МКР №2.
з ДМ
групa: ІПС-11
Сеночко Д. В.
Варіант №25

03.12.

№1. а)

№2. Якщо Олег обирає яблуко, то він це робить $C_5^1 = 5$ способами, тоді Надійка обере яблуко $C_4^1 = 4$ способами, і апельсин $C_8^1 = 8$ способами.
За правилом добутку отримуємо $5 \cdot 4 \cdot 8 = 160$.
Якщо ж Олег обирає апельсин, то він це робить $C_8^1 = 8$ способами, тоді Надійка обере яблуко $C_5^1 = 5$ способами і апельсин $C_7^1 = 7$ способами.
За правилом добутку маємо $8 \cdot 5 \cdot 7 = 280$.
Тоді за правилом суми: $160 + 280 = 440$ способів.

Відповідь: 440.

№3. Правильні:
а) $C_6^0 = C_6^6$; е) $C_6^1 = C_6^5$.

№4. Однаково, бо можемо встановити бієкцію
$B \subset A$, $C \subset B$ | $\{B, A \setminus B\}$.

№10. Почнемо з 24 книги, тоді наступною беремо 22-гу книгу (через одну, щоб не брати поруч).
Тоді маємо 24!! способів.

Відповідь: 24!!.

№13. Щоб обрати місце для 7 тому в нас є $C_{18}^1 = 18$ способів. Тоді для 8 тому маємо два випадки:

1) 7 том ставимо скраю, тоді є $C_{16}^1 = 16$ способів розставити 8 том на полицю;
~~маємо 2·16 = 32 способи (бо можемо поставити як з лівого, так і з правого краю)~~;

2) 7 том ставимо не на краю, тоді є $C_{15}^1 = 15$ способів розмістити 8 том.

Всього: $18 \cdot 16 + 18 \cdot 15 = 18 \cdot 31 = 558$ способів.

Відповідь: 558.

№ 12. Групу з 15 чол. обираємо C_{48}^{15};
групу з 16 чол. – C_{33}^{16};
групу з 17 чол. – $C_{17}^{17}=1$;
а вибір трьох поверхів можна задати як A_{18}^{3}.

Загальна к-сть способів за правилом добутку:
$C_{48}^{15}\cdot C_{33}^{16}\cdot A_{18}^{3}$;

або

Якщо пасажири можуть вийти на одному поверсі (бо не сказано, що поверхи мають бути різними), то маємо $C_{18}^{1}=18$ способів.

Відповідь: $C_{48}^{15}\cdot C_{33}^{16}\cdot A_{18}^{3}$ – якщо всі групи можуть виходити лише на різних поверхах; 18 способів – якщо можуть вийти на одному. Також можливі варіанти, де дві групи виходять на одному поверсі, а третя – на іншому, але про це в умові задачі не написано.

№ 17. Першу смугу прапора можемо обрати $C_{16}^{1} = 16$ способами, а усі інші, щоб вони не повторювали попередні, вибираємо $C_{15}^{1} = 15$ способами, і їх у нас $(24-1) = 23$ штуки (забрали першу).

Отже, маємо $16 \cdot 15^{23}$ способів.

Відповідь: $16 \cdot 15^{23}$.

№ 18. Маємо 20 іспитів; може бути кілька іспитів у один день. Використовуємо розміщення з повторенням: $\overline{A}_{25}^{20} = 25^{20}$.

Вважаємо, що всі іспити різні, тому не застосовуємо урнову модель.

Відповідь: 25^{20}.

№ 19. Необхідно взяти $20 \cdot 15 + 1 = 301$ кулю.

Тоді, навіть якщо ми візьмемо кулі усіх кольорів в к-сті 15 шт., кулі одного з кольорів будуть в к-сті 16 шт.

Відповідь: 301.

№20. З умови можна визначити, що ми точно поки не отримаємо 21 кулю чорного чи білого кольору, тому візьмемо

$7+8+20+20+1=56$ куль.

Тоді, навіть якщо ми візьмемо всі 8 чорних та 7 білих куль, ми витягнемо >20 червоних або зелених куль.

Відповідь: 56.

№21. Застосовуємо урнову модель.

Маємо $C_{z_1+q-1}^{q-1}$ способів роздати дівчатам троянди; $C_{z_2+q-1}^{q-1}$ способів роздати гвоздики, та $C_{z_3+q-1}^{q-1}$ способів роздати волошки.

За правилом добутку:

$$C_{z_1+q-1}^{q-1}\cdot C_{z_2+q-1}^{q-1}\cdot C_{z_3+q-1}^{q-1}=\frac{(z_1+q-1)!}{(q-1)!\,z_1!}\cdot\frac{(z_2+q-1)!}{(q-1)!\,z_2!}\cdot\frac{(z_3+q-1)!}{(q-1)!\,z_3!}=\frac{(z_1+q-1)!\,(z_2+q-1)!\,(z_3+q-1)!}{((q-1)!)^3\cdot z_1!\cdot z_2!\cdot z_3!}.$$

№ 22. Для даного чоловіка існує $C_5^1 = 5$ способів опинитися в одному човні зі своєю дружиною. Інших 18 пасажирів розсадимо перестановками: $P_{18} = 18!$. Отримуємо $5 \cdot 18!$ способів.

Відповідь: $5 \cdot 18!$

№ 24. $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

Доведення:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(k-1)!(n-k)!} +$$

$$+ \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n-k+1)! + n!k!}{k!(k-1)!(n-k)!(n+1-k)!} =$$

$$= \frac{n!(n-k+1+k)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = C_{n+1}^k.$$

№ 26. Для 6-значного числа сума його цифр буде парною лише коли всі цифри цього числа парні, або коли всі цифри цього числа непарні.

1) Якщо усі цифри парні (0, 2, 4, 6, 8): використовуємо розміщення з повторенням:
$\bar{A}_6^5 = 6^5$;

2) Так само, якщо усі цифри непарні (1,3,5,7,9):

$\overline{A_6^5} = 6^5$.

Отже, маємо $2 \cdot 6^5$ таких чисел.

Відповідь: $2 \cdot 6^5$.

№28. а) Всі 3 мови знають два студенти.

Нехай множина A – студенти, які знають Паскаль, мн. B – Фортран і C – Бейсік.

Шукаємо їх перетин: $A \cap B \cap C$

$10+7+6-5-4-3 \Rightarrow 12 + A \cap B \cap C$

$13-23+12=2$.

б) Рівно 2 мови знає 6 студентів: від к-сті тих, хто знає щонайменше 2 мови, віднімаємо тих, хто знає всі 3 мови:

$(5-2)+(4-2)+(3-2)=3+2+1=6$.

№27. а) $100\% - (|A|+|B|+|C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + (|A \cap B \cap C|) = 100\% - \left(\overset{160\%}{(60+50+50)\%} - \overset{90\%}{(30+20+40)\%} + 10\%\right)$

$= 20\%$

Отже, 20% студентів не читає жодного журналу.

б) $|A| - (|A \cap C| + |A \cap B|) + |A \cap B \cap C| = 60\% -$
$- (30+40)\% + 10\% = 0\%$

Отже, 0%, тобто ніхто, не читав тільки „Лель".

№5. Обираємо рівно 4 із 6 правильних цифр: C_6^4 та 2 неправильні цифри з решти $39-4=35$ цифр: C_{35}^2.

Отримуємо $C_6^4 \cdot C_{35}^2$ варіантів.

Відповідь: $C_6^4 \cdot C_{35}^2$.

№6. Кожне із 9 потрібних тістечок ми можемо обрати 7 способами (або ж не кожне тістечко, що ми маємо купити в кас є 7 варіантів вибору). Отримаємо 7^9 варіантів.

Відповідь: 7^9.

№8. Є 9 позицій, куди можна поставити нуль (+ одна до нулів та одна в кінці). Тому к-сть способів: $C_9^6 = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$ способи.

Відповідь: 84.