KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

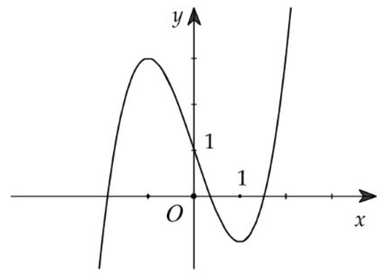
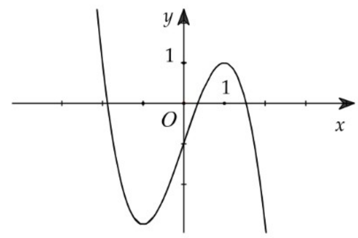
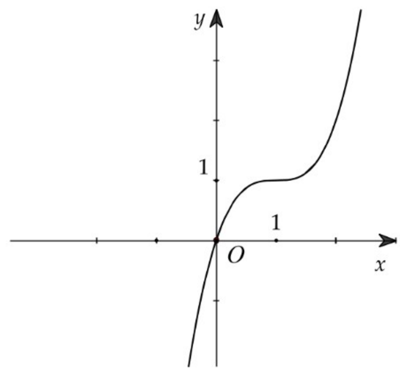
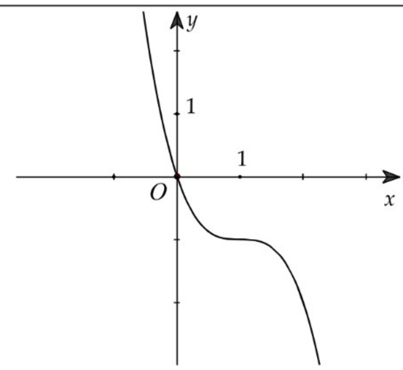
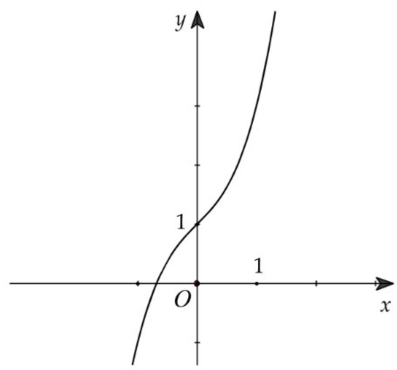
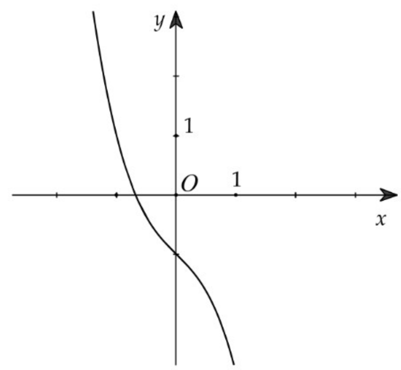
1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$.

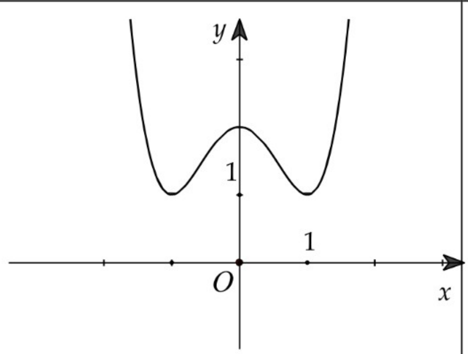
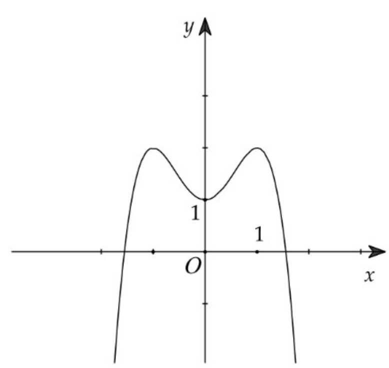
* **Tìm tập xác định của hàm số.**
* **Sự biến thiên**
  - Chiều biến thiên.
    i. Tính y'.
    ii. Tìm các nghiệm của phương trình $y' = 0$ và các điểm tại đó y' không xác định.
    iii. Xét dấu y' và suy ra các khoảng biến thiên của hàm số.
  - Tìm cực trị (*nếu có*).
  - Tìm các giới vô cực; các giới hạn tại $+\infty$, $-\infty$ và tại các điểm mà hàm số không xác định.
  - Tìm các đường tiệm cận của hàm số (*nếu có*).
  - Lập bảng biến thiên.
* **Đồ thị.**
  - Liệt kê các điểm đặc biệt (điểm cực đại, điểm cực tiểu, tâm đối xứng,...)
  - Xác định giao điểm của (C) với *Ox, Oy* (*nếu có*).
  - Vẽ đồ thị.

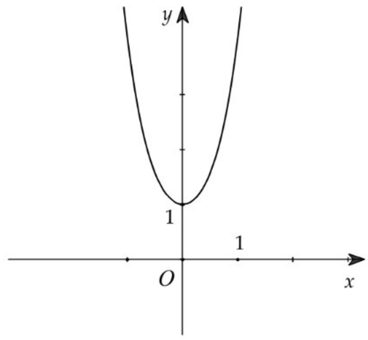
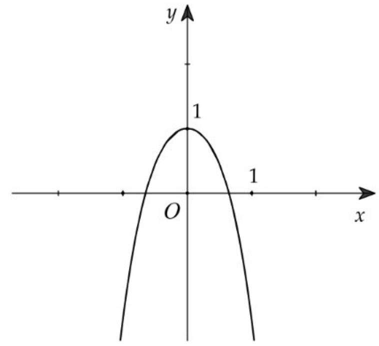
2. KHẢO SÁT MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC:

a) HÀM SỐ BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

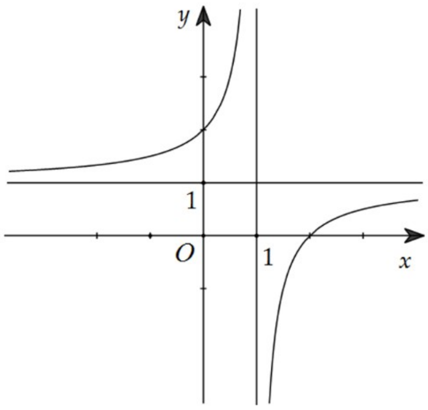
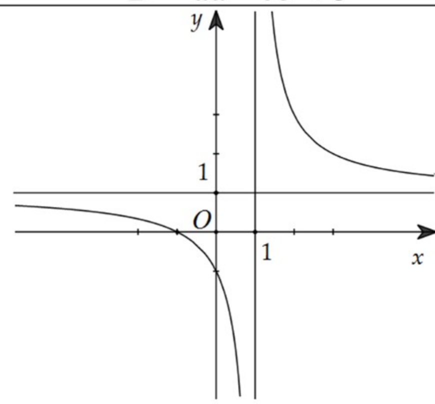
TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

b) HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt		

Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm.		

c) HÀM SỐ NHẤT BIẾN $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$

$D=ad-bc>0$	$D=ad-bc<0$
	

MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

Dạng 1: Từ đồ thị $\left(C\right): y=f\left(x\right)$ suy ra đồ thị $\left(C'\right): y=f\left(\left|x\right|\right)$.

Ta có $y=f\left(\left|x\right|\right)=\begin{cases} f\left(x\right) & khi\ \ x\geq 0 \\ f\left(-x\right) & khi\ \ x<0 \end{cases}$

và $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị $\left(C'\right)$ nhận *Oy* làm trục đối xứng.

*** Cách vẽ $\left(C'\right)$ từ $\left(C\right)$:**

+ *Giữ nguyên* phần đồ thị bên phải *Oy* của đồ thị $\left(C\right): y=f\left(x\right)$.

+ *Bỏ* phần đồ thị bên trái *Oy* của $\left(C\right)$, **lấy đối xứng phần đồ thị** *được giữ* qua *Oy*.

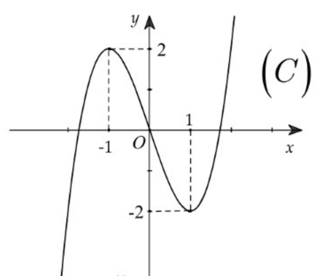
Ví dụ: Từ đồ thị $\left(C\right): y=f\left(x\right)=x^3-3x$

suy ra đồ thị $\left(C'\right): y=\left|x\right|^3-3\left|x\right|$.

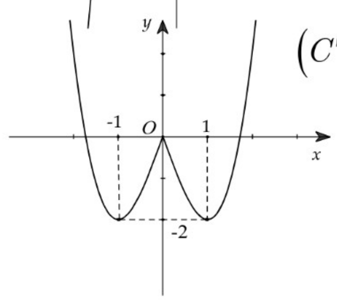
Biến đổi $\left(C\right)$:

+ Bỏ phần đồ thị của $\left(C\right)$ bên trái *Oy*, giữ nguyên $\left(C\right)$ bên phải *Oy*.

+ Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua *Oy*.



$\left(C\right): y=x^3-3x$



$\left(C'\right): y=\left|x\right|^3-3\left|x\right|$

Dạng 2: Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

Nội dung: Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & khi\ \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & khi\ \ f(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

+ *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị phía trên *Ox*</u> của đồ thị (C): $y = f(x)$.

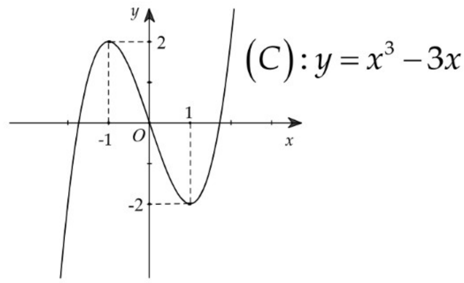
+ *Bỏ* phần đồ thị <u>phía dưới *Ox*</u> của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua *Ox*.

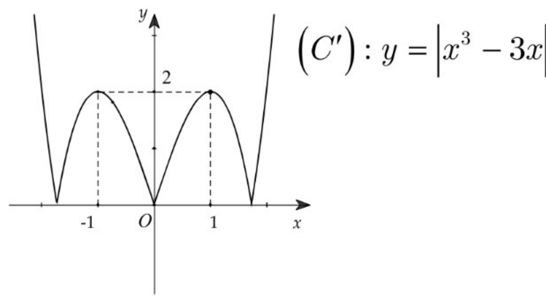
Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x^3 - 3x|$.

Biến đổi (C):

+ Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox, giữ nguyên (C) phía trên Ox.

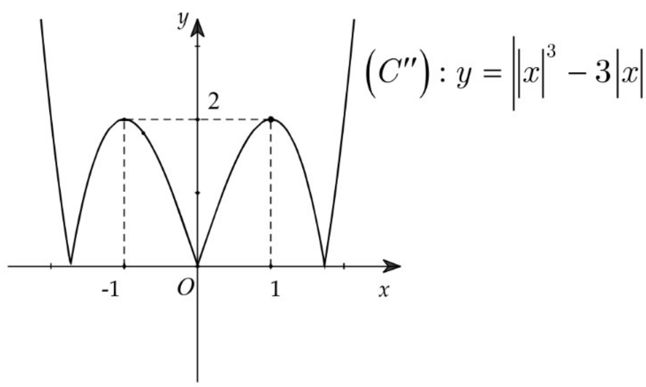
+ Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.





Chú ý với dạng: $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$. Biến đổi (C) để được đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị $(C''): y = \left||x|^3 - 3|x|\right|$.



Dạng 3: Từ đồ thị $(C): y = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

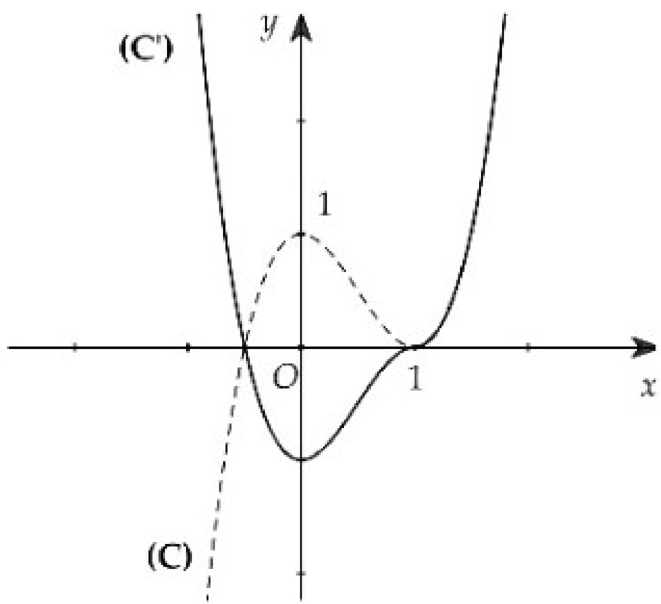
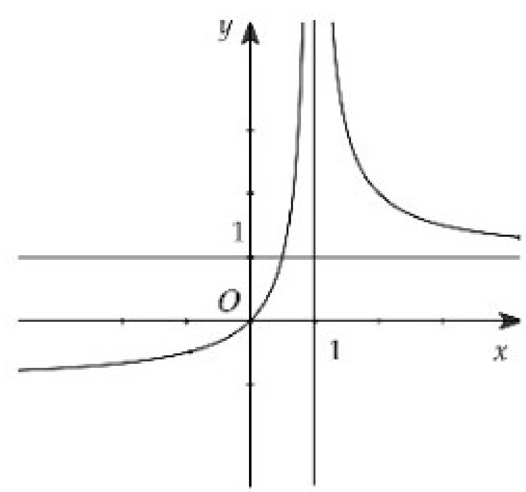
Ta có: $y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

+ *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị trên miền</u> $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.

+ *Bỏ* phần đồ thị <u>trên miền</u> $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua *Ox*.

Ví dụ

a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = \lvert x-1\rvert(2x^2 - x - 1)$	b) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $(C'): y = \dfrac{x}{\lvert x-1\rvert}$
$y = \lvert x-1\rvert(2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & khi\ x \ge 1 \\ -f(x) & khi\ x < 1 \end{cases}$ <u>Đồ thị (C'):</u> + Giữ nguyên (C) với $x \ge 1$. + Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy *đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox*.  <u>Nhận xét:</u> Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên *lấy đối xứng các điểm đặc biệt* của (C): giao điểm với *Ox*, *Oy*, CĐ, CT...	$y = \dfrac{x}{\lvert x-1\rvert} = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in (1;+\infty) \\ -\dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in (-\infty;1) \end{cases}$. <u>Đồ thị (C'):</u> + Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$. + Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.  <u>Nhận xét</u>: Đối với hàm phân thức thì nên *lấy đối xứng các đường tiệm cận* để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.