Сенечко Д. В.
ІПС-21

1. Нехай A і B відрізняються скінченною кількістю елементів. Якщо A - РМ, то B - РМ. Довести.

Очевидно, що $(A \cap B) \subset A$ є РМ.
За теоремою, доповнення РМ, а також об'єднання і перетин будь-якої скінченної системи РМ є РМ. Звідси A є РМ. Тоді виходить, що $(B \setminus A) \subset A$ є РМ.
$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ є РМ, оскільки кожна з множин цього об'єднання є РМ.

2. Функція f - ЧРФ, але не РФ. Область визначення функції $g(x) = m_y(f(y) = x)$ є ПРМ. Довести.

Функція $g(x)$ - визначена тоді і тільки тоді, коли існує такий аргумент y, при якому функція f приймає значення x, тобто аргументу функції g. Тоді виходить, що області визначення функцій g та значень функції f співпадають. Якщо $f(y)$ приймає скінченну множину значень $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, то область визначення $g(x)$ також є скінченною і збігається з цією множиною.
Кожна скінченна множина натуральних чисел є ПРМ, оскільки її можна задати характеристичною функцією:
$\chi(x) = sg(|x - a_0| \cdot |x - a_1| \cdot \ldots \cdot |x - a_n|)$ - ПРФ.

3. Функція

$$w(x) = \begin{cases} 0, & U(x,x) > 1 \\ 1, & \end{cases}$$

не є РФ. Довести.

Нехай, існує алгоритм, який обчислює значення цієї функції (тобто, $w(x)$ - РФ). Для обчислення $w(x)$ перевіряємо умову:
1) Якщо $w(x) = 0$, то $U(x, x) \geq 1$ - визначена;
2) Якщо $w(x) = 1$, то $U(x, x)$ - не визначена.

Область визначення функції $U(x, x)$ є рекурсивно-перелічною, але не рекурсивною.
Якби функція $w(x)$ була рекурсивною, ми могли б алгоритмічно визначити чи $U(x, x)$ визначена та більше 1, що суперечить нерекурсивності області визначення $U(x, x)$.
Таким чином, припущення, що $w(x)$ - рекурсивна, приводить до суперечності. Тобто $w(x)$ - не РФ.

4. Побудувати ПРФ, яка за номерами Кліні функцій $f(x)$ та $g(x)$ обчислює номер Кліні функції $f(g(x))$.

Для обчислення обчислення номера Кліні функції $f(g(x))$,
де $f(x) = K(n, x)$, та $g(x) = K(m, x)$, використаємо композицію Кліні: $f(g(x)) = K(k, x)$,
де $k = c(n, m)$ - ПРФ парування Кантора:
$c(n, m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m.$
Отже, номер k функції $f(g(x))$ обчислюється за ПРФ $c(n, m)$.

5. Множина ЧРФ - злічення. Довести.

Множина ЧРФ є зліченною, оскільки кожній ЧРФ відповідає номер n такий, що $f(x) = T(n, x)$. Це відображення є ін'єктивним, бо різним $f(x)$ відповідають різні значення n. Крім того, множина $M \subseteq N$ номерів - нескінченна (наприклад, $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x + 1,\ ...$), тому існує бієкція: множина ЧРФ ↔ M ↔ N.
Отже, множина ЧРФ - злічення.