Chương 3.

CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG ĐI

Nội dung

1. Tìm đường đi ngắn nhất

2. Đồ thị Euler

3. Đồ thị Hamilton

1. TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

Định nghĩa

Định nghĩa. Cho G = (V,E) là đồ thị có trọng số và H là đồ thị con của G. Khi đó **trọng lượng** của H là tổng trọng lượng của các cạnh của H.

$$w(\mathrm{H}) = \sum_{e \in H} w(e)$$

- Nếu H là đường đi, chu trình, mạch thì w(H) được gọi là **độ dài** của H.
- Nếu mạch H có độ dài âm thì H được gọi là **mạch âm.**
- **Khoảng cách** giữa 2 đỉnh u và v là độ dài ngắn nhất của các đường đi từ u đến v.

Ma trận khoảng cách

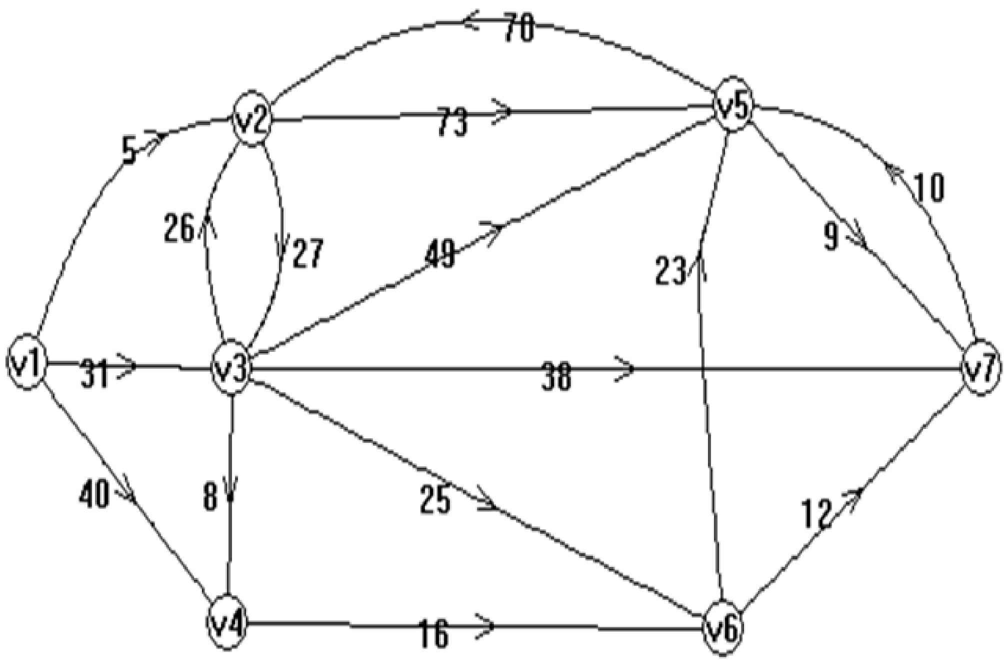
Định nghĩa. Cho đồ thị G = (V, E), V = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ có trọng số. **Ma trận khoảng cách** của G là ma trận **D= (d_{ij})** xác định như sau:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & khi \quad i = j \\ w(v_i v_j) & khi \quad v_i v_j \in E \\ \infty & khi \quad v_i v_j \notin E \end{cases}$$

Nhận xét. Mọi đồ thị đơn được hoàn toàn xác định bởi ma trận khoảng cách.

Ma trận khoảng cách

Ví dụ. Tìm ma trận khoảng cách của đồ thị sau



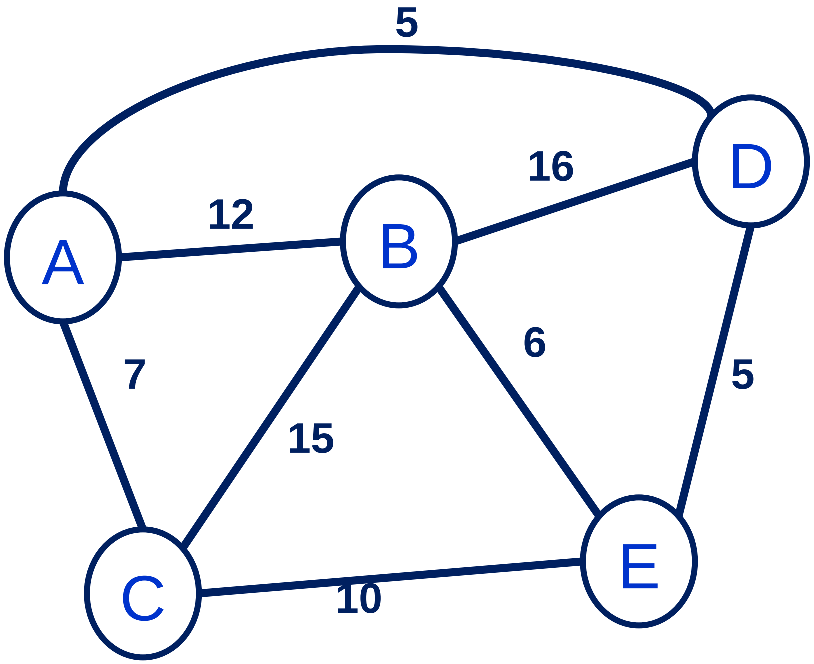
$$D = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 31 & 40 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 27 & \infty & 73 & \infty & \infty \\ \infty & 26 & 0 & 8 & 49 & 25 & 38 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 16 & \infty \\ \infty & 70 & \infty & \infty & 0 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 23 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận khoảng cách

Ví dụ. Tìm đồ thị có ma trận khoảng cách sau:

$$\begin{bmatrix} 0 & 12 & 7 & 5 & \infty \\ 12 & 0 & 15 & 16 & 6 \\ 7 & 15 & 0 & \infty & 10 \\ 5 & 16 & \infty & 0 & 5 \\ \infty & 6 & 10 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

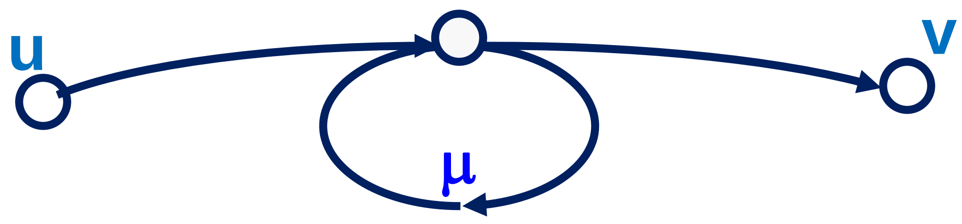
Đáp án.



Đường đi ngắn nhất

Bài toán. Cho G = (V, E) là đồ thị có trọng số. Tìm đường đi ngắn nhất từ u đến v và tính khoảng cách d(u ,v).

Nhận xét. Nếu đồ thị G có mạch âm μ trên một đường đi từ u tới v thì đường đi ngắn nhất từ u đến v sẽ không tồn tại.



Một số lưu ý

Khi tìm đường đi ngắn nhất ta có thể bỏ bớt đi các cạnh song song cùng chiều và chỉ để lại một cạnh có trọng lượng nhỏ nhất.

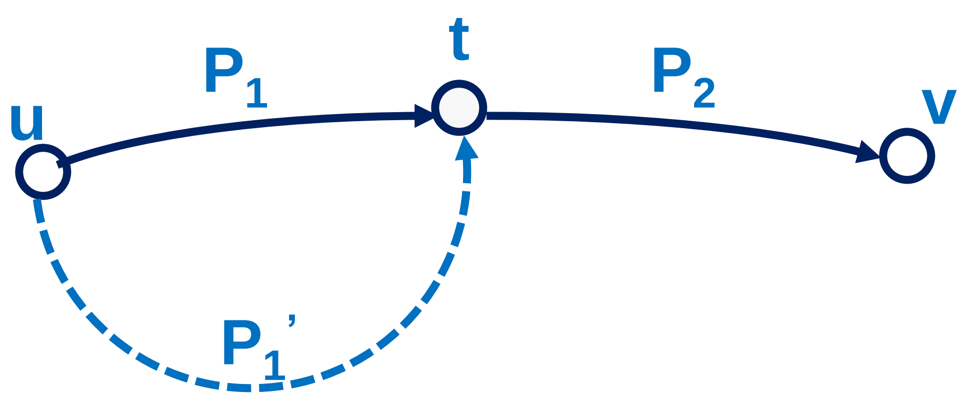
Đối với các khuyên có trọng lượng không âm thì cũng có thể bỏ đi mà không làm ảnh hưởng đến kết quả của bài toán.

Đối với các khuyên có trọng lượng âm thì có thể đưa đến bài toán tìm đường đi ngắn nhất không có lời giải.

Nguyên lý Bellman

Gọi P là đường đi ngắn nhất từ đỉnh **u** đến đỉnh **v** và **t** $\in$ P. Giả sử $P=P_1 \oplus P_2$ với P_1 là đường đi con của P từ **u** đến **t** và P_2 là đường đi con của P từ **t** đến **v**. Khi đó P_1 cũng là đường đi ngắn nhất từ **u** đến **t**.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $\mathbf{P_1'}$ là đường đi ngắn hơn $\mathbf{P_1}$ ta có



$$\mathbf{w(P_1') < w(P_1) \quad \Rightarrow w(P_1' \oplus P_2) < w(P_1 \oplus P_2) = w(P)}$$

Vô lý vì P là đường đi ngắn nhất từ u đến v

Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất

Để tìm đường đi ngắn nhất, chúng ta quan tâm tới hai thuật toán:

- Thuật toán Dijkstra không thể thực hiện khi đồ thị có cạnh âm
- Thuật toán Ford – Bellman xác định các mạch (chu trình) âm hoặc trả về cây đường đi ngắn nhất

Thuật toán Dijkstra

Xác định tuần tự các đỉnh có khoảng cách đến u_0 từ nhỏ đến lớn.

- Trước tiên đỉnh có khoảng cách nhỏ nhất đến $\mathbf{u_0}$ là $\mathbf{u_0}$.
- Trong V\{$\mathbf{u_0}$} tìm đỉnh có khoảng cách đến $\mathbf{u_0}$ nhỏ nhất (đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với $\mathbf{u_0}$) giả sử đó là $\mathbf{u_1}$
- Trong V\{$\mathbf{u_0}$,$\mathbf{u_1}$} tìm đỉnh có khoảng cách đến $\mathbf{u_0}$ nhỏ nhất (đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với $\mathbf{u_0}$ hoặc $\mathbf{u_1}$) giả sử đó là $\mathbf{u_2}$

Tiếp tục như trên cho đến khi nào tìm được khoảng cách từ **u_0** đến các đỉnh khác.

Nếu G có n đỉnh thì:

$$0 = d(u_0,u_0) < d(u_0,u_1) \le d(u_0,u_2) \le \ldots \le d(u_0,u_{n-1})$$

Thuật toán Dijkstra

Bước 1. **i:=0**, S:=V\{u_0}, **L**(u_0):=0, **L**(v):= ∞ với mọi v ∈S và đánh dấu đỉnh v bởi (∞,-). Nếu n=1 thì dừng và xuất d(u_0,u_0)=0=**L**(u_0)

Bước 2. Với mọi **v**∈S, nếu **L**(**v**)> **L**(u_i)+w(u_i **v**), đặt

L(**v**):=**L**(u_i)+w(u_i **v**) và đánh dấu đỉnh **v** bởi (**L**(**v**); u_i).

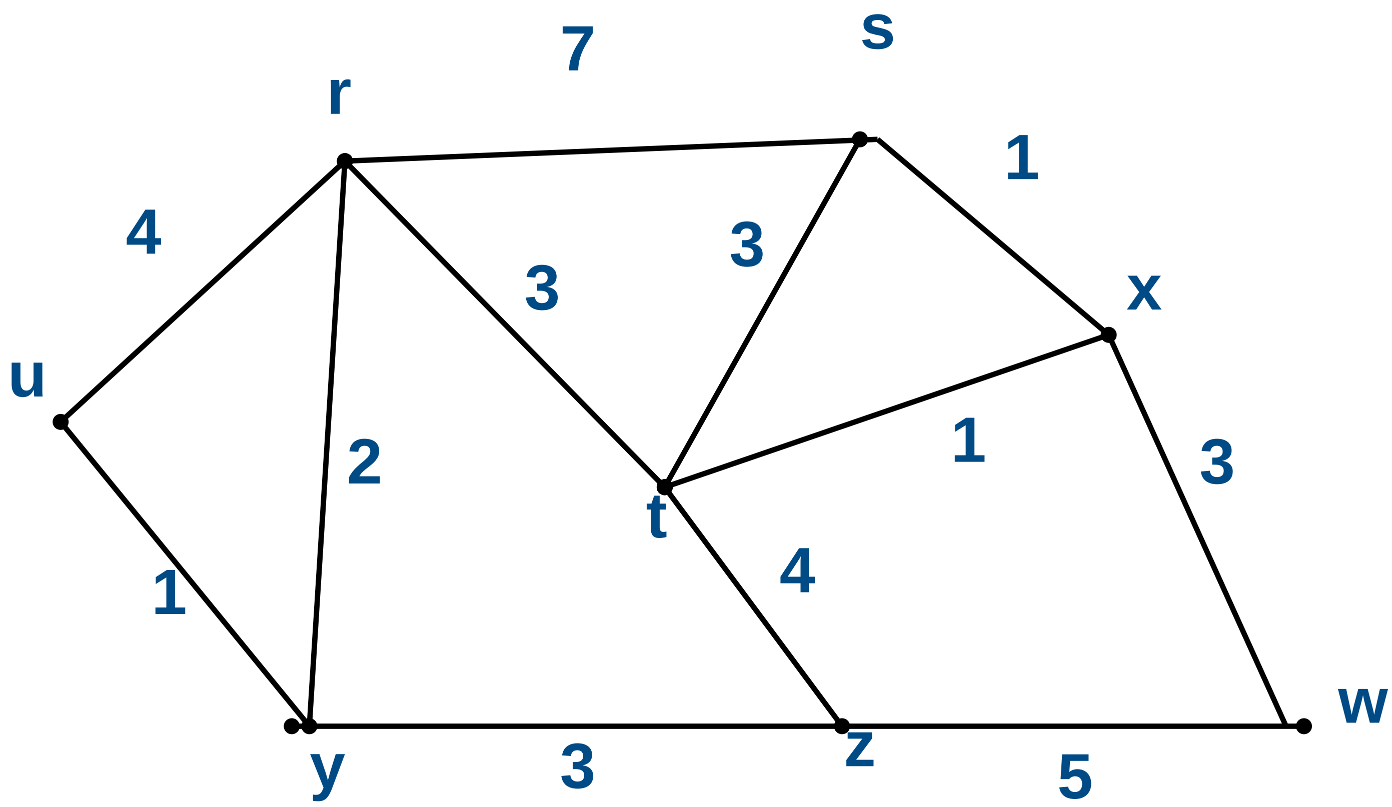
Xác định **k** = min **L**(**v**), **v**∈S. Nếu **L**(v_j) = **k**, đặt u_{i+1}:= v_j và S:=S\{u_{i+1}}

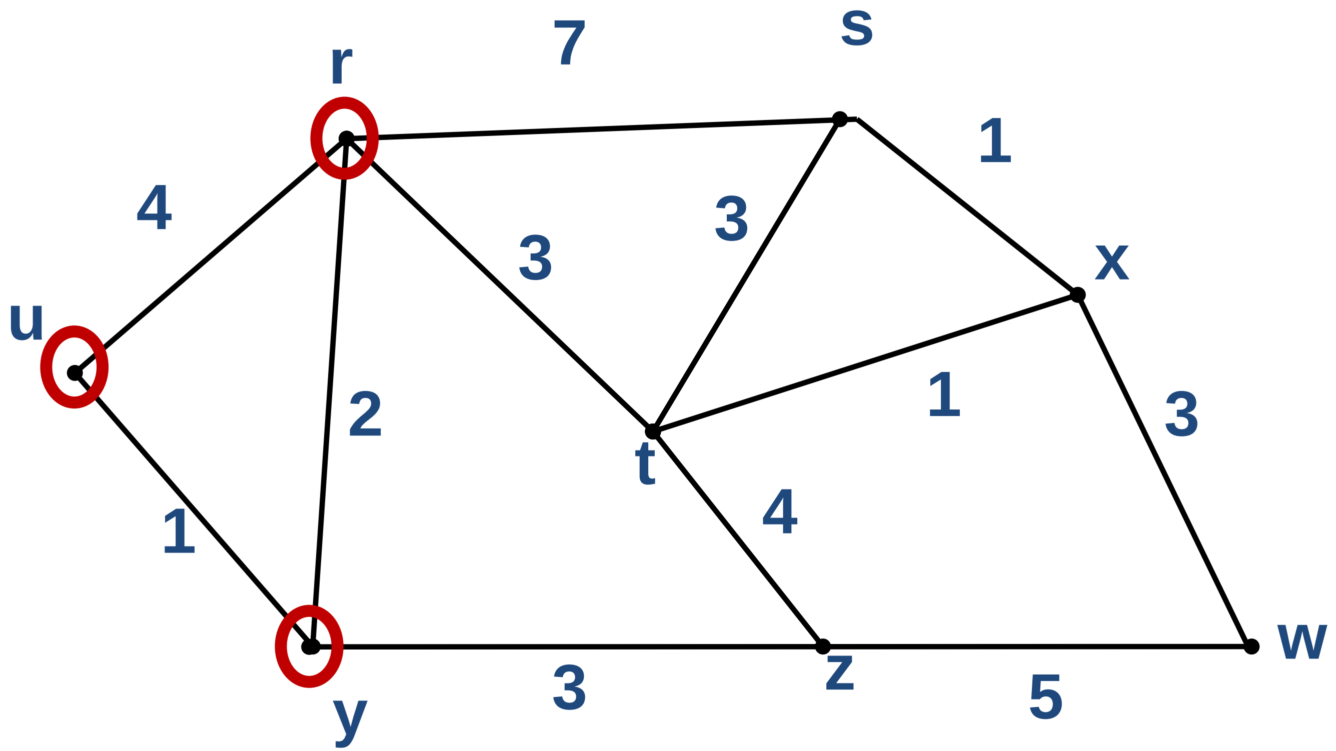
Bước 3. **i:=i+1.** Nếu i = n-1 thì kết thúc.

Nếu không thì quay lại Bước 2

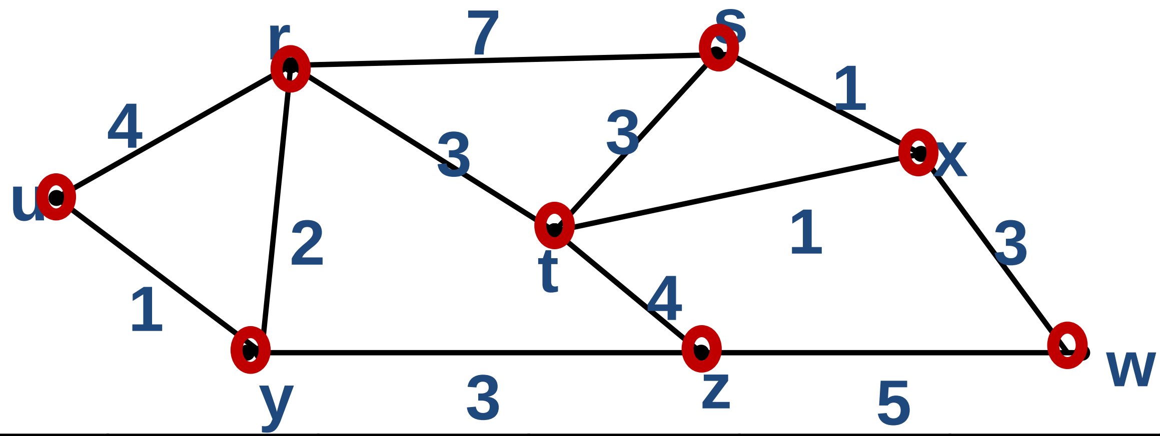
Một số ví dụ

Bài tập 1. Tìm đường đi ngắn nhất từ **u** đến các đỉnh còn lại.



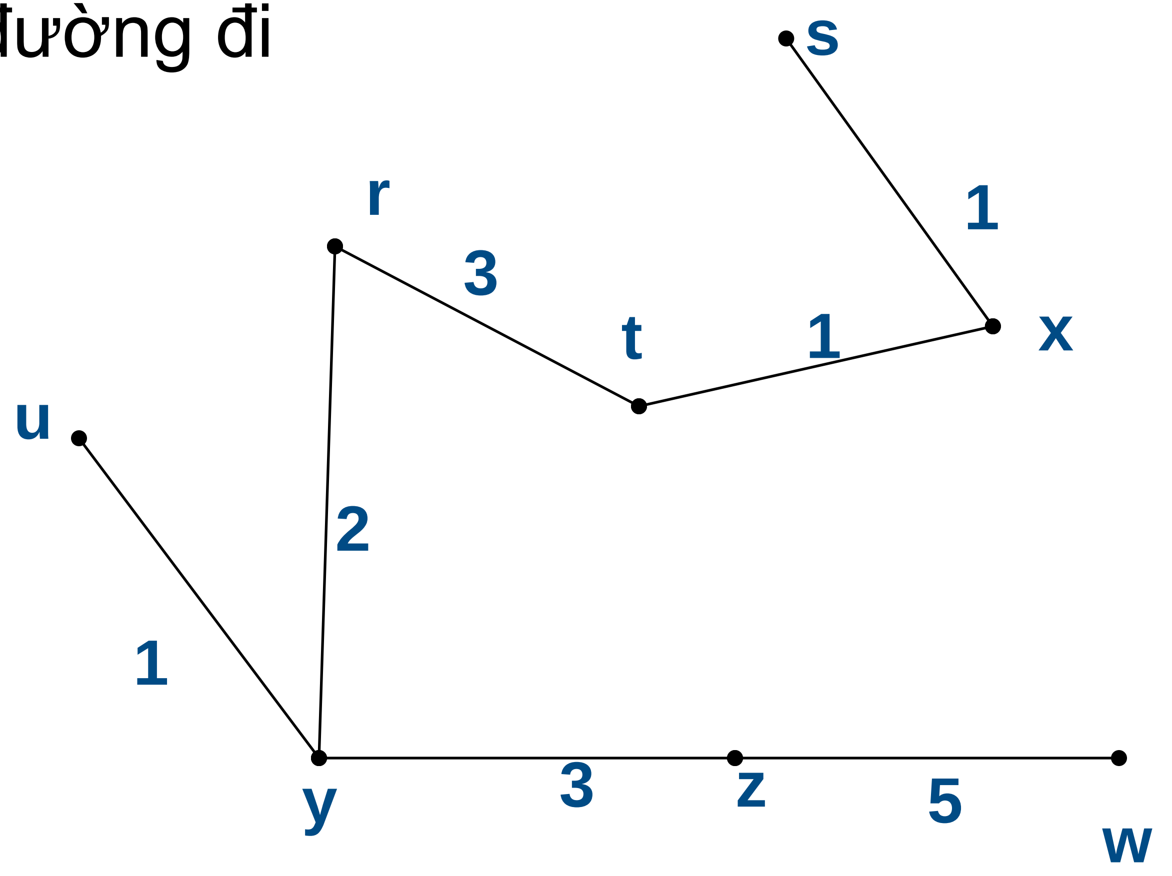


u	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	$(4,u_0)$	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	**$(1,u_0)$***	(∞,-)	(∞,-)
-	**(3,y)***	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	-	(4,y)	(∞,-)



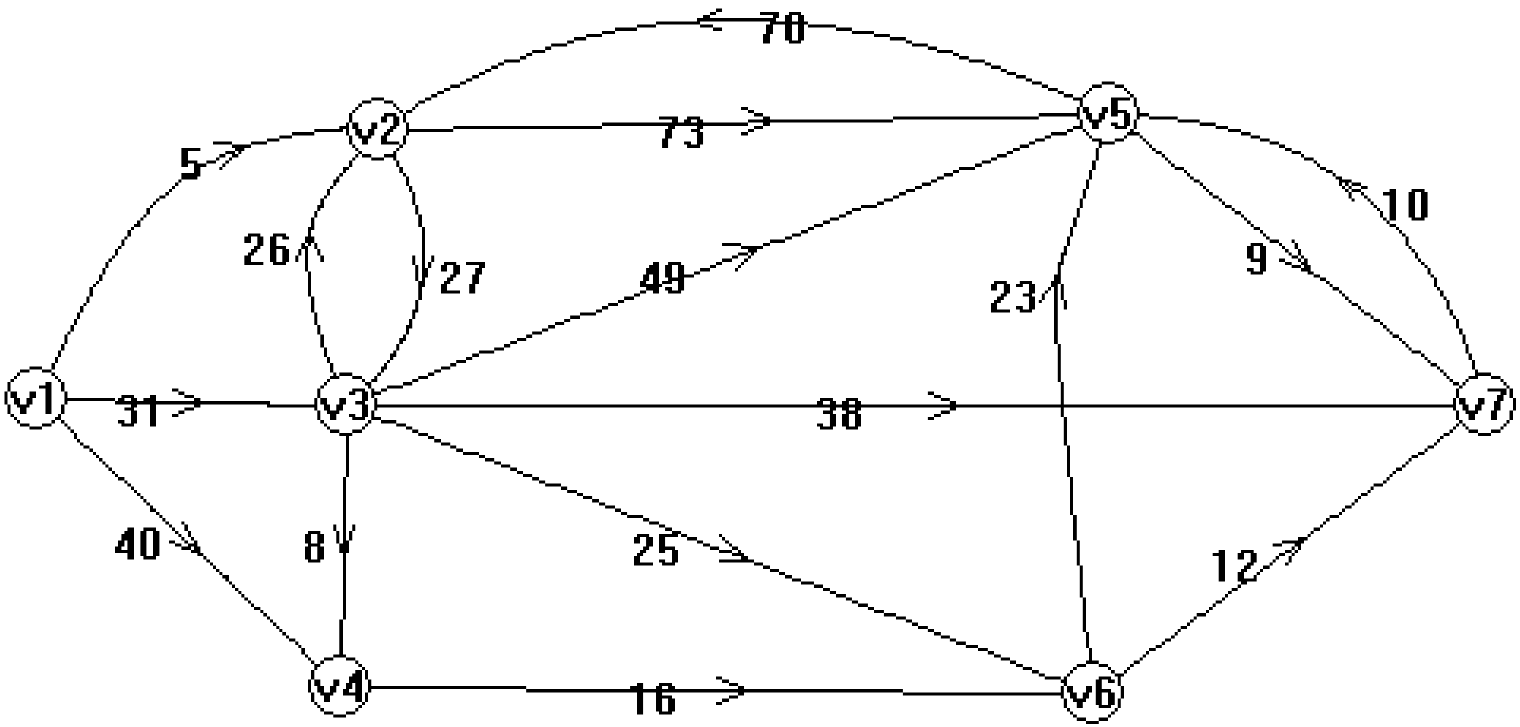
u	r	s	t	x	y	z	w
0*	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
-	(4,u_0)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	**(1u_0)***	(∞,-)	(∞,-)
-	**(3,y)***	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	-	(4,y)	(∞,-)
-	-	(10,r)	(6,r)	(∞,-)	-	**(4,y)***	(∞,-)
-	-	(10,r)	**(6,r)***	(∞,-)	-	-	(9,z)
-	-	(9,t)	-	**(7,t)***	-	-	(9,z)
-	-	**(8,x)***	-	-	-	-	(9,z)
-	-	-	-	-	-	-	**(9,z)***

Cây đường đi



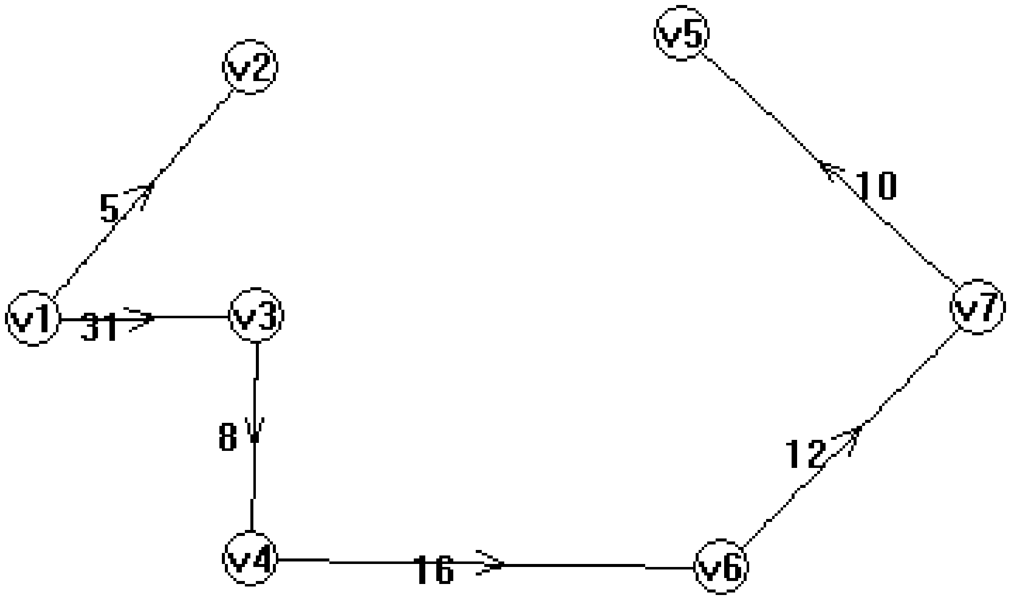
Ví dụ. Cho đồ thị có trọng số G = (V, E), V = { v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7} xác định bởi ma trận trọng số D. Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ v_1 đến các đỉnh v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 31 & 40 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 27 & \infty & 73 & \infty & \infty \\ \infty & 26 & 0 & 8 & 49 & 25 & 38 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 16 & \infty \\ \infty & 70 & \infty & \infty & 0 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 23 & 0 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

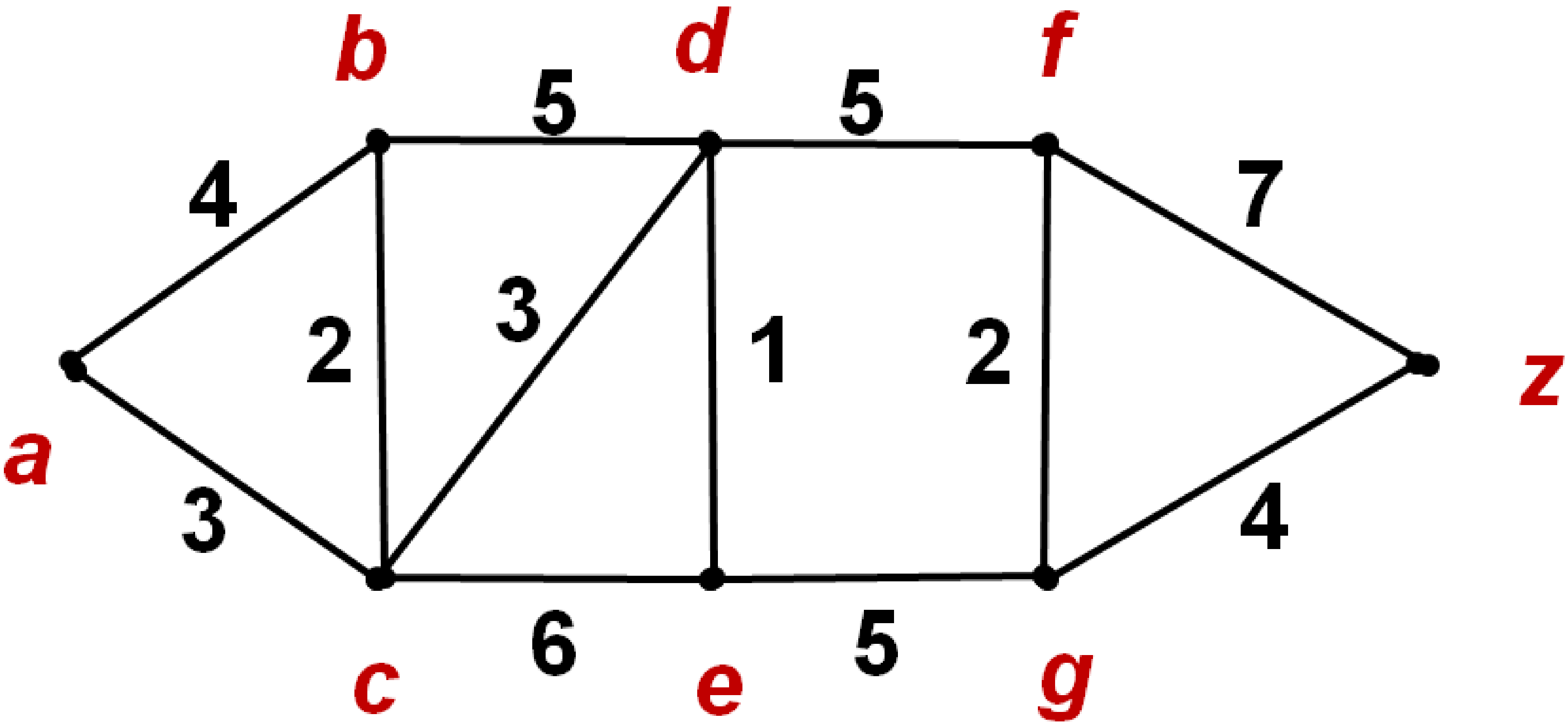

70
v2
v5
73
5
10
26
27
49
9
23
v1
31
v3
38
v7
40
8
25
12
v4
16
v6

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0*	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	$(5,v_1)$*	$(31,v_1)$	$(40,v_1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	$(31,v_1)$*	$(40,v_1)$	$(78,v_2)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	-	$(39,v_3)$*	$(78,v_2)$	$(56,v_3)$	$(69,v_3)$
-	-	-	-	$(78,v_2)$	$(55,v_4)$*	$(69,v_3)$
-	-	-	-	$(78,v_2)$	-	$(67,v_6)$*
-	-	-	-	$(77,v_7)$	-	-

Cây đường đi

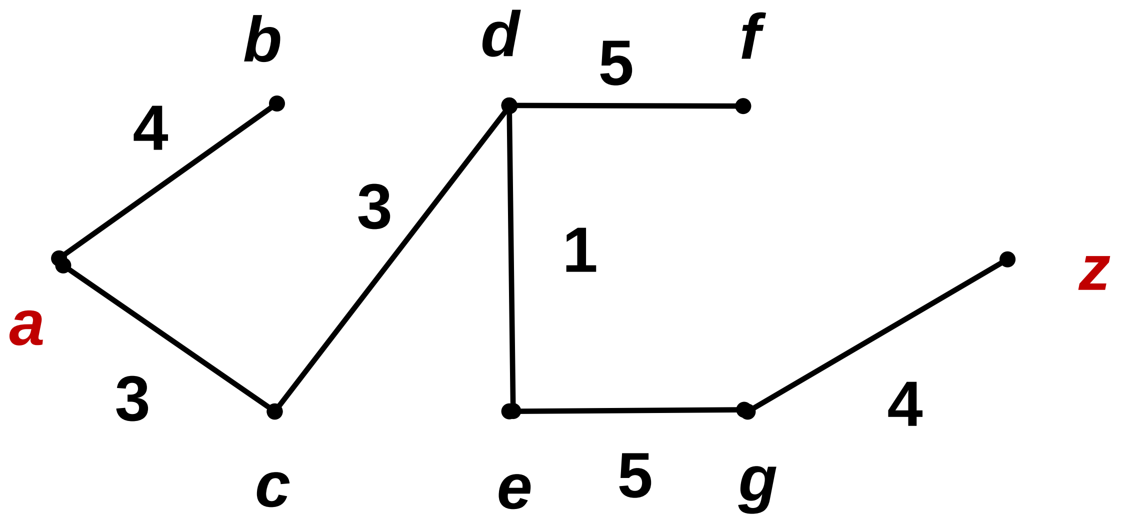


Ví dụ. Dùng thuật toán Dijsktra để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh ***a*** đến đỉnh ***z.***



a	b	c	d	e	f	g	z
0*	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	$(4,a)$	**$(3,a)$***	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	**$(4,a)$***	-	$(6,c)$	$(9,c)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	-	**$(6,c)$***	$(9,c)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	-	-	**$(7,d)$***	$(11,d)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
-	-	-	-	_	**$(11,d)$***	$(12,e)$	$(\infty,-)$
-	-	-	-	_	-	**$(12,e)$***	$(18,f)$
-	-	-	-	_	-	-	**$(16,g)$***

Cây đường đi



Thuật toán Ford - Bellman

Tìm đường đi ngắn nhất từ **u_0** đến các đỉnh khác hoặc chỉ ra đồ thị có mạch âm.

Bước 1. $L_0(u_0) = 0$ và $L_0(v) = \infty \ \forall v \neq u_0$. Đánh dấu đỉnh v bằng $(\infty, -)$; i=1.

Bước 2. $L_i(u_0) = 0$ và

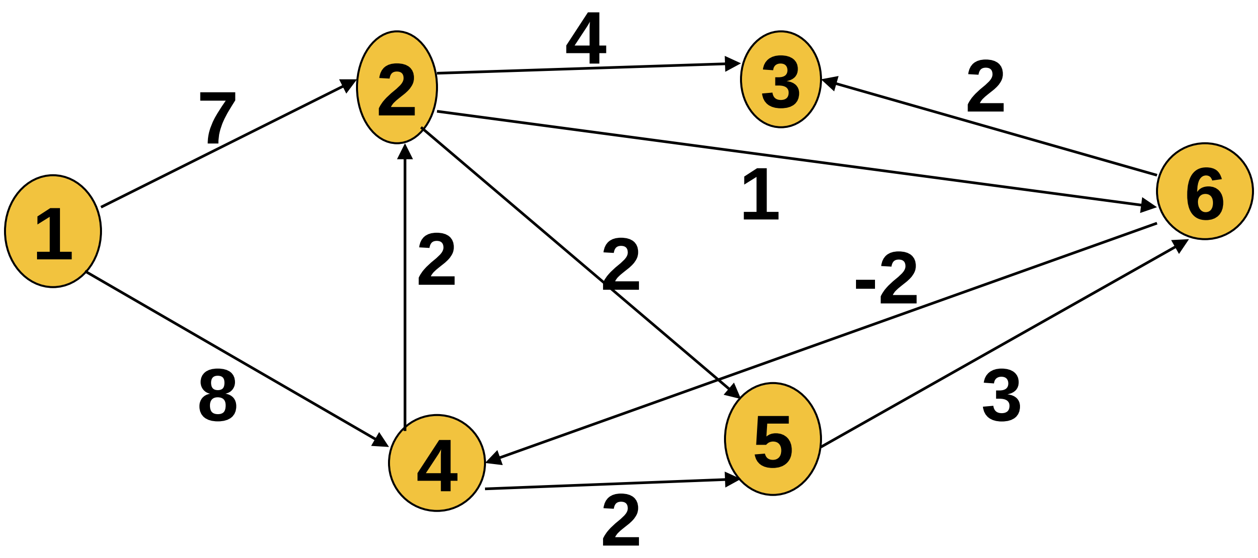
$$L_i(v) = \min\{ L_{i-1}(u)+w(uv) \mid u \text{ là đỉnh trước của } v \}$$

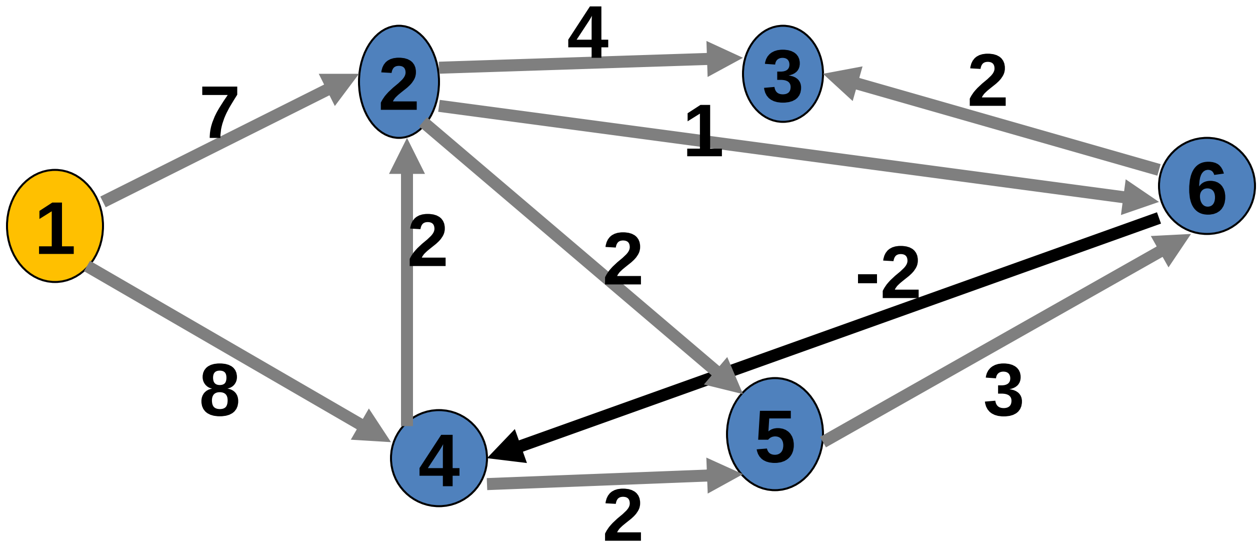
Nếu $L_i(v) = L_{i-1}(t)+w(tv)$ thì đánh dấu đỉnh v bởi $(L_i(v),t)$

Bước 3. Nếu $L_i(v) = L_{i-1}(v)\ \forall v$, tức $L_i(v)$ ổn định thì dừng. Ngược lại đến bước 4.

Bước 4. Nếu i = n thì dừng, kết luận G có mạch âm. Nếu i ≤ n-1 thì trở về **Bước 2** với i:=i+1

Ví dụ. Dùng thuật toán Ford-Bellman để tìm đường đi ngắn nhất từ 1 cho đến các đỉnh còn lại

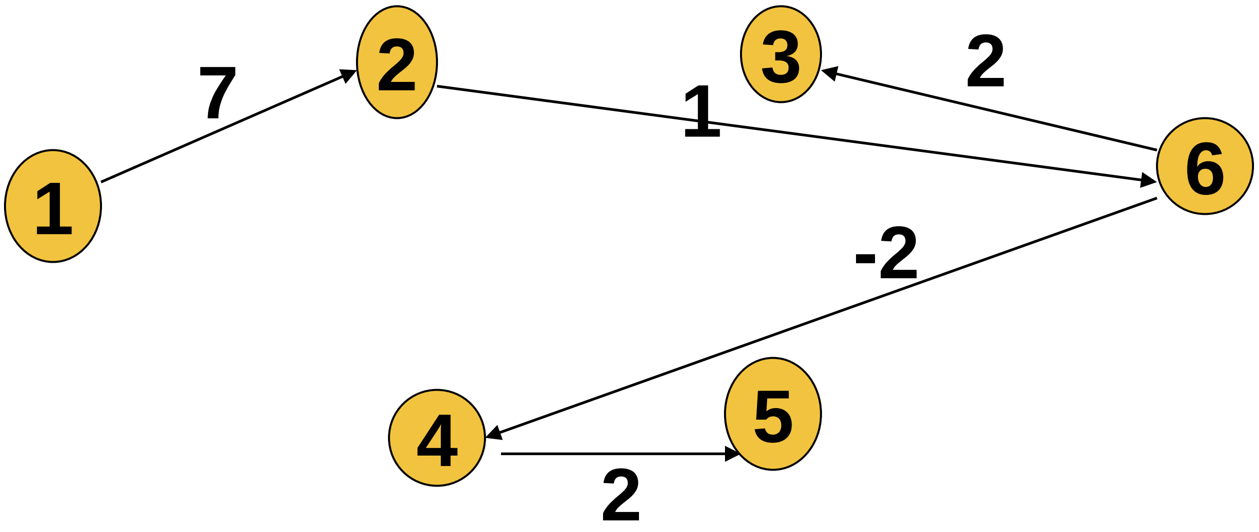




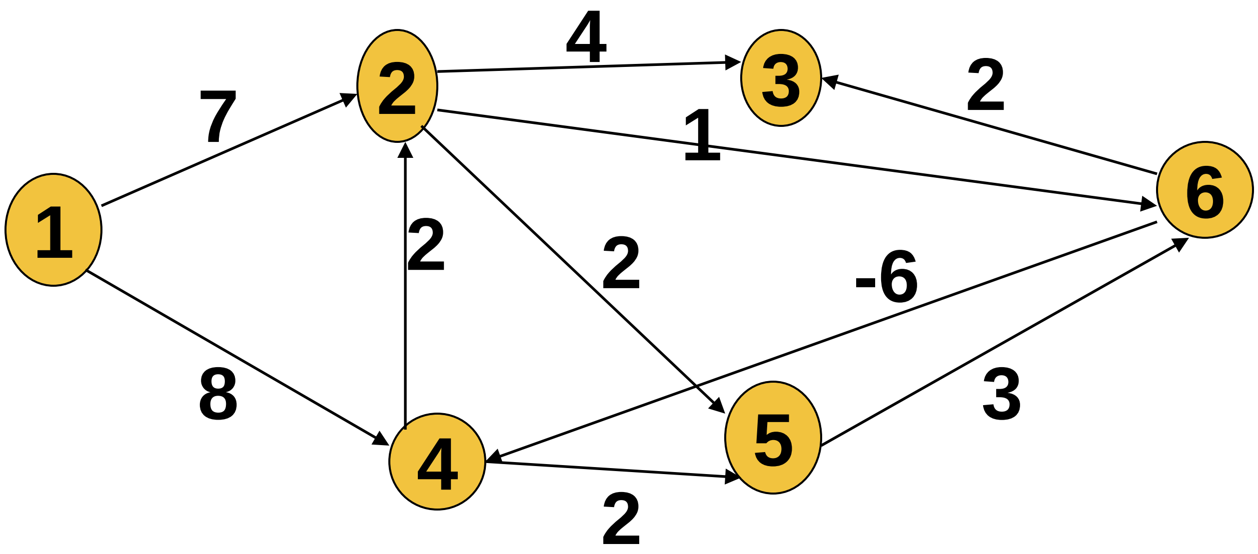
i	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)
5	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)

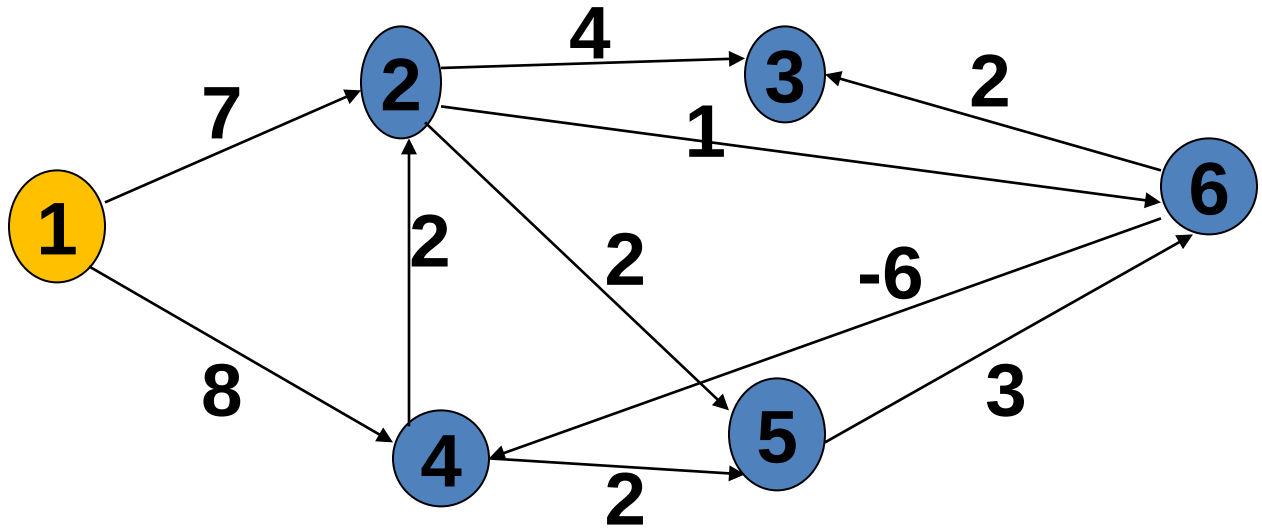
4	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)
5	0	(7,1)	(10,6)	(6,6)	(8,4)	(8,2)

Ta có $L_i(v)$ ổn định nên cây đường đi là



Ví dụ. Dùng thuật toán Ford-Bellman để tìm đường đi ngắn nhất từ 1 cho đến các đỉnh còn lại





k	1	2	3	4	5	6
0	0	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
1	0	(7,1)	(∞,-)	(8,1)	(∞,-)	(∞,-)
2	0	(7,1)	(11,2)	(8,1)	(9,2)	(8,2)
3	0	(7,1)	(10,6)	(2,6)	(9,2)	(8,2)
4	0	(4,4)	(10,6)	(2,6)	(4,4)	(8,2)
5	0	(4,4)	(8,2)	(2,6)	(4,4)	(5,2)
6	0	(4,4)	(7,6)	(-1,6)	(4,4)	(5,2)

5	0	(4,4)	(8,2)	(2,6)	(4,4)	(5,2)
6	0	(4,4)	(7,6)	(-1,6)	(4,4)	(5,2)

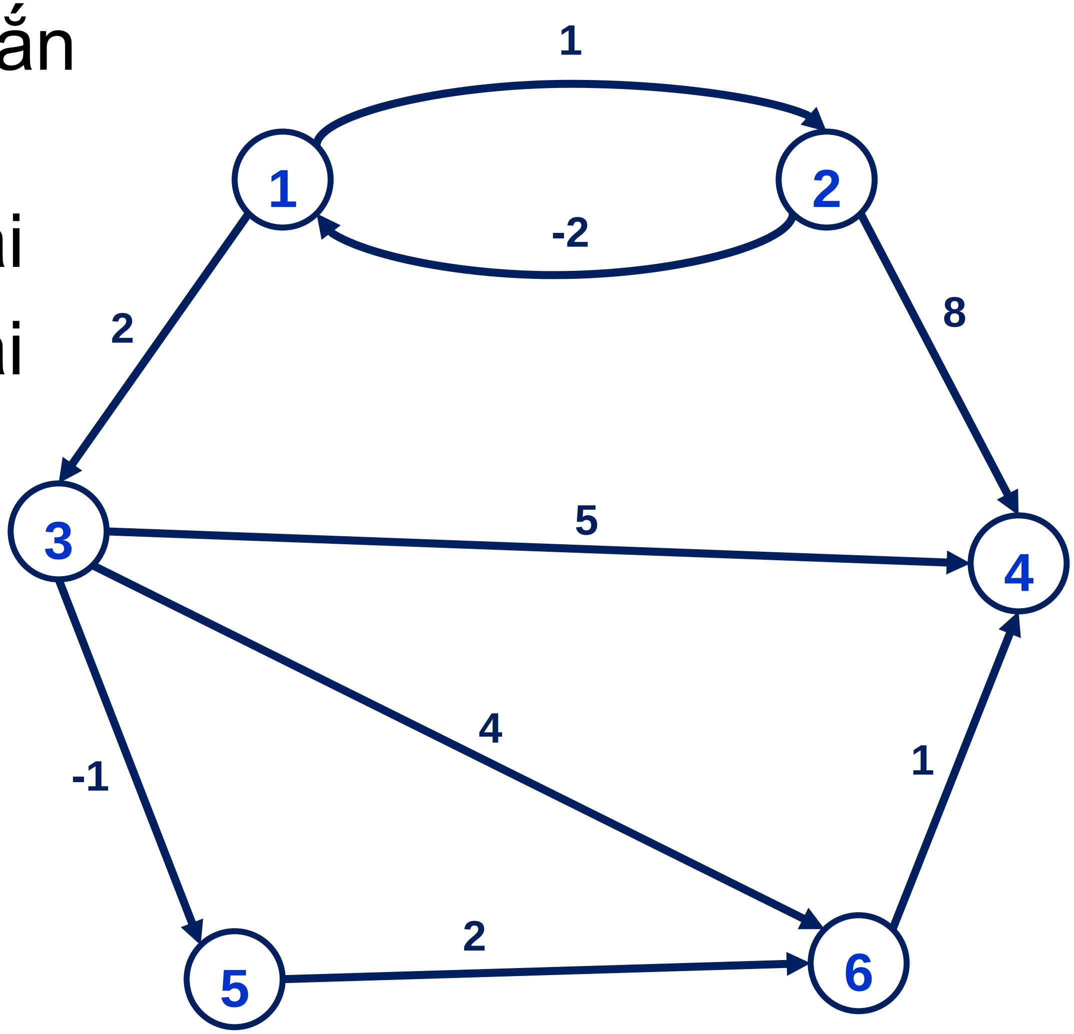
i = n = 6 . $L_i(v)$ chưa ổn định nên đồ thị có mạch âm. Chẳng hạn:

4→2→6→4 có độ dài -3

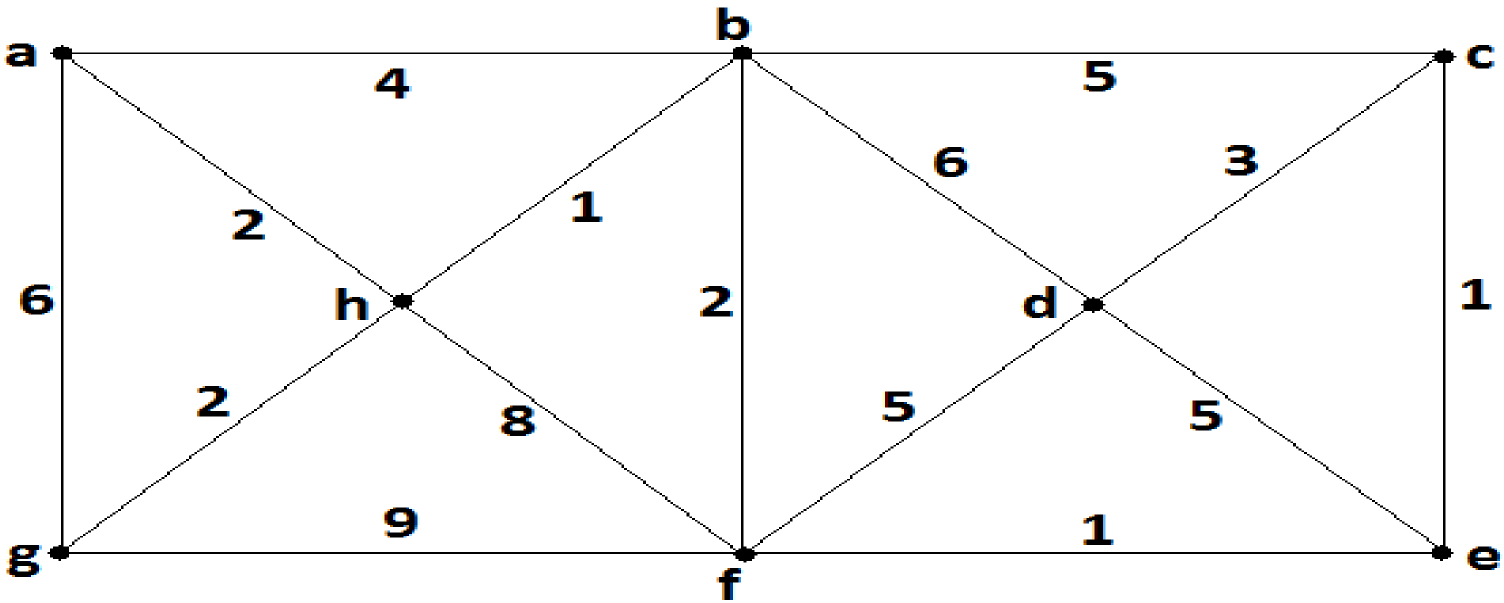
Ví dụ. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh

a) 1 đến các đỉnh còn lại

b) 3 đến các đỉnh còn lại



Ví dụ. Cho *G* là đơn đồ thị vô hướng liên thông có trọng số như sau



a) Đường đi ngắn nhất từ đỉnh *a* tới đỉnh *e*.

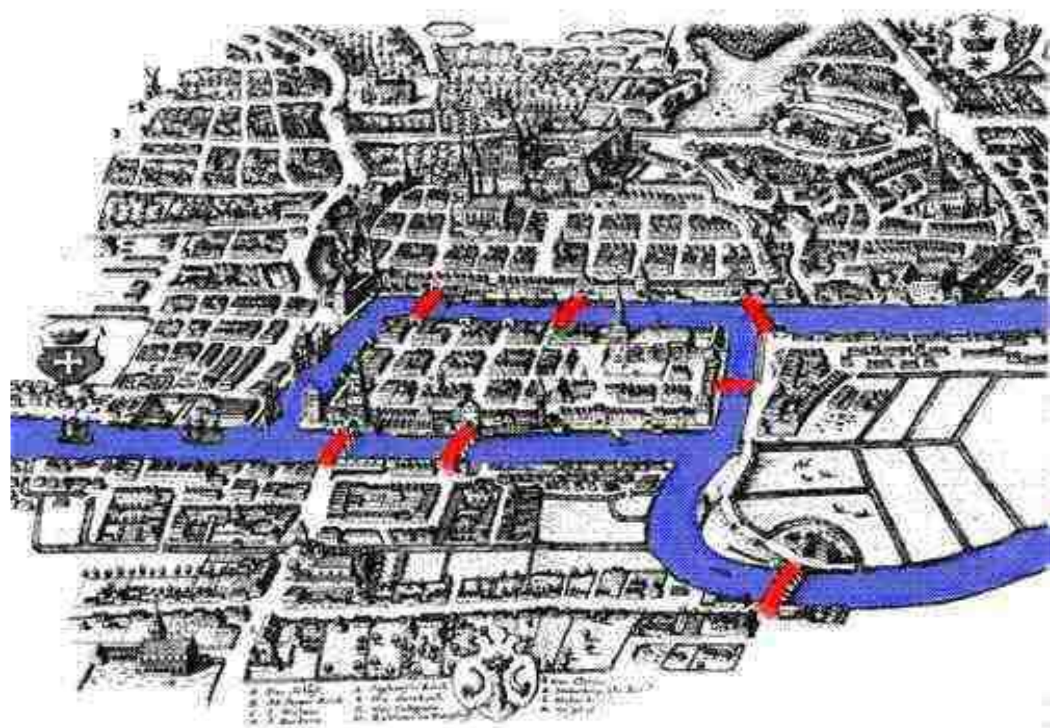
b) Đường đi ngắn nhất từ đỉnh *a* tới đỉnh *d* nhưng phải đi qua đỉnh *e*.

2. ĐỒ THỊ EULER

Giới thiệu

Leonhard Euler

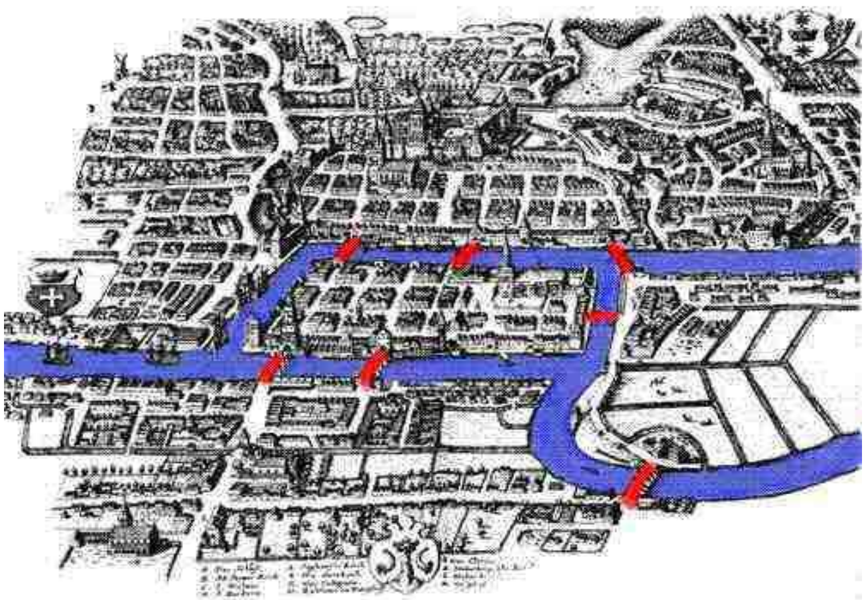
(1707 – 1783)

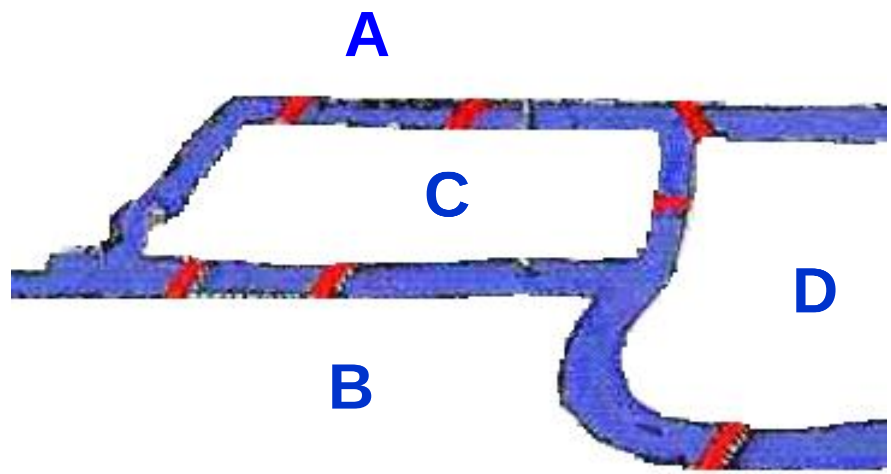


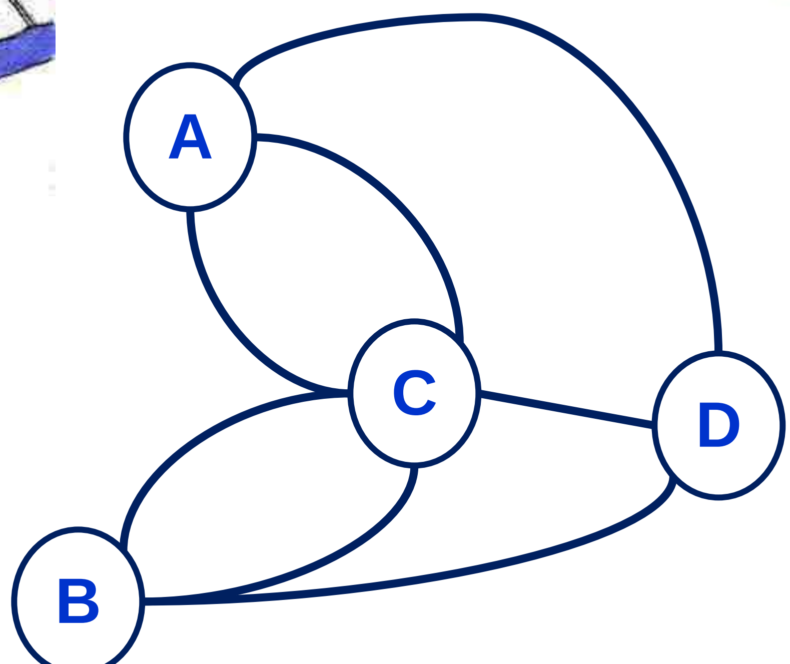
Thành phố Konigsberg bị chia thành 4 vùng do 2 nhánh của 1 dòng sông. Có 7 chiếc cầu nối những vùng này với nhau.

Bài toán: Xuất phát từ một vùng đi dạo qua mỗi chiếc cầu đúng một lần và trở về nơi xuất phát.

Năm 1736, nhà toán học Euler đã mô hình bài toán nầy bằng một đồ thị vô hướng với mỗi đỉnh ứng với một vùng, mỗi cạnh ứng với một chiếc cầu




A
C
D
B

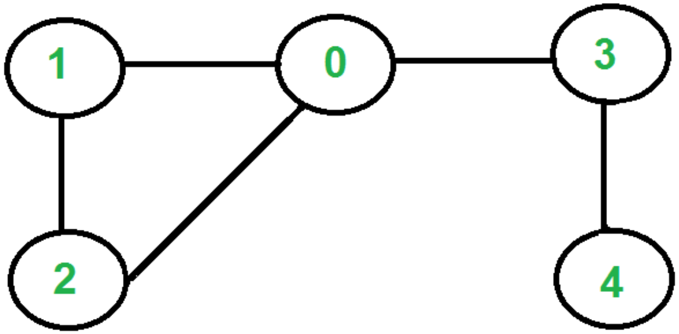

A
C
D
B

Định nghĩa

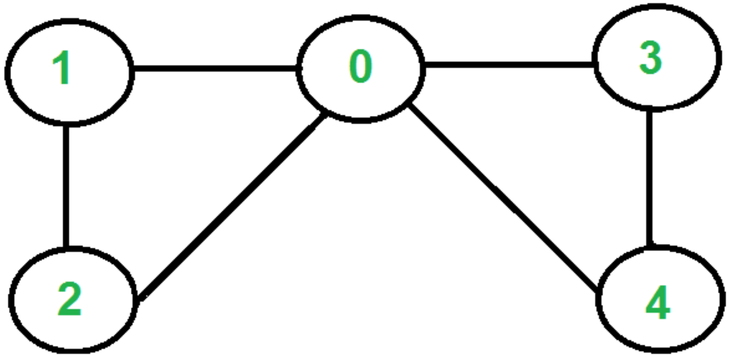
Đường đi Euler là đường đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần.

Chu trình Euler đường đi Euler có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối.

Đồ thị Euler là đồ thị có chứa một chu trình Euler.



Có đường đi Euler là **4 3 0 1 2 0**



Có chu trình Euler là **4 3 0 1 2 0 4**

Định lý Euler

Cho G=(X, E) là đồ thị vô hướng liên thông. Khi đó

a) G là đồ thị Euler ⇔ Tất cả các đỉnh của đồ thị G đều có bậc chẵn.

b) G có đường đi Euler và không có chu trình Euler ⇔ G có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

Nhận xét. Nếu G là đồ thị vô hướng liên thông chỉ có **2k** đỉnh bậc lẻ thì ta có thể vẽ đồ thị bằng **k** nét.

Định lý Euler

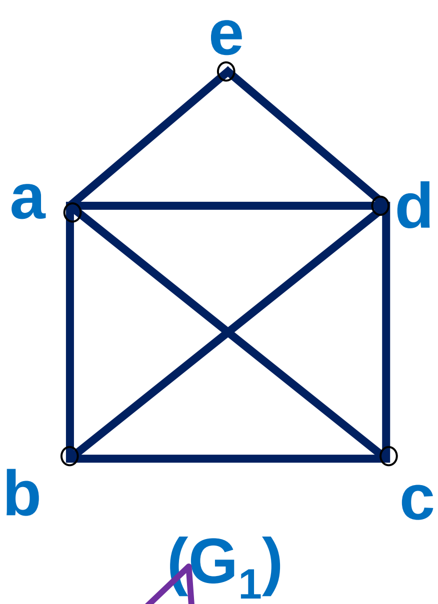
Cho G=(X, E) là đồ thị có hướng liên thông mạnh. Khi đó

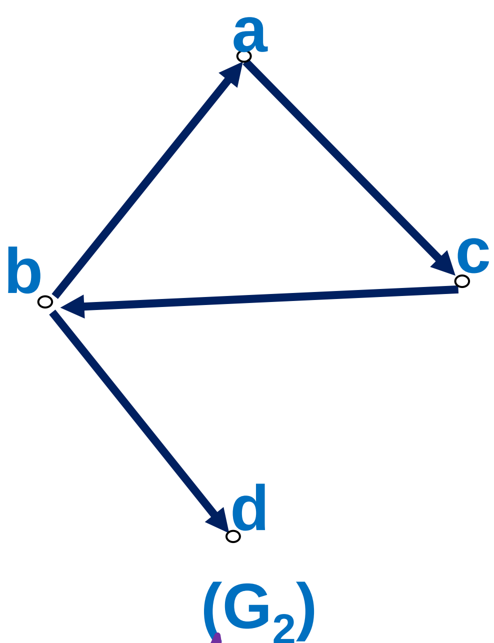
a) G là đồ thị Euler $\Leftrightarrow$ $deg^+(x)=deg^-(x)$ $\forall x \in X$.

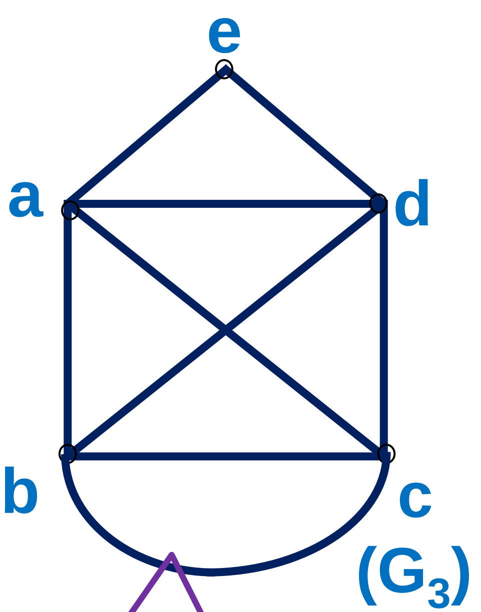
b) G có đường đi Euler và không có chu trình Euler $\Leftrightarrow$ G có 2 đỉnh u, v sao cho:

- $deg^+(u) = deg^-(u) + 1$
- $deg^-(v) = deg^+(v) + 1$
- $d^+(x)=d^-(x)$ với mọi x khác u và v

Ví dụ







Liên thông và có 2 đỉnh bậc lẻ → có đường đi Euler:

bacdaedbc

Có đường đi Euler:

bacbd

Liên thông và các đỉnh đều có bậc chẵn. Suy ra có chu trình Euler:

bacdaedbcb

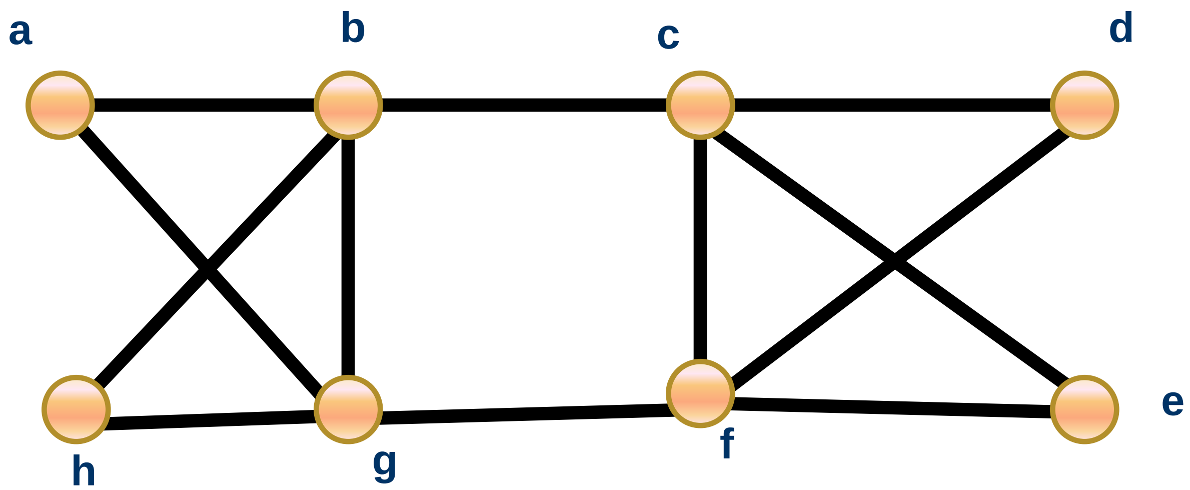
Thuật toán Fleurey

Dùng để tìm chu trình Euler của đồ thị từ một đỉnh bất kỳ, ta áp dụng 2 quy tắc sau:

Quy tắc 1. Xóa các cạnh đã đi qua và các đỉnh cô lập nếu có

Quy tắc 2. Không bao giờ đi qua một cầu trừ khi không còn cách đi nào khác.

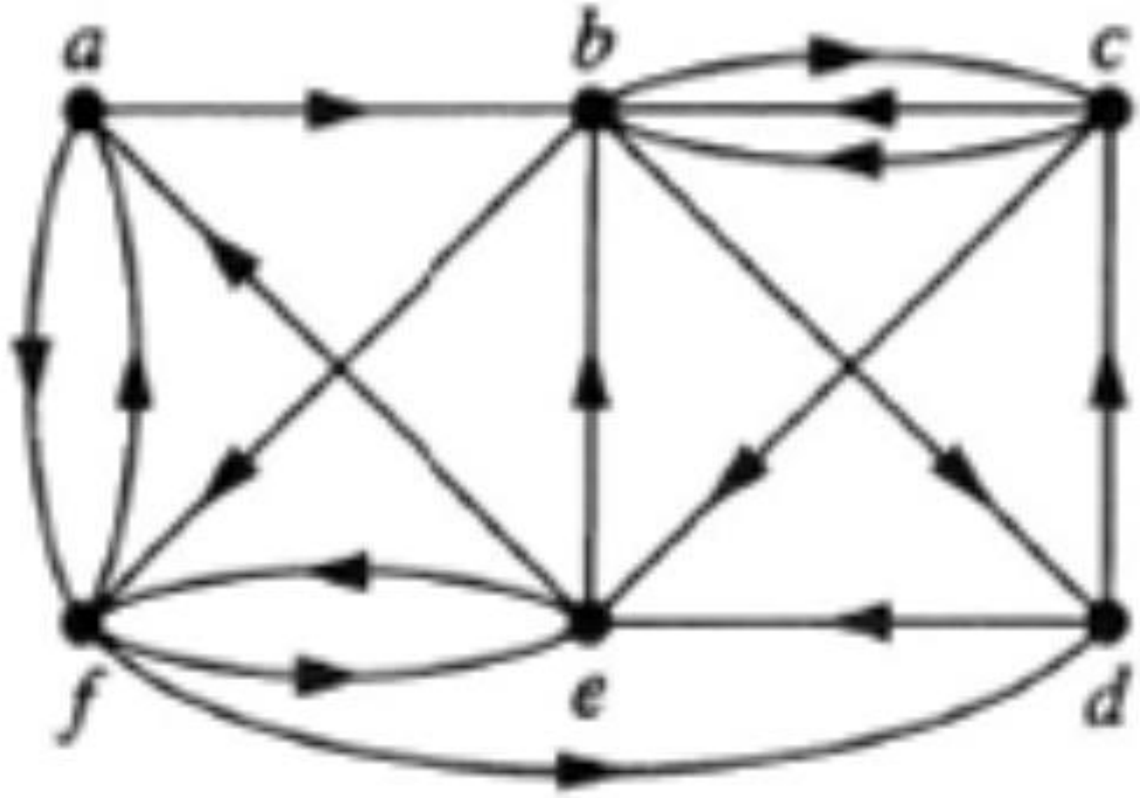
Ví dụ. Đồ thị sau có là đồ thị Euler không. Nếu có, hãy tìm một chu trình Euler



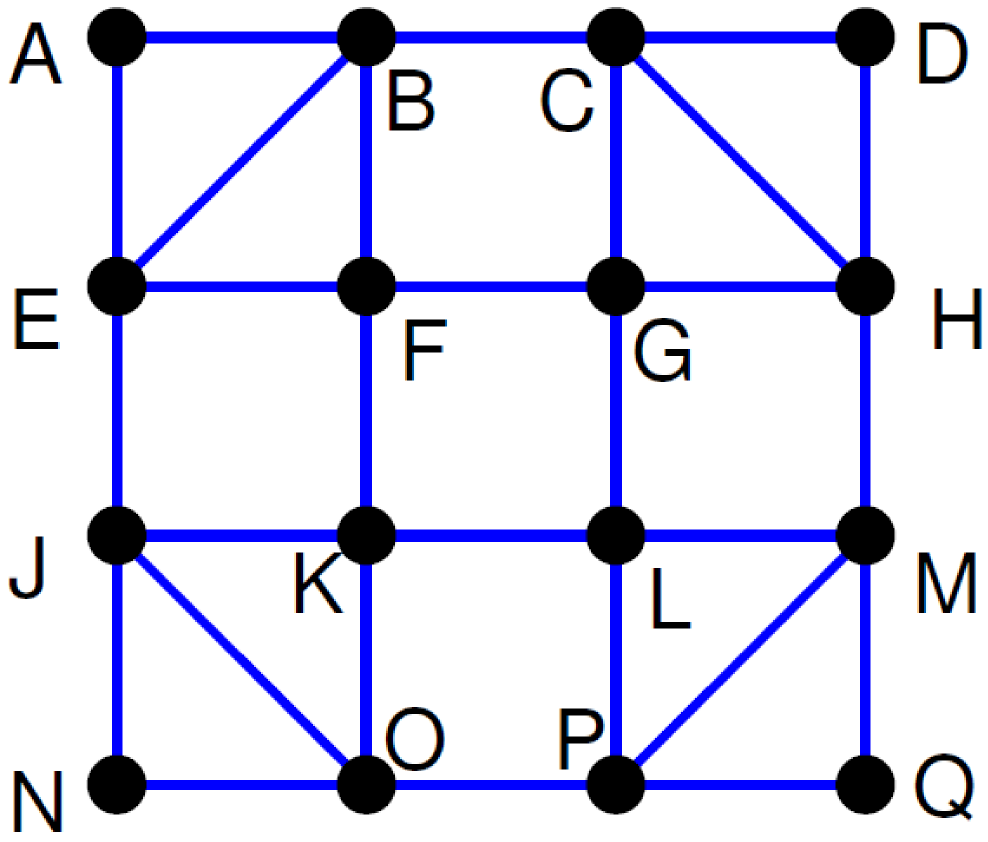
Đáp án. Chu trình Euler là:

a b c f d c e f g h b g a

Ví dụ. Đồ thị sau có chu trình hay đường đi Euler không? Nếu có, hãy xác định chúng

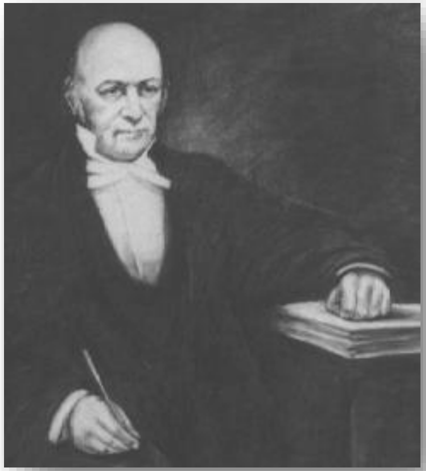


Ví dụ. Đồ thị sau có là đồ thị Euler không. Nếu có, hãy tìm một chu trình Euler



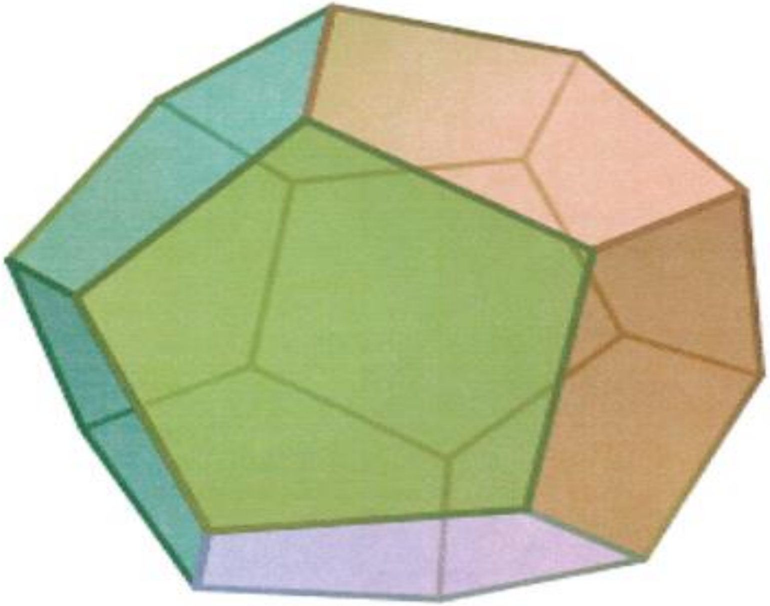
3. ĐỒ THỊ HAMILTON

Giới thiệu

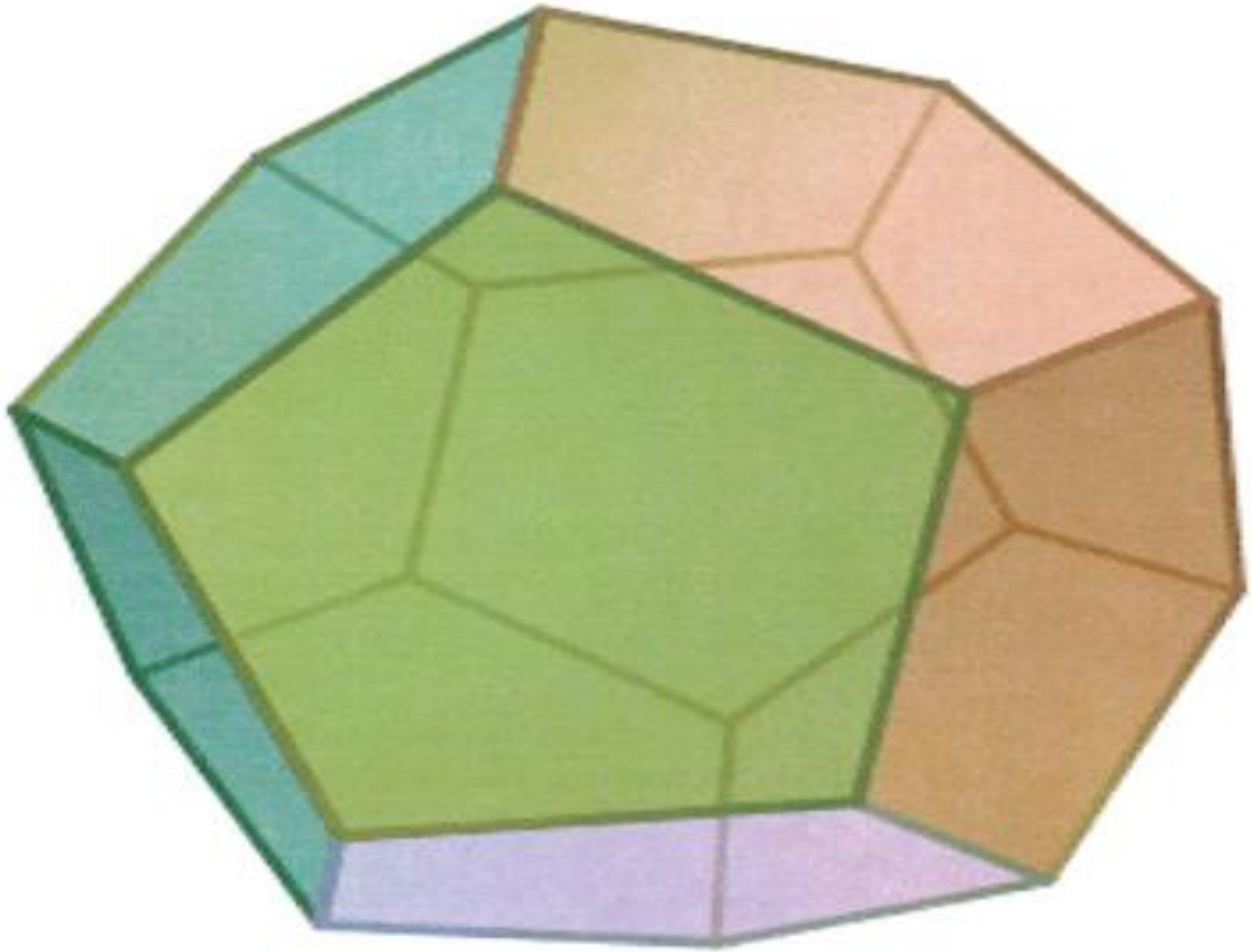


Sir William Rowan Hamilton

(1805-1865)



Năm 1857 W. R. Hamilton đưa trò chơi sau đây: Trên mỗi đỉnh trong số 20 đỉnh của khối đa diện ngũ giác đều 12 mặt ghi tên một thành phố trên thế giới. Hãy tìm cách đi bằng các cạnh của khối đa diện để qua tất cả các thành phố, mỗi thành phố đúng một lần, sau đó trở về điểm xuất phát.



Một số bài toán

- Tổ chức tour du lịch sao cho người du lịch thăm quan mỗi thắng cảnh trong thành phố đúng một lần
- ***Bài toán mã đi tuần*:** Cho con mã đi trên bàn cờ vua sao cho nó đi qua mỗi ô đúng một lần.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

H = [8, 10, 1, 7, 9, 2, 11, 5, 3, 12, 6, 4]

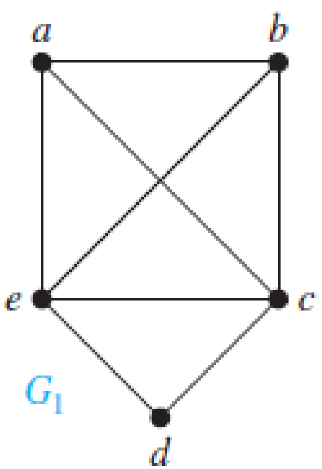
Đường Hamilton biểu diễn nước đi của con mã trên bàn cờ 3x4

Định nghĩa

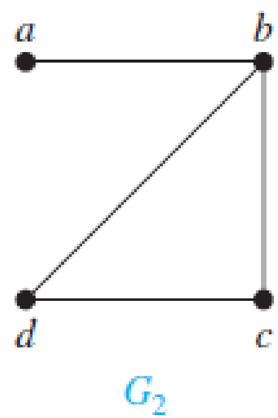
Định nghĩa. ***Đường đi Hamilton*** là đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị mỗi đỉnh đúng một lần.

a. Định nghĩa tương tự cho **chu trình Hamilton**

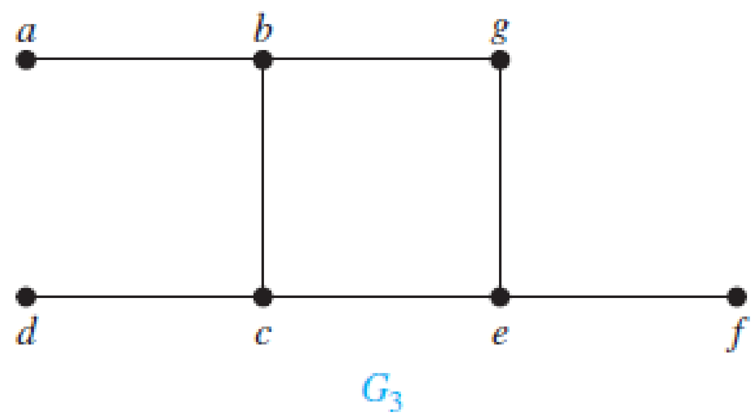
b. Đồ thi gọi là ***đồ thị Hamilton*** nếu nó có chu trình Hamilton



G_1 có đường đi và chu trình Hamilton



G_2 có đường đi nhưng không có chu trình Hamilton



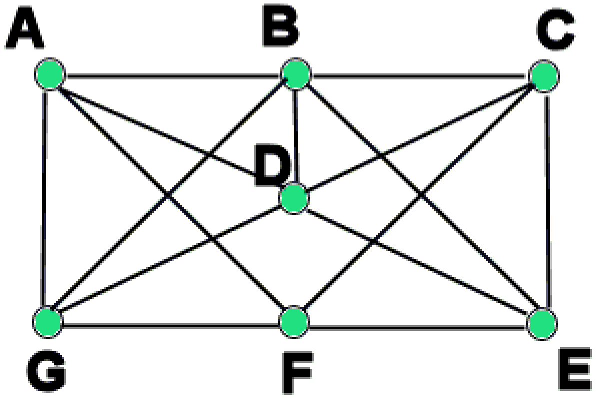
G_3 không có đường đi và không có chu trình Hamilton

Một số điều kiện đủ

Định lý. Cho G =(V, E) là đồ thị đơn vô hướng có số đỉnh n ≥ 3. Khi đó

- Nếu $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ với u và v là hai đỉnh không kề nhau tuỳ ý thì G là Hamilton.
- Nếu $\deg(u) \geq \dfrac{n}{2}$ với mọi đỉnh u thì G là Hamilton

Ví dụ. Đây là đồ thị Hamilton?



Quy tắc xây dựng chu trình Hamilton

Quy tắc để xây dựng một chu trình Hamilton H hoặc chỉ ra đồ thị vô hướng không là Hamilton

Quy tắc 1. Tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 phải ở trong H.

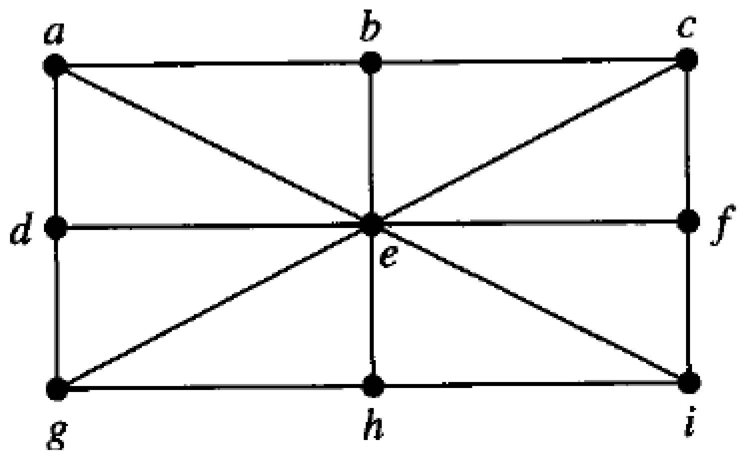
Quy tắc 2. Không có chu trình con nào được tạo thành trong quá trình xây dựng H.

Quy tắc 3. Khi chu trình Hamilton mà ta đang xây dựng đi qua đỉnh i thì xoá tất cả các cạnh kề với i mà ta chưa dùng. Điều này lại có thể cho ta một số đỉnh bậc 2 và ta lại dùng quy tắc 1.

Quy tắc 4. Không có đỉnh cô lập hay cạnh treo nào được tạo nên sau khi áp dụng quy tắc 3.

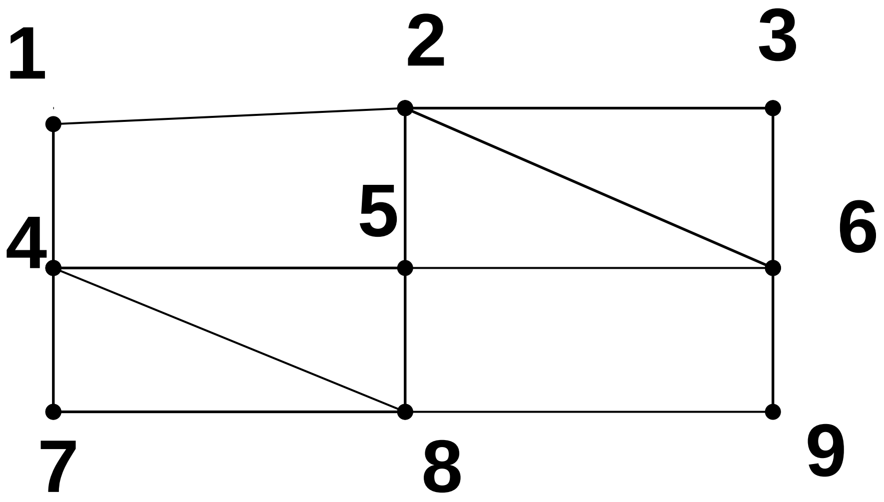
Một số ví dụ

Ví dụ. Đồ thị sau có phải là đồ thị Hamilton không? Nếu có hãy tìm chu trình Hamilton



Đáp án. Có, ví dụ **a, b, c, e, f, i, h, g, d, a.**

Ví dụ. Đồ thị sau có phải là đồ thị Hamilton không?



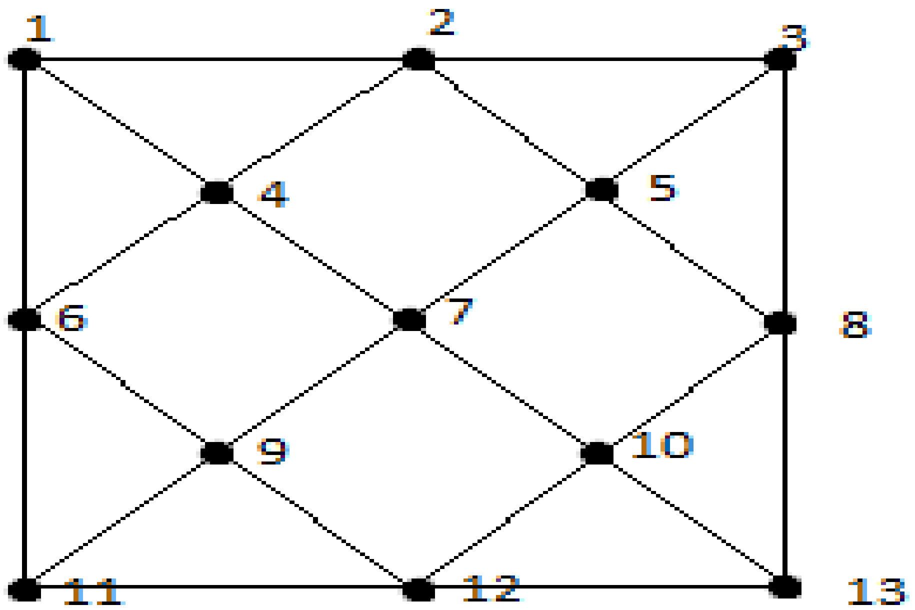
Giải. Giả sử G có chu trình Hamilton H, theo quy tắc 1, tất cả các cạnh kề với đỉnh bậc 2 đều ở trong H:

12, 14, 23, 36, 47, 78, 69, 89.

Khi đó ta có chu trình con là: **1, 2, 3, 6, 9, 8, 7, 4, 1.**

Vậy G không là đồ thị Hamilton

Ví dụ. Đồ thị sau có phải là đồ thị Hamilton không? Nếu có hãy tìm chu trình Hamilton



Ví dụ. Đồ thị sau có phải là đồ thị Hamilton không?