 2012.

[3] David A. Carts. *A Review of the Diffie-Hellman Algorithm and its Use in Secure Internet Protocols*, SANS Institute, 2001.

[4] Adrian, David; et al. (October 2015). *Imperfect Forward Secrecy: How Diffie-Hellman Fails in Practice*

[5] Mollin, Richard (2006-09-18). *An Introduction To Cryptography* (2nd ed.). Chapman and Hall/CRC. p. 344

[6] E. Rescorla (June 1999). *Diffie-Hellman Key Agreement Method*

[7] Kevin S. McCurley (1990). *The Discrete Logarithm Problem*

[8] A. Joux, K. Nguyen (2003). *Separating Decision Diffie-Hellman from Computational Diffie-Hellman in Cryptographic Groups*

A Dodatak

Dodatni tekst? pretpostavljam da nećemo koristiti ovo