МКР №5.
ПКС-11, Сенечко Д.
Варіант 64.

№1.

А. Мура:

	2	1	1	2
δ / μ	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	a_2	a_4	a_4	a_3
x_2	a_4	a_2	a_2	a_1

$\delta'(a, x) = \delta(a, x)$

$\lambda(a, x) = \mu(\delta(a, x))$

А. Мілі:

δ'	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	a_2	a_4	a_4	a_3
x_2	a_4	a_2	a_2	a_1

λ	a_1	a_2	a_3	a_4
x_1	1	2	2	1
x_2	2	1	1	2

№2

А. Мілі:

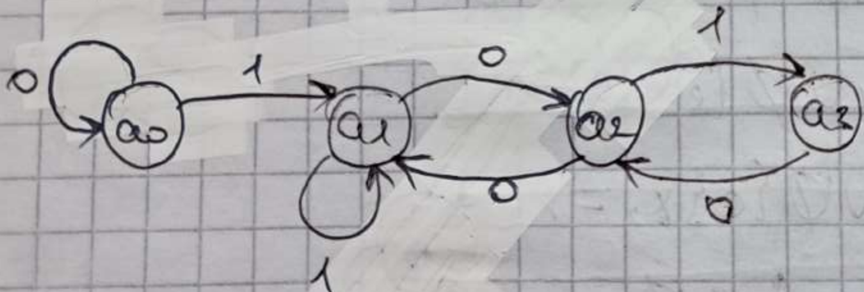
δ/λ	a_1	a_2	a_3
x_1	$a_3/2$	$a_2/2$	$a_1/1$
x_2	$a_1/2$	$a_3/1$	$a_2/1$

А. Мура:

μ	—	—	—	2	2	2	1	1	1
δ'	b_{10}	b_{20}	b_{30}	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	b_{31}	b_{32}
x_1	b_{11}	b_{21}	b_{31}	b_{31}	b_{11}	b_{21}	b_{31}	b_{21}	b_{21}
x_2	b_{12}	b_{22}	b_{32}	b_{32}	b_{12}	b_{22}	b_{32}	b_{12}	b_{22}

№20. $X=\{0,1\}$, між вх. „0" неп. к-сть „1":

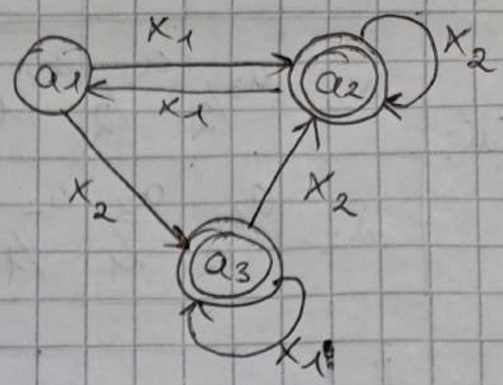
$$(1 \vee 0(00)^*)^*$$



ст. 2.

№5. $F = \{a_2, a_3\}$

δ	a_1	a_2	a_3
x_1	a_2	a_1	a_3
x_2	a_3	a_2	a_2



$$P = P_{12}^{(3)} \vee P_{13}^{(3)}$$

$P_{ij}^{(0)}$:

$P_{11}^{(0)} = \varnothing$ $\quad P_{21}^{(0)} = x_1$ $\quad P_{31}^{(0)} = \varnothing$

$P_{12}^{(0)} = x_1$ $\quad P_{22}^{(0)} = x_2 \vee e$ $\quad P_{32}^{(0)} = x_2$

$P_{13}^{(0)} = x_2$ $\quad P_{23}^{(0)} = \varnothing$ $\quad P_{33}^{(0)} = x_1 \vee e$

$P_{ij}^{(1)}$: $P_{11}^{(1)} = P_{11}^{(0)} \cup P_{11}^{(0)}(P_{11}^{(0)})^* P_{11}^{(0)} = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

$P_{12}^{(1)} = P_{12}^{(0)} \cup P_{11}^{(0)}(P_{11}^{(0)})^* P_{12}^{(0)} = x_1 \cup \varnothing\{e\}x_1 = x_1$

$P_{13}^{(1)} = P_{13}^{(0)} \cup P_{11}^{(0)}(P_{11}^{(0)})^* P_{13}^{(0)} = x_2 \vee \varnothing\{e\}x_2 = x_2$

$P_{21}^{(1)} = P_{21}^{(0)} \cup P_{21}^{(0)}(P_{11}^{(0)})^* P_{11}^{(0)} = x_1 \cup x_1\{e\}\varnothing = x_1$

$P_{22}^{(1)} = P_{22}^{(0)} \vee P_{21}^{(0)}(P_{11}^{(0)})^* P_{12}^{(0)} = x_2 \vee e \cup x_1\{e\}x_1 = x_2 \vee e \cup x_1x_1$

$P_{23}^{(1)} = P_{23}^{(0)} \cup P_{21}^{(0)}(P_{11}^{(0)})^* P_{13}^{(0)} = \varnothing \cup x_1\{e\}x_2 = x_1x_2$

$P_{31}^{(1)} = P_{31}^{(0)} \cup P_{31}^{(0)}(P_{11}^{(0)})^* P_{11}^{(0)} = \varnothing \cup \varnothing\{e\}\varnothing = \varnothing$

$P_{32}^{(1)} = P_{32}^{(0)} \cup P_{31}^{(0)}(P_{11}^{(0)})^* P_{12}^{(0)} = x_2 \cup \varnothing\{e\}x_1 = x_2$

ст. 3

$P_{33}^{(1)} = P_{33}^{(0)} \cup P_{31}^{(0)}(P_{11}^{(0)})^* P_{13}^{(0)} = x_1 \vee e \vee \varnothing\{e\}x_2 = x_1 \vee e$

$P_{ij}^{(2)}: P_{11}^{(2)} = P_{11}^{(1)} \cup P_{12}^{(1)}(P_{22}^{(1)})^* P_{21}^{(1)} = \emptyset \cup x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1 = x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1$

$P_{12}^{(2)} = P_{12}^{(1)} \cup P_{12}^{(1)}(P_{22}^{(1)})^* P_{22}^{(1)} = x_1 \cup x_1(x_2 \cup \{e\} \cup x_1x_1)^* = x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^*$

$P_{13}^{(2)} = P_{13}^{(1)} \cup P_{12}^{(1)}(P_{22}^{(1)})^* P_{23}^{(1)} = x_2 \cup x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2 = x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2$

$P_{21}^{(2)} = P_{21}^{(1)} \cup P_{22}^{(1)}(P_{22}^{(1)})^* P_{21}^{(1)} = x_1 \cup (x_2 \cup \{e\} \cup x_1x_1)^* x_1 = (x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1$

$P_{22}^{(2)} = P_{22}^{(1)} \cup P_{22}^{(1)}(P_{22}^{(1)})^* P_{22}^{(1)} = (x_2 \cup \{e\} \cup x_1x_1)^*$

$P_{23}^{(2)} = P_{23}^{(1)} \cup P_{22}^{(1)}(P_{22}^{(1)})^* P_{23}^{(1)} = x_1x_2 \cup (x_2 \cup \{e\} \cup x_1x_1)^* x_1x_2 = (x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2$

$P_{31}^{(2)} = P_{31}^{(1)} \cup P_{32}^{(1)}(P_{22}^{(1)})^* P_{21}^{(1)} = \emptyset \cup x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1 = x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1$

$P_{32}^{(2)} = P_{32}^{(1)} \cup P_{32}^{(1)}(P_{22}^{(1)})^* P_{22}^{(1)} = x_2 \cup x_2(x_2 \cup \{e\} \cup x_1x_1)^* = x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^*$

$P_{33}^{(2)} = P_{33}^{(1)} \cup P_{32}^{(1)}(P_{22}^{(1)})^* P_{23}^{(1)} = x_1 \cup e \cup x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2 =$

$= e \cup x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2$

$P_{ij}^{(3)}: P_{12}^{(3)} = P_{12}^{(2)} \cup P_{13}^{(2)}(P_{33}^{(2)})^* P_{32}^{(2)} =$

$= x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* \cup x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2(e \cup x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2)^* \cdot$

$\cdot x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_2)^* = x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* \cup x_1x_1x_2x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_2)^*$

$\cdot (e \cup x_2^* \cup x_2e^* \cup x_2(x_1x_1)^* x_1x_2)^* =$

$= x_1x_1x_2x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^*(x_2 \cup e \cup x_2x_1^*x_2)^*$

$P_{13}^{(3)} = P_{13}^{(2)} \cup P_{13}^{(2)}(P_{33}^{(2)})^* P_{33}^{(2)} = x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2 \cup$

$\cup x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2(e \cup x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2)^* =$

$= x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2(e \cup x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2)^*$

$P = x_1x_1x_2x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^*(x_2 \cup e \cup x_2x_1^*x_2)^* \cup$ G. 4

$\cup x_1(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2(e \cup x_2(x_2 \cup e \cup x_1x_1)^* x_1x_2)^*.$

№ 3.

$\delta \backslash \lambda$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
x_1	$a_2/1$	$a_3/1$	$a_4/1$	$a_3/1$	$a_3/1$	$a_6/1$	$a_3/1$
x_2	$a_1/2$	$a_5/2$	$a_6/2$	$a_7/2$	$a_4/2$	$a_3/2$	$a_2/2$
x_3	$a_7/2$	$a_4/1$	$a_5/2$	$a_2/1$	$a_5/1$	$a_3/1$	$a_4/1$

$b_1 = \{a_1, a_3\}, \; b_2 = \{a_2, a_4, a_5, a_6, a_7\}$

$\delta^{(1)}$	b_1		b_2				
	a_1	a_3	a_2	a_4	a_5	a_6	a_7
x_1	b_2	b_2	b_2	b_1	b_1	b_2	b_1
x_2	b_1	b_2	b_2	b_2	b_2	b_1	b_2
x_3	b_2	b_2	b_2	b_2	b_2	b_1	b_2

$c_1 = \{a_1\}, c_2 = \{a_6\}, c_3 = \{a_3, a_2\}, \; c_4 = \{a_4, a_5, a_7\}$

$\delta^{(2)}$	c_1	c_2	c_3		c_4		
	a_1	a_6	a_2	a_3	a_4	a_5	a_7
x_1	c_3	c_2	c_3	c_4	c_3	c_3	c_3
x_2	c_1	c_3	c_4	c_2	c_4	c_4	c_3
x_3	c_4	c_3	c_4	c_4	c_3	c_4	c_4

$d_1 = \{a_1\}, d_2 = \{a_6\}, d_3 = \{a_2, a_5\}, d_4 = \{a_3\},$
$d_5 = \{a_4\}, d_6 = \{a_7\}.$

a.5

$\delta^{(3)}$	d_1	d_2	d_3		d_4	d_5	d_6
	a_1	a_6	a_2	a_5	a_3	a_4	a_7
x_1	d_3	d_2	d_4	d_4	d_5	d_4	d_4
x_2	d_1	d_4	d_3	d_5	d_2	d_6	d_3
x_3	d_6	d_4	d_5	d_3	d_3	d_3	d_5

№7. $1(01)^*$.

№14. $\forall L\ \exists$ const p – довжина накачки $: \forall\, w \in L,\ |w| \geq p \quad w = xyz:$

1) $|xy| \leq p$, 2) $|y| \geq 1$, 3) $\forall i \geq 0\ \ xy^iz \in L$.

Розгл. мову $P = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Припустимо, що P – регулярна $\Rightarrow \exists$ const p відповідно до леми. Розгл. слово $s = ww$, де $w = a^p$, $s = a^p a^p = a^{2p}$.

Згідно з лемою розбиваємо на 3 част.:

1) $x = a^i,\ i \geq 0$, 2) $y = a^j,\ j \geq 1$ 3) $z = a^{2p-i-j}$, де $|xy| = i+j \leq p$; $|y| = j \geq 1$.

$\forall k \geq 0$ слово xy^kz має належати мові P.

Нехай $k=2$: $xy^2z = a^i (a^j)^2 a^{2p-i-j} =$

$= a^{i+2j+2p-i-j} = a^{2p+j}$.

а. 6.

Але слово a^{2p+j} не має форми ww, бо j руйнує симетрію слова ww, тоді $xy^2z \notin P$. Отримуємо суперечність, P не є регулярною.

Ст. 7.

№10. а) За умовою, $P \subset Q$. Нехай $P = \{aa, ba, aaaa\}$, $Q = \{aa, ba\}$. Нехай є якесь слово $w \in P^*$, тоді w – результат конкатенації слів із P. Оскільки $P \subset Q$, то $w \in Q^*$. Тоді $aaaa$ – єдине слово, яким відрізняються події P і Q, але воно може бути утворене в результаті конкатенації слів aa і aa з P. Тому всі слова з Q^* можна утв. за допом. конкатенації із слів з P. Отже, $Q^* \subset P^*$.

б) Нехай $P = \{aa, ba, baba\}$, а $Q = \{aa, ba, aaaa\}$. За попередніми міркуваннями, $P^* \subset Q^*$ і $Q^* \subset P^*$, але $P \not\subset Q$.

№11. 1) Будуємо 2 скінч. автомати, користуючись алгоритмом синтезу ск. автоматів. Нехай r_1 – регулярний вираз першого, а r_2 – другого.

2) За допомогою алгоритму мінімізації мінімізуємо дані автомати.

3) Порівнюємо канонічні форми цих автоматів і робимо висновок: еквівалентні вони чи ні.

№15. Довжина та цикічна висота є основними критеріями для оцінки мінімальності регулярних виразів. На даний момент не існує оптимального алгоритму для пошуку оптимального регулярного виразу, еквівалентного даному, окрім повного перебору та порівняння.

№17. а) За умовою, P – непорожня подія. Тоді в $\forall$ події P є неподільне слово w, тобто слово, для якого не існує слів $v, t \in P$, відмінних від e, і таких, що $w = vt$. Якщо w – неподільне слово P, то, за умовою $w \in P^2$, що можливо лише коли $e \in P$.

б) Можна довести, що $P^n = P$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ за допомогою методу мат. індукції. Тоді будемо мати таке твердження:

$$P^* = \{e\} \cup P \cup P^2 \cup \ldots = \{e\} \cup P \cup P \cup \ldots = \{e\} \cup P.$$

Враховуючи результат, отриманий в пункті а) завдання отримаємо $P^* = P$.

Доводимо від супротивного:
№18. а) Нехай $P \vee R$ – регулярна подія, і автомат A її зображує. З множини заключних станів автомата A вилучимо стани, у які ведуть слові зі скінч. множ. $R \setminus P$; отримаємо автомат A', що зображує не-регулярну подію P, що суперечить умові про не-регулярність P.

б) Тут також доводимо від супротивного:
Нехай $S = P \setminus R$ – регулярна подія. Тоді подія $(P \setminus R) \vee R = P \vee R$ також регулярна, оскільки скінч. подія R – регулярна, а множина регулярних подій замкнена відносно операцій об'єднання і різниці. Отриманий висновок суперечить твердженню пункту а) завдання.

№16. Для автомата A' детермінізуємо джерело: воно буде таким же, як і для A, але із додатковою дугою від початкової до заключної вершини графу, що зображує даний автомат.

№12. Нехай в скінченному автоматі A з n станами зображувана регулярна і нескінченна подія P. Якщо A розпізнає подію P, то слово w ним допускається та існує ланцюг довжини n від початкової до заключної вершини графу. Шлях не буде простим, бо він проходитиме через (n+1) стан автомата. Тоді є цикл зі станом, що повторюється. Назвемо цей стан a_k.

Поділимо слово w на l_1, l та l_2 $(l \neq e)$. Автомат A повинен допускати слово $l_1 l l l_2$, бо слово може пройти циклічним маршрутом з a_k до a_k. Також всі слова l_1, l, l_2 $(l \neq e)$ переводять автомат A з поч. стану a_1 в заключний стан a_f, тому будуть належати P. Отже, подія P — нескінченна.

№22. $\pm dd^*\cdot d^*$;

Нехай x_1 – знак „+" або „–", x_2 – цифра, x_3 – крапка, а x_4 – будь-який символ. Також нехай a_0 – поч. стан, a_1 – ціла частина, a_2 – дробова частина, a_3 – помилка.

Отримаємо такий скінченний автомат:

б/λ	a_0	a_1	a_2	a_3
x_1	$a_1/1$	$a_3/0$	$a_3/0$	$a_3/0$
x_2	$a_1/1$	$a_1/1$	$a_2/1$	$a_3/0$
x_3	$a_2/1$	$a_2/1$	$a_3/0$	$a_3/0$
x_4	$a_3/0$	$a_3/0$	$a_3/0$	$a_3/0$

№8. 1) Знаходимо регулярний вираз r, що зображує подію $P_1 \cap P_2$, тобто, за заданими регулярними виразами r_1 та r_2 будуємо r.

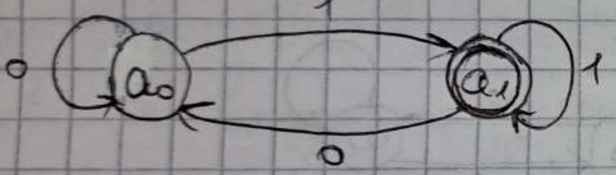
2) За отриманим виразом будуємо $P_1 \cap P_2$ за допомогою алгоритму синтезу скінч. автомата.

№13. Розглянемо подію в алфавіті $X=\{0,1\}$, яка скл. зі слів, які мають однакову відстань між символами 1 не вході. Будемо вважати, що вона поч. символами 01, а закінч. символом 1. Цю подію не можна зобразити в скінч. автоматі, тому вона не є регулярною (бо мн. можливих відстаней між символами $D=\{0,1,2\ldots\}$).

Будуємо вираз вигляду $z=p_1 p^k p_2$.
Нехай $p_1=0$, $p_2=1$, $p=10^m \Rightarrow 0(10^m)^k 1$.
Умова початку (01) та кінця (1) виконується $\forall k,m$. Крім того, вираз завжди містить всі можливі відст. між символами 1, залежно від знач. m.

Отже, подія задов. умову леми про накачку та не є регулярною.

№ 21.



Непарне число в двійковому поданні закінчується одиницею, тому останнім символом вхідного рядка має бути одиниця.

№23. $(a^*b)^*a^* = a^*(ba^*)^*$

Нехай $P = (a^*b)^*a^*$

$w \in P \Rightarrow w = (a^{k_1}b)(a^{k_2}b)\ldots(a^{k_m}b)a^n$,

де $k_1, k_2, \ldots, k_m, n = 0, 1 \ldots$

Можемо перегрупувати:

$w = a^{k_1}(ba^{k_2})(ba^{k_3})\ldots(ba^n)$

$\Rightarrow a^*(ba^*)^*$;

Отже, тотожність доведено.

№19. $X = \{0, 1\}$, к-сть „0" кратна 3:

$(1^*01^*01^*0)^*$