CHUYÊN ĐỀ

HÌNH HỌC TÍNH TOÁN

NGƯT.TS. NGUYỄN THANH HÙNG

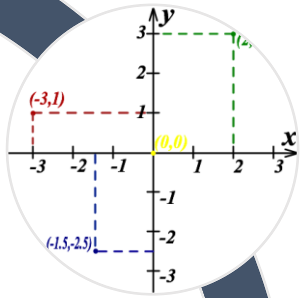
NỘI DUNG

1. Cách tiếp cận giải bài toán truyền thống
2. Cách tiếp cận mới
3. Các đối tượng hình học tính toán:
    a) Điểm,
    b) Đoạn thẳng,
    c) Đường thẳng: Ax+By+C = 0,
    d) Tam giác, Tứ giác, Đa giác (Đa giác lồi, Đa giác không tự cắt)
    e) …
4. Bài toán tính diện tích đại số một tam giác. Chiều của tam giác.
5. Ứng dụng giải các bài toán cơ bản
    a) Kiểm tra 3 điểm thẳng hang
    b) Kiểm tra hai đoạn thẳng có cắt nhau hay không?
    c) Xác định chiều của đa giác
    d) So sánh góc và ứng dụng trong sắp xếp các điểm trên mặt phẳng
    e) Kiểm tra tính lồi của một đa giác
6. Bài toán bao lồi
    a) Phát biểu bài toán
    b) Một số tính chất của bao lồi
7. Tổng Mincovski và ứng dụng

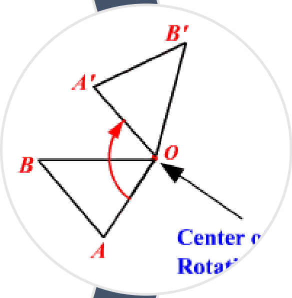
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
MINISTRY OF EDUCATION AND TRAINING

CÁCH TIẾP CẬN GIẢI BÀI TOÁN THEO PHƯƠNG PHÁP TRUYỀN THỐNG

Tiếp cận theo các kiến thức hình học tính toán thuần túy theo góc nhìn Toán học với rất nhiều công thức phức tạp

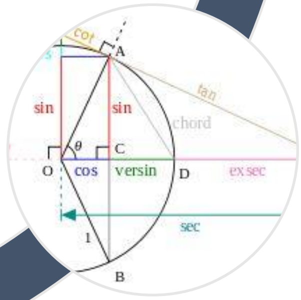


Điểm trong mặt phẳng , vector, góc, phương trình đường thẳng…



Phép quay, tịnh tiến, tích chấm, tích chéo…

Khó khăn cho người học và giáo viên

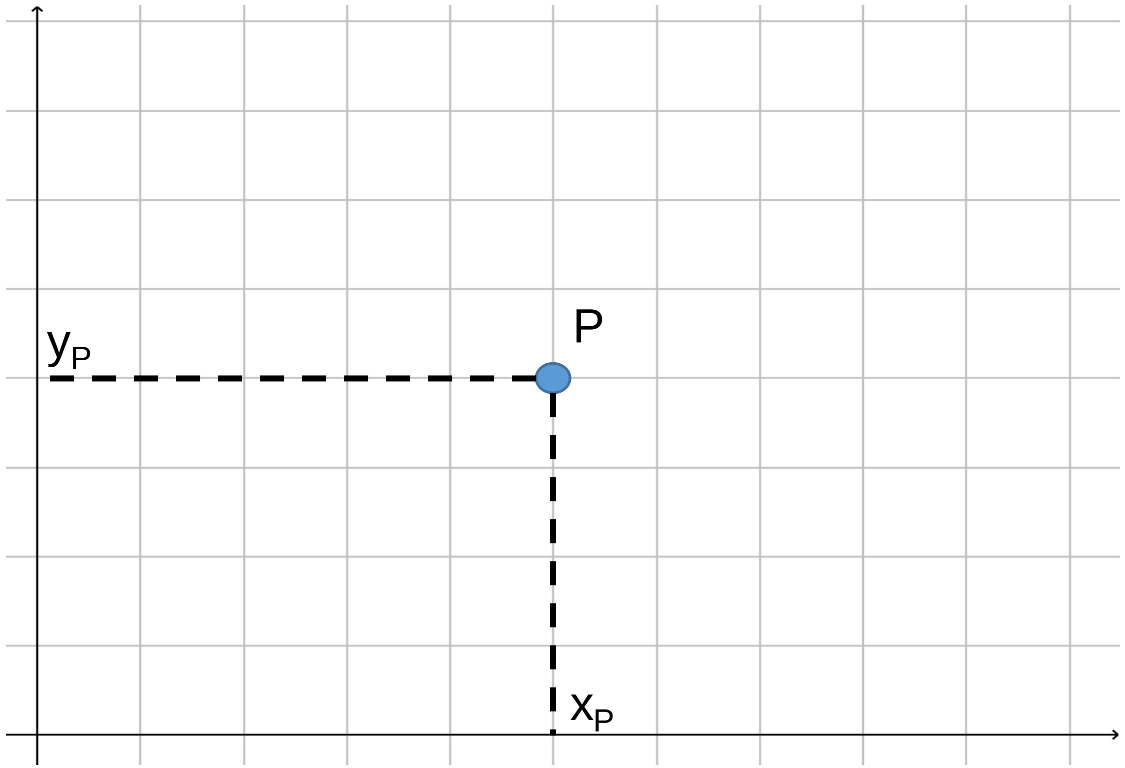


Công thức liên quan đến các hàm sin, cos, tan

CÁC ĐỐI TƯỢNG HÌNH HỌC CƠ SỞ

Điểm (point)

```
struct point{
    int x, y;
};
```



DIỆN TÍCH TAM GIÁC

CÔNG THỨC HERON

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

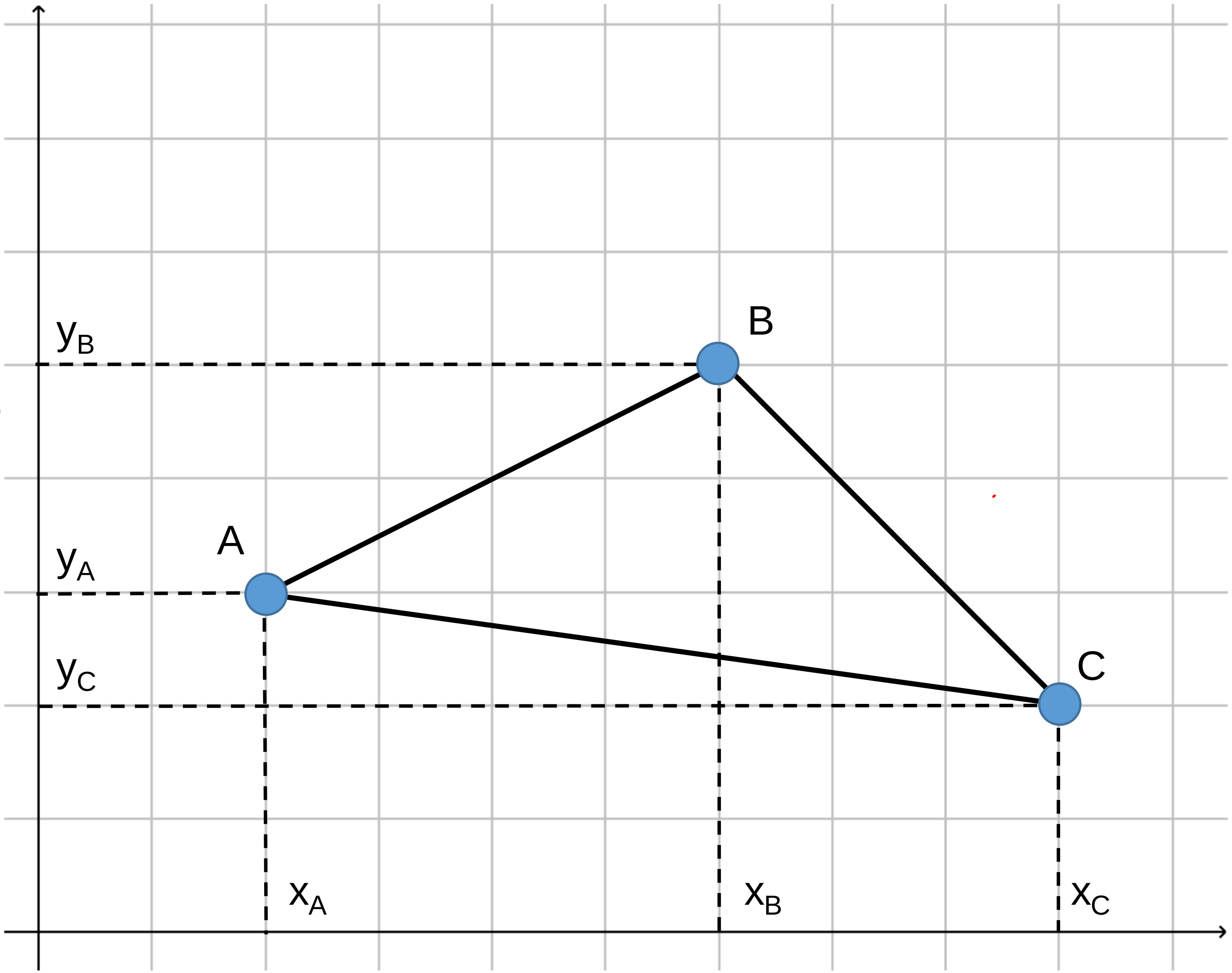
Với

$$a = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$b = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$c = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

SAI SỐ!



CÁC ĐỐI TƯỢNG HÌNH HỌC CƠ SỞ

ĐOẠN THẲNG (segment)

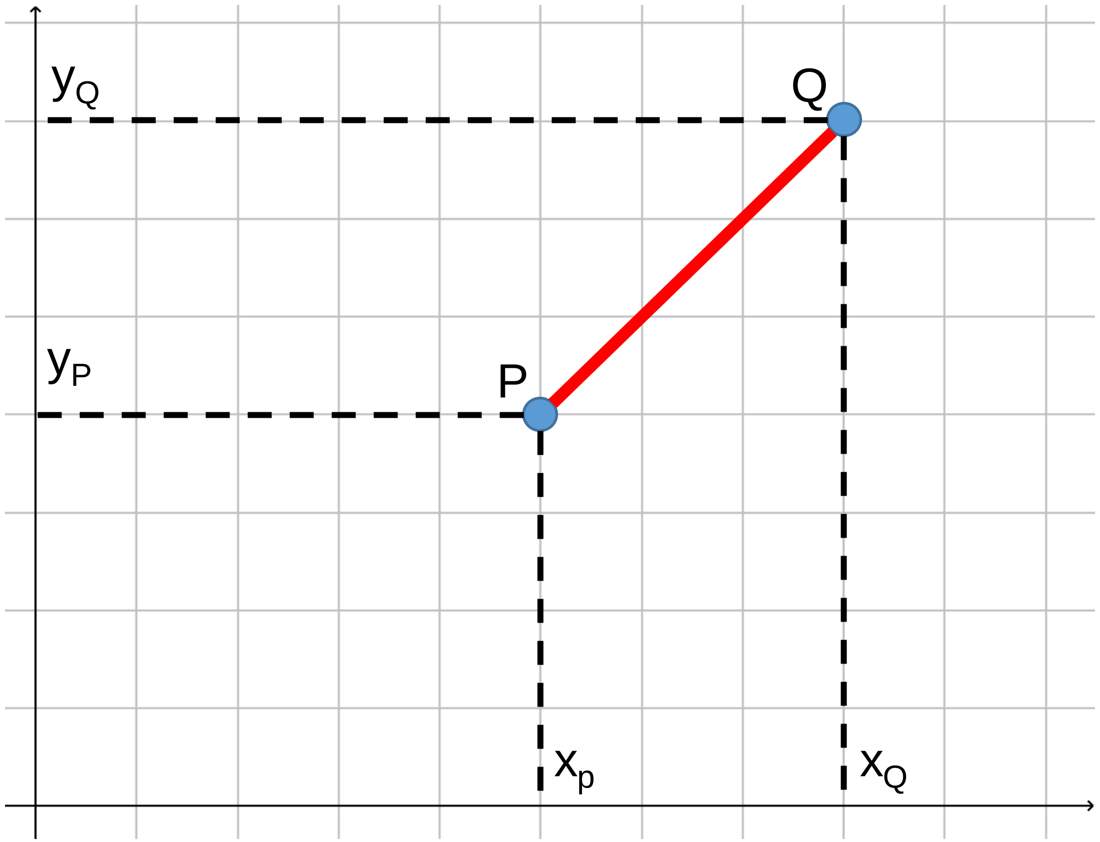
```
point P, Q;
```

Công thức tính khoảng cách đoạn thẳng

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

➔ Bình phương khoảng cách

$$d_{PQ}^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2$$



CÁC ĐỐI TƯỢNG HÌNH HỌC CƠ SỞ

Đường thẳng (line)

Xây dựng phương trình đường thẳng:

$$Ax + By + C = 0$$

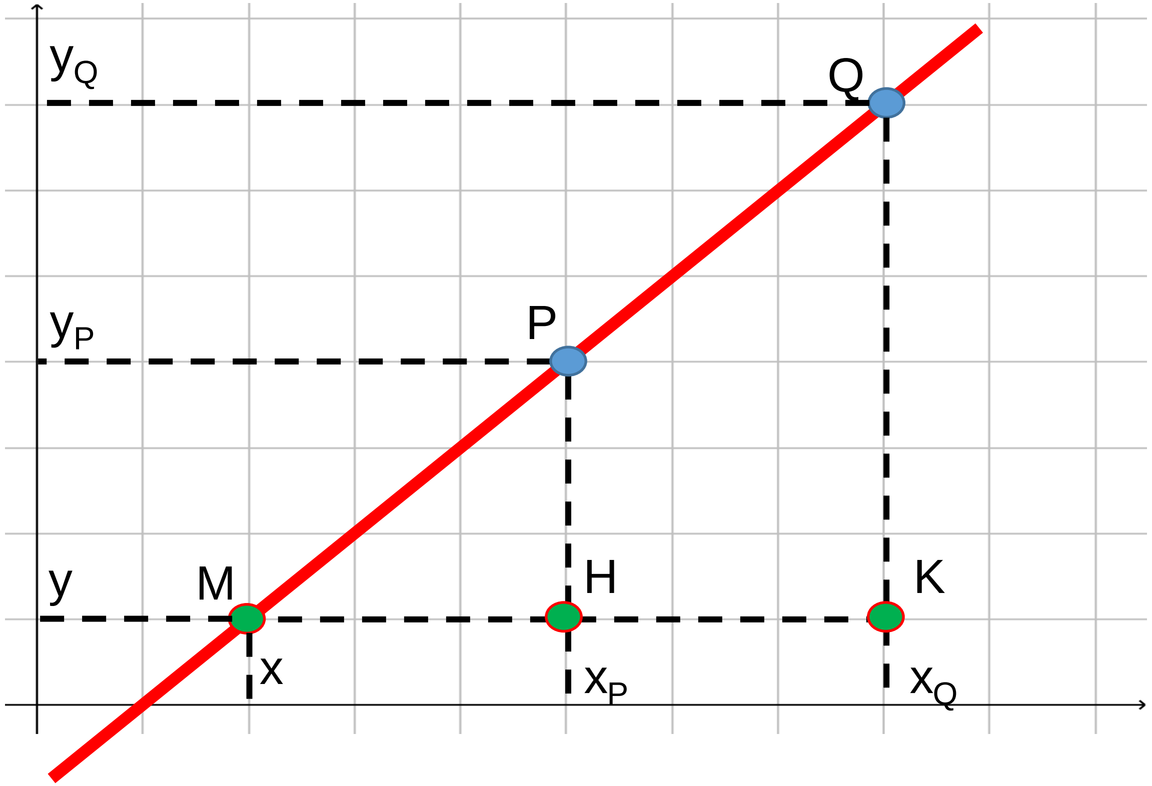
$Xét$

$$\frac{MH}{MK} = \frac{PH}{QK}$$

$$\frac{X_P - X}{X_Q - X} = \frac{Y_P - Y}{Y_Q - Y}$$

$$\Leftrightarrow X(Y_P - Y_Q) + Y(X_Q - X_P) + X_P Y_Q - X_Q Y_P = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = Y_P - Y_Q \\ B = X_Q - X_p \\ C = X_P Y_Q - X_Q Y_P \end{cases}$$

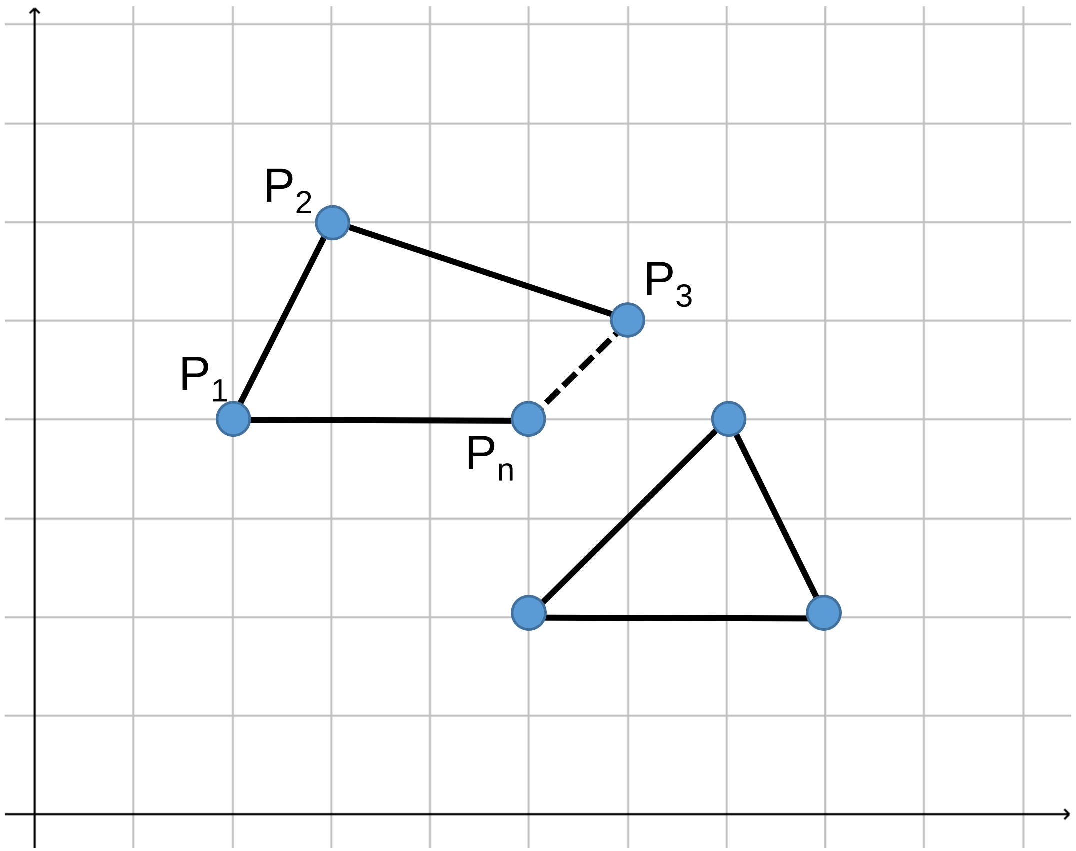


BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
MINISTRY OF EDUCATION AND TRAINING

CÁC ĐỐI TƯỢNG HÌNH HỌC CƠ SỞ

Đa giác (Polygon)

```
point P[MaxN];
```



CÁCH TIẾP CẬN MỚI

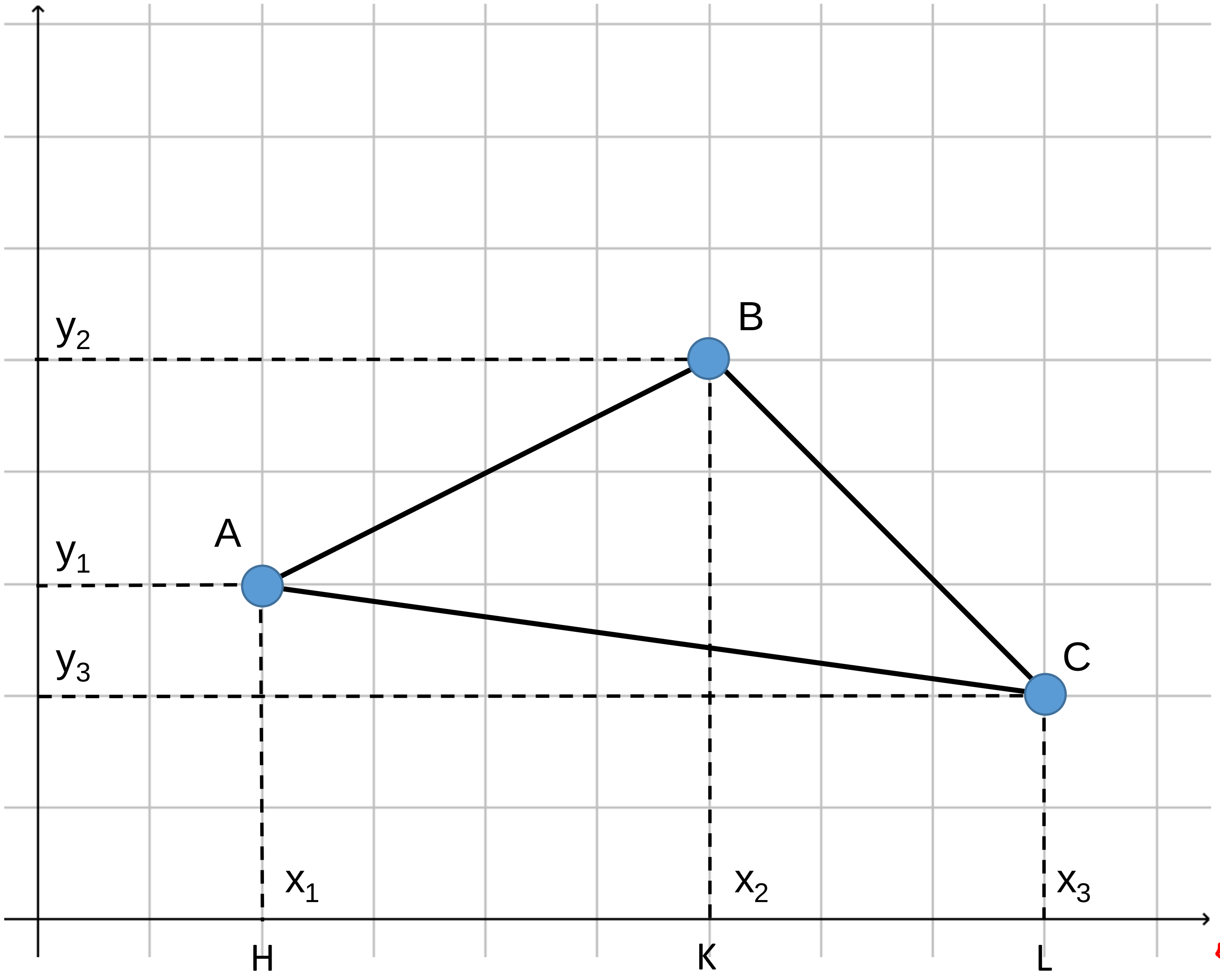
DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

$$S_{ABC} = (S_{AHKB} + S_{BKLC}) - S_{CLHA}$$

$$S_{AHKB} = \left(\frac{(y_2+y_1) * (x_2 - x_1)}{2}\right)$$

$$S_{P_2P_2'P_3P_3'} = \left(\frac{(y_3+y_2) * (x_3 - x_2)}{2}\right)$$

$$S_{P_1P_1'P_3P_3'} = \left(\frac{(y_3+y_1) * (x_3 - x_1)}{2}\right)$$



CÁCH TIẾP CẬN MỚI

DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

$$S_{ABC} = (S_{AHKB} + S_{BKLC}) - S_{CLHA} =$$

$$= \left(\frac{(y_2+y_1)\times(x_2-x_1)}{2}\right) + \left(\frac{(y_3+y_2)\times(x_3-x_2)}{2}\right) - \left(\frac{(y_3+y_1)\times(x_3-x_1)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{(y_2+y_1)\times(x_2-x_1)}{2}\right) + \left(\frac{(y_3+y_2)\times(x_3-x_2)}{2}\right) + \left(\frac{(y_1+y_3)\times(x_1-x_3)}{2}\right)$$

$$\mathbf{2 \times S_{ABC} = (y_2 + y_1) \times (x_2 - x_1) + (y_3 + y_2) \times (x_3 - x_2) + (y_1 + y_3) \times (x_1 - x_3)}$$

SAI SỐ?

DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC ABC LÀ TỔNG S

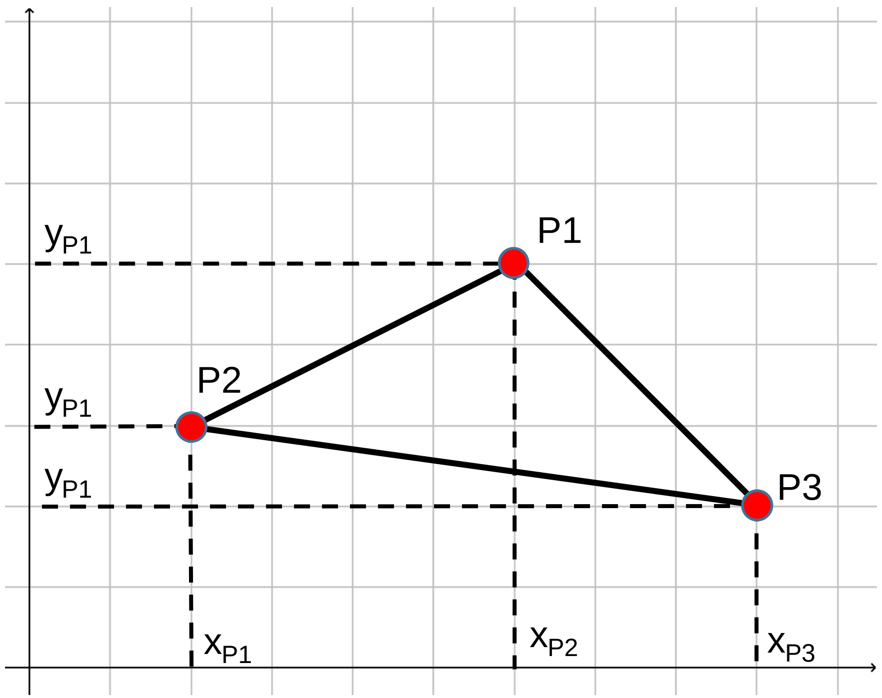
$$S = (y_2 + y_1) \times (x_2 - x_1) + (y_3 + y_2) \times (x_3 - x_2) + (y_1 + y_3) \times (x_1 - x_3)$$

Tọa độ các đỉnh là số nguyên thì S là số nguyên

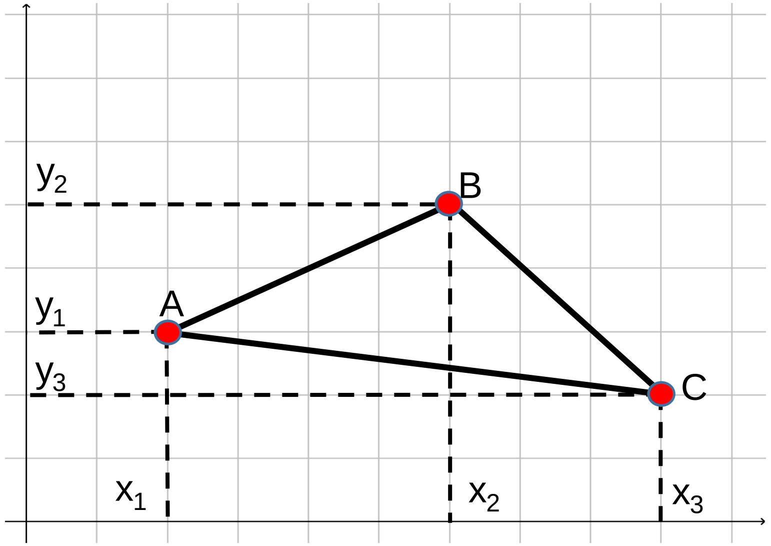
DIỆN TÍCH TAM GIÁC

DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ

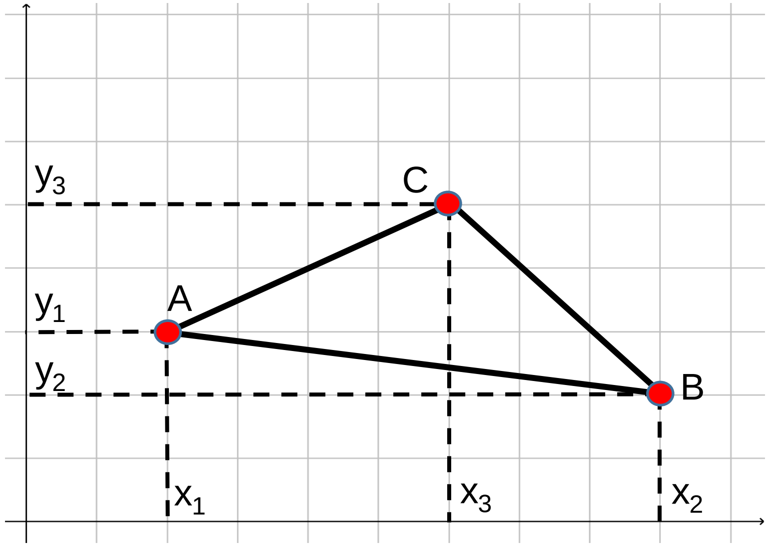
$$S_{P_1P_2P_3} = ?$$



$$2 * S_{P_1P_2P_3} = x_{P_1} * \left(y_{P_3} - y_{P_2}\right) + x_{P_2} * \left(y_{P_1} - y_{P_3}\right) + x_{P_3}\left(y_{P_2} - y_{P_1}\right)$$



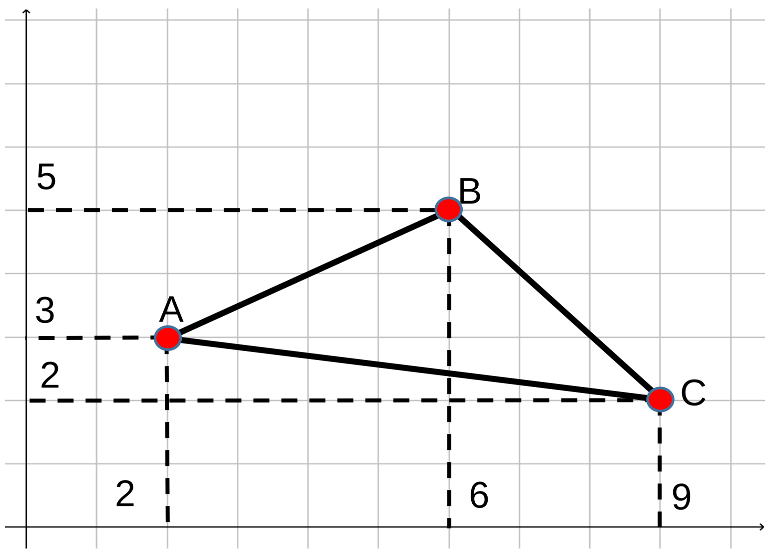
Tọa độ các điểm trên hình 1:
A(2,3) ; B(6,5) ; C(9,2)
→S_{ABC} = 9

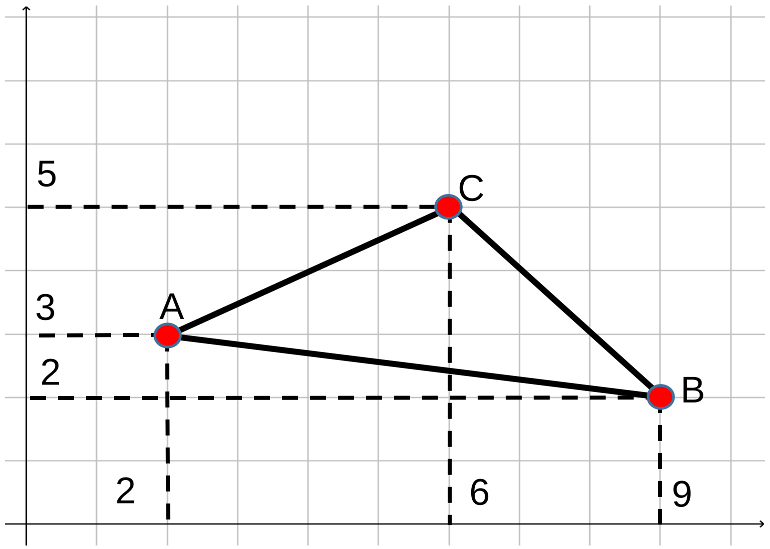


Tọa độ các điểm trên hình 2:
A(2, 3) ; B(9,2) và C(6,5)
→S_{P1P2P3} = -9

$$2 * S_{P_1P_2P_3} = x_{P_1} * \left(y_{P_3} - y_{P_2}\right) + x_{P_2} * \left(y_{P_1} - y_{P_3}\right) + x_{P_3}\left(y_{P_2} - y_{P_1}\right)$$

Công thức trên còn đúng cho cả hai trường hợp?





$S_{P1P2P3} = 9$

$S_{P1P2P3} = -9$

S>0 : Các đỉnh liệt kê theo chiều kim đồng hồ

S<0 : Các đỉnh liệt kê ngược chiều kim đồng hồ

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

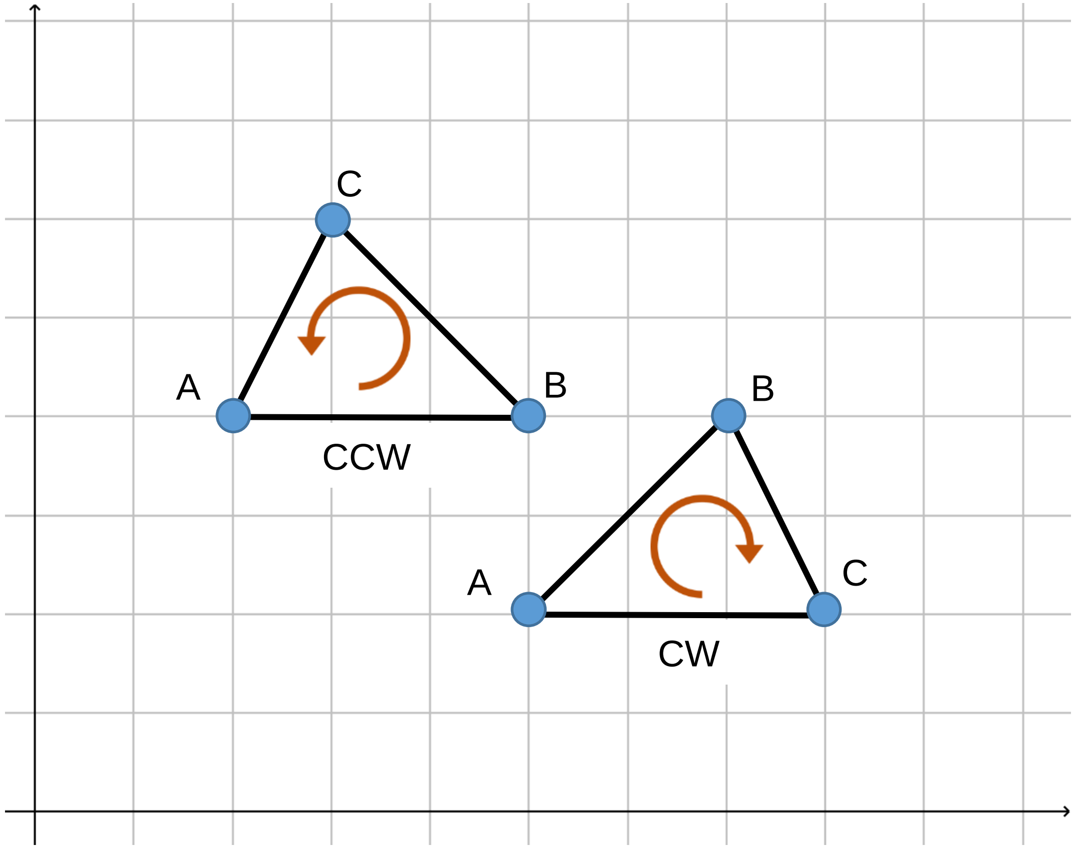
Xét tam giác $P_1P_2P_3$, trong một số bài toán, ta cần biết ba điểm được liệt kê theo chiều nào thì ta có thể sử dụng giá trị diện tích đại số của tam giác để xác định.

Cùng chiều kim đồng hồ (CW)
$S_{ABC} > 0$

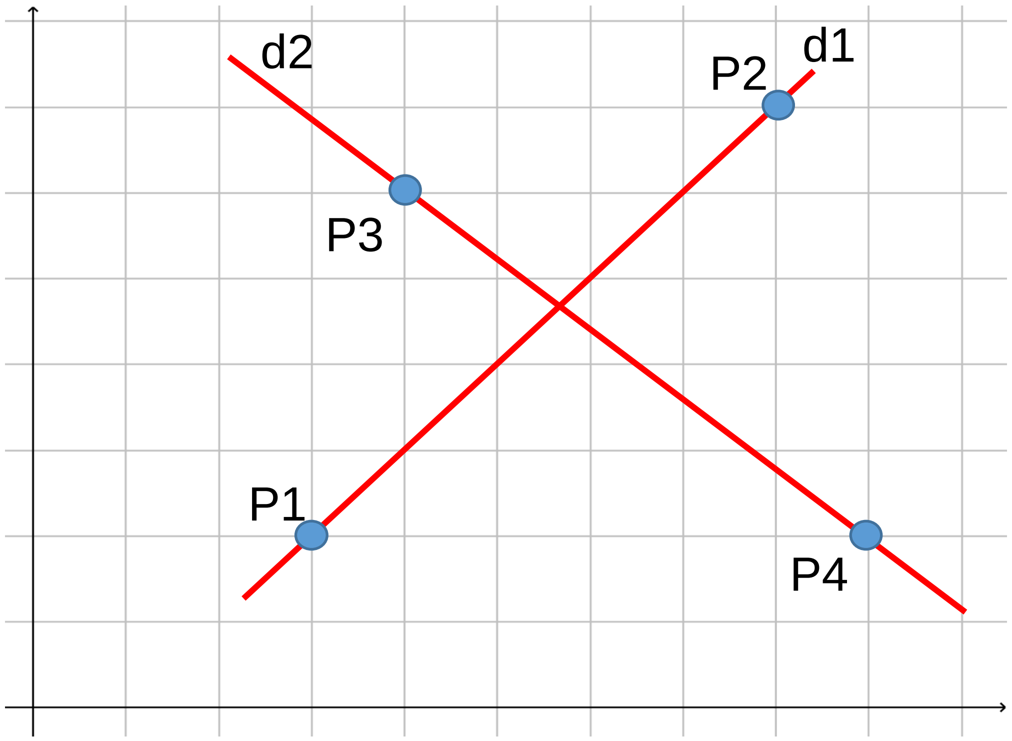
Ngược chiều kim đồng hồ (CCW)
$S_{ABC} < 0$

```
bool IsCCW(point p1, point p2, point p3)
{
   if (STamgiac(p1,p2,p3)>0)
      return true;
   return false;
}
```

KIỂM TRA CÁC ĐỈNH CỦA TAM GIÁC ĐƯỢC LIỆT KÊ THEO CHIỀU NÀO ?



ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

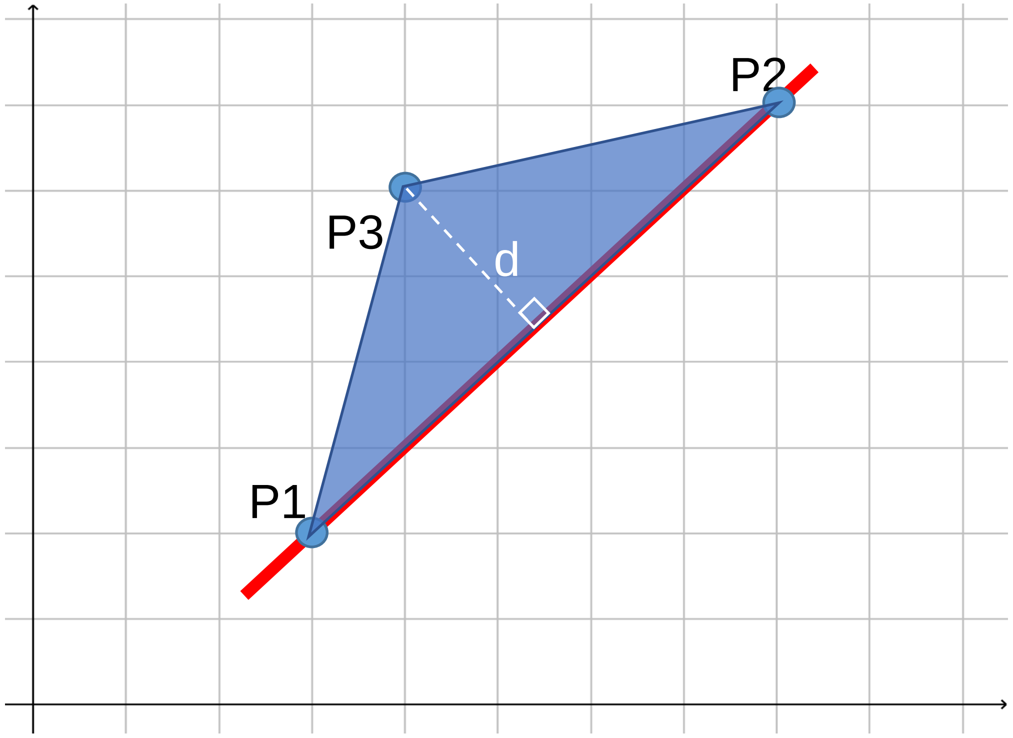


KIỂM TRA 2 ĐƯỜNG THẲNG CÓ CẮT NHAU?

Cho đường thẳng **d1** đi qua hai điểm P_1, P_2, đường thẳng **d2** đi qua 2 điểm P_3P_4.
Xác định hai đường thẳng **d1** và **d2** có cắt nhau hay không?

Tính diện tích đại số của các tam giác: $(P_1P_3P_2)$ và $(P_1P_4P_2)$:
*Hai đường thẳng d1 và d2 cắt nhau $\Leftrightarrow$ diện tích đại số của hai tam giác hoặc trái dấu hoặc có duy nhất một giá trị bằng 0.
*Hai đường thẳng d1 và d2 không cắt nhau $\Leftrightarrow$ diện tích đại số của hai tam giác cùng dấu.
*Hai đường thẳng trùng nhau khi cả hai diện tích đại số có giá trị là 0.

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC



TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng đi qua hai điểm P_1, P_2. Xét điểm P_3 nằm ngoài đường thẳng P_1P_2. Tính khoảng cách d từ P_3 đến đường thẳng đi qua P_1P_2

Từ công thức tính diện tích tam giác:

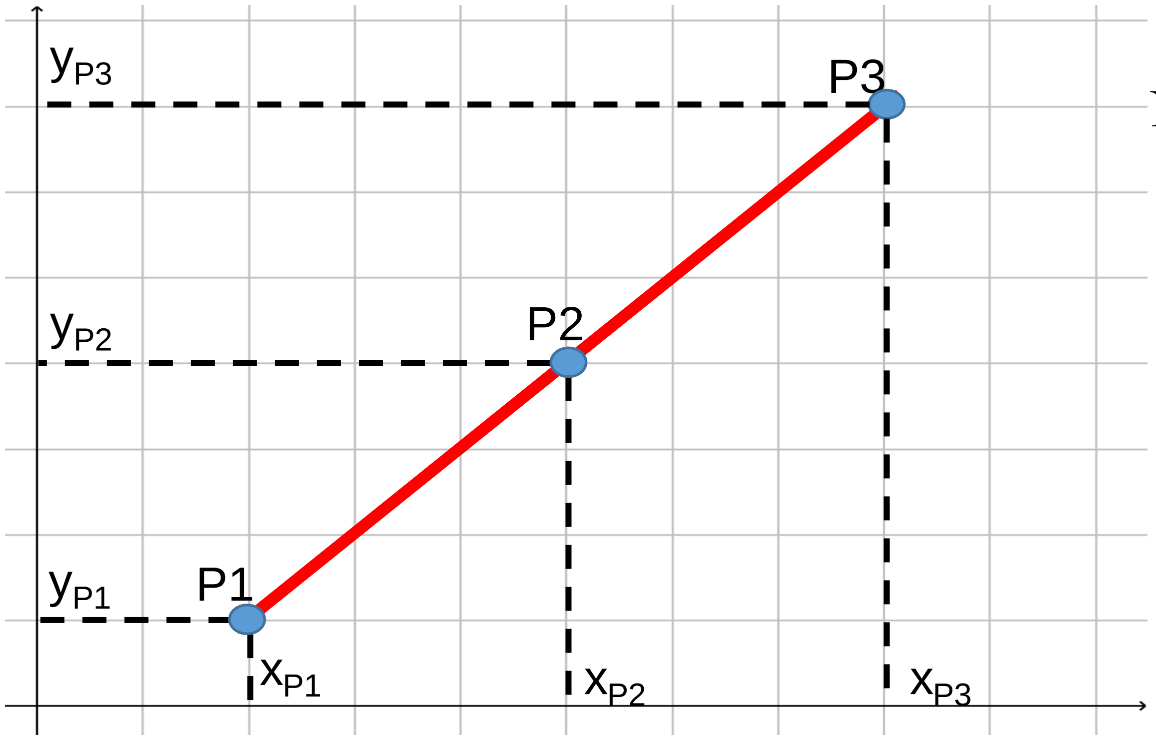
$$S_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}(P_1P_2 * d)$$

$$\Rightarrow d = 2 * \frac{S_{P_1P_2P_3}}{P_1P_2}$$

Với $S_{P_1P_2P_3}$ là trị tuyệt đối của diện tích đại số tam giác $S_{P_1P_2P_3}$

Khoảng cách từ P_3 đến P_1P_2 có thể tính theo công thức trên trong các trường hợp khác?

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC



KIỂM TRA 3 ĐIỂM THẲNG HÀNG?

Nếu ba điểm thẳng hàng thì diện tích đại số của tam giác tạo bởi ba điểm đó có gì đặc biệt?

$$S_{P_1P_2P_3} = 0$$

```
bool IsLineUp(point p1, point p2, point p3)
{
   if (STamgiac(p1,p2,p3)==0)
      return true;
   return false;
}
```

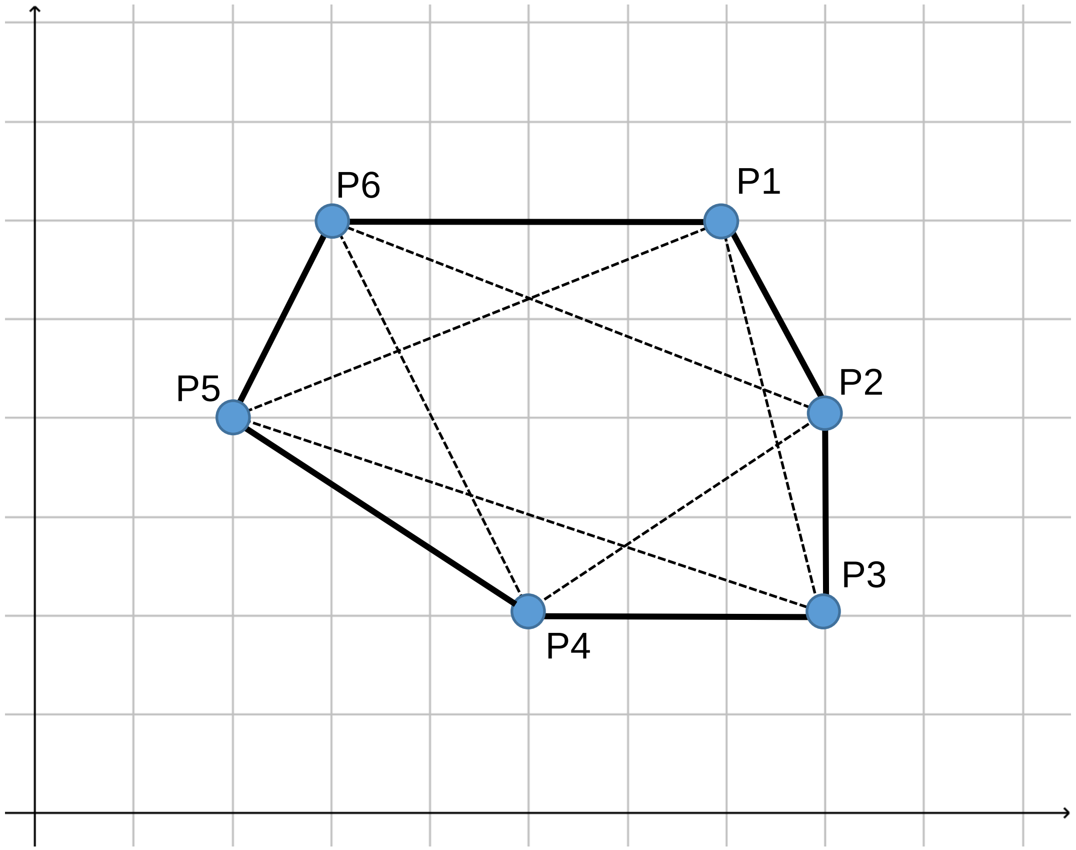
ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

KIỂM TRA CÁC ĐỈNH CỦA TAM GIÁC ĐƯỢC LIỆT KÊ THEO CHIỀU NÀO ?

Xét đa giác có các đỉnh được liệt kê theo thứ tự $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, ta xác định chiều được liệt kê của các đỉnh bằng cách nào?

Lần lượt xét dấu diện tích đại số của các tam giác $(P_1P_2P_3)$, $(P_2P_3P_4)$, $(P_3P_4P_5)$, $(P_4P_5P_6)$, $(P_5P_6P_1)$, $(P_6P_1P_2)$

Nếu toàn bộ các dấu đều là dấu dương thì các đỉnh được liệt kê ngược chiều kim đồng hồ.
Ngược lại thì được liệt kê theo chiều kim đồng hồ.



ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

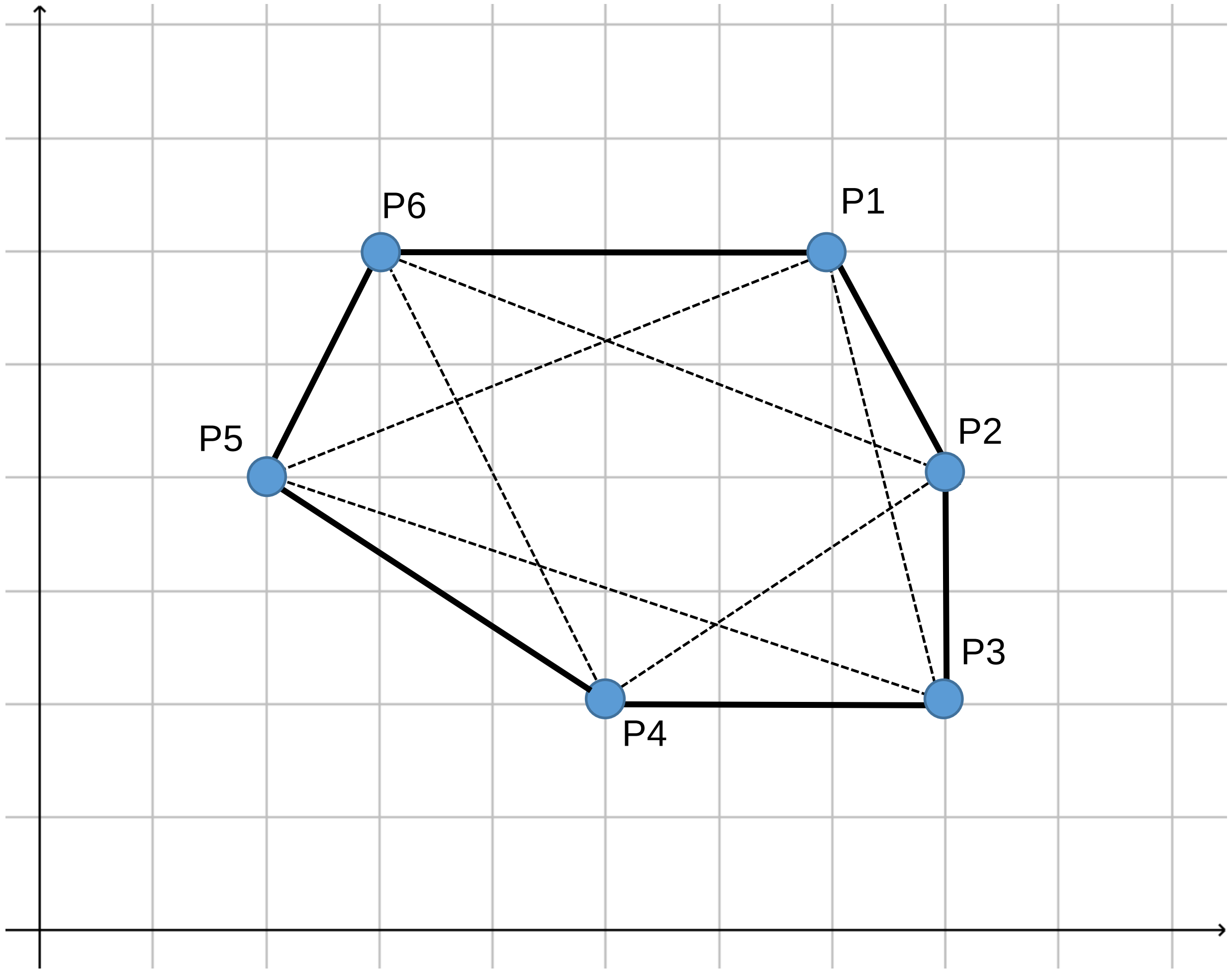
KIỂM TRA TÍNH CHẤT LỒI CỦA ĐA GIÁC

Làm thế nào để xác định đa giác đã cho là đa giác lồi?

Xét đa giác có các đỉnh được liệt kê theo thứ tự $P_1P_2P_3P_4P_5 \ldots P_n$

Lần lượt xét dấu diện tích đại số của các tam giác $(P_1P_2P_3)$, $(P_2P_3P_4)$, $(P_3P_4P_5)$,…, $(P_{n-1}P_n P_1)$, $(P_n P_1P_2)$.

Nếu tất cả diện tích đại số của các tam giác trên là cùng dấu thì đa giác đã cho là đa giác lồi.



ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

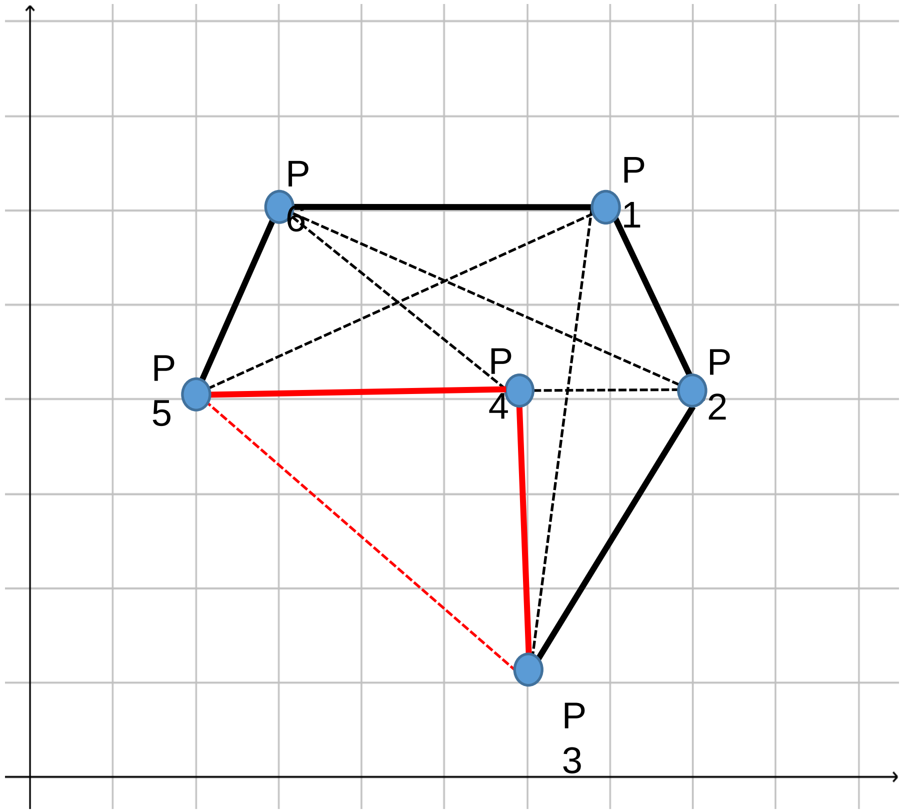
KIỂM TRA TÍNH CHẤT LỒI CỦA ĐA GIÁC

Làm thế nào để xác định đa giác đã cho là đa giác lồi?

Xét đa giác có các đỉnh được liệt kê theo chiều kim đồng hồ: $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$

Lần lượt xét dấu diện tích đại số của các tam giác: $(P_1P_2P_3), (P_2P_3P_4), (P_3P_4P_5), (P_4P_5P_6), (P_5P_6P_1)$ và $(P_6P_1P_2)$.

Tam giác $P_3P_4P_5$ ngược chiều kim đồng hồ, nên đa giác không là đa giác lồi!



ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

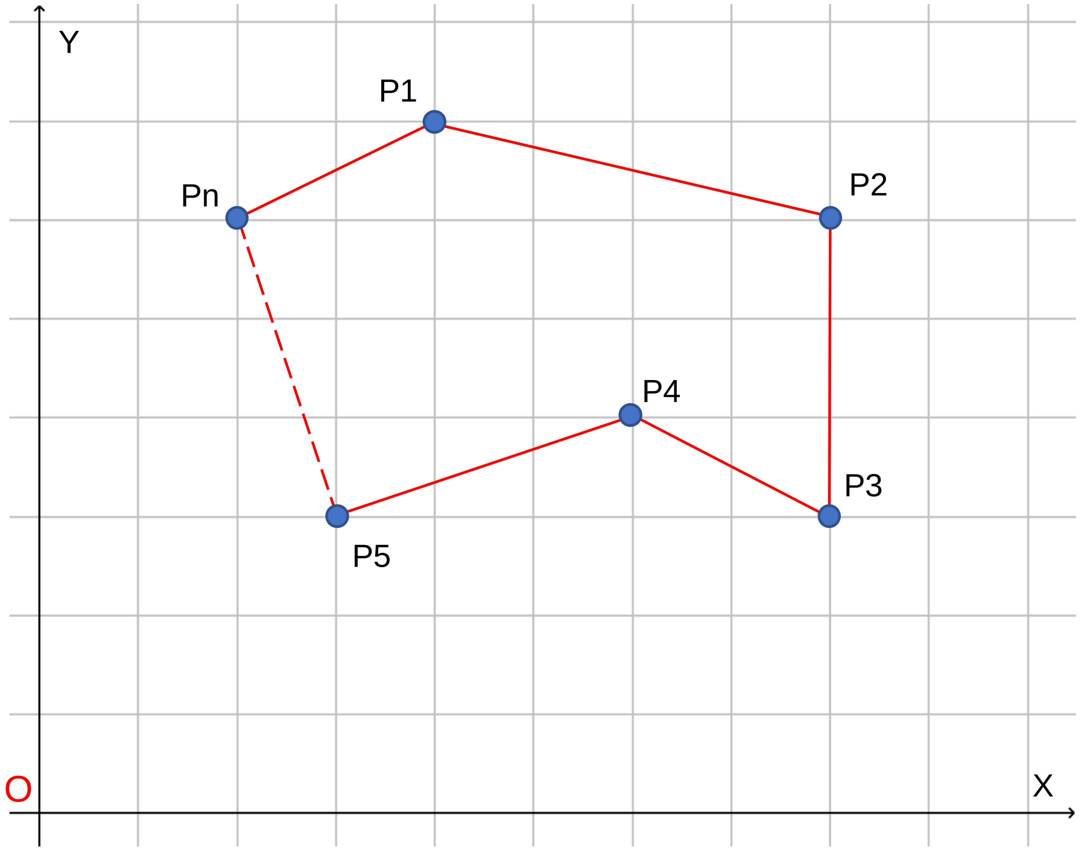
DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ MỘT ĐA GIÁC KHÔNG TỰ CẮT

Xét đa giác có các đỉnh được liệt kê theo thứ tự $P_1P_2P_3P_4P_5\ldots P_n$, tính diện tích của đa giác?

Diện tích đại số đa giác không tự cắt $P_1P_2P_3P_4P_5\ldots P_n$:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i)}{2}$$

Với $P_i = (x_i, y_i)$ và $P_{n+1} = P_1$



CHỨNG MINH?

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

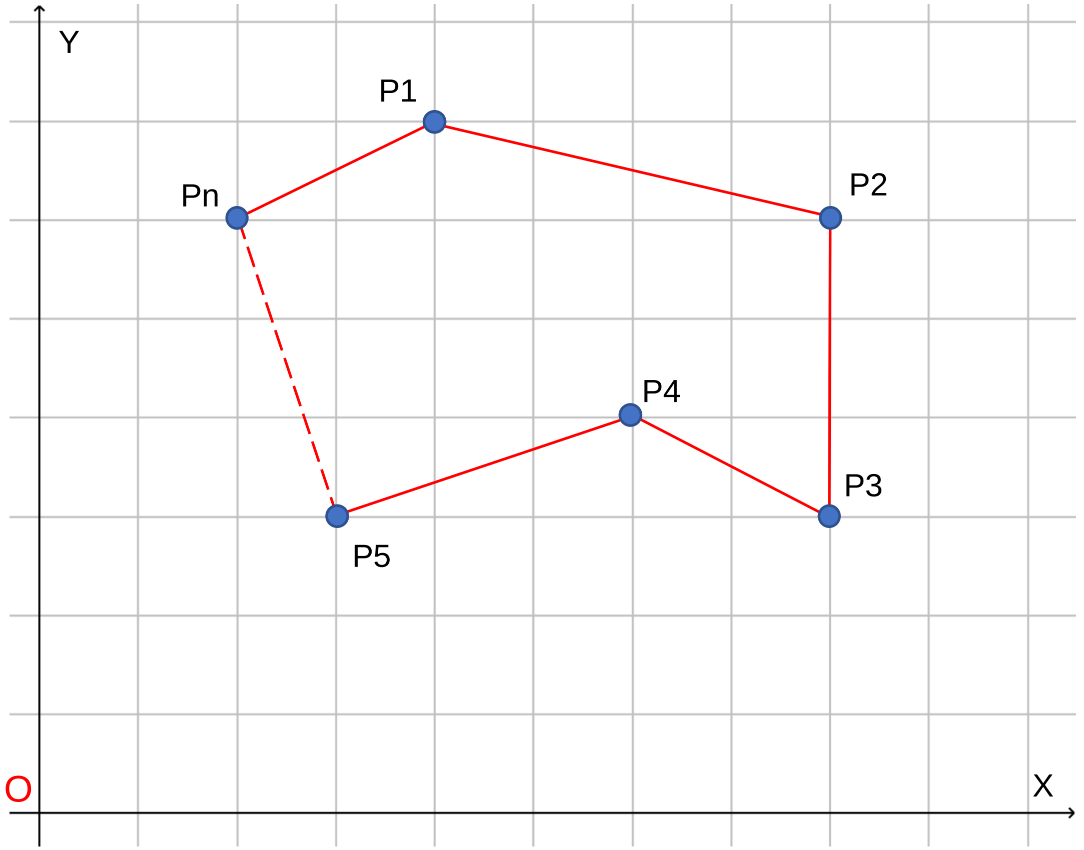
DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ MỘT ĐA GIÁC KHÔNG TỰ CẮT

Xét đa giác có các đỉnh được liệt kê theo thứ tự $P_1P_2P_3P_4P_5\ldots P_n$, tính diện tích của đa giác?

Diện tích đại số đa giác không tự cắt $P_1P_2P_3P_4P_5\ldots P_n$:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i)}{2}$$

Với $P_i = (x_i, y_i)$ và $P_{n+1} = P_1$



ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

Sắp xếp các điểm theo thứ tự tăng dần về góc?

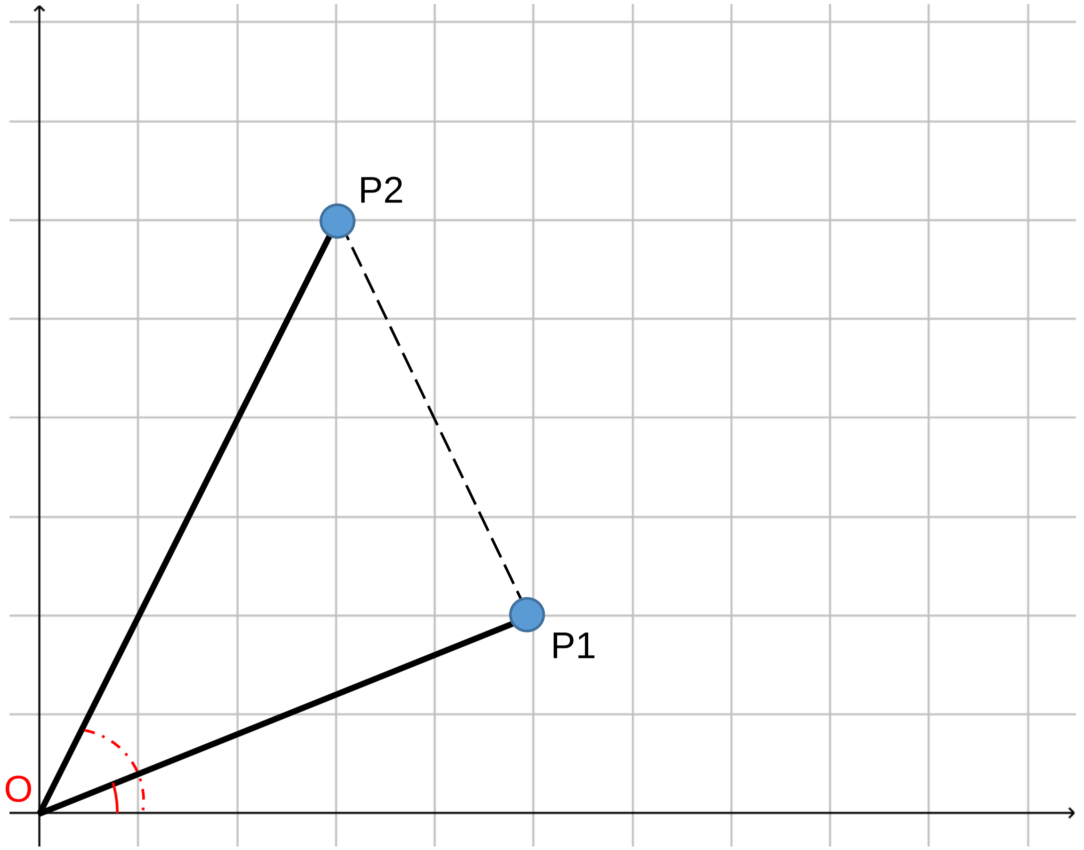
Làm thế nào để có thể nhanh chóng sắp xếp các đỉnh theo thứ tự tăng dần về góc?

Xét dấu diện tích đại số của tam giác P_1OP_2:

Nếu dấu **âm** P_1OP_2 được ghi ngược chiều kim đồng hồ
→ P_1 có góc lớn hơn P_2

Nếu dấu **dương** P_1OP_2 được ghi theo chiều kim đồng hồ → P_1 có góc nhỏ hơn P_2

```
bool SoSanh(point p1, point p2)
{
    point O; O.x=0; O.y=0;
    if (STamgiac(p1,O,p2)>0)
        return true;
    return false;
}
```



MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

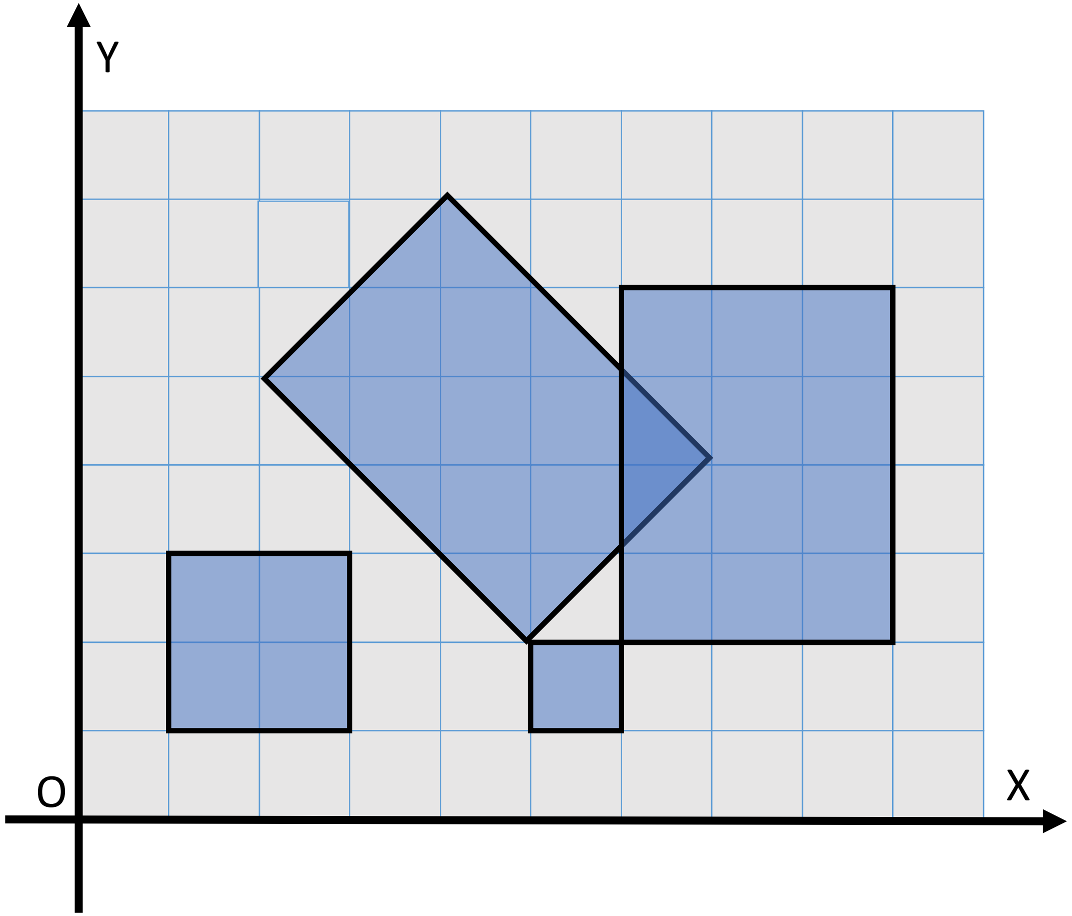
BÀI TOÁN: CÁC HÌNH CHỮ NHẬT

Trên mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy cho n hình chữ nhật. Hai hình chữ nhật được được coi là giao nhau nếu tồn tại một điểm nằm trong cả hai hình chữ nhật (kể cả trên biên). Hai hình chữ nhật A và B được gọi là *đi sang* được nhau nếu tồn tại dãy các hình chữ nhật:

$$A = r_0, r_1, \dots, r_k = B$$

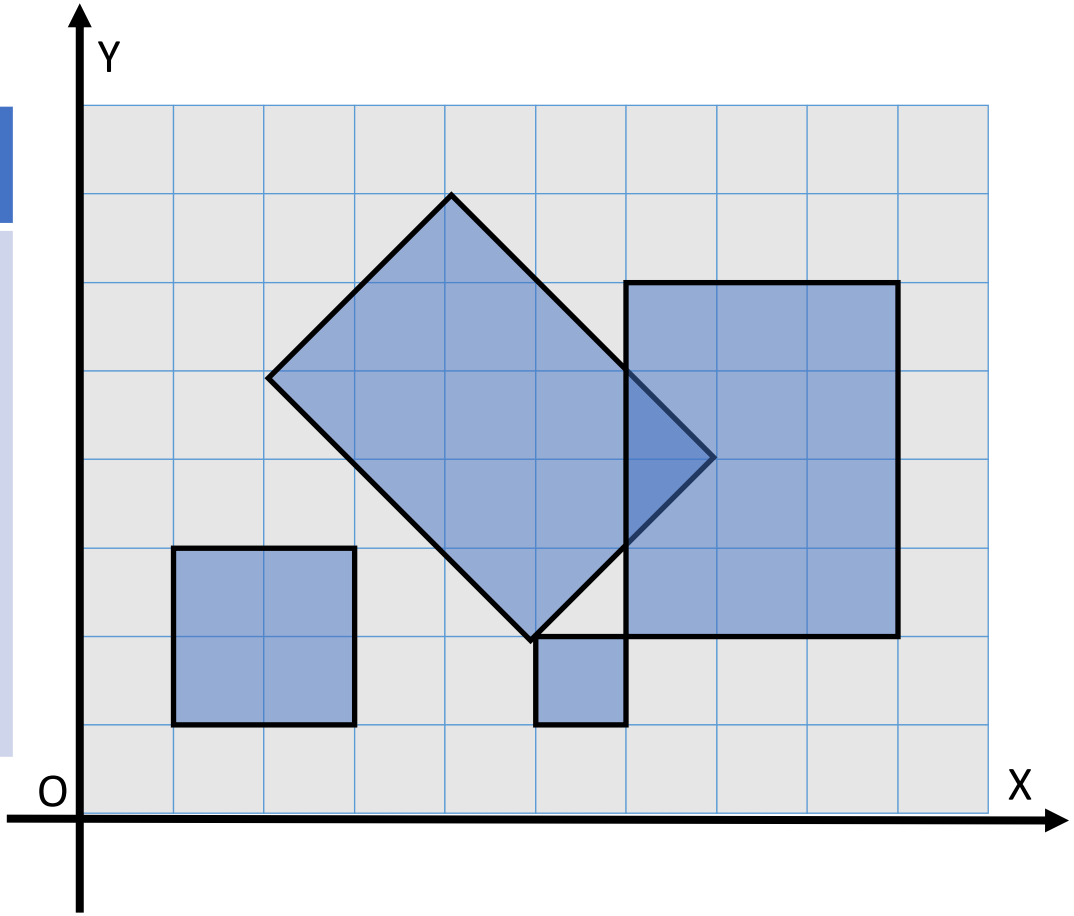
Trong đó hình chữ nhật r_i có điểm chung với hình chữ nhật r_{i-1} $(\forall i = 1,2, \dots, k)$.

Yêu cầu: Chọn một tập nhiều nhất các hình chữ nhật trong số những hình chữ nhật nói trên sao cho hai hình chữ nhật bất kỳ trong tập được chọn là đi sang được nhau.



ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

INPUT	OUTPUT
4 1 1 3 1 3 3 1 3 5 1 5 2 6 2 6 1 5 2 7 4 4 7 2 5 6 2 6 6 9 6 9 2	3

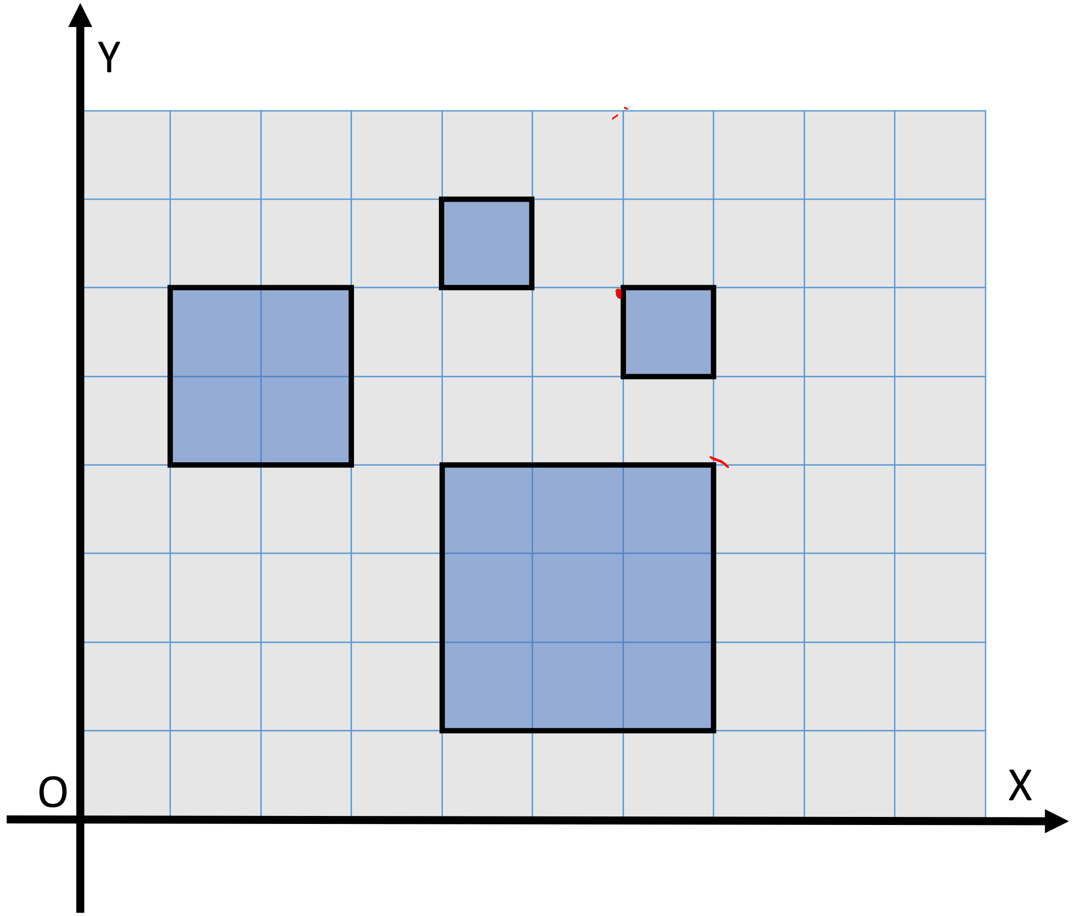


BÀI TẬP ỨNG DỤNG

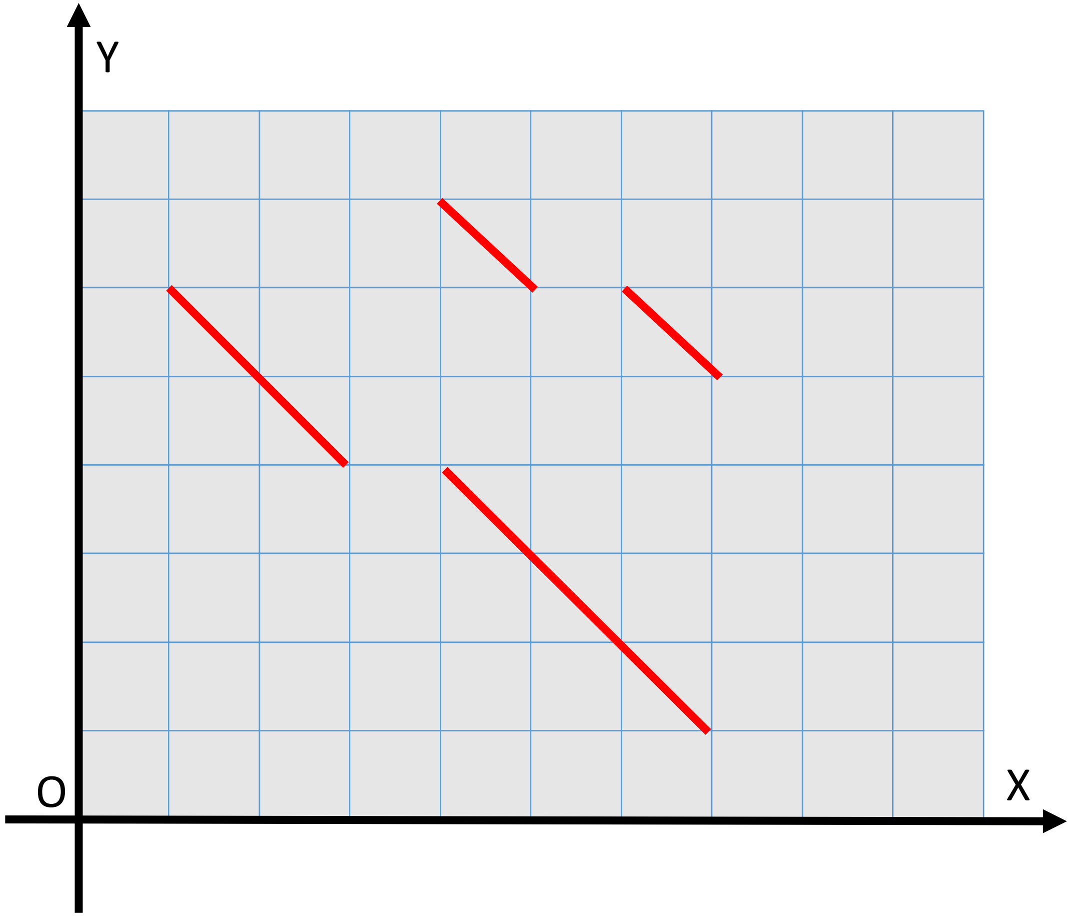
BÀI TOÁN: CÁC HÌNH VUÔNG

Trên mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy cho n hình vuông thuộc góc phần tư thứ nhất. Hình vuông được coi là nhìn thấy được từ gốc tọa độ nếu đường nối từ một đỉnh của hình vuông đến gốc tọa độ không có điểm chung với bất cứ hình vuông nào khác.

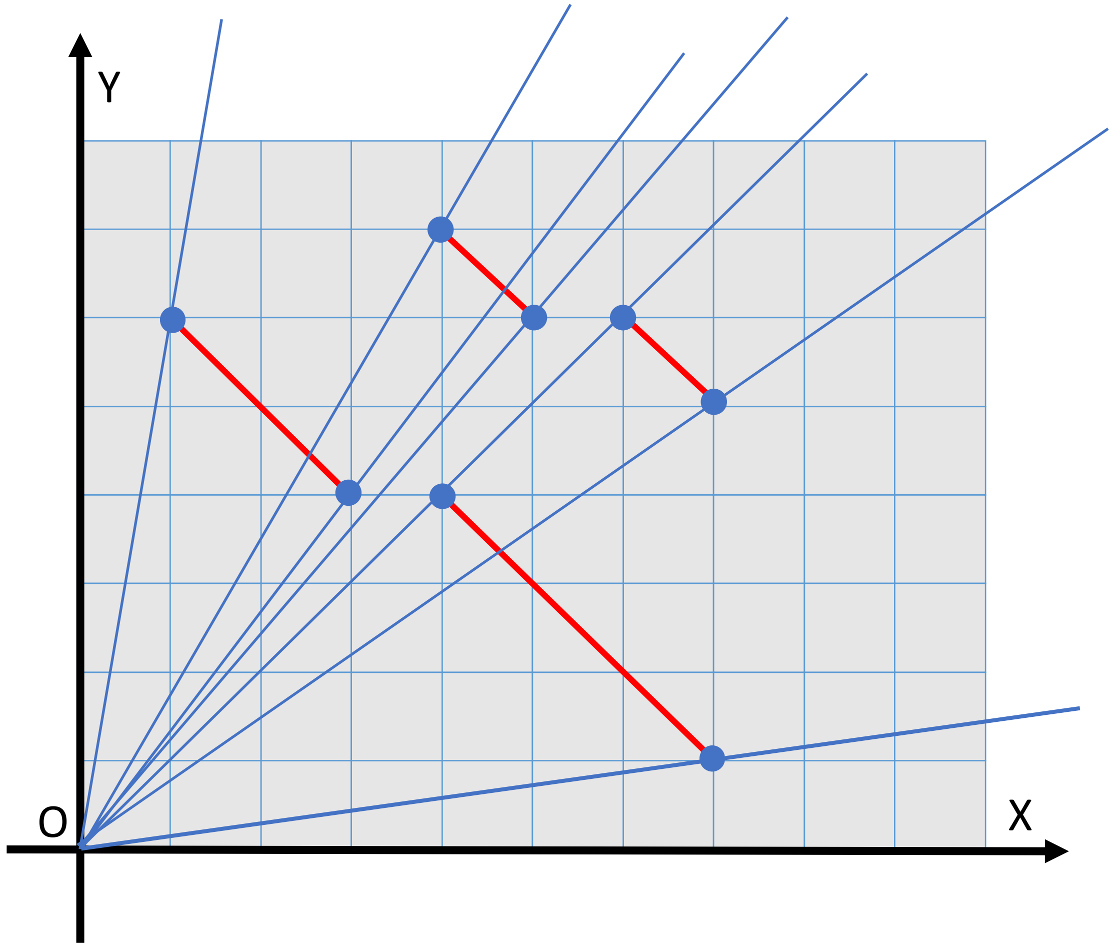
Yêu cầu: Hãy cho biết có thể nhìn thấy được bao nhiêu hình vuông từ gốc tọa độ.



ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC



ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC



ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

Sắp xếp các điểm theo thứ tự tăng dần về góc?

Làm thế nào để có thể nhanh chóng sắp xếp các đỉnh theo thứ tự tăng dần về góc?