Теорія Мат Аналіз Екзамен

Поняття числового ряду. Збіжність і сума ряду. Необхідна умова збіжності. Критерій Коші.

Поняття числового ряду

Розглянемо нескінченну числову послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Складений з її елементів вираз

$$x_1 + x + \ldots + x_n + \ldots \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \qquad (1)$$

називається числовим рядом, де x_n - загальний член ряду, виражений як функція номера n ($x_n = \frac{1}{n}, x_n = aq^{n-1}$). Складемо з елементів ряду такі суми, які називаються частковими: $S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \ldots, S_n = x_1 + \ldots + x_n$.

Означення. ***Числовий ряд називається збіжним***, якщо $\exists$ скінченна границя послідовності його часткових сум – ця границя називається сумою ряду ($\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$), в протилежному випадку ряд називається розбіжним ($\not\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ або $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$).

Необхідна ознака збіжності ряду.

Якщо ряд (1) збіжний, то його n-тий член x_n ***при необмеженому зростанні*** n ***прямує до нуля*** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ***.***

Розглянемо часткові суми $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, S_{n-1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$.

Звідси маємо $x_n = S_n - S_{n-1}$.

Оскільки ряд збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Наслідок. Якщо n-тий член ряду при $n \to \infty$, ***не прямує до 0, то ряд розбіжний.***

Критерій Коші збіжності числового ряду

Для того, щоб ряд ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$) збігався $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N i \forall p \in \mathrm{N}$ $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon, \text{або} \mid \mathrm{x}_{n+1} + \mathrm{x}_{n+2} + \ldots + \mathrm{x}_{n+p} \mid < \varepsilon$

Доведення аналогічне доведенню критерія Коші для послідовностей. Для гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ маємо: $\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| > \left.\frac{p}{n+p}\right|_{n=p} = \frac{1}{2} > \varepsilon$, для $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ і, отже, ряд розбіжний.

Ряди з невід‘ємними членами. Ознаки збіжності (Даламбера,Коші, Раабе, порівняння із степенем).

Ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, всі члени яких невід’ємні $a_n \geq 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, S_{n+1} \geq S_n$.

Критерій збіжності додатного числового ряду.

Для того, щоб ряд з додатними членами був збіжним необхідно і достатньо, щоб S_n була обмежена зверху

Ознаки збіжності додатних рядів

Ознака порівняння рядів

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) додатні (невід'ємні) і не перевищують відповідних членів збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (2)$, тобто $a_n \le b_n, \forall n > N$, то ряд (1) збіжний, розбіжність (1) викликає розбіжність (2).

Доведення. Нехай $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} a_k, S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} b_k$ Оскільки ряд (2) збіжний, то $\lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S^2, 0 \le a_1 \le b_1, 0 \le a_2 \le b_2, ..., 0 \le a_n \le b_n \Rightarrow S_n^{(1)} \le S_n^{(2)} \le S^2$, оскільки $a_n \ge 0$, то S_n зростає при збільшенні n, але не більше S^2, а $\forall$ зростаюча обмежена послідовність має границю. Необмеженість $S_n^{(1)}$ викликає необмеженість $S_n^{(2)}$ і ряд (2) – розбіжний

Ознака збіжності Даламбера (1717-1783).

Нехай всі члени ряду $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ додатні і $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$ тоді при умові

1) $l < 1$ - ряд збіжний

2) $l > 1$ - розбіжний

3) $l = 1$ - ознака відповіді не дає.

Доведення: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon$ при достатньо великому $n \ge N$, $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$ при $n \ge N$.

Розглянемо 3 випадки: 1) $l < 1$ і візьмемо ε, що $l + \varepsilon < 1$.

Покладемо $l+\varepsilon=q$, тоді $0<q<1$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q, a_{n+1}<qa_n, \forall n\geq N.$ При $n=N, N+1, N+2,...$ будемо мати низку нерівностей $a_{N+1}<a_N q, a_{N+2}<a_N q^2, a_{N+3}<a_N q^3...$ і члени ряду будуть менше членів геометричної прогресії $a_{N+1}+a_{N+2}+...<a_N q+a_N q^2...$

При $|q|<1$ ряд збігається, а за ознакою порівняння збігається ряд $a_{N+1}+a_{N+2}+...$, отже, і вихідний ряд.

2) $l>1, \varepsilon>0$ таке, що $l-\varepsilon>1$ і $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1; a_{n+1}>a_n$ при $n=N, N+1, N+2,...; a_N<a_{N+1}<a_{N+2}<...$ члени зростають і не прямують до 0, а прямують до ∞.

3)при $l=1$ на прикладах показується, що ряд як збігається, так і розбігається.

<u>Ознака Коші</u>

Якщо ряд строго додатній: $a_n>0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то при $q<1$ ряд збіжний, $q>1$ ряд розбіжний, при $q=1$ - невідомо.

<u>(Узагальнена радикальна ознака Коші)</u>

Для ряду $\sum a_n$ позначимо $q=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$, тоді: якщо $q<1$, то ряд $\sum a_n$ - збіжний; якщо $q>1$, то ряд $\sum a_n$ - розбіжний.

<u>Ознака порівняння із степенем.</u>

Якщо при $n\to\infty$ $a_n=O(\frac{1}{n^p})$, то при $p>1$ ряд (1) збігається, при $p\leq 1$ - розбігається.

Приклад. $a_n=\ln\cos\frac{e}{n}=\ln(1-\frac{1e^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))=-\frac{e^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})=O(\frac{1}{n^2})$ - ряд збігається, $p=2>1.$

<u>Ознака Раабе.</u>

Якщо ряд (1) додатній строго і $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=p,$ то при $p>1$ ряд - збіжний, при $p<1$ - розбіжний, $p=1$ - ? $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ - послідовність Раабе.

Ряди з довільними членами. Ознака Лейбніца.

Ряди з довільними членами-ряди, частина членів яких додатна, частина – від'ємна, частина дорівнює нулю

Ряд Лейбніца – це ряд вигляду: $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots$, або $a_1 + (-a_2) + a_3 + (-a_4) + a_5 + (-a_6) + \ldots, a_n \geq 0, при \quad n = 1,2,\ldots$

<u>Теорема Лейбніца.</u> Якщо модулі членів ряду (1) монотонно спадають: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots$ ***при зростанні n, і n-тий член ряду прямує до 0,*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$***, то ряд збігається і*** $0 < S \leq a_1$***.***

Доведення: Візьмемо суму S_{2m} членів.

$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m})$, то $S_{2m} \geq 0$

Якщо 2m зростає, то S_{2m} не спадає (додаються невід'ємні доданки)

Представимо S_{2m} в іншому вигляді:

$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) + \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$

Звідси $S_{2m} \leq a_1$ і є монотонно зростаючою і обмеженою послідовністю і $\exists \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S, S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, а $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$ і $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$, тобто при парному n=2m та непарному n=2m+1 існує одна границя і ряд збіжний.

Абсолютна й умовна збіжності

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. При дослідженні рядів на абсолютну збіжність використовуємо ознаки збіжності для рядів з невід'ємними членами.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ називається ***умовно збіжним***, якщо цей ряд збіжний, а ряд із модулів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ - розбіжний.

Ознаки збіжності Абеля та Діріхле

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$, $a_n, b_n -$ дві послідовності дійсних чисел

<u>Ознака Абеля.</u>

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$ збігається, а числа a_n утворюють монотонну і обмежену послідовність $|a_n| \le k, n = 1,2...$, то ряд збіжний.

<u>Ознака Діріхле-Абеля</u>

Якщо часткові суми ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ обмежені $|S_n| = |\sum_{k=1}^{n} b_k| \le M$, $|S_n| \le M, S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, а числа a_n утворюють монотонну послідовність, що прямує до 0: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд збіжний.

Ознака Лейбніца є частковий випадок цієї ознаки при $b_n = (-1)^{n+1}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 - 1 + 1 - 1....$ має обмежену послідовність часткових сум.

Функціональні ряди. Рівномірна збіжність

Відображення $N \xrightarrow{\Phi} F$, де F - множина всіх функцій називається ***<u>функціональною послідовністю (ФП)</u>***. Значення відображення $\Phi(n) = f_n$ називається $n-$***м членом***, та будемо її позначати (f_n).

Функціональна послідовність (S_n) називається ***<u>функціональним рядом (ФР)</u>***, якщо існує така функціональна послідовність (f_n), для якої виконується умова: $\forall n \in N \quad \forall x \in X \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Такий функціональний ряд будемо позначати $\sum f_n$. Значення S_n називається ***частковою сумою*** ФР $\sum f_n$, а функція f_n її ***загальним членом*** ($n-$м членом) функціонального ряду.

Функціональна послідовність (f_n) називається ***<u>поточково збіжною</u>*** до функції f, якщо $\forall x \in X \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Функціональний ряд (2) – збіжний в т. $x_0 \in X$, якщо збіжний в цій точці відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$,або $\exists \lim_{n\to\infty} S_n(x_0)$ і абсолютно збіжний в т. x_0, якщо при $x = x_0$ збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

Поточковою сумою ФР $\sum f_n$ на множині X називається поточкова границя його часткових сум, якщо вона існує. ФР називається ***поточково збіжним*** на X, якщо його поточкова сума існує та скінченна в кожній точці множини X.

Мажорантна ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціональнного ряду.

ФР (2) $\sum f_n$ називається ***рівномірно збіжним***, якщо послідовність його часткових сум (S_n) рівномірно збігається, тобто $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$, $x \in X$, а саме: $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in N : \forall n > N |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \forall x \in X$ одночасно, або $\sup\limits_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, або $r_n(x) = S(x) - S_n(x) \rightrightarrows 0 \quad \forall x \in X$.

Ознака Вейєрштрасса. Якщо для функціонального ряду (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ можна вказати такий числовий збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, що $\forall n \geq n_0,\ \forall x \in X : |f_n(x)| \leq a_n,$ то ряд (2) збігається абсолютно і рівномірно на X. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають <u>мажоруючим</u> для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Доведення:

За критерієм Коші маємо:

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon,$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k\right| < \varepsilon \qquad \forall\ n > N,\ \forall\ p = 1, 2, \ldots$$

Ознаки рівномірної збіжності Абеля та Діріхле

(Ознака Абеля рівномірної збіжності ФР)

Нехай $\forall x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ монотонна. Якщо ФР $\sum \varphi_n \rightrightarrows$ і $\|f_n\| = O(1)$, то ряд $\sum f_n \varphi_n \rightrightarrows$ на X.

(Ознака Діріхле рівномірної збіжності ФР)

Нехай $\forall x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ монотонна. Якщо ФР $\|f_n\| = o(1)$ і $\left\|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right\| = O(1)$, то ряд $\sum f_n \varphi_n \rightrightarrows$ на X.

Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності

ФР вигляду $\sum a_n (x - x_0)^n$, де $n \in Z^+$ називається ***степеневим рядом*** (***СР***). $\sum a_n x^n$

Степеневий ряд – це функціональний ряд, а саме нескінченний многочлен $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Множина значень *х*, при яких ряд збігається називається ***областю збіжності степеневого ряду.***

Теорема 1(Абеля).

Якщо степеневий ряд збіжний в точці $x = x_0 \neq 0,$ *то він абсолютно збіжний для всіх х , для яких* $|x| < |x_0|$; *якщо ряд розбіжний при* $x = x_{1,}$, *то він розбіжний при* $\forall x : |x| > |x_1|.$

Доведення:

Оскільки ряд $\sum a_n x_0^n -$ збіжний, то загальний член ряду прямує до нуля : $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, а отже, обмежений : $|a_n x_0^n| \leq M, n = 0,1,2....$ Візьмемо $\forall x : |x| < |x_0|$ і складемо ряд : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n (\frac{x}{x_0})^n.$ Складемо ряд із абсолютних величин: $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| |(\frac{x}{x_0})^n| \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = Mq^n$, $q < 1, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n -$ це ряд, елементи якого складають геометричну прогресію, q<1, а отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - абсолютно збіжний за ознакою порівняння. Якщо ряд розбіжний в точці x_0, то він розбіжний при $\forall x : |x| > |x_0|$. При x=0 збігаються всі степеневі ряди. Є ряди, які не збігаються при жодному значенні x.

Радіус збіжності???Інтервал (-R, R) називається проміжком збіжності, а число R $(0 < R \le +\infty)$ - радіусом збіжності ряду. При R=0 ряд всюди розбіжний , область його збіжності складається з однієї точки $x = 0$.

(Формула д'Аламбера для радіуса збіжності)

Якщо для степеневого ряду $\sum a_n x^n$ існує $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in \overline{R}$, то радіус збіжності степеневого ряду можна знайти за формулою: $R = 1/l$.

Розвинення функцій в степеневі ряди. Критерій розвинення функцій в степеневі ряди.

Будемо казати, що функція $(-R,R)\xrightarrow{f} R$ $\left(X \xrightarrow{f} R\right)$ ***<u>може бути розкладеною в степеневий ряд</u>*** на множині $(-R,R)$ (на множині X), якщо існує СР, що збігається до функції f на множині $(-R,R)$ (на множині X), тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R,R)$ $(x \in X)$.Будемо казати, що функція $(-R,R)\xrightarrow{f} R$ $\left(X \xrightarrow{f} R\right)$ ***<u>може бути розкладеною в степеневий ряд</u>*** на множині $(-R,R)$ (на множині X), якщо існує СР, що збігається до функції f на множині $(-R,R)$ (на множині X), тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R,R)$ $(x \in X)$.

<u>Критерій розвинення функції в степеневий ряд</u>

Для того, щоб функція_f(x) могла бути розвинена в ряд Тейлора на (-R, R) ,

$\Leftrightarrow$ щоб залишковий член в формулі Тейлора прямував до 0 на вказаному інтервалі:

Необхідність: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - збіжний ряд на (-R, R) ,

$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$ - залишок збіжного ряду в кожній точці $x \in$ (-R, R) є збіжним,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$$

Достатність: нехай $R_n(x) \to 0$ в точці $x \in$ (-R, R) при $n \to \infty$.

$$|R_n(x)| = f(x) - S_n(x).$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x) - R_n(x)] = \lim_{n\to\infty} f(x) - 0 = f(x).$$

Зауважимо, що відрізками степеневих рядів є многочлени і тому степеневі ряди – зручний спосіб для наближених обчислень.

Теорема 5. (достатні умови розвинення в степеневий ряд)

Якщо функція $f(x) \in C^{\infty}(-R;R)$ і всі похідні обмежені одним і тим самим числом $\left|f^{(k)}(x)\right| \le M, k = 1,2,...n...$, то має місце розвинення $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Ортогональні й ортонормовані системи. Процес ортогоналізації

Функції $f \in R[a,b]$ і $g \in R[a,b]$ називають *ортогональними*, якщо $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$

Розглянемо систему функцій $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n ...\} \subset R[a,b]$ (1)

Систему (1) називають *ортогональною на* $[a,b]$, якщо $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \ne j \\ \|\varphi_i\|^2 > 0, & i = j \end{cases}$.

Якщо $\|\varphi_i\| = 1$,то $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ називають *ортонормованою*. Будь-яку ортогональну систему можна нормувати: підібрати $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n ...$ так щоб $\mu_0\varphi_0, \mu_1\varphi_1, ..., \mu_n\varphi_n ...$, яка ортогональна, була ортонормована $\int_a^b \mu_n^2 \varphi_n^2(x)dx = \mu_n^2 \int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1$, $n = 0,1,2,...$, звідси $\mu_n = \dfrac{1}{\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}} = \dfrac{1}{\|\varphi_n\|}$

ПРОЦЕС ОРТОГОНАЛІЗАЦІЇ???

Ряд Фур'є по ортогональних системах

Нехай $f(x)$ задана на $[a,b]$ і може бути представлена у вигляді ряду по ортогональній системі $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$: $f(x) = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n + \dots$, $a_i - const$

Поставимо задачу обчислити постійні a_i.

Припускаємо, що ряди
$f(x)\varphi_n(x) = a_0\varphi_0(x)\varphi_n(x) + a_1\varphi_1(x)\varphi_n(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)\varphi_n(x) + \dots$ можна інтегрувати, $n = 0,1,2,\dots$, $\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = a_n\|\varphi_n\|^2$, $a_n = \dfrac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$, $n = 0,1,2,\dots$

Має місце твердження: якщо функції системи $\{\varphi_n(x)\}$ неперервні і для $f(x)$ справедливе представлення $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, причому ряд збігається рівномірно, то це є ряд Фур'є для $f(x)$, а a_n називається *коефіцієнтами Фур'є*.

Ряди Фур'є для парних та непарних функцій

Нагадаємо, що функція називається парною, якщо $f(-x) = f(x)$ і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Для парної функції $\int_{-e}^{e} f(x)dx = 2\int_0^{e} f(x)dx.$

$$\int_{-e}^{e} f(x)dx = \int_{-e}^{0} f(x)dx + \int_0^{e} f(x)dx = \int_0^{e} f(-x)dx + \int_0^{e} f(x)dx = 2\int_0^{e} f(x)dx,$$

$\int_{-e}^{e} f(x)dx = 0$ для непарної функції.

Нагадаємо, що

а) добуток двох парних і двох непарних функцій є парна функція;

б) добуток парної і непарної – є непарна функція.

Гладкі та кусково-гладкі функції

Функція $f(x)$ називається гладкою на $[a,b]$, якщо вона має неперервну похідну. Геометрично це означає, що при переміщенні вздовж кривої $y = f(x)$ напрямок дотичної змінюється неперервно, без стрибків. Функція, похідна якої допускає лише скінченне число точок розриву I-го роду називається *кусково-гладкою* на $[a,b]$.

а) розривна кусково-гладка функція;

б) гладка функція,плавна крива без кутових точок;

в) неперервна кусково-гладка функція

Графік кусково-гладкої функції є неперервна або розривна крива, що має скінченну кількість кутових точок (в них скачок похідної).

Будь-яка кусково-гладка функція $f(x)$ (неперервна чи розривна) обмежена і має обмежену похідну скрізь, за виключенням кутових і точок розриву (в цих точках не існує $f'(x)$).

Теорема. ***Ряд Фур'є кусково-гладкої функції*** $f(x)$ ***(неперервної чи розривної), визначеної на (*** $-\infty,+\infty$ ***) періоду*** $T = 2e$ ***збігається для*** $\forall$ $x \in (-\infty,+\infty)$***, причому його сума*** $S(x) = f(x)$ ***в кожній точці неперервності і дорівнює півстрибку*** $S(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ ***в кожній точці розриву*** x_0 ***.***

Якщо $f(x)$ всюди неперервна, то ряд збігається абсолютно і рівномірно.

Невласні інтеграли першого роду.

При визначенні $\int_a^b f(x)dx$ (такий інтеграл називається власним, але це слово зазвичай опускається) передбачалось, що

а) проміжок $[a,b]$ ***скінченний;***

б) підінтегральна функція визначена , неперервна на $[a,b]$***, обмежена*** і множина точок розриву мають Лебегову міру нуль.

Якщо порушуються пункти а) або б), то інтеграл називається **невласним**.

Означення 1.

Нехай $f(x)$ ***визначена на*** $a \le x < +\infty$ ***і інтегровна на*** $[a,R]$***,R>0, так що***

$\int^R f(x)dx$

Невласні інтеграли з двома нескінченними границями можна обчислити як суму двох невласних інтегралів:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Нехай $F(x)$ - первісна функція для $f(x)$ тоді

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{a}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}(F(R)-F(a))$$

.

Якщо існує первісна $F(x)$, неперервна на $[a,b]$ і така , що $F'(x) = f(x)$, узагальнена первісна, та ввести умовне позначення $F(+\infty) = \lim_{R\to\infty} F(R)$, то для

збіжного невласного інтеграла з нескінченною верхньою межею інтегрування узагальнена формула Ньютона –Лейбніца має вигляд:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$$

, де $F'(x) = f(x)$

<u>Означення 3.</u> Невласний інтеграл I-го роду збігається, якщо

$\forall\varepsilon > 0 \exists\Delta(\varepsilon) > 0 : \forall A \in [a,\infty)$ з того, що A> Δ $\Rightarrow$ $\left| S(A) - \int_{a}^{\infty} f(x)dx \right| < \varepsilon$.

<u>Деякі властивості невласних інтегралів I-го роду:</u>

Якщо невласний інтеграл збіжний, то збіжний його залишок та навпаки, причому:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \int_{a}^{A} f(x)dx + \int_{A}^{+\infty} f(x)dx$$

Якщо збігається $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$, то $\lim_{A\to\infty}\int_{A}^{\infty} f(x)dx = 0$

Якщо збігається $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$, то збігається $\int_{a}^{\infty} cf(x)dx$, c – const, причому

$$\int_{a}^{\infty} cf(x)dx = c\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

Якщо збігаються інтеграли

$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ та $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$, то збігається інтеграл

$\int_{a}^{\infty} [f(x) \pm g(x)]dx$ та інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів.

<u>Критерій Коші збіжності невласного інтеграла I-го роду</u>

Для того, щоб $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ - збігався

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\Delta(\varepsilon) > 0 : \forall A', A'' \in [a,\infty), A' > \Delta, A'' > \Delta \Rightarrow$

$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon$.

Невласні інтеграли другого роду.

Інтеграл від необмежених функцій

$f:[a,b)\to R$ $\exists\int_a^{b-\eta} f(x)dx, \lim_{x\to b-0} f(x)=\infty$, точка b –особлива, якщо функція необмежена на $[a,b)$, але обмежена на $[a,b-\eta)\subset[a,b)$.

Означення 2.

$$\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

називається невласним інтегралом II-го роду. *Якщо границя скінченна, то невласний інтеграл називається збіжним ,якщо границя нескінченна або не існує, то інтеграл називається розбіжним.*

Якщо точка а – особлива, то $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^b f(x)dx$

(2)

Якщо $f(x)$ необмежена у внутрішній точці с$\in[a,b]$то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \quad , \quad (3)$$

де невласні інтеграли другого роду визначаються (1) та (2).

Якщо а і b особливі точки ,то $\int_a^b f(x)dx$ визначається (3), де $c\forall\in[a,b]$

Означення 4. Невласний інтеграл II-го роду збігається, якщо $\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall\lambda\in[a,b)$

0<b-$\lambda<\delta$ $\Rightarrow$ $\left|S(\lambda)-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$, де S($\lambda$) = $\int_a^\lambda f(x)dx$.

Критерій Коші збіжності невласного інтеграла II-го роду

Для того, щоб $\int_a^b f(x)dx$ - збігався $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\delta(\varepsilon):\lambda',\lambda''\in[a,b)$ 0<b-$\lambda'<\delta$,

0<b-$\lambda''<\delta$ $\Rightarrow$ $\left|\int_{\lambda'}^{\lambda''} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

Наведені критерії мало придатні на практиці, існують достатні умови збіжності невласних інтегралів.