Chương 0: Giải tích tổ hợp

Nguyễn Thị Mộng Ngọc
ngtmngoc@hcmus.edu.vn

XSTK
N.T. M. Ngọc

Khái niệm về tập hợp

- Tập hợp là một khái niệm không có định nghĩa. Tập hợp có thể hiểu tổng quát là sự tụ tập của một số hữu hạn hay vô hạn các đối tượng nào đó. Các đối tượng này đgl phần tử của tập hợp.
- Ta thường dùng các chữ cái in hoa $A, B, Cm, \ldots$ để kí hiệu tập hợp.
- Tập hợp không có phần tử nào gọi là tập rỗng; kí hiệu $\emptyset$.
- Nếu a là phần tử thuộc tập A ta kí hiệu $a \in A$. Ngược lại, a là phần tử không thuộc tập A ta kí hiệu $a \notin A$.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Tập hợp
2. Giải tích tổ hợp
2.1 Quy tắc đếm cơ bản
2.2 Chỉnh hợp
2.3 Hoán vị
2.4 Tổ hợp

Biễu diễn tập hợp

Có hai cách biễu diễn tập hợp:

- Liệt kê các phần tử của nó.
  Ví dụ 1.1: Tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn 7 là
  $$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
- Chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp đó.
  Ví dụ 1.2: Tập hợp các số thực lớn hơn 0 và bé hơn 1 là
  $$C = \{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad 0 < x < 1\}$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Tập hợp
2. Giải tích tổ hợp
2.1 Quy tắc đếm cơ bản
2.2 Chỉnh hợp
2.3 Hoán vị
2.4 Tổ hợp

Quan hệ giữa các tập hợp

- Tập hợp con: Tập hợp A là con tập hợp B nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B. Kí hiệu: $A \subset B$ hoặc $B \supset A$.
  $$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$
- Tập hợp bằng nhau: Hai tập hợp A và B bằng nhau nếu mỗi phần tử của tập hợp A đều thuộc tập hợp B và ngược lại.
  $$A = B \Leftrightarrow (x \in A \;\; \text{và} \;\; x \in B)$$

- Giao của hai tập hợp : Giao của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử đồng thời thuộc cả hai tập hợp này. Kí hiệu $A \cap B$.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \;\; \text{và} \;\; x \in B)$$

- Hợp của hai tập hợp : Hợp của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp này. Kí hiệu $A \cup B$.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \;\; \text{hoặc} \;\; x \in B)$$

- Hiệu của hai tập hợp : Hiệu của hai tập hợp A và B đã cho là tập hợp các phần tử thuộc tập hợp A mà không thuộc tập hợp B . Kí hiệu $A \backslash B$.

$$A \backslash B \Leftrightarrow (x \mid x \in A \;\; \text{và} \;\; x \notin B)$$

Các phép toán trên các tập hợp

- Tính giao hoán : .

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cup B = B \cup A$$

- Tính kết hợp:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

- Tính phân phối:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Công thức De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Quy tắc nhân

Để hoàn thành một công việc, ta phải thực hiện một dãy liên tiếp k hành động,
- hành động thứ nhất: có 1 trong n_1 cách thực hiện
- hành động thứ hai: có 1 trong n_2 cách thực hiện
...
- hành động thứ k: có 1 trong n_k cách thực hiện
Vậy số cách hoàn thành công việc nói trên là:

$$n = n_1 n_2 \dots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$$

Ví dụ

Để đi từ thành phố A tới thành phố C phải qua thành phố B. Có 3 cách đi từ A tới B và có 2 cách đi từ B tới C. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C?
Để thực hiện việc đi từ A tới C ta phải thực hiện một dãy liên tiếp hành động:
- hành động I: chọn cách đi từ A tới B có $n_1 = 3$ *cách*
- hành động II: chọn cách đi từ B tới C có $n_2 = 2$ *cách*
Vậy số cách đi từ A đến C là: $n = 3.2 = 6$ *cách*

Ví dụ

∘Ví dụ khác: Các nhóm I, II, III, IV lần lượt có: $8, 9, 10, 12$ sinh viên. Cần chọn 4 sinh viên, mỗi nhóm 1 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

....
....
....

∘Ví dụ khác: Dùng các chữ số: $1, 2, 3, 4, 5$ để viết các số x gồm 3 chữ số khác nhau. Hỏi có thể viết được tất cả bao nhiêu số x?

....
....
....

Quy tắc cộng

Để hoàn thành một công việc, có thể chọn một trong k phương án,
- phương án thứ nhất: có 1 trong n_1 cách thực hiện
- phương án thứ hai: có 1 trong n_2 cách thực hiện
...
- phương án thứ k: có 1 trong n_k cách thực hiện

Vậy số cách hoàn thành công việc nói trên là:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Ví dụ

Một nhóm sinh viên gồm 2 sinh viên Long An, 3 sinh viên Tiền Giang và 3 sinh viên Long Xuyên. Cần chọn 2 sinh viên cùng tỉnh tham gia đội bóng bàn trường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

- *phương án I: chọn 2 sinh viên Long An có* $n_1 = 1$ *cách*
- *phương án II: chọn 2 sinh viên Tiền Giang có* $n_2 = 3$ *cách*
- *phương án III: chọn 2 sinh viên Long Xuyên có* $n_3 = 3$ *cách*

Vậy số cách chọn theo yêu cầu là $n = 1 + 3 + 3 = 7$ *cách*

∘Ví dụ khác: Hoặc là 1 giảng viên của khoa XSTK, hoặc là 1 sinh viên của khoa XSTK sẽ là đại diện của trường. Như vậy nếu có 19 giảng viên, 415 sinh viên thì có bao nhiêu cách chọn lựa đại diện?

....
....

∘Ví dụ khác: Một sinh viên chọn tiểu luận trong nhóm 4 ngành: kế toán, quản trị kinh doanh, tài chính ngân hàng, kỹ thuật máy tính. Mỗi nhóm có số lượng đề tài tương ứng 10, 11, 12, 10 Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

....
....
....

Lưu ý

- Bộ (nhóm) có thứ tự: khi đổi vị trí các phần tử khác nhau của bộ này ta nhận được bộ khác.
- Bộ (nhóm) không có thứ tự: khi đổi vị trí các phần tử khác nhau của bộ này ta không nhận được bộ khác.
- Bộ (nhóm) lặp: các phần tử của bộ có mặt nhiều lần trong bộ.
- Bộ (nhóm) không lặp: Các phần tử của bộ chỉ có mặt một lần trong bộ.

Ví dụ

Dùng các chữ số: $0, 1, 2, 3, 4$ để viết các số có 3 chữ số.

- Các chữ số có lặp
  - Đầu tiên, chọn chữ số hàng trăm có $n_1 = 4$ cách chọn.
  - Tiếp theo, chọn chữ số hàng chục có $n_2 = 5$ cách chọn.
  - Sau cùng, chọn chữ số hàng đơn vị có $n_3 = 5$ cách chọn.

  Vậy có $n = 4.5.5 = 100$ số có 3 chữ số có lặp.
- Các chữ số không lặp
  - Đầu tiên, chọn chữ số hàng trăm có $n_1 = 4$ cách chọn.
  - Tiếp theo, chọn chữ số hàng chục có $n_2 = 4$ cách chọn.
  - Sau cùng, chọn chữ số hàng đơn vị có $n_3 = 3$ cách chọn.

  Vậy có $n = 4.4.3 = 48$ số có 3 chữ số không lặp.

Chỉnh hợp (không lặp)

○ Định nghĩa: Chỉnh hợp chập k của n phần tử ($k \leq n$) là một bộ (nhóm) có thứ tự gồm k phần tử khác nhau được chọn từ n phần tử đã cho.

Số chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chỉnh hợp (không lặp)

○ Số chỉnh hợp chập k của n có thể được xây dựng qua k bước kế tiếp như sau:
- Chọn phần tử đầu: có n khả năng,
- Chọn phần tử thứ hai: có $n - 1$ khả năng,
...
- Chọn phần tử thứ k: có $n - k + 1$ khả năng,
Vậy theo quy tắc nhân, số chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ

Trong lớp học có 100 sinh viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một lớp trưởng và một lớp phó?

Một cách chọn một lớp trưởng và một lớp phó là một nhóm có hai phần tử có thứ tự và không lặp. Nên, số cách chọn là số chỉnh hợp chập 2 *của* 100*:*

$$\mathbf{A}_{100}^{2} = \frac{100!}{(100-2)!} = 100.99 = 9900 \text{ cách}.$$

Ví dụ khác

○Ví dụ: Cho $\boldsymbol{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên bao gồm hai chữ số phân biệt được thành lập từ $\boldsymbol{E}$?

....
....
....

○Ví dụ: Cho $\boldsymbol{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên bao gồm bốn chữ số phân biệt được thành lập từ $\boldsymbol{E}$?

....
....
....

Chỉnh hợp lặp

Trong định nghĩa chỉnh hợp ta đòi hỏi mỗi phần tử chỉ được có mặt trong nhóm không quá một lần. Nếu bỏ đi điều kiện này, ta có chỉnh hợp lặp.

○ Định nghĩa: Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ (nhóm) có thứ tự gồm k phần tử được chọn từ n phần tử đã cho, trong đó các phần tử trong nhóm có thể lặp lại $2, 3, \ldots, k$ lần.

Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử

$$\hat{\mathcal{A}}_n^k = n^k$$

○ Số chỉnh hợp lặp chập k của n có thể được xây dựng qua k bước kế tiếp như sau:
- Chọn phần tử đầu: có n khả năng,
- Chọn phần tử thứ hai: có n khả năng,
...
- Chọn phần tử thứ k: có n khả năng,

Vậy theo quy tắc nhân, số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là:

$$\hat{\mathcal{A}}_n^k = n^k$$

○ Chú ý: Trong chỉnh hợp không lặp thì $k \leq n$ nhưng trong chỉnh hợp lặp thì có thể $k > n$.

Ví dụ

○Ví dụ : Cho $\boldsymbol{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên bao gồm bốn chữ số được thành lập từ $\boldsymbol{E}$?

Số các số tự nhiên gồm 4 chữ số được thành lập từ **E** *là:* $\mathcal{A}_5^4 = 5^4 = 625$ *số.*

○*Ví dụ khác: Xếp ngẫu nhiên 3 cuốn sách khác nhau vào 2 ngăn kéo* N_2, N_1. *Hỏi có bao nhiêu cách xếp?*

....

....

○*Ví dụ khác: Có bao nhiêu cách sắp xếp 15 người lên tàu lửa có 3 toa?*

....

....

Hoán vị

○ Định nghĩa: Hoán vị của n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử đó.

Số hoán vị của n phần tử

$$\mathcal{P}_n = n(n-1)\ldots 2.1 = n!$$

○ Chú ý:
Hoán vị n phần tử cũng là chỉnh hợp n lấy n.

○ Quy ước: $0! = 1$

Ví dụ

○Ví dụ: Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 sinh viên A, B, C ngồi cùng một bàn học có 3 chỗ ngồi?
Số cách sắp xếp là $\mathcal{P}_3 = 3! = 6$

○*Ví dụ khác: Có 6 người xếp hàng ngang để chụp hình. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp kiểu khác nhau?*

....

....

Tổ hợp

○ Định nghĩa: Tổ hợp chập k của n phần tử $k \leq n$ là một bộ (nhóm) không kể thứ tự gồm k phần tử khác nhau được chọn từ n phần tử đã cho. *Ta có thể coi tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con có k phần tử của n phần tử đó.*
○ Một tổ hợp khác với chỉnh hợp ở yếu tố thứ tự.

Số tổ hợp (không lặp) chập k của n phần tử

$$\mathcal{C}_n^k = \frac{\mathcal{A}_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

○ Ví dụ: Mỗi đề thi gồm 3 câu hỏi lấy từ bộ đề 25 câu hỏi cho trước, ta lập được

$$\mathcal{C}_3^{25} = \frac{25!}{3!(25-3)!} = 2300$$

đề thi. Vì mỗi đề thi là một nhóm có 3 câu hỏi không có thứ tự và không lặp.

○ Chú ý: $C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow C_n^0 = C_n^n = 1$

Nhị thức Newton:

$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + \cdots + C_n^0 b^n$
$= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

Các hệ số trong khai triển nhị thức Newton được xác định từ tam giác Pascal

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & . & & . & & . & & . & & . & \\
C_n^0 & & C_n^1 & & \cdots & & \cdots & & C_n^{n-1} & & C_n^n
\end{array}
$$

Ví dụ

○Ví dụ : Có 5 sinh viên, ta muốn chọn 3 người lập thành một nhóm. Hỏi có bao nhiêu nhóm khác nhau?

Số nhóm như yêu cầu là: $C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$

○*Ví dụ khác: Có 10 đội banh thi đấu vòng tròn một lượt. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu tất cả ?*

....

○*Ví dụ khác: Lớp có 22 sinh viên theo hướng thống kê trong đó có 10 nam và 12 nữ. Ta chọn ngẫu nhiên 9 sinh viên trong đó có 4 nam và 5 nữ. Tính số khả năng có thể xảy ra?*

....

....

....

Tổ hợp lặp

○ Định nghĩa: Tổ hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ (nhóm) không kể thứ tự gồm k phần tử được chọn từ n phần tử đã cho, trong đó các phần tử trong nhóm có thể lặp lại $2, 3, \ldots, k$ lần.

Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử

$$\hat{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$$

Ví dụ

Một trại giống gà có ba loại gà A, B, C (số lượng mỗi loại đều lớn hơn 10 con). Một khách hàng vào định mua 10 con. Hỏi có bao nhiêu cách mua?

Ta thấy, mỗi một cách mua 10 con gà chính là một tổ hợp lặp chập 10 của 3 phần tử.
Số cách mua là: $\hat{C}_3^{10} = C_{12}^{10} = \frac{12!}{10!(2)!} = 66$