23.05.25

№ 1. а) "існує більше 2 непростих чисел, кратних 4"

1) x – просте число:

$P(x) = x \neq 1 \,\&\, \forall a \forall b \,(x = a \cdot b \to (a = 1 \vee b = 1))$

$(\neg(x=1))$

тоді, x – непросте : $\neg P(x)$

2) ділиться на 4:

$S(x) = \exists x \,(a = x \cdot (1+1+1+1))$

3) x – непросте і ділиться на 4:

$Q(x) = \neg P(x) \,\&\, S(x)$

Тоді відповідь: $\exists a \exists b \exists c (a \neq b \,\&\, a \neq c \,\&\, \overset{b\neq c}{\downarrow} \,\&\, Q(a) \,\&\, Q(b) \,\&\, Q(c))$

або ж $\underline{\exists a \exists b \exists c (\neg(a=b) \,\&\, \neg(a=c) \,\&\, \neg(b=c) \,\&\, Q(a) \,\&\, Q(b) \,\&\, Q(c))}$.

б) $X = (Y \cap Z) \setminus S$

$\forall a \,(a \in X \leftrightarrow a \in Y \,\&\, a \in Z \,\&\, \neg(a \in S))$.

№ 2. $\neg \forall x A(x) \vee \neg \exists x B(x) \vee \forall x (\forall y \exists z C(x,y,z) \to \exists y A(y))$.

$\neg \forall x A(x) \vee \neg \exists a B(a) \vee \forall b (\forall y \exists z C(b,y,z) \to \exists c A(c))$

$\exists x \neg A(x) \vee \forall a \neg B(a) \vee \forall b (\forall y \exists z C(b,y,z) \to \exists c A(c))$

$\exists x \neg A(x) \vee \forall a \neg B(a) \vee \forall b \exists y \forall z \exists c (C(b,y,z) \to A(c))$

$\exists x \forall a \forall b \exists y \forall z \exists c (\neg A(x) \vee \neg B(a) \vee (C(b,y,z) \to A(c)))$ – н.ф.

$x \mapsto k$ (const), $y \mapsto f(a,b)$, $c \mapsto g(a,b,z)$

$\forall a \forall b \forall z (\neg A(k) \vee \neg B(a) \vee (C(b,f(a,b),z) \to A(g(a,b,z))))$.

№3. $\dashv (\forall_x A(x) \,\&\, B(x) \to \forall_x (A(x) \,\&\, B(x)))$

$\vdash (\forall_x A(x) \,\&\, B(x)), \dashv \forall_x (A(x) \,\&\, B(x))$

$\vdash (\forall_x A(x) \,\&\, B(x)), \dashv (A(y) \,\&\, B(y))$

$\vdash \forall_x A(x), \vdash B(x), \dashv (A(y) \,\&\, B(y))$

$\vdash A(y), \vdash_x A(x), \vdash B(x), \dashv (A(y) \,\&\, B(y))$

$\dashv A(y), \vdash A(y), \ldots$ | $\dashv B(y), \vdash A(y), \vdash_x A(x), \vdash B(x).$

x

Отримали не замкнене секв. дерево.

Контрприклад:

	x	y
A	any	T
B	T	F

№5. Нехай x – лев, $L(x)$ – бути котом, $K(x)$ – пити каву. Тоді:

$(\forall_x L(x) \,\&\, \exists_x \neg K(x)) \to \exists_x (K(x) \,\&\, L(x)).$

№ 4. "$\mathcal{D}_y \neq E_y$"

1) "$\mathcal{D}_y = E_y$":

$$\mathcal{D}_y = E_y \Leftrightarrow \forall z\,(z \in \mathcal{D}_y \leftrightarrow z \in E_y) \Leftrightarrow \forall z\,((z \in \mathcal{D}_y \vee \neg(z \in E_y))\,\&$$

$$\&\,(\neg(z \in \mathcal{D}_y) \vee z \in E_y)) \Leftrightarrow \forall z\,(((\exists k_1\, P_y(z)\!\downarrow_{\text{на кр. } k_1} \vee \neg\exists c\,\exists k_2$$

$$(P_y(c)\!\downarrow_{z \text{ на кр. } k_2})\,\&\,(\neg(\exists k_3\,(P_y(z)\!\downarrow_{\text{на кр. } k_3})) \vee \exists d\,\exists k_4\,(P_y(d)\!\downarrow_{z \text{ на кр. } k_4})))$$

$$\Leftrightarrow \forall z\,(((\exists k_1\,(P_y(z)\!\downarrow_{\text{на кр. } k_1})) \vee \forall c\,\forall k_2\,\neg(P_y(c)\!\downarrow_{z \text{ на кр. } k_2}))\,\&\,(\forall k_3\,\neg(P_y(z)\!\downarrow$$

$$_{\text{на кр. } k_3}) \vee \exists d\,\exists k_4\,(P_y(d)\!\downarrow_{z \text{ на кр. } k_4}))) \Leftrightarrow \forall z\,(\exists k_1\,\forall c\,\forall k_2\,((P_y(z)\!\downarrow_{\text{на кр. } k_1})$$

$$\vee \neg(P_y(c)\!\downarrow_{z \text{ на кр. } k_2}))\,\&\,\forall k_3\,\exists d\,\exists k_4\,(\neg(P_y(z)\!\downarrow_{\text{на кр. } k_3}) \vee (P_y(d)\!\downarrow_{z \text{ на кр. } k_4})))$$

$$\Leftrightarrow \forall z\,\exists k_1\,\forall c\,\forall k_2\,\forall k_3\,\exists d\,\exists k_4\,(((P_y(z)\!\downarrow_{\text{на кр. } k_1}) \vee \neg(P_y(c)\!\downarrow_{z \text{ на кр. } k_2}))\,\&$$

$$\&\,(\neg(P_y(z)\!\downarrow_{\text{на кр. } k_3}) \vee (P_y(d)\!\downarrow_{z \text{ на кр. } k_4}))).$$

Тоді "$\mathcal{D}_y = E_y$" $\in \Pi_4$. Звідси:

$$\text{"}\mathcal{D}_y \neq E_y\text{"} \Leftrightarrow \underbrace{\exists z}\,\underbrace{\forall k_1\,\exists c\,\exists k_2\,\exists k_3}\,\underbrace{\forall d\,\forall k_4}\,(\ldots)$$

Отже, "$\mathcal{D}_y \neq E_y$" $\in \Sigma_4$.