# Projekt Startcraft

Malthe Peter Højen Jørgensen og Tobias Møller

Matematik A differentialligninger

18vmatA3FRI

14/04-2019

# Indledning

Vi har fået til opgave at undersøge om kampene i strategispillet Starcraft II passer med Lanchesters kvadratiske lov om slag.

# Formål

Formålet med opgaven er at vise hvor vidt at Lanchesters kvadratiske lov kan bruges til at udregne simple kampe i computerspillet Starcraft II

# Teori

## Differentialligninger

Det vigtigste ting som skal være til stede for at det bliver en differentialligning, er at der er en form for differentialkvotient et eller andet sted i ligningen.

Dette er de former af differentialkvotienter som du nok kommer til at se

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

Det behøver dog ikke kun at være en enkelt differentialkvotient, så derfor kan man sige det samme om en dobbelt differentialkvotient.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x)$$

Hver differentialkvotient tilføjer en "orden" til differentialligningen.
(f.eks. y' er en første ordens differentialligning, og y" er en anden ordens differentialligning)

En differentialligning har samtlige løsninger, og er ikke kun tilpasset en enkelt. Dette kan vises via et eksempel

Hvis vi starter med en ligning:
$y = 4\,x^3 + 8\,x^2 =$

denne kan vi differentiere for at få vores differentialligning.

$y' = 12\,x^2 + 16\,x$

hvis vi nu vil have denne ligning tilbage til den originale, ved vi fra integralregning at vi bare skal integrere

$y = \int 12\,x^2 + 16\,x\,\mathrm{d}x = 4\,x^3 + 8\,x^2 + k$

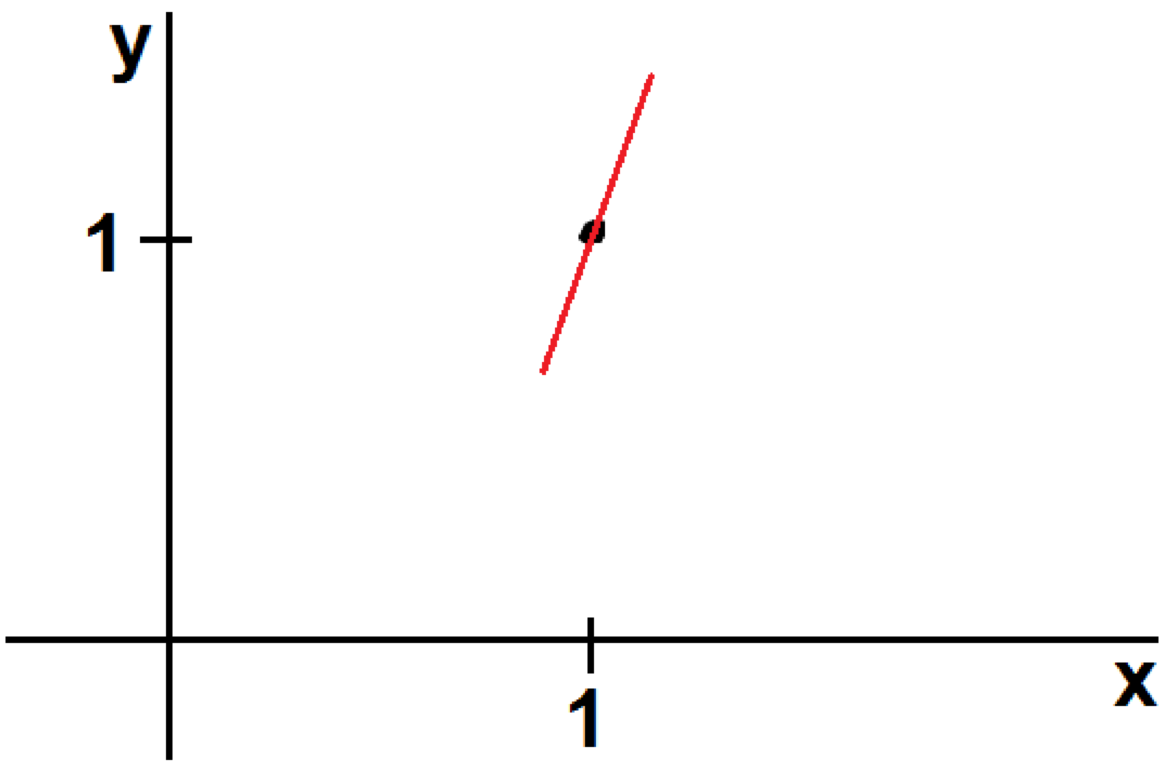
k giver nu et vilkårligt tal, g derfor kan differentialligningen give rigtigt mange forskellige ligninger hvis konstanten ændres.

Derfor er der en regel som siger således:
"**Hvis du løser en differentialligning, skal du bestemme samtlige funktioner, der tilfredstiller differentialligningen**." (Teknisk Matematik side 673)

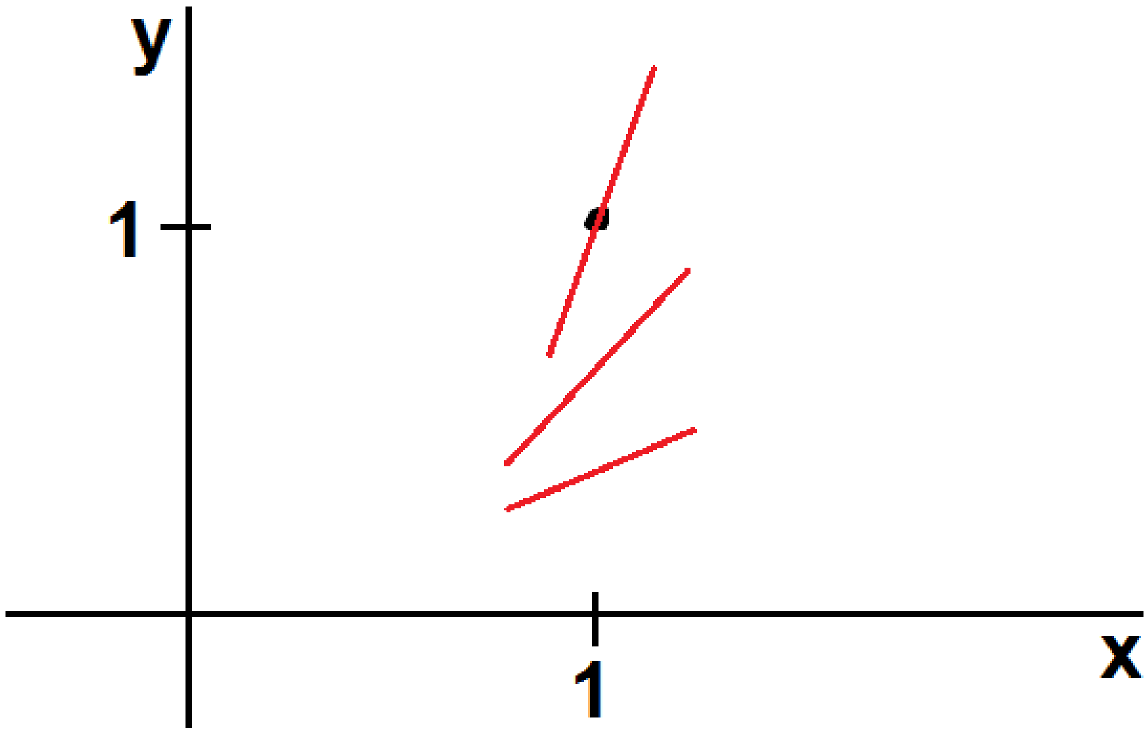
hver løsning på sådan en differentialligning bliver kaldt for en **partikulært integral**, og hvis man samler flere partikulære løsninger får man det **fuldstændige integral**

## Linjeelementer

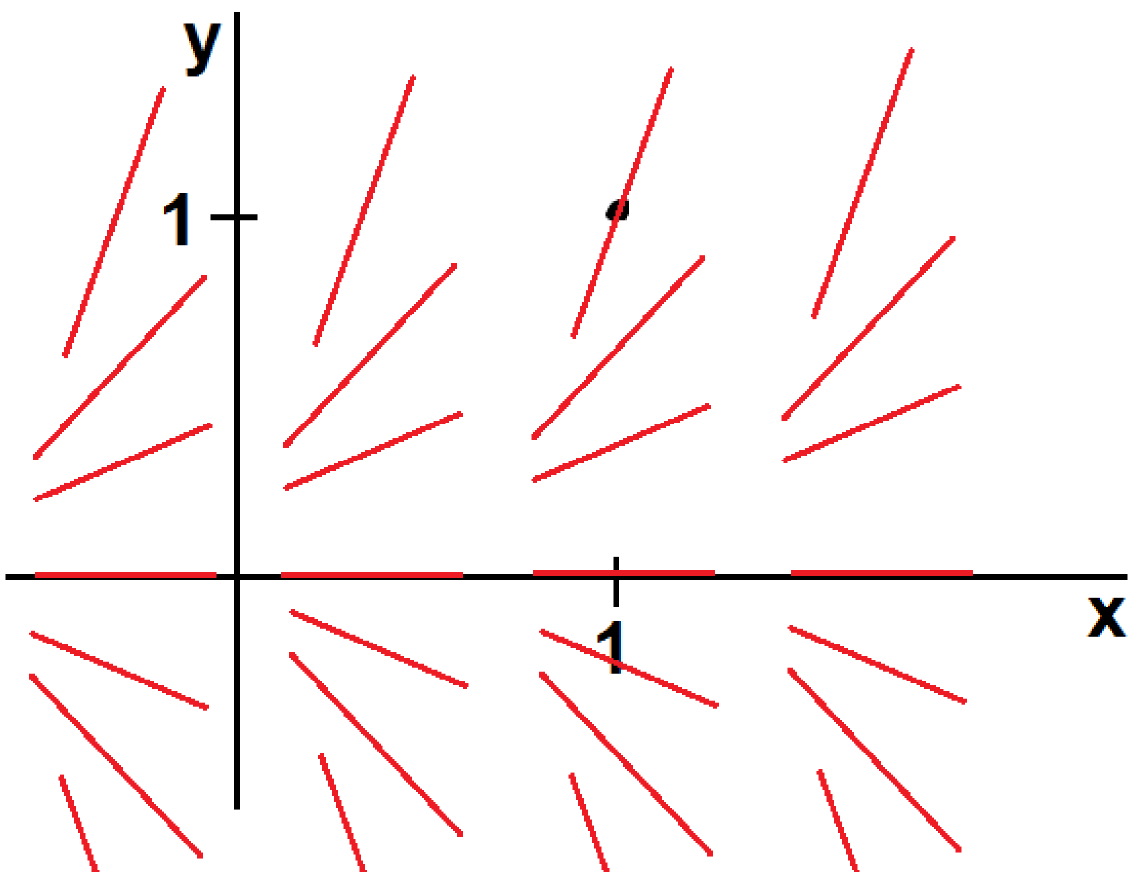
Linjeelementer er en måde til at få en ide om hvordan en differentialligning vil komme til at se ud.
hvis vi har en differentialligning som lyder
$y'(x) = 3\,y$ :
kan vi sætte 1 ind på y's plads og finde en hældning på 3, vi kan så tegne en streg i et koordinatsystem med en vilkårlig x værdi, med en y værdi på 1 og med en heldning på 3, dette vil.
Nedenfor er den streg tegnet i (1;1), vi kan også kalde denne linje for (1,1,3) altså dens kordinator og hældning.




hvis vi tegner flere linje elementer ind som $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $og \cdot \left(1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ får vi




så kan vi blive ved med at tegne dem ind og få en ide for linjen.




Så har vi en oversigt over alle tangenterne til de forskellige partikulære løsninger til differentialligningen

# Seperationsmetoden

Seperationsmetoden lyder således:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(x)$$

for at bevise seperationsmetoden, skal vi udnytte reglen for differentiation af sammensatte funktioner, dette og også kendt som kædereglen.

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Herefter indfører vi to stamfunktioner, nemlig H(x) og G(y). H(x) er stamfunktionen til h(x), og G (y) er stamfunktionen til $\frac{1}{g(x)}$.

Derfor kan vi sige at følgende gælder

$$\frac{dH(x)}{dx} = h(x) \Leftrightarrow H(x) = \int h(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\frac{dG(y)}{dy} = \frac{1}{g(y)} \Leftrightarrow G(y) = \int \frac{1}{g(y)} \, \mathrm{d}y$$

vi kan tage den originale ligning og omskrive den

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(x)$$

vi kan starte med at dividere med g(y) på begge sider, og derefter kan vi erstatte y med f(x)

$$\frac{1}{g(f(x))} \cdot \frac{df(x)}{dx} = h(x)$$

der er så her at reglen om differentiering af en sammensat funktion kommer ind i billedet. Vi gør nu reglen "baglæns" og går et skridt tilbage. Vi kan nu omskrive ligningen til dette:

$$\frac{dG(f(x))}{dx} = \frac{dH(x)}{dx}$$

vi kan nu trække $\frac{dH(x)}{dx}$ fra på begge sider af lighedstegnet

$$\frac{dG(f(x))}{dx} - \frac{dH(x)}{dx} = 0$$

vi kan nu lave fælles differentialkvotient.

$$\frac{dG(f(x)) - H(x)}{dx} = 0$$

herefter kan vi integrere på begge sider af lighedstegnet.

$$G(f(x)) - H(x) = k$$

vi skal nu sætte H(x) på den anden side af lighedstegnet igen, og derfor ligger vi H(x) til på begge sider af lighedstegnet.

$$G(f(x)) = H(x) + k$$

til sidst kan vi omskrive ligningen til de ubestemte integraler, og på denne måde ender vi med de sepererede ligninger

$$\int \frac{1}{g(y)}\, \mathrm{d}y = \int h(x)\, \mathrm{d}x + c$$

## Lanchesters kvadratiske lov

Lanchesters kvadratiske lov er en lov lavet til at udregne udkommet af et slag. Den består af en ligning til hver side af slaget, men de er stort set de samme.

$$\frac{dA}{dt} = -\beta \cdot B(t)$$

$$\frac{dB}{dt} = -\alpha \cdot A(t)$$

uden nogen kontekst virker disse formler meget underlige, men de er faktisk meget simple

$\frac{dA}{dt}$ og $\frac{dB}{dt}$ er jo bare en anden måde at skrive A(t) og B(t) på. A i dette tilfælde er den ene hærs nummer af soldater. På denne måde beskriver differentialligningen Hærens nummer i løbet af tiden t.

$\beta$ *og* $\alpha$ er kampstyrken for en hær. beta er for hær B og alfa er for hær A. Kampstyrken har nogle formler i sig selv som vi tager fat i senere, men den kigger på de forskellige variabler og udregner et tal som er hærens kampstyrke.

ved hjælp af disse beskrivelser kan man nemmere forstå den originale ligning

$$\frac{dA}{dt} = -\beta \cdot B(t)$$

Denne ligning viser hær A's nummer i løbet af tiden, og dette bliver gjort fordi kampstyrken og tallet af hær B ændrer tallet af soldater i hær A i løber af slaget.

I Starcraft II er der fire variabler som kontrollere hvor stærk en soldat er, Hit Points (HP), Damage (D), Weapon Speed (C) og Armor (F).
for at regne kampstyrken ud bruger vi formlerne

$$\alpha = \frac{\left(D_A - F_B\right)}{HP_B \cdot C_A} \quad og \quad \beta = \frac{\left(D_B - F_A\right)}{HP_A \cdot C_B}$$

### *5 regler*
For at Lanchesters lov passer, er der 5 regler som skal overholdes.

Begge hære skal være i rækkevidde af hinanden, så det duer altså ikke hvis en del af hæren står i standby indtil de kan komme frem af.

Beskydningen skal deles over alle fjender hele tiden, og derfor må man altså ikke fokusere på en fjende af gangen.

Alfa og Beta er begge konstante og kan udregnes inden kampen ved hjælp af samtlige variabler som liv og angrebshastighed.

De enheder som er i kampen er der fra starten, og der kommer ikke flere enheder i løbet af kampen, altså der må ikke sendes forstærkninger.

Den tabende side kæmpe til og med den sidste mand, det vil altså sige at der ikke er nogen der stikker af.

### *Vinderen af en kamp*
Vi kan opstille en formel som kan vise os hvem der vinder alt efter hærenes styrke og størrelse
Vi starter med at dividere de to formler fra hinanden

$$\frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{dB}{dt}} = \frac{-\beta \cdot B}{-\alpha \cdot A}:$$

Vi reducere

$$\frac{dA}{dB} = \frac{\beta \cdot B}{\alpha \cdot A}:$$

Vi seperer så variabler som har noget med hinanden at gøre, så alle a'erne på den ene side og alle b'erne på den anden

$$\alpha \cdot A \cdot dA = \beta \cdot B \cdot dB:$$

Vi integrerer

$$\int \alpha \cdot A \, \mathrm{d}A = \int \beta \cdot B \, \mathrm{d}B:$$

$$\alpha \cdot \int A \, \mathrm{d}A = \beta \cdot \int B \, \mathrm{d}B:$$

$$\alpha \cdot \frac{1}{2} A^2 + k_1 = \beta \cdot \frac{1}{2} B^2 + k_2:$$

så flytter vi k'erne over på denm samme side, fordi de er konstante andre vi dem til bare at være k.
så k bliver

$$k = k_2 - k_1$$

$$\alpha \cdot A^2 = \beta \cdot B^2 + k:$$

Så isolere vi k og får formlen.

$\alpha \cdot A^2 - \beta \cdot B^2 = k$ :
Denne formel viser hvem der vinder at efter hvad værdien $k$ er. hvis $k$ er større end $0$ vinder hær A og hvis den er under $0$ vinder hær B

### *Soldater tilbage*

Der er også en formel for at finde antallet af soldater der er tilbage fra den vindende hær efter en kamp.

$$A = \sqrt{A_0^2 - \frac{\beta}{\alpha} \cdot B_0^2} \; og \; B = \sqrt{B_0^2 - \frac{\alpha}{\beta} \cdot A_0^2} :$$

$A_0$ *og* $B_0$ er antallet af soldater i starten af kampen, mens at $A$ *og* $B$ er antallet af soldater i slutningen af kampen.

For at finde frem til denne formel starter vi med at opsætte en ligning
$\alpha \cdot A^2 - \beta \cdot B^2 = k = \alpha \cdot A_0^2 - \beta \cdot B_0^2$ :

Vi ved at i slutningen af en kamp ville en hær blive udrydet, så enten $A$ eller $B$ ville være $0$, så vi sætter nul ind på B's plads.
$\alpha \cdot A^2 = \alpha \cdot A_0^2 - \beta \cdot B_0^2$ :
vi rykker $\alpha$ over på den anden side af lighedstegnet

$$A^2 = \alpha \cdot A_0^2 - \frac{\beta}{\alpha} \cdot B_0^2 :$$

og så tager vi kvadratroden på begge sider

$$A = \sqrt{\alpha \cdot A_0^2 - \frac{\beta}{\alpha} \cdot B_0^2} :$$

så har vi den ene af de to formler, for at få den anden sætter vi bare $A$ til at være $0$ i stedet.

# Løsningsmodeller

## 1. Løs ligningen via dsolve() i maple

vi får maple til at løse ligningerne for både den fulstændig løsning og partikulære løsning.
Til den partikulære skal vi bruge nogen start betingelser som vi får fra vores scenarier.

## 2. Forudsig hvem der vinder hvert scenarie via seperation af de variable

vi regner kampstyrken på begge med formlerne

$$\alpha = \frac{(D_A - F_B)}{HP_B \cdot C_A} \; og \; \beta = \frac{(D_B - F_A)}{HP_A \cdot C_B} :$$

Vi bruger så formlen for at finde hvem der vinder

$\alpha \cdot A^2 - \beta \cdot B^2 = k$ :
når vi ved hvem der vinder, finder vi ud af hvormange soldater de har tilbage.

$A = \sqrt{A_0^{\,2} - \frac{\beta}{\alpha} \cdot B_0^{\,2}}$ og $B = \sqrt{B_0^{\,2} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot A_0^{\,2}}$ :

### 3. Kampene i StarCraft II

For at observere disse kampe, gik vi ind i banen "unit test map" som lader dig spawne så mange enheder som du har brug for. Vi valgte derefter hver en race og talte ned for at kampen startede på samme tid.

Efter hver kamp kunne vi tælle de resterende tropper, og de blevet skrevet ned.

### 4. Sammenlign resultaterne fra spillet med de udregnede resultater fra opgave 2.

til denne opgave havde vi faktisk alt data der skulle bruges, og derfor var den eneste udregning en simpel gennemsnitsberegning per senarie

## Opgaveløsning

### 1. løs ligningen via dsolve() på maple

$with(DETools)$ :

$ODE := A'(t) = -\beta \cdot B(t), B'(t) = -\alpha \cdot A(t)$

$$ODE := \mathrm{D}(A)(t) = -\beta\, B(t), \mathrm{D}(B)(t) = -\alpha\, A(t) \quad \textbf{(5.1.1)}$$

Fuldstendig løsning

$dsolve([ODE])$

$$\left\{A(t) = \_C1\, \mathrm{e}^{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}\,t} + \_C2\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}\,t}, B(t) = -\frac{\sqrt{\alpha}\left(\_C1\, \mathrm{e}^{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}\,t} - \_C2\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}\,t}\right)}{\sqrt{\beta}}\right\} \quad \textbf{(5.1.2)}$$

Start betingelserne er taget fra scenarie 1, hvor vi havde 10 Marines og 5 Hydralisker.

$IC := A(0) = 10 , B(0) = 5$ :

Partikulær løsning

$dsolve([ODE, IC])$

$$\left\{A(t) = \frac{5\left(2\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}\,t}}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{5\left(2\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}\,t}}{2\sqrt{\alpha}}, B(t) = \right. \quad \textbf{(5.1.3)}$$

$$-\frac{\sqrt{\alpha}\left(\frac{5\left(2\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)e^{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\,t}}{2\sqrt{\alpha}}-\frac{5\left(2\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)e^{-\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\,t}}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{\sqrt{\beta}}\Bigg\}$$

# 2. Forudsig hvem der vinder hvert scenarie via seperation af de variable

først regner vi kampstyrken af de forskellige hære, fra spillet har vi

**Marines:**

$HP_A := 45 :$

$D_A := 6 :$

$C_A := 0.86 :$

$F_A := 0 :$

**Hydralisker:**

$HP_B := 80 :$

$D_B := 12 :$

$C_B := 0.83 :$

$F_B := 0 :$

Kampstyrken ville derfor være

**Marines:**

$$\alpha := \frac{(D_A - F_B)}{HP_B \cdot C_A}$$

$$\alpha := 0.08720930233 \tag{5.2.1}$$

**Hydralisker:**

$$\beta := \frac{(D_B - F_A)}{HP_A \cdot C_B}$$

$$\beta := 0.3212851406 \tag{5.2.2}$$

Nu kan vi finde ud af hvem der vinder i de forskellige scenarier, og hvor mange soldater den vindende hær har tilbage

**Scenarie 1: 10 Marines mod 5 Hydralisker**

$A_0 := 10 :$

$B_0 := 5 :$

$k = \alpha \cdot A_0^{\,2} - \beta \cdot B_0^{\,2}$

$$k = 0.688801718 \tag{5.2.3}$$

K > 0 = Marines Vinder

$$A=\sqrt{A_0^2-\frac{\beta}{\alpha}\cdot B_0^2}$$

$$A = 2.810384262 \tag{5.2.4}$$

Marines vinder med 2-3 soldater tilbage

**Scenarie 2: 25 Marines mod 10 Hydralisker**

$A_0 := 25 :$

$B_0 := 10 :$

$k = \alpha \cdot A_0^2 - \beta \cdot B_0^2$

$$k = 22.37729990 \tag{5.2.5}$$

K > 0 = Marines Vinder

$$A=\sqrt{A_0^2-\frac{\beta}{\alpha}\cdot B_0^2}$$

$$A = 16.01852174 \tag{5.2.6}$$

Marines vinder med 16 soldater tilbage

**Scenarie 3: 24 Marines mod 20 Hydralisker**

$A_0 := 24 :$

$B_0 := 20 :$

$k = \alpha \cdot A_0^2 - \beta \cdot B_0^2$

$$k = -78.28149806 \tag{5.2.7}$$

K < 0 = Hydralisker Vinder

$$B=\sqrt{B_0^2-\frac{\alpha}{\beta}\cdot A_0^2}$$

$$B = 15.60932935 \tag{5.2.8}$$

Hydralisker vinder med 15-16 soldater tilbage

**Scenarie 4: 60 Marines mod 50 Hydralisker**

$A_0 := 60 :$

$B_0 := 50 :$

$k = \alpha \cdot A_0^2 - \beta \cdot B_0^2$

$$k = -489.2593631 \tag{5.2.9}$$

K < 0 = Hydralisker Vinder

$$B=\sqrt{B_0^2-\frac{\alpha}{\beta}\cdot A_0^2}$$

$$B = 39.02332337 \tag{5.2.10}$$

Hydralisker vinder med 39 soldater tilbage

**Scenarie 5: 102 Marines mod 70 Hydralisker**

$A_0 := 102 :$

$B_0 := 70 :$

$k=\alpha \cdot A_0^{\ 2}-\beta \cdot B_0^{\ 2}$

$$k=-666.9716076 \quad (5.2.11)$$

K < 0 = Hydralisker Vinder

$B=\sqrt{B_0^{\ 2}-\frac{\alpha}{\beta} \cdot A_0^{\ 2}}$

$$B=45.56258474 \quad (5.2.12)$$

Hydralisker vinder med 45-46 soldater tilbage

**Scenarie 6: 18 Marines mod 10 Hydralisker**

$A_0 := 18 :$

$B_0 := 10 :$

$k=\alpha \cdot A_0^{\ 2}-\beta \cdot B_0^{\ 2}$

$$k=-3.87270011 \quad (5.2.13)$$

K < 0 = Hydralisker Vinder

$B=\sqrt{B_0^{\ 2}-\frac{\alpha}{\beta} \cdot A_0^{\ 2}}$

$$B=3.471855278 \quad (5.2.14)$$

Hydralisker vinder med 3-4 soldater tilbage

## 3. Resultater af kampene i StarCraft II

vi lavede i alt 6 senarier for at få et større datasæt. hvert senarie bliv udført 3 gange, bortset fra senarie 4 som kun havde 2 kampe.

| Senarie | Start Marine | Start Hydraliske | slut Marine | Slut Hydralisk |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 5 | 3 | 0 |
| 1 | 10 | 5 | 2 | 0 |
| 1 | 10 | 5 | 3 | 0 |
| 2 | 25 | 10 | 17 | 0 |
| 2 | 25 | 10 | 15 | 0 |
| 2 | 25 | 10 | 14 | 0 |
| 3 | 24 | 20 | 0 | 10 |
| 3 | 24 | 20 | 0 | 11 |
| 3 | 24 | 20 | 0 | 10 |
| 4 | 60 | 50 | 0 | 31 |
| 4 | 60 | 50 | 0 | 29 |
| 5 | 102 | 70 | 0 | 24 |
| 5 | 102 | 70 | 0 | 29 |
| 5 | 102 | 70 | 0 | 23 |
| 6 | 18 | 10 | 0 | 2 |
| 6 | 18 | 10 | 0 | 7 |
| 6 | 18 | 10 | 0 | 6 |
| 1 | 10 | 5 | 2 | 0 |
| 1 | 10 | 5 | 3 | 0 |
| 1 | 10 | 5 | 4 | 0 |
| 3 | 24 | 20 | 0 | 14 |
| 3 | 24 | 20 | 0 | 14 |
| 3 | 24 | 20 | 0 | 13 |

## 4. Sammenlign resultaterne fra spillet med de udregnede resultater fra opgave 2.

| | Slutgennemsnit (per senarie) | | A slut | B slut |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,833333333 | | 2,810384 | |
| 2 | 15,33333333 | | 16,01852 | |
| 3 | 12 | | | 15,60933 |
| 4 | 30 | | | 39,02332 |
| 5 | 25,33333333 | | | 45,56258 |
| 6 | 5 | | | 3,471855 |

Her på billedet kan man se vores slutgennemsnitter som vi har fået ud fra gennemsnittet af overlevende hvert senarie.

Som man kan se, passer vores data rimeligt med det man får ved at udregne det. Der er dog 2 som ikke passer helt ind, og det er dem som er markeret med gult.

# Diskussion og Konklusion

Denne opgave var interessant fordi at svaret hverken er ja eller nej.

Nogle af vores kampe passede ind i Lanchesters lov mens andre ikke gjorde, og det fik os til at kigge resultaterne igennem en gang mere.

De gule scenarier fra opgave 4 var vores 2 største slag, og derfor er vores teori at formelen ikke passer alt for godt i større slag.

Dette kan dog også være på grund af at kampene blev så store at alle tropper ikke kunne kæmpe på samme tid, og her bryder kampene jo en af reglerne for Lanchesters lov, nemligt at "Begge hære skal være i rækkevidde af hinanden, så det duer altså ikke hvis en del af hæren står i standby indtil de kan komme frem af."

Til mindre kampe passer lignignen rimeligt godt, men jo større kampene er, jo mere ujævne bliver kampene.

Derfor kunne man sige at Starcraft II kan opfylde ligningen, men den gør det mindre og mindre jo større kampene bliver