PHẦN II. MŨ VÀ LOGARIT

LŨY THỪA VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA.

1. KHÁI NIỆM LŨY THỪA.

+ *Lũy thừa với số mũ nguyên.*

Cho n là một số nguyên dương.

Với a là số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a.

$$a^n = \underbrace{a.a......a}_{n} \,(n \text{ thừa số}).$$

Với $a \neq 0$.

$$a^0 = 1 \qquad\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ta gọi a là cơ số, m là mũ số. Và chú ý 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

+ Một số tính chất của lũy thừa

• Giả thuyết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta};\ \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta};\ (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha.\beta}\ ;\ (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha};\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^\alpha.$$

• Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$;

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

• Với mọi $0 < a < b$, ta có: $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$; $\quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$

• Chú ý:

+ Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không nguyên.

+ Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.

+ Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

+ *Phương trình* $x^n = b$.

Ta có kết quả biện luận số nghiệm của phương trình $x^n = b$ như sau:

• Trường hợp n lẻ:

Với mọi số thực b, phương trình có nghiệm duy nhất.

• Trường hợp n chẵn:

+ *Với* $b < 0$, phương trình vô nghiệm.

+ *Với* $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$.

+ *Với* $b > 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

Một số tính chất của căn bậc n

Với $a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

+ $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \forall a$;

+ $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, \forall a$.

+ $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|}, \forall ab \geq 0$;

+ $\sqrt[2n+1]{ab} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b}, \forall a, b$.

+ $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}}, \forall ab \geq 0, b \neq 0$;

+ $\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0$.

+ $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \forall a > 0$, n nguyên dương, m nguyên.

+ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0$, n, m nguyên dương.

+ Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n$ nguyên dương p, q nguyên.

Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$.

2. HÀM SỐ LŨY THỪA.

+ *Khái niệm.*

Xét hàm số $y = x^\alpha$, với α là số thực cho trước.

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Chú ý.

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể.

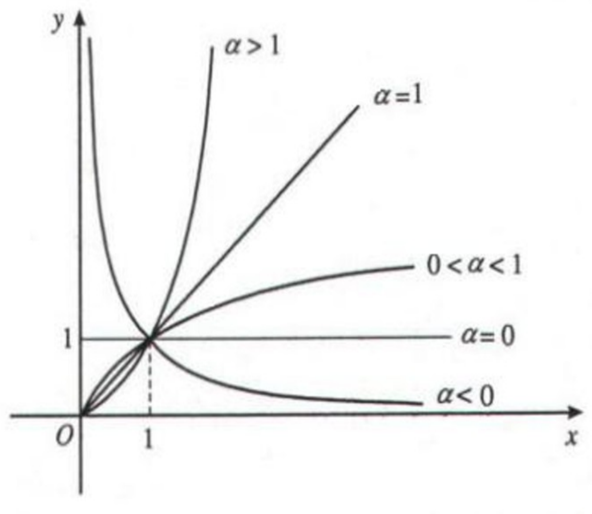
- Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Với α không nguyên, tập xác định $(0; +\infty)$.

+ *Khảo sát hàm số lũy thừa.*

❖ Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0; +\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này.

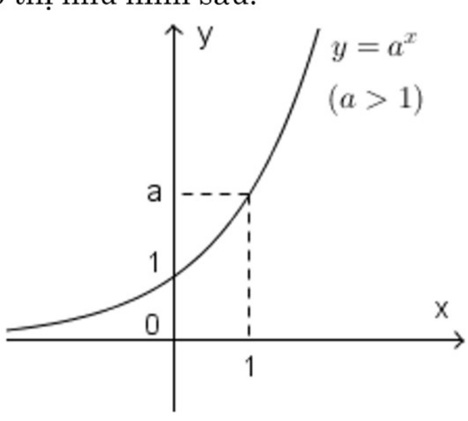
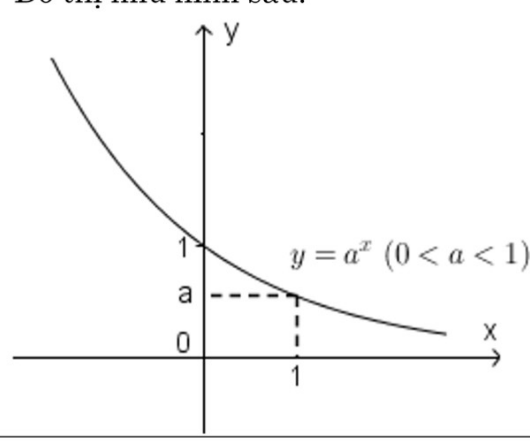
<table>
<tr><th>$y = x^\alpha, \alpha > 0.$</th><th>$y = x^\alpha, \alpha < 0.$</th></tr>
<tr>
<td>
1. Tập xác định: $(0; +\infty)$.
2. Sự biến thiên
$y' = \alpha . x^{\alpha - 1} > 0 \quad \forall x > 0.$
Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty.$
Tiệm cận: không có.
3. Bảng biến thiên.
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>+</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$+\infty$ ↗
0</td></tr>
</table>
</td>
<td>
1. Tập xác định: $(0; +\infty)$.
2. Sự biến thiên
$y' = \alpha . x^{\alpha - 1} < 0 \quad \forall x > 0.$
Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0.$
Tiệm cận:
Ox là tiệm cận ngang.
Oy là tiệm cận đứng.
3. Bảng biến thiên.
<table>
<tr><td>x</td><td>0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>y'</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>y</td><td>$+\infty$ ↘ 0</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Đồ thị của hàm số.



Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.

❖ Khảo sát hàm số mũ $y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$.

<table>
<tr><th>$y = a^x, (a > 1)$</th><th>$y = a^x, (a < 1)$</th></tr>
<tr>
<td>1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên.
$y' = a^x \ln a > 0, \forall x.$
Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} a = +\infty.$
Tiệm cận:
Ox là tiệm cận ngang.
3. Bảng biến thiên.
x: $-\infty$ 0   1 $+\infty$
y': +   +   +
y: 0   1 a $+\infty$
Đồ thị như hình sau.

</td>
<td>1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.
2. Sự biến thiên.
$y' = a^x \ln a < 0, \forall x$
Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0.$
Tiệm cận:
Ox là tiệm cận ngang.
3. Bảng biến thiên.
x: $-\infty$ 0   1 $+\infty$
y': −   −   −
y: $+\infty$ 1 a 0
Đồ thị như hình sau.

</td>
</tr>
</table>

LOGARIT VÀ HÀM SỐ LOGARIT

1. KHÁI NIỆM –TÍNH CHẤT VÀ QUY TẮT TÍNH LOGARIT.

+ *Khái niệm Logarit.*

Cho hai số dương a,b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và được kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

Không có logarit của số âm và số 0.

Bảng tóm tắt công thức Mũ-loarrit thường gặp:

• $a^0 = 1, (a \neq 0)$.	• $\log_a 1 = 0, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^1 = a$	• $\log_a a = 1, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^{-\alpha} = \dfrac{1}{a^\alpha}$	• $\log_a a^\alpha = \alpha, (0 < a \neq 1)$
• $\dfrac{(a)^\alpha}{(a)^\beta} = (a)^{\alpha-\beta}$	• $\log_{a^\alpha} a = \dfrac{1}{\alpha}, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^\alpha . (b)^\beta = (a)^{\alpha+\beta}$	• $\log_a b^\alpha = \alpha . \log_a b, (a,b > 0, a \neq 1)$
• $(a)^\alpha . (b)^\alpha = (a.b)^\alpha$	• $\log_{a^\beta} b = \dfrac{1}{\beta} . \log_a b$
• $\dfrac{(a)^\alpha}{(b)^\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha, (b \neq 0)$	• $\log_{a^\beta} b^\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta} . \log_a b$
• $(a)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{(a)^\alpha}, (\beta \in \mathbb{N}^*)$	• $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$
• $(a^\alpha)^\beta = (a)^{\alpha\beta}$	• $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\dfrac{b}{c}\right)$
• $(a)^\alpha = b \Rightarrow \alpha = \log_a b$	• $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT.

+ *Bất phương trình mũ cơ bản.*

Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$) với $a > 0, a \neq 1$.

Ta xét bất phương trình có dạng $a^x > b$.

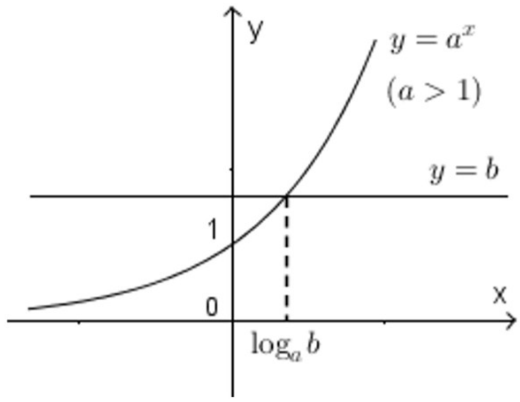
- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$, vì $a^x > b, \forall x \in \mathbb{R}$..
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.

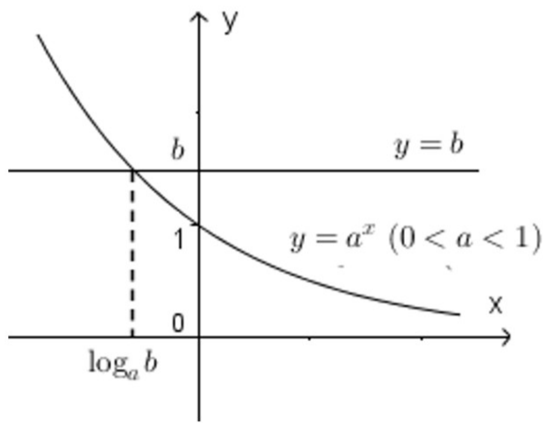
Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Ta minh họa bằng đồ thị sau:

- Với $a>1$, ta có đồ thị



- Với $0<a<1$, ta có đồ thị



+ ***Bất phương trình logarit cơ bản.***

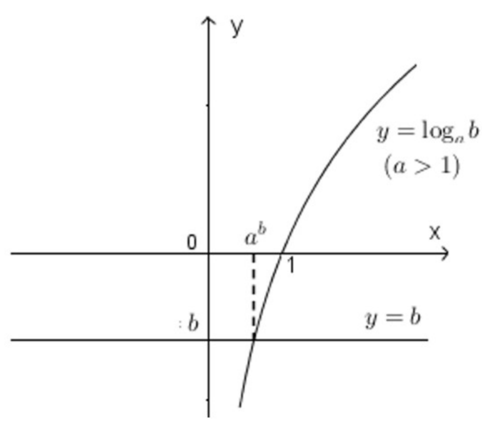
Bất phương trình logarit cơ bản có dạng $\log_a x>b$ (hoặc $\log_a x\ge b, \log_a x<b, \log_a x\le b$) với $a>0, a\ne 1$.

Xét bất phương trình $\log_a x>b$.

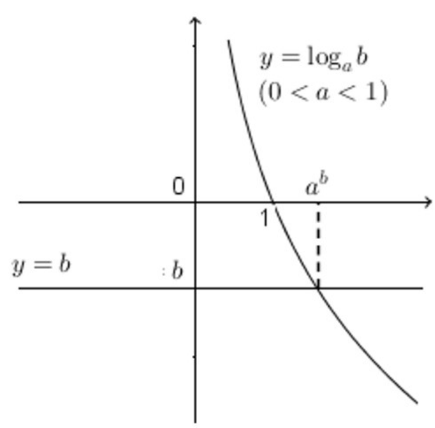
- Trường hợp $a>1$, ta có: $\log_a x>b\Leftrightarrow x>a^b$.
- Trường hợp $0<a<1$, ta có: $\log_a x>b\Leftrightarrow 0<x<a^b$.

Ta minh họa bằng đồ thị như sau.

- Với $a>1$, ta có đồ thị sau.



- Với $0<a<1$, ta có đồ thị sau.



Quan sát đồ thị, ta thấy rằng:

- Trường hợp $a>1$: $\log_a x>b$

khi và chỉ khi $x>a^b$.

- Trường hợp $0<a<1$:

$\log_a x>b$ khi và chỉ khi $0<x<a^b$.