CHƯƠNG I

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

I.CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG:

1.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho tập hợp $V = \{ v_1, v_2, \ldots , v_n \}$ (gồm n *đỉnh*) và E là tập hợp gồm *hữu hạn cạnh nối một số các đỉnh* trong V (mỗi cạnh nối hai đỉnh khác nhau hoặc nối một đỉnh với chính đỉnh đó và *không phân biệt chiều* trên mỗi cạnh).

Cấu trúc G = (V, E) như trên gọi là *một đồ thị hữu hạn vô hướng cấp* n. Từ nay về sau ta chỉ nói gọn là đồ thị G = (V, E) vì ta chỉ khảo sát đồ thị hữu hạn.

Nếu có cạnh nối đỉnh $a \in V$ với chính nó thì ta gọi cạnh đó là *một vòng* (hay *một khuyên*) tại a. Tại mỗi đỉnh có thể có một hay nhiều vòng đi qua.

Nếu có nhiều cạnh nối đỉnh $a \in V$ với đỉnh $b \in V$ thì ta gọi các cạnh đó là *các cạnh song song* (hay *các cạnh lặp*) nối a và b.

Nếu đỉnh $a \in V$ không nối với bất kỳ đỉnh nào (kể cả chính nó) thì a gọi là *một đỉnh cô lập* của G.

Nếu đỉnh $a \in V$ chỉ có một cạnh đi qua thì a gọi là *một đỉnh treo* và cạnh duy nhất đi qua a được gọi là *một cạnh treo* của G.

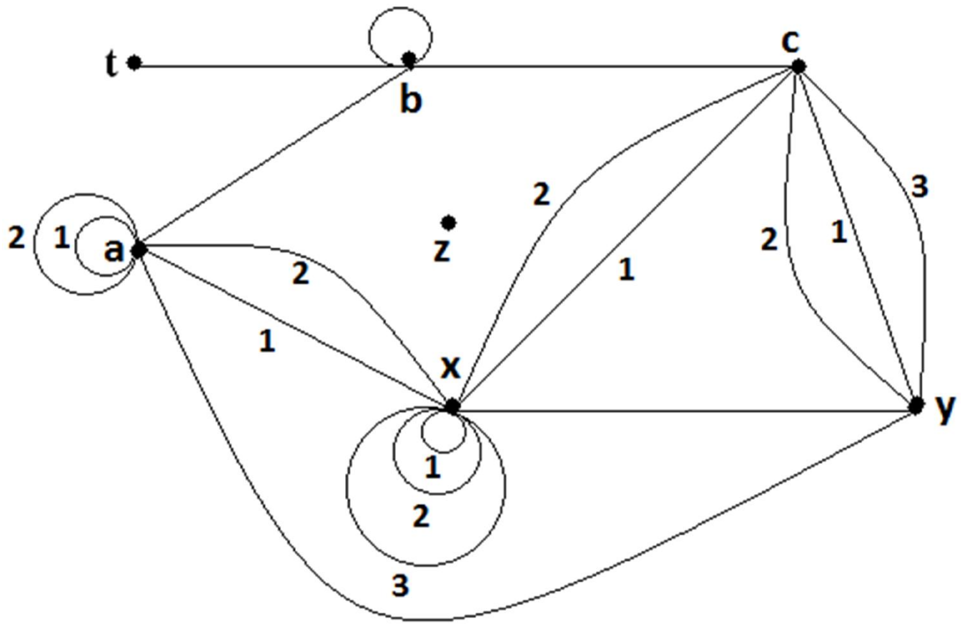
Ví dụ: Đồ thị G = (V, E) có 7 đỉnh và 18 cạnh như trong hình vẽ ở ngay dưới.

Ta có V = { a, b, c, x, y, z, t } (z là đỉnh cô lập và t là đỉnh treo) với

$E = \{ \overset{1}{\overline{aa}}, \overset{2}{\overline{aa}}, \overline{ab}, \overset{1}{\overline{ax}}, \overset{2}{\overline{ax}}, \overline{ay}, \overline{bb}, \overline{bc}, \overline{bt}, \overset{1}{\overline{cx}}, \overset{2}{\overline{cx}}, \overset{1}{\overline{cy}}, \overset{2}{\overline{cy}}, \overset{3}{\overline{cy}}, \overset{1}{\overline{xx}}, \overset{2}{\overline{xx}}, \overset{3}{\overline{xx}}, \overline{xy} \}$

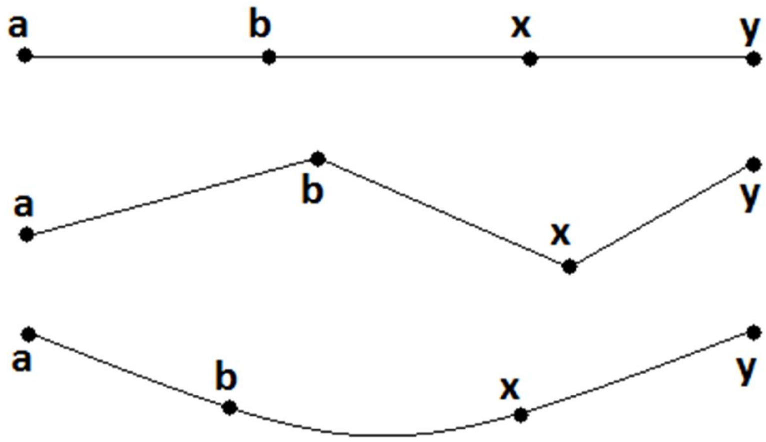
G có vòng $\overset{1}{\overline{aa}}, \overset{2}{\overline{aa}}, \overline{bb}, \overset{1}{\overline{xx}}, \overset{2}{\overline{xx}}, \overset{3}{\overline{xx}}$ tại các đỉnh a, b và x.

G có các cạnh lặp $\overset{1}{\overline{ax}}, \overset{2}{\overline{ax}}, \overset{1}{\overline{cx}}, \overset{2}{\overline{cx}}, \overset{1}{\overline{cy}}, \overset{2}{\overline{cy}}, \overset{3}{\overline{cy}}$ và cạnh treo $\overline{bt}$.



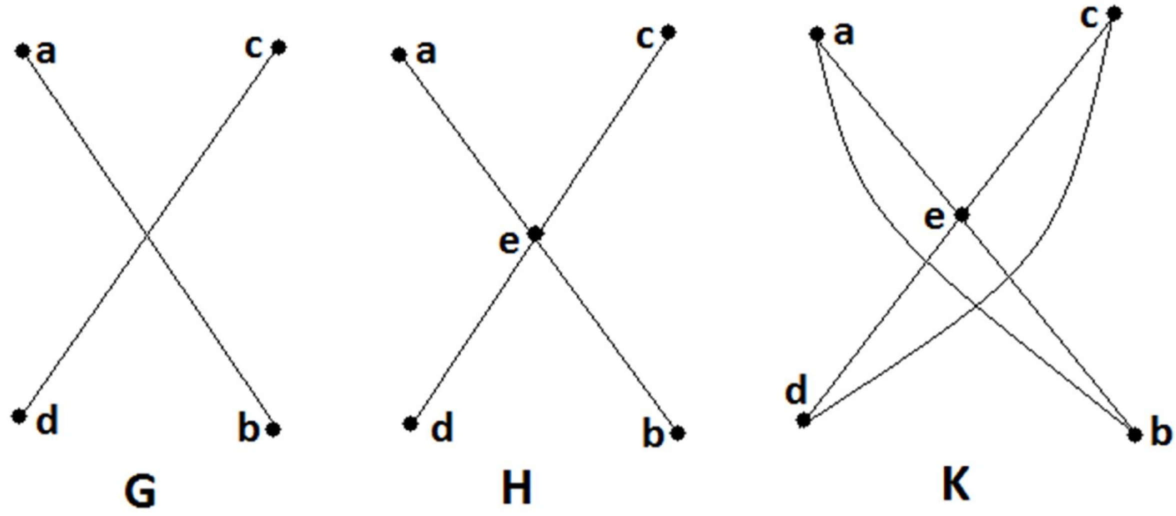
G = (V,E)

1.2/ <u>GHI CHÚ:</u> Các khái niệm hình học thông thường không sử dụng trong cấu trúc đồ thị. Chẳng hạn các khái niệm " *đường thẳng, đường cong, đường gãy* " không có ý nghĩa trong đồ thị. Các hình ảnh minh họa dưới đây giúp ta tránh ngộ nhận các khái niệm hình học thông thường trong đồ thị:



G

Các dạng thẳng, gãy và cong của cùng một đồ thị G. Mỗi dạng đồ thị của G có đúng 3 cạnh $\overline{ab}$, $\overline{bx}$ và $\overline{xy}$. G không có các cạnh $\overline{ax}$, $\overline{by}$ và $\overline{ay}$.

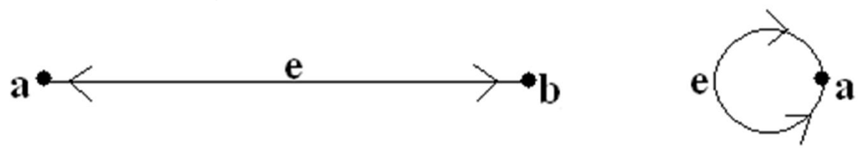


G có 4 đỉnh và 2 cạnh, H có 5 đỉnh và 4 cạnh, K có 5 đỉnh và 6 cạnh.

1.3/ <u>ĐỈNH KỀ:</u> Cho $G = (V, E)$ và $a, b \in V$ sao cho có cạnh e nối a với b.

a) Nếu $a \neq b$, ta nói a và b là *hai đỉnh kề nhau* trong G, cạnh e kề với các đỉnh a, b hay các đỉnh a, b kề với cạnh e. Ta cũng nói cạnh e tới đỉnh a (theo đúng một tia) rồi tới đỉnh b (theo đúng một tia). Ta viết $e = \overline{ab}$ hay $\overline{ba}$.

b) Nếu $a \equiv b$, ta nói vòng $e = \overline{aa}$ tới đỉnh a (theo hai tia khác nhau).



c) Ký hiệu $\Gamma(a) = \{ v \in V \mid \overline{av} \in E \}$ (tập hợp các đỉnh kề của a trong G).

<u>Ví dụ:</u> Cho đồ thị $G = (V, E)$ trong **Ví dụ (1.1)**.

Ta có $\Gamma(a) = \{ a, b, x, y \}$, $\Gamma(z) = \varnothing$ và $\Gamma(y) = \{ a, c, x \}$.

1.4/ <u>PHÂN LOẠI ĐỒ THỊ:</u> Cho $G = (V, E)$.

a) G là *một đơn đồ thị* (*đồ thị đơn*) nếu G không có cả vòng lẫn các cạnh lặp.

Nếu G là *một đơn đồ thị* thì G hoàn toàn được xác định khi biết V và tập hợp $\Gamma(v)$, $\forall v \in V$. Lúc đó ta có thể ghi $G = (V, \Gamma(V))$.

b) G là *một đa đồ thị* nếu G có các cạnh lặp và không có vòng.

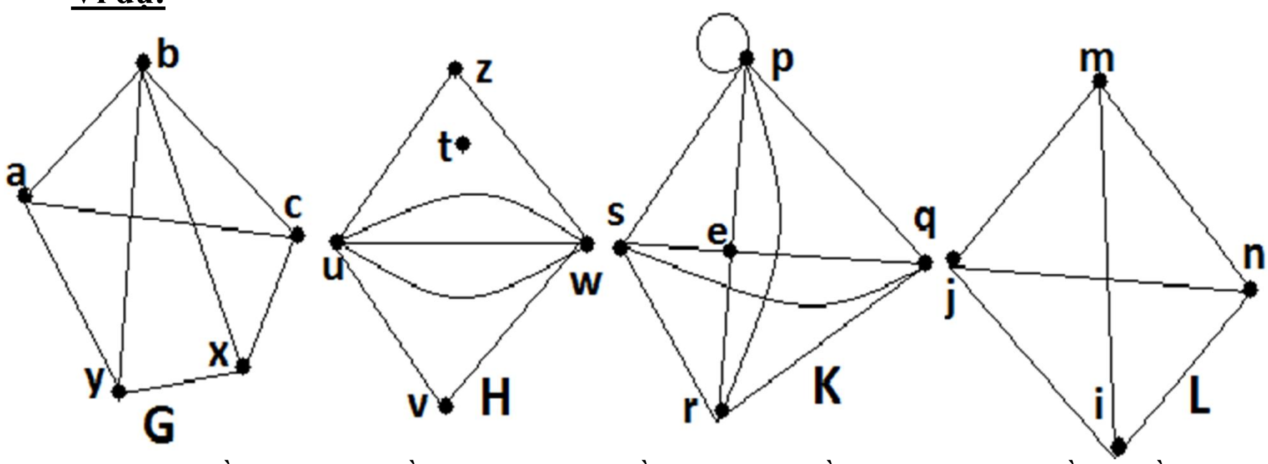
c) G là *một giả đồ thị* nếu G có vòng (có thể có hoặc không có các cạnh lặp).

d) G là *một đồ thị đầy đủ* nếu hai đỉnh khác nhau bất kỳ của G là kề nhau.

e) G là *một đồ thị rỗng* nếu $E = \varnothing$ (nghĩa là G không có cạnh nào và mọi đỉnh của G đều là đỉnh cô lập).

f) G là *một đồ thị* k_*đều* nếu mỗi đỉnh của G đều kề với k đỉnh khác.

Ví dụ:



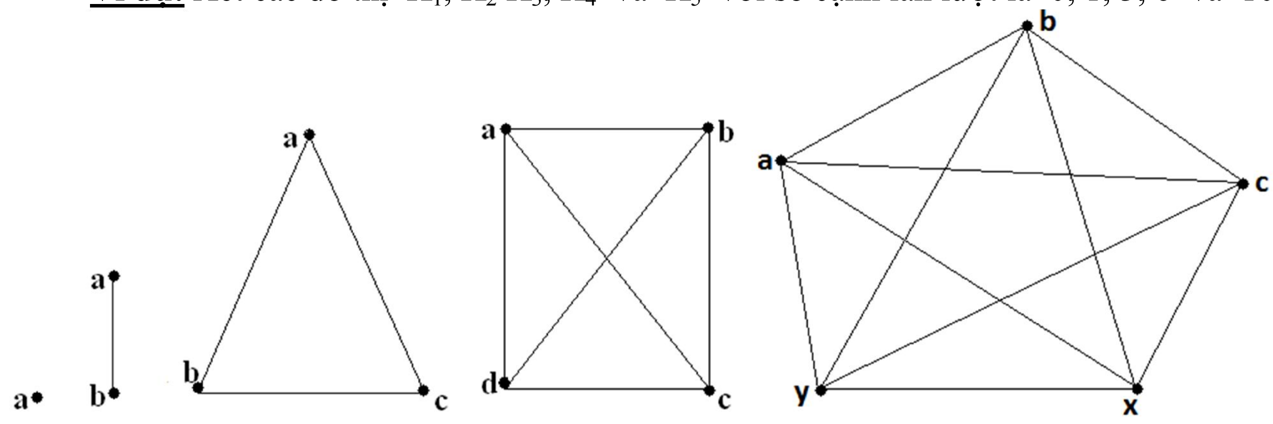
G là đơn đồ thị không đầy đủ, H là đa đồ thị không đầy đủ, K là giả đồ thị đầy đủ và L là đơn đồ thị đầy đủ. Hơn nữa L là đồ thị 3_đều.

1.5/ MỆNH ĐỀ: Ký hiệu K_n là *đơn đồ thị đầy đủ* có n đỉnh với $n \geq 1$.

Khi đó K_n có $2^{-1}n(n-1)$ cạnh.

Thật vậy, khi $n = 1$ thì hiển nhiên. Khi $n \geq 2$ thì số cạnh của K_n chính là số cách chọn 2 đỉnh khác nhau từ n đỉnh (mỗi cạnh nối 2 đỉnh khác nhau), nghĩa là số cạnh của K_n là $C_n^2 = 2^{-1}n(n-1)$.

Ví dụ: Xét các đồ thị K_1, K_2 K_3, K_4 và K_5 với số cạnh lần lượt là 0, 1, 3, 6 và 10:



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

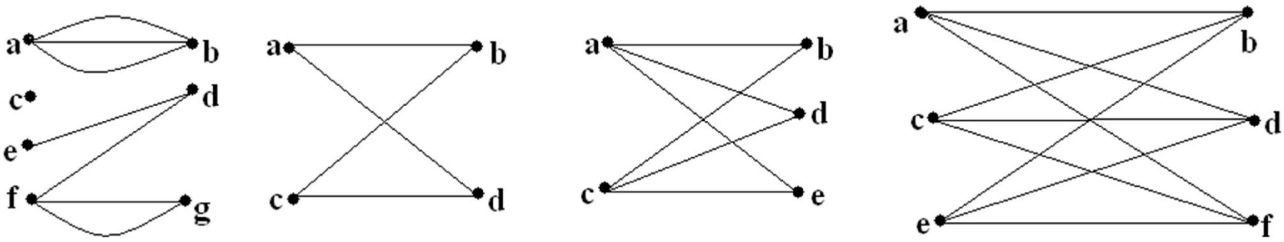
1.6/ <u>ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN:</u> Cho G = (V, E).

a) G là *đồ thị lưỡng phân* nếu $V = V_1 \cup V_2$ với $V_1 \neq \varnothing \neq V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ và mỗi cạnh của G đều kề với một đỉnh của V_1 và một đỉnh của V_2.

b) Đồ thị lưỡng phân G là *đầy đủ* nếu G là đơn đồ thị và mỗi đỉnh của V_1 đều kề với mọi đỉnh của V_2.

c) Ký hiệu $K_{m,\,n} = (V, E)$ là đồ thị lưỡng phân đầy đủ có $|\,V_1\,| = m$ và $|\,V_2\,| = n$. Khi đó $|\,V\,| = m + n$ và $|\,E\,| = mn$.

<u>Ví dụ:</u> Các đồ thị lưỡng phân : G, $K_{1,1} \equiv K_2$, $K_{2,2}$, $K_{2,3}$ và $K_{3,3}$ (G không đầy đủ).



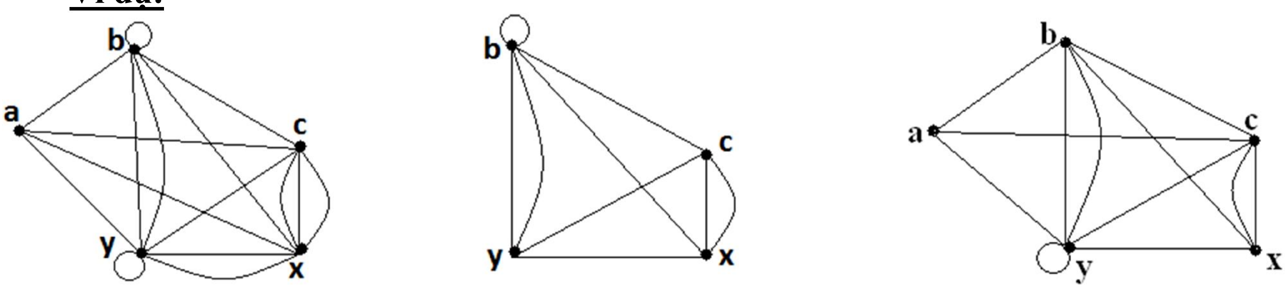
G **$K_{2,2}$** **$K_{2,3}$** **$K_{3,3}$**

1.7/ **<u>ĐỒ THỊ CON:</u>** Cho các đồ thị G = (V, E) và G' = (V', E').

a) Ta nói G' là *một đồ thị con* của G (ký hiệu G' ≤ G) nếu V' ⊂ V và E' ⊂ E, nghĩa là G' = G hoặc G' có từ G bằng cách *xóa bớt một số đỉnh hay xóa bớt một số cạnh nào đó*. Quan hệ đồ thị con là *một quan hệ thứ tự* trên tập hợp các đồ thị.

b) Ta nói G' là *một đồ thị con khung* của G nếu V' = V và E' ⊂ E, nghĩa là G' có được từ G bằng cách *xóa bớt một số cạnh*.

<u>Ví dụ:</u>



G = (V, E) **G' = (V', E')** **G" = (V, E")**

G' là một đồ thị con (không phải khung) của G nhưng G" là một đồ thị con khung của G.

Lưu ý : Khi *xóa một đỉnh* thì đương nhiên phải xóa luôn mọi cạnh đi qua đỉnh đó. Khi *xóa một cạnh* thì không xóa các đỉnh kề với cạnh đó (nếu muốn xóa đỉnh thì cần nói rõ)

II. MA TRẬN KỀ VÀ MA TRẬN LIÊN KẾT CỦA ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG:

2.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho $G = (V, E)$ và $a \in V$.

a) Đặt $d(a)$ = (bậc của đỉnh a) = *số tia khác nhau* tới đỉnh a

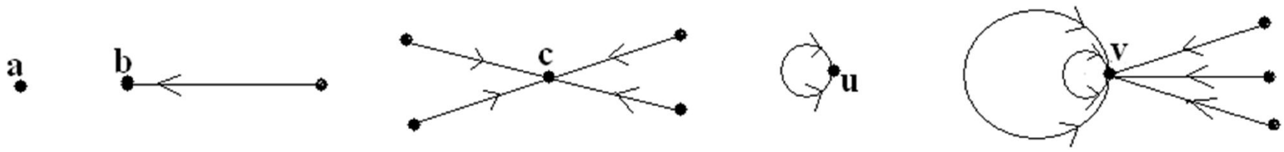
Như vậy một cạnh (mà không phải là vòng) tới a sẽ tạo 1 bậc cho a.

Một vòng tại a sẽ tạo ra 2 bậc cho a.

b) Nếu a là *một đỉnh cô lập* thì $d(a) = 0$. Nếu a là *một đỉnh treo* thì $d(a) = 1$.

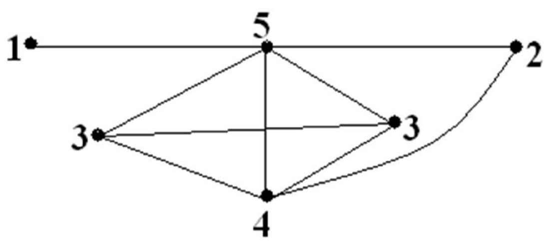
Ví dụ:

a)

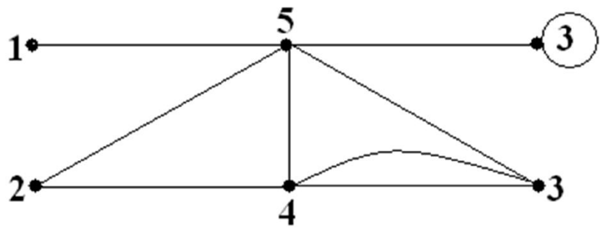


d(a) = 0 **d(b) = 1** **d(c) = 4** **d(u) = 2** **d(v) = 2 + 2 + 3 = 7**

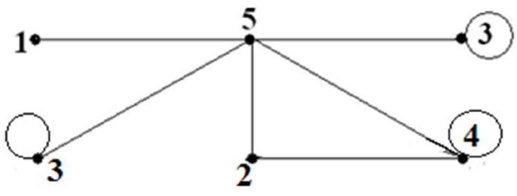
b) Vẽ phác họa một đơn đồ thị, một giả đồ thị (có hoặc không có các cạnh song song) và một đa đồ thị có 6 đỉnh với bậc lần lượt là 1, 2, 3, 3, 4 và 5.



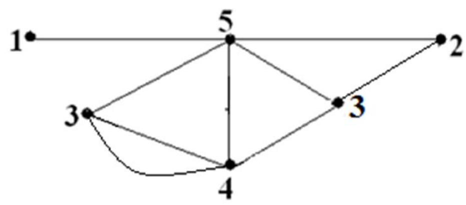
Đơn đồ thị



Giả đồ thị có các cạnh song song



Giả đồ thị không có các cạnh song song



Đa đồ thị

c) $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị có n đỉnh ($n \geq 1$). Khi đó G không có vòng tại mỗi đỉnh và giữa hai đỉnh khác nhau có không quá một cạnh nối. Do đó mỗi đỉnh của V có bậc không vượt quá (n – 1) và số cạnh của G không vượt quá $2^{-1}n(n-1)$. Hơn nữa G có ít nhất hai đỉnh nào đó có cùng bậc. Thật vậy, nếu các đỉnh của G có bậc đều khác nhau thì các bậc này phải là 0, 1, …, (n – 1). Đỉnh bậc (n – 1) phải có cạnh nối với (n – 1) đỉnh còn lại nên G không thể có đỉnh cô lập bậc 0: mâu thuẫn!

2.2/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> (Sự liên quan giữa *số cạnh* và *bậc của các đỉnh* trong đồ thị vô hướng)

Cho G = (V, E). Khi đó

a) Tổng các bậc của mọi đỉnh trong G bằng hai lần số cạnh, nghĩa là

$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|\,E\,|$ = một số nguyên chẵn. Suy ra $|\,E\,| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d(v)$.

b) Số lượng *các đỉnh bậc lẻ* trong G là *một số nguyên chẵn.*

c) Tổng các bậc của *mọi đỉnh có bậc lẻ* trong G là *một số nguyên chẵn,* nghĩa là

$\sum_{v \in V} [d(v)$ lẻ$]$ = một số nguyên chẵn.

<u>**Ví dụ:**</u>

a) Có đồ thị nào có 6 đỉnh với bậc lần lượt là 3, 6, 7, 10, 15 và 20 không ?

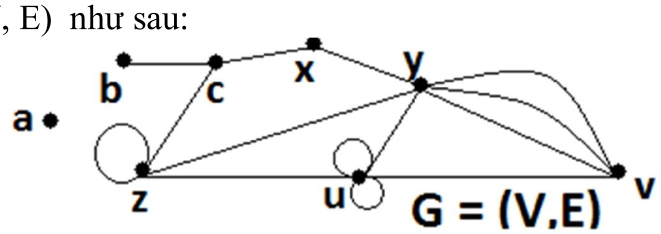
Không tồn tại đồ thị nào như vậy vì một trong 3 điều sau mâu thuẫn với **(2.2)**:

* Tổng bậc của 6 đỉnh là 3 + 6 + 7 + 10 + 15 + 20 = 61 là một số nguyên lẻ!

* Số đỉnh bậc lẻ của đồ thị là 3: một số nguyên lẻ!

* Tổng bậc của các đỉnh bậc lẻ là 3 + 7 + 15 = 25 là một số nguyên lẻ!

b) Cho G = (V, E) như sau:



d(a) = 0, d(b) = 1, d(x) = 2, d(c) = 3, d(v) = 4, d(z) = 5, d(y) = 6 và d(u) = 7.

Tổng mọi bậc của các đỉnh trong G là (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 28.

Suy ra $|\,E\,| = 2^{-1}$(tổng mọi bậc của các đỉnh trong G) = $2^{-1}(28) = 14$.

G có 4 đỉnh bậc lẻ là b, c, z và u. G có (tổng các bậc lẻ) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16.

c) Một nhóm có 9 sinh viên. Ta chỉ ra rằng không thể nào mỗi sinh viên của nhóm quen đúng 5 sinh viên khác trong nhóm. Giả sử điều đó xảy ra. Ta sẽ có một đồ thị G = (V, E) có 9 đỉnh mà mỗi đỉnh có bậc là 5. Khi đó

$\sum_{v\in V} d(v) = 9 \times 5 = 45 = 2\,|\,E\,|$ = một số nguyên chẵn: mâu thuẫn !

d) Tính số cạnh của G = (V, E) có 6 đỉnh với bậc lần lượt là 1, 3, 4, 5, 8 và 9.

Ta có $|\,E\,| = 2^{-1} \sum_{v\in V} d(v) = 2^{-1}(\,1 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9\,) = 15$.

e) H = (V, E) có 34 cạnh với 3 đỉnh bậc 6 và các đỉnh khác có bậc là 5 và 8. Tính số đỉnh của H.

Gọi x và y lần lượt là số đỉnh bậc 5 và 8 của H (x và y nguyên ≥ 1). Ta có

$\sum_{v\in V} d(v) = (3 \times 6) + 5x + 8y = 2\,|\,E\,| = 2 \times 34$, nghĩa là $5x + 8y = 50$.

Suy ra $y \,\vdots\, 5$ và $8 \leq 8y \leq 50 - 5x \leq 45$. Do đó $y = 5$ và $x = 5^{-1}(50 - 8y) = 2$

Vậy $|\,V\,| = 3 + 2 + 5 = 10$.

2.3/ MA TRẬN KỀ CỦA ĐỒ THỊ:

Cho G = (V, E) có $V = \{\, v_1, v_2, \ldots, v_n \,\}$ (tập hợp V *được sắp thứ tự*).

Với $1 \leq i \neq j \leq n$, đặt

m_{ii} = (số tia đến đỉnh v_i của các vòng đi qua v_i) = 2 (số vòng đi qua đỉnh v_i) và

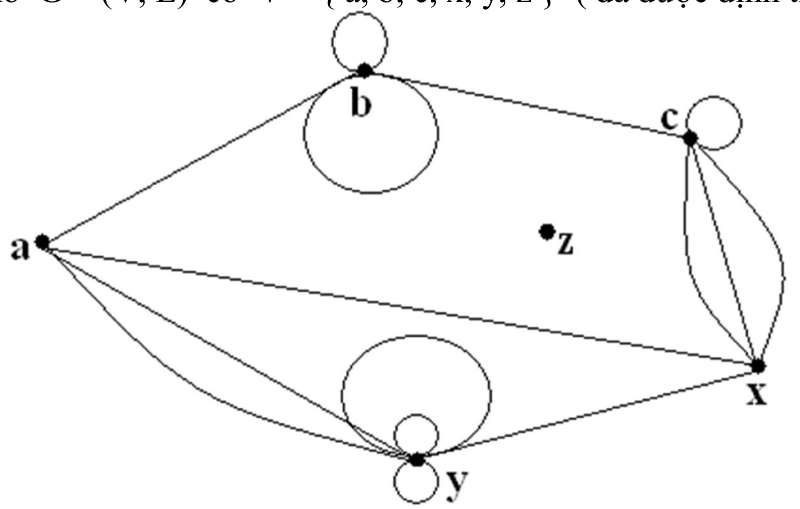
$m_{ij} = m_{ji}$ = số cạnh nối đỉnh v_i với đỉnh v_j .

Ký hiệu $M_G = M = \left(m_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ và ta nói M_G là *ma trận kề* của G.
M_G thay đổi khi ta sắp xếp lại thứ tự của tập hợp V.

M_G là *một ma trận vuông đối xứng cấp* n (do $m_{ij} = m_{ji}$ khi $1 \leq i \neq j \leq n$) và có *các hệ số nguyên chẵn không âm* m_{ii} ($1 \leq i \leq n$) *trên đường chéo chính.*

G và M_G có thể suy ra lẫn nhau. Ta có thể giới thiệu một đồ thị hữu hạn bằng *một ma trận kề của nó* tương ứng với *một thứ tự được định sẵn* trên V.

Ví dụ: Cho G = (V, E) có V = { a, b, c, x, y, z } (đã được định thứ tự) như sau:



G = (V, E)

G có ma trận kề $M_G = \left(m_{ij}\right)_{1\le i,j\le 6}$ như sau:

M_G	**a**	**b**	**c**	**x**	**y**	**z**
a	0*	1	0	1	2	0
b	1	4*	1	0	0	0
c	0	1	2*	3	0	0
x	1	0	3	0*	1	0
y	2	0	0	1	6*	0
z	0	0	0	0	0	0*

2.4/ MỆNH ĐỀ: Cho G = (V, E) có V = { $v_1, v_2, \dots, v_n$ } và $M_G = \left(m_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$.

a) Với $1 \le k \le n$, ta có $d(v_k) = \sum_{j=1}^{n} m_{kj}$ = Tổng các hệ số trên dòng thứ k

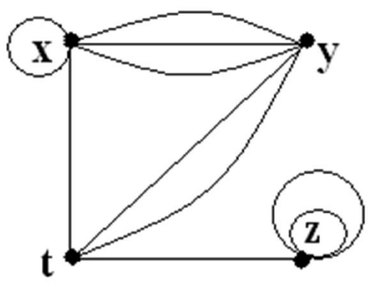
$= \sum_{i=1}^{n} m_{ik}$ = Tổng các hệ số trên cột thứ k

b) Suy ra $|E| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}$ = Nửa tổng các hệ số trong ma trận M_G .

Ví dụ: Cho G = (V, E) có V = { x, y, z, t } và ma trận kề M_G như sau:

M_G	**x**	**y**	**z**	**t**
x	2*	3	0	1
y	3	0*	0	2
z	0	0	4*	1
t	1	2	1	0*

Vẽ phác họa đồ thị G :



G = (V, E)

Ta có d(x) = 2 + 3 + 1 = 6, d(y) = 3 + 2 = 5, d(z) = 4 + 1 = 5, d(t) = 1 + 2 + 1 = 4

và $| E | = 2^{-1}[d(x) + d(y) + d(z) + d(t)] = 2^{-1}(6 + 5 + 5 + 4) = 10$.

2.5/ <u>MA TRẬN LIÊN KẾT CỦA ĐỒ THỊ:</u>

Cho G = (V, E) có $V = \{ v_1, v_2, \dots , v_n \}$ và $E = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_P \}$ (V và E *có thứ tự*).

Với $1 \le i \le n$ và $1 \le j \le p$, đặt $a_{ij} = 2$ (nếu cạnh ε_j là vòng tại đỉnh v_i)

$a_{ij} = 1$ (nếu cạnh ε_j kề với đỉnh v_i và ε_j không là vòng)

và $a_{ij} = 0$ (nếu cạnh ε_j không kề với đỉnh v_i)

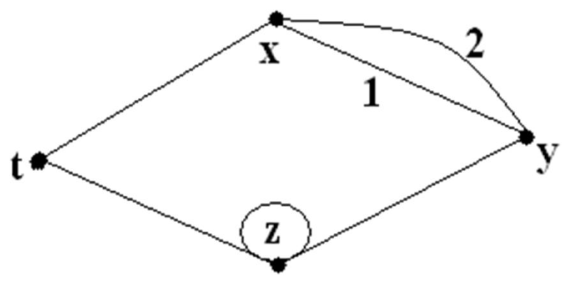
Ký hiệu $A_G = A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ và ta nói A_G là *ma trận liên kết* của G.

A_G thay đổi khi ta sắp xếp lại thứ tự của các tập hợp V và E.

A_G là *một ma trận kích thước* $n \times p$ và có *các hệ số đều nguyên không âm* .

G và A_G có thể suy ra lẫn nhau. Ta có thể giới thiệu một đồ thị hữu hạn bằng *một ma trận kề của nó* tương ứng với *một thứ tự được định sẵn* trên V và E.

<u>Ví dụ:</u> Cho G = (V, E) có V = { x, y, z, t } và E = { α, β, γ, δ, ε, μ } với $\alpha = \overset{1}{\overline{xy}}$, $\beta = \overset{2}{\overline{xy}}$, $\gamma = \overline{yz}$, $\delta = \overline{zz}$, $\varepsilon = \overline{zt}$ và $\mu = \overline{xt}$ như sau:



G = (V, E)

G có ma trận liên kết là A_G như sau :

A_G	α	β	γ	δ	ε	μ
x	1	1	0	0	0	1
y	1	1	1	0	0	0
z	0	0	1	2	1	0
t	0	0	0	0	1	1

2.6/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $G = (V, E)$ có $V = \{ v_1, v_2, \dots , v_n \}$ và $A_G = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$.

a) Với $1 \le k \le n$, ta có $d(v_k) = \sum_{j=1}^{p} a_{kj}$ = Tổng các hệ số trên dòng thứ k.

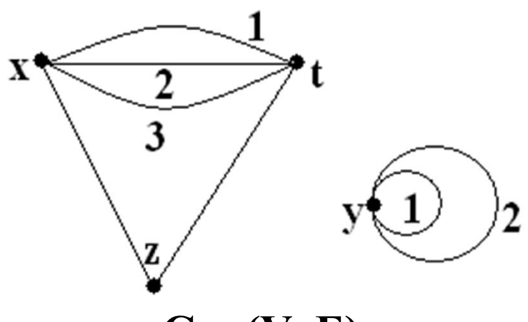
Với $1 \le k \le p$, ta có $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = 2$ = Tổng các hệ số trên cột thứ k

b) Suy ra $| E | = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{ij}$ = nửa tổng các hệ số trong ma trận A_G .

<u>Ví dụ:</u> Cho $G = (V, E)$ có $V = \{ x, y, z, t \}$ và $E = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu, \nu \}$ với $\alpha = \overline{xz}$, $\beta = \overset{1}{\overline{yy}}$, $\gamma = \overset{2}{\overline{yy}}$, $\delta = \overline{zt}$, $\varepsilon = \overset{1}{\overline{xt}}$, $\mu = \overset{2}{\overline{xt}}$ và $\nu = \overset{3}{\overline{xt}}$ cùng với ma trận liên kết A_G như sau:

A_G	α	β	γ	δ	ε	μ	ν
x	1	0	0	0	1	1	1
y	0	2	2	0	0	0	0
z	1	0	0	1	0	0	0
t	0	0	0	1	1	1	1

Vẽ phác họa đồ thị G :



G = (V, E)

Ta có $d(x) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, $d(y) = 2 + 2 = 4$, $d(z) = 1 + 1 = 2$, $d(t) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

và $| E | = 2^{-1}[d(x) + d(y) + d(z) + d(t)] = 2^{-1}(4 + 4 + 2 + 4) = 7$.

III. ĐƯỜNG - CHU TRÌNH CỦA ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG LIÊN THÔNG:

3.1/ ĐƯỜNG VÀ CHU TRÌNH: Cho G = (V, E).

a) *Một đường* (P) trong G là tập hợp của hữu hạn các cạnh liên tiếp nhau

$\varepsilon_1 = \overline{v_1v_2}$, $\varepsilon_2 = \overline{v_2v_3}$, $\varepsilon_3 = \overline{v_3v_4}$, … , $\varepsilon_{k-1} = \overline{v_{k-1}v_k}$ và $\varepsilon_k = \overline{v_kv_{k+1}}$.

Các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ và các cạnh $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ *không nhất thiết khác nhau*.

Ta có thể chọn *một trong hai chiều* để liệt kê các đỉnh và các cạnh của (P).

Ký hiệu (P) : $\overline{v_1\varepsilon_1v_2\varepsilon_2v_3...v_{k-1}\varepsilon_{k-1}v_k\varepsilon_kv_{k+1}}$ (v_1 là *đỉnh đầu* và v_{k+1} là *đỉnh cuối*)

hay (P) : $\overline{v_{k+1}\varepsilon_kv_k\varepsilon_{k-1}v_{k-1}...v_3\varepsilon_2v_2\varepsilon_1v_1}$ (v_{k+1} là *đỉnh đầu* và v_1 là *đỉnh cuối*).

Ta có thể ghi gọn là (P) : $\overline{v_1v_2v_3...v_{k-1}v_kv_{k+1}}$ hay (P) : $\overline{v_{k+1}v_kv_{k-1}...v_3v_2v_1}$ nếu (P) là một đơn đồ thị (vì lúc đó mỗi cạnh được xác định khi ta biết hai đỉnh của nó).

Đặt L(P) là [*độ dài* của đường (P)] = [số cạnh của đường (P)] = k.

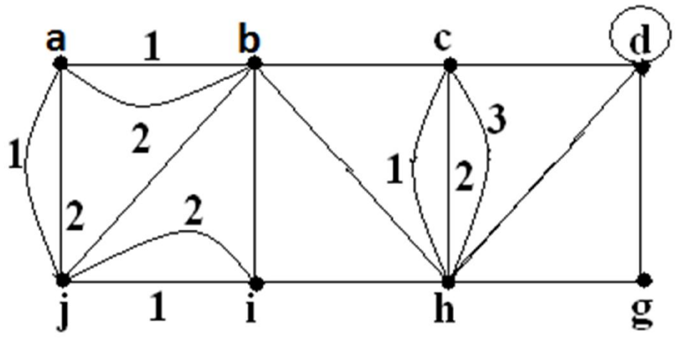
b) Nếu đường (P) có các cạnh $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ đều khác nhau thì (P) là *đường đơn*.

c) Nếu đường (P) có các cạnh $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ và các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_k$ đều khác nhau thì (P) là *đường sơ cấp*. Đường sơ cấp đương nhiên là một đường đơn.

d) Nếu đường (P) có $v_{k+1} \equiv v_1$ (nghĩa là (P) là một đường khép kín) thì ta nói (P) là *một chu trình*. Trong một chu trình, ta có thể chọn bất kỳ đỉnh nào làm *đỉnh khởi đầu* và chọn *một trong hai chiều* để liệt kê các đỉnh và các cạnh của (P).

e) Định nghĩa tương tự cho *chu trình đơn* và *chu trình sơ cấp*.

Ví dụ:



G = (V, E)

Đặt $\alpha = \overset{1}{\overline{ab}}$, $\beta = \overline{bh}$, $\gamma = \overset{2}{\overline{hc}}$, $\delta = \overline{cd}$, $\varepsilon = \overline{dd}$, $\omega = \overline{cb}$, $\rho = \overset{2}{\overline{aj}}$, $\theta = \overline{hi}$, $\mu = \overset{1}{\overline{ij}}$, $\nu = \overset{2}{\overline{ba}}$, $\sigma = \overline{jb}$.

Đường sơ cấp (P_1) : $\overline{a\alpha b\beta h\gamma c\delta d} \equiv \overline{d\delta c\gamma h\beta b\alpha a}$ có $L(P_1) = 4$.

Đường đơn (P_2) : $\overline{a\alpha b\beta h\gamma c\delta d\varepsilon d}$ có $L(P_2) = 5$.

Đường (P_3) : $\overline{a\alpha b\beta h\gamma c\omega b\alpha a\rho j}$ có $L(P_3) = 6$.

Chu trình sơ cấp (C_1) : $\overline{a\alpha b\beta h\theta i\mu j\rho a} \equiv \overline{a\rho j\mu i\theta h\beta b\alpha a} \equiv \overline{h\theta i\mu j\rho a\alpha b\beta h}$ có $L(C_1) = 5$.

Chu trình đơn (C_2) : $\overline{a\alpha b\beta h\theta i\mu j\sigma b\nu a}$ có $L(C_2) = 6$.

Chu trình (C_3) : $\overline{a\alpha b\omega c\gamma h\theta i\mu j\sigma b\alpha a}$ có $L(C_3) = 7$.

3.2/ <u>SỰ LIÊN THÔNG:</u> Cho G = (V, E).

a) Ta nói G *liên thông* nếu | V | = 1 hoặc (| V | ≥ 2 và giữa hai đỉnh khác nhau bất kỳ của G luôn luôn có đường nối). Đồ thị *đầy đủ* đương nhiên *liên thông*.

b) Suy ra G *không liên thông* nếu | V | ≥ 2 và có ít nhất hai đỉnh khác nhau của G mà không có đường nối giữa chúng trong G.

c) Nếu G *không liên thông* (*rời rạc*) thì G được phân hoạch thành *các đồ thị con liên thông tối đại rời nhau từng đôi một*. Mỗi đồ thị con liên thông tối đại đó được gọi là *một thành phần liên thông* của G.

d) G *liên thông* ⇔ G *không thể phân hoạch* thành các đồ thị con liên thông rời nhau từng đôi một.

Khi G liên thông, ta nói G có đúng *một thành phần liên thông* chính là G.

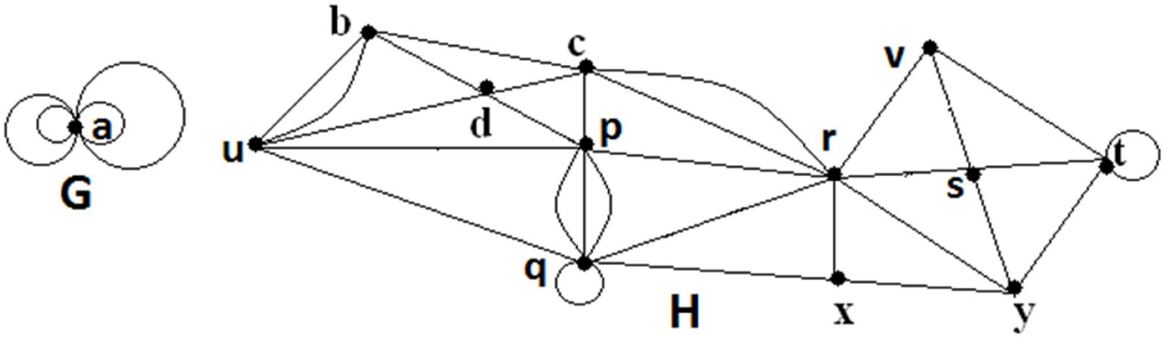
e) ∀u, v ∈ V, đặt

u ~ v ⇔ [(u ≡ v) hoặc (có ít nhất một đường nối từ u đến v trong G)].

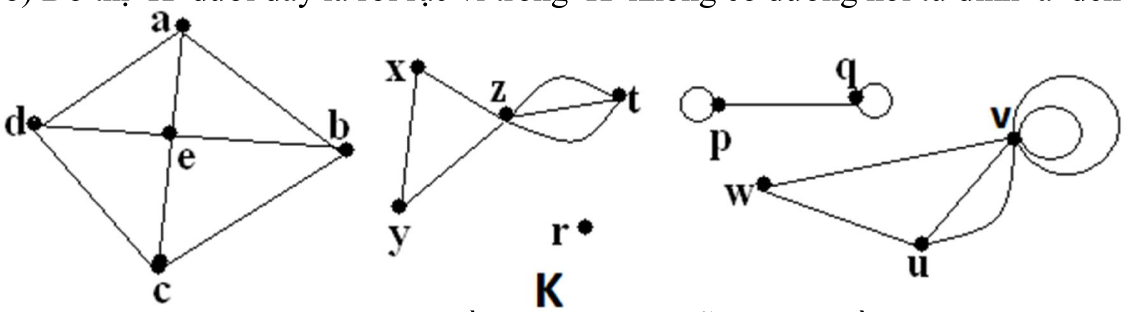
Ta có ~ là *một quan hệ tương đương* trên V. Nếu u ~ v thì ta nói u và v *liên thông với nhau*. ∀u ∈ V, $\overline{u}$ = { v ∈ V | v ~ u } là *lớp tương đương của u* và $\overline{u}$ chính là *tập hợp các đỉnh của thành phần liên thông chứa u* trong G.

Ví dụ:

a) Các đồ thị liên thông G và H:



b) Đồ thị K dưới đây là rời rạc vì trong K không có đường nối từ đỉnh a đến w.



K = (V, E) có 5 thành phần liên thông (mỗi thành phần liên thông là một đồ thị con liên thông tối đại của K).

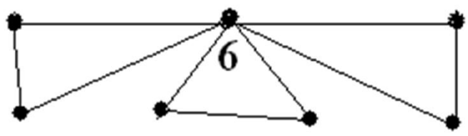
V được phân hoạch thành 5 lớp tương đương rời nhau từng đôi một như sau:

$\overline{a}$ = { a, b, c, d, e }, $\overline{x}$ = { x, y, z, t }, $\overline{r}$ = { r }, $\overline{p}$ = { p, q } và $\overline{u}$ = { u, v, w }.

Mỗi lớp tương đương chính là tập hợp các đỉnh của một thành phần liên thông tương ứng.

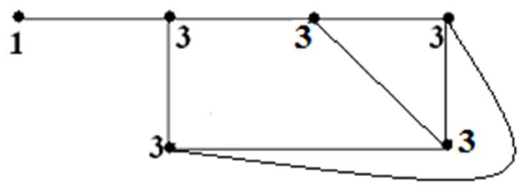
c) Một đơn đồ thị G có 7 đỉnh với ít nhất một đỉnh có bậc 6 thì liên thông.

Thật vậy, xét đỉnh v có bậc 6. Do G không có vòng và không có cạnh lặp nên v phải có cạnh nối lần lượt với 6 đỉnh còn lại của G, nghĩa là G liên thông.



d) Đồ thị H liên thông có ≥ 2 đỉnh và mọi đỉnh đều có bậc chẵn. Xóa một cạnh tùy ý $\overline{uv}$ của H (không xóa hai đỉnh u và v) để có đồ thị H’. Ta chỉ ra H’ vẫn liên thông. Do H liên thông và có ít nhất hai đỉnh nên H không có đỉnh cô lập, nghĩa là mọi đỉnh của H đều có bậc chẵn ≥ 2. Nếu H’ rời rạc thì không có đường nối u và v trong H’. Xét $H_u^{'}$ là thành phần liên thông của u trong H’ thì $v \notin H_u^{'}$. Trong $H_u^{'}$, u có bậc lẻ và các đỉnh khác của $H_u^{'}$ đều có bậc chẵn, nghĩa là tổng bậc của tất cả các đỉnh trong $H_u^{'}$ là một số nguyên lẻ : mâu thuẫn với **(2.2)**. Như vậy H’ vẫn liên thông.

e) L là đơn đồ thị có 6 đỉnh gồm một đỉnh treo và 5 đỉnh bậc 3. Khi đó L liên thông. Thật vậy, giả sử L rời rạc và L có các thành phần liên thông $L_1, L_2, \ldots$ và L_k $(k \geq 2)$. Từ giả thiết, ta thấy L không có đỉnh cô lập và mỗi thành phần liên thông của L phải chứa ít nhất hai đỉnh. Suy ra mỗi thành thông của L đều phải chứa ít nhất một đỉnh bậc 3, nghĩa là mỗi thành phần liên thông của L có ≥ 4 đỉnh. Do đó L có ít nhất $2 \times 4 = 8$ đỉnh : mâu thuẫn. Như vậy L liên thông.

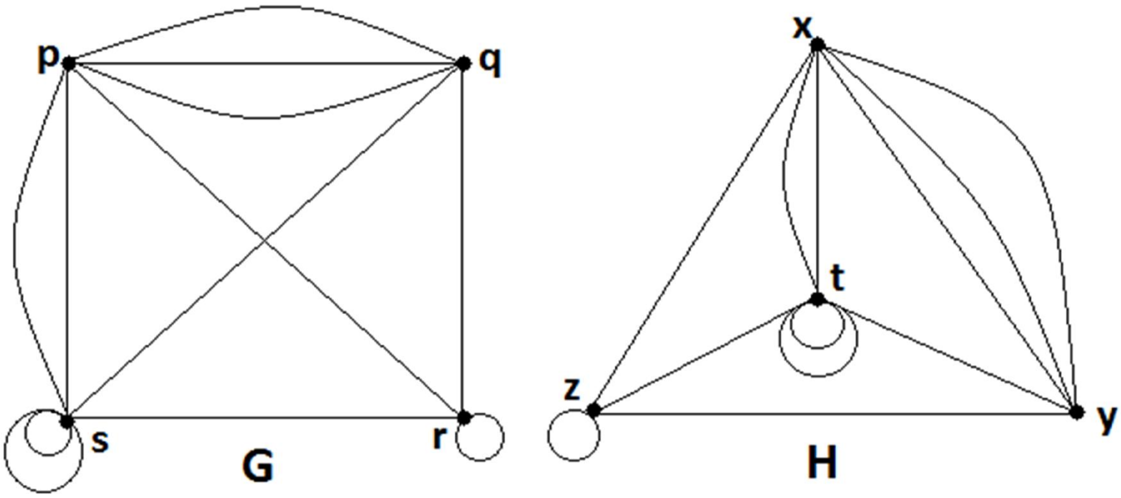


L

IV. <u>SỰ ĐẲNG CẤU CỦA CÁC ĐỒ THỊ</u>:

4.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho các đồ thị $G = (V, E)$ và $G’ = (V’. E’)$ có $| V | = | V’ |$. Viết $V = \{ a_1, a_2, \ldots , a_n \}$ (có thứ tự) và giả sử ta có thể sắp xếp thứ tự cho V’ thành $V’ = \{ b_1, b_2, \ldots , b_n \}$ sao cho ứng với các thứ tự đó ta có $M_G = M_{G’}$. Khi đó ta nói G và G’ *đẳng cấu với nhau* và ký hiệu $G \sim G’$.

<u>Ví dụ:</u> Cho $G = (V = \{p, q, r, s\}, E)$ và $H = (V' = \{x, y, z, t\}, E')$ như sau:



Ta viết các ma trận kề M_G và M_H và thấy rằng $M_G = M_H$ nên $G \sim H$.

M_G	p	q	r	s
p	0*	3	1	2
q	3	0*	1	1
r	1	1	2*	1
s	2	1	1	4*

M_H	x	y	z	t
x	0*	3	1	2
y	3	0*	1	1
z	1	1	2*	1
t	2	1	1	4*

4.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $G = (V, E) \sim G' = (V'. E')$. Khi đó

a) $|V| = |V'|$ (số đỉnh bằng nhau). b) $|E| = |E'|$ (số cạnh bằng nhau).

c) G và G' có *số thành phần liên thông* bằng nhau.

d) $\forall k$ nguyên ≥ 0, *số lượng các đỉnh bậc k* của G và G' bằng nhau.

e) *Số lượng chu trình* (*thường* hoặc *đơn* hoặc *sơ cấp*) của G và G' bằng nhau.

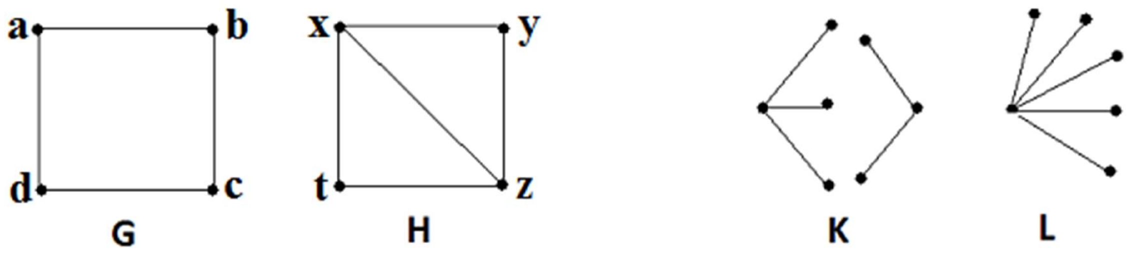
f) $\forall k$ nguyên ≥ 1, *số lượng chu trình* (*thường* hoặc *đơn* hoặc *sơ cấp*) *có độ dài* k của G và G' bằng nhau.

<u>Ví dụ:</u> Tự kiểm tra trên hai đồ thị đẳng cấu G và H trong **Ví dụ** (**4.1**).

4.3/ <u>HỆ QUẢ:</u> Cho các đồ thị $G = (V, E)$ và $G' = (V'. E')$.

Nếu G và G' không thỏa một trong các tính chất đã nêu trong (**4.2**) thì G và G' *không đẳng cấu với nhau*.

Ví dụ: Xét các đồ thị sau đây:



G không đẳng cấu với H vì một trong các lý do sau đây:

(G có 4 cạnh và H có 5 cạnh), (G có 4 đỉnh bậc 2 và H có 2 đỉnh bậc 2),

(G có một chu trình sơ cấp và H có 3 chu trình sơ cấp),

(G không có chu trình sơ cấp độ dài 3 và H có 2 chu trình sơ cấp độ dài 3).

K không đẳng cấu với L vì một trong các lý do sau đây:

(K có 7 đỉnh và L có 6 đỉnh), (K không có đỉnh bậc 5 và L có đỉnh bậc 5)

(K có hai thành phần liên thông và L có một thành phần liên thông).

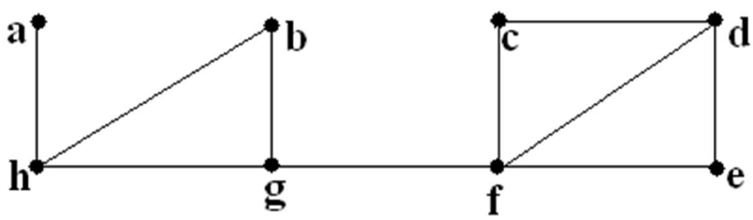
4.4/ ĐỈNH KHỚP VÀ CẦU TRONG ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG:

Cho $G = (V, E)$ liên thông. Xét đỉnh $v \in V$ và cạnh $\varepsilon \in E$.

a) v là *một đỉnh khớp* của G nếu khi xóa v (và xóa luôn các cạnh kề với v trong G) thì đồ thị mới không còn liên thông nữa.

b) ε là *một cầu* của G nếu khi xóa ε (không xóa các đỉnh kề với ε) thì đồ thị mới không còn liên thông nữa.

Ví dụ: Xét đồ thị liên thông



G = (V, E)

G có các đỉnh khớp là f, g, h và có các cầu là $\overline{ah}$ và $\overline{fg}$.

4.5/ <u>SỐ LIÊN THÔNG CẠNH VÀ LIÊN THÔNG ĐỈNH CỦA ĐỒ THỊ:</u>

Cho $G = (V, E)$ liên thông có $|V| = n \geq 3$ và $G \neq K_n$.

a) Đặt $v(G)$ là *số đỉnh ít nhất của G cần xóa bỏ* (đương nhiên xóa luôn các cạnh kề với các đỉnh đó) sao cho đồ thị mới không còn liên thông nữa.

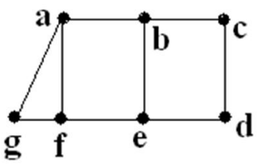
Ta nói $v(G)$ là *số liên thông đỉnh* của G.

b) Đặt $\varepsilon(G)$ là *số cạnh ít nhất của G cần xóa bỏ* (đương nhiên không xóa các đỉnh kề với các cạnh đó) sao cho đồ thị mới không còn liên thông nữa.

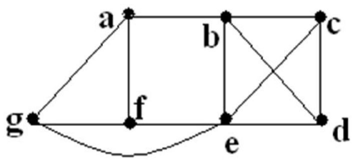
Ta nói $v(G)$ là *số liên thông cạnh* của G.

c) Nếu $G = K_n$ thì $v(G)$ không tồn tại [ta xóa $(n – 1)$ đỉnh của G thì đồ thị mới còn đúng một đỉnh vẫn liên thông] và $\varepsilon(G) = (n – 1)$.

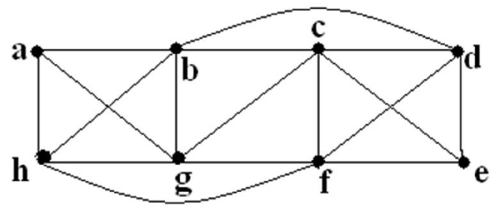
<u>Ví dụ:</u> Xét các đồ thị liên thông



G



H



K

G xóa ít nhất (2 đỉnh b và e) hoặc (2 cạnh $\overline{ag}$ và $\overline{fg}$) thì đồ thị mới rời rạc.

H xóa ít nhất (2 đỉnh a và e) hoặc (3 cạnh $\overline{ag}$, $\overline{fg}$ và $\overline{eg}$) thì đồ thị mới rời rạc.

K xóa ít nhất (3 đỉnh c, d và f) hoặc (3 cạnh $\overline{ab}$, $\overline{ag}$ và $\overline{ah}$) thì đồ thị mới rời rạc. Do đó $v(G) = \varepsilon(G) = 2$, $v(H) = 2$, $\varepsilon(H) = 3$ và $v(K) = \varepsilon(K) = 3$.

V. <u>ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG</u>:

5.1/ <u>ĐỊNH NGHĨA:</u> Cho tập hợp $V = \{ v_1, v_2, \ldots , v_n \}$ (gồm n *đỉnh*) và U là tập hợp gồm *hữu hạn cạnh nối một số các đỉnh* trong V (mỗi cạnh nối hai đỉnh khác nhau hoặc nối một đỉnh với chính đỉnh đó và *có sự định hướng sẵn* trên mỗi cạnh).

a) Cấu trúc $G = (V, U)$ như trên gọi là *một đồ thị hữu hạn có hướng cấp* n. Từ nay về sau ta chỉ nói gọn là đồ thị có hướng $G = (V, U)$ vì ta chỉ khảo sát đồ thị hữu hạn.

b) Khái niệm vòng (khuyên) và các cạnh song song (cạnh lặp) trong $G = (V, U)$ tương tự như trong đồ thị vô hướng. Khi có các cạnh (vòng) lặp thì ta phân biệt cùng chiều hoặc trái chiều.

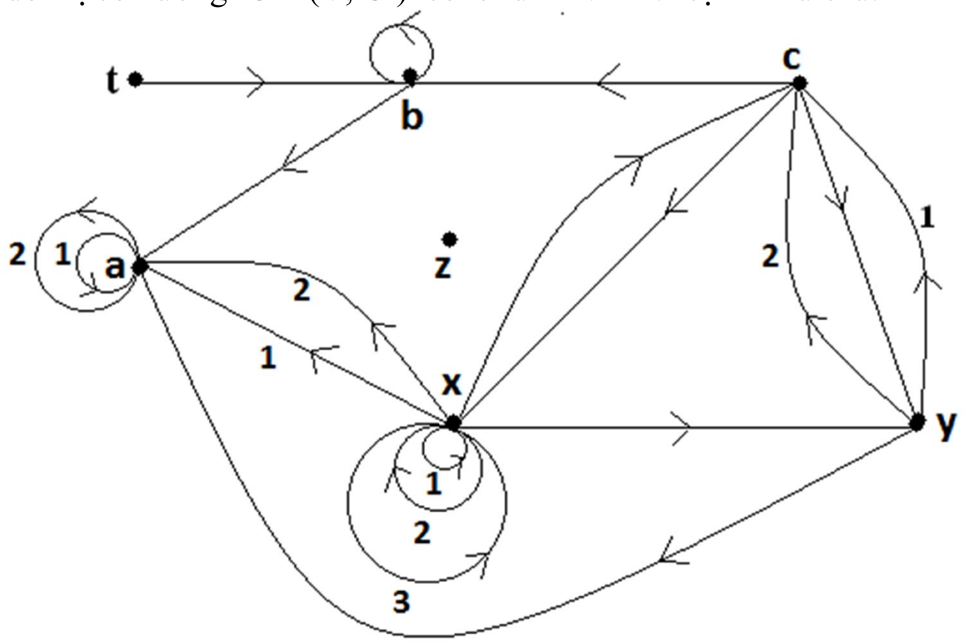
c) Khái niệm đỉnh cô lập, đỉnh treo và cạnh treo trong $G = (V, U)$ tương tự như trong đồ thị vô hướng.

d) Đồ thị có hướng $G = (V, U)$ cũng được phân loại đơn đồ thị, đa đồ thị và giả đồ thị tương tự như trong đồ thị vô hướng.

e) Các khái niệm đồ thị con và đồ thị con khung trong $G = (V, U)$ tương tự như trong đồ thị vô hướng.

Ví dụ:

a) Cho đồ thị có hướng $G = (V, U)$ có 7 đỉnh và 18 cạnh như sau:



G = (V, U)

Ta có $V = \{ a, b, c, x, y, z, t \}$ (z là đỉnh cô lập và t là đỉnh treo) với

$E = \{\overset{1}{\overline{aa}}, \overset{2}{\overline{aa}}, \overline{ba}, \overset{1}{\overline{xa}}, \overset{2}{\overline{xa}}, \overline{ya}, \overline{bb}, \overline{cb}, \overline{tb}, \overline{cx}, \overline{xc}, \overline{cy}, \overset{1}{\overline{yc}}, \overset{2}{\overline{yc}}, \overset{1}{\overline{xx}}, \overset{2}{\overline{xx}}, \overset{3}{\overline{xx}}, \overline{xy}\}$.

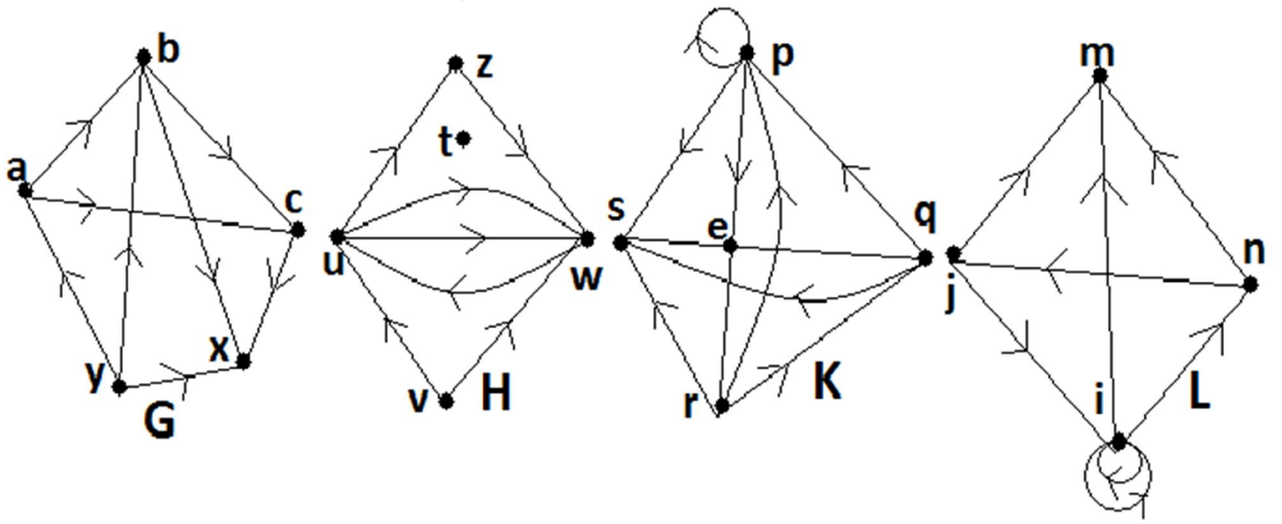
G có vòng $\overset{1}{\overline{aa}}, \overset{2}{\overline{aa}}, \overline{bb}, \overset{1}{\overline{xx}}, \overset{2}{\overline{xx}}, \overset{3}{\overline{xx}}$ tại các đỉnh a, b và x.

G có các cạnh lặp $\overset{1}{\overline{xa}}, \overset{2}{\overline{xa}}, \overline{cx}, \overline{xc}, \overline{cy}, \overset{1}{\overline{yc}}, \overset{2}{\overline{yc}}$ và có cạnh treo $\overline{bt}$.

Vòng $\overset{1}{\overline{xx}}$ cùng chiều với vòng $\overset{3}{\overline{xx}}$ nhưng trái chiều với vòng $\overset{2}{\overline{xx}}$.

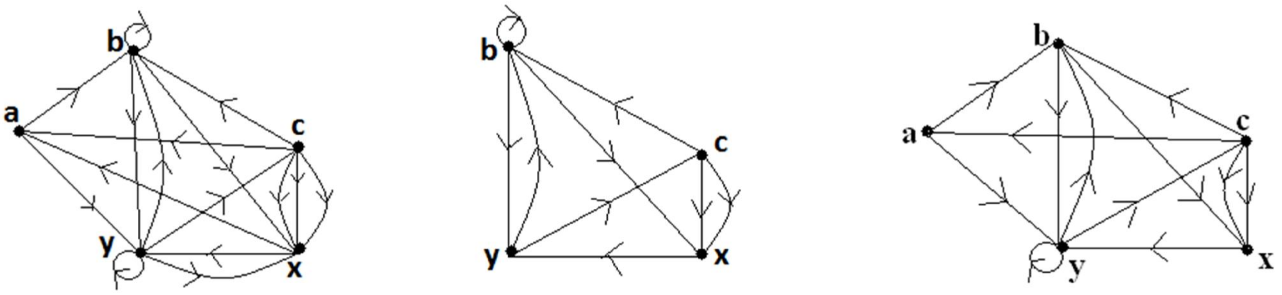
Cạnh $\overset{1}{\overline{yc}}$ cùng chiều với cạnh $\overset{2}{\overline{yc}}$ nhưng trái chiều với cạnh $\overline{cy}$.

b) Xét các đồ thị có hướng



G là đơn đồ thị có hướng, H là đa đồ thị có hướng, K và L là giả đồ thị có hướng.

c) Xét các đồ thị có hướng



G = (V, U) **G’ = (V’, U’)** **G” = (V, U”)**

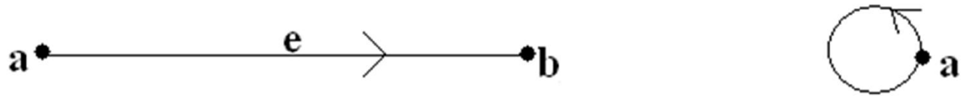
G’ là một đồ thị con (nhưng không phải là đồ thị con khung) của G nhưng G” là một đồ thị con khung của G.

5.2/ <u>ĐỈNH KỀ:</u> Cho G = (V, U) và a, b $\in$ V sao cho có cạnh e nối a với b.

a) Nếu a $\neq$ b, ta nói a là *đỉnh đầu* (*đỉnh* trước) và b là *đỉnh* cuối (*đỉnh* sau) của e, cạnh e kề với các đỉnh a, b hay các đỉnh a, b kề với cạnh e. Ta cũng nói cạnh e ra khỏi đỉnh a (theo đúng một tia) và đi vào đỉnh b (theo đúng một tia).

Ta viết e = $\overline{ab}$.

b) Nếu a $\equiv$ b, ta nói vòng e = $\overline{aa}$ tới đỉnh a (theo đúng một tia) và ra khỏi đỉnh a (theo đúng một tia). Ta xem a là *đỉnh đầu* và cũng là *đỉnh cuối* của e.



c) Ký hiệu $\Gamma(a) = \{ v \in V \mid \overline{av} \in U \}$ (*tập hợp các đỉnh sau* của a trong G).

Ký hiệu $\Gamma^{-1}(a) = \{ v \in V \mid \overline{va} \in U \}$ (*tập hợp các đỉnh trước* của a trong G).

d) Nếu G là *một đơn đồ thị có hướng* thì G hoàn toàn được xác định khi biết V và tập hợp $\Gamma(v), \forall v \in V$ hoặc $\Gamma^{-1}(v), \forall v \in V$. Lúc đó ta có thể ghi $G = (V, \Gamma(V))$ hoặc $G = (V, \Gamma^{-1}(V))$.

<u>Ví dụ:</u> Cho đồ thị G = (V, U) trong phần a) của **Ví dụ (5.1)**.

Ta có $\Gamma(b) = \{ a, b \}$, $\Gamma(c) = \{ b, x, y \}$, $\Gamma^{-1}(a) = \{ a, b, x, y \}$ và $\Gamma^{-1}(t) = \varnothing$.

5.3/ <u>BẬC CỦA ĐỈNH:</u> Cho G = (V, U) và $a \in V$.

a) Đặt $d^+(a)$ = (bậc ngoài của đỉnh a) = *số cạnh khác nhau* đi ra khỏi đỉnh a,

$d^-(a)$ = (bậc trong của đỉnh a) = *số cạnh khác nhau* đi vào đỉnh a và

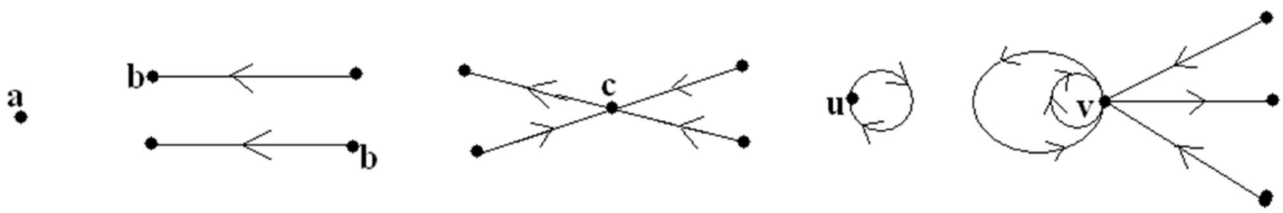
$d(a) = d^+(a) + d^-(a)$ = (bậc của đỉnh a).

b) Nếu a là *một đỉnh cô lập* thì $d^+(a) = d^-(a) = d(a) = 0$.

Nếu a là *một đỉnh treo* thì $\{ d^+(a), d^-(a) \} = \{ 0, 1 \}$ và $d(a) = d^+(a) + d^-(a) = 1$.

c) Vòng tại a có $d^+(a) = d^-(a) = 1$ nên $d(a) = d^+(a) + d^-(a) = 2$.

<u>Ví dụ:</u>



d(a) = 0 **d(b) = 1** **d(c) = 1 + 3 = 4** **d(u) = 1+ 1 = 2** **d(v) = 3 + 4 = 7**

5.4/ <u>ĐỊNH LÝ:</u> (Sự liên quan giữa *số cạnh* và *bậc của các đỉnh* trong đồ thị có hướng)

Cho đồ thị có hướng G = (V, U). Khi đó

a) Tổng các bậc ngoài của mọi đỉnh bằng Tổng các bậc trong của mọi đỉnh, nghĩa là $\sum_{v\in V} d^+(v) = \sum_{v\in V} d^-(v)$.

b) Tổng các bậc của mọi đỉnh trong G bằng hai lần số cạnh, nghĩa là

$\sum_{v\in V} d(v)$ = 2 | U | = một số nguyên chẵn. Suy ra | U | = $\frac{1}{2}\sum_{v\in V} d(v)$.

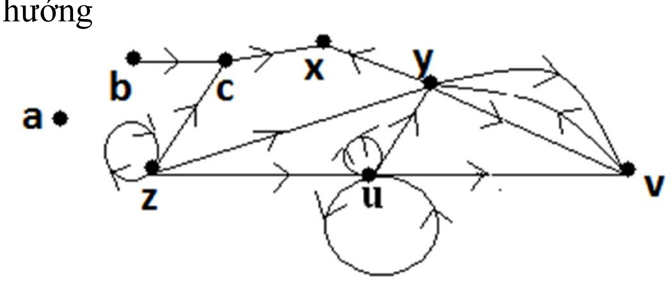
c) Số lượng *các đỉnh bậc lẻ* trong G là *một số nguyên chẵn.*

d) Tổng các bậc của *mọi đỉnh bậc lẻ* trong G là *một số nguyên chẵn,*

nghĩa là $\sum_{v\in V}[d(v)$ lẻ$]$ = một số nguyên chẵn.

Ví dụ:

Cho đồ thị có hướng



G = (V, U)

Ta có $d^+(b) = 1$, $d^+(x) = 0$, $d^+(c) = 1$, $d^+(v) = 1$, $d^+(z) = 4$, $d^+(y) = 3$ và $d^+(u) = 4$.

Ta có $d^-(b) = 0$, $d^-(x) = 2$, $d^-(c) = 2$, $d^-(v) = 3$, $d^-(z) = 1$, $d^-(y) = 3$ và $d^-(u) = 3$.

Vậy d(b) = 1, d(x) = 2, d(c) = 3, d(v) = 4, d(z) = 5, d(y) = 6, d(u) = 7 và d(a) = 0.

Tổng các bậc ngoài của mọi đỉnh = 0 + 1 + 0 + 1 + 1+ 4 + 3 + 4 = 14.

Tổng các bậc trong của mọi đỉnh = 0 + 0 + 2 + 2 + 3+ 1 + 3 + 3 = 14.

Tổng các bậc của mọi đỉnh trong G là (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 28.

Suy ra | E | = 2^{-1}(tổng các bậc của mọi đỉnh trong G) = $2^{-1}(28)$ = 14.

G có 4 đỉnh bậc lẻ là b, c, z và u. Tổng các bậc lẻ = 1 + 3 + 5 + 7 = 16.

5.5/ MA TRẬN KỀ CỦA ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG:

Cho G = (V, U) có V = { $v_1, v_2, \ldots, v_n$ } (tập hợp V *được sắp thứ tự*).

Với $1 \le i, j \le n$, đặt m_{ij} = số cạnh nối đỉnh v_i với đỉnh v_j .

Một vòng tại a xem như là *một cạnh nối* a *với* a theo sự định hướng đã có sẵn.

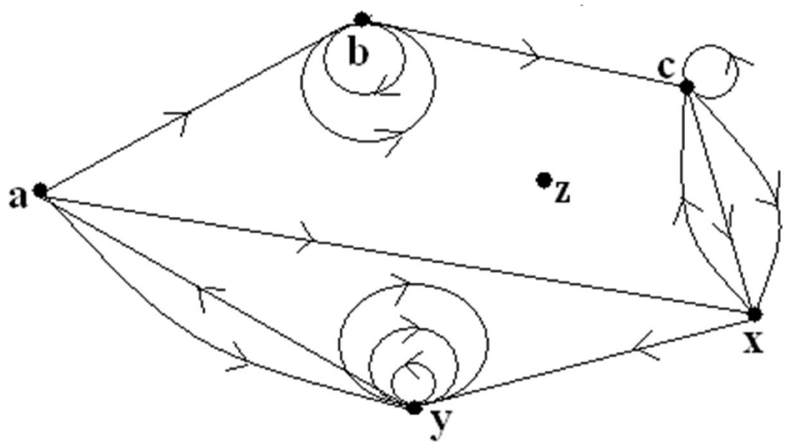
Ký hiệu $M_G = M = \left(m_{ij}\right)_{1\le i, j\le n}$ và ta nói M_G là *ma trận kề* của G.

M_G thay đổi khi ta sắp xếp lại thứ tự của tập hợp V.

M_G là *một ma trận vuông cấp* n và có *các hệ số đều nguyên không âm.*

G và M_G có thể suy ra lẫn nhau. Ta có thể giới thiệu một đồ thị có hướng hữu hạn bằng *một ma trận kề của nó* tương ứng với *một thứ tự được định sẵn* trên V.

<u>Ví dụ:</u> Cho $G = (V, U)$ có $V = \{ a, b, c, x, y, z \}$ (đã định thứ tự) như sau:



G = (V, U)

Ta có ma trận kề của G là $M_G = \left(m_{ij}\right)_{1 \le i, j \le 6}$ là

M_G	a	b	c	x	y	z
a	0*	1	0	1	1	0
b	0	2*	1	0	0	0
c	0	0	1*	2	0	0
x	0	0	1	0*	1	0
y	1	0	0	0	3*	0
z	0	0	0	0	0	0*

5.6/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho $G = (V, U)$ có $V = \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ và $M_G = \left(m_{ij}\right)_{1 \le i, j \le n}$.

a) Với $1 \le k \le n$, ta có $d^+(v_k) = \sum_{j=1}^{n} m_{kj}$ = Tổng các hệ số trên dòng thứ k

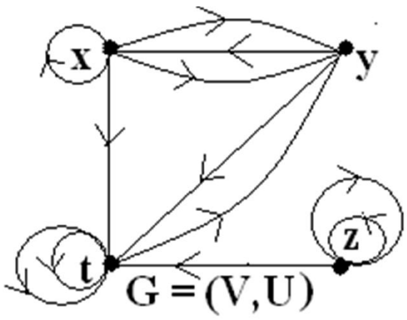
$d^-(v_k) = \sum_{i=1}^{n} m_{ik}$ = Tổng các hệ số trên cột thứ k

b) Suy ra $|U| = \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(v_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}$ = Tổng các hệ số trong M_G.

Ví dụ: Cho $G = (V, U)$ có $V = \{ x, y, z, t \}$ và ma trận kề M_G như sau:

M_G	x	y	z	t
x	1*	2	0	1
y	1	0*	0	1
z	0	0	2*	1
t	0	1	0	2*

Vẽ phác họa đồ thị G :



Ta có $d^+(x) = 1 + 2 + 1 = 4$, $d^+(y) = 1 + 1 = 2$, $d^+(z) = 2 + 1 = 3$ và $d^+(t) = 1 + 2 = 3$.

Ta có $d^-(x) = 1 + 1 = 2$, $d^-(y) = 2 + 1 = 3$, $d^-(z) = 2$ và $d^-(t) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5$.

Suy ra $| E | = [d^+(x) + d^+ y) + d^+(z) + d^+(t)] = [d^-(x) + d^-(y) + d^-(z) + d^-(t)] = 12$.

5.7/ MA TRẬN LIÊN KẾT CỦA ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG:

Cho $G = (V, U)$ có $V = \{ v_1, v_2, \ldots , v_n \}$, $U = \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_P \}$ và G không có vòng (tập hợp V và U *đều được sắp thứ tự*).

Với $1 \leq i \leq n$ và $1 \leq j \leq p$, đặt $a_{ij} = 1$ (nếu v_i là đỉnh đầu của cạnh ε_j),

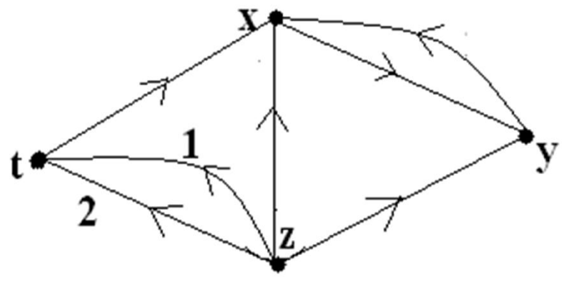
$a_{ij} = -1$ (nếu v_i là đỉnh cuối của cạnh ε_j) và $a_{ij} = 0$ (nếu v_i không kề với cạnh ε_j).

Ký hiệu $A_G = A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ và ta nói A_G là *ma trận liên kết* của G.

A_G là *một ma trận kích thước* $n \times p$ và có *các hệ số đều nguyên và có trị tuyệt đối không quá* 1. A_G thay đổi khi ta sắp xếp lại thứ tự của các tập hợp V và U.

G và A_G có thể suy ra lẫn nhau. Ta có thể giới thiệu một đồ thị có hướng hữu hạn không có vòng bằng *một ma trận kề của nó* tương ứng với *một thứ tự được định sẵn* trên V và U.

Ví dụ: Cho G = (V, U) có V = { x, y, z, t } và U = { α, β, γ, δ, ε, μ, ν } với $\alpha = \overline{xy}$, $\beta = \overline{yx}$, $\gamma = \overline{zy}$, $\delta = \overline{zx}$, $\varepsilon = \overset{1}{\overline{zt}}$, $\mu = \overset{2}{\overline{zt}}$ và $\nu = \overline{tx}$ như sau:



G = (V, U)

G có ma trận liên kết A_G như sau :

A_G	α	β	γ	δ	ε	μ	ν
x	1	–1	0	–1	0	0	–1
y	–1	1	–1	0	0	0	0
z	0	0	1	1	1	1	0
t	0	0	0	0	–1	–1	1

5.8/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho G = (V, U) có V = { $v_1, v_2, \ldots, v_n$ } và $A_G = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$.

a) Với $1 \le k \le n$, ta có $d^+(v_k) = \sum_{j=1}^{p} a_{kj}(a_{kj}=1)$ = Tổng các hệ số 1 trên dòng thứ k.

và $d^-(v_k) = -\sum_{j=1}^{p} a_{kj}(a_{kj}=-1) = -$ (Tổng các hệ số – 1 trên dòng thứ k).

b) Mỗi cột của A_G có đúng hai hệ số ≠ 0 là 1 và (– 1) nên có tổng 1 + (–1) = 0.

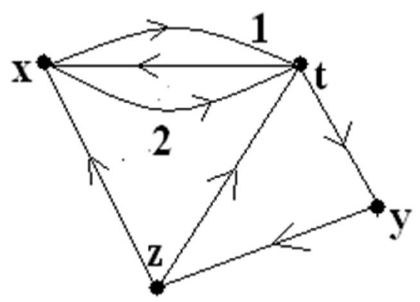
c) Suy ra $|U| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d(v) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) + \sum_{i=1}^{n} d^-(v_i)\right] = \frac{1}{2}$(số các hệ số ≠ 0 trong A_G)

Ví dụ: Cho G = (V, U) có V = { x, y, z, t }, U = { α, β, γ, δ, ε, μ, ν } với $\alpha = \overline{zx}$,

$\beta = \overline{yz}$, $\gamma = \overline{ty}$, $\delta = \overline{zt}$, $\varepsilon = \overset{1}{\overline{xt}}$, $\mu = \overset{2}{\overline{xt}}$ và $\nu = \overline{tx}$ cùng ma trận liên kết A_G như sau:

A_G	α	β	γ	δ	ε	μ	ν
x	–1	0	0	0	1	1	–1
y	0	1	–1	0	0	0	0
z	1	–1	0	1	0	0	0
t	0	0	1	–1	–1	–1	1

Vẽ phác họa đồ thị G :



G = (V, U)

Ta có $d^+(x) = 1 + 1 = 2$, $d^+(y) = 1$, $d^+(z) = 1 + 1 = 2$, $d^+(t) = 1 + 1 = 2$, $d^-(y) = -(-1) = 1$

$d^-(x) = -(-1-1) = 2$, $d^-(z) = -(-1) = 1$ và $d^-(t) = -(-1-1-1) = 3$.

A_G có 14 hệ số $\neq 0$ nên $|U| = 2^{-1}(14) = 7$.

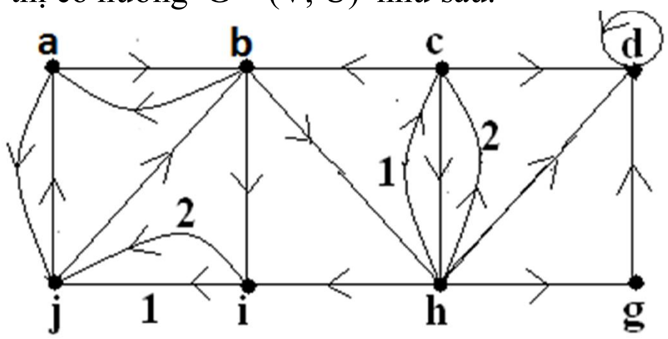
5.9/ <u>ĐƯỜNG VÀ CHU TRÌNH TRONG ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG:</u>

a) Trong đồ thị *có hướng* G = (V, U), các khái niệm *đường*, *đường đơn*, *đường sơ cấp*, *chu trình*, *chu trình đơn* và *chu trình sơ cấp* (*có độ dài* k) được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong đồ thị vô hướng với hướng di chuyển trên mỗi cạnh phải theo đúng sự định hướng đã có sẵn. Một chu trình trong đồ thị có hướng còn được gọi là *một mạch.*

b) Khi một cạnh (hay một vòng) không có cạnh khác (hay vòng khác) song song cùng chiều trong *đồ thị có hướng* thì hai đỉnh khác nhau (hay giống nhau) của nó *xác định nó một cách duy nhất*. Do đó ta *không cần gọi tên cạnh* (hay *vòng này*) trong dạng thức của đường và chu trình.

Qui định này cũng được áp dụng cho một cạnh (hay một vòng) không có cạnh khác (hay vòng khác) song song trong *đồ thị vô hướng* khi viết dạng thức của đường và chu trình.

Ví dụ: Cho đồ thị có hướng G = (V, U) như sau:



G = (V, U)

Đặt $\alpha = \overline{ab}$, $\beta = \overline{bh}$, $\gamma = \overset{2}{\overline{hc}}$, $\delta = \overline{cd}$, $\varepsilon = \overline{dd}$, $\omega = \overline{cb}$, $\rho = \overline{aj}$, $\theta = \overline{hi}$, $\mu = \overset{1}{\overline{ij}}$, $\nu = \overline{ba}$,

$\sigma = \overline{jb}$ và $\lambda = \overline{ja}$.

Đường sơ cấp (P_1) : $\overline{a\alpha b\beta h\gamma c\delta d}$ có $L(P_1) = 4$. Viết gọn (P_1) : $\overline{abh\gamma cd}$.

Đường đơn (P_2) : $\overline{a\alpha b\beta h\gamma c\delta d\varepsilon d}$ có $L(P_2) = 5$. Viết gọn (P_2) : $\overline{abh\gamma cdd}$.

Đường (P_3) : $\overline{a\alpha b\beta h\gamma c\omega b\nu a\rho j}$ có $L(P_3) = 6$. Viết gọn (P_3) : $\overline{abh\gamma cbaj}$.

Chu trình sơ cấp (C_1) : $\overline{a\alpha b\beta h\theta i\mu j\lambda a} \equiv \overline{h\theta i\mu j\lambda a\alpha b\beta h}$ có $L(C_1) = 5$.

Viết gọn (C_1) : $\overline{abhi\mu ja} \equiv \overline{hi\mu jabh}$.

Chu trình đơn (C_2) : $\overline{a\alpha b\beta h\theta i\mu j\sigma b\nu a}$ có $L(C_2) = 6$. Viết gọn (C_2) : $\overline{abhi\mu jba}$.

Chu trình (C_3) : $\overline{a\alpha b\beta h\theta i\mu j\lambda a\alpha b\nu a}$ có $L(C_3) = 7$. Viết gọn (C_3) : $\overline{abhi\mu jaba}$.

5.10/ SỰ LIÊN THÔNG VÀ LIÊN THÔNG MẠNH CỦA ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG:

Cho đồ thị *có hướng* G = (V, U).

a) Ta nói G *liên thông* nếu khi xóa bỏ sự định hướng có sẵn trên tất cả các cạnh, G vẫn là một đồ thị vô hướng liên thông.

b) Ta nói G *liên thông mạnh* nếu (| V | = 1) hoặc (| V | ≥ 2 và giữa hai đỉnh khác nhau bất kỳ u và v của G, luôn luôn có đường nối từ u đến v và có đường nối từ v đến u trong G).

Đồ thị liên thông mạnh đương nhiên cũng liên thông .

c) Nếu G *không liên thông mạnh* thì ta có thể trích xuất từ G các đồ thị con liên thông mạnh tối đại rời nhau từng đôi một (G không nhất thiết là một sự phân hoạch của các đồ thị con này. Các đồ thị con này khi hội lại sẽ là *một đồ thị khung con* của G). Mỗi đồ thị con liên thông mạnh tối đại đó được gọi là *một thành phần liên thông mạnh* của G.

d) G *liên thông mạnh* ⇔ Từ G *không thể trích xuất các đồ thị con liên thông mạnh tối đại rời nhau từng đôi một.*

e) Khi G liên thông mạnh, ta nói G có đúng *một thành phần liên thông mạnh* chính là G.

f) $\forall u, v \in V$, đặt $u \sim v \Leftrightarrow$ [($u \equiv v$) hoặc (có ít nhất một đường nối từ u đến v và có ít nhất một đường nối từ v đến u trong G)].

Ta có ~ là *một quan hệ tương đương* trên V.

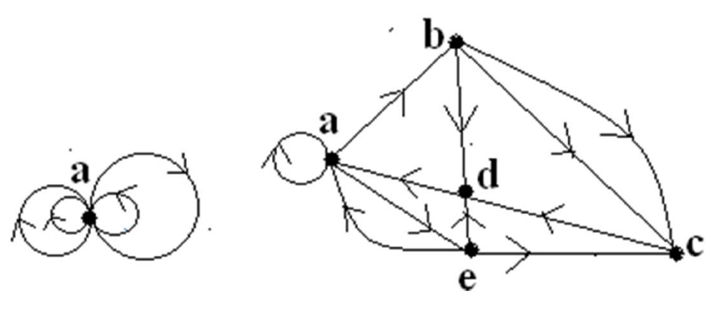
Nếu $u \sim v$ thì ta nói u và v *liên thông mạnh với nhau.*

$\forall u \in V$, $\bar{u} = \{ v \in V \mid v \sim u \}$ là lớp tương đương của u bởi quan hệ ~ và $\bar{u}$ là *tập hợp các đỉnh của thành phần liên thông mạnh chứa u* trong G.

g) Khái niệm *cầu* và *điểm khớp* trong G *liên thông* được định nghĩa y hệt như trong đồ thị vô hướng (dùng tính *liên thông* mà không dùng tính *liên thông mạnh*).

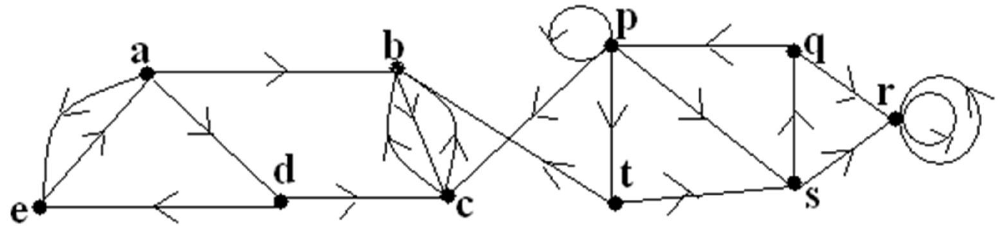
<u>Ví dụ:</u>

a) Các đồ thị có hướng liên thông mạnh G và H dưới đây cũng là liên thông :



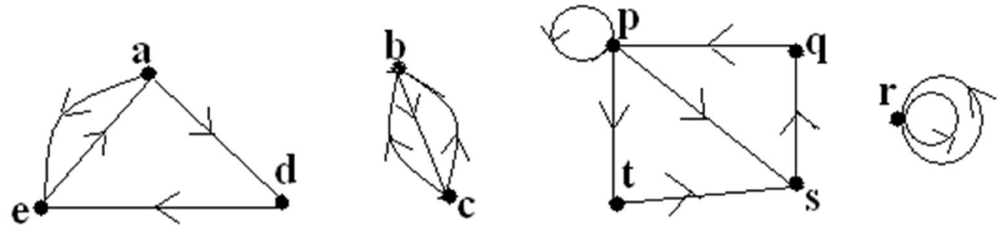
G **H**

b) Đồ thị có hướng L = (V, U) dưới đây liên thông mà không liên thông mạnh vì không có đường trong L đi từ b đến a.



L

Từ L, ta trích xuất được 4 thành phần liên thông mạnh (mỗi thành phần liên thông mạnh là một đồ thị con liên thông mạnh tối đại của L) như sau:



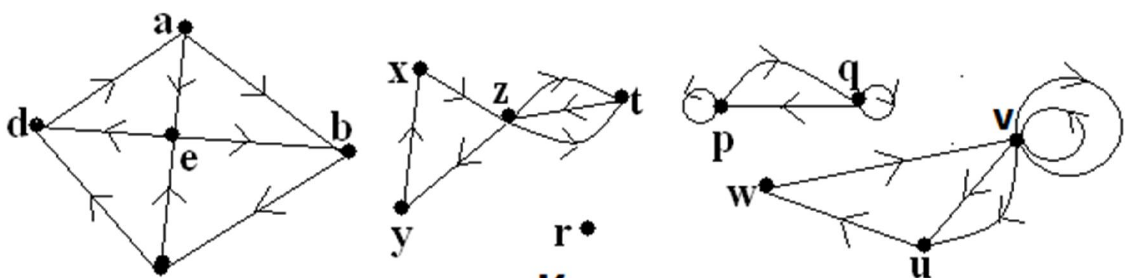
4 thành phần liên thông mạnh này không phải là một sự phân hoạch của L.

Phần hội của các thành phần liên thông mạnh này là một đồ thị con khung của L.

V được phân hoạch thành 4 lớp tương đương rời nhau từng đôi một như sau:

$\overline{a}$ = { a, d, e }, $\overline{b}$ = { b, c }, $\overline{p}$ = { p, q , s, t } và $\overline{r}$ = { r }. Mỗi lớp tương đương là tập hợp các đỉnh của một thành phần liên thông mạnh tương ứng.

c) Đồ thị có hướng K = (V, U) dưới đây không liên thông (nên đương nhiên không liên thông mạnh) vì khi xóa bỏ sự định hướng trên tất cả các cạnh thì không có đường trong K nối hai đỉnh a và w:



K

K được phân hoạch thành 5 thành phần liên thông mạnh (mỗi thành phần liên thông mạnh là một đồ thị con liên thông mạnh tối đại của K).

V được phân hoạch thành 5 lớp tương đương rời nhau từng đôi một như sau:

$\overline{a}$ = { a, b, c, d, e }, $\overline{x}$ = { x, y, z, t }, $\overline{r}$ = { r }, $\overline{p}$ = { p, q } và $\overline{u}$ = { u, v, w }.

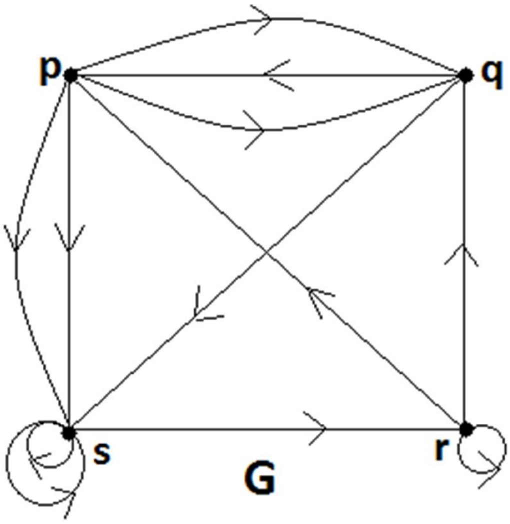
Mỗi lớp tương đương chính là tập hợp các đỉnh của một thành phần liên thông tương ứng.

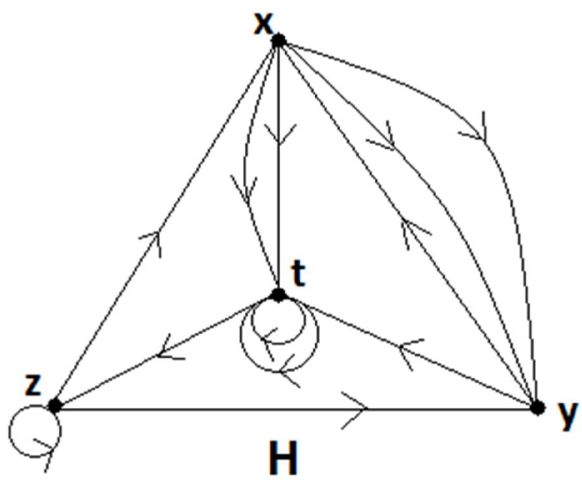
5.11/ SỰ ĐẲNG CẤU CỦA CÁC ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG:

Tương tự như đồ thị vô hướng, ta cũng có khái niệm đẳng cấu giữa các đồ thị có hướng thông qua các ma trận kề và các dấu hiệu để khẳng định tính không đẳng cấu của các đồ thị có hướng (sự liên thông có thể thay bằng sự liên thông mạnh).

Ví dụ:

a) Cho G = (V = { p, q, r, s }, U) và H = (V' = { x, y, z, t }, U') như sau:



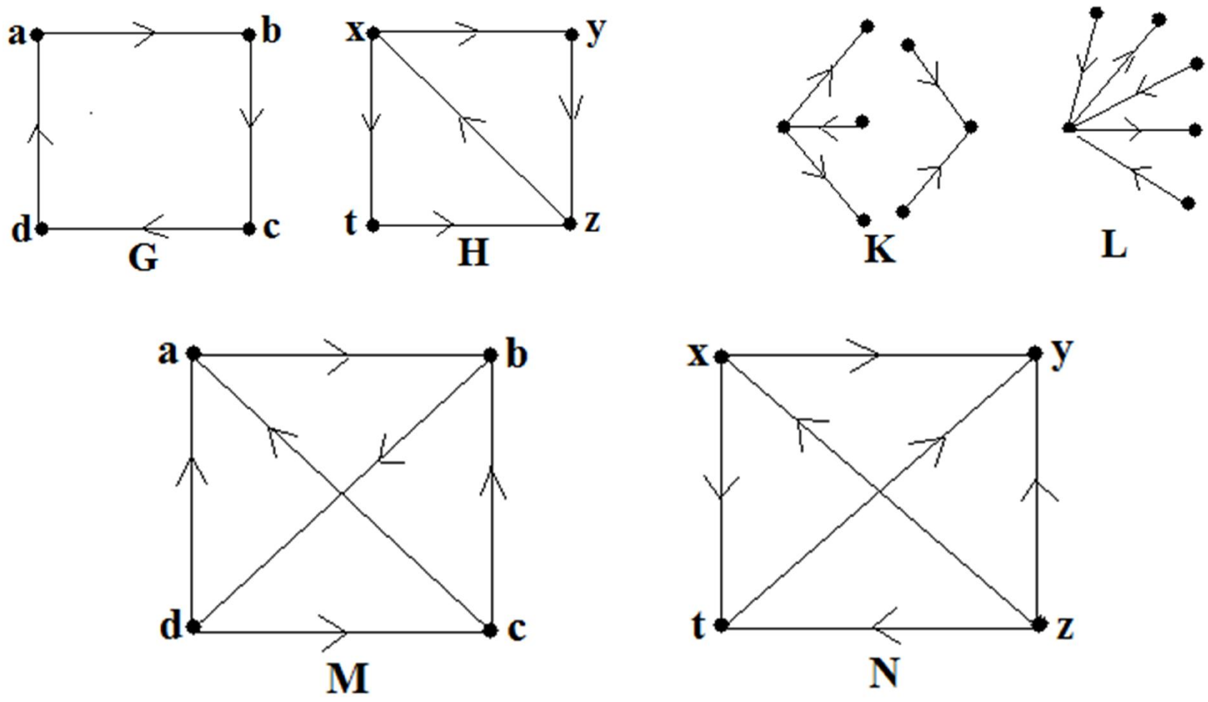


Ta viết các ma trận kề M_G và M_H và thấy rằng $M_G = M_H$ nên G ~ H.

M_G	p	q	r	s
p	0*	2	0	2
q	1	0*	0	1
r	1	1	1*	0
s	0	0	1	2*

M_H	x	y	z	t
x	0*	2	0	2
y	1	0*	0	1
z	1	1	1*	0
t	0	0	1	2*

b)



* G không đẳng cấu với H vì một trong các lý do dưới đây:

(G có 4 cạnh và H có 5 cạnh), (G có 4 đỉnh bậc 2 và H có 2 đỉnh bậc 2)

(G không có đỉnh bậc 3 và H có 2 đỉnh bậc 3),

(G có một chu trình sơ cấp và H có 2 chu trình sơ cấp),

(G không có chu trình sơ cấp độ dài 3 và H có 2 chu trình sơ cấp độ dài 3).

(G có chu trình sơ cấp độ dài 4 và H không có chu trình sơ cấp độ dài 4).

* K không đẳng cấu với L vì một trong các lý do dưới đây:

(K có 7 đỉnh và L có 6 đỉnh), (K không có đỉnh bậc 5 và L có một đỉnh bậc 5),

(K có một đỉnh bậc 3 và L không có đỉnh bậc 3),

(K có một đỉnh bậc 2 và L không có đỉnh bậc 2),

(K có 2 thành phần liên thông và L có một thành phần liên thông khi xóa bỏ sự định hướng trên tất cả cạnh của K và L).

* M không đẳng cấu với N vì M liên thông mạnh nhưng N không liên thông mạnh.

(M và N đều liên thông khi xóa hết sự định hướng trên tất cả các cạnh của chúng).

5.12/ <u>SỐ ĐƯỜNG ĐI GIỮA CÁC ĐỈNH:</u>

Cho đồ thị $G = (V, E)$ vô hướng (hoặc có hướng) và $V = \{ v_1, v_2, \ldots , v_n \}$.

Xét k nguyên ≥ 1. Đặt M_G là *ma trận kề* của G và $H = (M_G)^k = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

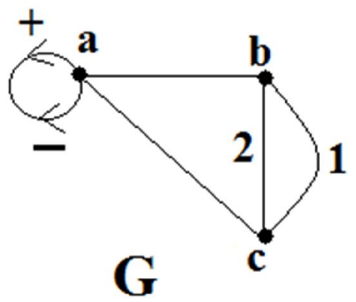
a) *Số lượng đường đi khác nhau có độ dài k* từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j trong G là h_{ij} $(1 \leq i \neq j \leq n)$.

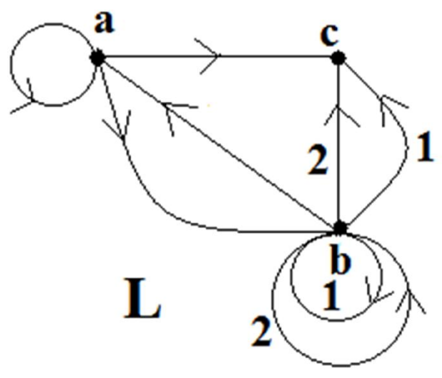
b) Áp dụng : Ta có thể dùng ma trận kề M_G để xét tính liên thông (hay liên thông mạnh) của đồ thị G và tính độ dài của đường đi ngắn nhất nối hai đỉnh nào đó của G (xem trong phần bài tập).

Lưu ý : Trong đồ thị *vô hướng*, mỗi vòng có *hai chiều di chuyển ngược nhau* nên khi tính số đường có đi qua vòng thì phải *phân biệt hai chiều ngược nhau này.*

<u>Ví dụ</u>

Các đồ thị G (vô hướng) và L (có hướng) có các đỉnh (theo thứ tự) là a, b, c như sau:



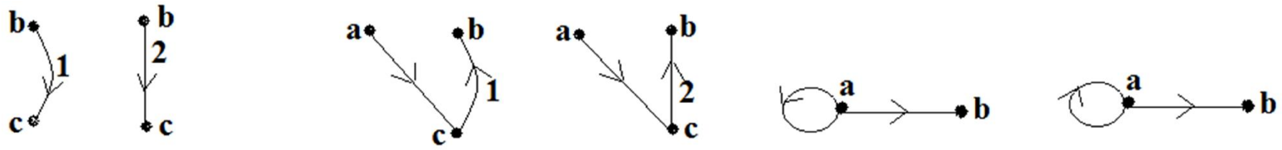


Đặt $\varepsilon = \overline{aa}$ (cho G), $\gamma = \overset{1}{\overline{bb}}$, $\delta = \overset{2}{\overline{bb}}$ (cho L), $\alpha = \overset{1}{\overline{bc}}$, $\beta = \overset{2}{\overline{bc}}$ (cho G và L).

Ta có $M_G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2* \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ với $H = (M_G)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 4* & 4 \\ 4 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ và $K = (M_G)^3 = \begin{pmatrix} 20 & 14 & 14 \\ 14 & 6 & 14 \\ 14 & 14 & 6* \end{pmatrix}$.

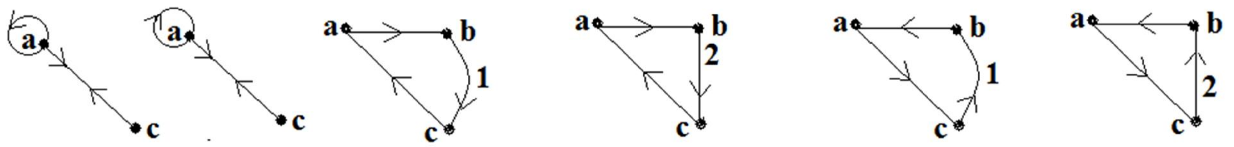
Trong M_G, hệ số $m_{23} = 2$: có 2 đường có độ dài 1 nối b và c là $\overline{b\alpha c}$ và $\overline{b\beta c}$.

Trong H, hệ số $h_{12} = 4$: có 4 đường có độ dài 2 nối a và b là $\overline{ac\alpha b}$, $\overline{ac\beta b}$, $\overline{a\varepsilon ab}$ (ε có chiều dương) và $\overline{a\varepsilon ab}$ (ε có chiều âm).



$\overline{b\alpha c}$ $\overline{b\beta c}$ $\overline{ac\alpha b}$ $\overline{ac\beta b}$ $\overline{a\varepsilon ab}$ (+) $\overline{a\varepsilon ab}$ (−)

Trong K, hệ số $k_{33} = 6$: có 6 đường có độ dài 3 nối c và c là $\overline{ca\varepsilon ac}$ (ε có chiều dương), $\overline{ca\varepsilon ac}$ (ε có chiều âm), $\overline{cab\alpha c}$, $\overline{cab\beta c}$, $\overline{c\alpha bac}$ và $\overline{c\beta bac}$.

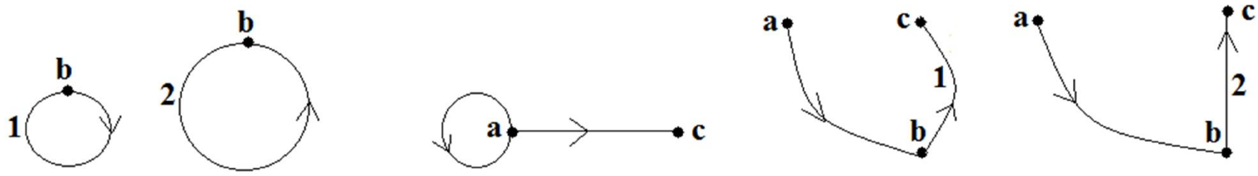


$\overline{ca\varepsilon ac}$ (+) $\overline{ca\varepsilon ac}$ (−) $\overline{cab\alpha c}$ $\overline{cab\beta c}$ $\overline{c\alpha bac}$ $\overline{c\beta bac}$

Ta có $M_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2* & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ với $P = (M_L)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3* \\ 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $Q = (M_L)^3 = \begin{pmatrix} 5* & 8 & 8 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

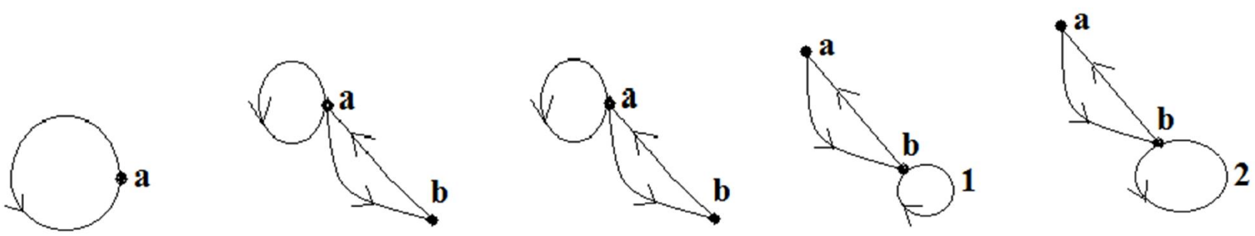
Trong M_L, hệ số $m_{22} = 2$: có 2 đường có độ dài 1 nối b và b là $\overline{b\gamma b}$ và $\overline{b\delta b}$.

Trong P, hệ số $p_{13} = 3$: có 3 đường có độ dài 2 nối a và c là $\overline{aac}$, $\overline{ab\alpha c}$ và $\overline{ab\beta c}$.



$\overline{b\gamma b}$ $\overline{b\delta b}$ $\overline{aac}$ $\overline{ab\alpha c}$ $\overline{ab\beta c}$

Trong Q, hệ số $q_{11} = 5$: có 5 đường có độ dài 3 nối a và a là $\overline{aaaa}$, $\overline{aaba}$, $\overline{abaa}$, $\overline{ab\gamma ba}$ và $\overline{ab\delta ba}$.



$\overline{aaaa}$ (3 vòng) $\overline{aaba}$ (vòng đi trước) $\overline{abaa}$ (vòng đi sau) $\overline{ab\gamma ba}$ $\overline{ab\delta ba}$