МКР № 4

ІАС-11, Сенечко Д.

Варіант 43.

2. Ні, у графі K_5 не може існувати цикл довжини 9, бо K_5 має лише 5 вершин, а це значить, що максимально можлива для нього довжина циклу: 5.

22. Тріангуляція – максимальний плоский граф, тому після додавання ребер повинно бути $3n-6=6$. У графа C_4 4 ребра, тому можна додати 2 ребра:

23. Якщо граф з n вершинами є тріангуляцією, то він має $3n-6$ ребер. Якщо додати хоча б одне ребро, граф перестане бути плоским, бо, якщо граф має n вершин ($n \geq 3$), m ребер і є планарним, то $m \leq 3n-6$.

10. а) Не існує, бо $1+1+2+3+4+4=15$ - непарна, що суперечить $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$;

б) існує;

в) не існує, бо за умовою має дві ізольовані вершини і макс. можл. степінь для будь-якої вершини (з решти чотирьох): 3, тобто в такому графі не може бути вершини степеня 4.

8. C_{2k+1}

29. $\chi(G) = 3$, бо при непарній кількості вершин неможливо розфарбувати ~~граф~~ цикл в два кольори без їх повторення в двох сусідніх вершин.

30. $G_1 = K_4$, а G_2 - пряма сума простих циклів графа K_4.

12. Це випливає як висновок з теореми про кількість вершин будь-якого нетривіального самодоповн. графа.

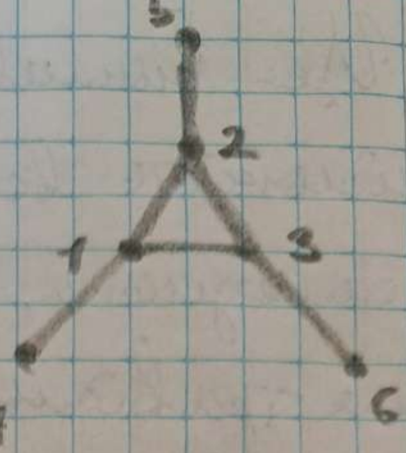
Для тривіального графа твердження очевидне. Якщо $n=4k$, то $|E| = \frac{n(n-1)}{4} = k(4k-1) = 4k^2-k$. Якщо $n=4k+1$, то $|E| = \frac{n(n-1)}{4} = (4k+1)k = 4k^2+k$.

13. З формули $\sum\limits_{v\in V} \sigma(v) = n(n-1) = 2|E| \Rightarrow$, що для кубічного графа з n вершинами і m ребрами виконується $3n=2m$. Отже, n-кратне 2.

14. Якщо v і w незв'язані, то вони містяться в різних компонентах зв'язності G_1 і G_2. Тоді сума степенів усіх вершин підграфа G_1 (або G_2) буде непарною, що суперечить формулі $\sum\limits_{v\in V} \sigma(v) = 2|E|$.

15. $V=\{1,2,3,4,5,6\}$

$E=\{(1,2),(1,3),(1,4),$
$(2,3),(2,5),(3,6)\}$



16. Нехай граф G має тільки один простий цикл. Тоді після вилучення будь-якого ребра циклу отримаємо ациклічний граф G' з тією самою кількістю компонент зв'язності.

$\nu(G')=0$, тоді $\nu(G)=1$.

17. Якщо $n>1$ і $m>1$, то радіус дорівнює 2. Якщо одна з часток скл. з однієї вершини, а інша – більше, ніж з однієї, то радіус дорівнює 1.

18. Найменша можлива к-сть ребер: (n-1). У зв'язному графі кожна вершина повинна мати з'єднання хоча б з однією іншою вершиною. К-сть вершин у першій і другій частинах двочастк. графа є однаковою, або відрізняється на 1 для непарного n, і кожна вершина повинна мати з'єдн. з ін. част.

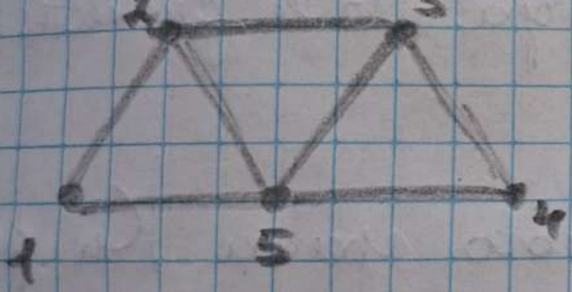
21. Відомо, що кожен планарний граф має не більше 3n-6 ребер. Отже, щоб граф K_6 став планарним треба залишити у ньому 12 ребер. Всього у K_6 $\frac{n(n-1)}{2} = 15$ ребер. Отже, найменша к-сть ребер, яку треба видалити: 3.

24. Розглянемо плоский граф, ізоморфний даному. Можемо доповнити його ребрами до тріангуляції. Якщо побудована тріангуляція має хоча б 4 вершини, степені яких не більше 5, то ці вершини справджують твердження для нашого графа. Тепер достатньо довести тріангуляцію:

Нехай тріанг. $G=(V,E)$ має n вершин та m ребер, n_k – к-сть вершин графа степеня k. Кожна вершина має степінь не менше 3. За теоремою $2m=\sum_{v\in V}\delta(v)\geq 3n_3+4n_4+5n_5+6(n-(n_3+n_4+n_5))\geq 6n-3(n_3+n_4+n_5)$; з іншого боку, $m=3n-6$, звідси $6n-12\geq 6n-3(n_3+n_4+n_5)$ і $n_3+n_4+n_5\geq 4$, що й треба було довести.

26. Для плоского графа з 5 вершинами ми можемо мати не більше ніж $3n-6 = 3\cdot5-6=9$ ребер.

Щоб максимізувати к-сть граней будуємо граф так, щоб кожна вершина мала степінь не більше ніж 3:



Отже, найбільша к-сть граней такого графа: 6.

27. Припустимо супротивне, тоді маємо таку несумісну систему нерівностей:

$$2m = \sum_v \delta(v) \geq 3n$$

$$2m = \sum_r \Delta r \geq 6|P| = 6(m-n+2)$$

4. $V_1 = V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E_1 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (3,6)\}$

$E_2 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (4,6)\}$

28. Позначимо через k кількість кінцевих вершин. Використовуючи лему про рукостискання складаємо нерівність: $2(n-1)$ - сума степенів всіх вершин дерева.

Оскільки за умовою немає степеня 2, то нехай всі вершини будуть хоча б степеня 3. Тоді сума степ. цих вершин $k + 3(n-k)$

Складаємо нерівність:

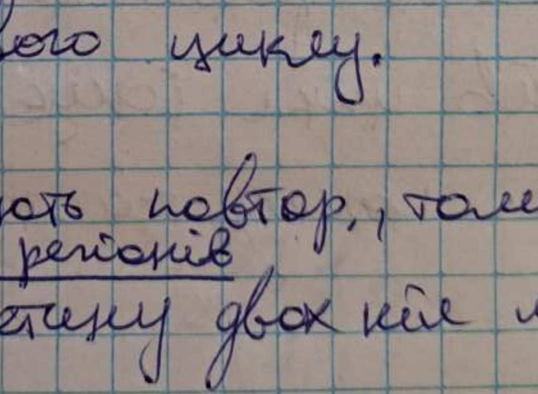
$2(n-1) \geq k + 3(n-k)$,

$2n - 2 \geq -2k + 3n$, $\quad -n \geq -2k + 2$,

$n \leq 2(k-1)$, $\quad k \geq \frac{n}{2} + 1$, що і треба було дов.

39. Припустимо, що даний граф G має гамільтонів цикл Z. Тоді окрім двох вершин v і w степеня 3 всі інші вершини $u_1, u_2, \dots, u_n$ повинні мати степінь 2, тому що граф, у якому є кінцева вершина, не є гамільтоновим. Гамільтонів цикл Z графа G містить усі ребра, інцид. вершинам $u_1, u_2, \dots, u_k$, і по два з трьох ребер, інцид. v та w. Кожне з ребер, що не потрапило в Z, не може з'єднувати вершини v та w, бо за умовою вони не суміжні. Крім того, ці ребра не можуть бути інцидентні жодній у вершин $u_1, u_2, \dots, u_k$, бо їх степені $= 2$. Отримуємо суперечність. Отже, G не може мати гамільтонового циклу.

31. Кольори не мають повтор. у сусідніх регіонів, тому розфарбування карти перетину двох кіл може виглядати так:



і нам достатньо двох кольорів.

3.2. Припустимо, що якийсь крит. граф G – незв'язний, а $G_1, G_2, \ldots, G_k$ – його компоненти зв'язності. Вилучимо довільну вершину з тої компоненти G_i, хром. число якої не перевищує хром. числа решти комп. зв'язн. Отримуємо суперечність, бо після такого вилучення хром. число графа G не зміниться.

3.3. Хроматичне число повного графа K_n дорівнює n. Відповідно, якщо вилучити одне ребро, хром. число буде $(n-1)$.

3.4. Усі 3-критичні графи – це C_n, де $n = 2k+1$, $k \in N$.

36. Мінімальною кількістю мостів може бути 0, якщо всі ребра входять у цикли, тобто граф є 2-зв'язним.

Максимальною к-сть мостів буде, якщо граф є деревом, де кожне ребро є мостом, бо вилучення ребра приведе до втрати зв'язності між двома компонентами.

Макс. кількість: $(n-1)$.

37. $\varphi(G) \leq \psi(G) \leq \delta(G)$

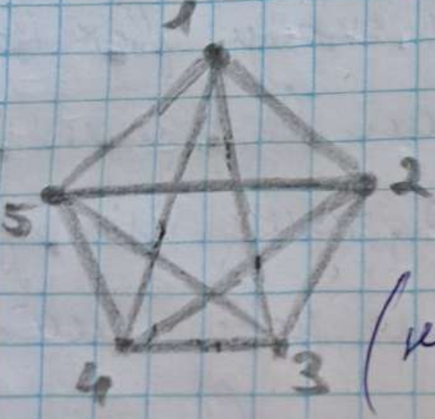
1) $\varphi(G) \leq \psi(G)$, бо кожне ребро з'єднує дві вершини, і при видаленні вершини видаляємо також одне або більше ребро;

2) $\psi(G) \leq \delta(G)$, бо кожне ребро виходить із вершини, і видалення всіх ребер, що виходять з вершини з мінімальним степенем, робить граф незв'язним.

40. Необхідність випливає з того, що будь-який цикл у графі можна зобразити у вигляді об'єднання простих циклів, які у ньому містяться. Достатність доводиться аналогічно з достатністю теор. Ейлера.

41. а) ейлерів, який не є гамільтоновим:

K_5

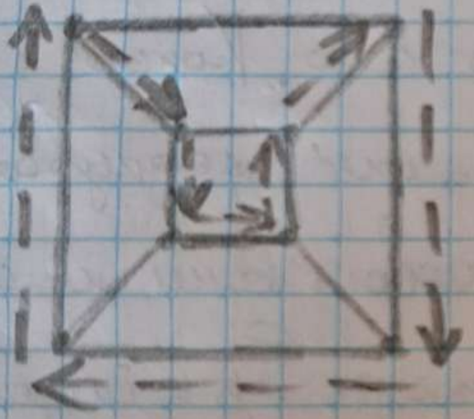


Ейлер. цикл:

1-2-3-4-5-1-3-5-2-4-1

(не є гамільт., бо вершини повтор.)

б) гамільт., який не є ейлеровим:



42. У довільному циклі двочаст. графа вершини часток з'явл. по черзі, тому, якщо гамільтонів цикл існує, він містить порівну вершин кожної частки.