Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Чисельні методи в інформатиці

Лабораторна робота №1

“Розв’язок нелінійного рівняння”

Варіант №7

Виконала студентка групи ІПС-31

Сенечко Дана Володимирівна

Київ - 2025

Постановка задачі

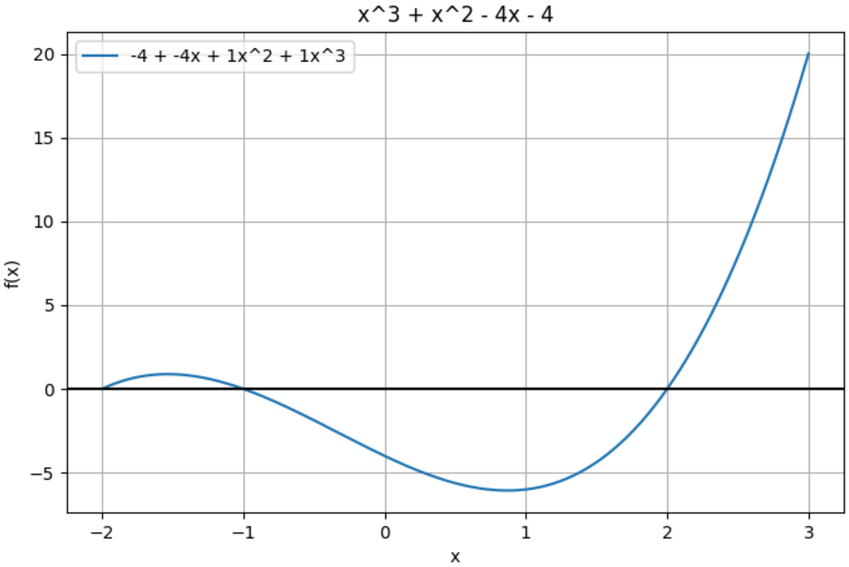
Знайти розв'язок рівняння вказаним методом з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$. Дати можливість користувачу ввести іншу точність. Номер варіанту – 7.

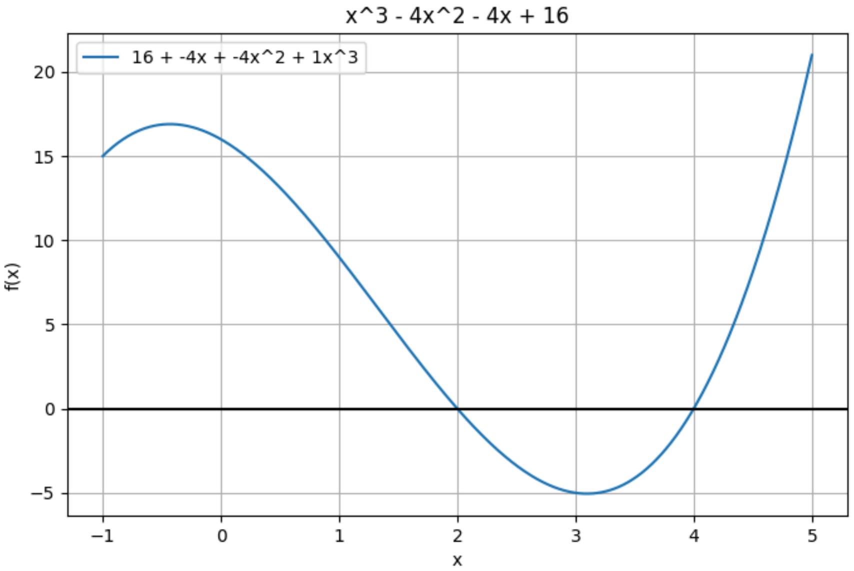
Знайти розв'язок $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ методом Ньютона.

Знайти розв'язок $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$ методом простої ітерації.

Програма має виконувати потрібну кількість ітерацій за вказаним методом, перед цим розрахувавши їх апріорно необхідну кількість, в програмі також можна додати перевірку умов теореми або допоміжні розрахунки для звіту.

Графіки рівнянь:





Теоретичні відомості

Метод Ньютона (дотичних).

Ітераційна формула: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Достатні умови збіжності: $f(a)f(b) < 0$, $f''(x)$ – знакостала на проміжку, $f'(x) \neq 0$. Якщо $f(x_0)f''(x_0) > 0$, то вибір початкового наближення правильний.

Метод простої ітерації.

$x = \varphi(x) = x + \Psi(x)f(x), x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Умова збіжності: $max|\varphi'(x)| \leq q < 1$ на інтервалі.

Обґрунтування вибору проміжку:

Якщо $f(a)f(b) < 0$ (значення на кінцях різних знаків), то за ознакою наявності кореня на відрізку існує хоча б один корінь на проміжку $[a; b]$. Вибрані проміжки задовольняють цю умову.

Апріорна кількість ітерацій.

Використовується метод ділення навпіл (дихотомія): $n \geq [log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}]$.

При $[1; 3]$ та $\varepsilon = 0.001$: $n > log_2 \frac{2}{0.001} = log_2(2000) \approx 10.97 \Rightarrow n = 11$.

При $[1; 4]$ та тій самій точності: $n > log_2 \frac{3}{0.001} \approx 11.55 \Rightarrow n = 12$.

Пам'ятаємо, що апріорна оцінка – не апостеріорна, тобто реальна кількість кроків для обох алгоритмів буде меншою, адже дані методи збігаються швидше.

Хід роботи

Мова програмування – Python; використані бібліотеки: numpy (робота з масивами, векторизовані обчислення многочлена, прості перетворення), math (для розрахунку апріорної кількості ітерацій), matplotlib (для побудови графіків рівнянь).

Отримані таблиці результатів ітерацій:

```
dunnaya@MacBook-Air-Dana lab1 % python3 lab1v7.py

 Newton Method:

Enter interval (1, 3) (format a,b) or press enter:
Enter desired accuracy 0.001 or press enter:

Solving -4 + -4x + 1x^2 + 1x^3 using Newton with accuracy 0.001
Interval: (1, 3)
Initial guess: 2.000
Step    Approximation   Function Value
0       2.000           0.000
Solution found: 2.000 with accuracy 0.001
```

Метод Ньютона. Початкове наближення $x_0 = 2$. Вже на першій ітерації отримуємо точний корінь $x = 2$, бо $f(2) = 0$.

```
 Simple Iteration Method:

Enter interval (1, 4) (format a,b) or press enter:
Enter desired accuracy 0.001 or press enter:

Solving 16 + -4x + -4x^2 + 1x^3 using simple iteration with accuracy 0.001
Interval: (1, 4)
Initial guess: 2.500
Step    Approximation   Function Value
0       2.837           -4.710
1       3.308           -4.803
2       3.789           -2.187
3       4.007           0.090
4       3.998           -0.019
5       4.000           0.004
6       4.000           -0.001
Solution found: 4.000 with accuracy 0.001
```

Метод простої ітерації. Початкове наближення $x_0 = 2.5$. Отримано корінь $x \approx 4$ при $f(x) \approx 0$.

Висновки

Отже, обидва методи дали правильні корені. Метод Ньютона зійшовся миттєво, бо корінь був рівно на початковому наближенні. Метод простої ітерації потребував кілька кроків, але також дав правильний результат. Теоретичні оцінки кількості ітерації співпали з практичними – реальна кількість кроків виявилась значно меншою за очікувану.

Код та згенеровані графіки можна переглянути на моєму GitHub.