TÓM TẮT KIẾN THỨC TOÁN 12

PHẦN 1. HÀM SỐ

SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa

$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$ *(K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng).*

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow y = f(x)$ **đồng biến** trên K đồ thị ***đi lên*** từ trái sang phải.

$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow y = f(x)$ **nghịch biến** trên K đồ thị ***đi xuống*** từ trái sang phải.

Chú ý: + Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a;b) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ **không đổi** trên khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a;b) \Rightarrow f'(x) \geq 0,\ \forall x \in (a;b)$.

+ Nếu $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a;b) \Rightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a;b)$.

2. Quy tắc và công thức tính đạo hàm

Quy tắc tính đạo hàm: Cho $u = u(x)$; $v = v(x)$; C : là hằng số .

Tổng, hiệu: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Tích: $(u.v)' = u'.v + v'.u \Rightarrow (C.u)' = C.u'$.

Thương: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$, $(v \neq 0) \Rightarrow \left(\dfrac{C}{u}\right)' = -\dfrac{C.u'}{u^2}$

Đạo hàm hàm hợp: Nếu $y = f(u)$, $u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x$.

Bảng công thức tính đạo hàm:

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp
$(C)' = 0$ (C là hằng số).	$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0)$	$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}\ (u \neq 0)$ $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\ (u > 0)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$

$\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(\tan u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$\left(\cot x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\cot u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = u'.e^u$
$\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$	$\left(a^u\right)' = u'.a^u.\ln a$
$\left(\ln\left\|x\right\|\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln\left\|u\right\|\right)' = \dfrac{u'}{u}$
$\left(\log_a\left\|x\right\|\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\left(\log_a\left\|u\right\|\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

Công thức tính nhanh đạo hàm hàm phân thức:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}. \quad ; \quad \left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{\left(dx^2+ex+f\right)^2}.$$

Đạo hàm cấp 2 :

+ *Định nghĩa:* $f''\left(x\right) = \left[f'\left(x\right)\right]'$

+ *Ý nghĩa cơ học:* Gia tốc tức thời của chuyển động $s = f\left(t\right)$ tại thời điểm t_0 là: $a\left(t_0\right) = f''\left(t_0\right)$.

* **<u>Một số chú ý:</u>**

- Nếu hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số $f\left(x\right) + g\left(x\right)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f\left(x\right) - g\left(x\right)$.
- Nếu hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số $f\left(x\right).g\left(x\right)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f\left(x\right), g\left(x\right)$ không là các hàm số dương trên K.
- Cho hàm số $u = u\left(x\right)$, xác định với $x \in \left(a;b\right)$ và $u\left(x\right) \in \left(c;d\right)$. Hàm số $f\left[u\left(x\right)\right]$ cũng xác định với $x \in \left(a;b\right)$.

Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên K

+ Nếu $f'\left(x\right) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'\left(x\right) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K.
+ Nếu $f'\left(x\right) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'\left(x\right) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K.

Chú ý:

* Đối với hàm phân thức hữu tỉ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(x\neq -\dfrac{d}{c}\right)$ thì dấu "=" khi xét dấu đạo hàm y' không xảy ra.

Giả sử $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c.$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow f'\left(x\right)\geq 0;\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}a=0\\ b=0\\ c>0\end{cases}\end{array}\right.$.	$\Leftrightarrow f'\left(x\right)\leq 0;\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}a=0\\ b=0\\ c<0\end{cases}\end{array}\right.$.

Trường hợp 2 thì hệ số c khác 0 vì khi $a=b=c=0$ thì $f\left(x\right)=d$

(Đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox thì không đơn điệu)

* *Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng l ta giải như sau:*

+ <u>Bước 1</u>: Tính $y'=f'\left(x;m\right)=ax^2+bx+c.$

+ <u>Bước 2</u>: Hàm số đơn điệu trên $\left(x_1;x_2\right)\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ a\neq 0\end{cases}\quad\left(*\right)$$

+ <u>Bước 3</u>: Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng l

$$\Leftrightarrow\left|x_1-x_2\right|=l\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=l^2\Leftrightarrow S^2-4P=l^2\quad\left(**\right)$$

+ <u>Bước 4</u>: Giải $\left(*\right)$ và giao với $\left(**\right)$ để suy ra giá trị m cần tìm.