Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №1

з курсу

«Управління динамічними системами»

на тему:

«Аналітичне розв’язування диференціальних рівнянь за допомогою комп’ютерних пакетів програм»

Виконала:
студентка групи ІПС-21
факультету комп’ютерних наук та кібернетики
Сенечко Д. В.

Київ - 2024

Зміст

Умова *Завдання №1* згідно з **Варіантом №1.**

Розв’язати рівняння (показати вигляд загального розв’язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв’язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$$

Точки, вибрані для розв’язку задачі Коші:

1) $(\sqrt{2}, 1)$
2) $(\sqrt{2}, -1)$
3) $(-\sqrt{2}, 1)$
4) $(-\sqrt{2}, -1)$

Представлення розв’язку аналітично (в зошиті)

№1. $(x^2-1)y'+2xy^2=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^2}{(x^2-1)} \quad \Big| \cdot dx$$

$$dy=-\frac{2xy^2\,dx}{(x^2-1)} \quad \Big| : y^2$$

$$\frac{dy}{y^2}=-\int\frac{2x\,dx}{(x^2-1)}$$

$$-2\int\frac{x\,dx}{(x^2-1)}=\left|\begin{array}{l} u=x^2-1 \\ \frac{1}{2}du=x\,dx \end{array}\right|=-2\int\frac{1}{2u}du=$$

$$=-\ln|u|+C=-\ln|x^2-1|+C$$

$$-\frac{1}{y}=-\ln|x^2-1|+C$$

$y=\dfrac{1}{\ln|x^2-1|+C}$ – загальний розвязок;

Задача Коші:

1) $y(\sqrt{2})=1$, $1=\frac{1}{C_1}$, $C_1=1$, $y=\dfrac{1}{\ln|x^2-1|+1}$;

2) $y(-\sqrt{2})=1$, $1=\frac{1}{C_2}$, $C_2=1$, $y=\dfrac{1}{\ln|x^2-1|+1}$;

3) $y(\sqrt{2})=-1$, $-1=\frac{1}{C_3}$, $C_3=-1$, $y=\dfrac{1}{\ln|x^2-1|-1}$;

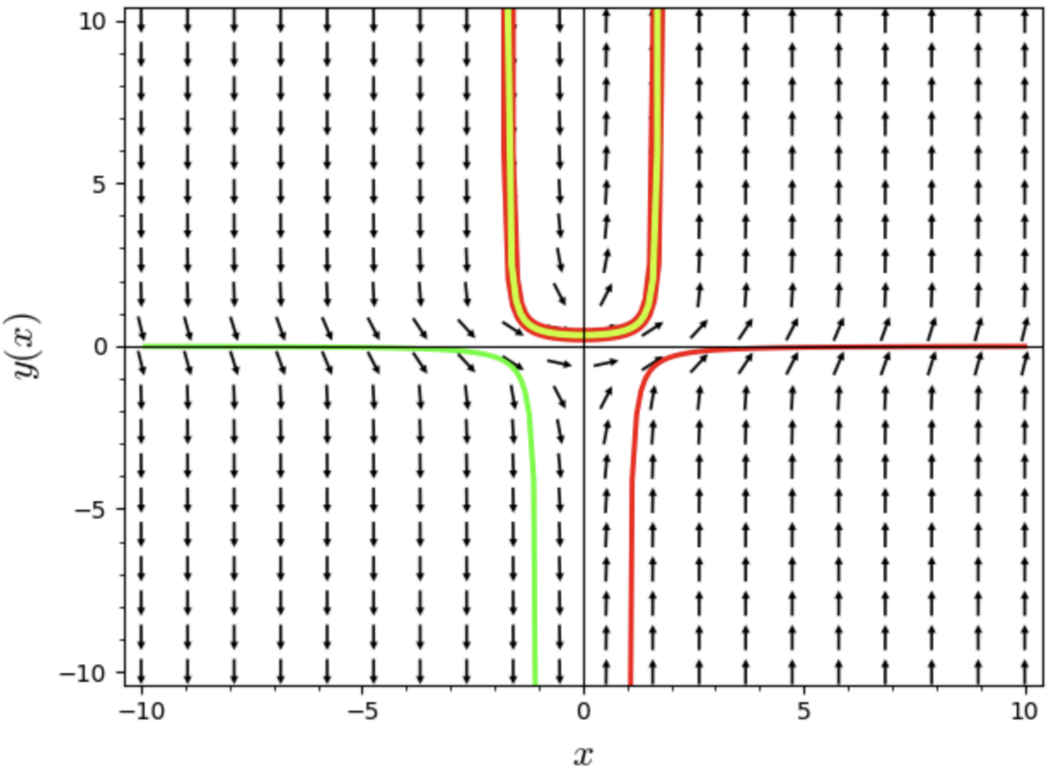
4) $y(-\sqrt{2})=-1$, $-1=\frac{1}{C_4}$, $C_4=-1$, $y=\dfrac{1}{\ln|x^2-1|-1}$.

Код програми (Sage)

```
#general solution
y = function('y')(x)
de = (x^2-1)*diff(y,x)+2*x*y^2
solution = desolve(de, y)
solution.show()

#Couchy problem solution
points = [[(sqrt(2)),1], [(sqrt(2)),-1], [-(sqrt(2)),1], [-(sqrt(2)),-1]]
couchy_solutions = []
for i in range(4):
    couchy_solutions.append(desolve(de,y,ics=points[i]))
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].simplify_full()
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].canonicalize_radical()
    couchy_solutions[i].show()

#direction fields
x = var('x')
y = var('y')
f(x,y)=(x^2-1)*diff(y,x)+2*x*y^2
p=plot_slope_field(f,(x,-10,10),(y,-10,10), headaxislength=3,
headlength=3,axes_labels=['$x$','$y(x)$'])

#plot of Couchi problem solution
p+=desolve_rk4(f,y,ics=[sqrt(2),1],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=6,rgbcolor=hue(1))
p1=desolve_rk4(f,y,ics=[-sqrt(2),1],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=3,rgbcolor=hue(0.2))
p2=desolve_rk4(f,y,ics=[(sqrt(2)),-1],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(1))
p3=desolve_rk4(f,y,ics=[-(sqrt(2)),-1],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(0.3))
show(p+p1+p2+p3,xmin=-10,xmax=10,ymin=-10,ymax=10)
```

Результат роботи програми (Sage)

$$\frac{1}{2\,y\left(x\right)} = C + \frac{1}{2}\,\log\left(x+1\right) + \frac{1}{2}\,\log\left(x-1\right)$$
$$\frac{1}{2\,y\left(x\right)} = \frac{1}{2}\,\log\left(x+1\right) + \frac{1}{2}\,\log\left(x-1\right) - \frac{1}{2}\,\log\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{2}\,\log\left(\sqrt{2}-1\right) + \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\,y\left(x\right)} = \frac{1}{2}\,\log\left(x+1\right) + \frac{1}{2}\,\log\left(x-1\right) - \frac{1}{2}\,\log\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{2}\,\log\left(\sqrt{2}-1\right) - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\,y\left(x\right)} = \frac{1}{2}\,\log\left(x+1\right) + \frac{1}{2}\,\log\left(x-1\right) - \frac{1}{2}\,\log\left(-\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{2}\,\log\left(-\sqrt{2}-1\right) + \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\,y\left(x\right)} = \frac{1}{2}\,\log\left(x+1\right) + \frac{1}{2}\,\log\left(x-1\right) - \frac{1}{2}\,\log\left(-\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{2}\,\log\left(-\sqrt{2}-1\right) - \frac{1}{2}$$



Код програми (Wolfram Mathematica)

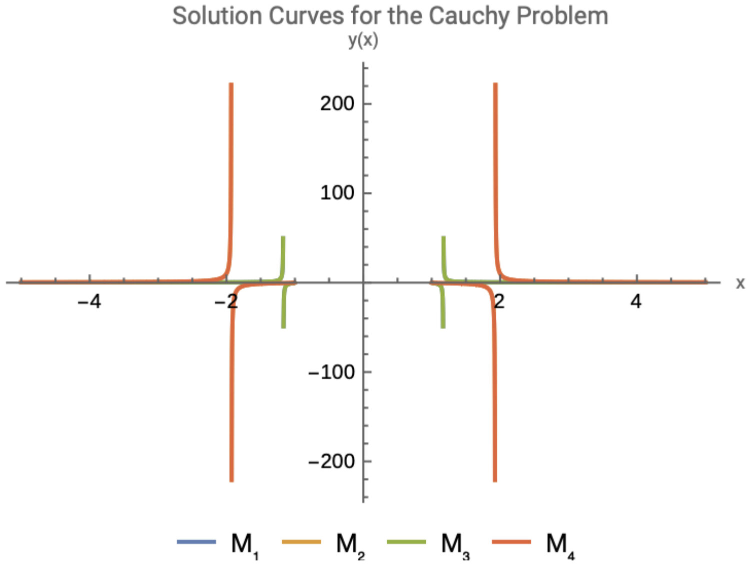
```
Clear[y, x];
ode = (x^2 - 1) D[y[x], x] + 2 x y[x]^2 == 0;

sol = DSolve[ode, y[x], x];
Print["General Solution: ", sol];

initialConditions = {
   {y[Sqrt[2]] == 1},    (* M1(\[Sqrt]2, 1) *)
   {y[Sqrt[2]] == -1},   (* M2(\[Sqrt]2, -1) *)
   {y[-Sqrt[2]] == 1},   (* M3(-\[Sqrt]2, 1) *)
   {y[-Sqrt[2]] == -1}   (* M4(-\[Sqrt]2, -1) *)
};

solutions = Table[
   DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, y[x], x],
   {i, 1, Length[initialConditions]}
];

Print["Solutions with Initial Conditions: ", solutions];
1
solutionCurves = Plot[
   Evaluate[Table[y[x] /. solutions[[i]], {i, 1, Length[solutions]}],
   {x, -5, 5}],
   PlotStyle -> Thick,
   PlotLegends -> Placed[{"M1", "M2", "M3", "M4"}, Below],
   PlotLabel -> "Solution Curves for the Cauchy Problem",
   AxesLabel -> {"x", "y(x)"},
   PlotRange -> All
];

Show[solutionCurves]

directionField = StreamPlot[
   {1, -(2 x y^2)/(x^2 - 1)},
   {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
   StreamStyle -> Arrowheads[Small],
   PlotLabel -> "Field of Directions"
];

Show[directionField]
```

Результат роботи програми (Wolfram Mathematica)

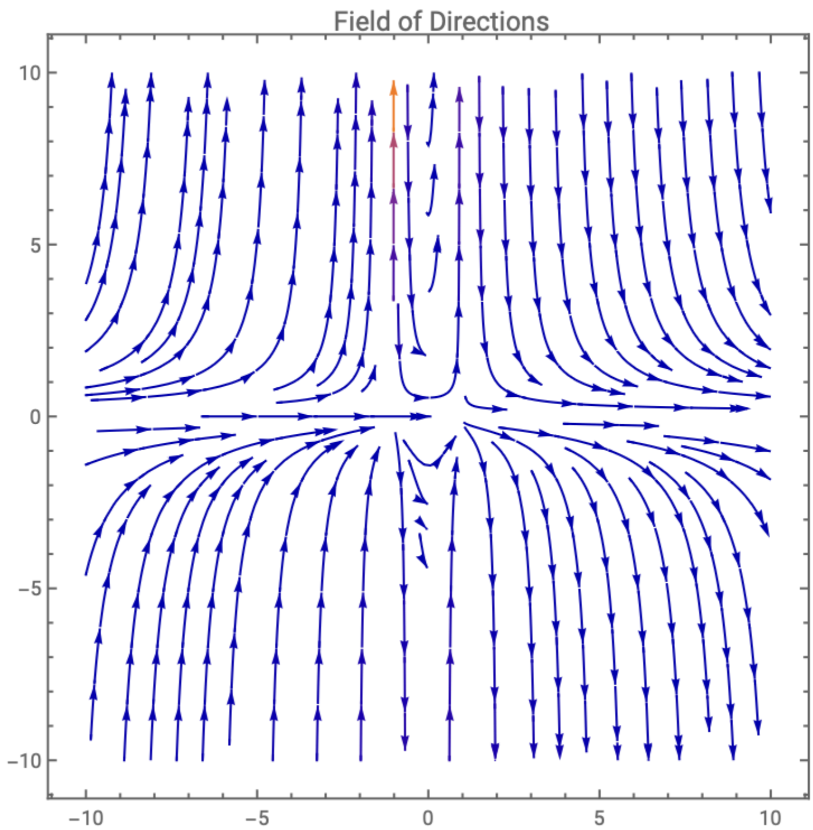
General Solution: $\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{-c_1 + \text{Log}[-1+x^2]}\right\}\right\}$

Solutions with Initial Conditions: $\left\{\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{1+\text{Log}[-1+x^2]}\right\}\right\}, \left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{-1+\text{Log}[-1+x^2]}\right\}\right\}, \left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{1+\text{Log}[-1+x^2]}\right\}\right\}, \left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{-1+\text{Log}[-1+x^2]}\right\}\right\}\right\}$

Out[16]=



Out[18]=



Умова *Завдання №2* згідно з **Варіантом №1.**

Побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

$$xy' - y = (x + y)ln\frac{x+y}{x}$$

Точки, вибрані для розв'язку задачі Коші:

1) $(1,\ e - 1)$
2) $(-1,\ 1 - e)$
3) $(-2,\ 2 - 2e^{-2})$
4) $(1,\ \frac{1}{e} - 1)$

Представлення розв’язку аналітично (в зошиті)

№2. $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$

$x\frac{dy}{dx} - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x} \quad |\cdot dx$

$xdy - ydx = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}dx$

$xdy = \left(y\ln\left(\frac{y}{x}+1\right) + x\ln\left(\frac{y}{x}+1\right) + y\right)dx$

Заміна: $\frac{y}{x} = u$, $y = ux$, $dy = udx + xdu$.

$\cancel{x}(udx + xdu) = \cancel{x}(u\ln(u+1) + \ln(u+1) + u)dx$

$\cancel{udx} + xdu = u\ln(u+1)dx + \ln(u+1)dx + \cancel{udx}$

$xdu = \ln(u+1)\cdot(u+1)dx \quad |: x(u+1)\ln(u+1)$

$\int\frac{du}{(u+1)\ln(u+1)} = \int\frac{dx}{x}$

$\ln(\ln(u+1)) = \ln|x| + \ln C$

$\ln(\ln(u+1)) = \ln(xC)$

$\ln(u+1) = xC$

$\ln\left(\frac{y}{x}+1\right) = Cx$

$\frac{y}{x} + 1 = e^{Cx}$

$y = xe^{Cx} - x$ – загальний розв'язок;

Задача Коші:

1) $y(1) = e-1$, $e-1 = 1\cdot e^{C_1} - 1$, $C_1 = 1$, $y = xe^{x} - x$;

2) $y(-1) = 1-e$, $1-e = -1\cdot e^{-C_2} - 1$, $C_2 = -1$, $y = xe^{-x} - x$;

3) $y(-2) = 2-2e^{-2}$, $2-2e^{-2} = -2e^{-2C_3} + 2$, $C_3 = 1$, $y = xe^{x} - x$;

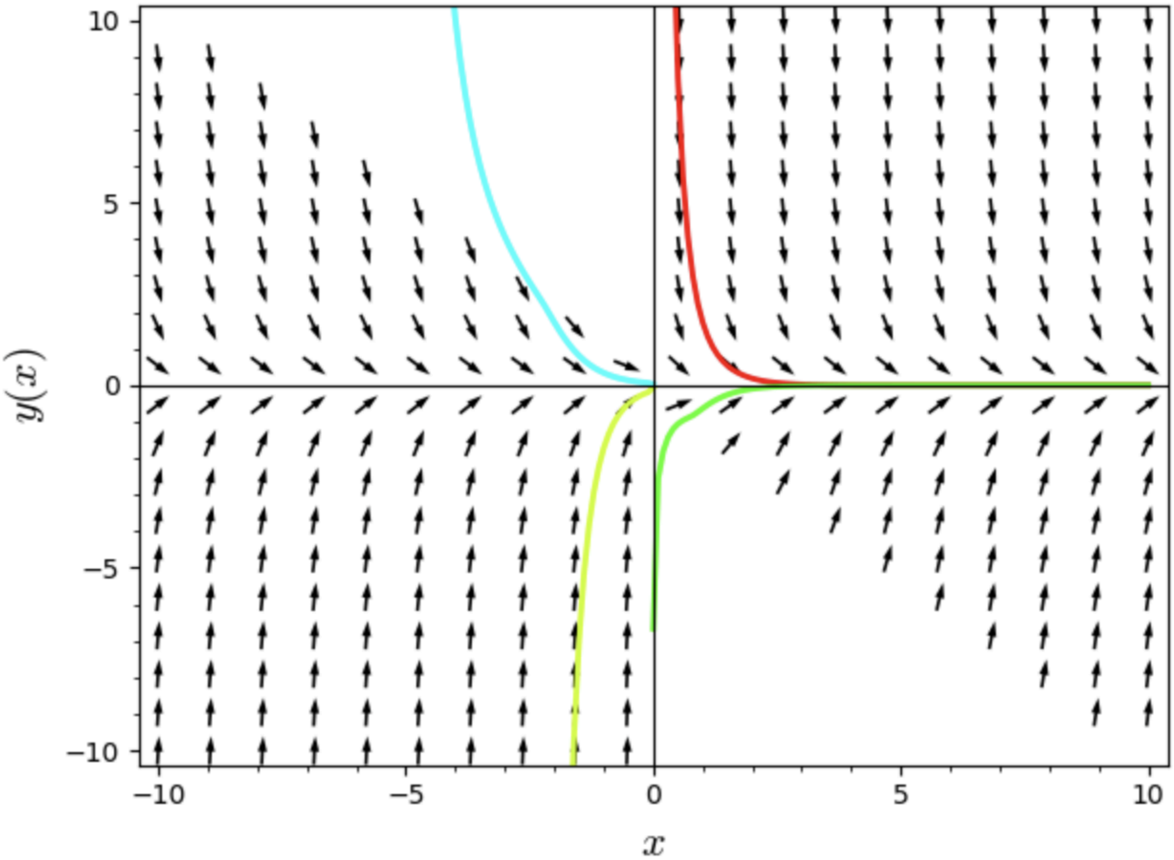
4) $y(1) = \frac{1}{e} - 1$, $C_4 = -1$, $y = xe^{-x} - x$.

Код програми (Sage)

```
#general solution
y = function('y')(x)
de = (x)*diff(y,x)-y-(x+y)*log((x+y)/x)
solution = desolve(de, y)
solution.show()

#Couchy problem solution
points = [[1,e-1], [-1,1-e], [-2,2-2*e^(-2)], [1,1/e-1]]
couchy_solutions = []
for i in range(4):
    couchy_solutions.append(desolve(de,y,ics=points[i]))
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].simplify_full()
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].canonicalize_radical()
    couchy_solutions[i].show()

#direction fields
x = var('x')
y = var('y')
f(x,y)=x*diff(y,x)-y-(x+y)*log((x+y)/x)
p=plot_slope_field(f,(x,-10,10),(y,-10,10), headaxislength=5,
headlength=5,axes_labels=['$x$','$y(x)$'])

#plot of Couchi problem solution
p+=desolve_rk4(f,y,ics=[1,gp(e)-1],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(1))
p1=desolve_rk4(f,y,ics=[-1,1-gp(e)],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(0.2))
p2=desolve_rk4(f,y,ics=[-2,2-2*gp(e)^(-2)],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(0.5))
p3=desolve_rk4(f,y,ics=[1,1/gp(e)-1],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(0.3))
show(p+p1+p2+p3,xmin=-10,xmax=10,ymin=-10,ymax=10)
```

Результат роботи програми (Sage)

$$Cx = \log\left(\frac{x + y(x)}{x}\right)$$
$$x = \log(x + y(x)) - \log(x)$$
$$-x = \log(x + y(x)) - \log(x)$$
$$x = \log(x + y(x)) - \log(x)$$
$$-x = \log(x + y(x)) - \log(x)$$



Код програми (Wolfram Mathematica)

```
Clear[y, x];
ode = x D[y[x], x] - y[x] == (x + y[x]) Log[(x + y[x])/x];

sol = DSolve[ode, y[x], x];
Print["General Solution: ", sol];

initialConditions = {
   {y[1] == E - 1},       (* M1(1, e - 1) *)
   {y[-1] == 1 - E},      (* M2(-1, 1 - e) *)
   {y[-2] == 2 - Exp[-2]}, (* M3(-2, 2 - e^(-2)) *)
   {y[1] == 1/E - 1}      (* M4(1, 1/e - 1) *)
};

solutions = Table[
   DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, y[x], x],
   {i, 1, Length[initialConditions]}
];

Do[
   Print["Solution for initial condition ", i, ": ", solutions[[i]]];
, {i, 1, Length[solutions]}]

solutionCurves = Plot[
   Evaluate[Table[y[x] /. solutions[[i]], {i, 1, Length[solutions]}]],
   {x, -5, 5},
   PlotStyle -> Thick,
   PlotLegends -> Placed[{"M1", "M2", "M3", "M4"}, Below],
   PlotLabel -> "Solution Curves for the Cauchy Problem",
   AxesLabel -> {"x", "y(x)"},
   PlotRange -> All
];

Show[solutionCurves]

directionField = StreamPlot[
   {1, ((x + y) Log[(x + y)/x] + y)/x},
   {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
   StreamStyle -> Arrowheads[Small],
   PlotLabel -> "Field of Directions"
];

Show[directionField]
```

Результат роботи програми (Wolfram Mathematica)

General Solution: $\{\{y[x] \to (-1 + e^{e^{-c_1} x})\, x\}\}$

DSolve : Inverse functions are being used by DSolve, so some solutions may not be found.

DSolve : Inverse functions are being used by DSolve, so some solutions may not be found.

DSolve : Inverse functions are being used by DSolve, so some solutions may not be found.

General : Further output of DSolve::ifun will be suppressed during this calculation.

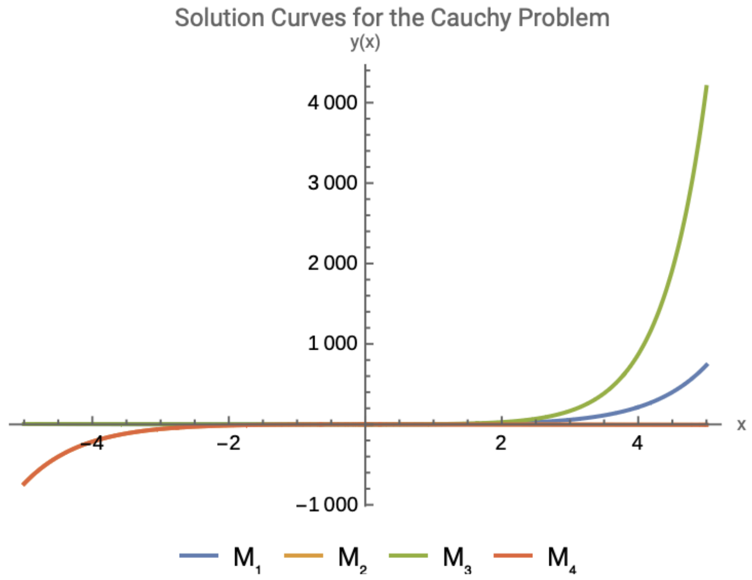
Solution for initial condition 1: $\{\{y[x] \to (-1 + e^{x})\, x\}\}$

Solution for initial condition 2: $\{\{y[x] \to -e^{-x} (-1 + e^{x})\, x\}\}$

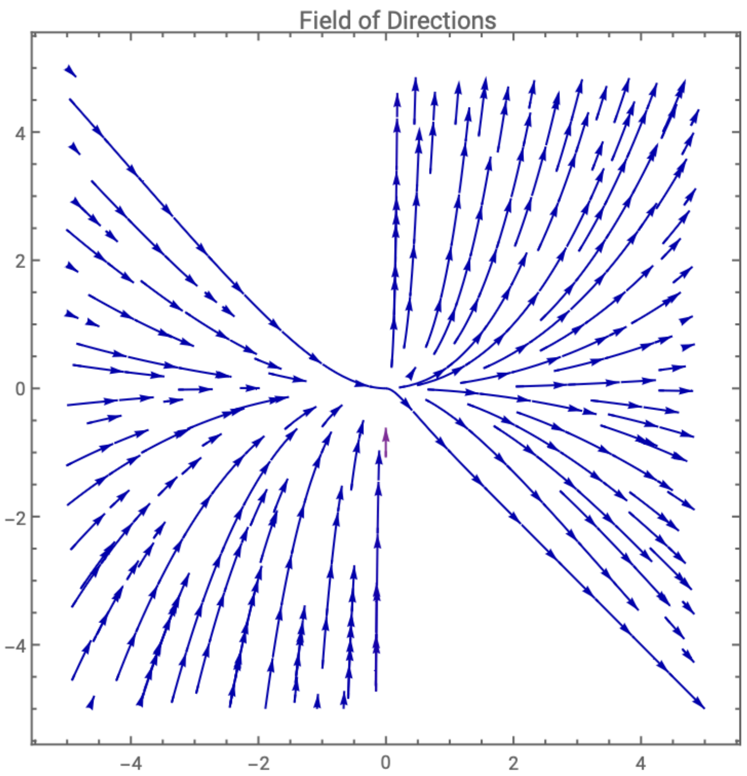
Solution for initial condition 3: $\{\{y[x] \to (-1 + 2^{x/2} e^{x})\, x\}\}$

Solution for initial condition 4: $\{\{y[x] \to -e^{-x} (-1 + e^{x})\, x\}\}$

Out[269]=



Out[271]=



Умова *Завдання №3* згідно з **Варіантом №1.**

Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

$$(2x + 1)y' = 4x + 2y$$

Точки, вибрані для розв'язку задачі Коші:

1) $(1, 1)$
2) $(-1, 1)$
3) $(-1, -1)$
4) $(1, -1)$

Представлення розв'язку аналітично (в зошиті)

№3. $(2x+1)y' = 4x+2y$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x+2y}{2x+1} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

$$\begin{cases} 2x = -1 \\ y = -2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Заміна: $\begin{cases} x = x_1 - \frac{1}{2} \\ y = y_1 + 1 \end{cases}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$

$2x_1 dy_1 = (2y_1 + 4x_1)dx_1 \quad /:2$

$x_1 dy_1 = (y_1 + 2x_1)dx_1$

Заміна: $\frac{y_1}{x_1} = u, \quad y_1 = ux_1, \quad dy_1 = u dx_1 + x_1 du$

$\cancel{x_1}(u dx_1 + x_1 du) = \cancel{x_1}(u+2)dx_1$

$\cancel{u dx_1} + x_1 du = \cancel{u dx_1} + 2dx_1$

$x_1 du = 2dx_1 \quad /: x_1$

$$\int du = \int \frac{2dx_1}{x_1} \qquad \begin{cases} x_1 = x + \frac{1}{2} \\ y_1 = y - 1 \end{cases}$$

$u = 2\ln|x_1| + C$

$\frac{y_1}{x_1} = 2\ln|x_1| + C$

$\frac{y-1}{x+\frac{1}{2}} = 2\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + C \quad /\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$y-1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+C\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$y=(2x+1)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot C+1$$ – загальний розв'язок;

Задача Коші:

1) $y(1)=1$, $1=3\ln\frac{3}{2}+\frac{3}{2}C_1+1$, $C_1=-2\ln\frac{3}{2}$,

$$y=(2x+1)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-(2x+1)\ln\frac{3}{2}+1;$$

2) $y(-1)=1$, $1=-\ln\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)C_2+1$, $C_2=-2\ln\left(-\frac{1}{2}\right)$,

$$y=(2x+1)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-(2x+1)\ln\left(-\frac{1}{2}\right)+1;$$

3) $y(-1)=-1$, $-1=-\ln\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)C_3+1$, $C_3=-2\ln\left(-\frac{1}{2}\right)-4$,

$$y=(2x+1)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-(2x+1)\left(\ln\left(-\frac{1}{2}\right)+2\right)+1;$$

4) $y(1)=-1$, $-1=3\ln\frac{3}{2}+\frac{3}{2}C_4+1$, $C_4=-2\ln\frac{3}{2}-\frac{4}{3}$,

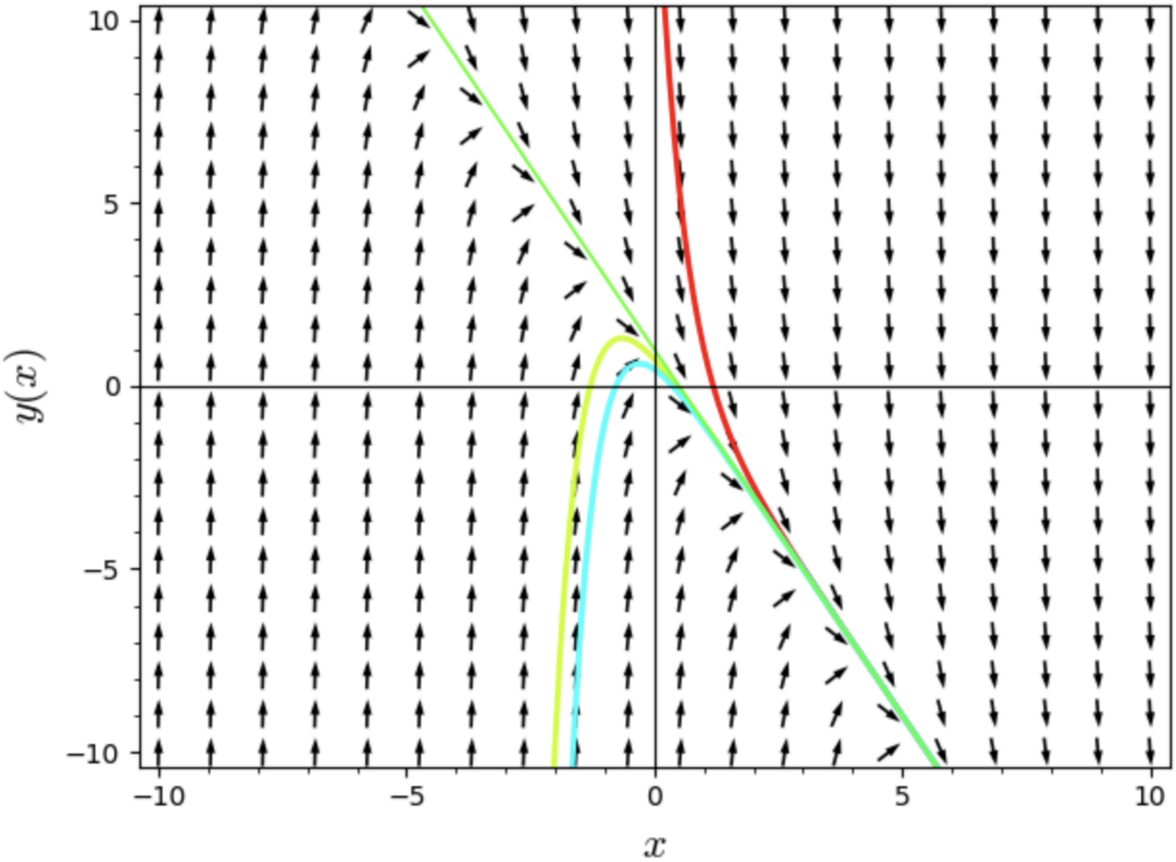
$$y=(2x+1)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-(2x+1)\left(\ln\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)+1.$$

Код програми (Sage)

```
#general solution
y = function('y')(x)
de = (2*x+1)*diff(y,x)==4*x+2*y
solution = desolve(de, y)
solution.show()

#Couchi problem solution
points = [[1,1], [-1,1], [-1,-1], [1,-1]]
couchy_solutions = []
for i in range(4):
    couchy_solutions.append(desolve(de,y,ics=points[i]))
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].simplify_full()
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].canonicalize_radical()
    couchy_solutions[i].show()

#direction fields
x = var('x')
y = var('y')
f(x,y)=(2*x+1)*diff(y,x)-4*x-2*y
p=plot_slope_field(f,(x,-10,10),(y,-10,10), headaxislength=5,
headlength=5,axes_labels=['$x$','$y(x)$'])

#plot of Couchi problem solution
p+=desolve_rk4(f,y,ics=[1,1],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(1))
p1=desolve_rk4(f,y,ics=[-1,1],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(0.2))
p2=desolve_rk4(f,y,ics=[-1,-1],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(0.5))
p3=desolve_rk4(f,y,ics=[1,-1],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=1,rgbcolor=hue(0.3))
show(p+p1+p2+p3,xmin=-10,xmax=10,ymin=-10,ymax=10)
```

Результат роботи програми (Sage)

$$\left(C + \frac{1}{2\,x+1} + \log\left(2\,x+1\right)\right)\left(2\,x+1\right)$$
$$-2\,x\log\left(3\right) + \left(2\,x+1\right)\log\left(2\,x+1\right) - \log\left(3\right) + 1$$
$$-i\,\pi - 2i\,\pi x + \left(2\,x+1\right)\log\left(2\,x+1\right) + 1$$
$$-i\,\pi - 2\left(i\,\pi - 2\right)x + \left(2\,x+1\right)\log\left(2\,x+1\right) + 3$$
$$-\frac{2}{3}\,x(3\,\log\left(3\right) + 2) + \left(2\,x+1\right)\log\left(2\,x+1\right) - \log\left(3\right) + \frac{1}{3}$$



Код програми (Wolfram Mathematica)

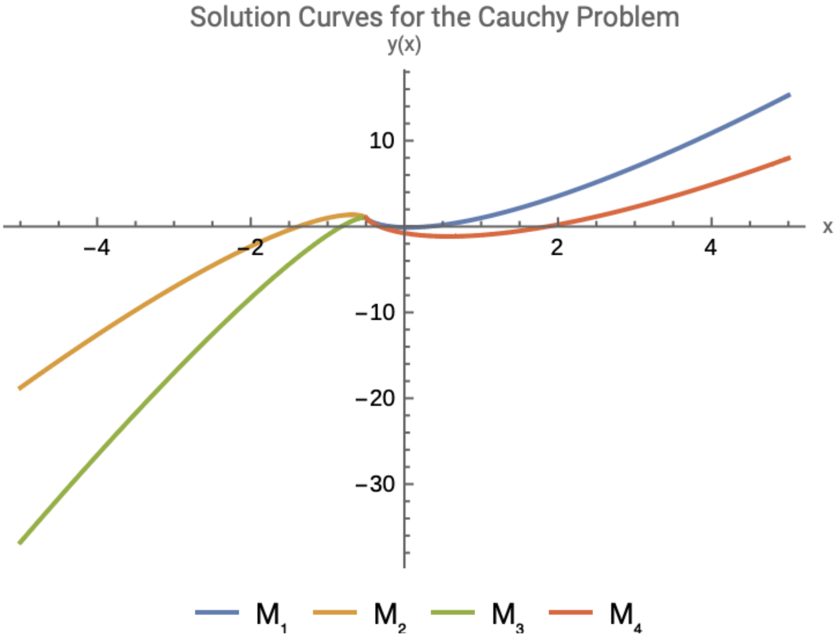
```
Clear[y, x];
ode = (2 x + 1) D[y[x], x] == 4 x + 2 y[x];

sol = DSolve[ode, y[x], x];
Print["General Solution: ", sol];

initialConditions = {
   {y[1] == 1},    (* M1(1, 1) *)
   {y[-1] == 1},   (* M2(-1, 1) *)
   {y[-1] == -1},  (* M3(-1, -1) *)
   {y[1] == -1}    (* M4(1, -1) *)
};

solutions = Table[
   DSolve[{ode, initialConditions[[i]]}, y[x], x],
   {i, 1, Length[initialConditions]}
];

Print["Solutions with Initial Conditions: ", solutions];

solutionCurves = Plot[
   Evaluate[Table[y[x] /. solutions[[i]], {i, 1, Length[solutions]}]],
   {x, -5, 5},
   PlotStyle -> Thick,
   PlotLegends -> Placed[{"M1", "M2", "M3", "M4"}, Below],
   PlotLabel -> "Solution Curves for the Cauchy Problem",
   AxesLabel -> {"x", "y(x)"},
   PlotRange -> All
];

Show[solutionCurves]

directionField = StreamPlot[
   {1, (4 x + 2 y)/(2 x + 1)},
   {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
   StreamStyle -> Arrowheads[Small],
   PlotLabel -> "Field of Directions",
   AxesLabel -> {"x", "y(x)"}
];

Show[directionField]
```

Результат роботи програми (Wolfram Mathematica)

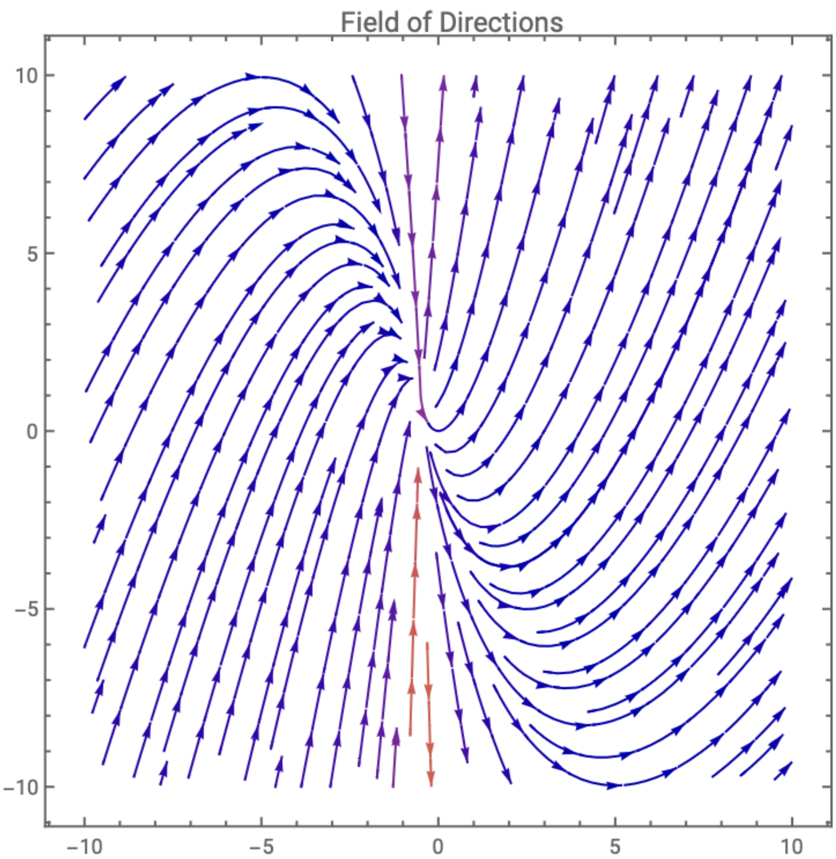
General Solution: $\left\{\left\{y[x] \to (1+2x)\, c_1 + (1+2x)\left(\frac{1}{1+2x} + \mathrm{Log}[1+2x]\right)\right\}\right\}$

Solutions with Initial Conditions: $\{\{\{y[x] \to 1 - \mathrm{Log}[3] - 2x\,\mathrm{Log}[3] + \mathrm{Log}[1+2x] + 2x\,\mathrm{Log}[1+2x]\}\}, \{\{y[x] \to 1 - i\pi - 2i\pi x + \mathrm{Log}[1+2x] + 2x\,\mathrm{Log}[1+2x]\}\}, \{\{y[x] \to 3 - i\pi + 4x - 2i\pi x + \mathrm{Log}[1+2x] + 2x\,\mathrm{Log}[1+2x]\}\}, \{\{y[x] \to \frac{1}{3}(1 - 4x - 3\,\mathrm{Log}[3] - 6x\,\mathrm{Log}[3] + 3\,\mathrm{Log}[1+2x] + 6x\,\mathrm{Log}[1+2x])\}\}\}$

Out[128]=



Out[130]=



Умова *Завдання №4* згідно з **Варіантом №1.**

Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

$$y'' - 2y' + 2y = e^x + xcosx$$

Точки, вибрані для розв'язку задачі Коші:

1) $(1, e), (2, e^2)$
2) $(-1, e^{-1}), (2, e^2)$
3) $(-2, e^{-2}), (-1, e^{-1})$
4) $(1, e), (-1, e^{-1})$

Представлення розв’язку аналітично (в зошиті)

№4. $y''-2y'+2y=e^x+x\cos x$

$\lambda^2-2\lambda+2=0$, $\lambda_{1,2}=1\pm i$

$y_{зо}=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x$.

$y_{чн}=y_{чн1}+y_{чн2}$

1) $y_{чн1}$:

$$y''-2y'+2y=e^x$$

$y_{чн1}=ae^x$ $\quad ae^x-2ae^x+2ae^x=e^x$

$y'_{чн1}=y''=ae^x$ $\quad a=1$

$y_{чн1}=e^x$

2) $y_{чн2}$:

$$y''-2y'+2y=x\cos x$$

$y_{чн2}=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$

$y'_{чн2}=\cos x(a+cx+d)-\sin x(ax+b-c)$

$y''_{чн2}=\cos x(-ax-b+2c)-\sin x(2a+cx+d)$

$\cos(-ax-b+2c)-\sin x(2a+cx+d)-2\cos x(a+cx+d)+2\sin x(ax+b-c)+$

$+2\cos x(ax+b)+2\sin x(cx+d)=x\cos x$

$\sin x(2ax+cx-2a+2b-2c+d)+\cos x(ax-2cx-2a+b+2c-2d)=x\cos x$

$$\begin{cases} a-2c=1 \\ 2a+c=0 \\ -2a+b+2c-2d=0 \\ 2a+2b-2c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ c=-\frac{2}{5} \\ b=\frac{2}{25} \\ d=-\frac{14}{25} \end{cases}$$

$y_{чн}=e^x-\frac{2}{5}x\sin x+\frac{1}{5}x\cos x-\frac{14}{25}\sin x+\frac{2}{25}\cos x$

$y_{зно}=y_{зо}+y_{чн}=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^x-\frac{2}{5}x\sin x+\frac{1}{5}x\cos x-\frac{14}{25}\sin x+\frac{2}{25}\cos x$ – загальний розв'язок.

Задача Коши:

1) $y(1)=e, \; y(2)=e^2$

$$\begin{cases} e(C_1\cos 1 + C_2\sin 1) + e + \sin 1\left(\frac{2}{5}-\frac{14}{25}\right) + \cos 1\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{25}\right) = e \\ e^2(C_1\cos 2 + C_2\sin 2) + e^2 + \frac{2}{5}\cdot 2\sin 2 + \frac{1}{5}\cos 2 - \frac{14}{25}\sin 2 + \frac{2}{25}\cos 2 = e^2 \end{cases}$$

$$C_1 = -\frac{12\cos 2\sin 1 - 7\cos 1\, e\cdot\sin 2 + 1\sin 1\cdot\sin 2 + 4e\sin 1\cdot\sin 2}{25e^2(\cos 2\sin 1 - \cos 1\sin 2)}$$

$$C_2 = \frac{12\cos 1\cdot\cos 2 - 7\cos 1\cos 2\cdot e + 4\cos 2 e\cdot\sin 1 + 6\cos 1\sin 2}{25e^2(\cos 2\sin 1 - \cos 1\sin 2)}$$

2) $y(-1)=\frac{1}{e}, \; y(2)=e^2$

$$\begin{cases} e^{-1}(C_1\cos(-1) + C_2\sin(-1)) + e^{-1} - \sin(-1) - \frac{1}{5}\cos(-1) - \frac{14}{25}\sin(-1) + \frac{3}{25}\cos(-1) = e^{-1} \\ e^2(C_1\cos 2 + C_2\sin 2) + e^2 + \frac{2}{5}\cdot 2\sin 2 + \frac{1}{5}2\cos 2 - \frac{14}{25}\sin 2 + \frac{2}{25}\cos 2 = e^2 \end{cases}$$

$$C_1 = -\frac{12\cos 2\sin(-1) + 3e^3\cos(-1)\sin 2 - 3\cdot 4\sin(-1)\sin 2 + 4e^3\sin(-1)\sin 2}{25e^2(\cos 2\sin(-1) - \cos(-1)\sin 2)}$$

$$C_2 = -\frac{12\cos(-1)\cos 2 - 3e^3\cos(-1)\cos 2 - 4e^3\cos 2\sin(-1) + 3\cdot 4\cos(-1)\sin 2}{25e^2(\cos 2\sin(-1) - \cos(-1)\sin 2)}$$

3) $y(-2)=e^{-2}, \; y(-1)=e^{-1}$

$$C_1 = \frac{e(3\cos(-1)\sin(-2) - 3e\cos(-2)\sin(-1) + 4\sin(-2)\sin(-1) + 6e\sin(-2)\sin(-1))}{25(\cos(-1)\sin(-2) - \cos(-2)\sin(-1))}$$

$$C_2 = \frac{-3e\cos(-2)\cos(-1) + 3e^2\cos(-2)\cos(-1) - 6e^2\cos(-1)\sin(-2) - 4e\cos(-2)\sin(-1)}{25(\cos(-1)\sin(-2) - \cos(-2)\sin(-1))}$$

4) $y(1)=e, \; y(-1)=e^{-1}$

$$C_1 = \frac{-7\cos 1\sin(-1) + 3e^2\cos(-1)\sin 1 - 24\sin(-1)\sin 1 + 4e^2\sin(-1)\sin 1}{25e(\cos 1\sin(-1) - \cos(-1)\sin 1)}$$

$$C_2 = \frac{-7\cos(-1)\cos 1 - 3e^2\cos(-1)\cos 1 - 4e^2\cos 1\sin 1 + 24\cos(-1)\sin 1}{25e(\cos 1\sin(-1) - \cos(-1)\sin 1)}$$

Код програми (Sage)

```
#general solution
y = function('y')(x)
de = diff(diff(y,x),x) - 2 * diff(y,x) + 2*y - e^x - x*cos(x)
solution = desolve(de, y)
solution.show()

#Couchy problem solution
points = [[1,e,2,e^2], [-1,1/e,2,e^2], [-2,e^(-2),-1,e^(-1)], [1,e,-1,e^(-1)]]
couchy_solutions = []
for i in range(4):
    couchy_solutions.append(desolve(de,y,ics=points[i]))
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].simplify_full()
    couchy_solutions[i] = couchy_solutions[i].canonicalize_radical()
    couchy_solutions[i].show()

#direction fields
x = var('x')
y = var('y')
f(x,y)= diff(diff(y,x),x) - 2 * diff(y,x) + 2*y - e^x - x*cos(x)
p=plot_slope_field(f,(x,-10,10),(y,-10,10), headaxislength=5,
headlength=5,axes_labels=['$x$','$y(x)$'])

#plot of Couchi problem solution
p+=desolve_rk4(f,y,ics=[1,gp(e),2,gp(e)^2],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(1))
p1=desolve_rk4(f,y,ics=[-1,1/gp(e),2,gp(e)^2],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(0.2))
p2=desolve_rk4(f,y,ics=[-2,gp(e)^(-2),-1,gp(e)^(-1)],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(0.5))
p3=desolve_rk4(f,y,ics=[1,gp(e),
-1,gp(e)^(-1)],ivar=x,output='plot',
end_points=[-10,10],thickness=2,rgbcolor=hue(0.3))
show(p+p1+p2+p3,xmin=-10,xmax=10,ymin=-10,ymax=10)
```

Результат роботи програми (Sage)

$$\frac{1}{25}\,(5\,x+2)\cos(x)+(K_2\cos(x)+K_1\sin(x))e^x-\frac{2}{25}\,(5\,x+7)\sin(x)+e^x$$

$(2\,\cos(1)e^2\sin(2)-2\,\cos(2)e^2\sin(1)+5\,(\cos(1)e^2\sin(2)-\cos(2)e^2\sin(1))x-((7\,\cos(1)e-2\,(12\,e-17)\sin(1))\sin(2)-12\,\cos(2)\sin(1))e^x)\cos(x)+25\,(\cos(1)e^2\sin$

$25\,(\cos(1)e^2\,\mathrm{s}$

$(2\,\cos(1)e^2\sin(2)+2\,\cos(2)e^2\sin(1)+5\,(\cos(1)e^2\sin(2)+\cos(2)e^2\sin(1))x+((3\,\cos(1)e^3-2\,(2\,e^3-17)\sin(1))\sin(2)-12\,\cos(2)\sin(1))e^x)\cos(x)+25\,(\cos(1)e^2\,\mathrm{si}$

$25\,(\cos(1)e^2$

$(5\,(\cos(1)\sin(2)-\cos(2)\sin(1))x-(8\,\cos(2)e^2\sin(1)-(3\,\cos(1)e-2\,(3\,e^2+2\,e)\sin(1))\sin(2))e^x+2\,\cos(1)\sin(2)-2\,\cos(2)\sin(1))\cos(x)+25\,(\cos(1)\sin(2)-\mathrm{co}$

$25\,(\cos(1)\sin(2)-$

$(50\,\cos(1)e^{(x+1)}\sin(1)+(10\,x\cos(1)e\sin(1)+4\,\cos(1)e\sin(1)+((3\,e^2-7)\cos(1)\sin(1)-4\,(e^2-6)\sin(1)^2)e^x)\cos(x)-(20\,x\cos(1)e\sin(1)+28\,\cos(1)e\sin(1)+$

$50\,\cos(1)\sin(1)$

$(2)-\cos(2)e^2\sin(1))e^x-(14\,\cos(1)e^2\sin(2)-14\,\cos(2)e^2\sin(1)+10\,(\cos(1)e^2\sin(2)-\cos(2)e^2\sin(1))x-(((7\,e-12)\cos(1)-24\,e\sin(1))\cos(2)+34\,\cos(1)\sin(2))\quad e^x)\sin(x)$

$\mathrm{in}(2)-\cos(2)e^2\sin(1))$

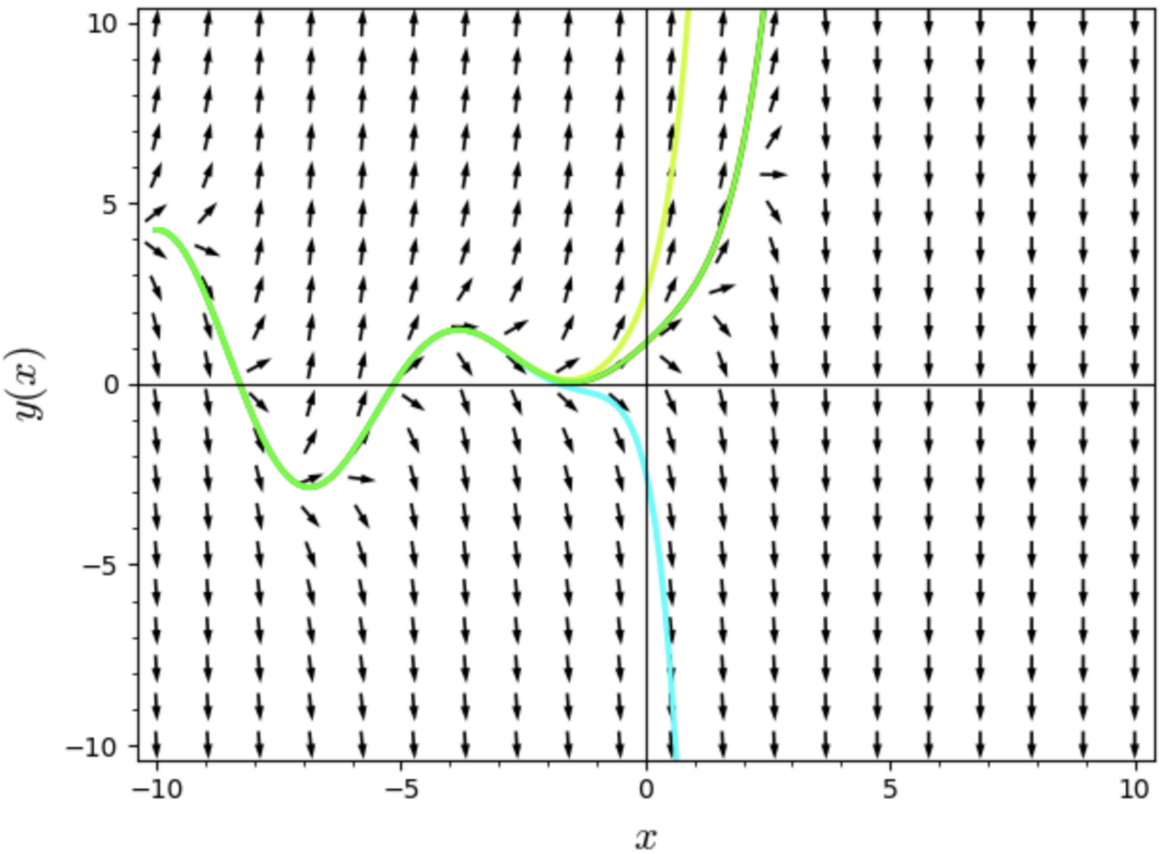
$\mathrm{n}(2)+\cos(2)e^2\sin(1))e^x-(14\,\cos(1)e^2\sin(2)+14\,\cos(2)e^2\sin(1)+10\,(\cos(1)e^2\sin(2)+\cos(2)e^2\sin(1))x+((3\,(e^3+4)\cos(1)-4\,e^3\sin(1))\cos(2)-34\,\cos(1)\sin(2\quad)e^x)\sin(x)$

$\sin(2)+\cos(2)e^2\sin(1))$

$\mathrm{s}(2)\sin(1))e^x-(10\,(\cos(1)\sin(2)-\cos(2)\sin(1))x+(6\,\cos(1)e^2\sin(2)+((8\,e^2-3\,e)\cos(1)+4\,e\sin(1))\cos(2))e^x+14\,\cos(1)\sin(2)-14\,\cos(2)\sin(1))\sin(x)$

$\cos(2)\sin(1))$

$(\,(3\,e^2+7)\cos(1)^2-4\,(e^2+6)\cos(1)\sin(1))e^x)\sin(x))e^{(-1)}$



Умова *Завдання №5* згідно з **Варіантом №1.**

Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

$$\dot{x} = Ax,$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Точки, вибрані для розв'язку задачі Коші:

1) $\begin{pmatrix} 1; \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1; \begin{matrix} -e \\ 0 \\ -e \end{matrix} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1; \begin{matrix} 1+e \\ 1+e \\ 1+2e \end{matrix} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -1; \begin{matrix} \dfrac{1-e^3}{e} \\ -e \\ \dfrac{1-2e^3}{e} \end{matrix} \end{pmatrix}$

Представлення розв’язку аналітично (в зошиті)

№ 5. $\dot{x} = Ax$, $\det(A - \lambda E) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

$$\lambda_1 = 0: \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ 3\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha = \gamma \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 1: \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{нехай } \gamma = 1 \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \\ 3\alpha - \beta - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\lambda_3 = -1: \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 2 \\ \alpha + \beta - 2 = 0 \\ 3\alpha - \beta - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$ – загальний розв’язок;

$$\text{ФМР}: \begin{bmatrix} 1 & e^{t} & e^{-t} \\ 1 & 0 & e^{-t} \\ 1 & e^{t} & 2e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix};$$

Задача Коші:

1) $x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ e \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{-1} \\ e^{-1} \\ 2e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$;

2) $x(1) = \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ -e \end{pmatrix}$, $C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ e \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{-1} \\ e^{-1} \\ 2e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ -e \end{pmatrix}$, $C_1 = 0$, $C_2 = -1$, $C_3 = 0$;

3) $x(-1) = \begin{pmatrix} 1+e \\ 1+e \\ 1+2e \end{pmatrix}$, $C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-1} \\ 0 \\ e^{-1} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e \\ e \\ 2e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+e \\ 1+e \\ 1+2e \end{pmatrix}$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$;

4) $x(-1) = \begin{pmatrix} \frac{1-e^2}{e} \\ -e \\ \frac{1-2e^2}{e} \end{pmatrix}$, $C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-1} \\ 0 \\ e^{-1} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e \\ e \\ 2e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-e^2}{e} \\ -e \\ \frac{1-2e^2}{e} \end{pmatrix}$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$

Код програми (Sage)

```
#general solution
t = var('t')
x1 =function ('x1')(t)
x2 =function ('x2')(t)
x3 =function ('x3')(t)
de1 = diff(x1,t) == 2*x1-x2-x3
de2 = diff(x2,t) == x1-x3
de3 = diff(x3,t) == 3*x1-x2-2*x3
sol = desolve_system([de1,de2,de3],[x1,x2,x3],ivar=t)
solx1,solx2,solx3 = sol[0].rhs(),sol[1].rhs(),sol[2].rhs()
solx = matrix ([[solx1],[solx2],[solx3]])
show(solx)

#Couchi problem solution
sol = desolve_system([de1,de2,de3],[x1,x2,x3],ics=[0,-e,0,-e],ivar=t)
solx1,solx2,solx3 = sol[0].rhs(),sol[1].rhs(),sol[2].rhs()
solx=matrix ([[solx1],[solx2],[solx3]])
show(solx)

#plots of Couchi problem solution
p1 = plot((solx1),(0,0.2),figsize=5,rgbcolor= hue(0.1))
sol = desolve_system([de1,de2,de3],[x1,x2,x3],ics=[0,1+e,1+e,1+2*e],ivar=t)
solx1,solx2,solx3 = sol[0].rhs(),sol[1].rhs(),sol[2].rhs()
solx=matrix ([[solx1],[solx2],[solx3]])
show(solx)

p2 = plot((solx1),(0,0.2),figsize=5,rgbcolor= hue(0.5))
sol = desolve_system([de1,de2,de3],[x1,x2,x3],ics=[0,(1-e^2)/e,-e,(1-
2*e^2)/e],ivar=t)
solx1,solx2,solx3 = sol[0].rhs(),sol[1].rhs(),sol[2].rhs()
solx=matrix ([[solx1],[solx2],[solx3]])
show(solx)

p3 = plot((solx1),(0,0.2),figsize=5,rgbcolor= hue(0.3))
sol = desolve_system([de1,de2,de3],[x1,x2,x3],ics=[0,1/e,0,1/e],ivar=t)
solx1,solx2,solx3 = sol[0].rhs(),sol[1].rhs(),sol[2].rhs()
solx=matrix ([[solx1],[solx2],[solx3]])
show(solx)

p4 = plot((solx1),(0,0.2),figsize=5,rgbcolor= hue(0.9))
show(p1+p2+p3+p4)
```

Результат роботи програми (Sage)

$$\begin{pmatrix} -(x_1(0) - x_3(0))e^{(-t)} + (x_1(0) - x_2(0))e^{t} + x_1(0) + x_2(0) - x_3(0) \\ -(x_1(0) - x_3(0))e^{(-t)} + x_1(0) + x_2(0) - x_3(0) \\ -2\,(x_1(0) - x_3(0))e^{(-t)} + (x_1(0) - x_2(0))e^{t} + x_1(0) + x_2(0) - x_3(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -e^{(t+1)} \\ 0 \\ -e^{(t+1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{(-t+1)} + 1 \\ e^{(-t+1)} + 1 \\ 2\,e^{(-t+1)} + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{(t-1)} - e^{(-t+1)} \\ -e^{(-t+1)} \\ e^{(t-1)} - 2\,e^{(-t+1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{(t-1)} \\ 0 \\ e^{(t-1)} \end{pmatrix}$$