

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Чисельні методи в інформатиці

Лабораторна робота №5

“Сплайн інтерполяція”

Варіант №7

Виконала студентка групи ІПС-31

Сенечко Дана Володимирівна

Київ - 2025

Постановка задачі

Виконати наближення функції, побудувати графіки функції та наближення. У випадку квадратичного сплайну також порівняти результат для випадку природного сплайну (похідна рівна 0 на краю) та сплайну з урахуванням справжнього значення похідної на краю.

1. Побудувати квадратичний сплайн для функції $2 \cdot x^8 + 3 \cdot x^7 + 5 \cdot x^5 - 2$ на проміжку $[1..5]$ за точками $x = 1, 3, 5$. Спробувати доповнити систему рівнянь значенням справжньої похідної функції на краю замість нуля.
2. Побудувати кусково-лінійну та кусково-квадратичну інтерполяцію для цієї ж функції за тими ж точками.

Теоретичні відомості

Кусково-лінійна інтерполяція

Якщо побудувати поліном першого степеня $L_1^i(x)$ на кожному проміжку $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1; n}$, то отримаємо кусково-лінійну інтерполяцію на $[x_0; x_n]$.

Розглянемо поліном першого степеня за вузлами x_{i-1} та x_i :

$$L_1^i(x) = \frac{f(x_{i-1})(x_i - x) + f(x_i)(x - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Оцінимо похибку інтерполяції, врахуємо, що:

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1; n}, \quad M_2^i = \max_{x \in [x_{i-1}; x_i]} |f''(x)|;$$

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad \quad \quad}^{h_i} \\ \begin{array}{ccccccc} & | & & | & & | & \\ x_{i-1} & & & x & & & x_i \\ & \underbrace{\quad \quad \quad}_{th_i} & & & & & \end{array} \end{array} \quad t \in [0; 1]$$

$$x - x_{i-1} = th_i;$$

$$x - x_i = x - (x_{i-1} + h_i) = x - x_{i-1} - h_i = th_i - h_i = h_i(t - 1);$$

$$\begin{aligned} |f(x) - L_1^i(x)| &\leq \frac{M_2^i}{2!} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| \leq \frac{M_2^i}{2} |th_i h_i (t - 1)| = \\ &= \frac{M_2^i}{2} |h_i^2 t(t - 1)| = \frac{M_2^i}{2} |h_i^2 g(t)|. \end{aligned}$$

Для оцінки зверху знайдемо екстремуми $g(t) = t(t - 1)$:

$$g'(t) = 2t - 1 = 0; \quad t = \frac{1}{2}; \quad g(0) = 0; \quad g(1) = 0; \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Врахуємо, що $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$, $M_2 = \max_{x \in [x_0; x_n]} |f''(x)|$, тоді похибка кусково лінійної інтерполяції:

$$|f(x) - L_1^i(x)| \leq \frac{M_2^i}{2!} |h_i^2 g(t)| \leq \frac{M_2}{2!} |h^2(-\frac{1}{4})| \leq \frac{M_2 h^2}{8}.$$

Отже, для оцінки похибки при наближенні функції за допомогою кусково-лінійної інтерполяції використовують формулу:

$$|f(x) - L_1(x)| \leq \frac{M_2 h^2}{8}.$$

Введемо систему функцій:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{i-1}; \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i; \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}; \\ 0, & x \geq x_{i+1}; \end{cases} \quad i = \overline{1, n-1}.$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0, & x \geq x_1, \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0, & x \leq x_{n-1} \end{cases}$$

Тоді для кусково-лінійної інтерполяції зручно використовувати формулу:

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \varphi_i(x).$$

Теорема. Для $f(x) \in C^2[a, b]$, що задана своїми значеннями $f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ має місце оцінка:

$$\|f^{(k)}(x) - \Phi_1^{(k)}(x)\|_{C[a,b]} \leq 2M_2 |h|^{2-k}, \quad k = 0, 1,$$

де $|h| = \max_{i=\overline{1, n}} h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Кусково-квадратична інтерполяція

Покладемо сталий крок $h = x_i - x_{i-1}$, $\forall i: i = \overline{1, n}$. Якщо побудувати поліном 2-го степеня за вузлами x_{i-1} , x_i , x_{i+1} , то отримаємо кусково-квадратичну інтерполяцію на $[x_0; x_n]$:

$$L_2^i(x) = f(x_{i-1}) \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{2h^2} - f(x_i) \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{h^2} + f(x_{i+1}) \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2h^2}.$$

Оцінимо похибку інтерполяції, врахуємо, що:

$$\begin{array}{c} \text{---} h \text{---} \quad \quad \quad h \text{---} \\ | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\ x_{i-1} \quad \quad \quad x_i \quad \quad \quad th \quad \quad \quad x \quad \quad \quad x_{i+1} \end{array} \quad t \in [0; 1]$$

$$x - x_i = th; \quad x - x_{i-1} = x - (x_i - h) = th + h = h(t + 1);$$

$$x - x_{i+1} = x - (x_i + h) = th - h = h(t - 1);$$

$$M_3^i = \max_{x \in [x_{i-1}; x_{i+1}]} |f'''(x)|; \quad M_3 = \max_{x \in [x_0; x_n]} |f'''(x)|;$$

$$\begin{aligned} |f(x) - L_2^i(x)| &\leq \frac{M_3^i}{3!} |(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})| \leq \\ &\leq \frac{M_3^i}{6} |h(t + 1)thh(t - 1)| = \frac{M_3^i}{6} |h^3(t^3 - t)| = \frac{M_3^i}{6} |h^3g(t)|. \end{aligned}$$

Для оцінки зверху знайдемо екстремуми функції $g(t)$:

$$g(t) = t^3 - t; \quad g'(t) = 3t^2 - 1 = 0; \quad t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin [0; 1]; \quad t^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad g(0) = 0;$$

$$g(1) = 0; \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}};$$

Похибка кусково-квадратичної інтерполяції:

$$\begin{aligned} |f(x) - L_2^i(x)| &\leq \frac{M_3^i}{6} |h^3g(t)| \leq \frac{M_3}{6} |h^3\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)| \leq \frac{M_3}{9\sqrt{3}} h^3; \\ |f(x) - L_2(x)| &\leq \frac{M_3}{9\sqrt{3}} h^3. \end{aligned}$$

Сплайн-інтерполяція (квадратичний сплайн)

Нехай на деякому проміжку $[a, b]$ задається сітка вузлів: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. функція $f(x)$ задана своїми значеннями $f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0, n}$. Функція $s(x)$ називається сплайном степеня m дефекту k якщо:

- 1) $s(x)$ – поліном степеня m для кожного $x \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$;
- 2) $s(x) \in C_{[a; b]}^{m-k}$;
- 3) $s(x_i) = f(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}$.

Для квадратичного сплайна маємо степінь $m = 2$. Щоб забезпечити гладкість функції, вимагається неперервність самої функції та її першої похідної, тобто сплайн належить класу $C^1[a, b]$. На кожному інтервалі $[x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$ сплайн шукається у вигляді полінома другого степеня:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, c_i ($3n$ невідомих)

формується СЛАР на основі наступних умов:

- 1) Інтерполяція у лівих вузлах: сплайн має дорівнювати значенню функції на початку кожного інтервалу ($x = x_{i-1}$):

$$S_i(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}, i = \overline{1, n}.$$

Звідси одразу знаходимо, що $a_i = y_{i-1}$.

- 2) Інтерполяція у правих вузлах (неперервність функції): значення сплайна в кінці інтервалу має дорівнювати значенню функції в наступному вузлі. Нехай $h_i = x_i - x_{i-1}$:

$$S_i(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = y_i, i = \overline{1, n}.$$

- 3) Гладкість (неперервність першої похідної): похідна сплайна на кінці поточного інтервалу має дорівнювати похідній на початку наступного інтервалу:

$$S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}).$$

У внутрішніх вузлах $x_i, i = \overline{1, n-1}$:

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i) \Rightarrow b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}.$$

- 4) Гранична умова: оскільки рівнянь $(2n + (n - 1) = 3n - 1)$ на одиницю менша за кількість невідомих ($3n$), необхідно задати одну додаткову умову. У даній роботі задається значення першої похідної на лівому краї відрізка (x_0): $S'_1(x_0) = b_1 = 0$ – для “природного” сплайна в даному варіанті та $S'_1(x_0) = b_1 = f'(x_0)$ – для точного сплайна.

Отримана СЛАР розв'язується методом Гауса або іншим чисельним методом для отримання коефіцієнтів сплайна.

Хід роботи

Мова програмування – Python. Використані бібліотеки: numpy, matplotlib.

Функція 8-го степеня $2x^8 + 3x^7 + 5x^5 - 2$ досліджується на відрізку $[1; 5]$. Перша похідна функції: $f'(x) = 16x^7 + 21x^6 + 25x^4$. Отримані вузли інтерполяції за значення функції:

$$x_0 = 1, y_0 = 8;$$

$$x_1 = 3, y_1 = 20\,896;$$

$$x_2 = 5, y_2 = 1\,031\,248;$$

```
Input data:  
Function: 2*x^8 + 3*x^7 + 5*x^5 - 2  
Nodes x: [1. 3. 5.]  
Values y: [8.000000e+00 2.089600e+04 1.031248e+06]
```

Функція дуже швидко зростає.

Завдання №1.

Побудова квадратичних сплайнів.

Було побудовано два варіанти сплайнів, що складаються з двох парабол (для інтервалів $[1; 3]$ та $[3; 5]$). Системи лінійних рівнянь для коефіцієнтів розв'язувались чисельно.

- 1) Сплайн з нульовою похідною на початку (“природний”). Гранична умова: $S'(1) = 0$. Отримані рівняння:

$$\text{На } [1; 3]: S_1(x) = 8 + 5222(x - 1)^2;$$

$$\text{На } [3; 5]: S_2(x) = 20\,896 + 20\,888(x - 3) + 242\,144(x - 3)^2.$$

```

Building spline (Natural: y'(1)=0)
Calculate steps h_i
h[1] = 2.0
h[2] = 2.0

Form system of equations for coefficients a, b, c
Formed matrix of size 6x6
Boundary condition: y'(1) = 0

Found coefficients
i | Interval | ai | bi | ci
-----
1 | [1.0, 3.0] | 8.00 | 0.00 | 5222.00
2 | [3.0, 5.0] | 20896.00 | 20888.00 | 242144.00

Spline polynomials
S_1(x) = 8.00 + 0.00(x - 1.0) + 5222.00(x - 1.0)^2
S_2(x) = 20896.00 + 20888.00(x - 3.0) + 242144.00(x - 3.0)^2

```

2) Сплайн з точною похідною. Гранична умова: $S'(1) = f'(1) = 62$.

Отримані рівняння:

$$\text{На } [1; 3]: S_1(x) = 8 + 62(x - 1) + 5191(x - 1)^2;$$

$$\text{На } [3; 5]: S_2(x) = 20\,896 + 20\,826(x - 3) + 242\,175(x - 3)^2.$$

```

Building spline (Exact: y'(1)=62.0)
Calculate steps h_i
h[1] = 2.0
h[2] = 2.0

Form system of equations for coefficients a, b, c
Formed matrix of size 6x6
Boundary condition: y'(1) = 62.0

Found coefficients
i | Interval | ai | bi | ci
-----
1 | [1.0, 3.0] | 8.00 | 62.00 | 5191.00
2 | [3.0, 5.0] | 20896.00 | 20826.00 | 242175.00

Spline polynomials
S_1(x) = 8.00 + 62.00(x - 1.0) + 5191.00(x - 1.0)^2
S_2(x) = 20896.00 + 20826.00(x - 3.0) + 242175.00(x - 3.0)^2

```

Отримані результати свідчать про те, що кривизна функції різко зростає. Вплив граничної умови є незначним на фоні великих значень функції, тому коефіцієнти обох сплайнів не відрізняються не сильно.

Завдання №2.

Кусково-лінійна інтерполяція

Функція наближається хордами.

Інтервал [1; 3]: $L_1(x) = 10\,444x - 10\,436$;

Інтервал [3; 5]: $L_2(x) = 505\,176x - 1\,494\,632$

```
Piecewise linear interpolation

Interval [1.0, 3.0]
k = (20896.00 - 8.00) / (3.0 - 1.0) = 10444.0000
b = 8.00 - 10444.0000 * 1.0 = -10436.0000
Result: L_1(x) = 10444.0000 * x + (-10436.0000)

Interval [3.0, 5.0]
k = (1031248.00 - 20896.00) / (5.0 - 3.0) = 505176.0000
b = 20896.00 - 505176.0000 * 3.0 = -1494632.0000
Result: L_2(x) = 505176.0000 * x + (-1494632.0000)
```

Такі стрибки кутового коефіцієнта k підтверджують, що функція зростає нерівномірно, і лінійна інтерполяція даватиме значну похибку всередині інтервалів через сильну опуклість функції.

Кусково-квадратична інтерполяція

Оскільки задано лише 3 вузли, кусково-квадратична інтерполяція вироджується в один глобальний інтерполяційний поліном Лагранжа 2-го степеня на всьому відрізку [1; 5]. Рівняння параболи:

$$P_2(x) = 123\,683x^2 - 484\,288x + 360\,613.$$

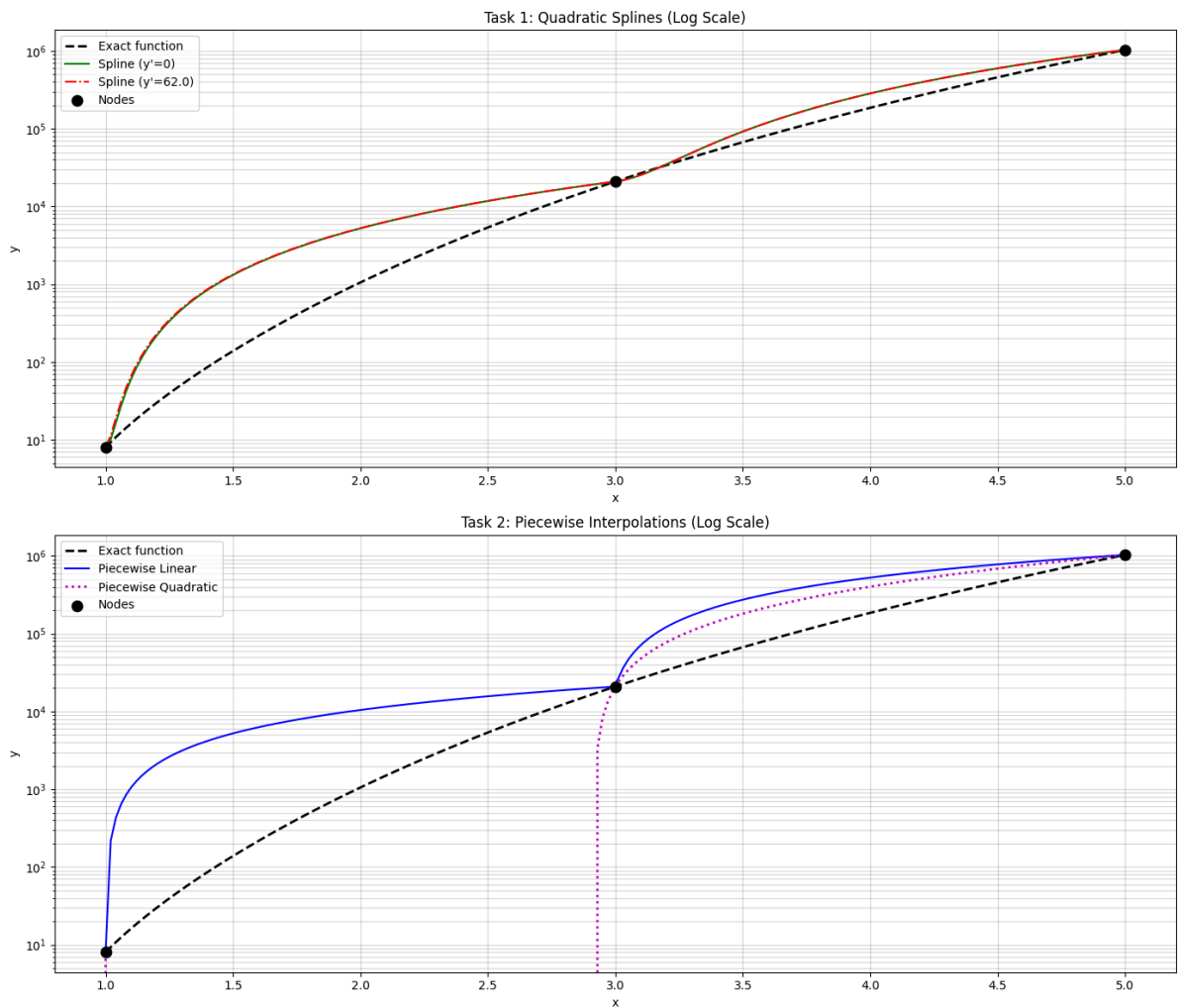
```
Piecewise quadratic interpolation (Lagrange)

Nodes: [1. 3. 5.]
Building a single Lagrange polynomial for the interval [1, 5] (3 points)

Coefficients of polynomial P(x) = ax^2 + bx + c:
a (coefficient of x^2) = 123683.0000
b (coefficient of x)   = -484288.0000
c (constant term)     = 360613.0000

Result: P_2(x) = 123683.0000x^2 + -484288.0000x + 360613.0000
```

Парабола не здатна якісно наблизити поліном 8-го степеня на широкому інтервалі. Вона не встигає за зростанням функції, що призводить до значних відхилень між вузлами.



Графічна інтерпретація результатів вимагала використання логарифмічної шкали по Oy , оскільки на лінійній шкалі графіки зливалися б у вертикальні лінії.