Модуль 2. Семенко Д., ТПС-21.

Варіант 1.

№ 1. $\begin{cases} \ddot{x} = a^2 x \\ y_1(t) = p x(t) + \dot{x}(t) \\ y_2(t) = -x(t) + \dot{x}(t) \end{cases}$

Заміна: $\begin{cases} x = x_1 \\ \dot{x} = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = a^2 x = a^2 x_1 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$

Тоді $\begin{cases} y_1(t) = p x_1 + x_2 \\ y_2(t) = -x_1 + x_2 \end{cases}$, $y = C^T(t) \cdot x(t)$

$C^T = \begin{pmatrix} p & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{S}_2 = [C, A^T C]$

$A^T = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^T C = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 \\ p & -1 \end{pmatrix}$

$\tilde{S}_2 = \begin{pmatrix} p & -1 & a^2 & a^2 \\ 1 & 1 & p & -1 \end{pmatrix}$

rank $\tilde{S}_2 = 2$ при $p \neq -1$, $a \neq \pm 1$

Тобто система спостережувана при $p \neq -1$, $a \neq \pm 1$.

№2. $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y(t) = 4x_1 + ax_2 + 3x_3$ $\qquad \underline{n=4}$.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad c^T = (4, a, 3), \quad \tilde{S}_3 = \left(c, A^T c, A^{T2} c\right)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T c = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22+4a \\ -11+3a \\ -4-a \end{pmatrix}$$

$$A^{T2} c = A^T (A^T c) = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22+4a \\ -11+3a \\ -4-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118+42a \\ -73+2a \\ -93-23a \end{pmatrix}$$

$$\det \tilde{S}_3 = \left| \begin{pmatrix} 4 & 22+4a & 118+42a \\ a & -11+3a & -73+2a \\ 3 & -4-a & -93-23a \end{pmatrix} \right| = 50a^3 - 30a^2 + 790a + 2000 =$$

$$= 10 \cdot (5a^3 - 3a^2 + 79a + 200)$$

Система спостережувана при $\det \tilde{S}_3 \neq 0$.

$5a^3 - 3a^2 + 79a + 200 = 0$

Візьмемо значення $a = 0$, тоді $0 - 0 + 0 + 200 \neq 0$. Отже, при $a = 0$ система є спостережуваною. Відновимо вектор фазових коорд.:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left(\tilde{S}_3^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$\left(\tilde{S}_3^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & a & 3 \\ 22+4a & -11+3a & -4-a \\ 118+42a & -73+2a & -93-23a \end{pmatrix}^{-1} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & a & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 22+4a & -11+3a & -4-a & 0 & 1 & 0 \\ 118+42a & -73+2a & -93-23a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \quad a=0 \quad \ldots \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 22 & -11 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 118 & -73 & -93 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} \frac{731}{2000} & -\frac{219}{2000} & \frac{33}{2000} \\ \frac{787}{1000} & -\frac{363}{1000} & \frac{41}{1000} \\ -\frac{77}{500} & \frac{73}{500} & -\frac{11}{500} \end{pmatrix}$$

$$y = 4x_1 + 3x_3$$

$$y' = 4x_1' + 3x_3' = 4(7x_1 - 2x_2 - 4x_3) + 3(-2x_1 - x_2 + 4x_3) = 22x_1 - 11x_2 - 4x_3$$

$$y'' = 22x_1' - 11x_2' - 4x_3' = 22(7x_1 - 2x_2 - 4x_3) - 11(4x_1 + 3x_2 - x_3) -$$

$$-4(-2x_1 - x_2 + 4x_3) = 118x_1 - 73x_2 - 93x_3$$

Формула вiднов. фазових коорд.:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{731}{2000} & -\frac{219}{2000} & \frac{33}{2000} \\ \frac{787}{100} & -\frac{363}{1000} & \frac{41}{1000} \\ -\frac{77}{500} & \frac{73}{500} & -\frac{11}{500} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_3 \\ 22x_1 - 11x_2 - 4x_3 \\ 118x_1 - 73x_2 - 93x_3 \end{pmatrix}.$$

№ 3. $y^{IV} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0$

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + 4\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0$$

$a_0 = 1,\ a_1 = a,\ a_2 = 4,\ a_3 = b,\ a_4 = 1 \qquad n = 4$

$a_5 = a_6 = a_7 = 0$

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 4 & a & 1 \\ 0 & 1 & b & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = a > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 4 \end{vmatrix} = 4a - b > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 4 & a \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = -a^2 + 4ab - b^2 > 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 4 & a & 1 \\ 0 & 1 & b & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 4ab - b^2 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ 4a - b > 0 \\ \underbrace{-a^2 + 4ab - b^2 > 0}_{2} \end{cases}$$

$b^2 - 4ab + a^2 = 0$

$D = 12a^2$

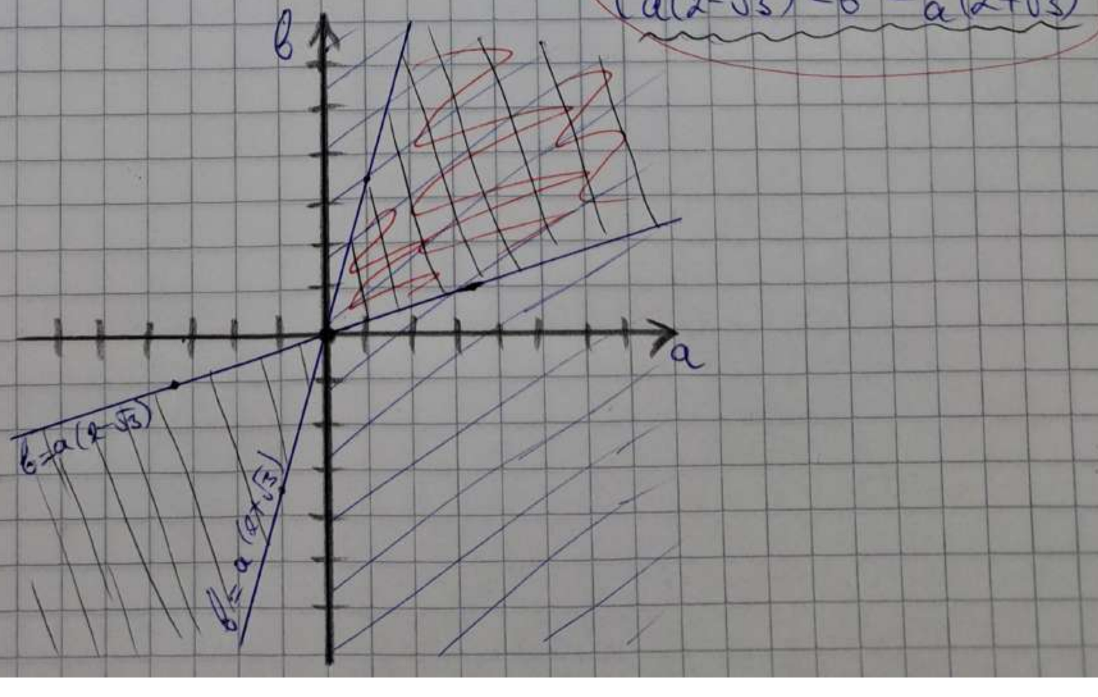
$b_{1,2} = a(2 \pm \sqrt{3})$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a(2-\sqrt{3}) < b < a(2+\sqrt{3}) \end{cases}$$

$a = 0$

$b = a(2+\sqrt{3})$

$b = a(2-\sqrt{3})$



№ 4. $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x \\ \dot{y} = \sqrt{3x+y^2} - 2 \end{cases}$ $\begin{cases} e^y - e^x = 0 \\ \sqrt{3x+y^2} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x = e^y \\ \sqrt{3x+y^2} = 2 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-4 \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$ Маємо дві точки рівноваги: $M_1(1,1)$ та $M_2(-4,-4)$.

$$\boxed{f(x,y)\big|_{(x_0,y_0)} + f'_x\big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + f'_y\big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + O(x_0,y_0)}$$

$M_1(1,1)$: $\begin{cases} \dot{x} = (e^y - e^x)\big|_{(1,1)} - e^x\big|_{(1,1)}(x-1) + e^y\big|_{(1,1)}(y-1) + O(1,1) \\ \dot{y} = (\sqrt{3x+y^2}-2)\big|_{(1,1)} + \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+y^2}}\right)\Big|_{(1,1)}(x-1) + \left(\frac{2y}{2\sqrt{3x+y^2}}\right)\Big|_{(1,1)}(y-1) + O(1,1). \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x} = -e(x-1) + e(y-1) \\ \dot{y} = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$$

Зміщуємо центр координат в т. $M_1(1,1)$:

$\begin{cases} \dot{x} = -e x_1 + e y_1 \\ \dot{y} = \frac{3}{4} x_1 + \frac{1}{2} y_1 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -e & e \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -e-\lambda & e \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left(e - \frac{1}{2}\right)\lambda - \frac{5}{4}e = 0$$

$\lambda_{1,2} = \frac{(-2e+1) \pm \sqrt{4e^2+16e+1}}{4}$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ – точка спокою „сідло".

$M_2(-4,-4)$: $\begin{cases} \dot{x} = (e^y - e^x)\big|_{(-4,-4)} - e^x\big|_{(-4,-4)}(x+4) + e^y\big|_{(-4,-4)}(y+4) + O(-4,-4) \\ \dot{y} = (\sqrt{3x+y^2}+2)\big|_{(-4,-4)} + \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+y^2}}\right)\Big|_{(-4,-4)}(x+4) + \left(\frac{y}{\sqrt{3x+y^2}}\right)\Big|_{(-4,-4)}(y+4) + O(-4,-4). \end{cases}$

Зміщуємо центр координат в т. $M_2(-4,-4)$:

$\begin{cases} \dot{x} = -e^{-4} x_2 + e^{-4} y_2 \\ \dot{y} = \frac{3}{4} x_2 - 2 y_2 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -e^{-4} & e^{-4} \\ \frac{3}{4} & -2 \end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -e^{-4}-\lambda & e^{-4} \\ \frac{3}{4} & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2+e^{-4})\lambda - \frac{3}{4}e^{-4} + 2e^{-4} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(-1-2e^{4}) \pm \sqrt{1-e^4+4e^8}}{2e^4}, \quad \lambda_{1,2} < 0$$ – точка спокою: стійкий вузол.

№ 5. $$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Знайдемо $A+BC$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3c_1 & -2 \\ 2 & 2+c_2 \end{pmatrix}$$

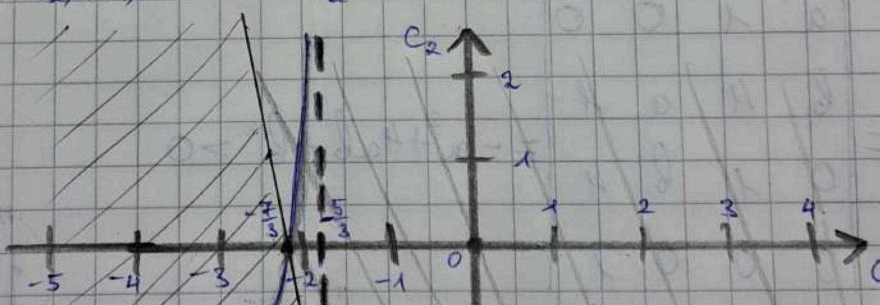
$$\det(A+BC-\lambda E) = \begin{vmatrix} 5+3c_1-\lambda & -2 \\ 2 & 2+c_2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda\underbrace{(-3c_1-c_2-7)}_{a_1} +$$

$$+ \underbrace{((5+3c_1)(2+c_2)+4)}_{a_2} = 0$$

Матриця Гурвіца: $$H = \begin{pmatrix} -3c_1-c_2-7 & 1 \\ 0 & ((5+3c_1)(2+c_2)+4) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3c_1-c_2-7 > 0 & = \Delta_1 \\ (-3c_1-c_2-7)((5+3c_1)(2+c_2)+4) > 0 & = \Delta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3c_1-c_2-7 > 0 \\ (5+3c_1)(2+c_2)+4 > 0 \end{cases}$$



1) $c_2 = -3c_1 - 7$

2) $c_2 = \dfrac{-6c_1-14}{3c_1+5}$

$3c_1 + 5 \neq 0$,

$c_1 \neq -\frac{5}{3}$, $c_2 \neq -2$.

т. перет. з осями: $\left(-\frac{7}{3}, 0\right), \left(0, -\frac{14}{5}\right)$

Візьмемо $M(-3,-3)$.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$ – стійкий фокус.

№6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_2) - \cos(x_1) - u_1 \\ \dot{x}_2 = 3\cos(-4x_2) + 4u_2 \end{cases}$

$$J = \int_0^1 (\sin^2(x_1) + u_2^4)\,dt + \underbrace{\cos^4(2x_2(1))}_{\varphi(x(t_N))} \longrightarrow \min$$

Функція Гамільтона:

$$H(x, u, t, \psi) = \psi_0(\sin^2(x_1) + u_2^4) + \psi_1(\sin(x_2) - \cos(x_1) - u_1) +$$
$$+ \psi_2(3\cos(-4x_2) + 4u_2).$$

$\psi_0 = -1$;

$$\frac{\partial \psi_1}{dt} = -H'_{x_1} = 2\sin x_1 \cos x_1 - \sin x_1 \psi_1$$

$$\frac{\partial \psi_2}{dt} = -H'_{x_2} = -\cos x_2 \psi_1 + 12\sin 4x_2$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = -\psi_1(t) = 0 \Rightarrow u_1(t) \text{ - довільна.}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = -4u_2^3(t) + 4\psi_2(t) = 0 \Rightarrow u_2(t) = \sqrt[3]{\psi_2(t)}.$$

Підставимо керування $u_1(t)$, $u_2(t)$ в систему. Оскільки $u_1(t)$ – довільне, візьмемо $u_1(t) = 0$.

$$\dot{x}_1(t) = \sin(x_2) - \cos(x_1)$$

$$\dot{x}_2(t) = 3\cos(-4x_2) + 4\sqrt[3]{\psi_2(t)}$$

$$\dot{\psi}_1 = 2\sin(x_1)\cos(x_1) - \sin(x_1)\psi_1$$

$$\dot{\psi}_2 = -\cos(x_2)\psi_1 + 12\sin(4x_2)$$

лівий кінець:

$$\begin{cases} \psi_1(0) = 0 \\ \psi_2(0) = 0 \end{cases}$$

(Умови трансверсальності)

правий кінець

$$\psi(t_N) - \psi_0 \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_i} = 0$$

$$\begin{cases} \psi_1(1) = 0 \\ \psi_2(1) = 8\cos^3(2x_2(1))\sin(2x_2(1)) = 0. \end{cases}$$