CỰC TRỊ HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$.

+ x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.

+ x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.

+ Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.

+ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.

+ Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị của hàm số*** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.

+ Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là ***giá trị cực trị (hay cực trị)*** *của hàm số.*

+ Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $\left(x_0; f(x_0)\right)$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1: Giả sử hàm số $y = f\left(x\right)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'\left(x_0\right) = 0$.

Chú ý:

+ Đạo hàm $f'\left(x\right)$ *có thể* bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
+ Hàm số *có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
+ Hàm số *chỉ có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'\left(x_0\right)=0$. Nếu $f'\left(x\right) > 0$ trên khoảng $\left(x_0 - h; x_0\right)$ và $f'\left(x\right) < 0$ trên khoảng $\left(x_0; x_0 + h\right)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f\left(x\right)$.

+ Nếu $f'\left(x\right) < 0$ trên khoảng $\left(x_0 - h; x_0\right)$ và $f'\left(x\right) > 0$ trên khoảng $\left(x_0; x_0 + h\right)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f\left(x\right)$.

<u>Quy tắc tìm cực trị</u>

Quy tắc 1:

+ *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tìm $f'\left(x\right)$.
+ *Bước 2:* Tìm các điểm x_i $\left(i = 1; 2; \ldots\right)$ mà tại đó *đạo hàm của hàm số bằng* 0 hoặc hàm số *liên tục nhưng không có đạo hàm.*
+ *Bước 3:* Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'\left(x\right)$. Nếu $f'\left(x\right)$ *đổi dấu khi đi qua* x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 3: Giả sử $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $\left(x_0 - h; x_0 + h\right)$ với $h > 0$.

+ Nếu $f'\left(x_0\right) = 0$, $f''\left(x_0\right) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
+ Nếu $f'\left(x_0\right) = 0$, $f''\left(x_0\right) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 2:

+ *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tìm $f'\left(x\right)$.
+ *Bước 2:* Tìm các nghiệm x_i $\left(i = 1; 2; \ldots\right)$ của phương trình $f'\left(x\right) = 0$.
+ *Bước 3:* Tính $f''\left(x\right)$ và tính $f''\left(x_i\right)$.
    * Nếu $f''\left(x_i\right) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.
    * Nếu $f''\left(x_i\right) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÀM SỐ

I. CỰC TRỊ CỦA HÀM ĐA THỨC BẬC BA:

1. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn hoành độ cho trước

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y = f(x;m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước.

Phương pháp:

+ ***Bước 1:***
  * Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
  * Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c = Ax^2 + Bx + C$
+ ***Bước 2:***

Hàm số có cực trị (hay có hai cực trị, hai cực trị phân biệt hay có cực đại và cực tiểu)

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua 2 nghiệm đó

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = B^2 - 4AC = 4b^2 - 12ac > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

+ ***Bước 3:*** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$.

Bước 4: Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

Bước 5: Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

**** Chú ý:*** Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Điều kiện	*Kết luận*
$b^2 - 3ac \leq 0$	Hàm số không có cực trị.
$b^2 - 3ac > 0$	Hàm số có hai điểm cực trị.

➢ ***Điều kiện để hàm số có cực trị cùng dấu, trái dấu.***

- *Hàm số có 2 cực trị trái dấu*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$.

- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu dương*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu âm*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} < 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

➢ ***Tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn:***

$$\left[\begin{array}{l} x_1 < \alpha < x_2 \\ x_1 < x_2 < \alpha \\ \alpha < x_1 < x_2 \end{array}\right.$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$

$$\Leftrightarrow (x_1-\alpha)(x_2-\alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 - \alpha(x_1+x_2) + \alpha^2 < 0$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-\alpha)(x_2-\alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 - \alpha(x_1+x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases}$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $\alpha < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-\alpha)(x_2-\alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 - \alpha(x_1+x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$$

- Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng

khi có 1 nghiệm là $x = \dfrac{-b}{3a}$, có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân khi có 1 nghiệm là $x = -\sqrt[3]{\dfrac{d}{a}}$.

2. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) < 0$ thì hai điểm A, B nằm về hai phía so với đường thẳng Δ.

Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) > 0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ.

Một số trường hợp đặc biệt:

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 1 phía đối với trục Oy*

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 2 phía đối với trục Oy*

$\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về 1 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CĐ}.y_{CT} > 0$

Đặc biệt:

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về phía trên đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ} + y_{CT} > 0 \end{cases}$

Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về phía dưới đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \\ y_{CĐ} + y_{CT} < 0 \end{cases}$.

+ Các điểm cực trị của đồ thị nằm *về 2 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$

(*áp dụng khi không nhẩm được nghiệm và viết được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số*)

Hoặc: Các điểm cực trị của đồ thị nằm *về 2 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ đồ thị cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (*áp dụng khi nhẩm được nghiệm*)

3. Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị

$\boxed{g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}}$ *hoặc* $\boxed{g(x) = 9ay - \frac{y'.y''}{2}}$ *hoặc* $\boxed{g(x) = y - \frac{y'.y''}{3y'''}}$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là

$$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}} \text{ với } e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$$

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$

MỘT SỐ KẾT QUẢ CẦN NHỚ

+ Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

+ Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.

+ Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

+ Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

+ Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.

+ Hàm số có một cực tiểu và hai cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

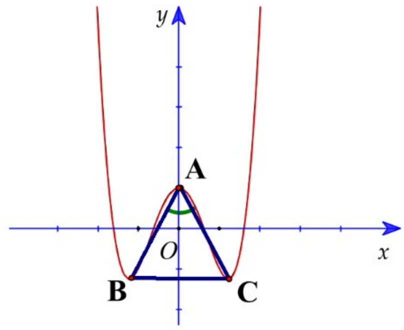
Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị: $A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

tạo thành tam giác ABC thỏa mãn dữ kiện: $ab < 0$.

MỘT SỐ CÔNG THỨC GIẢI NHANH

Đặt : $\widehat{BAC} = \alpha$

Tổng quát: $\boxed{\cot^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{-b^3}{8a}}$



Dữ kiện	Công thức thỏa mãn $ab < 0$
Tam giác ABC vuông cân tại A	$b^3 = 8a$
Tam giác ABC đều	$b^3 = 24a$
Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
Tam giác ABC có diện tích $max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC} = r_0$	$r = \dfrac{b^2}{4\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{8a}}\right)}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC} = R$	$R = \dfrac{b^3 - 8a}{8\lvert a\rvert b}$
Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 = 6ac$
Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
Tam giác ABC cùng điểm O tạo thành hình thoi	$b^2 = 2ac$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 = 8ac$
Đồ thị hàm số $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng	$b^2 = \dfrac{100}{9}ac$
Định tham số để hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ và trục hoành có diện tích phần trên và phần dưới bằng nhau.	$b^2 = \dfrac{36}{5}ac$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC: $x^2 + y^2 - \left(\dfrac{2}{b} - \dfrac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\dfrac{2}{b} - \dfrac{\Delta}{4a}\right) = 0$	