

CHỦ ĐỀ 3: CON LẮC ĐƠN

DẠNG 1: Đại cương về con lắc đơn

1. Chu kì, tần số và tần số góc: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$; $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$

Nhận xét: Chu kì của con lắc đơn

- + tỉ lệ thuận với **căn bậc 2** của l ; tỉ lệ **ngược** với **căn bậc 2** của g
- + chỉ phụ thuộc vào l và g ; **không** phụ thuộc biên độ A và m .

2. Phương trình dao động: $s = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ hoặc $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi)$

Với $s = \alpha l$, $S_0 = \alpha_0 l$

$\Rightarrow v = s' = -\omega S_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega \alpha_0 l \sin(\omega t + \varphi)$; $v_{\max} = \omega S_0 = \omega l \alpha_0$; $v_{\min} = 0$

$\Rightarrow a_t = v' = -\omega^2 S_0 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \alpha_0 l \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 s = -\omega^2 \alpha l = -g\alpha$

Gia tốc gồm 2 thành phần: gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến (gia tốc hướng tâm)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_t = -\omega^2 s = -g\alpha \\ a_n = \frac{v^2}{l} = g(\alpha_0^2 - \alpha^2) \end{array} \right\} \rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \rightarrow \begin{cases} \text{VTCB: } a = a_n \\ \text{VTB: } a = a_t \end{cases}$$

Lưu ý:

- + Điều kiện dao động điều hoà: Bỏ qua ma sát, lực cản và $\alpha_0 \ll 1$ rad hay $\alpha_0 \ll 10^\circ$
- + S_0 đóng vai trò như A , còn s đóng vai trò như x

3. Hệ thức độc lập: $a = -\omega^2 s = -\omega^2 \alpha l$; $S_0^2 = s^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2$; $\alpha_0^2 = \alpha^2 + \frac{v^2}{gl}$

4. Lực hồi phục: $F = -m\omega^2 s = -mg\alpha$

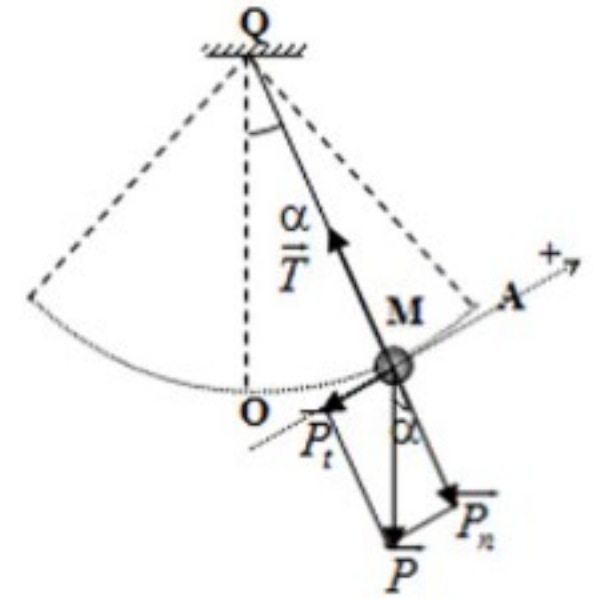
- + Với con lắc đơn lực hồi phục tỉ lệ thuận với khối lượng.
- + Với con lắc lò xo lực hồi phục không phụ thuộc vào khối lượng.

5. **Chu kì và sự thay đổi chiều dài:** Tại cùng một nơi, con lắc đơn chiều dài l_1 có chu kỳ T_1 , con lắc đơn chiều dài l_2 có chu kỳ T_2 , con lắc đơn chiều dài $l_3 = l_1 + l_2$ có chu kỳ T_3 , con lắc đơn chiều dài $l_4 = l_1 - l_2$ ($l_1 > l_2$) có chu kỳ T_4 . Ta có: $T_3^2 = T_1^2 + T_2^2$ và $T_4^2 = T_1^2 - T_2^2$ (chỉ cần nhớ l tỉ lệ với bình phương của T là ta có ngay công thức này)

6. Trong cùng khoảng thời gian, hai con lắc thực hiện N_1 và N_2 dao động: $\frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$

DẠNG 2: Vận tốc, lực căng dây, năng lượng

1. $\alpha_0 \leq 10^\circ$: $|v| = \sqrt{gl(\alpha_0^2 - \alpha^2)}$, $T = mg(1 + \alpha_0^2 + \alpha^2)$; $W = \frac{1}{2}m\omega^2 S_0^2 = \frac{1}{2}mgl\alpha_0^2$



2. $\alpha_0 > 10_0$: $|v| = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}$; $T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0)$; $W = mgh_0 = mgl(1 - \cos\alpha_0)$

Chú ý:

+ v_{\max} và T_{\max} khi $\alpha = 0$

+ v_{\min} và T_{\min} khi $\alpha = \alpha_0$

+ Độ cao cực đại của vật đạt được so với VTGB: $h_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{2g}$

3. Khi $W_d = nW_t \Rightarrow A = \pm \frac{S_0}{\sqrt{n+1}}$; $\alpha = \pm \frac{\alpha_0}{\sqrt{n+1}}$; $v = \pm \frac{v_{\max}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}}$

4. Khi $\alpha = \frac{\alpha_0}{n} \Rightarrow \frac{W_d}{W_t} = n^2 - 1$

DẠNG 3: Biến thiên nhỏ của chu kỳ: do ảnh hưởng của các yếu tố độ cao, nhiệt độ, ..., thường đề bài yêu cầu trả lời hai câu hỏi sau:

*** Câu hỏi 11: Tính lượng nhanh (chậm) Δt của đồng hồ quả lắc sau khoảng thời gian τ đang xét**

- Ta có: $\Delta t = \tau \left| \frac{\Delta T}{T} \right|$ Với T là chu kỳ của đồng hồ quả lắc khi chạy đúng, τ là khoảng thời gian đang xét

- Với ΔT được tính như sau: $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \lambda \Delta t^0 + \frac{h}{R} + \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} + \frac{s}{2R} + \frac{1}{2} \frac{\rho_{MT}}{\rho_{CLD}}$

Trong đó

- $\Delta t = t_2 - t_1$ là độ chênh lệch nhiệt độ
- λ là hệ số nở dài của chất làm dây treo con lắc
- h là độ cao so với bề mặt trái đất.
- s là độ sâu đưa xuống so với bề mặt trái đất.
- R là bán kính Trái Đất: $R = 6400\text{km}$
- $\Delta l = l_2 - l_1$ là độ chênh lệch chiều dài
- ρ_{MT} là khối lượng riêng của môi trường đặt con lắc.
- ρ_{CLD} là khối lượng riêng của vật liệu làm quả lắc.

Cách tính: Khi bài toán không nhắc đến yếu tố nào thì ta bỏ yếu tố đó ra khỏi công thức (*)

Quy ước: $\frac{\Delta T}{T} > 0$: đồng hồ chạy **chậm**; $\frac{\Delta T}{T} < 0$: đồng hồ chạy **nhANH**.

*** Câu hỏi 2: Thay đổi theo nhiều yếu tố, tìm điều kiện để đồng hồ chạy đúng trở lại ($T = \text{const}$)**

Ta cho $\frac{\Delta T}{T} = 0$ như đã quy ước ta sẽ suy ra được đại lượng cần tìm từ công thức (*).

Chú ý thêm:

+ Đưa con lắc từ thiên thể này lên thiên thể khác thì: $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = \sqrt{\frac{M_1 R_2^2}{M_2 R_1^2}}$

+ Trong cùng khoảng thời gian, đồng hồ có chu kỳ T_1 có số chỉ t_1 , đồng hồ có chu kỳ T_2 có số chỉ t_2 .

Ta có: $\frac{t_2}{t_1} = \frac{T_1}{T_2}$

DẠNG 4: Biến thiên lớn của chu kỳ: do con lắc chịu thêm tác dụng của ngoại lực \vec{F} không đổi (lực quán tính, lực từ, lực điện, ...)

→ Lúc này con lắc xem như chịu tác dụng của trọng lực hiệu dụng hay trọng lực biểu kiến

$\vec{P}' = \vec{P} + \vec{F}$ và gia tốc trọng trường hiệu dụng $\vec{g}' = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m}$ (ở VTCB nếu cắt dây vật sẽ rơi với gia tốc hiệu dụng này). **Chu kỳ mới của con lắc** được xác định bởi: $T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g'}}$, các trường hợp sau:

1. Ngoại lực có phương thẳng đứng

a) Khi con lắc đặt trong thang máy (hay di chuyển điểm treo con lắc) thì: $g' = g \pm a$
(với a là gia tốc chuyển động của thang máy)

+ Nếu thang máy đi **lên nhanh dần** hoặc đi **xuống chậm dần** lấy dấu (+); (lúc này: $\vec{a} \uparrow$)

+ Nếu thang máy đi **lên chậm dần** hoặc đi **xuống nhanh dần** lấy dấu (-); (lúc này: $\vec{a} \downarrow$)

b) Khi con lắc đặt trong điện trường có vector cường độ điện trường \vec{E} hướng thẳng đứng:

$g' = g \pm \frac{qE}{m}$: nếu vector \vec{E} **hướng xuống** lấy dấu (+), vector \vec{E} **hướng lên** lấy dấu (-)

Chú ý: Thay đúng dấu điện tích q vào biểu thức $g' = g \pm \frac{qE}{m}$; trong đó: $E = \frac{U}{d}$ (U : điện áp giữa hai bản tụ, d : khoảng cách giữa hai bản).

Ví dụ: Một con lắc đơn treo ở trần một thang máy. Khi thang máy đi **xuống nhanh dần đều** và **sau đó chậm dần đều** với **cùng một độ lớn của gia tốc**, thì chu kỳ dao động điều hoà của con lắc là T_1 và T_2 . Tính chu kỳ dao động của con lắc khi thang máy **đứng yên**.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} g_1 = g - a \\ g_2 = g + a \end{cases} \Rightarrow g_1 + g_2 = 2g \Rightarrow \boxed{\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} = \frac{2}{T^2}} \quad (\text{Vì } g \text{ tỉ lệ nghịch với bình phương của } T)$$

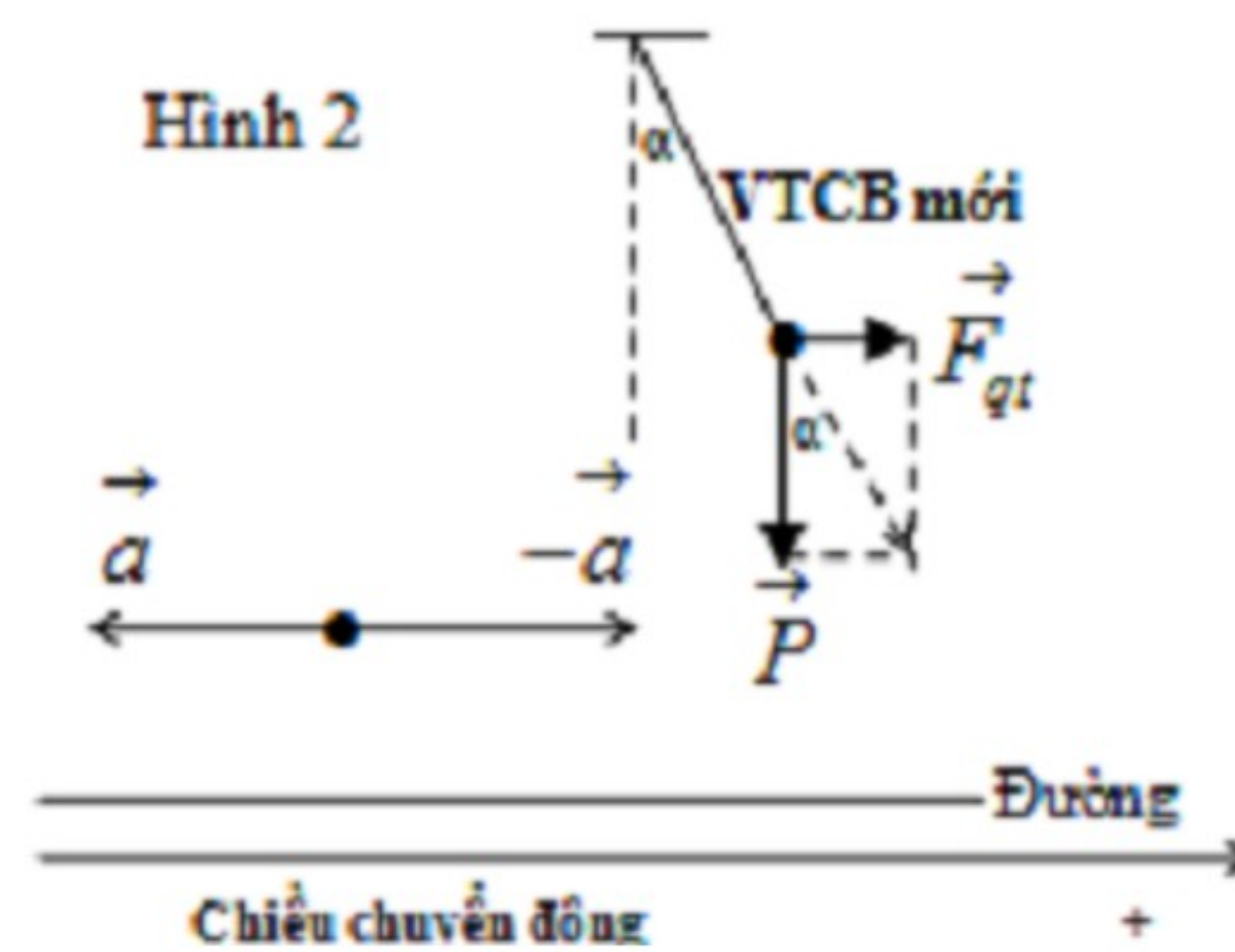
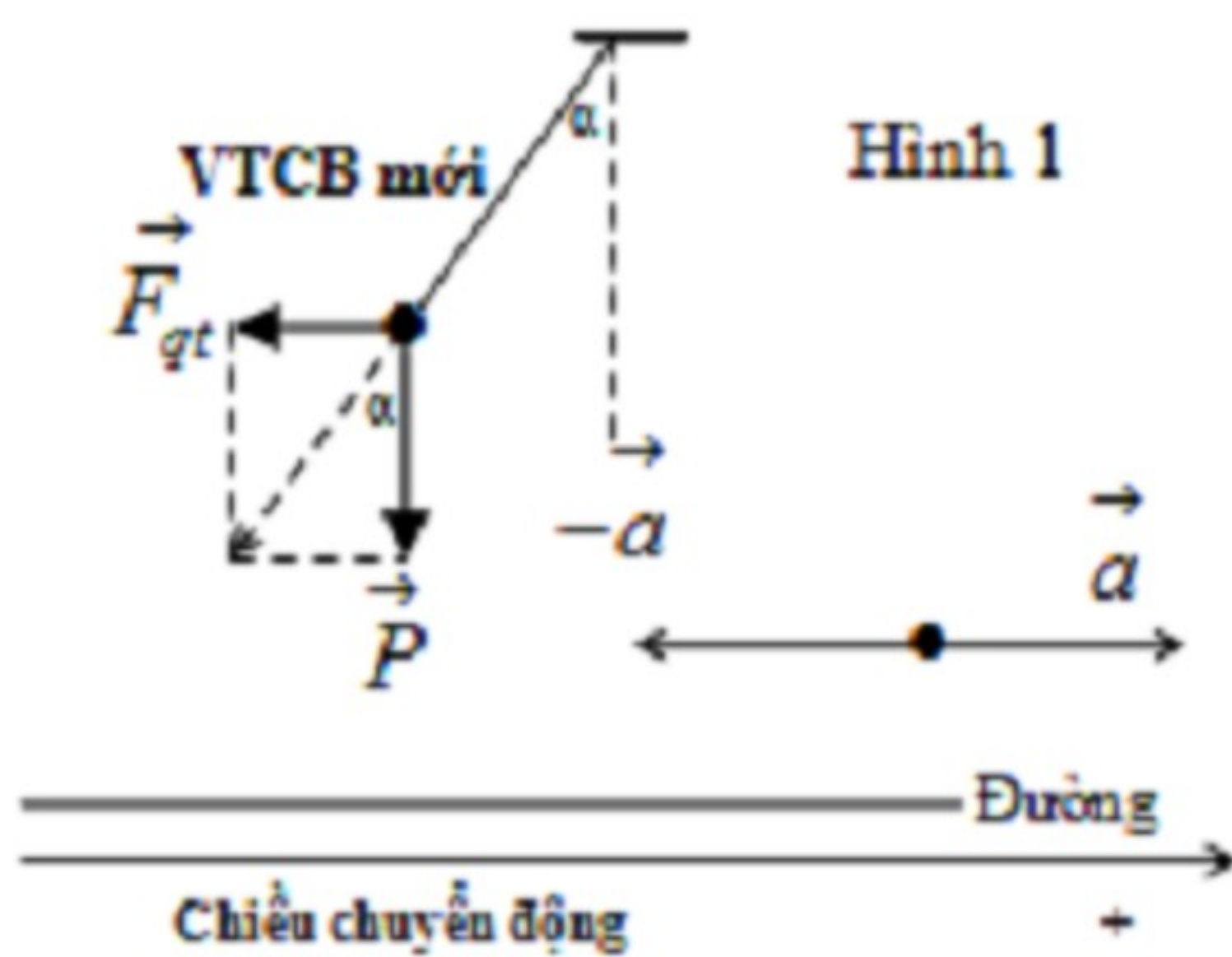
Tương tự khi bài toán xây dựng giả thiết với con lắc đơn mang điện tích đặt trong điện trường.

2. Ngoại lực có phương ngang

a) Khi con lắc treo lên trần một ô tô chuyển động ngang với gia tốc a :

Xe chuyển động nhanh dần đều

Xe chuyển động chậm dần đều



Tại vị trí cân bằng dây treo hợp với phương thẳng đứng một góc α (VTCB mới của con lắc)

$$\text{Với: } \tan \alpha = \frac{F_{qt}}{P} = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g \cdot \tan \alpha \text{ và } g' = \sqrt{g^2 + a^2} \text{ hay } g' = \frac{g}{\cos \alpha} \Rightarrow T' = T \sqrt{\cos \alpha}$$

b) Con lắc đặt trong điện trường nằm ngang: giống với trường hợp ô tô chuyển động ngang ở

trên với $g' = \sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2}$. Khi đổi chiều điện trường con lắc sẽ dao động với biên độ góc 2α .

3* *. Ngoại lực có phương xiên

a) Con lắc treo trên xe chuyển động trên mặt phẳng nghiêng góc α không ma sát

$$\boxed{T' = T \sqrt{\frac{g}{g'}}} \text{ hay } \boxed{T' = T \sqrt{\cos \alpha}} \text{ với } \begin{cases} g' = g \cdot \cos \alpha \\ a = g \cdot \sin \alpha \\ \beta = \alpha : \text{VTCB} \end{cases}; \text{ Lực căng dây: } \boxed{\tau = \frac{m \cdot a}{\sin \alpha}}$$

b) Con lắc treo trên xe chuyển động lên - xuống dốc nghiêng góc α không ma sát

$$* \quad \boxed{T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a^2 + b^2 \pm 2 \cdot a \cdot g \sin \alpha}}} \quad \begin{array}{l} - \text{Xe lên dốc nhanh dần hoặc xuống dốc chậm dần lấy dấu (-)} \\ - \text{Xe lên dốc chậm dần hoặc xuống dốc nhanh dần lấy dấu (+)} \end{array}$$

$$* \text{ Lực căng dây: } \boxed{\tau = m \sqrt{a^2 + g^2 \pm 2 \cdot a \cdot g \cdot \sin \alpha}}$$

$$* \text{ Vị trí cân bằng: } \boxed{\tan \beta = \frac{a \cdot \cos \alpha}{g \pm a \cdot \sin \alpha}} \text{ dốc lấy dấu (+), xuống dốc lấy dấu (-)}$$

c) Xe xuống dốc nghiêng góc α có ma sát:

$$* \quad \boxed{T' = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cdot \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}}}} \text{ với } \mu \text{ là hệ số ma sát.}$$

$$* \text{ Vị trí cân bằng: } \boxed{\tan \beta = \frac{\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha}}$$

$$* \text{ Lực căng dây: } \boxed{\tau = m \cdot g \cdot \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}}; \text{ với: } \boxed{a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$$

**** MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP NÂNG CAO**

📖 DẠNG 5: Con lắc vướng đinh (CLVĐ)

$$1. \text{ Chu kì } T \text{ của CLVĐ: } \boxed{T = \frac{1}{2} (T_1 + T_2)} \text{ hay } \boxed{T = \frac{\pi}{\sqrt{g}} (\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2})}$$

2. Độ cao CLVĐ so với VTCB: Vì $W_A = W_B \Rightarrow h_A = h_B$

3. Tỷ số biên độ dao động 2 bên VTCB

$$- \text{Góc lớn } (\alpha_0 > 10^\circ): \text{ Vì } h_A = h_B \Rightarrow l_1(1 - \cos \alpha_1) = l_2(1 - \cos \alpha_2) \Rightarrow \boxed{\frac{l_1}{l_2} = \frac{1 - \cos \alpha_2}{1 - \cos \alpha_1}}$$

$$- \text{Góc nhỏ } (\alpha_0 \leq 10^\circ) \Rightarrow \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}: \boxed{\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2}$$

$$4. \text{ Tỷ số lực căng dây treo ở vị trí biên: Góc lớn: } \boxed{\frac{T_A}{T_B} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}}; \text{ Góc nhỏ: } \boxed{\frac{T_A}{T_B} = 1 + \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2}}$$

5. Tỷ số lực căng dây treo trước và sau khi vướng chốt O' (ở VTCB)

$$- \text{Góc lớn: } \boxed{\frac{T_T}{T_S} = \frac{3 - \cos \alpha_1}{3 - \cos \alpha_2}}; \quad - \text{Góc nhỏ: } \boxed{\frac{T_T}{T_S} = 1 + \alpha_2^2 - \alpha_1^2}$$

📖 DẠNG 6: Con lắc đứt dây

Khi con lắc đứt dây vật bay theo phương tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm đứt.

1. Khi vật đi qua vị trí cân bằng thì đứt dây lúc đó vật chuyển động ném ngang với vận tốc đầu là vận tốc lúc đứt dây.

$$\text{Vận tốc lúc đứt dây: } v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_0)}$$

$$\text{Phương trình: } \begin{cases} \text{Theo Ox: } x = v_0 t \\ \text{Theo Oy: } y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

