МКР №1. 10.11.

з ДМ

Сенечко Д.В.

гр.: ІПС-11

Варіант №18.

1) Правильні: b), c), f), ~~g)~~, i), j), d), l).

2) $A = \{\varnothing, \{i, j\}\}$

$\beta(A) = \{\{\varnothing, \{i, j\}\}; \{\varnothing\}; \{\{i, j\}\}; \varnothing\}$

3) $A = \{2, 4, 5, 6\}$

$B = \{4, 6, 7\}$

$A \cap B = \{4, 6\}$ $\quad B \setminus A = \{7\}$

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ $\quad A \setminus B = \{2, 5\}$

$A \triangledown B = \{2, 5, 7\}$

4) $\beta(A \cap C) = \beta(A) \cap \beta(C)$, де $\beta(X)$ – булеан мн. X

($\Rightarrow$) Нехай $x \in \beta(A \cap C) \Rightarrow x \subseteq A \cap C \Rightarrow x \in A \;\&\; x \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \beta(A) \;\&\; x \in \beta(C) \Rightarrow x \in \beta(A) \cap \beta(C)$

($\Leftarrow$) $\beta(A) \cap \beta(C) \subseteq \beta(A \cap C)$;

Нехай $x \in \beta(A) \cap \beta(C) \Rightarrow x \subseteq A \;\&\; x \subseteq C \Rightarrow x \subseteq A \cap C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \beta(A \cap C)$.

5) а) $A\cup(A\cap B)=A$:

$A\cup(A\cap B)=(A\cup A)\cap(A\cup B)=A\cap(A\cup B)=A$

$(A\cup B\supseteq A)$

б) $(A\cap B)\cup(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D)=A\cap B$:

$A\cap B\cap C\supseteq A\cap B$ тривіально

$A\cap B\subseteq A\cap B\cap D$

$(A\cap B)\cup(A\cap B)\cup(A\cap B)=A\cap B$.

6) Дов., що не можна виразити $\cup$ через $\setminus$ та $\cap$

Нехай $A=B\neq\emptyset$, тоді

$A\cup B=A\neq\emptyset$

$A\cap B=A\neq\emptyset$ $\quad A\setminus B=A\setminus A=\emptyset$

Отже, не можна виразити операцію $\cup$ через $\setminus$ та $\cap$.

7) $M=\{1,2,3,4\}$

а) рефлексивні: R_2, R_5, R_4;

б) антирефлексивні: R_1;

в) не рефлексивні: R_3;

г) симетричні: R_3, R_5;

д) антисиметричні: R_1, R_2;

е) не симетричні: R_4;

є) транзитивні: R_5.

8) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$

$\forall(x,y)\in(A\setminus B)\times C \Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\ \&\ y\in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A\ \&\ x\notin B\ \&\ y\in C \Leftrightarrow (x\in A\ \&\ y\in C)\ \&$

$(x\notin B \vee y\notin C) \Leftrightarrow x\in A\ \&\ y\in C\ \&\ \neg(x\in B\ \&\ y\in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y)\in(A\times C)\ \&\ (x,y)\notin(B\times C) \Leftrightarrow (x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times C)$

9) $R_1\subseteq R_2$ $\quad$ Q – довільне віднош.

$R_1\circ Q\subseteq R_2\circ Q$

$\forall(x,y)\in R_1\circ Q \Rightarrow \exists z:(x,z)\in R_1\ \&\ (z,y)\in Q \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists z:(x,z)\in R_2\ \&\ (z,y)\in Q \Rightarrow (x,y)\in R_2\circ Q.$

(бо $R_1\subseteq R_2$)

10) $R_1\circ R_2$ – симетр. (R_1, R_2 – сим.) $\Leftrightarrow R_1\circ R_2=R_2\circ R_1$.

1) $\forall(x,y)\in R_1\circ R_2 \Rightarrow (x,z)\in R_1\ \&\ (z,y)\in R_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (z,x)\in R_1\ \&\ (y,z)\in R_2 \Rightarrow (y,x)\in R_2\circ R_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)\in R_2\circ R_1$;

2) $\forall(x,y)\in R_1\circ R_2 \Rightarrow (x,y)\in R_2\circ R_1 \Rightarrow (y,x)\in R_1\circ R_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1\circ R_2$ – симетр.

$R_1\circ R_2$ – сим. $\Leftrightarrow R_1\circ R_2=R_2\circ R_1$.

5) а) $A \cup (A \cap B) = A$;

12) $f \subseteq A \times B$ − в.в. $\overset{\text{дов.}}{\underset{?}{\Longrightarrow}}$ $f \circ g \subseteq A \times C$ − в.в.
$g \subseteq B \times C$ − в.в.

$\forall (a,c) \in f \circ g \Rightarrow \exists b \in B : (a,b) \in f \ \& \ (b,c) \in g \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b) \in f \quad f \subseteq A \times B \quad b \in B \quad \&$

$(b,c) \in g \quad g \subseteq B \times C \quad b \in B \ \& \ c \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b) \in f \ \& \ (b,c) \in g \Rightarrow (a,c) \in f \circ g$.

Отже, для $\forall (a,c) \in f \circ g \ \exists (b,c)$, що робить $f \circ g$ всюди визначеною.

13) $f \subseteq A \times B$ − сюр'єктивне $\Longleftrightarrow i_B \subseteq f^{-1} \circ f$

1) $\forall b \in B \ \exists a \in A : (a,b) \in f \Rightarrow (b,a) \in f^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow B \subseteq f^{-1} \circ f$.

2) $B \subseteq f^{-1} \circ f \Rightarrow \forall b \in B \ \exists a : (b,a) \in f^{-1} \Rightarrow \exists c : (a,c) \in f \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall b \in B \ \exists c : (a,c) \in f$.

14) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

а) функціональні $(\forall x \ \exists! y)$: C_1, C_2, C_5;

б) всюди визначені $(\forall x \in A \ \exists y \in B)$: C_5, C_1, C_4;

в) сюр'єктивні $(\forall y \in B \ \exists x \in A)$: C_5, C_1, C_4;

г) ін'єктивні $(\forall y \ \exists! x)$: C_5, C_1;

д) бієктивні (сюр'єкція + ін'єкція): C_1, C_5.

15) R – в. екв.

а) $(x, y) \in R$, б) $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$, в) $[x]_R = [y]_R$

б) $\exists b: b \in [x]_R$ & $b \in [y]_R \Rightarrow \exists b: xRb$ & $yRb \xRightarrow{\text{симетр.}}$
xRb & $bRy \xRightarrow{\text{транз.}} xRy \Rightarrow (x, y) \in R \Rightarrow$ а).

в) $\forall b: b \in [x]_R: xRb$ & $yRb \Rightarrow xRb$ & $bRy \xRightarrow{\text{транз.}}$
$xRy \Rightarrow [x]_R = [y]_R$.

16) $A = \{a, b, c, d\}$

Нехай a, b – мінімальні елементи, а елем. d – максимальний, тоді маємо такий частковий порядок: $\{(a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (c,d), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$.

$\Rightarrow$ a і b – мінімальні бо $\nexists (x,y)$, де x або y – не a або b, (x,y) входить в віднош.

d – максимальний, бо $\nexists (x, y)$, де x або y – не d, (x, y) входить в відношення

18) Нехай R і Q – ч. п. на множ. A

Дов., що $R \cap Q$ – ч. п. на мн. A

1) $\forall (x,y) \in R \cap Q \Rightarrow (x, y) \in R$ & $(x, y) \in Q \xRightarrow{R, Q - \text{рефл.}} (x, x) \in R$ &
$(x, x) \in Q \Rightarrow (x, x) \in R \cap Q$ – рефлексивне

2) $\forall (x,y) \in R \cap Q \ \& \ (y,x) \in R \cap Q \Rightarrow (x,y) \in R \ \&$

$(x,y) \in Q \ \& \ (y,x) \in R \ \& \ (y,x) \in Q \xRightarrow{R,Q\text{-антисиметр.}} x = y$

Отже, $R \cap Q$ – антисиметричне.

3) $\forall (x,y) \in R \cap Q \ \& \ (y,z) \in R \cap Q \Rightarrow (x,y) \in R \ \& \ (x,y) \in Q \ \&$

$\& \ (y,z) \in R \ \& \ (y,z) \in Q \xRightarrow{R,Q\text{-транз.}} (x,z) \in R \ \& \ (x,z) \in Q \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,z) \in R \cap Q$

Отже, $R \cap Q$ – транзитивне.

$R \cap Q$ – частковий порядок на A, оскільки він є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним.

19) $f: N \to N^2$

$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Leftrightarrow f(x_1, y_1) \leq f(x_2, y_2)$

20) J – континуум, тоді $J = R \setminus Q$, де R – конт., Q – зліч. мн.

З кожного континууму можна вилучити зліч. мн.

Потужність множини ірраціональних чисел дорівнює континууму.

21) Нехай відрізку $[0,1]$ належать точки $a_0, a_1, \dots a_k$; а прямій – дійсні числа $b_0, b_1, \dots b_k$. Встановимо відповідність: $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ – бієкція.

25) а) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$; г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing\}$;

б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; д) $\varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$;

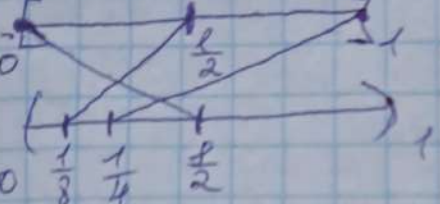
в) $\varnothing \cap \{\varnothing\} = \varnothing$; е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\} = \{\{\varnothing\}\}$.

27) N – натуральні, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

Z – цілі, $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$z = (-1)^n \cdot \left[\frac{n}{2}\right]$

22)



Нехай $a_1, a_2, \dots, a_k$ і $b_1, b_2, \dots, b_k \in R$. Числа $a_1, a_2, \dots, a_k \in [0,1]$, а $b_1, b_2, \dots, b_k \in (0,1)$, тоді $[0,1]$ – a_n, а $(0,1)$ – b_n.

Нехай $0 \to \frac{1}{2}$, тоді $a_n \Rightarrow \frac{1}{2^n}$, $b_n \Rightarrow \frac{1}{2^{n+2}}$.

Ставимо кожному елементу з $[0,1]$ у відповідність елемент з $(0,1)$. Отже, маємо біекцію.

29) а) Якщо $A = B$, то $A \sim B$ – правильне

$A = B$, тому маємо $A \sim A$

б) Якщо $A \sim B$, то $A = B$ – не правильне

Нехай $\left.\begin{array}{l} A = \{1, 3, 5\} \\ B = \{4, 6, 7\} \end{array}\right]$ $A \sim B$, але $A \neq B$.

30) A, B – зліченні ; Дов. що $A \times B$ – зліченна

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ і $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$

$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), \dots\}$

$(a_1, b_1)\ (a_1, b_2) \dots (a_1, b_n) \dots$

$(a_2, b_1)\ (a_2, b_2) \dots (a_2, b_n) \dots$

$\dots$

$(a_n, b_1)\ (a_n, b_2) \dots (a_n, b_n) \dots$

36) а) $(A \setminus B) \cup B = A$

Виконується, якщо $B \subseteq A$.

Якщо $B \subseteq A$, то всі елем. B є елем. A, таким чином $(A \setminus B) \cup B = A$.

б) $A \setminus B = B \setminus A \iff A = B$.

23) 1) $f(A) \neq \beta(A)$ – доведимо від супротивного

Припускаємо, що $f(A) = \beta(A)$, тоді $f(A) = A \times \beta(A) = \beta(A)$, але $A \times \beta(A) \neq \beta(A)$, тому $f(A) \neq \beta(A)$.

2) Доведемо $|f(A)| < |\beta(A)|$.

$|A| < |\beta(A)|, \ |f(A)| \leq |A| \Rightarrow |f(A)| < |\beta(A)|$.

49) R – в.е. , $R \circ R = R$.

1) $\forall (a,c) \in R \circ R \Longrightarrow \exists b: (a,b) \in R \,\&\, (b,c) \in R \overset{\text{транз.}}{\Longrightarrow}$

$(a,c) \in R$.

Звідси $R \circ R \subseteq R$.

2) $(a,c) \in R \overset{\text{рефл.}}{\Longrightarrow} a = c \Longrightarrow (a,b) \in R \,\&\, (b,c) \in R \Longrightarrow (a,c) \in R \circ R$

Звідси, $R \subseteq R \circ R$.

Отже, $R \circ R = R$.

47) $\forall R_1, R_2 \Longrightarrow (R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

$\forall (a,c) \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Longrightarrow \exists b: (c,b) \in R_1 \,\&\, (b,a) \in R_2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (a,b) \in R_2^{-1} \,\&\, (b,c) \in R_1^{-1} \Longrightarrow (a,c) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

Отже, $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.