

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №2
з курсу
«Управління динамічними системами»
на тему:
**«Аналітичне конструювання регуляторів.
Побудова фазових портретів»**

Виконала:
студентка групи ІПС-21
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Сенечко Д. В.

Київ - 2024

Зміст

Умова задачі згідно з варіантом.....	3
Представлення розв'язку аналітично (в зошиті).....	4
Код програми (Sage).....	8
Код програми (Wolfram Mathematica).....	11

Умова задачі згідно з **Варіантом №8**.

- Дослідити на стійкість задану систему. Визначити вигляд точки спокою. Намалювати фазовий портрет. (Все аналітично в зошиті).
- Розв'язати задачу аналітичного конструювання регуляторів, обравши одне керування з знайдених можливих. Визначити вигляд отриманої точки спокою. Намалювати фазовий портрет. (Все аналітично в зошиті).
- Зобразити фазові портрети особливих точок розімкненої системи та побудованої замкненої системи за допомогою програмних пакетів (в даному випадку **Sage** та **Wolfram Mathematica**).

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = 2y - 4x \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Представлення розв'язку аналітично (в зошиті)

Лабораторна робота №2.

Варіант 8.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = 2y - 4x \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 0$$

Оскільки $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, точка спокою є нульовою особливою точкою.

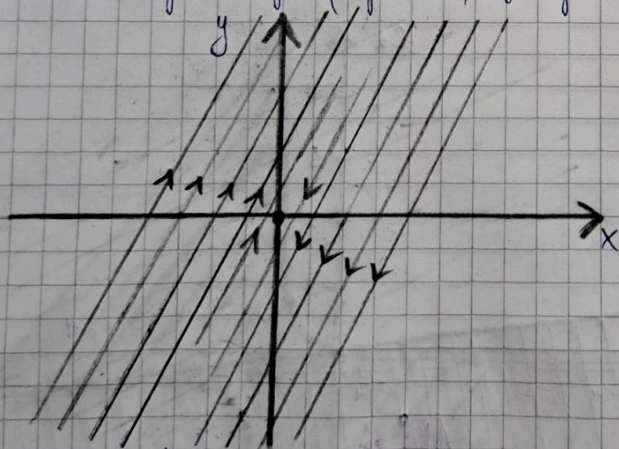
Фазовий портрет: „водорозділ“.

Знайдемо власний вектор:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2\alpha + \beta = 0, \quad \beta = 2\alpha$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Власний вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ задає напрямок, уздовж якого будуть спрямовані всі траєкторії (пряма, що проходить через нуль і має нахил $y = 2x$)



$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = (A + BC)x$$

$$A + BC = \begin{pmatrix} -2 + c_1 & 1 + 2c_2 \\ -4 & 2 + 2c_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A+BC-\lambda E) = \begin{vmatrix} -2+c_1-\lambda & 1+2c_2 \\ -4 & 2+8c_2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - \lambda(-2+c_1+2+8c_2) + (-2+c_1)(2+8c_2) + 4(1+2c_2) =$$

$$= \lambda^2 - \underbrace{\lambda(8c_2+c_1)}_{a_1} + \underbrace{(-2+c_1)(2+8c_2)+4(1+2c_2)}_{a_2}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} -(8c_2+c_1) & 1 \\ 0 & (-2+c_1)(2+8c_2)+4(1+2c_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -(8c_2+c_1) > 0 \\ (-8c_2-c_1)((-2+c_1)(2+8c_2)+4(1+2c_2)) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8c_2+c_1 < 0 \\ (-2+c_1)(2+8c_2)+4(1+2c_2) > 0 \end{cases}$$

$$1) c_2 = -\frac{1}{8}c_1$$

$$2) (-2+c_1)(8c_2+2)+4(1+2c_2)=0$$

$$-16c_2-4+8c_1c_2+2c_1+8c_2+4=0$$

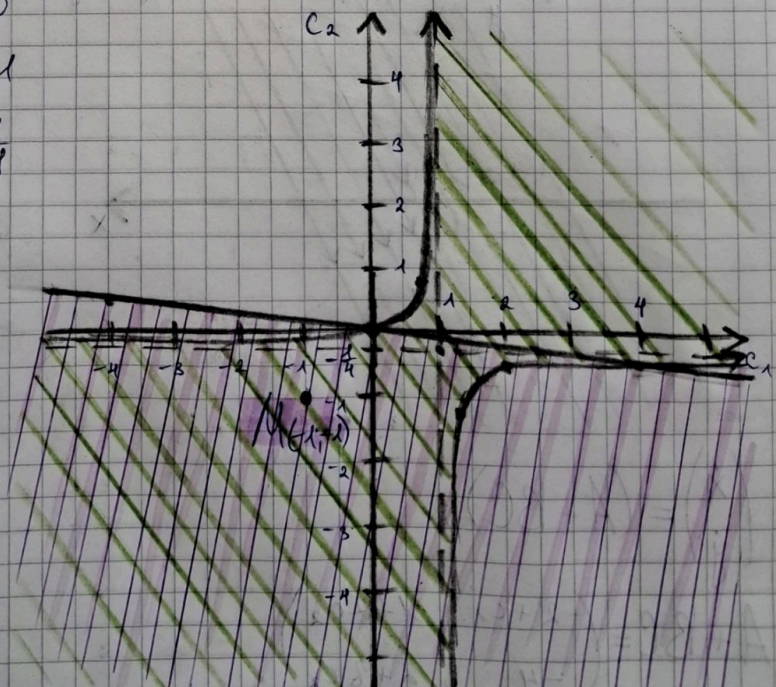
$$-8c_2+8c_1c_2+2c_1=0$$

$$c_2 = \frac{-c_1}{-4+4c_1}, \quad c_1 \neq 1$$

$$c_1 = \frac{4c_2}{4c_2+1}, \quad c_2 \neq -\frac{1}{4}$$

Точка перетину двох
координат: $(0; 0)$.

Побудова
параметрів:



Визначимо точку $M(-1, -1)$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x_1 - y_1 \\ \dot{y} = -4x_1 - 6y_1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ -4 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9\lambda + 14 = 0$$
$$\lambda_1 = -7, \lambda_2 = -2.$$

λ_1, λ_2 — дійсні, різні, одного знаку \Rightarrow стійкий вузол.
 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Знайдемо сепаратиси:

$$\lambda_1 = -7: \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \sim (4; -1), \quad v_1 = (1; 4)$$

$$\lambda_2 = -2: \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \sim (1; 1), \quad v_2 = (1; -1)$$

1) $y = 4x$

$$\left(\frac{5}{2}; 10\right)$$

$$\left(-\frac{5}{2}; -10\right)$$

2) $y = -x$

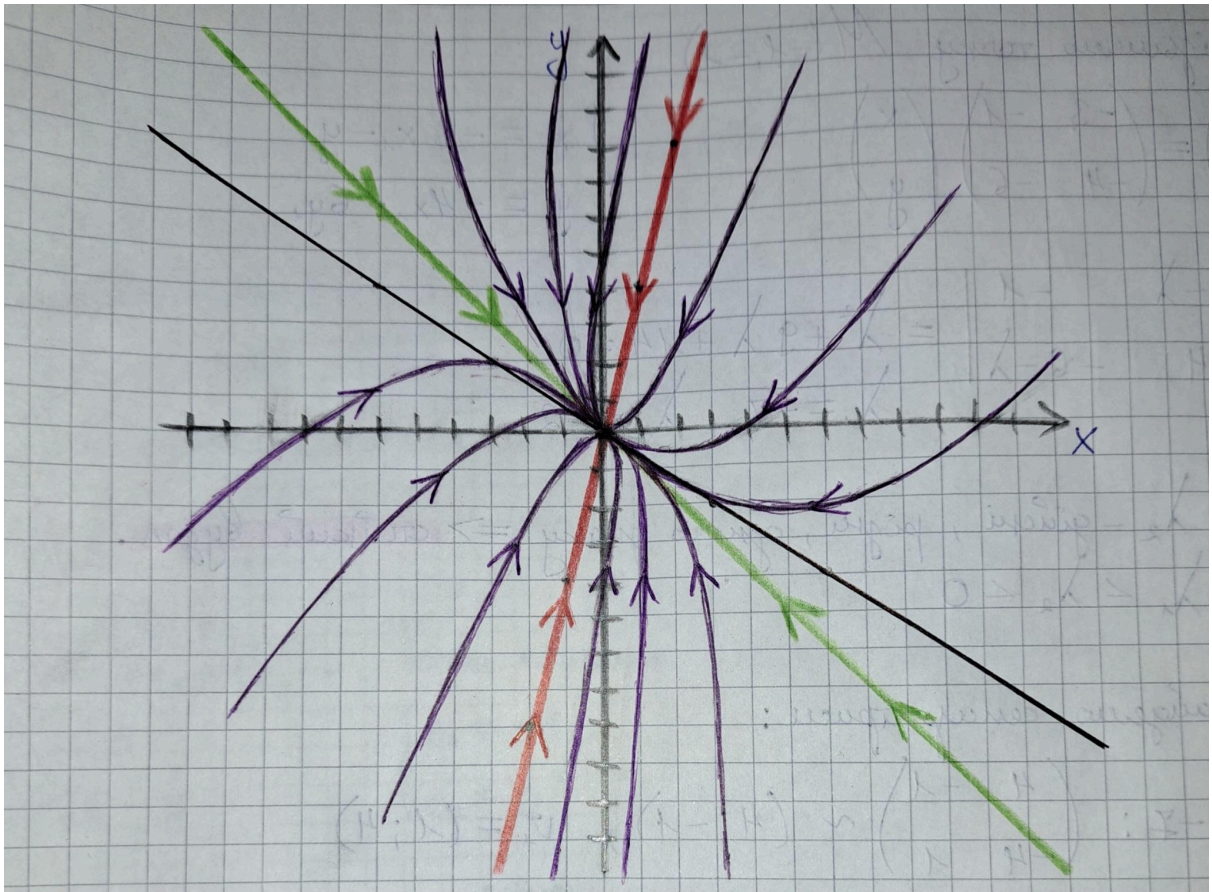
$$(10; -10)$$

$$(-10; 10)$$

Знайдемо Ізокліну:

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-4x - 6y}{-3x - y} = 0$$

$$y = -\frac{2}{3}x, \quad y \neq -3x$$
$$\left(10; -\frac{20}{3}\right)$$
$$\left(-10; \frac{20}{3}\right)$$



Код програми (Sage)

#розімкнена система

```
x,y=var('x,y')
```

```
f(x,y)=y-2*x
```

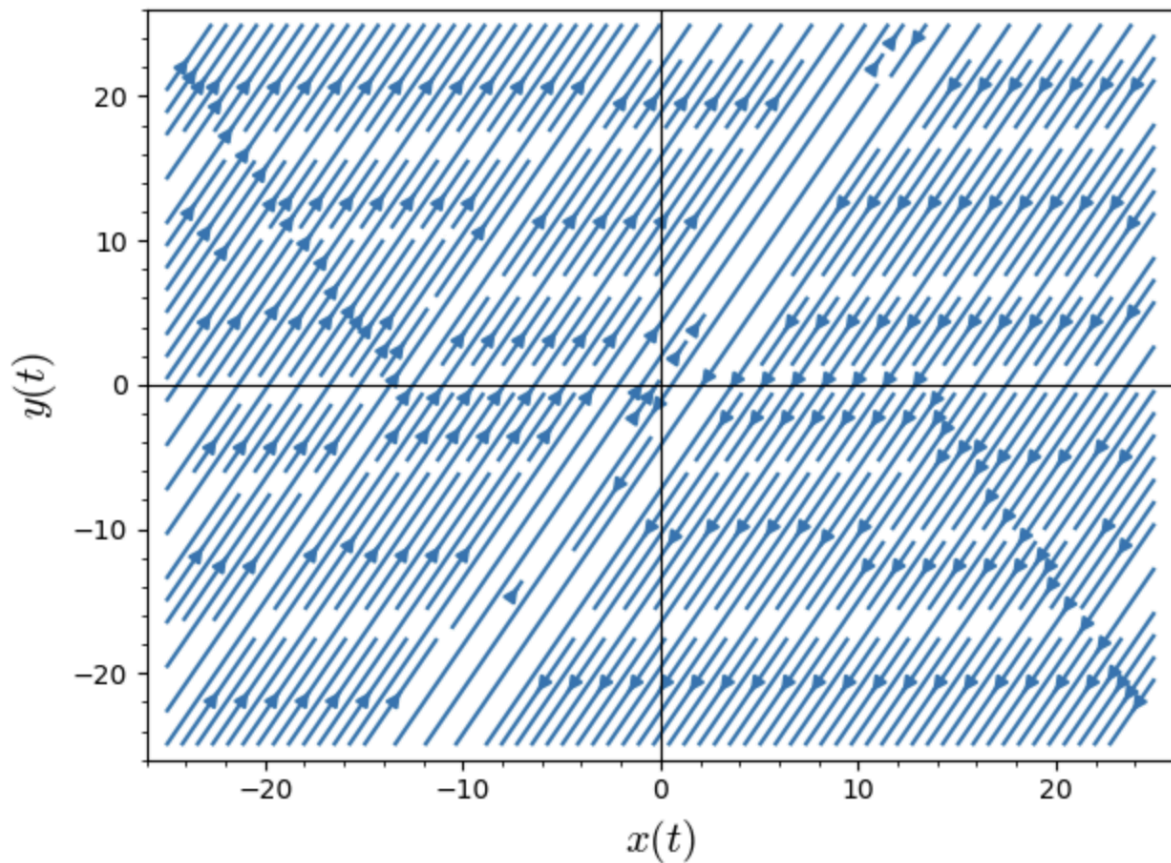
```
g(x,y)=2*y-4*x
```

```
streamline_plot((f,g), (x, -25, 25), (y, -25, 25),
```

```
density=2.2,
```

```
axes_labels = ["$x(t)$", "$y(t)$"])
```

Результат роботи програми (Sage)



Код програми (Sage)

#замкнена система

```
x,y=var('x,y')
```

```
f(x,y)=-3*x-1*y
```

```
g(x,y)=-4*x-6*y
```

#сепаратриси та ізокліна

```
separatrix1 = line([(-5/2,-10), (5/2,10)],
```

```
rgbcolor=Color('red'), thickness=2, legend_label = 'Separatrix 1')
```

```
separatrix2 = line([(-10,10), (10,-10)], rgbcolor=Color('green'),
```

```
thickness=2, legend_label = 'Separatrix 2')
```

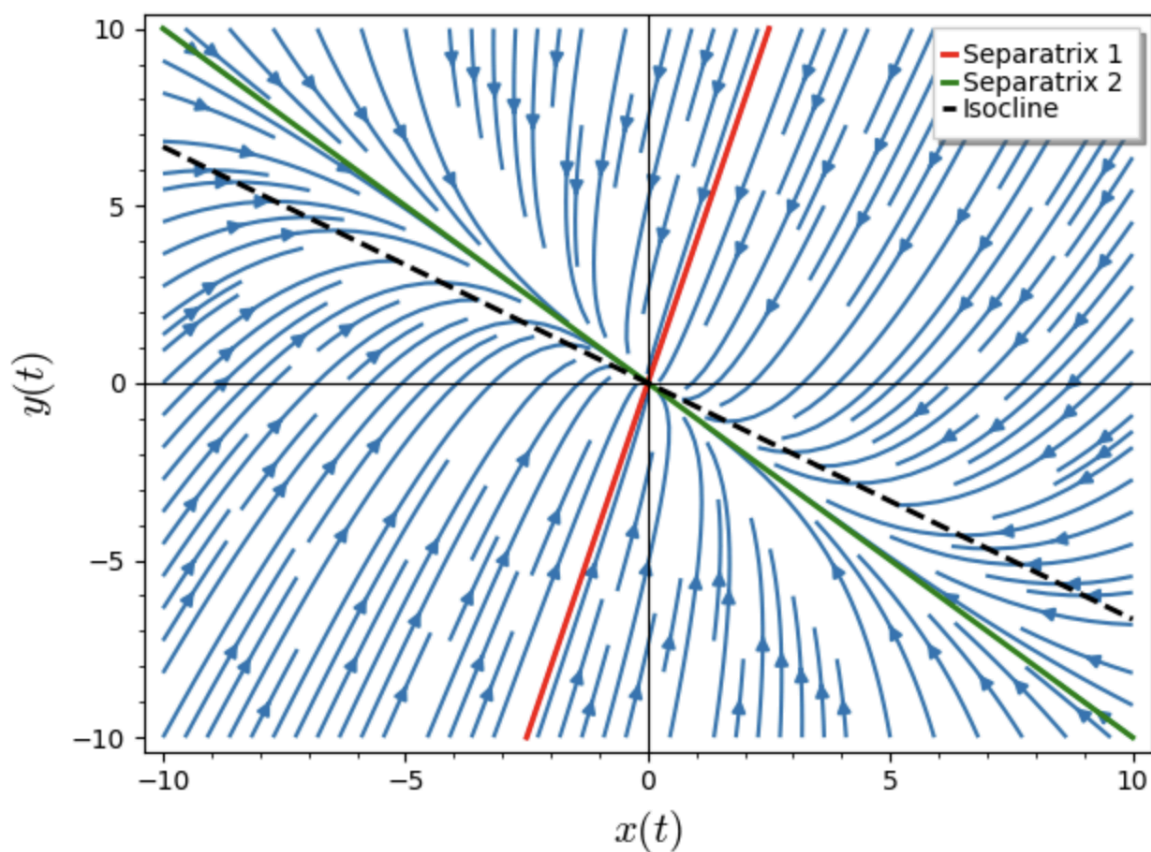
```
isocline = line([(-10,20/3), (10,-20/3)], rgbcolor=Color('black'),
```

```
thickness=2, linestyle='dashed', legend_label = 'Isocline')
```

```
streamline_plot((f,g), (x, -10, 10), (y, -10, 10), density=1.5,
```

```
axes_labels = ["$x(t)$", "$y(t)$"]) + separatrix1 + separatrix2 + isocline
```

Результат роботи програми (Sage)



Код програми (Sage)

#загальний розв'язок 1

```
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==(-4*x+2*y)/(-2*x+y)
solution=desolve(de,y)
solution.show()
```

#загальний розв'язок 2

```
y=function('y')(x)
de=diff(y,x)==(-4*x-6*y)/(-3*x-1*y)
solution=desolve(de,y)
solution.show()
```

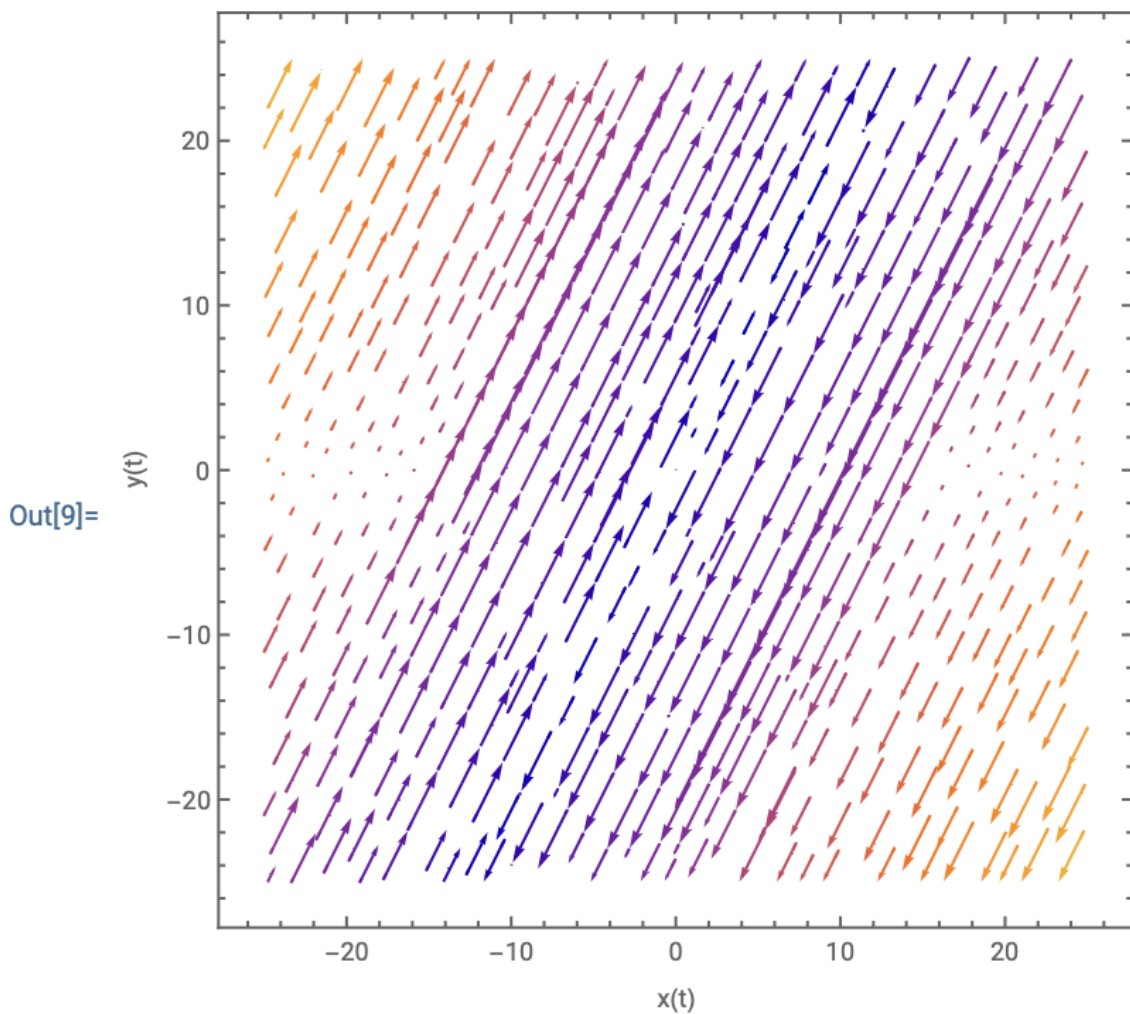
Результат роботи програми (Sage)

$$C + 2x$$
$$Cx = e^{\left(-\frac{7}{5} \log\left(-\frac{4x-y(x)}{x}\right) + \frac{2}{5} \log\left(\frac{x+y(x)}{x}\right)\right)}$$

Код програми (Wolfram Mathematica)

```
f[x_, y_] := y - 2 x  
g[x_, y_] := 2 y - 4 x  
StreamPlot[{f[x, y], g[x, y]}, {x, -25, 25}, {y, -25, 25},  
StreamPoints -> Fine, (* Adjusts the density of streamlines *)  
FrameLabel -> {"x(t)", "y(t)"},  
Frame -> True, Axes -> False]
```

Результат роботи програми (Wolfram Mathematica)



Код програми (Wolfram Mathematica)

```
f[x_, y_] := -3 x - y
g[x_, y_] := -4 x - 6 y
separatrix1 = Graphics[{Red, Thick, Line[{{-5/2, -10}, {5/2, 10}}],
  Text["Separatrix 1", {5/2, 10}, {-1, -1}]}];
separatrix2 = Graphics[{Green, Thick, Line[{{-10, 10}, {10, -10}}],
  Text["Separatrix 2", {10, -10}, {-1, 1}]}];
isocline = Graphics[{Black, Dashed, Line[{{-10, 20/3}, {10, -20/3}}],
  Text["Isocline", {10, -20/3}, {-1, 1}]}];
vectorField = StreamPlot[{f[x, y], g[x, y]}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
  StreamPoints -> Medium,
  FrameLabel -> {"x(t)", "y(t)"},
  Frame -> True, Axes -> False];
Show[vectorField, separatrix1, separatrix2, isocline]
```

Результат роботи програми (Wolfram Mathematica)

