TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ & ĐÁP ÁN

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

ĐỀ THI CUỐI KỲ II NĂM 2019-2020 (Lớp 19CTT2)

Môn: Vi tích phân 2B

(Đáp án – Thang điểm)

Câu	**Lời giải**	Điểm
1	**Bài 1** (2.5đ)	
	(a) Khảo sát sự tồn tại của các giới hạn sau $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}; \qquad \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy^3}{x^4+2y^4}. \qquad (1)$$ (b) Khảo sát sự liên tục của hàm F tại mỗi điểm thuộc $\mathbb{R}^2$ với $$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x;y) = (0;0), \\ 1 & \text{nếu } (x;y) \neq (0;0). \end{cases}; \quad g(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4+2y^4} & \text{nếu } (x;y) = (0;0), \\ 0 & \text{nếu } (x;y) \neq (0;0). \end{cases}$$	
1a	Vì $\frac{2}{2} + \frac{1}{2} > 1$ nên theo Định lý Sertöz, giới hạn $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ tồn tại. Hơn nữa, giới hạn này bằng 0. (Sinh viên không cần chỉ ra giá trị giới hạn nhưng giá trị này được dùng để giải quyết câu hỏi phía sau.)	0.5
	Vì $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \leq 1$ nên theo Định lý Sertöz, giới hạn $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy^3}{x^4+2y^4}$ không tồn tại.	0.5
1b	Tại $(0;0)$, dựa vào kết quả 1a), ta có $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y) = 0 \neq f(0,0)$ nên f không liên tục tại $(0,0)$.	0.25
	Tại $(x_0;y_0) \neq (0;0)$, f liên tục tại $(x_0;y_0)$. (Sinh viên khẳng định và không cần chứng minh.)	0.25
	Tại $(0;0)$, ta có $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} g(x,y)$ không tồn tại nên g không liên tục tại $(0,0)$.	0.25
	Tại $(x_0;y_0) \neq (0;0)$, g liên tục tại $(x_0;y_0)$. (Sinh viên khẳng định và không cần chứng minh.)	0.25
	Một số nhận xét và hướng chấm điểm. 1. Một số lỗi sai của sinh viên: • $\mathbb{R} \setminus (0,0)$	
2	**Bài 2** (2.5đ)	

	(a) Cho hàm số $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{nếu } (x;y) = (0;0) \end{cases}$ Hãy dùng định nghĩa đạo hàm riêng (dùng giới hạn) để tìm $f_x(0,0)$ và $f_y(0,0)$. (b) Cho hàm số g định bởi $g(x;y) = x - xy\cos(\pi y)$. Hãy giải thích sự "tồn tại" phép xấp xỉ tuyến tính của g và tìm tuyến tính hóa của g tại $(1;1)$. (c) Hãy tính xấp xỉ $g(1,05;0,95)$.	
	(Lời giải 2a)	1.5
	Với $x \neq 0$, xét $h(x) := \dfrac{f(x;0)-f(0;0)}{x-0}$. Ta dễ dàng thấy rằng $h(x) = 1$. Do đó, $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$. Vì thế $f_x(0,0)$ tồn tại và $f_x(0;0) = 1$.	0.5
	Vì vai trò của x và y như nhau nên $f_y(0,0)$ cũng tồn tại và $f_y(0;0) = 1$.	0.25
	(Lời giải 2b)	1.25
	Ta có thể thấy $g_x = 1 - y\cos(\pi y)$ và $g_y = -x\cos(\pi y) + \pi xy\sin(\pi y)$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Do đó, tồn tại một xấp xỉ "tốt" cho hàm g quanh điểm $(1;1)$.	0.5
	Hơn nữa, $$g(x;y) \approx L(x;y) = g(1;1) + g_x(1;1)(x-1) + g_y(1;1)(y-1) = 2x + y - 1.$$	0.75
	(Lời giải 2c)	0.5
	Áp dụng xấp xỉ tuyến tính (hay vi phân cấp 1), ta có $$f(1,05;0.95) \approx L(1,05;0.95) = 2,05.$$	0.5
	Một số nhận xét và hướng chấm điểm. 1. 2. Một số sai sót của sinh viên: •	
3	**Bài 3** (2.5đ)	

(a) Hãy tìm giao điểm của hai đường $d:\ y = x+2$ và $(P):\ y = x^2$. Bằng cách đưa về tích phân lặp, hãy tính $\iint_D 2xy\mathrm{d}A$ với D là miền bị bao quanh bởi d và (P).

(b) Tính lại kết quả câu a) bằng định lý Green.

(c) Chứng minh trường vector $\vec{F}(x,y) = \langle 2xy; x^2+3y^2\rangle$ là trường bảo toàn (trường thế) trên $\mathbb{R}^2$.

(d) Tính $\int_{\vec r} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ với $\vec F$ ở câu c) và $\vec r(t) = t\sqrt{t}\vec{i} + 3\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)\vec{j}, t: 0 \to 4$.

(Lời giải 3a)	0.75
Từ phương trình hoành độ giao điểm $x+2 = x^2$, ta tìm ra được hai giao điểm giữa (P) và (d) : $A(-1,1)$ và $B(2,4)$.	0.25
Từ phác thảo (d) và (P), ta tìm ra được $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x\le 2, x^2 \le y \le x+2\right\}$. Áp dụng định lý Fubini, ta thu được $$\iint_D 2xy\mathrm{d}A = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} 2xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\left(x(x+2)^2 - x^5\right)\mathrm{d}x = \frac{45}{4}.$$	0.5
(Lời giải 3b)	0.75
Chọn trường $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ với $P(x,y) = 0$ và $Q(x,y) = x^2y$.	0.25
Áp dụng công thức (định lý) Green với biên ∂D được định hướng dương, ta có $$\begin{aligned}\iint_D 2xy\mathrm{d}A &= \iint_D (Q_x - P_y)\mathrm{d}A = \int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial D} x^2y\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2} x^4\mathrm{d}(x^2) + \int_{2}^{-1} x^2(x+2)\mathrm{d}(x+2) = \frac{45}{4}.\end{aligned}$$	0.5
(Lời giải 3c)	0.5
Trường trơn $\vec{F} = (P,Q)$ thỏa $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ trên miền mở hình sao $\mathbb{R}^2$. Do đó, theo Bổ đề Poincarié, trường $\vec F$ bảo toàn trên D.	0.5
(Lời giải 3d)	0.75
Ta có thể tìm hàm thế f bằng cách giải hệ phương trình đạo hàm riêng $$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy, \\ f_y(x,y) = x^2+3y^2. \end{cases} \quad (2)$$ Từ phương trình thứ nhất của hệ (2), ta tìm được $f(x,y) = x^2y + C(y)$. Suy ra $x^2+3y^2 = f_y = x^2 + C'(y)$. Do đó, $C'(y) = 3y^2$. Chọn $C(y) = y^3$. Do đó, $f(x,y) = x^2y + y^3$ là một hàm thế của trường bảo toàn $\vec F$.	0.5

Vì $\vec{F}$ là trường bảo toàn và nhận f làm hàm thế của nó nên (0.25)

$$\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = f(\vec{r}(4)) - f(\vec{r}(0)) = f(8,3) - f(0,0) = 219.$$

Nhận xét.

1. Hàm thế f có thể tìm ra (sau khi chỉ ra trường $\overrightarrow{F}$ bảo toàn) bằng cách sau. Điểm $(0,0) \in D$ và bất kỳ điểm $(x,y) \in D \setminus \{(0,0)\}$, hình chữ nhật có hai đỉnh $(0,0)$ và (x,y), và đường chéo là đoạn thẳng nối $(0,0)$ và (x,y) sẽ nằm trong D. Do đó, ta có thể xác định hàm thế f bởi
$$f(x,y) = \int_0^y Q(0,t)dt + \int_0^x P(t,y)dx.$$
2. Ta có thể vừa tìm hàm thế vừa kiểm tra sự bảo toàn bằng cách sau.

   Trước hết, bằng tính toán hình thức, ta tìm hàm f thỏa hệ
$$\begin{cases} f_x(x,y) = P(x,y), \\ f_y(x,y) = Q(x,y). \end{cases} \tag{3}$$
   theo một trong hai cách sau:

   Cách 1: Sử dụng công thức $f(x,y) = \int_0^y Q(0,t)dt + \int_0^x P(t,y)dx$; hoặc

   Cách 2: Từ phương trình thứ nhất của hệ 3, ta có $f(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x + C(y)$. Từ đó, tìm $f_y(x,y)$ theo $C(y)$ rồi dùng phương trình thứ hai của hệ 3, ta tìm được $C(y)$, suy ra hàm thế.

   Ta dễ dàng kiểm tra được $\nabla f(x,y) = \overrightarrow{F}(x,y) \forall (x,y) \in D$. Do đó, bằng định nghĩa, trường vectơ $\overrightarrow{F}$ bảo toàn trên D. Và cũng bằng định nghĩa, ta có f là một hàm thế của trường vectơ $\overrightarrow{F}$.

Một số nhận xét và hướng chấm điểm.

(a) Một số sai sót của sinh viên:

- Chuyển sang tọa độ cực quên r.
- Nhầm lẫn giữa tích phân đường và tích phân bội.
-

4	**Bài 4** (2.5đ)	

	Giải các phương trình vi sau. (a) $y' = x + 5y$. (b) $y'' - y' = x; y(0) = 2; y'(0) = 1$.	
	Giải 4a)	1.0
	Ta có $\begin{aligned} y' - 5y = x\,(^*) &\iff y'e^{-5x} - 5ye^{-5x} = xe^{-5x} \\ &\iff \left(ye^{-5x}\right)' = xe^{-5x} \\ &\iff ye^{-5x} = \int \left(xe^{-5x}\right) \mathrm{d}x \\ &\iff ye^{-5x} = -\frac{xe^{-5x}}{5} - \frac{e^{-5x}}{25} + C \\ &\iff y = -\frac{1+5x}{25} + Ce^{5x}. \end{aligned}$	1.0
	Giải 4b)	1.5
	Phương trình đặc trưng $r^2 - r = 0$ có hai nghiệm $r = 0$ và $r = 1$. Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất $y'' - y' = 0$ là $y_t = Ae^{0.x} + Be^{1.x} = A + Be^x$.	0.25
	Vì $f(x) = x = P_1(x)e^{\alpha x}$ với $\alpha = 0$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất $y'' - y' = x$ có dạng $y_r(x) = xQ_1(x) = x(ax+b).$ Thay nghiệm y_r vào phương trình vi phân không thuần nhất , ta thu được $a = -\frac{1}{2}$ và $b = -1$. Do đó, $y_r(x) = -\frac{x^2}{2} - x$.	0.5
	Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất là $y_{tq}(x) = y_t(x) + y_r(x) = A + Be^x - \frac{x^2}{2} - x$.	0.25
	Áp các điều kiện đầu vào nghiệm tổng quát, ta nhận được $A = 0$ và $B = 2$. Do đó, nghiệm của phương trình vi phân cần tìm là $y(x) = 2e^x - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)$.	0.5
	Nhận xét và hướng chấm điểm. (a) Những sai lầm của sinh viên: • Xác định dạng nghiệm sai!	