

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

❖ Đường tiệm cận ngang

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty), (-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay *tiệm cận ngang*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

❖ Đường tiệm cận đứng

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay *tiệm cận đứng*) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

Lưu ý:

- Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad-bc \neq 0$) luôn có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

❖ Dấu hiệu nhận biết các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

- Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.
- Hàm phân thức mà bậc của tử \leq bậc của mẫu có TCN.
- Hàm căn thức dạng: $y = \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}, y = \sqrt{f(x)} - g(x), y = g(x) - \sqrt{f(x)}$ có thể có tiệm cận ngang. (dùng liên hợp)

❖ Cách tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

- Tiệm cận đứng: ta đi tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.
- Tiệm cận ngang: tính 2 giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

❖ Một số chú ý trong quá trình tìm tiệm cận.

- Nếu $x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$.
- Nếu $x \rightarrow -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TIỆM CẬN KHÔNG THAM SỐ

Câu 1: (MĐ 102-2022) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình:

- A. $y = -2$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $y = 1$.

Câu 2: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $x = 2$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 3: (Đề Minh Họa 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.
B. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 4: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 5: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 6: (Đề số 01 - Vted năm 2020) Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-4}$.

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 8: Đồ thị của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4x+3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 9: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 12: Đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2+4x+3} - \sqrt{4x^2+1}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 13: Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+		+	
y	2		$+\infty$		2

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 15: (Đề minh họa, Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	2		$+\infty$		5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 16: (Mã 103 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		-		-	0	+	
y	1		$-\infty$		2		3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 17: (Đề minh họa 3, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
y'			$+$		$-$
y			$-\infty$	$+\infty$	1

Diagram showing asymptotes: a vertical dashed line at $x = -2$ and a horizontal dashed line at $y = 1$. Arrows indicate the function's behavior in each interval.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Câu 18: (THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019) Cho hàm số có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$		$+$	$-$	$+$
y	-4	$+\infty$	2	$-\infty$	-1

Diagram showing asymptotes: a vertical dashed line at $x = -1$ and a horizontal dashed line at $y = 2$. Arrows indicate the function's behavior in each interval.

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Câu 19: (Sở Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	$-$		$+$	$-$
y	$+\infty$	1	$-\infty$	0

Diagram showing asymptotes: a vertical dashed line at $x = -2$ and a horizontal dashed line at $y = 1$. Arrows indicate the function's behavior in each interval.

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Câu 21: (Cụm liên trường Hải Phòng 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$
y	0	$+\infty$	$+\infty$	0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

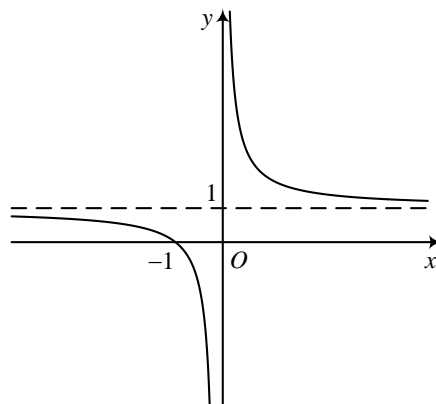
A. 3

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Câu 22: (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$, tiệm cận ngang $y = 1$.

B. Hàm số có hai cực trị.

C. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

D. Hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		+	+
y	1	$+\infty$	$-\infty$

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ TIỆM CẬN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{2x+2m-1}{x+m}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(3;1)$

- A. $m=1$. B. $m=-3$. C. $m=3$. D. $m=2$.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{bx+1}$ có đồ thị (C) . Nếu (C) có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$ và tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\frac{1}{3}$ thì tổng $S=a+b$ là:

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 3. C. $-\frac{1}{6}$. D. -9.

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{2x-m}{x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành hình vuông

- A. 1. B. 0. C. 4. D. 2.

Câu 27: Tìm tổng tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ có hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 5.

- A. 0. B. 5. C. 4. D. 2.

Câu 28: Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x+n-2017}{x+m+3}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của $m+n$ là:

- A. 3. B. 6. C. -3. D. 0.

Câu 29: (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-8x+m}$ có 3 đường tiệm cận?

- A. 14. B. 8. C. 15. D. 16.

Câu 30: (Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020) Có bao nhiêu số nguyên của m thuộc đoạn $[-100;100]$ để

đồ thị hàm số $y = \frac{1}{(x-m)\sqrt{2x-x^2}}$ có đúng hai đường tiệm cận?

- A. 200. B. 2. C. 199. D. 0.

Câu 31: (Sở Vĩnh Phúc 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số

$y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

- A. 8 B. 6 C. 7 D. Vô số

Câu 32: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-mx-m+5}$ không có đường tiệm cận đứng?

- A. 10. B. 1. C. 12. D. 9.

Câu 33: (Thi thử Lâmônôxốp - Hà Nội 2019) Tổng các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số

$y = \frac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng một tiệm cận đứng.

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 2. C. -3. D. $\frac{3}{2}$.

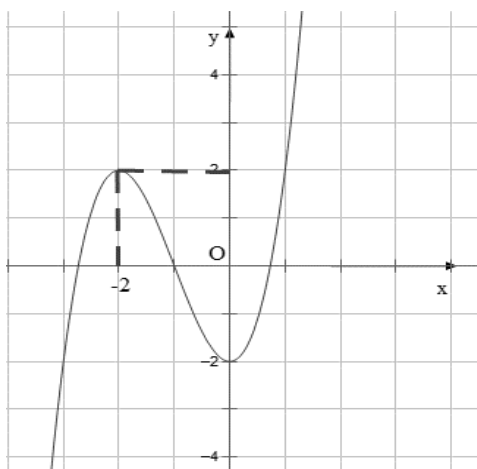
DẠNG 3: XÁC ĐỊNH TIỆM CẬN CỦA HÀM HỢP, HÀM ẨN

Câu 34: (THPT Lương Văn Can - 2018) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$. Khi đó đường thẳng nào

sau đây là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-2}$?

- A. $x = 1$. B. $x = -2$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x)-1}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 36: (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'			
y	2		$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận

ngang?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

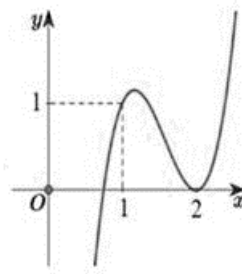
Câu 37: (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có duy

nhất một tiệm cận ngang.

- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

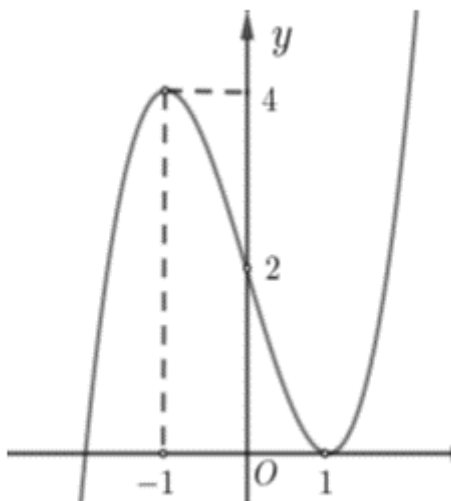
Câu 38: (THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019) Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{(x+1)[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.

Câu 39: (THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây, đặt $g(x) = \frac{x^2 - x}{f^2(x) - 2f(x)}$. Hỏi đồ thị hàm số $y = g(x)$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?



A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Câu 40: (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + x) + 3}$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.