

# CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

## DẠNG 1. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DƯA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ CỦA HS

$f(x); f'(x)$

### **Kiến thức cần nhớ**

- **Điều kiện cần (định lý 1):** Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên khoảng  $(a; b)$  và đạt cực đại

(hoặc cực tiểu) tại  $x_0$  thì  $f'(x_0) = 0$ .

- **Điều kiện đủ (định lý 2):**

Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương khi  $x$  đi qua điểm  $x_0$  (theo chiều tăng) thì hàm số  $y = f(x)$

đạt cực tiểu tại điểm  $x_0$ .

Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm khi  $x$  đi qua điểm  $x_0$  (theo chiều tăng) thì hàm số  $y = f(x)$

đạt cực đại tại điểm  $x_0$ .

- **Định lý 3:** Giả sử  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp 2 trong khoảng  $(x_0 - h; x_0 + h)$ , với  $h > 0$ . Khi đó:

Nếu  $y'(x_0) = 0$ ,  $y''(x_0) > 0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu.

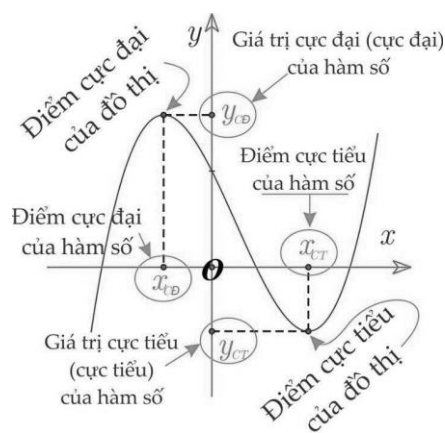
Nếu  $y'(x_0) = 0$ ,  $y''(x_0) < 0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại.

### **Các THUẬT NGỮ cần nhớ**

- Điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số là  $x_0$ , giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số là  $f(x_0)$

(hay  $y_{\text{CB}}$  hoặc  $y_{\text{CT}}$ ). Điểm cực đại của đồ thị hàm số là  $M(x_0; f(x_0))$ .

- Nếu  $M(x_0; y_0)$  là điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$ .



**Câu 1:** (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$0$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$		$2$		$+\infty$	
	$-\infty$		$-4$		

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2.                      B. 3.                      C. 0.                      D. -4.

**Câu 2:** (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 2) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$1$	$-2$	$+\infty$	

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A.  $x = -2$ .                      B.  $x = 2$ .                      C.  $x = 1$ .                      D.  $x = -1$ .

**Câu 3:** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$2$	$-3$	$+\infty$	

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3.

B. -3.

C. -1.

D. 2.

**Câu 4:** (MĐ 101-2022) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

$x$	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		↗ 2		↘ -2		↗ $+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A.  $x = -2$ .

B.  $x = 2$ .

C.  $x = -1$ .

D.  $x = 1$ .

**Câu 5:** (Mã 105 - 2017) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$y'$		+	0	-	0	+	
$y$		↗ 4		↘ -5		↗ 2	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -5$

B. Hàm số có bốn điểm cực trị

C. Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$

D. Hàm số không có cực đại

**Câu 6:** (Mã 110 - 2017) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$y'$		+	0	-	0	+	
$y$	$-\infty$		↗ 3		↘ 0		↗ $+\infty$

Tìm giá trị cực đại  $y_{CB}$  và giá trị cực tiểu  $y_{CT}$  của hàm số đã cho.

A.  $y_{CB} = 2$  và  $y_{CT} = 0$

B.  $y_{CB} = 3$  và  $y_{CT} = 0$

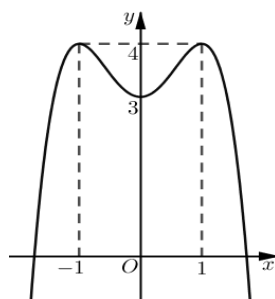
C.  $y_{CB} = 3$  và  $y_{CT} = -2$

D.  $y_{CB} = -2$

và  $y_{CT} = 2$

**Câu 7:** (Mã 123 - 2017) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau





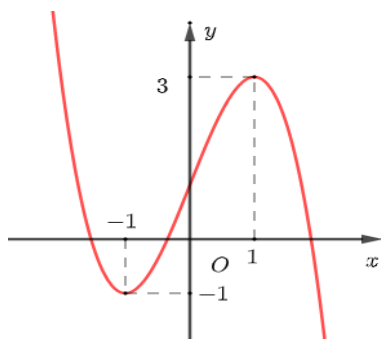
A. 1.

B. 4.

C. -1.

D. 3.

**Câu 12:** (MĐ 103-2022) Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



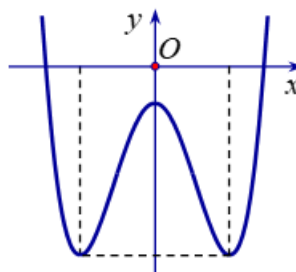
A.  $(1; -1)$ .

B.  $(3; 1)$ .

C.  $(1; 3)$ .

D.  $(-1; -1)$ .

**Câu 13:** (MĐ 102-2022) Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

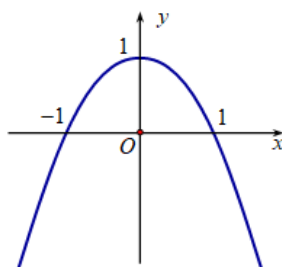
A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

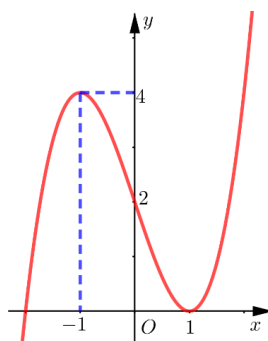
**Câu 14:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  được cho như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng

- A.  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x=0$ .  
 B.  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x=-1$ .  
 C.  $f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x=1$ .  
 D.  $f(x)$  có ba điểm cực trị.

**Câu 15:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x) - 5x$  là:

- A. 2.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 1.

## **DẠNG 2. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BIỂU THỨC $f(x); f'(x)$**

★ **Bài toán:** Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số  $y = f(x)$ .

✎ **Phương pháp:** Sử dụng 2 qui tắc tìm cực trị sau:

### **Quy tắc I: sử dụng nội dung định lý 1**

- **Bước 1.** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm  $y' = f'(x)$ . Tìm các điểm  $x_i$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm  $x_i$  theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

### **Quy tắc II: sử dụng nội dung định lý 2**

- **Bước 1.** Tìm tập xác định  $D$  của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm  $y' = f'(x)$ . Giải phương trình  $f'(x) = 0$  và kí hiệu  $x_i$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) là các nghiệm của nó.
- **Bước 3.** Tính  $f''(x)$  và  $f''(x_i)$ .

• **Bước 4.** Dựa vào dấu của  $y''(x_i)$  suy ra tính chất cực trị của điểm  $x_i$  :

+ Nếu  $f''(x_i) < 0$  thì hàm số đạt cực đại tại điểm  $x_i$ .

+ Nếu  $f''(x_i) > 0$  thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x_i$ .

**Câu 16:** (Mã 101 – 2020 Lần 2) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 3.                                      B. 4.                                      C. 2.                                      D. 1.

**Câu 17:** (Mã 101 - 2019) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2.                                      B. 1.                                      C. 0.                                      D. 3.

**Câu 18:** (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm

$f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A.  $x = 2$ .                                      B.  $x = 3$ .                                      C.  $x = 0$ .                                      D.  $x = 1$ .

**Câu 19:** (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Nếu hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là

$f'(x) = x^2(x-2)(x^2-x-2)(x+1)^4$  thì tổng các điểm cực trị của hàm số  $f(x)$  bằng

- A.  $-1$ .                                      B.  $2$ .                                      C.  $1$ .                                      D.  $0$ .

**Câu 20:** (Mã 104 - 2017) Hàm số  $y = \frac{2x+3}{x+1}$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1                                      B. 3                                      C. 0                                      D. 2

**Câu 21:** Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

- A.  $y = \frac{2x-3}{x+2}$ .                                      B.  $y = x^4$ .                                      C.  $y = -x^3 + x$ .                                      D.  $y = |x+2|$ .

**Câu 22:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng  $-3$                                       B. Cực tiểu của hàm số bằng  $1$   
C. Cực tiểu của hàm số bằng  $-6$                                       D. Cực tiểu của hàm số bằng  $2$

**Câu 23:** (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019) Điểm cực đại của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 9x$  có tổng hoành độ và tung độ bằng

- A. 5.                                      B. 1.                                      C. 3.                                      D.  $-1$ .

**Câu 24:** (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Tìm giá trị cực tiểu  $y_{CT}$  của hàm số  $y = -x^3 + 3x - 4$ .

A.  $y_{CT} = -6$

B.  $y_{CT} = -1$

C.  $y_{CT} = -2$

D.  $y_{CT} = 1$

**Câu 25:** (THPT Ba Đình 2019) Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ . Xét các mệnh đề sau đây

1) Hàm số có 3 điểm cực trị.      2) Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-1; 0)$ ;  $(1; +\infty)$ .

3) Hàm số có 1 điểm cực trị.      4) Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$ ;  $(0; 1)$ .

Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong bốn mệnh đề trên?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

**Câu 26:** (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2019m$  ( $m \in \mathbb{R}$ ) đạt cực tiểu tại điểm:

A.  $x = 3$ .

B.  $x = -3$ .

C.  $x = 1$ .

D.  $x = -1$ .

**Câu 27:** (THPT Sơn Tây Hà Nội 2019) Tìm số điểm cực trị của hàm số  $y = x^4 - 2x^2$ .

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

**Câu 28:** (Mã 101, Năm 2017) Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		$-1$		$3$		$+\infty$
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$y$	$-\infty$		$5$		$1$		$+\infty$

Đồ thị của hàm số  $y = |f(x)|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5

B. 3

C. 4

D. 2

### **DẠNG 3. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI $x = x_0$**

**Bước 1.** Tính  $y'(x_0), y''(x_0)$

**Bước 2.** Giải phương trình  $y'(x_0) = 0 \Rightarrow m$ ?

**Bước 3.** Thế  $m$  vào  $y''(x_0)$  nếu giá trị  $\begin{cases} y'' > 0 \rightarrow x_0 = CT \\ y'' < 0 \rightarrow x_0 = CD \end{cases}$



- Câu 29:** (Mã 110 - 2017) Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$  đạt cực đại tại  $x = 3$ .
- A.  $m = -1$                       B.  $m = -7$                       C.  $m = 5$                       D.  $m = 1$
- Câu 30:** (Chuyên Hạ Long 2019) Tìm  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$
- A. không tồn tại  $m$ .              B.  $m = \pm 1$ .                      C.  $m = 1$ .                      D.  $m \in \{1; 2\}$ .
- Câu 31:** (THPT Thăng Long - Hà Nội - Lần 2 - 2019) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số  $y = x^3 + (3m - 1)x^2 + m^2x - 3$  đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .
- A.  $\{5; 1\}$ .                      B.  $\{5\}$ .                      C.  $\emptyset$ .                      D.  $\{1\}$ .
- Câu 32:** (Chuyên ĐHSPTN - Lần 3 - 2019) Tập hợp các số thực  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + (m + 2)x - m$  đạt cực tiểu tại  $x = 1$  là.
- A.  $\{1\}$ .                      B.  $\{-1\}$ .                      C.  $\emptyset$ .                      D.  $\mathbb{R}$ .
- Câu 33:** (Chuyên QH Huế - Lần 2 - 2019) Xác định tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = x + m\sqrt{x}$  đạt cực trị tại  $x = 1$ .
- A.  $m = -2$ .                      B.  $m = 2$ .                      C.  $m = -6$ .                      D.  $m = 6$ .
- Câu 34:** (Trường THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019) Tìm tất cả tham số thực  $m$  để hàm số  $y = (m - 1)x^4 - (m^2 - 2)x^2 + 2019$  đạt cực tiểu tại  $x = -1$ .
- A.  $m = 0$ .                      B.  $m = -2$ .                      C.  $m = 1$ .                      D.  $m = 2$ .
- Câu 35:** (Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019) Tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$  đạt cực đại tại  $x = 0$  là:
- A.  $m \in \mathbb{R}$ .                      B.  $m < 0$ .                      C. Không tồn tại  $m$ .                      D.  $m > 0$ .
- Câu 36:** (Mã 101 - 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^8 + (m - 2)x^5 - (m^2 - 4)x^4 + 1$  đạt cực tiểu tại  $x = 0$ ?
- A. Vô số                      B. 3                      C. 5                      D. 4
- Câu 37:** Biết rằng hàm số  $y = x + a^3 + x + b^3 - x^3$  có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A.  $ab \leq 0$ .                      B.  $ab < 0$ .                      C.  $ab > 0$ .                      D.  $ab \geq 0$ .



**Câu 45:** Tìm giá trị thực của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = (2m-1)x + m + 3$  song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$

- A.  $m = \frac{3}{4}$ .      B.  $m = \frac{1}{2}$ .      C.  $m = -\frac{3}{4}$ .      D.  $m = -\frac{1}{2}$ .

**Câu 47:** (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$  có hai điểm cực trị và điểm  $M(9; -5)$  nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

- A.  $m = -1$ .      B.  $m = -5$ .      C.  $m = 3$ .      D.  $m = 2$ .

**Câu 48:** (TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018) Giả sử  $A, B$  là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  và đường thẳng  $AB$  đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = abc + ab + c$ .

- A.  $-\frac{16}{25}$ .      B.  $-9$ .      C.  $-\frac{25}{9}$ .      D.  $1$ .

#### **DẠNG 5. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 3 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC**

★ **Bài toán tổng quát:** Cho hàm số  $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Tìm tham số  $m$  để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị  $x_1, x_2$  thỏa mãn điều kiện  $K$  cho trước?

✎ **Phương pháp:**

— **Bước 1.** Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ . Tính đạo hàm:  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ .

— **Bước 2.** Để hàm số có 2 cực trị  $\Leftrightarrow y' = 0$  có 2 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = (2b)^2 - 4.3ac > 0 \end{cases}$

và giải hệ này sẽ tìm được  $m \in D_1$ .

— **Bước 3.** Gọi  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $y' = 0$ . Theo Viét, ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

— **Bước 4.** Biến đổi điều kiện  $K$  về dạng tổng  $S$  và tích  $P$ . Từ đó giải ra tìm được  $m \in D_2$ .

— **Bước 5.** Kết luận các giá trị  $m$  thỏa mãn:  $m = D_1 \cap D_2$ .

📖 **Lưu ý:**

— Hàm số bậc 3 không có cực trị  $\Leftrightarrow y' = 0$  không có 2 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$ .

— Trong trường hợp điều kiện  $K$  liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  với  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của  $y' = 0$ . Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

• Nếu giải được nghiệm của phương trình  $y' = 0$ , tức tìm được  $x_1, x_2$  cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề  $y = f(x; m)$  để tìm tung độ  $y_1, y_2$  tương ứng của A và B.

• Nếu tìm không được nghiệm  $y' = 0$ , khi đó gọi 2 nghiệm là  $x_1, x_2$  và tìm tung độ  $y_1, y_2$  bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

**Dạng toán:** Tìm  $m$  để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**cùng phía, khác phía d**):

**Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:**

Cho 2 điểm  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$  và đường thẳng  $d: ax + by + c = 0$ . Khi đó:

- Nếu  $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$  thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d.
- Nếu  $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$  thì A, B nằm cùng phía so với đường d.

**Trường hợp đặc biệt:**

• Để hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung Oy  $\Leftrightarrow$  phương trình  $y' = 0$  có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.

• Để hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành Ox  $\Leftrightarrow$  đồ thị hàm số  $y = f(x)$  cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt  $\Leftrightarrow$  phương trình hoành độ giao điểm  $f(x) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhẩm được nghiệm).

**Dạng toán:** Tìm  $m$  để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**đối xứng và cách đều**):

★ **Bài toán 1.** Tìm  $m$  để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu  $\Rightarrow m \in D_1$ .

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là  $y' = 0$  có nghiệm đẹp  $x_1, x_2$ , tức có  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ .

+ Hai là  $y' = 0$  không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là  $\Delta$  và lấy  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$ .

— **Bước 3.** Gọi  $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$  là trung điểm của đoạn thẳng AB.

**A.**  $T = \sqrt{51} + 6$       **B.**  $T = \sqrt{61} + 3$       **C.**  $T = \sqrt{61} - 3$       **D.**  $T = \sqrt{51} - 6$

**Câu 52:** (Thi thử SGD Hưng Yên) Cho hàm số  $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$  với  $m$  là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng  $(-2; 3)$ .

- A.  $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$ .      B.  $m \in (3; 4)$ .      C.  $m \in (1; 3)$ .      D.  $m \in (-1; 4)$ .

**Câu 53:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 + x^2 + mx - 1$  nằm bên phải trục tung. Tìm số phần tử của tập hợp  $(-5; 6) \cap S$ .

- A. 2.      B. 5.      C. 3.      D. 4.

**Câu 54:** (Chuyên KHTN - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1$  có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

- A. 4.      B. 2.      C. 1.      D. 3.

**Câu 55:** (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho hàm số  $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$  với  $m$  là một tham số thực. Giá trị của  $m$  thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng  $d: x + 8y - 74 = 0$ .

- A.  $m \in (-1; 1]$ .      B.  $m \in (-3; -1]$ .      C.  $m \in (3; 5]$ .      D.  $m \in (1; 3]$ .

**Câu 56:** (Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019) Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$  có đồ thị  $C$  và điểm  $C(1; 4)$ . Tính tổng các giá trị nguyên dương của  $m$  để  $C$  có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho  $\triangle ABC$  có diện tích bằng 4.

- A. 6.      B. 5.      C. 3.      D. 4.

**Câu 57:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$  ( $m$  là tham số). Gọi  $A, B$  là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và  $I(2; -2)$ . Tổng tất cả các giá trị của  $m$  để ba điểm  $I, A, B$  tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng  $\sqrt{5}$  là

- A.  $\frac{4}{17}$ .      B.  $\frac{14}{17}$ .      C.  $-\frac{2}{17}$ .      D.  $\frac{20}{17}$ .

**Câu 58:** (Phan Đăng Lưu - Huế - 2018) Gọi  $A, B$  là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $f(x) = -x^3 + 3x - 4$  và  $M(x_0; 0)$  là điểm trên trục hoành sao cho tam giác  $MAB$  có chu vi nhỏ nhất, đặt  $T = 4x_0 + 2015$ . Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

- A.  $T = 2017$ .      B.  $T = 2019$ .      C.  $T = 2016$ .      D.  $T = 2018$ .

**Câu 59:** (THPT Lương Thế Vinh - 2018) Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ . Diện tích  $S$  của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

- A.  $S = 3$ .                      B.  $S = \frac{1}{2}$ .                      C.  $S = 1$ .                      D.  $S = 2$ .

**Câu 60:** (Chuyên Lê Hồng Phong - 2018) Tìm  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 1$  có ba điểm cực trị  $A(0; 1)$ ,  $B$ ,  $C$  thỏa mãn  $BC = 4$ ?

- A.  $m = \sqrt{2}$ .                      B.  $m = 4$ .                      C.  $m = \pm 4$ .                      D.  $m = \pm \sqrt{2}$ .

**Câu 61:** (Mã 105 -2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2mx^2$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

- A.  $0 < m < 1$                       B.  $m > 0$                       C.  $0 < m < \sqrt[3]{4}$                       D.  $m < 1$

**Câu 62:** (Liên Trường - Nghệ An -2018) Gọi  $m_0$  là giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 + 2mx^2 - 1$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng  $4\sqrt{2}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng

- A.  $m_0 \in (-1; 0]$ .                      B.  $m_0 \in (-2; -1]$ .                      C.  $m_0 \in (-\infty; -2]$ .                      D.  $m_0 \in (-1; 0)$ .

**Câu 63:** (CHUYÊN ĐHSHPN - 2018) Gọi  $A$ ,  $B$ ,  $C$  là các điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 4$ . Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  bằng

- A. 1.                      B.  $\sqrt{2} + 1$ .                      C.  $\sqrt{2} - 1$ .                      D.  $\sqrt{2}$ .

**Câu 64:** (Đề Minh Họa 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = x^4 + 2mx^2 + 1$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

- A.  $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ .                      B.  $m = 1$ .                      C.  $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ .                      D.  $m = -1$ .

**Câu 65:** (THPT Minh Châu Hưng Yên 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2m^2x^2 + m + 4$  có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều?

- A.  $m \in \{0; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$                       B.  $m \in \{0; \sqrt[3]{3}; -\sqrt[3]{3}\}$                       C.  $m \in \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$                       D.  $m \in \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

**Câu 66:** (Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020) Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$  có đồ thị  $(C)$ . Biết đồ thị  $(C)$  có ba điểm cực trị  $A, B, C$  thỏa mãn  $ABCD$  là hình thoi với  $D(0; -3)$ . Số  $m$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A.  $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$ .                      B.  $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$ .                      C.  $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$ .                      D.  $m \in (2; 3)$ .

## **DẠNG 6. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 2 TRÊN BẬC 1 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN**

### **YÊU CẦU BÀI TOÁN**

Áp dụng tính chất: Nếu  $x_0$  là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ  $y = \frac{u(x)}{v(x)}$  thì giá trị cực trị tương ứng của

hàm số là.

$$y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$$

**Câu 67:** (Toán Học Tuổi Trẻ Số 5) Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$ .

- A.  $y = 2x + 2$ .      B.  $y = x + 1$ .      C.  $y = 2x + 1$ .      D.  $y = 1 - x$ .

**Câu 68:** (THPT Nam Trực - Nam Định - 2018) Cho hàm số  $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{2x - 2m}$ . Để hàm số có cực đại và cực tiểu, điều kiện của tham số  $m$  là:

- A.  $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$       B.  $-1 < m < 2$ .      C.  $-2 < m < 1$ .      D.  $\begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$ .

**Câu 69:** Giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$  đạt cực đại tại điểm  $x_0 = 2$  là:

- A.  $m = -1$ .      B.  $m = -3$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m = 3$ .

**Câu 70:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$  (với  $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số có giá trị cực đại là 7.

- A.  $m = 7$ .      B.  $m = 5$ .      C.  $m = -9$ .      D.  $m = -5$ .

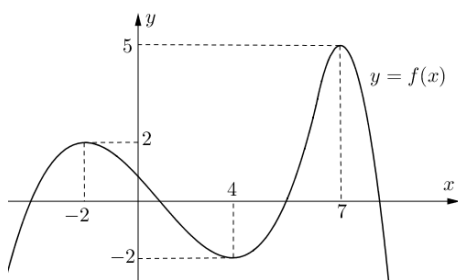
**Câu 71:** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 + mx + m^2}{x - 1}$  có hai điểm cực trị  $A, B$ . Khi  $\angle AOB = 90^\circ$  thì tổng bình phương tất cả các phần tử của  $S$  bằng:

- A.  $\frac{1}{16}$ .      B. 8.      C.  $\frac{1}{8}$ .      D. 16.

## **DẠNG 7: CỰC TRỊ CỦA HÀM TỔNG VÀ HÀM HỢP**

**Câu 72:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục và xác định trên  $\mathbb{R}$ , đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ dưới. gọi  $S$  là tập các giá trị nguyên của  $m \in [-20; 20]$  để hàm số  $y = (f(x) + m)^2$  có đúng 5 điểm cực trị. Số phần tử của tập  $S$  là:





A. 20

B. 22

C. 21

D. 19

**Câu 73:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau:

$x$	1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	3		1		2		0		$+\infty$

Hàm số  $y = 2[f(x)]^3 - 9[f(x)]^2 + 12f(x) + 2021$  có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 5.

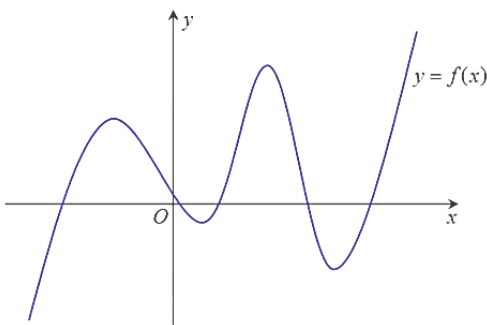
B. 10.

C. 7.

D. 9.

**Câu 74:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục xác định trên  $\mathbb{R}$ , có đồ thị hàm số  $y = f(x)$  như hình vẽ bên dưới. gọi  $S$  là tập hợp chứa các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số

$y = (f(x))^3 - m(f(x))^2 - (2m-3)f(x) + 2021$  có đúng 4 điểm cực trị. Số phần tử của tập  $S$  là:



A. 11.

B. 8.

C. 10.

D. 9.

**Câu 75:** Cho hàm số bậc bốn  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$				
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$		
$f(x)$									
	$-\infty$	$\nearrow$	$3$	$\searrow$	$-1$	$\nearrow$	$3$	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số  $g(x) = [f(x-1)]^2 + 2021$  là

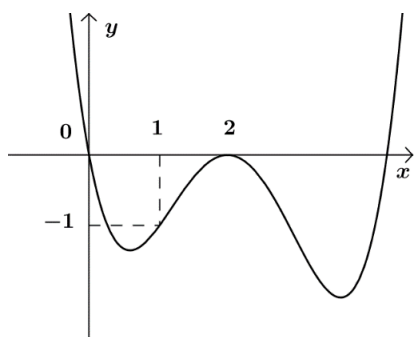
A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 7.

**Câu 76:** Cho hàm số bậc năm  $y = f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ dưới đây



Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(x^2 - 3x + m)$  là 5.

A.  $(2; +\infty)$ .

B.  $(-\infty; \frac{17}{4})$ .

C.  $(-\infty; \frac{9}{4})$ .

D.  $(\frac{9}{4}; \frac{17}{4})$ .

### **DẠNG 8 : CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI**

❖ Một số kiến thức cần nắm:

**1) Cách vẽ đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$ :**

Cho đồ thị hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  được vẽ bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  nằm phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành đồng thời xóa phần phía dưới trục hoành.

**Số điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$ :**

- Số cực trị của hàm số  $y = |f(x)|$  bằng tổng số cực trị hàm số  $y = f(x)$  và số điểm cắt của  $y = f(x)$  và trục  $Ox$  (không tính điểm tiếp xúc).

## 2) Cách vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ :

Hàm số  $y = f(|x|)$  là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung. Đồ thị được vẽ bằng cách:

- Giữ nguyên đồ thị của hàm số  $y = f(x), (C_1)$  ứng với  $x \geq 0$ .
- Với  $x < 0$  được vẽ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị  $(C_1)$  qua trục tung.

### Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ :

Số điểm cực trị của hàm số  $f(|x|)$  là:  $2a + 1$  với  $a$  là số điểm cực trị dương của hàm số  $y = f(x)$  (số điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nằm phía bên phải trục tung).

## 3) Số điểm cực trị (nếu có) của hàm số $y = f(ax + b) + c$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

## 4) Đồ thị hàm số có dạng $y = |u(x)| \cdot v(x)$

- Từ đồ thị  $(C): y = u(x) \cdot v(x)$  suy ra đồ thị  $(C'): y = |u(x)| \cdot v(x)$ .
- Ta có:  $y = |u(x)| \cdot v(x) = \begin{cases} u(x) \cdot v(x) & \text{neu } u(x) \geq 0 \\ -u(x) \cdot v(x) & \text{neu } u(x) < 0 \end{cases}$

Cách vẽ đồ thị hàm số  $(C')$  từ đồ thị  $(C)$ :

- Giữ nguyên miền đồ thị  $u(x) \geq 0$  của đồ thị  $(C): y = f(x)$ .
- Bỏ phần đồ thị miền  $u(x) < 0$  của  $(C)$ , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua  $Ox$ .

**Câu 77:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$			
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$y$			$5$		$1$		$+\infty$

$-\infty \rightarrow 5$   
 $5 \rightarrow 1$   
 $1 \rightarrow +\infty$

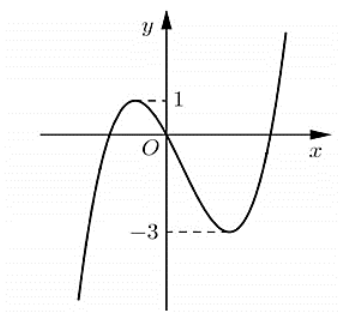
Số điểm cực trị của hàm số  $f(|x|)$  bằng

- A.** 5.                      **B.** 2.                      **C.** 3.                      **D.** 4.

**Câu 78:** Cho  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)^2(x^2-4)$  số điểm cực trị của hàm số  $y = f(|x|)$  là

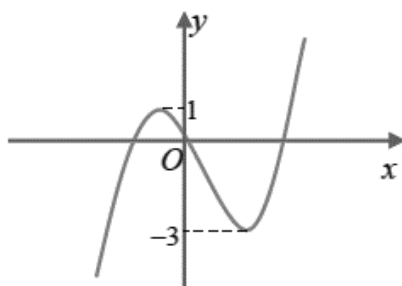
- A.** 5.                      **B.** 3.                      **C.** 2.                      **D.** 4.

**Câu 79:** Cho hàm số bậc ba có đồ thị  $y = f(x)$  như hình vẽ dưới đây. Tất cả các số thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = |f(x) + m|$  có 5 điểm cực trị là



- A.  $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$ .      B.  $-1 < m < 3$ .      C.  $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$ .      D.  $1 < m < 3$ .

**Câu 80:** (Chuyên Vinh – Lần 2). Đồ thị  $(C)$  có hình vẽ bên.



Tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = |f(x) + m|$  có ba điểm cực trị là:

- A.  $m \leq -1$  hoặc  $m \geq 3$ .      B.  $m \leq -3$  hoặc  $m \geq 1$ .      C.  $m = -1$  hoặc  $m = 3$ .      D.  $1 \leq m \leq 3$ .

**Câu 81:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = |f(1 - 2018x)|$  có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị

- A. 9.      B. 2022.      C. 11.      D. 2018.

**Câu 82:** (Đề Tham Khảo 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  có 7 điểm cực trị?

- A. 5      B. 6      C. 4      D. 3

**Câu 83:** (THPT Kinh Môn - 2018) Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$ . Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(|x|)$  có 5 điểm cực trị.

- A.  $\frac{5}{4} < m \leq 2$ .      B.  $-2 < m < \frac{5}{4}$ .      C.  $-\frac{5}{4} < m < 2$ .      D.  $\frac{5}{4} < m < 2$ .

**Câu 84:** (MD 101-2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$  có đúng ba điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 12.

D. 11.

**Câu 85:** (MD 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số  $y = f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + (4 - m)x$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $g(x) = f(|x|)$  có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25.

B. 22.

C. 26.

D. 21.