Bài 3 :

Ví dụ : Cho hàm $f(x)=2^x$ trên đoạn [0,1]. Đánh giá sai số khi tính gần đúng giá trị hàm tại điểm x=0.45 sử dụng đa thức nội suy Lagrange khi chọn các điểm nút $x_o=0$, $x_1=0.25$, $x_2=0.5$, $x_3=0.75$, $x_4=1$

Giải

Ta có n = 4, $f^{(5)}(x) = (\ln 2)^5 2^x$

® $M_5 = \max |f^{(5)}(x)| = 2(\ln 2)^5$

công thức sai số

$$| f(x) - L_n(x) | \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|$$

$$= \frac{2(\ln 2)^5}{5!} |(0.45)(0.20)(-0.05)(-0.30)(-0.55)| = 0.198 x 10^{-5}$$

Bài 4

B3. Tính các hệ số b_k, d_k.

$$b_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{h_0} - \frac{(c_1 + 2c_0)h_0}{3} = -\frac{1}{5}$$

$$b_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{(c_2 + 2c_1)h_1}{3} = \frac{2}{5}$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0} = \frac{1}{20}, \quad d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1} = -\frac{1}{30}$$

Kết luận : spline tự nhiên

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) = 1 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{20}x^3 & 0 \le x \le 2 \\ g_1(x) = 1 + \frac{2}{5}(x-2) + \frac{3}{10}(x-2)^2 - \frac{1}{30}(x-2)^3 & 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

Ví dụ : Xây dựng spline tự nhiên nội suy hàm theo bảng số

x	0	2	5
y	1	1	4

Giải

n = 2

B1. $h_o = 2$, $h_1 = 3$. $a_o = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$

B2. Giải hệ $Ac = b$ với $c = (c_0, c_1, c_2)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \dfrac{3(y_1 - y_0)}{h_0} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ® \; c_o = c_2 = 0, \; c_1 = 3/10$$

Bài 6 – 7 :

Hồi qui tuyến tính (tiếp)

$$\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right] m + \left[\sum_{i=1}^{N} x_i\right] b = \sum_{i=1}^{N} x_i f_i$$
$$\left[\sum_{i=1}^{N} x_i\right] m + \left[\sum_{i=1}^{N} 1\right] b = \sum_{i=1}^{N} f_i$$

hay dưới dạng ma trận,

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i f_i \\ \sum_{i=1}^{N} f_i \end{pmatrix}$$

Giải hệ phương trình ta có được hệ số m và b.

Bài 9 :

Ví dụ : Xét phương trình

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 1 = 0$

trên khoảng [2.2, 2.6]

Tính sai số nếu chọn nghiệm x* = 2.45

Giải

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 5$

g(x)=|f'(x)| = $6x^2$ -6x-5,   x□[2.2,2.6]

g'(x)=12x-6>0,   x□[2.2,2.6],

g(2.2)=10.84

® |f'(x)| ≥ 10.84 = m,   x□[2.2,2.6]

Sai số |x*-x| ≤|f(x*)|/m H 0.0143

Ghi nhớ : sai số luôn làm tròn lên

Bài 12 :

Định Nghĩa : Hàm g(x) gọi là hàm co trên đoạn [a,b] nếu □q : 0<q<1 sao cho

| g(x) – g(y) | ≤ q | x – y |,   x, y □[a,b]

q gọi là hệ số co

Để kiểm tra hàm co, ta dùng định lý sau

Định lý : Nếu hàm g(x) liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b) và □q : 0<q<1 sao cho

| g'(x) | ≤ q,   x □(a,b)

Thì g(x) là hàm co với hệ số co q

Ví dụ : Xét phương trình

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5 = 0$$

trên khoảng cách ly nghiệm [3,4]

Giả sử chọn giá trị ban đầu $x_o = 3.5$

a. Tính gần đúng nghiệm x_4 và sai số $\otimes_4$

Giải

Ta chuyển pt về dạng $x = g(x)$

Có nhiều cách chuyển :

Cách 1: $x = \frac{x^2}{3} - \frac{5}{3x} = g(x)$

$g'(x) = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3x^2}$ Không phải hàm co

Cách 2: $x = 3 + \frac{5}{x^2} = g(x)$

$$g'(x) = -\frac{10}{x^3} \Rightarrow |g'(x)| \le \frac{10}{27} = q, \forall x \in [3,4]$$

q H 0.37037 < 1 nên g hàm co

Hiển nhiên g(x) □ [3,4] nên pp lặp hội tụ

xây dựng dãy lặp

$$\begin{cases} x_0 = 3.5 \\ x_n = 3 + \frac{5}{x_{n-1}^2}, \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ta lập bảng

n	x_n
0	3.5
1	3.408163265
2	3.430456452
3	3.424879897
4	3.426264644

Sai số

$$tien\ \ nghiem\ \Delta_4 = \frac{q^4}{1-q}|x_1 - x_0| \approx 0.0028$$

$$hau\ \ nghiem\ \Delta_4 = \frac{q}{1-q}|x_4 - x_3| \approx 0.00082$$

b. Tìm nghiệm gần đúng với sai số 0.001 (dùng công thức tiên nghiệm)

$$|x_n - x| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leq 0.001$$

$$\Rightarrow \quad n \geq \log\left(\frac{(1-q)0.001}{|x_1 - x_0|}\right)/\log q = 5.0164$$

$$\Rightarrow n = 6$$

Nghiệm gần đúng $x_6 = 3.426005817$

Bài 13 :

Ví dụ : Xét phương trình

$$x = \cos x$$

trên khoảng cách ly nghiệm [0,1]

Giả sử chọn giá trị ban đầu $x_o = 1$. Xác định số lần lặp n khi xấp xỉ nghiệm pt với sai số 10^{-8}

(dùng công thức tiên nghiệm)

Giải

a. g(x)=cosx

g'(x)=-sinx

g(x) là hàm co với hệ số co q = sin1H0.8415 < 1

Mặt khác g(x) =cos x □[0,1] nên pp lặp hội tụ

xây dựng dãy lặp

$x_o = 1$

$x_n = \cos x_{n-1}$

Xác định số lần lặp bằng công thức tiền nghiệm

$$|x_n - x| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \quad n \ge \log\left(\frac{(1-q)10^{-8}}{|x_1 - x_0|}\right) / \log q = 112.8904$$

Vậy số lần lặp n = 113

Bài 18:

Tính tích phân gần đúng bằng công thức hình thang I = tích phân (1/x) với phân hoạch [1,5] thành 4 đoạn bằng nhau

a. h=0.2, phân hoạch đoạn [0,1] thành n=5 đoạn bằng nhau

$$x_0 = 0 < x_1 = 0.2 < x_2 = 0.4 < x_3 = 0.6 < x_4 = 0.8 < x_5 = 1$$

Công thức hình thang

$$I \approx \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + y_5]$$

$$= \frac{0.2}{2}[1 + 2(\frac{\sin 0.2}{0.2} + \frac{\sin 0.4}{0.4} + \frac{\sin 0.6}{0.6} + \frac{\sin 0.8}{0.8}) + \frac{\sin 1}{1}]$$

$$= 0.945078781$$

Bài 19 : Tính tích phân gần đúng bằng công thức Simson I = tích phân (1/x) với phân hoạch [1,5] thành 4 đoạn bằng nhau

b. h=0.125, phân hoạch đoạn [0,1] thành n=8 đoạn bằng nhau

$$x_0 = 0 < x_1 = 0.125 < x_2 = 0.25 < x_3 = 0.375 < x_4 = 0.5$$

$$x_5 = 0.625 < x_6 = 0.75 < x_7 = 0.875 < x_8 = 1$$

Công thức Simpson

$$I \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + y_8]$$

$$= \frac{0.125}{3}[1 + 4(\frac{\sin 0.125}{0.125} + \frac{\sin 0.375}{0.375} + \frac{\sin 0.625}{0.625} + \frac{\sin 0.875}{0.875})$$

$$+2(\frac{\sin 0.25}{0.25} + \frac{\sin 0.5}{0.5} + \frac{\sin 0.75}{0.75}) + \frac{\sin 1}{1}]$$

$$= 0.94608331$$