№1 МШБ.

Основна СЗЛП: $L(x) \to \min$, $Ax = b$, $x \ge 0$. (без обмеж. заг. $b \ge 0$)

Доповнена КЗЛП: $\bar{L} = y_1 + \ldots + y_m \to \min$,

$Ax + Iy = b$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $b \ge 0$, де $y = (y_1, \ldots, y_m)$ – штучні змінні, I – одинична матриця $m \times m$.

Якщо D та $\bar{D}$ – допустимі області цих задач, то відповідні їх змінним (~~[illegible]~~) вектори умов утворюють штучний базис.

Далі розв'язуємо доповнену КЗЛП симплекс-методом.

Так як $y \ge 0$, можливі два випадки:

1) $\min \bar{L} = 0$, $x \in \bar{D}$. 2) $\min \bar{L} > 0$, $x \in \bar{D}$.

Розглянемо перший випадок:

$\min \bar{L} = 0$, $x \in \bar{D}$ можливе тільки тоді, коли $y_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Тому оптим. розв. $\bar{x}^*$ має вигляд $\bar{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*, 0, \ldots, 0)$.

(серед x_j^*, $j = 1, \ldots, n$ не більше m відмінних від 0).

Тепер, якщо перейти від вектора $\bar{x}^*$ до $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, то $x^* \in D$ і зберігає властивості базисності.

x^* – базисний розв. СЗЛП.

№2. $L(x) \geq L^*(y)$ (стандартна і двоїста ЗЛП)

Нехай $L(x) = c^T x$ – цільова ф-я СЗЛП, $c^T x \to \min$, $Ax \geq b$, $x \geq 0$

а $L^*(y) = b^T y$ – цільова ф-я ДЗЛП, $b^T y \to \max$, $A^T y \leq c$.

Оскільки $A^T y \leq c$, $x \geq 0$: $y^T A x = (A^T y)^T x \leq c^T x$;

$$Ax = b \Rightarrow y^T A x = y^T b = b^T y$$

$$\Downarrow$$

$$b^T y = y^T A x \leq c^T x$$

$$b^T y \leq c^T x \iff L(x) \geq L^*(y) \quad \square.$$

№ 3. $C = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 20 & 4 \end{pmatrix}$ $a = (15; 25; 50)$ – запаси

$b = (10; 20; 60)$ – потреби

	B_1	B_2	B_3	a
A_1	10	16	2	15
A_2	1	4	4	25
A_3	2	20	4	50
b	10	20	60	

задача збалансована:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$$

Пряма ЗЛП:

Шукаємо обсяги перевезень x_{ij}, де i – постачальники (A), j – споживачі (B). Цільова ф-я: $Z = 10x_{11} + 16x_{12} + 2x_{13} + 1x_{21} + 4x_{22} + 4x_{23} + 2x_{31} + 20x_{32} + 4x_{33} \to \min$. a, b – обмеження, $x_{ij} \geq 0$.

Двоїста задача:

u_i – потенціал постач. i; v_j – потенціал споживача j. $\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \leq 10 \\ u_1 + v_2 \leq 16 \\ u_1 + v_3 \leq 2 \\ \dots \end{pmatrix}$

Цільова ф-я: $W = 15u_1 + 25u_2 + 50u_3 + 10v_1 + 20v_2 + 60v_3 \to \max$

	B_1	B_2	B_3	
A_1	10	5	0	15
A_2	0	15	10	25
A_3	0	0	50	50
	10	20	60	

$m+n-1 = 5$ – к-сть заповнених кліт. правильне

$\boxed{u_i + v_j = c_{ij}}$ $u_1 = 0$, $v_1 = 10$, $v_2 = 16$,

$u_2 + v_2 = 4$, $u_2 = -12$, $v_3 = 16$;

$v_3 + u_3 = 4$, $u_3 = -12$.

$\boxed{\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)}$ $\Delta_{13} = 2 - 0 - 16 = -14$

$\Delta_{21} = 1 + 12 - 10 = 3$

$\Delta_{31} = 2 + 12 - 10 = 4$

$\Delta_{32} = 20 + 12 - 16 = 16$

$\min \Delta_{ij} = \Delta_{13} = -14 < 0$.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	0	0	15	15
A_2	5	20	0	25
A_3	5	0	45	50
	10	20	60	

$u_1 = 0, \quad v_3 = 2$

$u_3 = 2, \quad v_1 = 0$

$u_2 = 1, \quad v_2 = 3$

$\Delta_{11} = 10 - 0 - 0 = 10$

$\Delta_{12} = 16 - 0 - 3 = 13$

$\Delta_{23} = 4 - 1 - 2 = 1$

$\Delta_{32} = 20 - 2 - 3 = 15$

$\Delta_{ij} \geq 0$ – отримали оптимальне рішення.

$Z = 2 \cdot 15 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 45 = 305.$