TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐHQG-HCM
KHOA TOÁN - TIN HỌC
MÔN VI TÍCH PHÂN 2B

BÀI TẬP NHÓM

Chương 3 - 4

TÍCH PHÂN BỘI HAI - TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

NHÓM 10 ĐIỂM - LỚP 20CTT1

Bảng 1. Phân công nhóm theo thành viên.

STT	MSSV	Họ tên	Phân công	Kiểm tra chéo	Đánh giá
11	20120007	Đỗ Trung Hiếu	1.4, 2.1, 2.2 (LT)	1.1, 1.2, 2.7, 2.8	Đúng hạn
12	20120009	Nguyễn Văn Hưng	1.1, 1.2, 1.3 (LT)	2.3, 2.4, 2.5, 2.6	Đúng hạn
15	20120012	Nguyễn Phạm Nhật Huy	1.1, 1.2, 1.3 (LaTeX)	2.3, 2.4, 2.5	Đúng hạn
17	20120014	Vương Gia Huy	1.1, 1.2, 1.3, 1.4 (VD)	2.3, 2.4, 2.5	Đúng hạn
22	20120020	Huỳnh Đức Nhâm	2.3, 2.4, 2.5 (LaTeX)	1.1, 1.2, 1.3	Đúng hạn
23	20120021	Hồ Văn Sơn	2.6, 2.7, 2.8 (LaTeX)	1.4, 2.1, 2.2	Đúng hạn
24	20120022	Lê Quang Trí	1.4, 2.1, 2.2 (LaTeX)	2.6, 2.7, 2.8	Đúng hạn
25	20120023	Bùi Quốc Trung	2.3, 2.4, 2.5 (LT)	1.3, 1.4, 2.1, 2.2	Đúng hạn
28	20120027	Lê Hải Duy	1.1, 1.2, 1.3 (LaTeX)	2.3, 2.4, 2.5	Đúng hạn
99b	20120131	Nguyễn Văn Lộc	1.4, 2.1, 2.2 (LaTeX)	2.6, 2.7, 2.8	Đúng hạn
130	20120209	Nguyễn Nhật Tiến	2.6, 2.7, 2.8 (LT)	1.4, 2.1, 2.2	Đúng hạn
133	20120301	Nguyễn Hoàng Khang	2.3, 2.4, 2.5 (LaTeX)	1.1, 1.2, 1.3	Đúng hạn
139	20120412	Nguyễn Quang Bình	2.5, 2.6, 2.7, 2.8 (VD)	1.1, 1.2, 1.3	Đúng hạn
141	20120459	Nguyễn Văn Dũng	2.6, 2.7, 2.8 (LaTeX)	1.4, 2.1, 2.2	Đúng hạn
147	20120572	Nguyễn Kiều Minh Tâm	2.1, 2.2, 2.3, 2.4 (VD)	2.6, 2.7, 2.8	Đúng hạn

Bảng 2. Phân công nhóm theo đề mục.

Mục	Lý thuyết	Ví dụ	LaTex	Kiểm tra chéo
1.1	V.Hưng	G.Huy	H.Duy, N.Huy	Q.Bình, T.Hiếu, Đ.Nhâm, H.Khang
1.2	V.Hưng	G.Huy	H.Duy, N.Huy	Q.Bình, T.Hiếu, Đ.Nhâm, H.Khang
1.3	V.Hưng	G.Huy	H.Duy, N.Huy	Q.Bình, Q.Trung, Đ.Nhâm, H.Khang
1.4	T.Hiếu	G.Huy	Q.Trí, V.Lộc	N.Tiến, Q.Trung, V.Dũng, V.Sơn
2.1	T.Hiếu	M.Tâm	Q.Trí, V.Lộc	N.Tiến, Q.Trung, V.Dũng, V.Sơn
2.2	T.Hiếu	M.Tâm	Q.Trí, V.Lộc	N.Tiến, Q.Trung, V.Dũng, V.Sơn
2.3	Q.Trung	M.Tâm	Đ.Nhâm, H.Khang	G.Huy, V.Hưng, H.Duy, N.Huy
2.4	Q.Trung	M.Tâm	Đ.Nhâm, H.Khang	G.Huy, V.Hưng, H.Duy, N.Huy
2.5	Q.Trung	Q.Bình	Đ.Nhâm, H.Khang	G.Huy, V.Hưng, H.Duy, N.Huy
2.6	N.Tiến	Q.Bình	V.Dũng, V.Sơn	M.Tâm, V.Hưng, Q.Trí, V.Lộc
2.7	N.Tiến	Q.Bình	V.Dũng, V.Sơn	M.Tâm, T.Hiếu, Q.Trí, V.Lộc
2.8	N.Tiến	Q.Bình	V.Dũng, V.Sơn	M.Tâm, T.Hiếu, Q.Trí, V.Lộc

Mục lục

1 TÍCH PHÂN BỘI HAI

1.1 Tích phân bội trên miền đơn giản loại 1

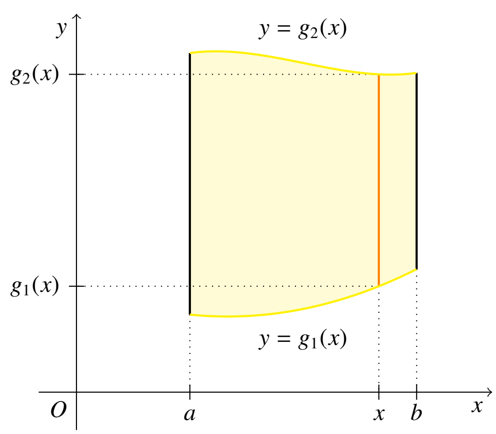
11	20120007	Đỗ Trung Hiếu	Kiểm tra chéo
12	20120009	Nguyễn Văn Hưng	Lý thuyết
15	20120012	Nguyễn Phạm Nhật Huy	LaTeX
17	20120014	Vương Gia Huy	Ví dụ
22	20120020	Huỳnh Đức Nhâm	Kiểm tra chéo
28	20120027	Lê Hải Duy	LaTeX
133	20120301	Nguyễn Hoàng Khang	Kiểm tra chéo
139	20120412	Nguyễn Quang Bình	Kiểm tra chéo

1.1.1 Tóm tắt lý thuyết

Một tập con của $\mathbb{R}^2$ được gọi là **miền đơn giản loại 1** (hay **miền đơn giản theo chiều đứng**) nếu nó có dạng

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

trong đó g_1 và g_2 là các hàm liên tục trên $[a, b]$.



Hình 1.1. Miền đơn giản loại 1.

Cho miền $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$. Giả sử f, g_1, và g_2 liên tục. Khi đó

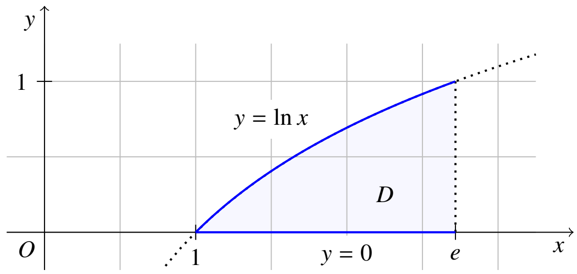
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

1.1.2 Ví dụ

Ví dụ 1

Tính tích phân $\displaystyle\iint_D x^3\, dA$, trong đó $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le \ln x\}$.

Lời giải.



$$\begin{aligned}\iint_D x^3\,dA &= \int_1^e \int_0^{\ln x} x^3\,dy\,dx = \int_1^e (x^3 y)\Big|_{y=0}^{y=\ln x} dx = \int_1^e x^3 \ln x\,dx = \left(\frac{x^4}{4}\ln x\right)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{4}\,dx \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{x^4}{16}\Big|_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4+1}{16}.\end{aligned}$$

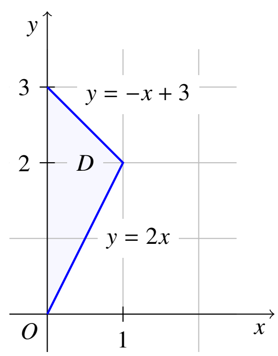
Ví dụ 2

Tính tích phân $\iint_D 2xy\,dA$, trong đó D là miền tam giác với các đỉnh $(0,0)$, $(1,2)$, và $(0,3)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $(0,0)$ và $(1,2)$ là $y = 2x$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $(0,3)$ và $(1,2)$ là $y = -x + 3$.



Dựa vào hình vẽ, ta có $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 2x \le y \le -x+3\}$.

Do đó

$$\begin{aligned}\iint_D 2xy\,dA &= \int_0^1 \int_{2x}^{-x+3} 2xy\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left(xy^2\right)\Big|_{y=2x}^{y=-x+3} dx \\ &= \int_0^1 \left[x(-x+3)^2 - x(2x)^2\right] dx = \frac{7}{4}.\end{aligned}$$

1.2 Tích phân bội trên miền đơn giản loại 2

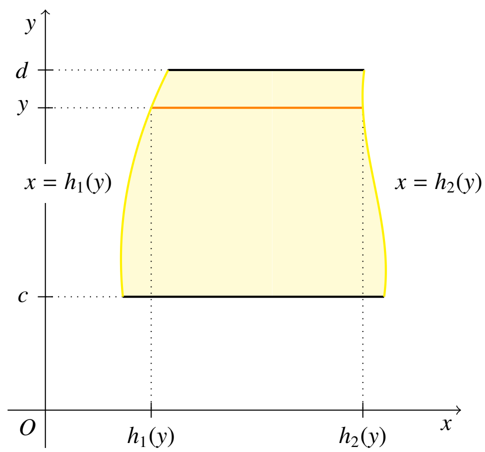
11	20120007	Đỗ Trung Hiếu	Kiểm tra chéo
12	20120009	Nguyễn Văn Hưng	Lý thuyết
15	20120012	Nguyễn Phạm Nhật Huy	LaTeX
17	20120014	Vương Gia Huy	Ví dụ
22	20120020	Huỳnh Đức Nhâm	Kiểm tra chéo
28	20120027	Lê Hải Duy	LaTeX
133	20120301	Nguyễn Hoàng Khang	Kiểm tra chéo
139	20120412	Nguyễn Quang Bình	Kiểm tra chéo

1.2.1 Tóm tắt lý thuyết

Một tập con của $\mathbb{R}^2$ được gọi là **miền đơn giản loại 2** (hay **miền đơn giản theo chiều ngang**) nếu nó có dạng

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

trong đó h_1 và h_2 là các hàm liên tục trên $[c, d]$.



Hình 1.2. Miền đơn giản loại 2.

Cho miền $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$. Giả sử f, h_1, và h_2 liên tục. Khi đó

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

1.2.2 Ví dụ

Ví dụ 1

Tính tích phân $\iint_D y^2\, dA$, trong đó $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1, -y - 2 \leq x \leq y\right\}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\iint_D y^2\,dA &= \int_{-1}^{1}\int_{-y-2}^{y} y^2\,dx\,dy\\ &= \int_{-1}^{1}(y^2x)\Big|_{x=-y-2}^{x=y}\,dy\\ &= \int_{-1}^{1}(2y^3+2y^2)\,dy\\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

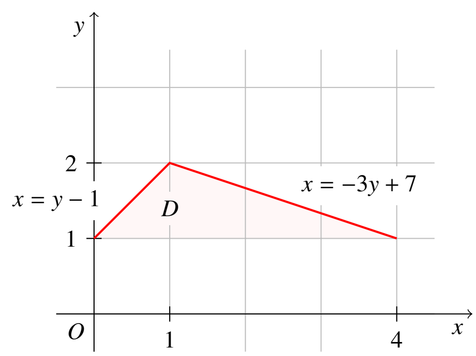
Ví dụ 2

Tính tích phân $\iint_D y^2\,dA$, trong đó D là miền tam giác với các đỉnh $(0,1)$, $(1,2)$, và $(4,1)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $(0,1)$ và $(1,2)$ là $x = y - 1$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm $(4,1)$ và $(1,2)$ là $x = -3y + 7$.



Dựa vào hình vẽ, ta có $D = \{(x,y) \mid 1 \le y \le 2, y-1 \le x \le -3y+7\}$.

Do đó

$$\begin{aligned}\iint_D y^2\,dA &= \int_{1}^{2}\int_{y-1}^{-3y+7} y^2\,dx\,dy\\ &= \int_{1}^{2}\left(xy^2\right)\Big|_{x=y-1}^{x=-3y+7}\,dy\\ &= \int_{1}^{2}\left[y^2(-3y+7)-y^2(y-1)\right]dy\\ &= \frac{11}{3}.\end{aligned}$$

1.3 Chọn, đổi thứ tự tích phân lặp để tính tích phân bội/lặp

12	20120009	Nguyễn Văn Hưng	Lý thuyết
15	20120012	Nguyễn Phạm Nhật Huy	LaTeX
17	20120014	Vương Gia Huy	Ví dụ
22	20120020	Huỳnh Đức Nhâm	Kiểm tra chéo
25	20120023	Bùi Quốc Trung	Kiểm tra chéo
28	20120027	Lê Hải Duy	LaTeX
133	20120301	Nguyễn Hoàng Khang	Kiểm tra chéo
139	20120412	Nguyễn Quang Bình	Kiểm tra chéo

1.3.1 Tóm tắt lý thuyết

Cho tích phân bội

$$\iint_D f(x,y)\,dA$$

trong đó hàm f hai biến liên tục trên miền D.

Ta có thể viết tích phân trên thành hai dạng tích phân lặp khác nhau (dựa trên **Định lý Fubini**), theo thứ tự $dx\,dy$

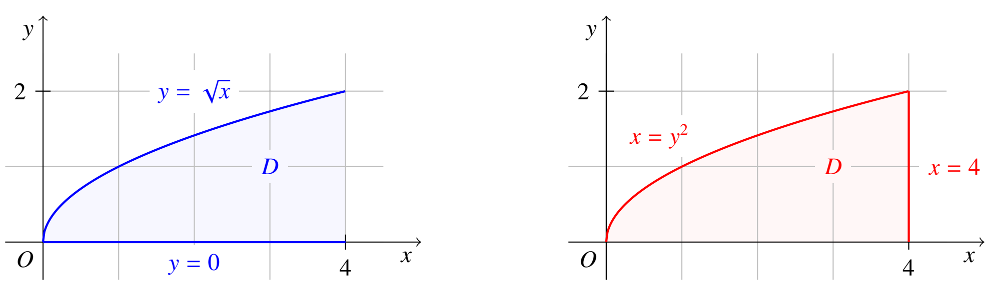
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{\square}^{\square}\left(\int_{\square}^{\square} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

hoặc theo thứ tự $dy\,dx$

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{\square}^{\square}\left(\int_{\square}^{\square} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Từ mô tả của miền D ta xác định được các cận của tích phân lặp (và thứ tự tích phân đó). Trong một vài trường hợp, ta có thể "dễ dàng" tính toán trực tiếp. Tuy nhiên, đôi khi, ta phải thay đổi thứ tự tích phân lặp để việc tính toán trở nên khả thi và đơn giản hơn. Điều này có thể dẫn đến sự thay đổi trong mô tả của miền D.

Khó để viết ra một thuật toán cụ thể cho việc xác định các cận của tích phân mới. Một cách đơn giản là xác định dựa trên đồ thị của miền D. Ví dụ, miền $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4\,,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$ có thể được mô tả thành $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2\,,\ y^2 \le x \le 4\}$.



Hình 1.3. Minh họa miền D.

1.3.2 Ví dụ

Ví dụ 1

Tính tích phân lặp $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4+1}\,dx\,dy.$

Nhận xét. Rõ ràng nguyên hàm của $\sqrt{x^4+1}$ không dễ tính, do vậy để giải bài toán sau ta sẽ đổi thứ tự của nó.

Lời giải.

Theo đề bài ta có:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 8, \sqrt[3]{y} \le x \le 2\}. \qquad (1)$$

Xét $f(x, y) = \sqrt{x^4 + 1}$ là hàm số liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^2$.

Từ (1) ta thu được:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 8 \\ \sqrt[3]{y} \le x \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le y \le 8 \\ y \le x^3 \le 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le y \le x^3 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le x^3\right\}.$$

Theo Định lý Fubini, ta có:

$$\begin{aligned}
\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \sqrt{x^4 + 1}\, dx\, dy &= \int_0^2 \int_0^{x^3} \sqrt{x^4 + 1}\, dy\, dx \\
&= \int_0^2 \left(y\sqrt{x^4 + 1}\right)\Big|_{y=0}^{y=x^3} dx \\
&= \int_0^2 x^3 \sqrt{x^4 + 1}\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^2 \sqrt{x^4 + 1}\, d(x^4 + 1) \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}(x^4 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{34\sqrt{17}}{3} - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{34\sqrt{17} - 2}{12} \\
&= \frac{17\sqrt{17} - 1}{6}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2

Tính tích phân lặp $\iint_D e^{y^2}\, dA$, trong đó $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, \frac{x}{2} \le y \le 1\right\}$.

Lời giải.

Xét $f(x, y) = e^{y^2}$ là hàm số liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^2$.

Từ D ta thu được:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \frac{x}{2} \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{x}{2} \le 1 \\ x \le 2y \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 2y \end{cases}$$

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1, 0 \le x \le 2y\right\}.$$

Theo Định lý Fubini, ta có:

$$\iint_D e^{y^2}\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} e^{y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(e^{y^2} x\right)\Big|_{x=0}^{x=2y} dy = \int_0^1 2ye^{y^2}\, dy = \left(e^{y^2}\right)\Big|_0^1 = e - 1.$$

1.4 Một số ứng dụng của tích phân bội

11	20120007	Đỗ Trung Hiếu	Lý thuyết
17	20120014	Vương Gia Huy	Ví dụ
23	20120021	Hồ Văn Sơn	Kiểm tra chéo
24	20120022	Lê Quang Trí	LaTeX
25	20120023	Bùi Quốc Trung	Kiểm tra chéo
99b	20120131	Nguyễn Văn Lộc	LaTeX
130	20120209	Nguyễn Nhật Tiến	Kiểm tra chéo
141	20120459	Nguyễn Văn Dũng	Kiểm tra chéo

1.4.1 Tóm tắt lý thuyết

Xét f là một hàm số xác định trên miền D bị chặn trên $\mathbb{R}^2$, xét tích phân bội hai: $\iint_D f\,dA$, với giả sử rằng hàm f đủ tốt (xét f liên tục trên D).

1. Với $f \equiv 1$ trên D, tích phân bội $\iint_D f\,dA$ cho ta diện tích miền D.
2. Xét vật thể hình trụ có đáy là miền D trong mặt phẳng Oxy, mặt xung quang là mặt trụ có đường sinh vuông góc với đáy, phía trên được giới hạn bởi mặt cong $z = f(x, y)$, trong đó $f(x, y) > 0, \forall(x, y) \in D$. Lúc này, tích phân bội $\iint_D f\,dA$ cho ta thể tích của vật thể.
3. Xét cột trụ có mặt cắt ngang là miền D, khối lượng của cột phân bố không đồng đều. Nếu gọi $f(x, y)$ là mật độ khối của cột tại điểm (x, y), trong đó $f(x, y) > 0, \forall(x, y) \in D$, thì tích phân bội $\iint_D f\,dA$ cho khối lượng của cột.

1.4.2 Ví dụ

Ví dụ 1

Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $x = 1, x = 2, y = \dfrac{a^2}{x}$, và $y = \dfrac{2a^2}{x}$ $(a > 0)$.

Lời giải.

Theo đề bài, ta có:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2, \frac{a^2}{x} \le y \le \frac{2a^2}{x}\right\}.$$

Diện tích miền D được tính thông qua tích phân bội như sau:

$$\begin{aligned}
\iint_D dA &= \int_1^2 \int_{a^2/x}^{2a^2/x} dy\,dx \\
&= \int_1^2 y\Big|_{y=a^2/x}^{y=2a^2/x} dx \\
&= \int_1^2 \frac{a^2}{x}\,dx \\
&= a^2 \ln 2.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2

Tính thể tích phần khối rắn nằm trong góc phần tám thứ nhất, được bao bởi hình trụ $z = 16 - x^2$ và mặt phẳng $y = 5$. *(Quy ước góc phần tám thứ nhất là phần không gian ứng với $x > 0, y > 0, z > 0$ trong mặt phẳng Oxy)*

Lời giải.

Vì khối rắn nằm trong góc phần tám thứ nhất, nên bị chặn bởi 3 mặt phẳng $x = 0, y = 0$, và $z = 0$.

Ta có: $\begin{cases} z = 0 \\ z = 16 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 4.$

Vì khối rắn nằm trong góc phần tám thứ nhất, nên ta chỉ nhận $x = 4$. Do đó ta xét miền $R = [0, 4] \times [0, 5]$.

Thể tích khối rắn được tính bằng tích phân bội như sau:

$$V = \iint_R (16 - x^2)\, dA = \int_0^4 \int_0^5 (16 - x^2)\, dy\, dx = \int_0^4 \left[y\left(16 - x^2\right) \right]\Big|_{y=0}^{y=5} dx = \int_0^4 5(16 - x^2)\, dx = \frac{640}{3}.$$

2 TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

2.1 Tích phân đường loại 1

11	20120007	Đỗ Trung Hiếu	Lý thuyết
23	20120021	Hồ Văn Sơn	Kiểm tra chéo
24	20120022	Lê Quang Trí	LaTeX
25	20120023	Bùi Quốc Trung	Kiểm tra chéo
99b	20120131	Nguyễn Văn Lộc	LaTeX
130	20120209	Nguyễn Nhật Tiến	Kiểm tra chéo
141	20120459	Nguyễn Văn Dũng	Kiểm tra chéo
147	20120572	Nguyễn Kiều Minh Tâm	Ví dụ

2.1.1 Tóm tắt lý thuyết

Cho đường cong C với $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ là một cách tham số hóa đơn, chính qui.

Xét f là một hàm xác định trên C. Tích phân của f trên C được kí hiệu và định nghĩa như sau:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt.$$

Xét trường hợp hai chiều ($n = 2$), với $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, khi đó

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt,$$

$$\int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\,\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

Nếu $\vec{r}$ chỉ khả vi từng khúc, tức là có các số $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_m = b$ sao cho trên mỗi khoảng $[t_{i-1}, t_i]$ ánh xạ $\vec{r}$ là khả vi, thì gọi C_i là hạn chế của đường cong C trên khoảng $[t_{i-1}, t_i]$, ta định nghĩa:

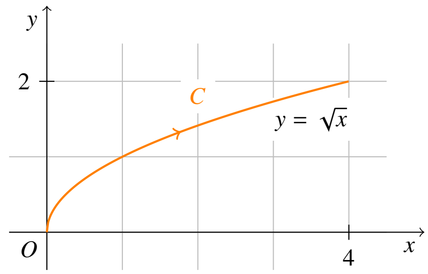
$$\int_C f ds = \sum_{i=1}^{m} \int_{C_i} f ds.$$

2.1.2 Ví dụ

Ví dụ 1

Tính $\displaystyle\int_C (4xy + y)\,ds$ với C là phần đường cong $y = \sqrt{x}$ từ điểm $(0, 0)$ đến điểm $(4, 2)$.

Lời giải.



Tham số hóa đường cong C

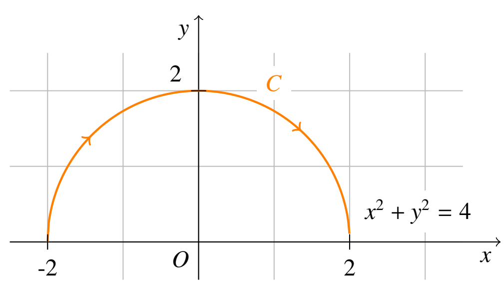
$$C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \\ 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_C (4xy + y)\, ds &= \int_0^2 (4t^2.t + t)\sqrt{(2t)^2 + 1}\, dt \\ &= \int_0^2 (4t^3 + t)\sqrt{4t^2 + 1}\, dt \\ &= \int_0^2 \frac{1}{8}(4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\, d(4t^2 + 1) \\ &= \frac{1}{8}.\frac{2}{5}(4t^2 + 1)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 \\ &= \frac{17^{\frac{5}{2}} - 1}{20} = \frac{289\sqrt{17} - 1}{20}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2

Tính $\int_C ds$ với C là nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ từ điểm $(-2, 0)$ đến điểm $(2, 0)$.



Lời giải 1.

Tham số hóa đường cong C

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{4 - t^2} \\ -2 \leq t \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = \dfrac{-t}{\sqrt{4 - t^2}}. \end{cases}$$

Do đó

$$\int_C ds = \int_0^2 \sqrt{1+\frac{t^2}{4-t^2}}\,dt = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = 2\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}}\,dt = 2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi.$$

Lời giải 2.

Tham số hóa đường cong C

$$C:\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ 0 \le t \le \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -2\sin t \\ y'(t) = 2\cos t. \end{cases}$$

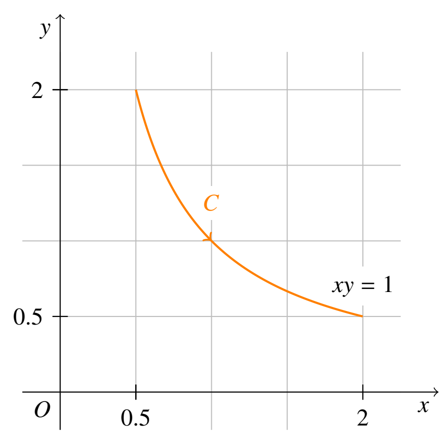
Do đó

$$\int_C ds = \int_2^3 \sqrt{1+\frac{36}{t^4}}\,dt = \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = 2\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}}\,dt = 2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi.$$

Ví dụ 3

Tính $\int_C (x^5+y^5)\,ds$ với C là phần đường cong $xy = 1$ từ điểm $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ đến điểm $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.



Tham số hóa đường cong C

$$C:\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{t} \\ \frac{1}{2} \le t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = \frac{-1}{t^2}. \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\int_C ds &= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(t^5+\frac{1}{t^5}\right)\sqrt{1^2+\left(\frac{-1}{t^2}\right)^2}\,dt\\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(t^5+\frac{1}{t^5}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\,dt\\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2} t^5\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{t^5}\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\,dt\\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2} t^3\sqrt{t^4+1}\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{-1}{4}\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\,d\left(1+\frac{1}{t^4}\right)\\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{4}\sqrt{t^4+1}\,d(t^4+1)+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{-1}{4}\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\,d\left(1+\frac{1}{t^4}\right)\\
&= \frac{1}{4}.\frac{2}{3}(t^4+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}+\frac{-1}{4}.\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{t^4}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}\\
&= \frac{17^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{17}{16}\right)^{\frac{3}{2}}}{6}-\frac{\left(\frac{17}{16}\right)^{\frac{3}{2}}-17^{\frac{3}{2}}}{6}=\frac{357\sqrt{17}}{64}.
\end{aligned}$$

2.2 Ứng dụng tích phân đường loại 1

11	20120007	Đỗ Trung Hiếu	Lý thuyết
23	20120021	Hồ Văn Sơn	Kiểm tra chéo
24	20120022	Lê Quang Trí	LaTeX
25	20120023	Bùi Quốc Trung	Kiểm tra chéo
99b	20120131	Nguyễn Văn Lộc	LaTeX
130	20120209	Nguyễn Nhật Tiến	Kiểm tra chéo
141	20120459	Nguyễn Văn Dũng	Kiểm tra chéo
147	20120572	Nguyễn Kiều Minh Tâm	Ví dụ

2.2.1 Tóm tắt lý thuyết

Xét f là một hàm số xác định trên một tập mở $D \subset \mathbb{R}^2$ chứa đường cong C, xét tích phân đường loại 1: $\int_C f\,ds$, với giả sử rằng hàm f đủ tốt (xét f liên tục trên D).

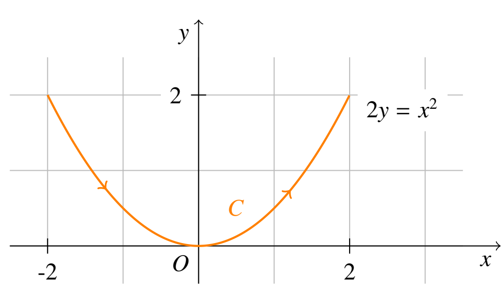
1. Với $f \equiv 1$ trên C:
   (a) $\int_C f\,ds$ cho ta độ dài đường cong C.
   (b) Nếu C là đường cong kín, thì $\int_C f\,ds$ cho ta chu vi hình được tạo bởi C (độ dài biên của hình bao bởi C).
2. Xét một thanh kim loại được mô tả bởi đường cong C. Nếu gọi $f(x,y)$ là mật độ khối lượng của thanh kim loại tại điểm (x,y), trong đó $f(x,y) > 0, \forall (x,y) \in C$, thì $\int_C f\,ds$ cho ta khối lượng thanh kim loại.
3. Xét một hàng rào với bề dày không đáng kể, có chân trên mặt phẳng Oxy là đường cong C. Nếu gọi $f(x,y)$ là độ cao của hàng rào tại điểm (x,y), trong đó $f(x,y) > 0, \forall (x,y) \in C$, thì $\int_C f\,ds$ cho ta diện tích một mặt của hàng rào.

2.2.2 Ví dụ

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng Oxy, với đơn vị trên mỗi trục tọa độ là $1cm$, xét một đoạn dây mảnh trải dọc theo parabol $2y = x^2$ từ điểm $(-2,2)$ đến điểm $(2,2)$. Hàm mật độ khối lượng tuyến tính của đoạn dây cho bởi $\lambda(x,y) = \sqrt{x^2+1}$ (g/cm). Tính khối lượng của sợi dây.

Lời giải.



Gọi C là đoạn parabol $2y = x^2$ từ $(-2, 2)$ đến $(2, 2)$. Tham số hóa đường cong C

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \\ -2 \le t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = t. \end{cases}$$

Khối lượng của sợi dây $m\,(g)$ được tính thông qua tích phân đường loại 1 như sau:

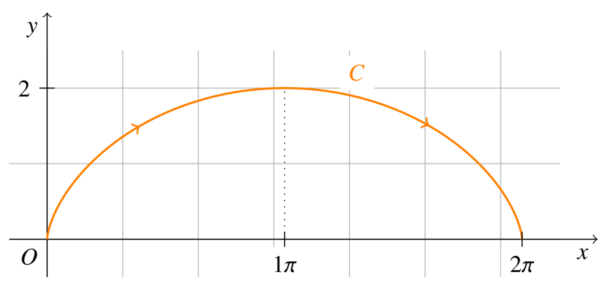
$$m = \int_C \lambda(x, y)\, ds = \int_C \sqrt{x^2+1}\, ds = \int_{-2}^{2} \sqrt{t^2+1}\sqrt{1+t^2}\, dt = \int_{-2}^{2} (t^2+1)\, dt$$
$$= \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{28}{3}\,(g).$$

Ví dụ 2

Xét đường cong C với tham số hóa đơn, chính qui $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$. Tính độ dài đường cong C.

(Đường cong C là **đường cycloid**)

Lời giải.



Ta có $\vec{r}\,'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ và

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}$$
$$\Rightarrow \|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right), \forall t \in [0, 2\pi].$$

Độ dài đường cong C được tính qua tích phân đường loại 1 như sau:

$$l = \int_C ds = \int_C \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -4\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -4(-1-1) = 8.$$

Ví dụ 3

Một hàng rào bao quanh một giếng, chân hàng rào trên mặt phẳng Oxy là một đường tròn, tâm ở gốc tọa độ, bán kính $2m$, với bề dày hàng rào không đáng kể. Chiều cao hàng rào tại điểm (x, y) (đơn vị trên hai trục đều tính theo m) là $h(x, y) = 4 + x\sin y$ (m). Tính diện tích bề mặt ngoài của hàng rào.

Lời giải.

Gọi C là vết của chân hàng rào trên mặt phẳng Oxy, ta có C là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ và một tham số hóa cho C là

$$C : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = -2\sin t \\ y'(t) = 2\cos t. \end{cases}$$

Diện tích bề mặt ngoài của hàng rào được tính qua tích phân đường loại 1 như sau:

$$\begin{aligned}
S = \int_C h(x,y)\,ds &= \int_0^{2\pi} (4 + 2\cos t.\sin(2\sin t))\sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (4 + 2\cos t.\sin(2\sin t)).2\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} 8\,dt + \int_0^{2\pi} 2.2\cos t.\sin(2\sin t)\,dt \\
&= 8.2\pi + \int_0^{2\pi} 2.\sin(2\sin t)\,d(2\sin t) \\
&= 16\pi - 2.\cos(2\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 16\pi - 2(1-1) = 16\pi.
\end{aligned}$$

2.3 Tích phân đường loại 2

12	20120009	Nguyễn Văn Hưng	Kiểm tra chéo
15	20120012	Nguyễn Phạm Nhật Huy	Kiểm tra chéo
17	20120014	Vương Gia Huy	Kiểm tra chéo
22	20120020	Huỳnh Đức Nhâm	LaTeX
25	20120023	Bùi Quốc Trung	Lý thuyết
28	20120027	Lê Hải Duy	Kiểm tra chéo
133	20120301	Nguyễn Hoàng Khang	LaTeX
147	20120572	Nguyễn Kiều Minh Tâm	Ví dụ

2.3.1 Tóm tắt lý thuyết

Cho đường cong C với $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ là một cách tham số hóa đơn, chính qui.

Giả sử $\vec{F}$ là trường vector liên tục xác định trên C. Tích phân của $\vec{F}$ trên C được ký hiệu và định nghĩa như sau:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\,(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt.$$

Định nghĩa này được mở rộng cho đường khả vi từng khúc theo cách như tích phân đường loại một.

Vì tích phân đường loại 2 gắn với khái niệm công của trường lực tác động lên chất điểm di chuyển trên đường cong C nên hướng di chuyển của chất điểm ảnh hưởng đến giá trị của tích phân:

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Xét trường hợp hai chiều ($n = 2$), với $\vec{F}\,(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ và $\vec{r}\,(t) = (x(t), y(t))$. Đặt

$$\int_C P(x, y)\,dx = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\,dt,$$
$$\int_C Q(x, y)\,dy = \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)\,dt.$$

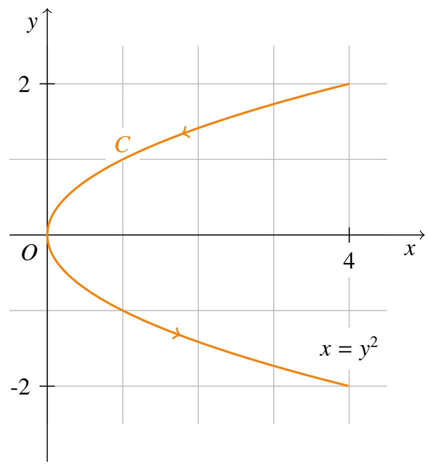
Khi đó $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \Big[P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\Big]\,dt = \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$

2.3.2 Ví dụ

Ví dụ 1

Tính tích phân $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ với $\vec{F}(x, y) = (\sin x, \cos y)$ với C là phần đường cong $x = y^2$ nối từ điểm $(4, 2)$ đến điểm $(4, -2)$.

Lời giải.



Tham số hóa đường cong $C : \vec{r}(y) = (y^2, y), y : 2 \to -2$.

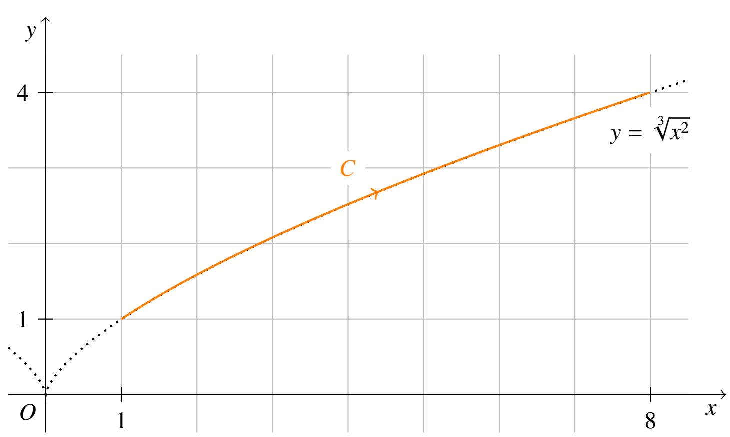
Do đó

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_2^{-2} (\sin(y^2), \cos y) \cdot (2y, 1)\, dy \\
&= \int_2^{-2} [2y \sin(y^2) + \cos y]\, dy \\
&= [-\cos(y^2) + \sin y]\Big|_2^{-2} \\
&= -\cos 4 + \sin(-2) + \cos 4 - \sin 2 = -2 \sin 2.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2

Tính tích phân $\displaystyle\int_C xy\, dx$ với C là phần đường cong $y = \sqrt[3]{x^2}$ nối từ điểm $(1, 1)$ đến điểm $(8, 4)$.

Lời giải.



Tham số hóa đường cong $C : \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ t : 1 \to 2. \end{cases}$

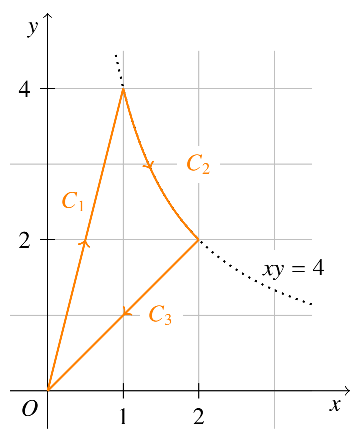
Do đó

$$\begin{aligned}\int_C xy\,dx &= \int_1^2 t^3t^2 3t^2\,dt\\ &= \int_1^2 3t^7\,dt\\ &= \frac{3}{8}t^8\Big|_1^2\\ &= \frac{3(256-1)}{8} = \frac{765}{8}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3

Tính tích phân $\int_C (x+2y)\,dx + x^2\,dy$, với C gồm các đoạn: đoạn thẳng từ $(0,0)$ đến $(1,4)$, phần đường hyperbol $xy = 4$ từ $(1,4)$ đến $(2,2)$, và đoạn thẳng từ $(2,2)$ đến $(0,0)$.

Lời giải.



Từ hình vẽ ta có: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Do đó $I = \int_C (x+2y)\,dx + x^2\,dy = \int_{C_1} (x+2y)\,dx + x^2\,dy + \int_{C_2} (x+2y)\,dx + x^2\,dy + \int_{C_3} (x+2y)\,dx + x^2\,dy.$

Tham số hóa đường cong $C_1 : \begin{cases} x = x \\ y = 4x \\ x : 0 \to 1. \end{cases}$

$$I_1 = \int_{C_1} (x+2y)\,dx + x^2\,dy = \int_0^1 (x+8x)\,dx + x^2.4\,dx = \int_0^1 (4x^2+9x)\,dx = \left(\frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{35}{6}.$$

Tham số hóa đường cong $C_2 : \begin{cases} x = x \\ y = \dfrac{4}{x} \\ x : 1 \to 2. \end{cases}$

$$I_2 = \int_{C_2} (x+2y)\,dx + x^2\,dy = \int_1^2 \left(x + \frac{8}{x}\right)dx + x^2\left(-\frac{4}{x^2}\,dx\right) = \int_1^2 \left(x + \frac{8}{x} - 4\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 8\ln|x| - 4x\right)\Big|_1^2$$
$$= (2 + 8\ln 2 - 8) - \left(\frac{1}{2} - 4\right) = -\frac{5}{2} + 8\ln 2.$$

Tham số hóa đường cong C_3 : $\begin{cases} x = x \\ y = x \\ x : 2 \to 0. \end{cases}$

$$I_3 = \int_{C_3} (x + 2y)\, dx + x^2\, dy = \int_2^0 (x + 2x)\, dx + x^2\, dx = \int_2^0 (x^2 + 3x)\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_2^0 = -\frac{26}{3}.$$

Do đó

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{35}{6} - \frac{5}{2} + 8\ln 2 - \frac{26}{3} = -\frac{16}{3} + 8\ln 2.$$

2.4 Ứng dụng tích phân đường loại 2

12	20120009	Nguyễn Văn Hưng	Kiểm tra chéo
15	20120012	Nguyễn Phạm Nhật Huy	Kiểm tra chéo
17	20120014	Vương Gia Huy	Kiểm tra chéo
22	20120020	Huỳnh Đức Nhâm	LaTeX
25	20120023	Bùi Quốc Trung	Lý thuyết
28	20120027	Lê Hải Duy	Kiểm tra chéo
133	20120301	Nguyễn Hoàng Khang	LaTeX
147	20120572	Nguyễn Kiều Minh Tâm	Ví dụ

2.4.1 Tóm tắt lý thuyết

1. Công thực hiện bởi trường lực $\vec{F}$ làm di chuyển một chất điểm dọc theo đường cong C tham số hóa $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ xác định bởi công thức:

$$W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

2. Diện tích của miền phẳng D, có biên C được định hướng dương xác định bởi công thức:

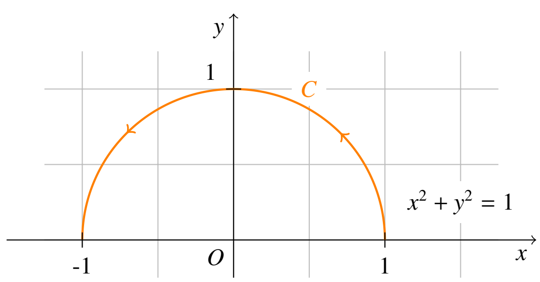
$$S_D=\oint_C -y\,dx=\oint_C x\,dy=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx\,.$$

2.4.2 Ví dụ

Ví dụ 1

Tính công thực hiện bởi trường lực $\vec{F}(x,y)=(-y,x)$ làm di chuyển một chất điểm dọc theo đường cong C là nửa đường tròn $x^2+y^2=1$ từ điểm $(1,0)$ đến điểm $(-1,0)$.

Lời giải.



Ta có một tham số hóa cho đường cong C là $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t), t:0\to\pi$.

$$\vec{r}'(t)=(-\sin t,\cos t);\vec{F}(\vec{r}(t))=(-\sin t,\cos t).$$

Công của $\vec{F}$ làm chất điểm di chuyển trên nửa đường tròn được định hướng từ $(1,0)$ đến $(-1,0)$:

$$\begin{aligned}W&=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^\pi \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt=\int_0^\pi(-\sin t,\cos t)\cdot(-\sin t,\cos t)\,dt\\&=\int_0^\pi(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=\int_0^\pi dt=\pi.\end{aligned}$$

Ví dụ 2

Tính diện tích của hình ellipse $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$.

Lời giải.

Ta có một tham số hóa đường cong C bao quanh (E) là $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ t : 0 \to 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow dy = b\cos t\, dt.$$

Diện tích của hình ellipse (E) bao bởi biên C được tính như sau:

$$S_{(E)} = \oint_C x\,dy = \int_0^{2\pi} a\cos t\,.\,b\cos t\,dt = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{ab}{2}\left[1 + \frac{\cos 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \pi ab.$$

2.5 Kiểm tra trường bảo toàn. Tìm hàm thế

12	20120009	Nguyễn Văn Hưng	Kiểm tra chéo
15	20120012	Nguyễn Phạm Nhật Huy	Kiểm tra chéo
17	20120014	Vương Gia Huy	Kiểm tra chéo
22	20120020	Huỳnh Đức Nhâm	LaTeX
25	20120023	Bùi Quốc Trung	Lý thuyết
28	20120027	Lê Hải Duy	Kiểm tra chéo
133	20120301	Nguyễn Hoàng Khang	LaTeX
147	20120572	Nguyễn Kiều Minh Tâm	Ví dụ

2.5.1 Tóm tắt lý thuyết

Một trường vectơ $\vec{F}$ được gọi là **bảo toàn**, nếu có hàm số thực f, gọi là **hàm thế** của $\vec{F}$, sao cho $\nabla f = \vec{F}$. Trường bảo toàn còn được gọi là một **trường gradient**.

Nếu trường $\vec{F} = (P, Q)$ trơn và bảo toàn trên một tập mở chứa D thì trên D ta phải có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(Điều kiện cần để trường vector phẳng là bảo toàn)

Một tập $D \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là một **miền hình sao** nếu có một điểm $p_0 \in D$ sao cho với mọi điểm $p \in D$ thì đoạn thẳng nối p_0 và p được chứa trong D.

- $\mathbb{R}^n$ là một miền hình sao.
- Một tập con lồi của $\mathbb{R}^n$ là một miền hình sao.
- $\mathbb{R}^n$ bỏ đi một điểm không là miền hình sao.

Bổ đề Poincaré. Giả sử $\vec{F} = (P, Q)$ là một trường vector trơn trên miền mở hình sao D. Nếu $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ trên D thì $\vec{F}$ là bảo toàn trên D.

2.5.2 Ví dụ

Ví dụ 1

Kiểm tra trường $\vec{F}(x, y) = ye^x\,\vec{i} + (e^x + e^y)\,\vec{j}$ có bảo toàn hay không. Nếu có tìm hàm thế f của $\vec{F}$.

Lời giải.

Xét $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$ với $P(x, y) = ye^x$ và $Q(x, y) = e^x + e^y$.

Theo đề trường $\vec{F}$ trơn trên miền xác định $\mathbb{R}^2$ và

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Suy ra $\vec{F}$ là trường bảo toàn.

Ta tìm hàm thế f của $\vec{F}$. Vì $\vec{F}$ là trường bảo toàn, nên

$$\vec{F} = \nabla f$$
$$\Rightarrow (ye^x)\,\vec{i} + (e^x + e^y)\,\vec{j} = f_x(x, y)\,\vec{i} + f_y(x, y)\,\vec{j}.$$

Ta có:

$$f_x(x,y) = ye^x$$
$$\Rightarrow f(x,y) = \int ye^x dx = y\int e^x dx = ye^x + g(y).$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&f_y(x,y) = e^x + e^y\\
&\Rightarrow e^x + g'(y) = e^x + e^y\\
&\Rightarrow g(y) = \int e^y dy\\
&\Rightarrow g(y) = e^y + K, \text{ với } K \text{ là hằng số.}
\end{aligned}$$

Vậy $f(x,y) = ye^x + e^y + K$, với K là hằng số.

Ví dụ 2

Kiểm tra trường $\vec{F}(x,y) = (ye^x + \sin y)\vec{i} + (e^x + x\cos y)\vec{j}$ có bảo toàn hay không. Nếu có tìm hàm thế f của $\vec{F}$.

Lời giải.

Xét $\vec{F}(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$ với $P(x,y) = ye^x + \sin y$ và $Q(x,y) = e^x + x\cos y$.

Theo đề trường $\vec{F}$ trơn trên miền xác định $\mathbb{R}^2$ và

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial(ye^x + \sin y)}{\partial x} = e^x + \cos y\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial(e^x + x\cos y)}{\partial y} = e^x + \cos y\end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Suy ra $\vec{F}$ là trường bảo toàn.

Ta tìm hàm thế f của $\vec{F}$. Vì $\vec{F}$ là trường bảo toàn, nên

$$\vec{F} = \nabla f$$
$$\Rightarrow (ye^x + \sin y)\vec{i} + (e^x + x\cos y)\vec{j} = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}.$$

Ta có:

$$f_x(x,y) = ye^x + \sin y$$
$$\Rightarrow f(x,y) = \int (ye^x + \sin y)dx = ye^x + x\sin y + g(y).$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
&f_y(x,y) = e^x + x\cos y\\
&\Rightarrow e^x + x\cos y + g'(y) = e^x + x\cos y\\
&\Rightarrow g'(y) = 0\\
&\Rightarrow g(y) = K, \text{ với } K \text{ là hằng số.}
\end{aligned}$$

Vậy $f(x,y) = ye^x + x\sin y + K$, với K là hằng số.

2.6 Tính tích phân đường loại 2 nhờ trường bảo toàn

12	20120009	Nguyễn Văn Hưng	Kiểm tra chéo
23	20120021	Hồ Văn Sơn	LaTeX
24	20120022	Lê Quang Trí	Kiểm tra chéo
99b	20120131	Nguyễn Văn Lộc	Kiểm tra chéo
130	20120209	Nguyễn Nhật Tiến	Lý thuyết
139	20120412	Nguyễn Quang Bình	Ví dụ
141	20120459	Nguyễn Văn Dũng	LaTeX
147	20120572	Nguyễn Kiều Minh Tâm	Kiểm tra chéo

2.6.1 Tóm tắt lý thuyết

Công thức Newton-Leibniz. Cho r là một đường đi trơn bắt đầu ở A và kết thúc ở B và cho f là một hàm thực trơn trên một tập mở chứa vết của r, khi đó:

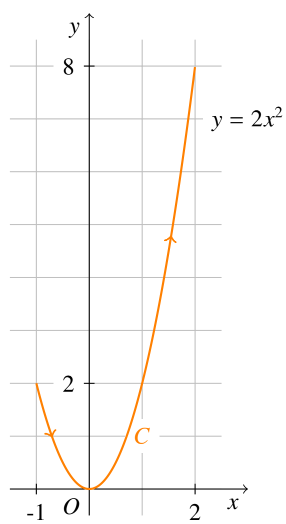
$$\int_r \nabla f \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A).$$

2.6.2 Ví dụ

Ví dụ 1.

Tính $\displaystyle\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ với $\vec{F}(x,y) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}$ là một trường bảo toàn và C là parabol $y = 2x^2$ từ điểm $(-1,2)$ đến điểm $(2,8)$.

Lời giải.



Vì $\vec{F}$ là trường bảo toàn, nên

$$\vec{F} = \nabla f \Rightarrow x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} = f_x(x,y)\,\vec{i} + f_y(x,y)\,\vec{j}.$$

Ta có:

$$f_x(x,y) = x^2 \Rightarrow f(x,y) = \frac{x^3}{3} + g(y).$$

Do đó:

$$f_y(x,y) = y^2 \Rightarrow g'(y) = y^2 \Rightarrow g(y) = \frac{y^3}{3} + K$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3} + K.$$

Áp dụng công thức Newton-Leibniz:

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = f(2,8) - f(-1,2) = 171.$$

Vậy $\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = 171$ với $\vec{F}(x,y) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}$, C là parabol $y = 2x^2$ từ $(-1,2)$ đến $(2,8)$.

Ví dụ 2

Tính $\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$ với $\vec{F}(x,y) = (xy^2)\,\vec{i} + (x^2y)\,\vec{j}$ là một trường bảo toàn và $C:\ r(t) = \left(t + \sin\frac{1}{2}\pi t, t + \cos\frac{1}{2}\pi t\right),\ 0 \le t \le 1.$

Lời giải.

Vì $\vec{F}$ là trường bảo toàn, nên

$$\vec{F} = \nabla f \Rightarrow (xy^2)\,\vec{i} + (x^2y)\,\vec{j} = f_x(x,y)\,\vec{i} + f_y(x,y)\,\vec{j}.$$

Ta có:

$$f_x(x,y) = xy^2 \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}(xy)^2 + g(y).$$

Do đó:

$$x^2y + g'(y) = x^2y \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = K$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}(xy)^2 + K.$$

Áp dụng công thức Newton-Leibniz:

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = 2.$$

Vậy $\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = 2$ với $\vec{F}(x,y) = (xy^2)\,\vec{i} + (x^2y)\,\vec{j}$, $C:\ r(t) = \left(t + \sin\frac{1}{2}\pi t, t + \cos\frac{1}{2}\pi t\right),\ 0 \le t \le 1.$

2.7 Áp dụng định lý Green

11	20120007	Đỗ Trung Hiếu	Kiểm tra chéo
23	20120021	Hồ Văn Sơn	LaTeX
24	20120022	Lê Quang Trí	Kiểm tra chéo
99b	20120131	Nguyễn Văn Lộc	Kiểm tra chéo
130	20120209	Nguyễn Nhật Tiến	Lý thuyết
139	20120412	Nguyễn Quang Bình	Ví dụ
141	20120459	Nguyễn Văn Dũng	LaTeX
147	20120572	Nguyễn Kiều Minh Tâm	Kiểm tra chéo

2.7.1 Định lý Green

Cho D là một miền đơn giản theo cả hai chiều với biên ∂D trơn từng khúc được định hướng tương thích (định hướng dương). Giả sử $\vec{F} = (P, Q)$ là một trường vectơ trơn trên một tập mở Ω chứa D. Khi đó:

$$\int_{\partial D} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy.$$

Một cách trực quan, biên D được định hướng sao cho khi đi trên biên thì miền nằm bên tay trái.

Nếu ∂D có định hướng âm

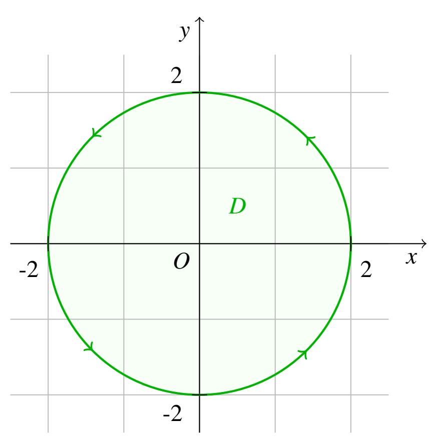
$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = -\int_{-\partial D} Pdx + Qdy = -\iint_D (Q_x - P_y) dA.$$

2.7.2 Ví dụ

Ví dụ 1

Tính $\oint_C (x-y)dx + (x+y)dy$ với $C : x^2 + y^2 = 4$.

Lời giải.



Xét miền $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Áp dụng định lý Green với D là miền phẳng bao bởi C:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Cho nên:

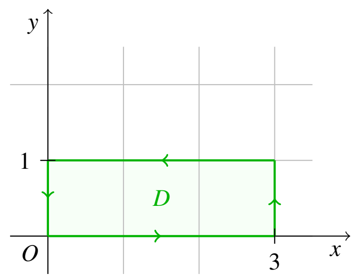
$$\oint_C (x-y)dx + (x+y)dy = \iint_D 2dA = 8\pi.$$

Vậy $\displaystyle\oint_C (x-y)dx + (x+y)dy = 8\pi.$

Ví dụ 2

Tính $\displaystyle\oint_C xydx + x^2dy$ với C là biên của hình chữ nhật tạo bởi các điểm $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$, và $(0,1)$.

Lời giải.



Xét miền $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$.

Áp dụng định lý Green với D là miền phẳng bao bởi C:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Cho nên:

$$\oint_C xydx + x^2dy = \int_0^1 \int_0^3 \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1 \int_0^3 (2x-x)dxdy = \frac{9}{2}.$$

Vậy $\displaystyle\oint_C xydx + x^2dy = \frac{9}{2}.$

2.8 Ứng dụng định lý Green

11	20120007	Đỗ Trung Hiếu	Kiểm tra chéo
23	20120021	Hồ Văn Sơn	LaTeX
24	20120022	Lê Quang Trí	Kiểm tra chéo
99b	20120131	Nguyễn Văn Lộc	Kiểm tra chéo
130	20120209	Nguyễn Nhật Tiến	Lý thuyết
139	20120412	Nguyễn Quang Bình	Ví dụ
141	20120459	Nguyễn Văn Dũng	LaTeX
147	20120572	Nguyễn Kiều Minh Tâm	Kiểm tra chéo

2.8.1 Tóm tắt lý thuyết

Định lý Green có thể được sử dụng để tính diện tích sử dụng tích phân đường.

Diện tích của miền D được cho bởi:

$$A = \iint_D dA.$$

Miễn là chúng ta chọn được L và M sao cho:

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 1.$$

Khi đó:

$$A = \oint_C (Ldx + Mdy).$$

Các công thức tính diện tích của D:

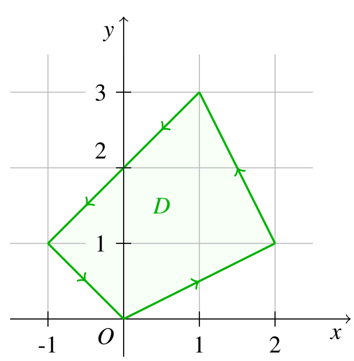
$$A = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C (-ydx + xdy).$$

2.8.2 Ví dụ

Ví dụ 1

Tính diện tích của tứ giác lồi tạo bởi các đỉnh $(0,0), (2,1), (1,3)$, và $(-1,1)$.

Lời giải.



Đặt tên các điểm $M(0,0)$, $N(2,1)$, $P(1,3)$, $Q(-1,1)$. Xét đường biên C của tứ giác được định hướng dương, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$, trong đó C_1 là đoạn thẳng nối từ M đến N, C_2 là đoạn thẳng nối từ N đến P, C_3 là đoạn thẳng nối từ P đến Q, C_4 là đoạn thẳng nối từ Q đến M.

Áp dụng định lý Green, diện tích đa giác được tính như sau:

$$A_D = \iint_D dA = \int_C xdy = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} xdy.$$

Xét tích phân đường $I_1 = \int_{C_1} xdy$. C_1 có một tham số hóa $x = 2y, y = y, y : 0 \to 1$.

$$I_1 = \int_0^1 xdy = \int_0^1 2ydy = y^2\Big|_0^1 = 1.$$

Xét tích phân đường $I_2 = \int_{C_2} xdy$. C_2 có một tham số hóa $x = 2 - t, y = 1 + 2t, t : 0 \to 1$.

$$I_2 = \int_0^1 xdy = \int_0^1 (2 - t).\,2\,dt = (4t - t^2)\Big|_0^1 = 3.$$

Xét tích phân đường $I_3 = \int_{C_3} xdy$. C_3 có một tham số hóa $x = 1 - 2t, y = 3 - 2t, t : 0 \to 1$.

$$I_3 = \int_0^1 xdy = \int_0^1 (1 - 2t).\,(-2)\,dt = (-2t + 2t^2)\Big|_0^1 = 0.$$

Xét tích phân đường $I_4 = \int_{C_4} xdy$. C_4 có một tham số hóa $x = -1 + t, y = 1 - t, t : 0 \to 1$.

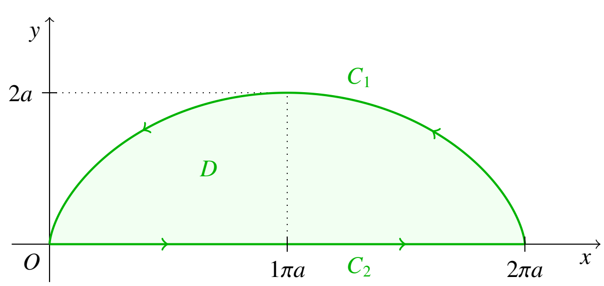
$$I_4 = \int_0^1 xdy = \int_0^1 (-1 + t).\,(-dt) = \frac{1}{2}(2t - t^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Vậy $A_D = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 1 + 3 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Ví dụ 2

Tính diện tích của miền D giới hạn bởi một cung cycloid $L : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(a > 0, t \in [0, 2\pi])$ và trục Ox.

Lời giải.



Miền D được bao bởi đường cong kín $C = C_1 \cup C_2$, với C_1 là cung cycloid L từ điểm $(2\pi a, 0)$ đến điểm $(0, 0)$, C_2 là đoạn thẳng từ điểm $(0, 0)$ đến điểm $(2\pi a, 0)$.

Xét trên đường cong C_1, với $t : 2\pi \to 0$. Từ định nghĩa cung cycloid L, ta có: $\begin{cases} dx = a(1 - \cos t)\,dt \\ dy = a\sin t\,dt. \end{cases}$

$$-\int_{C_1} y\,dx = -\int_{2\pi}^{0} a(1-\cos t)\,.\,a(1-\cos t)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt = 3\pi a.$$

Xét trên đường cong $C_2 : y = 0$, ta có:

$$-\int_{C_2} y\,dx = 0.$$

Áp dụng định lý Green, diện tích miền D được tính như sau:

$$A_D = \iint_D dA = -\int_C y\,dx = -\int_{C_1} y\,dx - \int_{C_2} y\,dx = 3\pi a - 0 = 3\pi a.$$

[HẾT]