



# CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC TÍNH TOÁN

NGŨ.TS. NGUYỄN THANH HÙNG

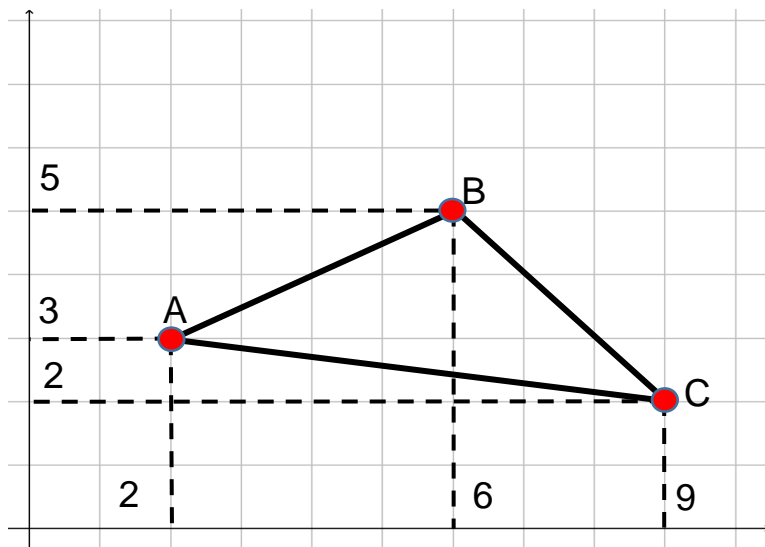




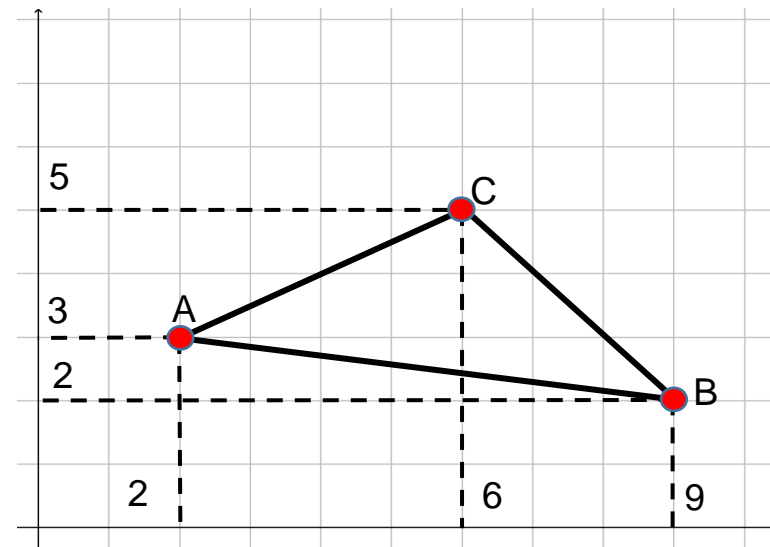
# BÀI TOÁN BAO LỖI



# BÀI TOÁN BAO LỒI VÀ ỨNG DỤNG



$$S_{ABC} = 9$$



$$S_{ABC} = -9$$

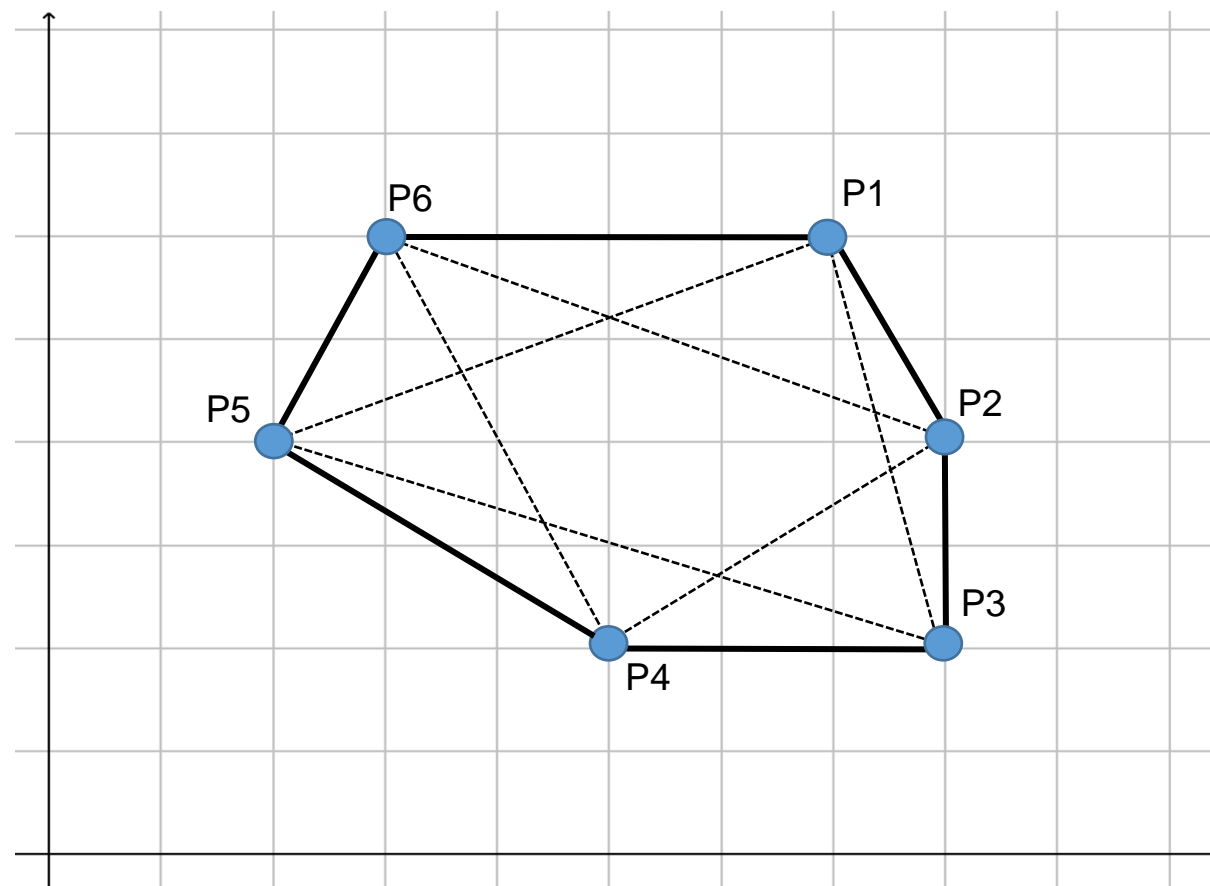
$S > 0$  : Các đỉnh liệt kê theo chiều kim đồng hồ

$S < 0$  : Các đỉnh liệt kê ngược chiều kim đồng hồ

# BÀI TOÁN BAO LỒI VÀ ỨNG DỤNG

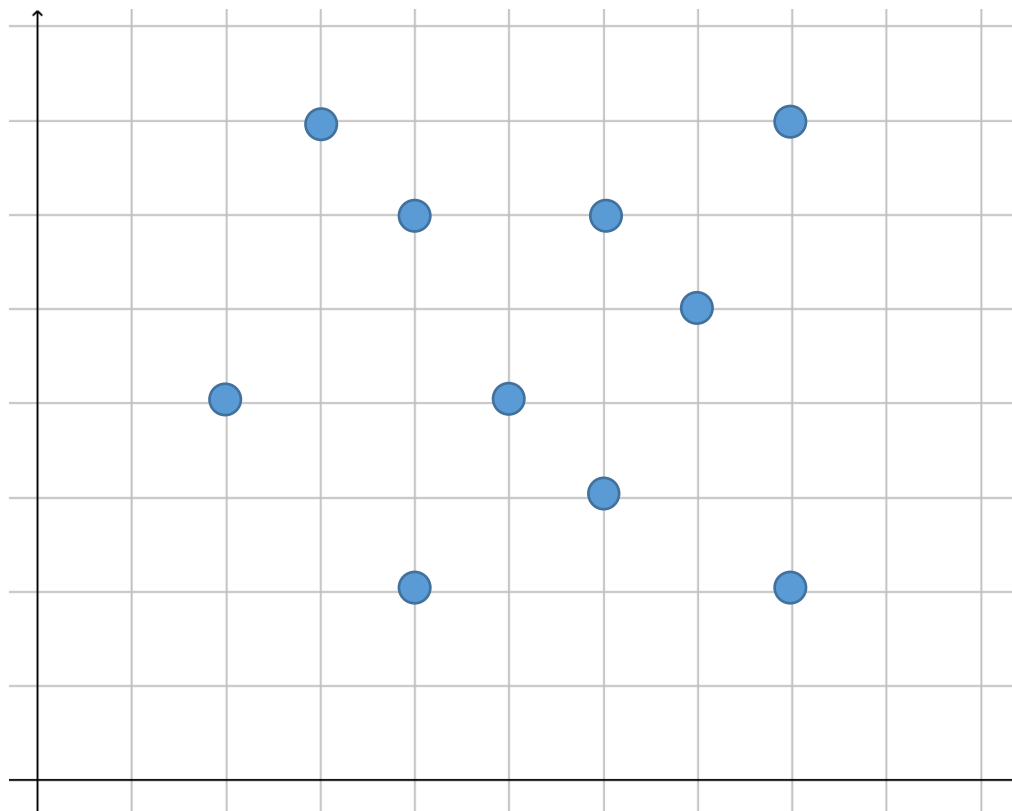
Đa giác lồi khi và chỉ khi tất cả bộ 3 đỉnh liên tiếp tạo thành tam giác đều cùng chiều:

**Diện tích đại số cùng dấu!**





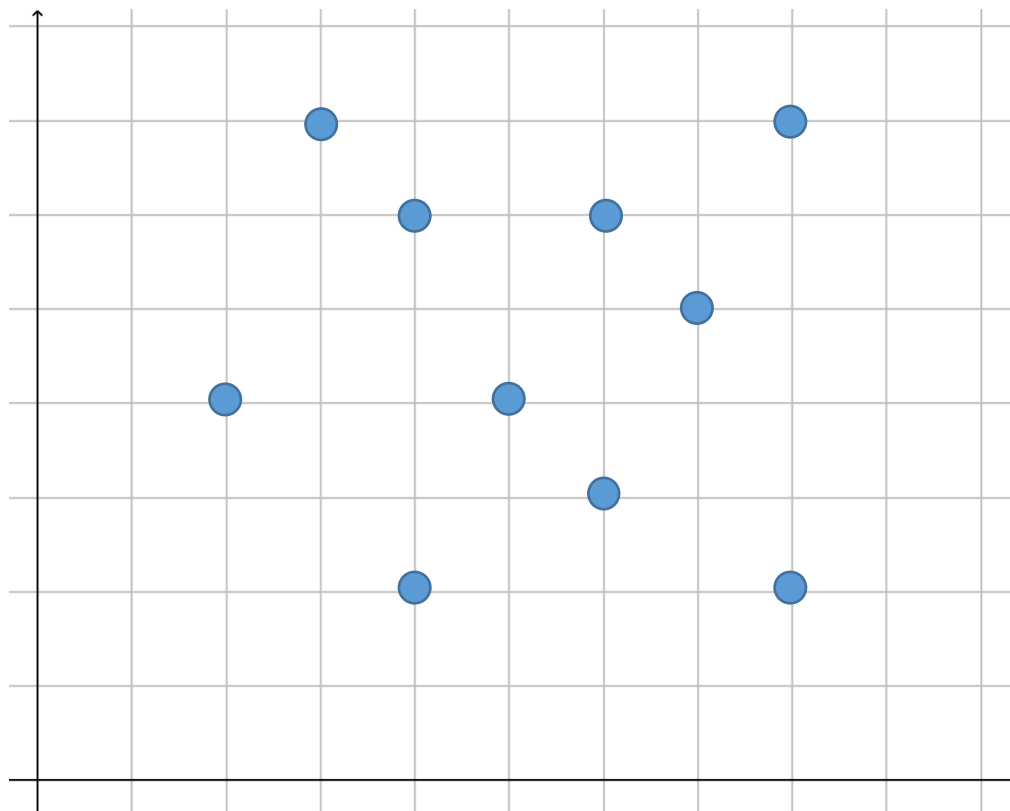
# BÀI TOÁN BAO LỖI VÀ ỨNG DỤNG



**Bài toán:**

Trên mặt phẳng với hệ tọa độ trục chuẩn Oxy cho  $n$  điểm có tọa độ nguyên  $P_1 P_2 \dots P_n$ .

**Yêu cầu:** Hãy xác định đa giác có diện tích nhỏ nhất chứa  $n$  điểm nói trên (có thể nằm trên biên của đa giác).

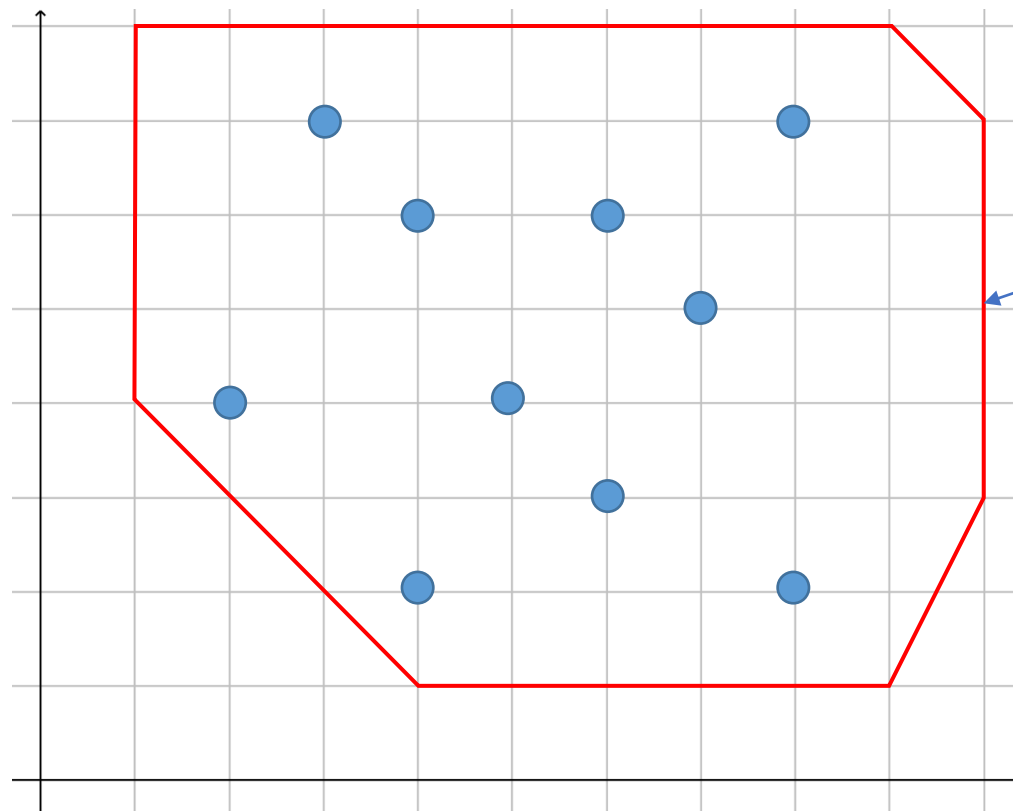


## BAO LỒI

### Bài toán:

Trên mặt phẳng với hệ tọa độ trục chuẩn Oxy cho  $n$  điểm có tọa độ nguyên  $P_1 P_2 \dots P_n$ .

**Yêu cầu:** Hãy xác định đa giác có diện tích nhỏ nhất chứa  $n$  điểm nói trên (có thể nằm trên biên của đa giác).



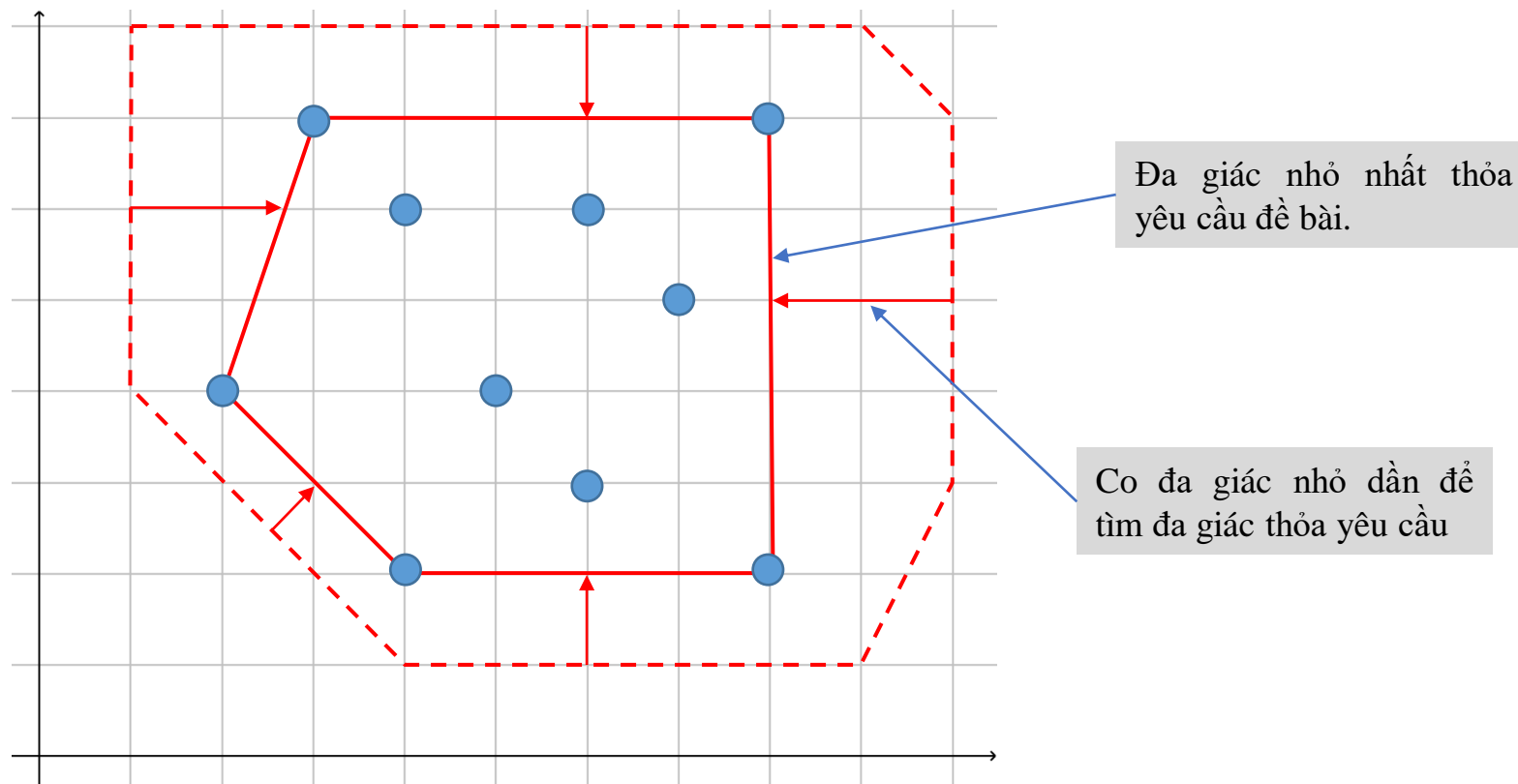
Một đa giác chứa tất cả các điểm. Tuy nhiên rõ ràng đây chưa phải là đa giác có diện tích nhỏ nhất

## BAO LỒI

### Bài toán:

Trên mặt phẳng với hệ tọa độ trục chuẩn Oxy cho  $n$  điểm có tọa độ nguyên  $P_1 P_2 \dots P_n$ .

**Yêu cầu:** Hãy xác định đa giác có diện tích nhỏ nhất chứa  $n$  điểm nói trên (có thể nằm trên biên của đa giác).





## BAO LỖI

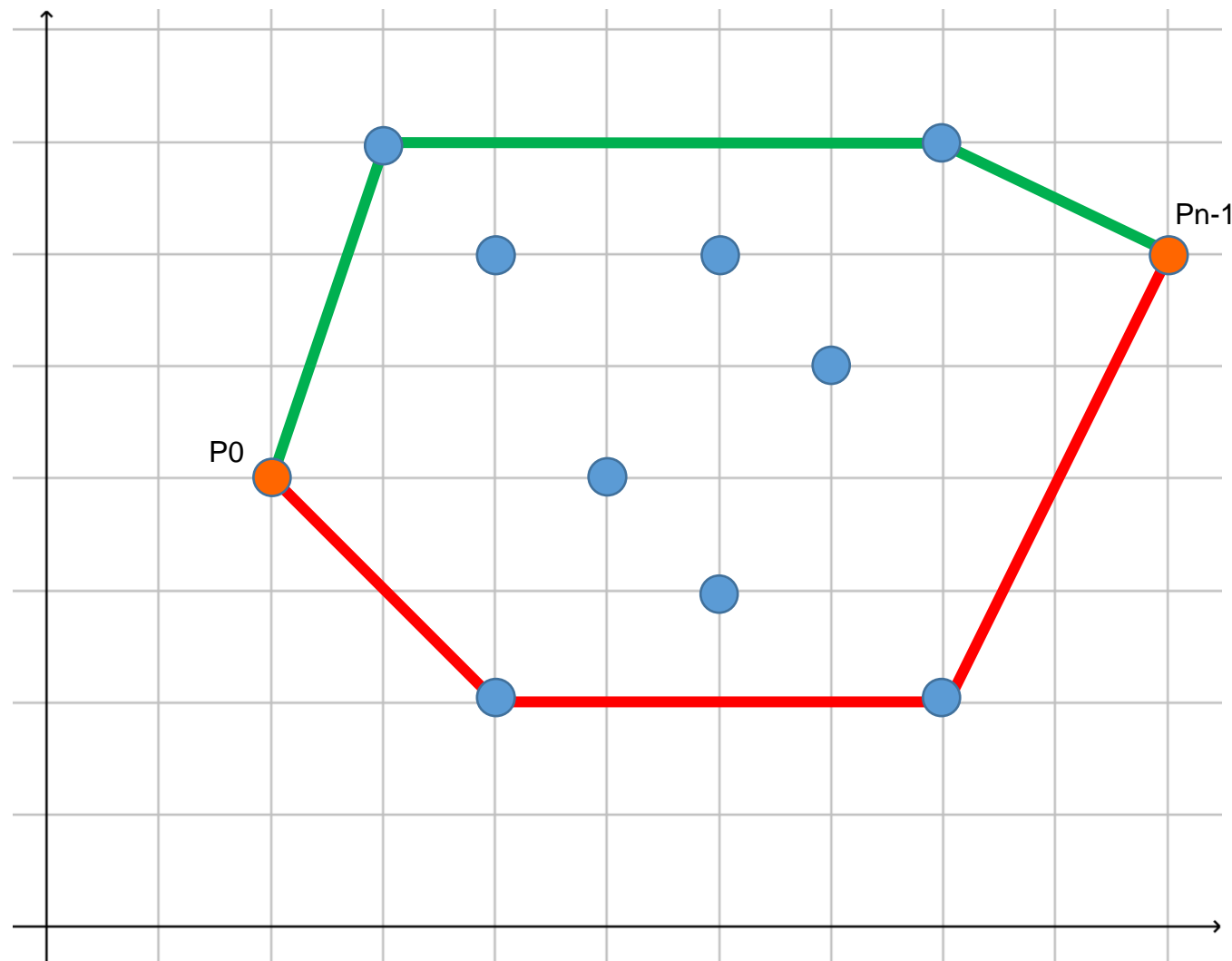
*Nhận xét:*

➤ Điểm **trái dưới**:  $P_0$

Hoàng độ nhỏ nhất, nếu có nhiều điểm thì là điểm có tung độ nhỏ nhất.

➤ Điểm **phải trên**:  $P_{n-1}$

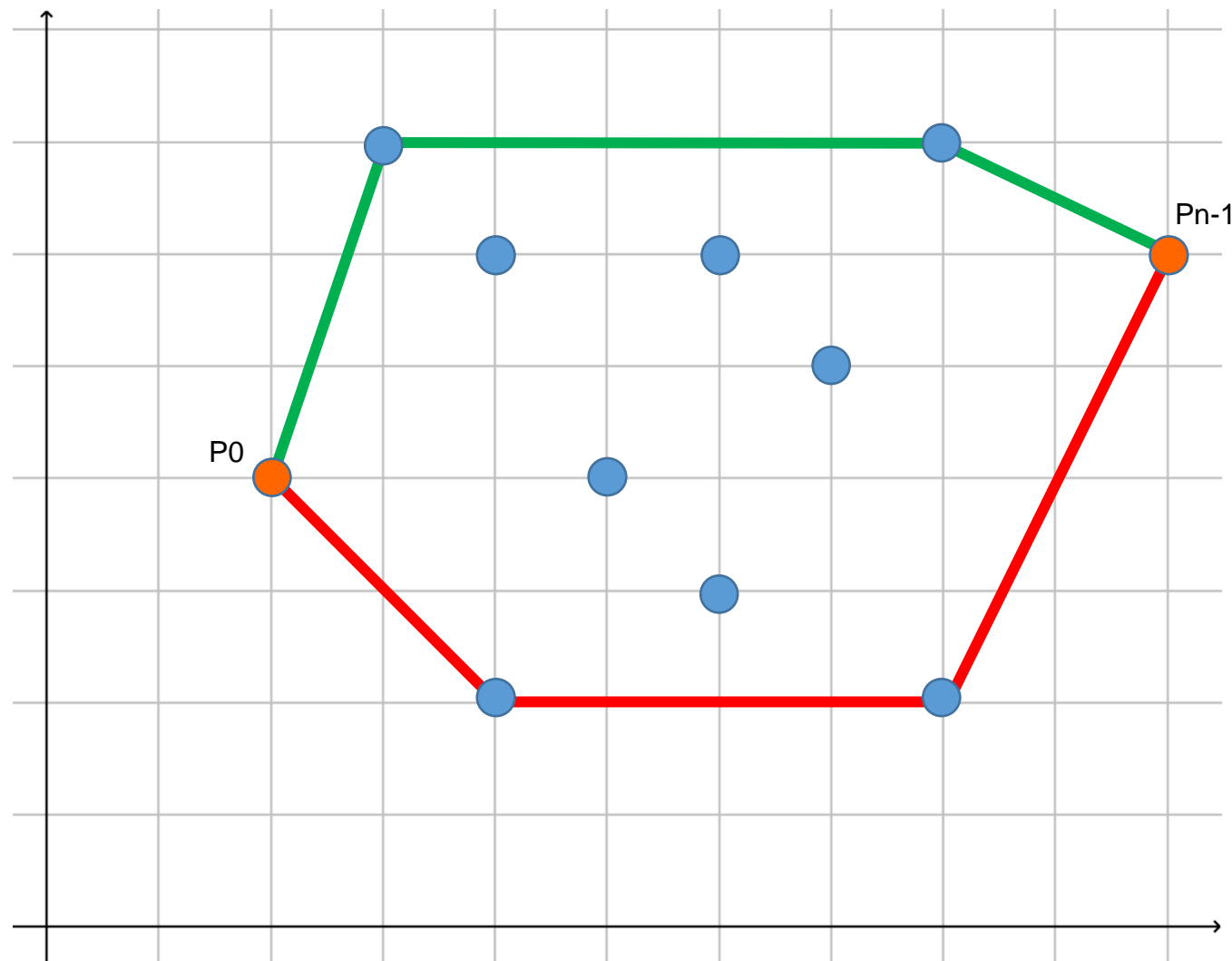
Hoành độ lớn nhất, nếu có nhiều điểm thì là điểm có tung độ lớn nhất.



## BAO LỒI

### *Nhận xét:*

- Bao lồi hình thành từ hai đường trên và dưới bắt đầu từ  $P_0$  tới  $P_{n-1}$ .
- Mỗi đường là một dãy các điểm có hoành độ tăng dần!
- Đường trên đi theo chiều kim đồng hồ.
- Đường dưới đi ngược chiều kim đồng hồ.





## BAO LỒI

Thuật toán:

B1 – Sắp xếp các điểm theo thứ tự tăng dần về hoành độ, nếu có nhiều điểm có cùng hoành độ thì sắp theo tung độ tăng dần

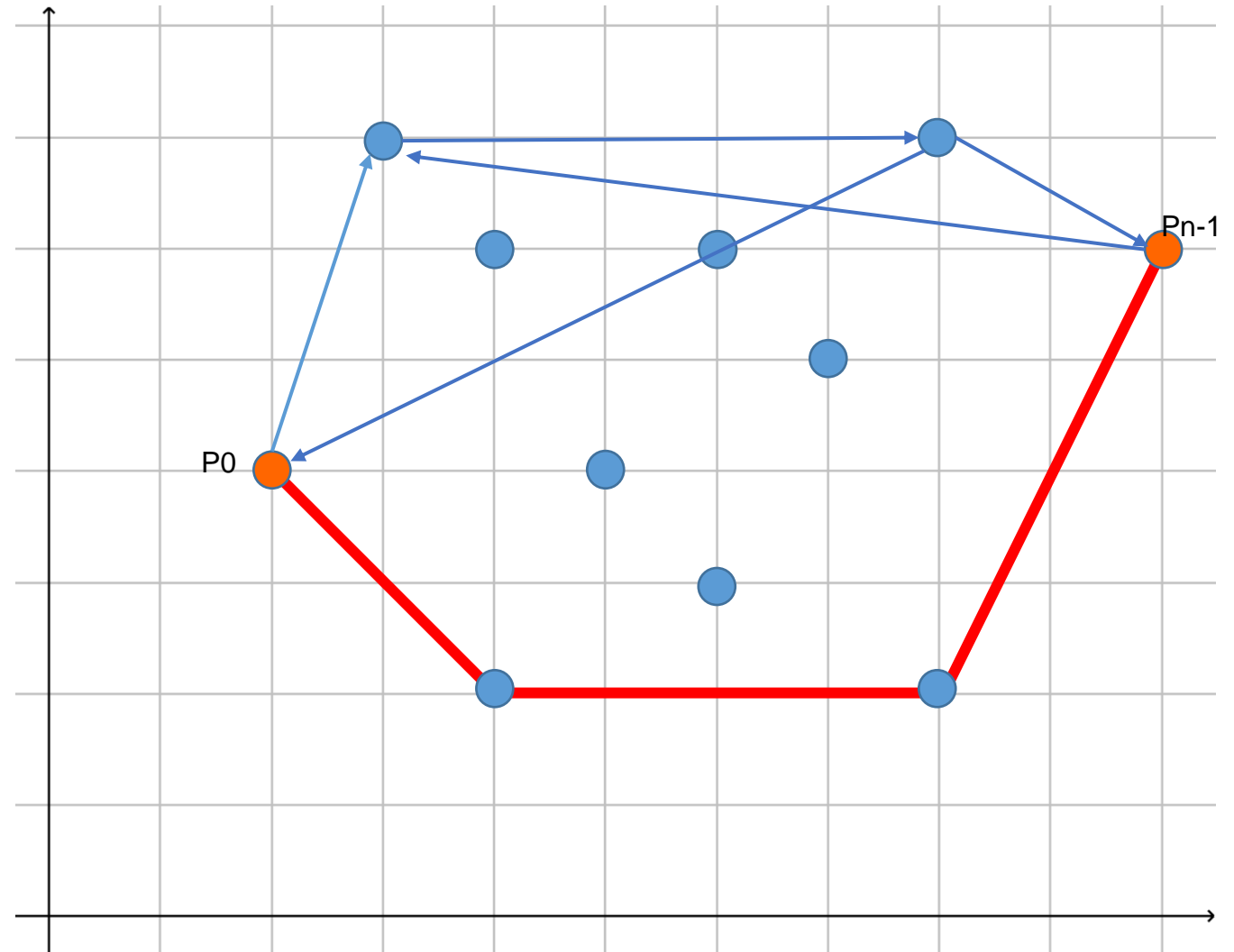
B2- Xây dựng đường bao lồi trên và dưới dựa trên nhận xét như sau:

Các điểm nằm trên đường bao lồi trên thỏa điều kiện: ba điểm liên tiếp trên bao lồi sẽ tạo thành một tam giác có diện tích đại số dương (ba điểm liệt kê thuận chiều kim đồng hồ)

Các điểm nằm trên đường bao lồi dưới thì ngược lại.

Lưu ý: cả hai đường bao lồi đều bắt đầu xây dựng từ  $P_0$

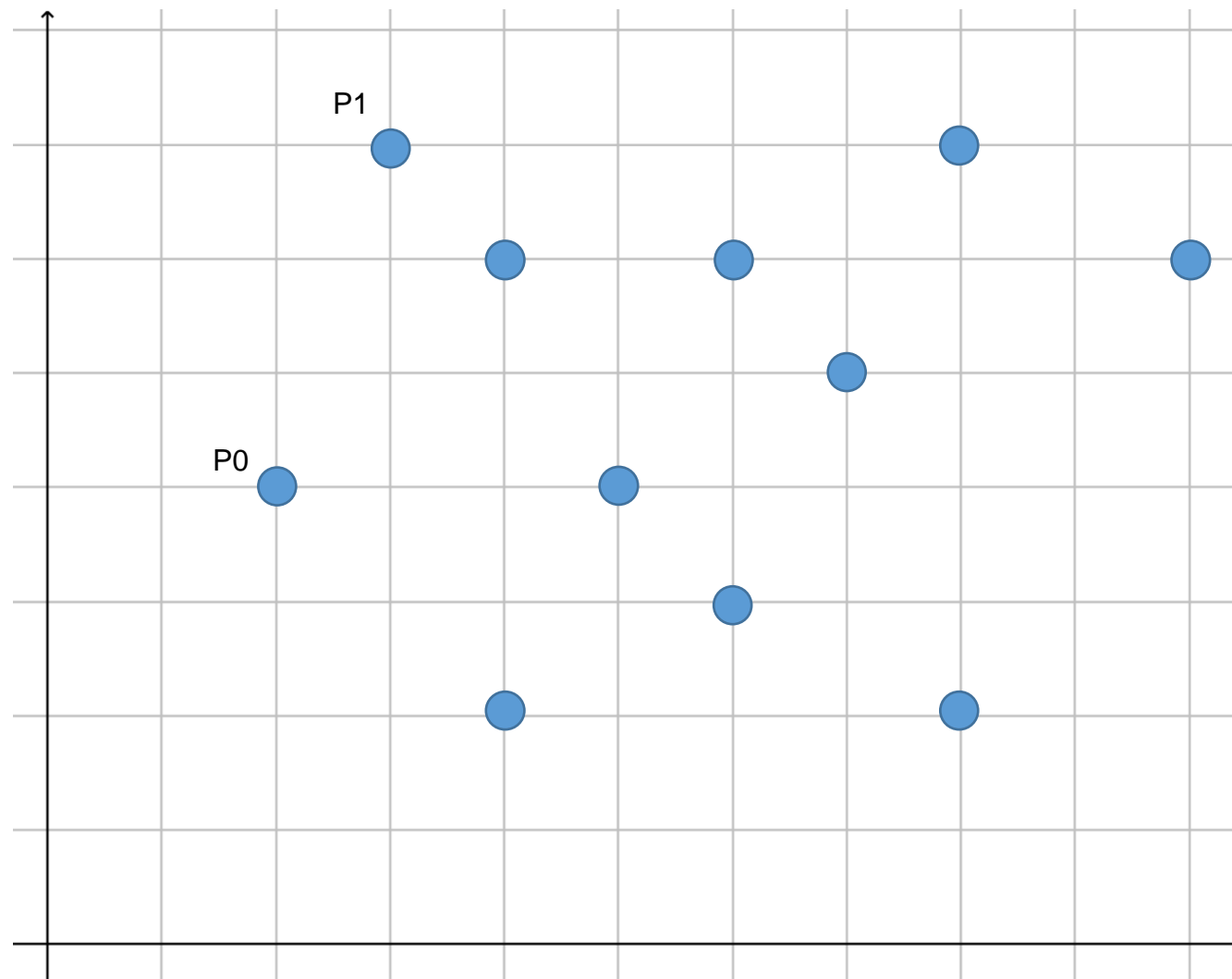
B3 – Ghép các đỉnh trên đường bao lồi trên và bao lồi dưới thành đường bao lồi hoàn chỉnh



## BAO LỖI

Xây dựng bao lỗi bằng cách xây dựng 2 đường bao lỗi trên và dưới.

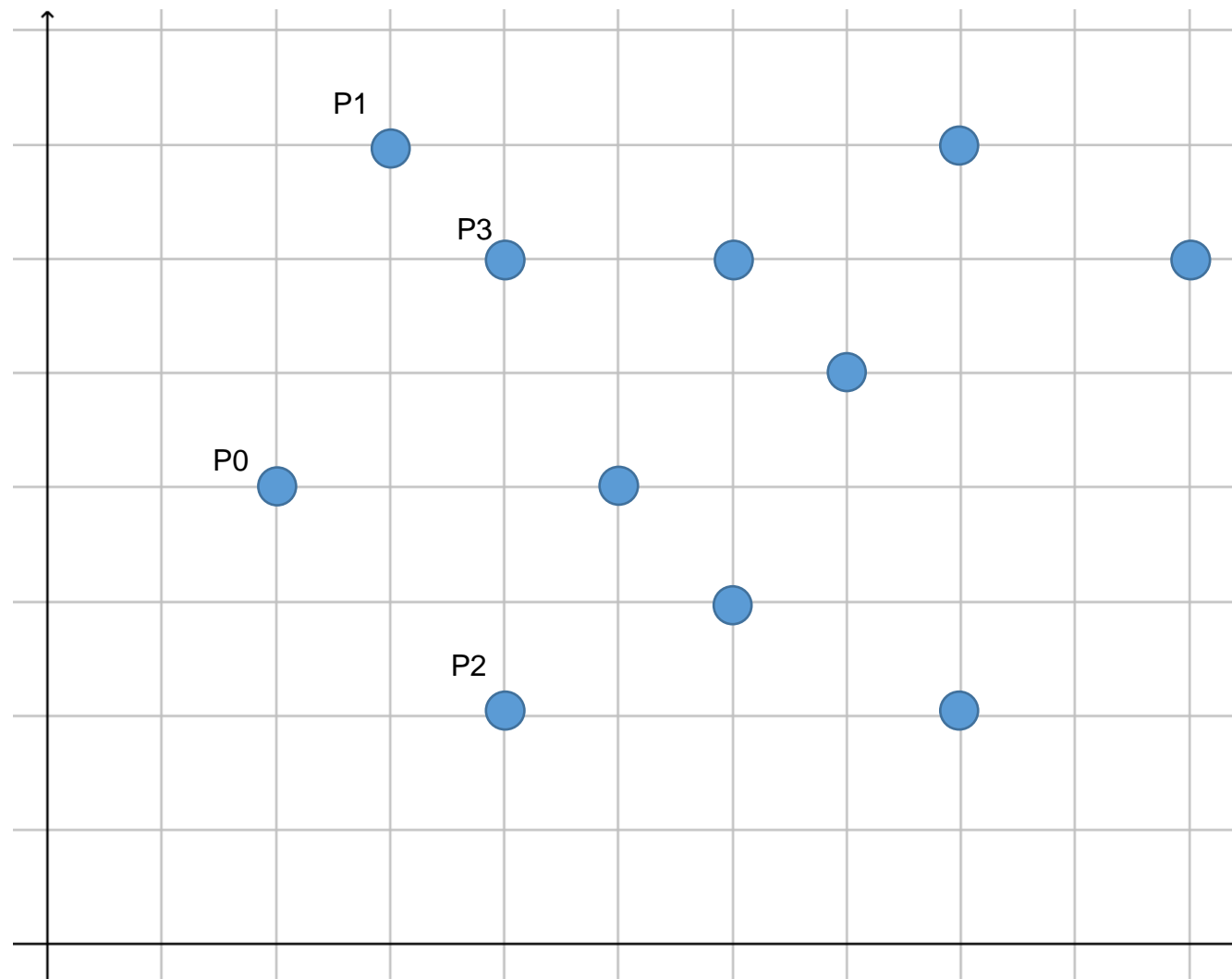
→ Cần sắp xếp các điểm theo độ ưu tiên  
*hoành độ* → *tung độ*



## BAO LỖI

Xây dựng bao lỗi bằng cách xây dựng 2 đường bao lỗi trên và dưới.

→ Cần sắp xếp các điểm theo độ ưu tiên  
*hoành độ* → *tung độ*

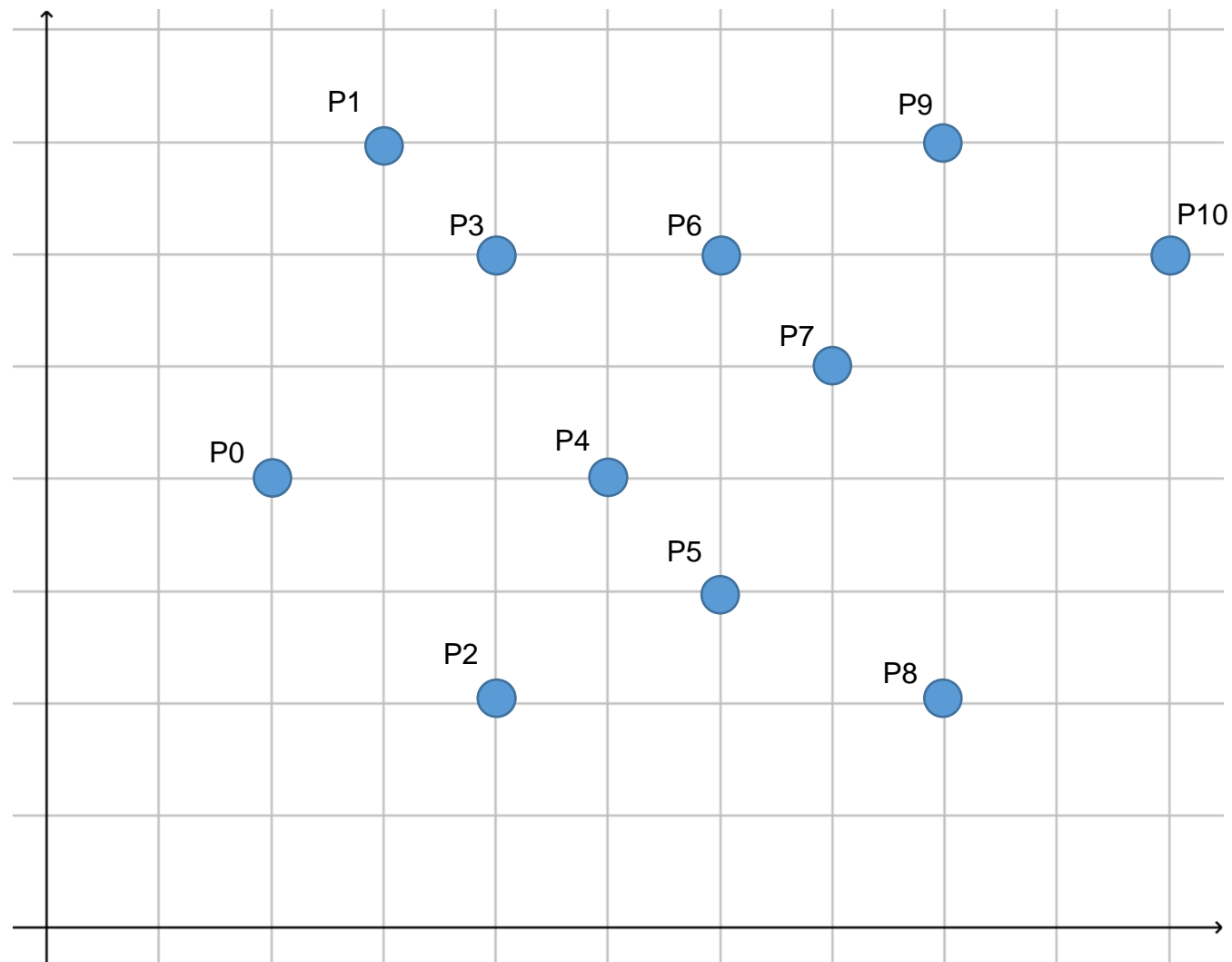




## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

→ Cần sắp xếp các điểm theo độ ưu tiên  
*hoành độ* → *tung độ*

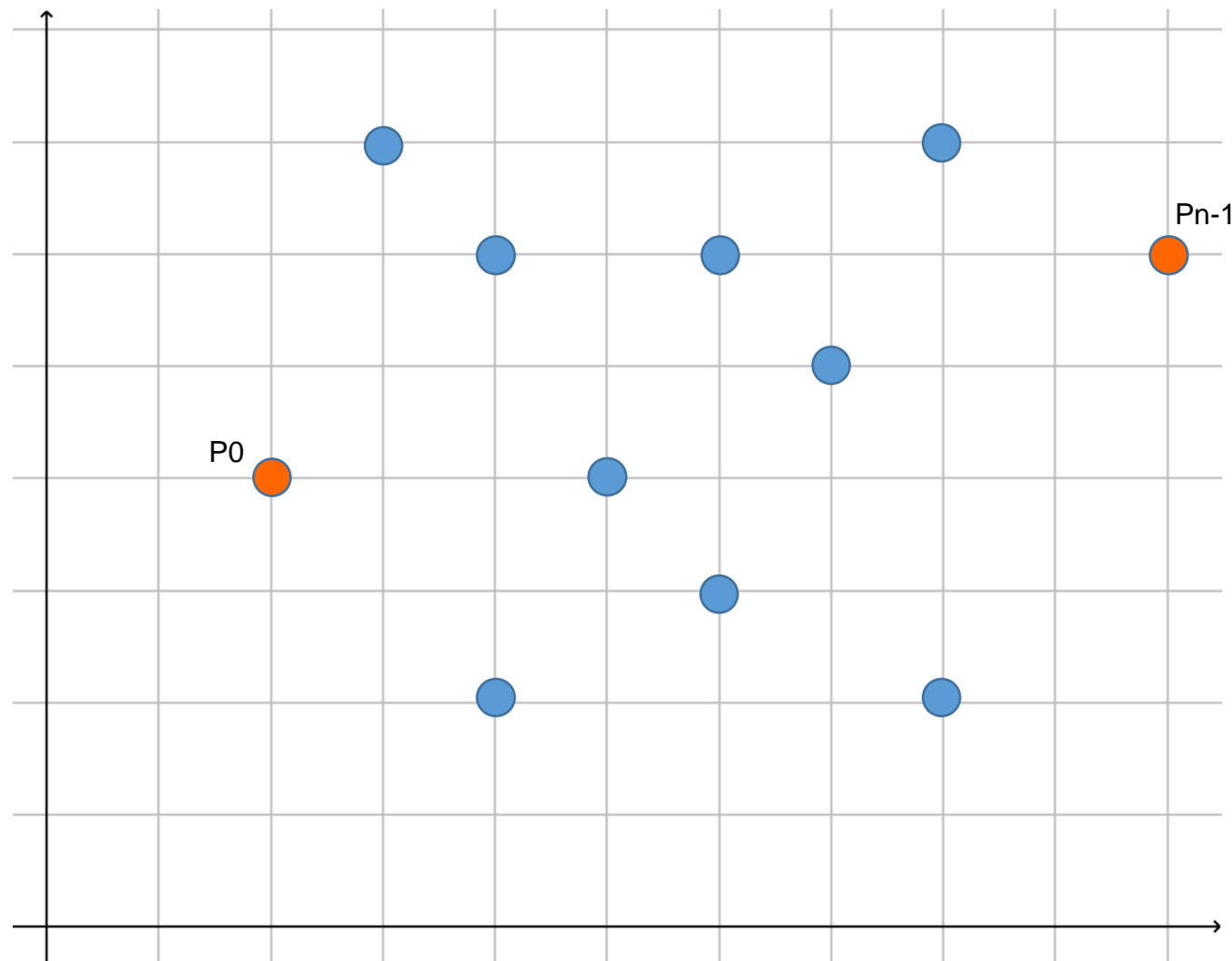


## BAO LỖI

Hai điểm  $P_0$  và  $P_{n-1}$  thỏa:

$P_0$  có hoành độ nhỏ nhất,  
tung độ nhỏ nhất.

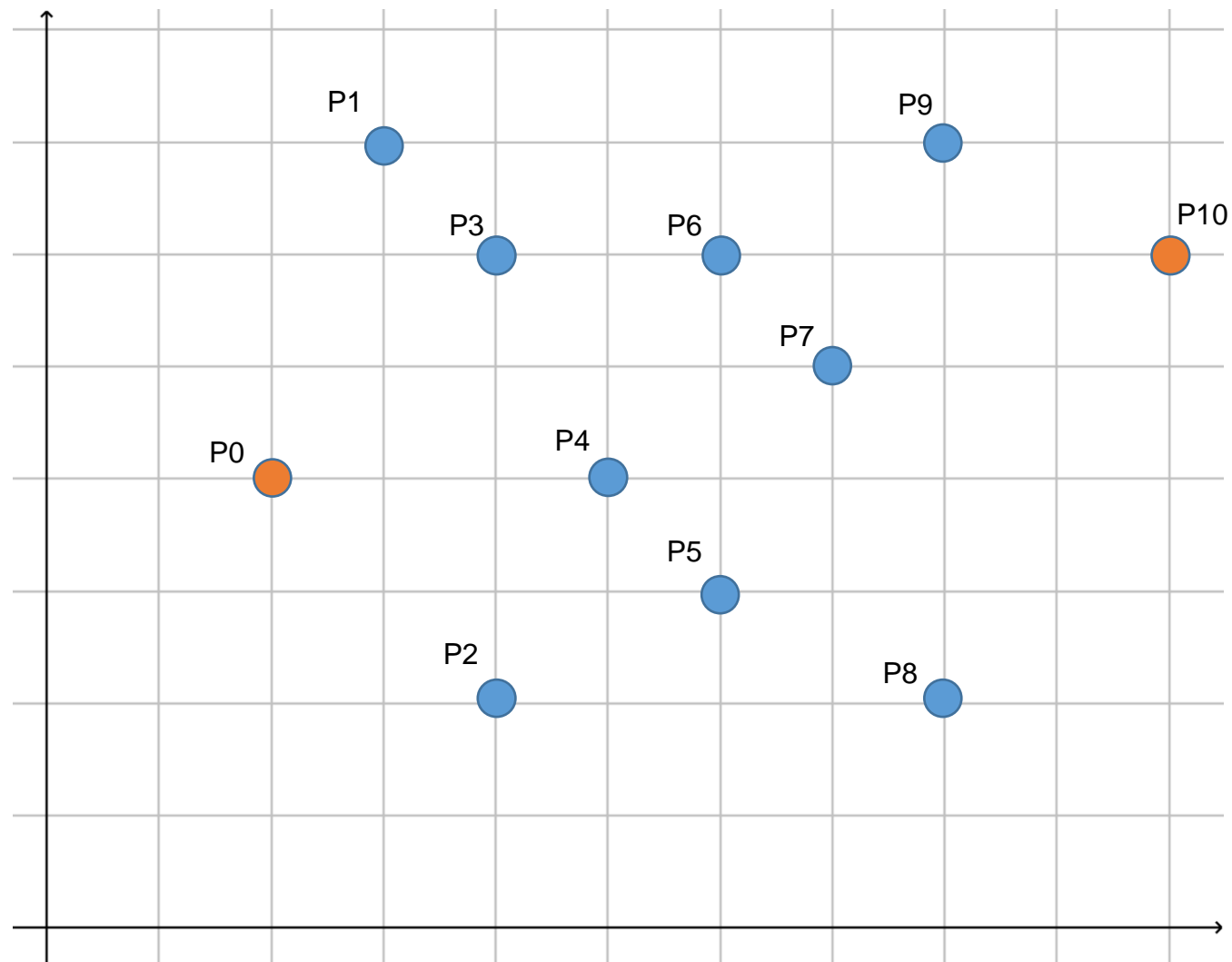
$P_{n-1}$  có hoành độ lớn nhất,  
tung độ lớn nhất.



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

Hai điểm  $P_0$  và  $P_{n-1}$  là hai điểm đầu và cuối của hai đường bao trên và dưới.



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

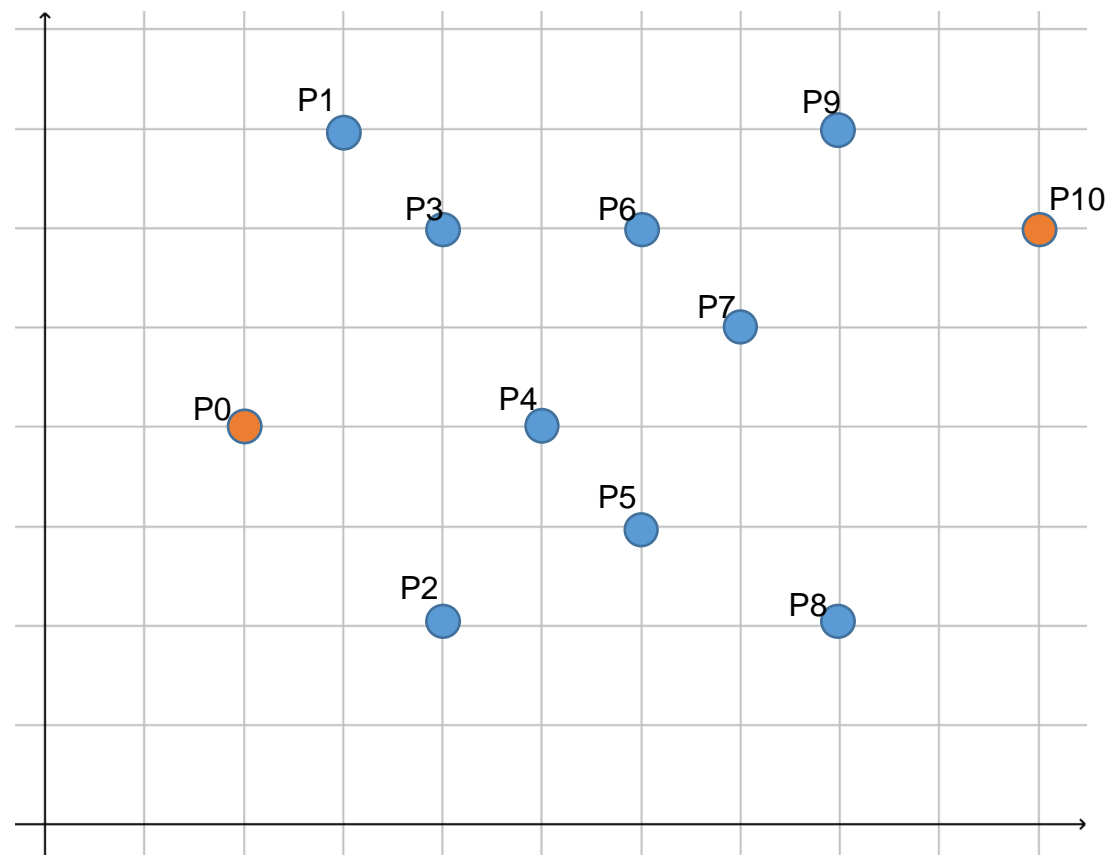
Tạo stack  $S1$  và  $S2$  lưu các đỉnh thuộc đường bao lồi trên và dưới.  
Phần tử đầu và cuối của hai stack chính là hai điểm  $P0$  và  $Pn-1$   
Quá trình tạo đường bao lồi trên và dưới được mô tả dưới đây:

$S1$

$P0$	...	$Pn-1$
------	-----	--------

$S2$

$P0$	...	$Pn-1$
------	-----	--------



## BAO LỒI

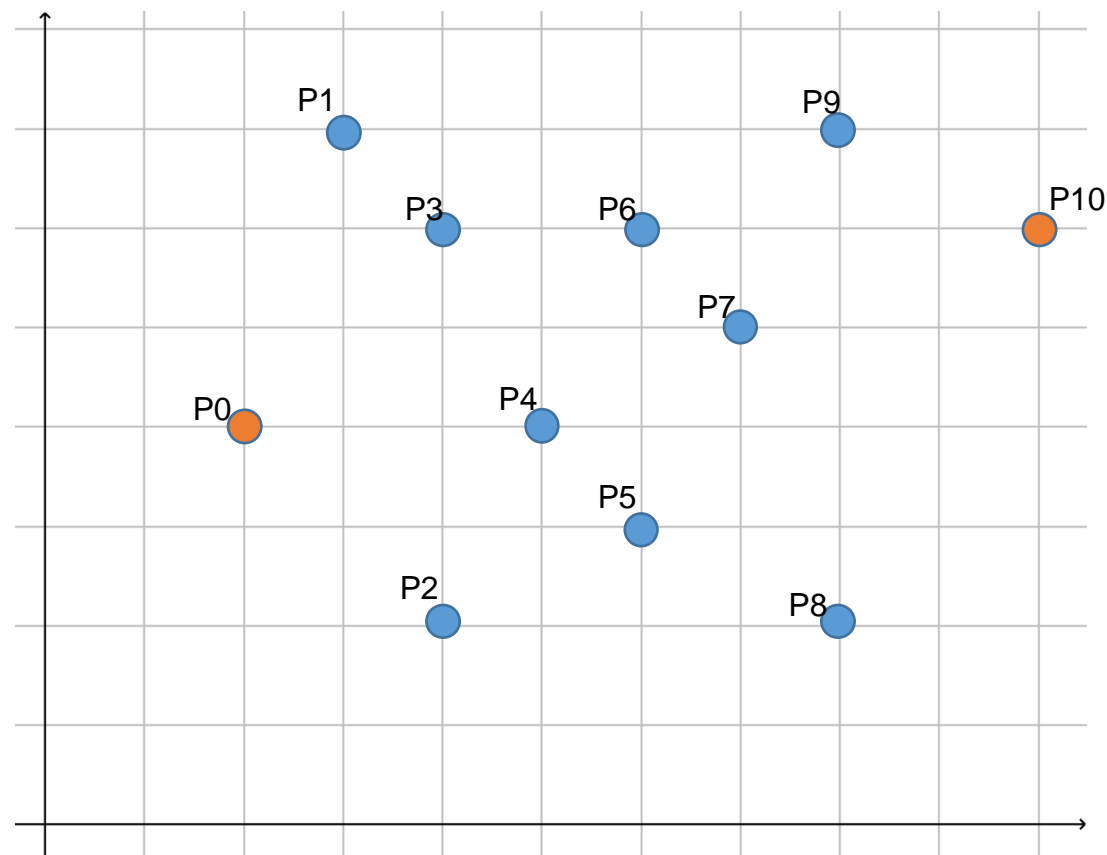
Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

**Xây dựng đường bao lồi trên:**

Đưa điểm P0 vào S1 (điểm này đương nhiên thuộc bao lồi)

S1

P0





## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

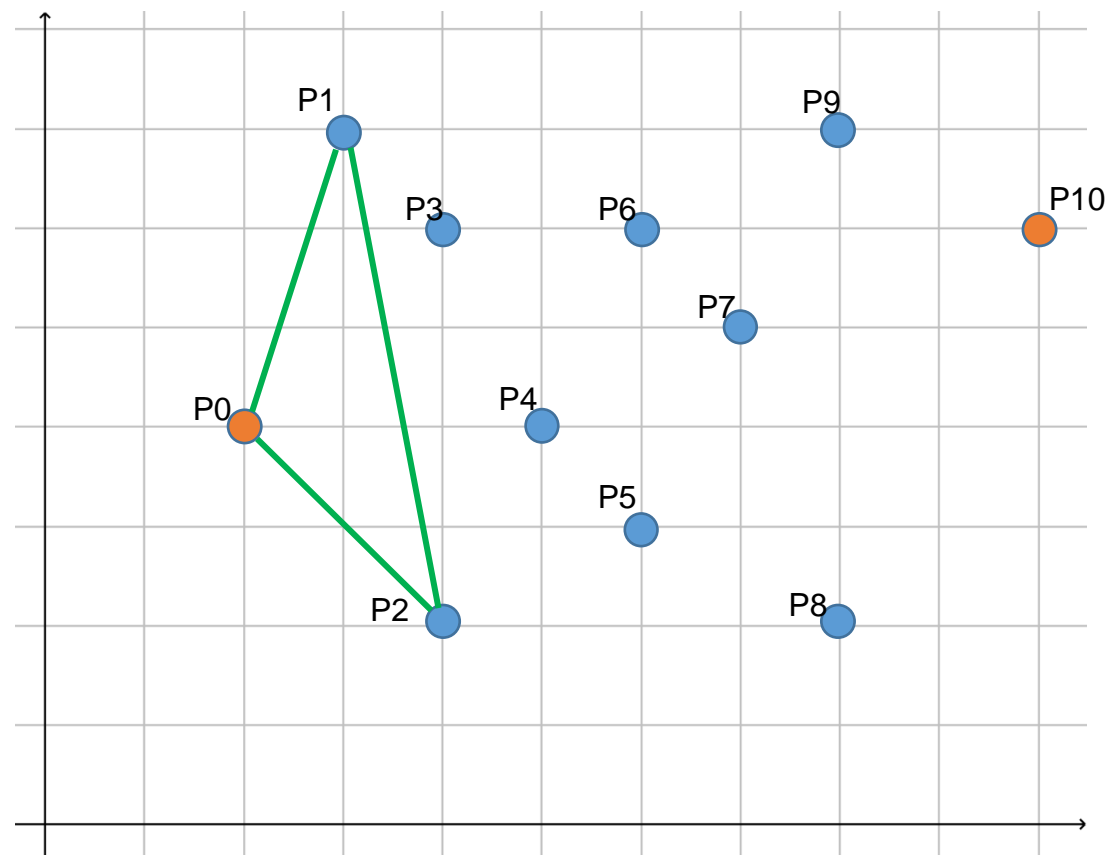
**Đường bao lồi trên:**

Đưa điểm P1, P2 vào S1

S1

P0	P1	P2
----	----	----

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P0, P1, P2)$ ,  
 $T > 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê thuận chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  giữ nguyên stack



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

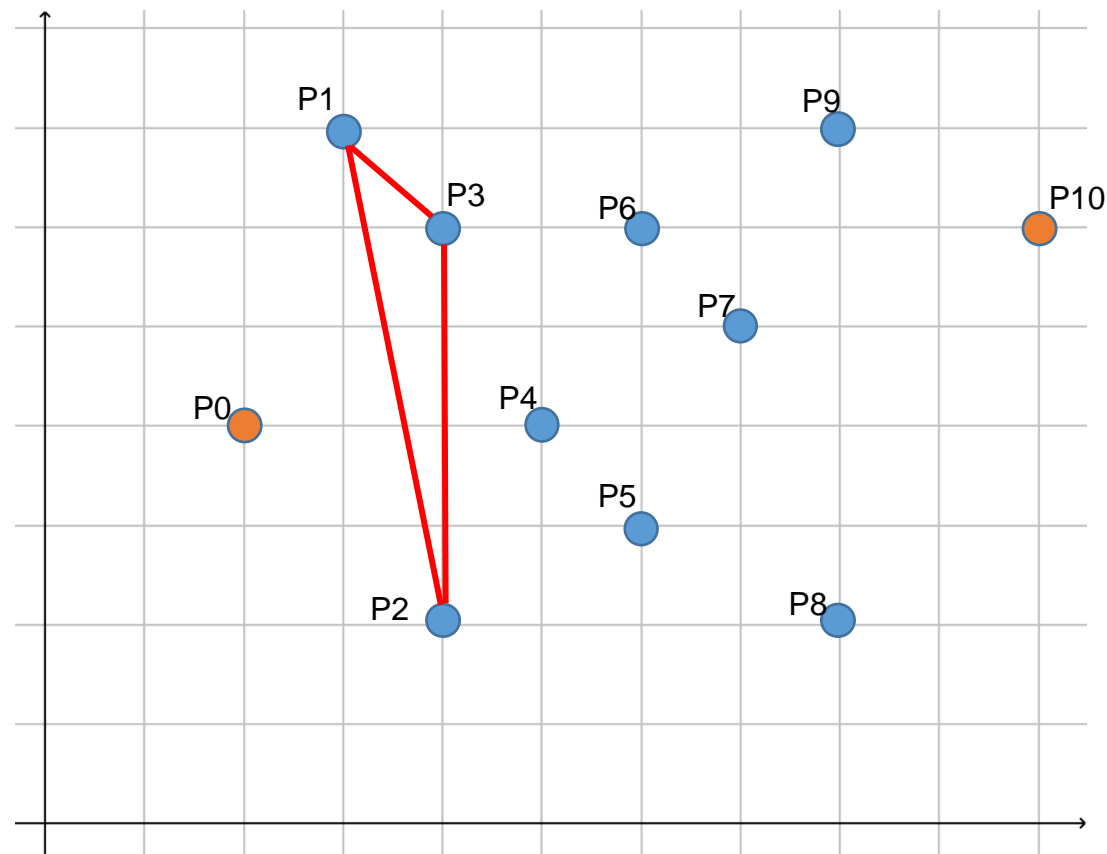
Đường bao lồi trên: Tiếp theo xét điểm P3

S1



P3

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P1, P2, P3)$ ,  
 $T < 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê nghịch chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  bỏ điểm P2 khỏi S1



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

Đường bao lồi trên: Tiếp theo xét điểm P3

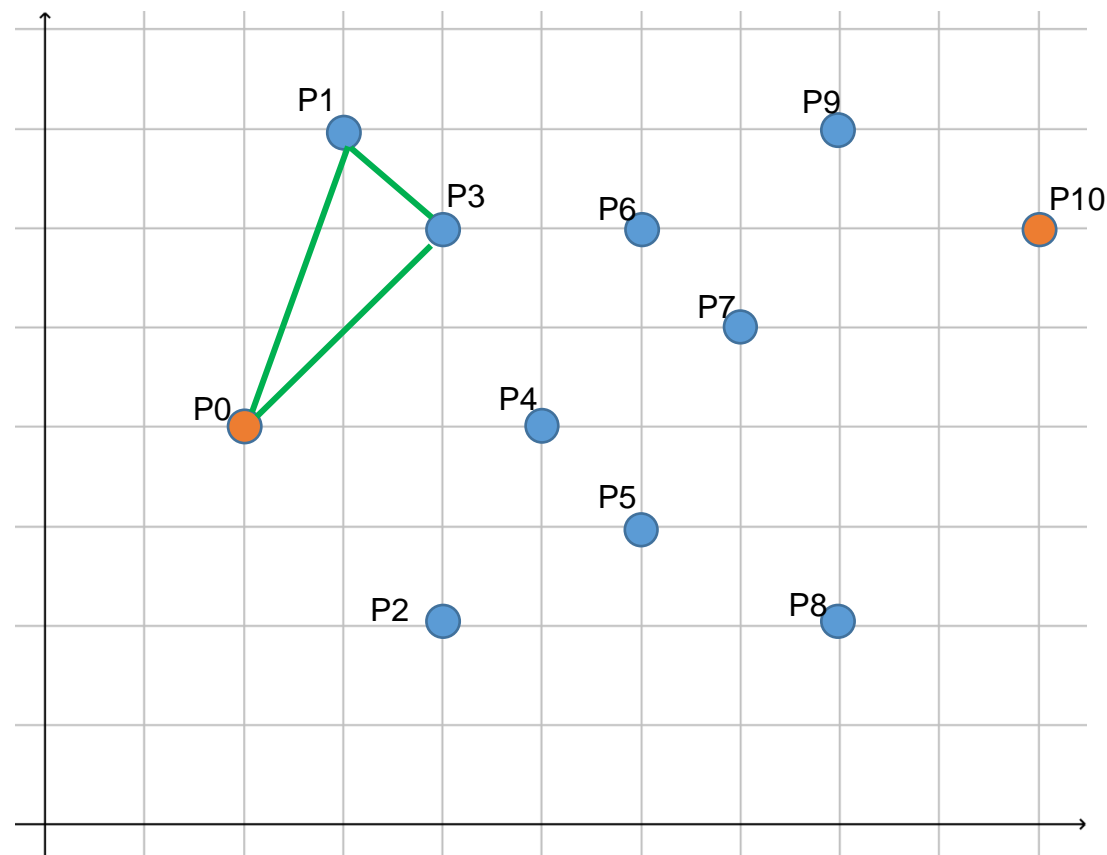
S1

P0

P1

P3

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P0, P1, P3)$ ,  
 $T > 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê thuận chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  Đưa P3 vào S1



## BAO LỒI

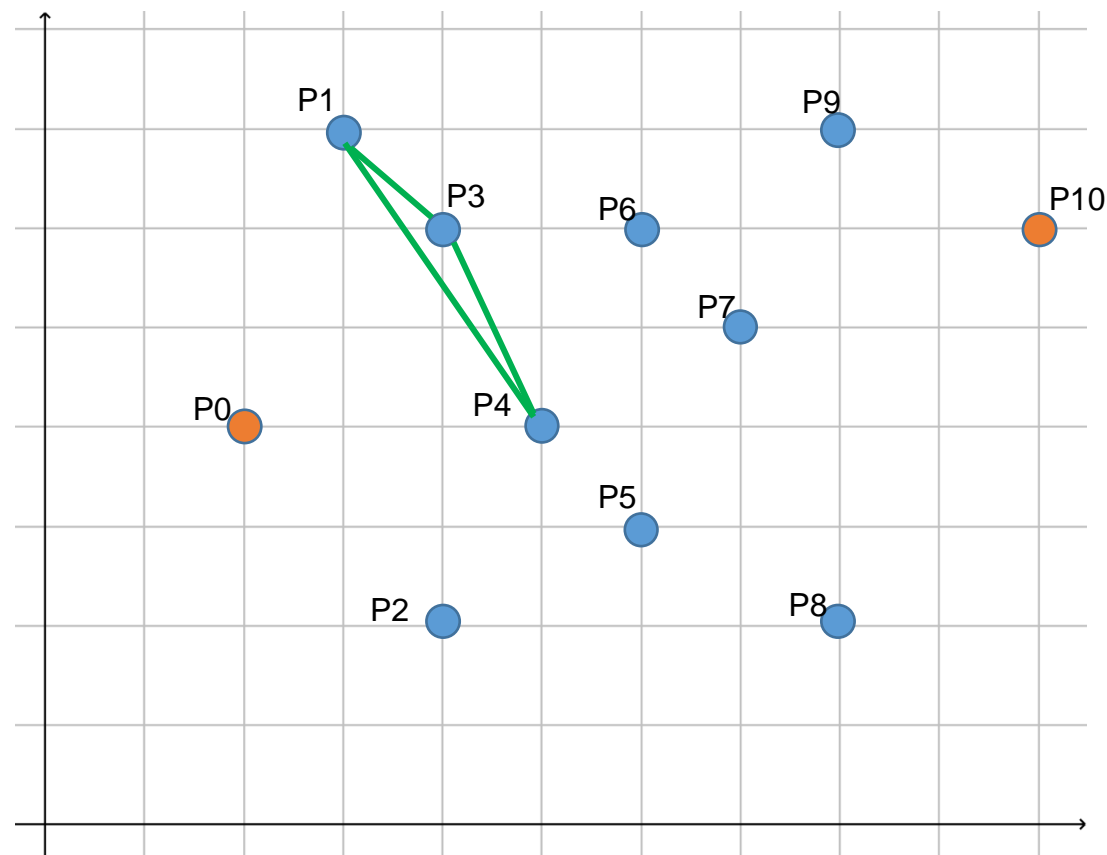
Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

Đường bao lồi trên:

S1



Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P1, P3, P4)$ ,  
 $T > 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê thuận chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  đưa  $P4$  vào  $S1$



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

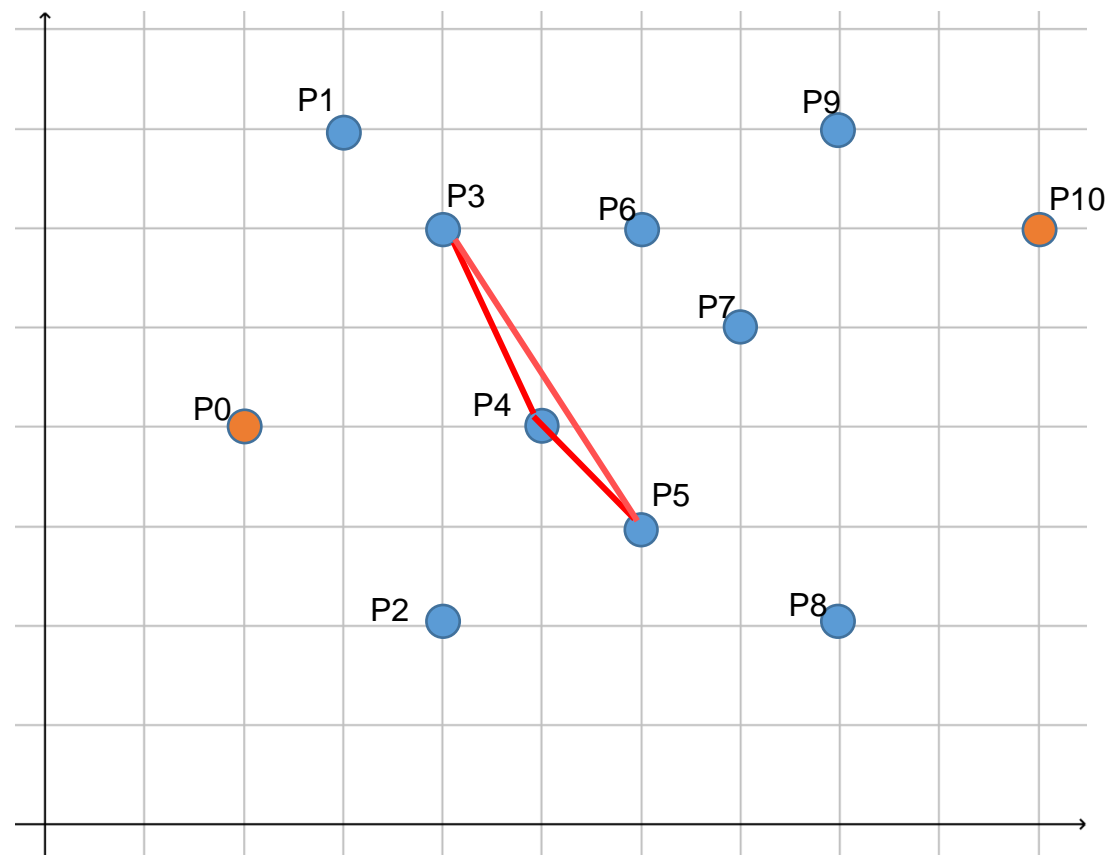
Đường bao lồi trên:

S1

P0 P1 P3 

P5

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P3, P4, P5)$ ,  
 $T < 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê nghịch chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  xóa P4 khỏi S1





## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

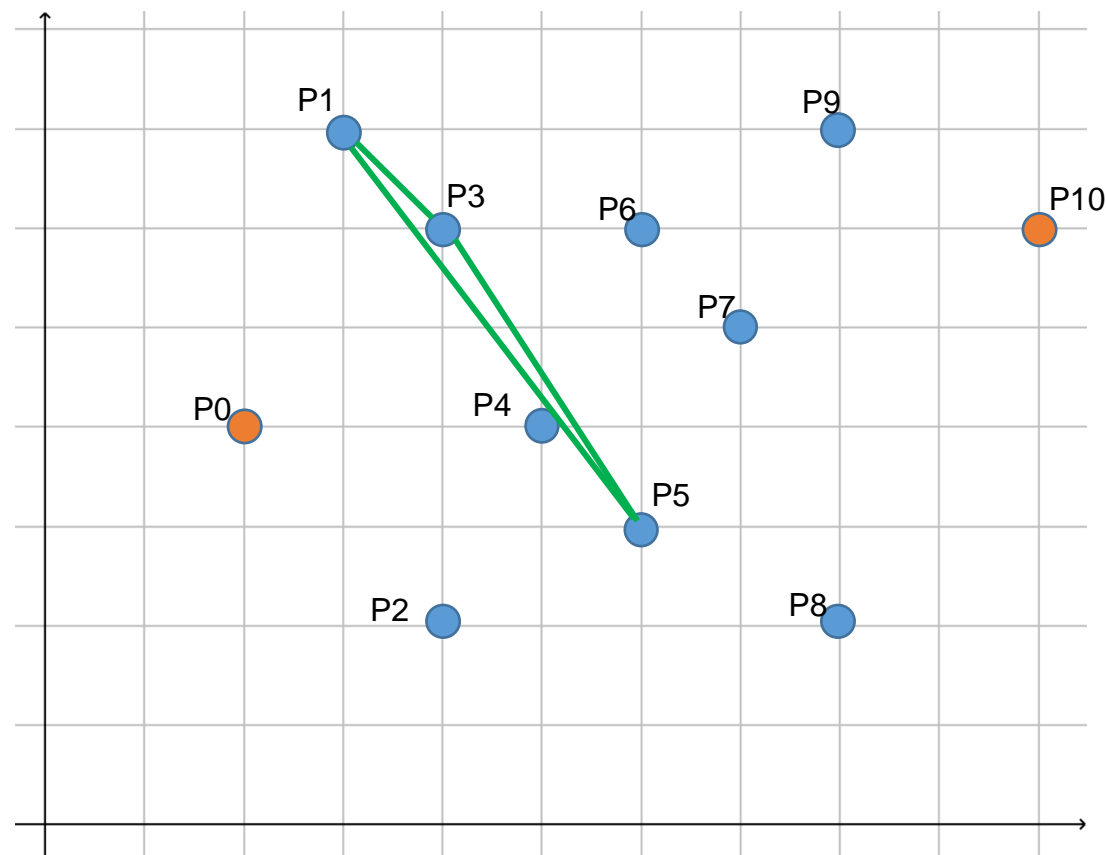
Đường bao lồi trên:

S1

P0 P1 P3 

P5

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P1, P3, P5)$ ,  
 $T > 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê thuận chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  đưa P5 vào S1



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

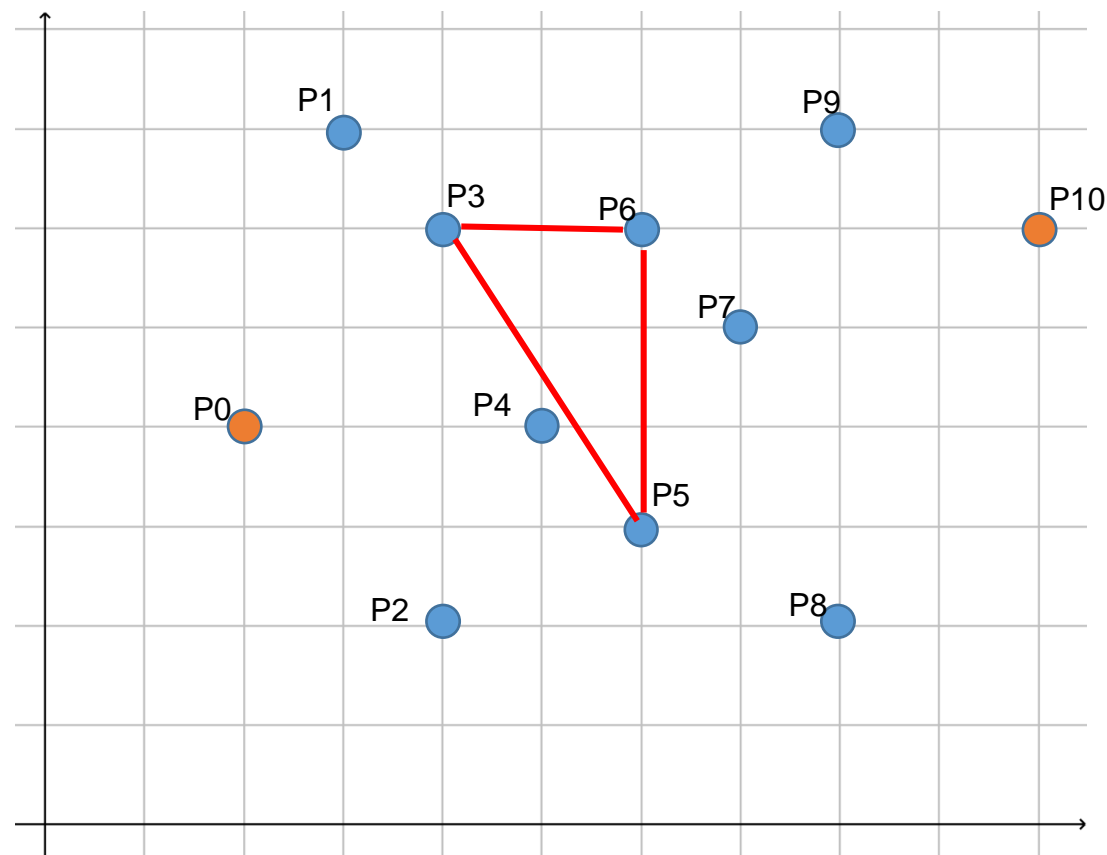
Đường bao lồi trên:

S1

P0 P1 P3 ~~P4~~

P6

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P3, P5, P6)$ ,  
 $T < 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê nghịch chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  xóa  $P5$  khỏi S1



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

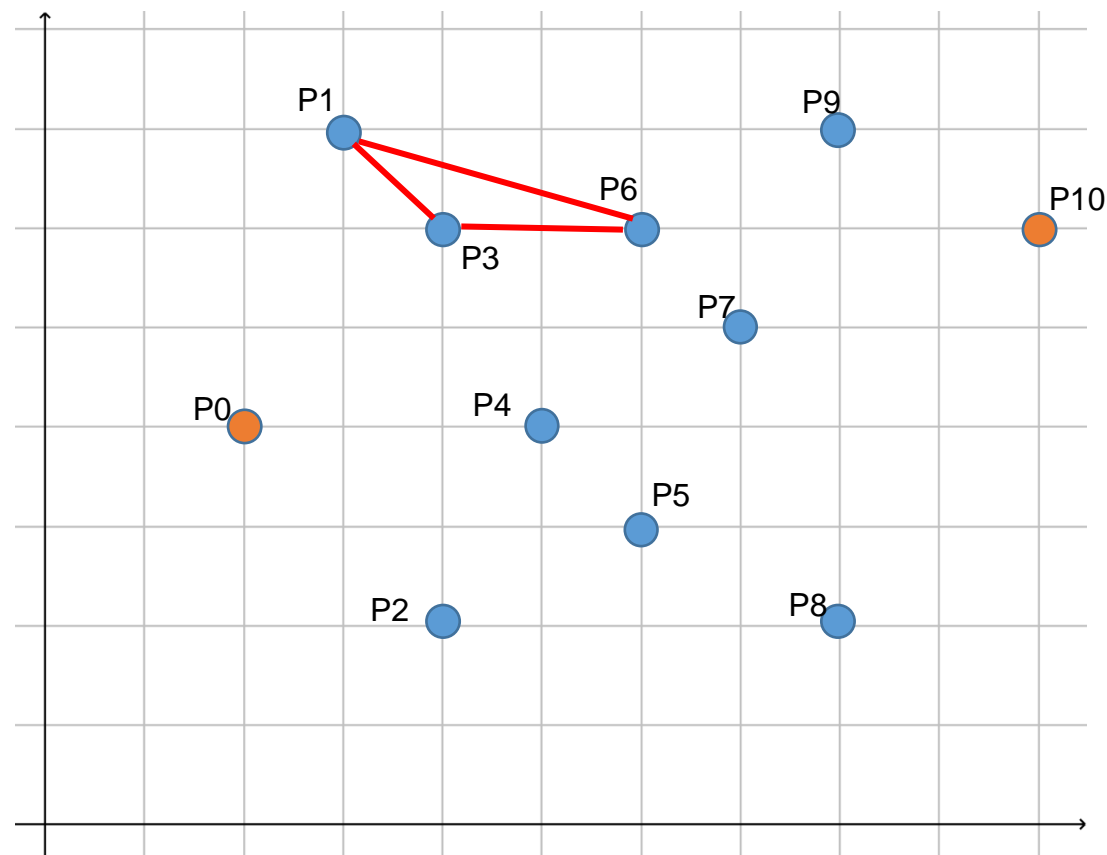
Đường bao lồi trên:

S1



P6

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P1, P3, P6)$ ,  
 $T < 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê nghịch chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  xóa  $P3$  khỏi  $S1$



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

Đường bao lồi trên:

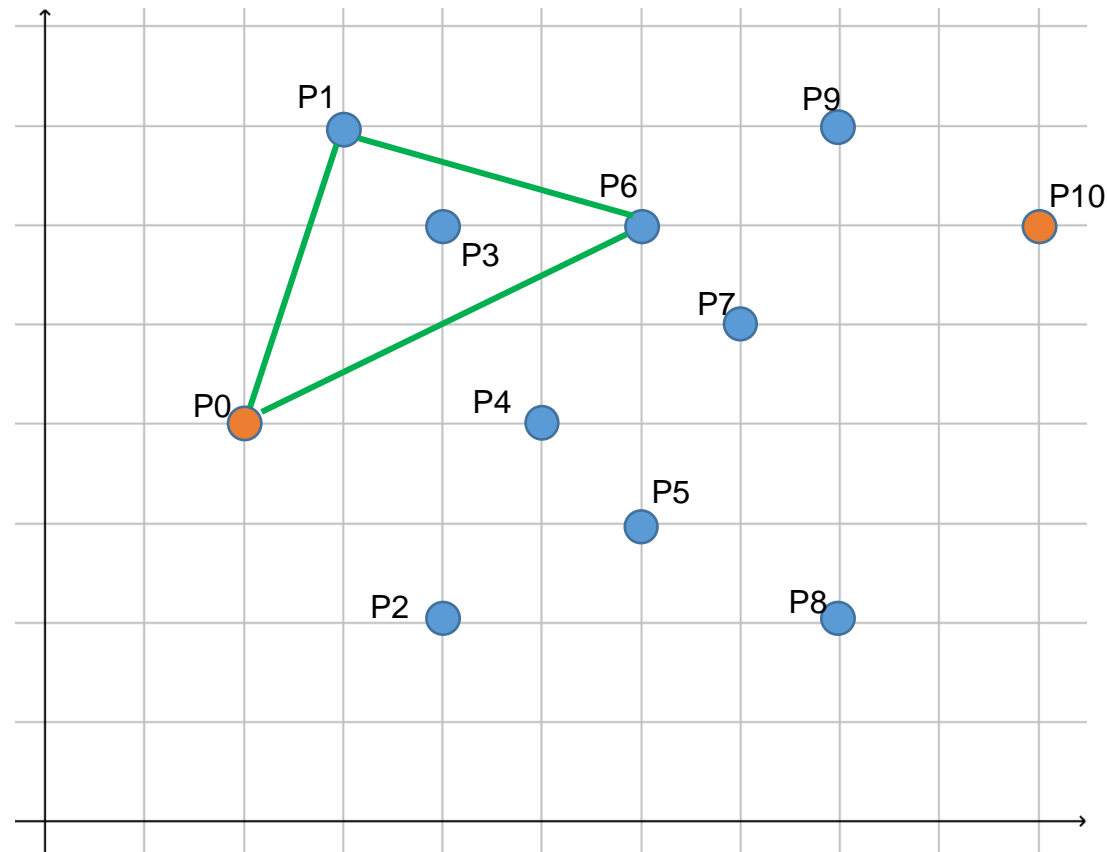
S1

P0

P1

P6

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P0, P1, P6)$ ,  
 $T > 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê thuận chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  đưa P6 vào S1



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

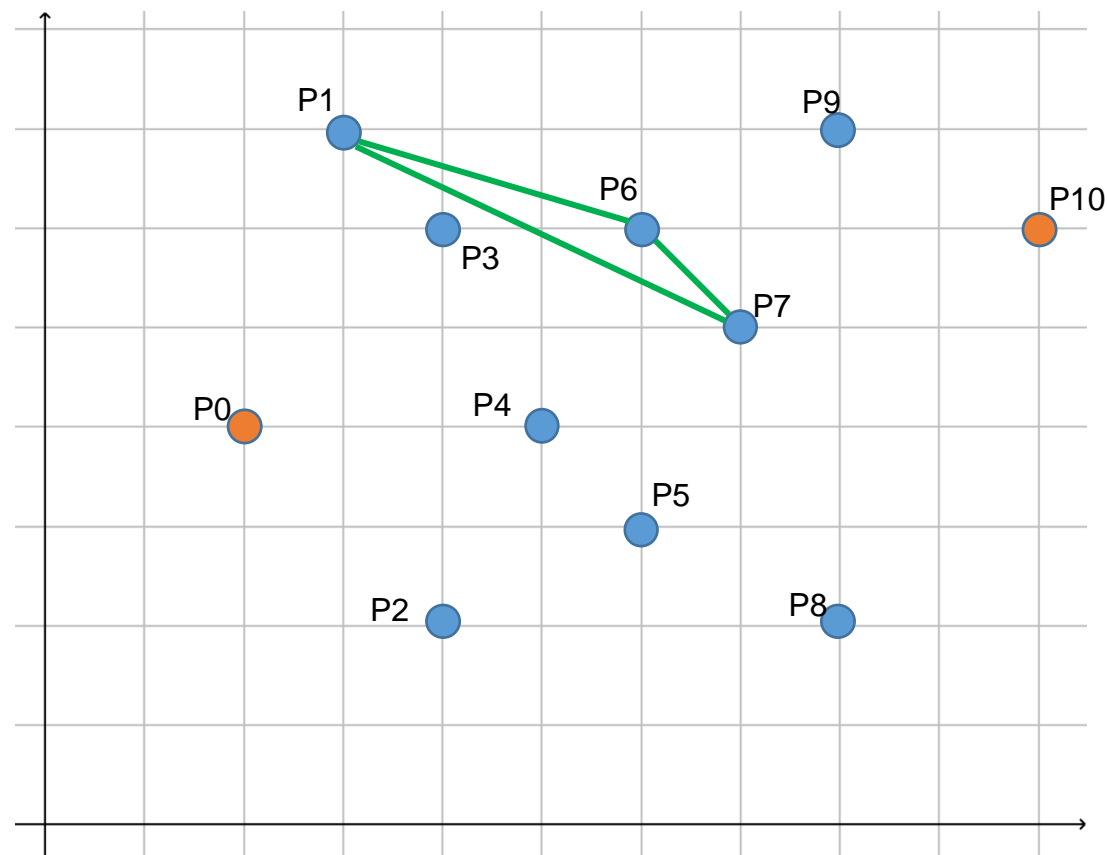
Đường bao lồi trên:

S1

P0 P1 P6

P7

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P1, P6, P7)$ ,  
 $T > 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê thuận chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  đưa  $P7$  vào  $S1$





## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

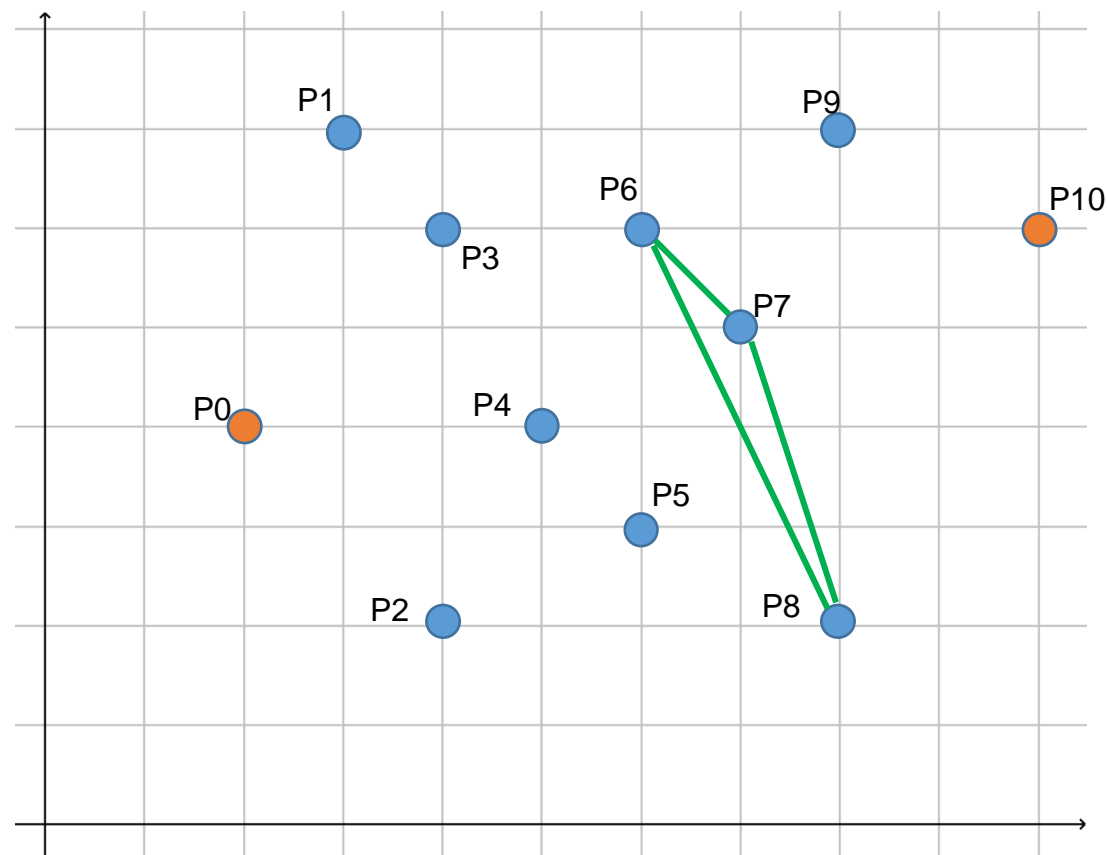
Đường bao lồi trên:

S1

P0	P1	P6	P7
----	----	----	----

P8
----

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P6, P7, P8)$ ,  
 $T > 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê thuận chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  đưa P8 vào S1



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

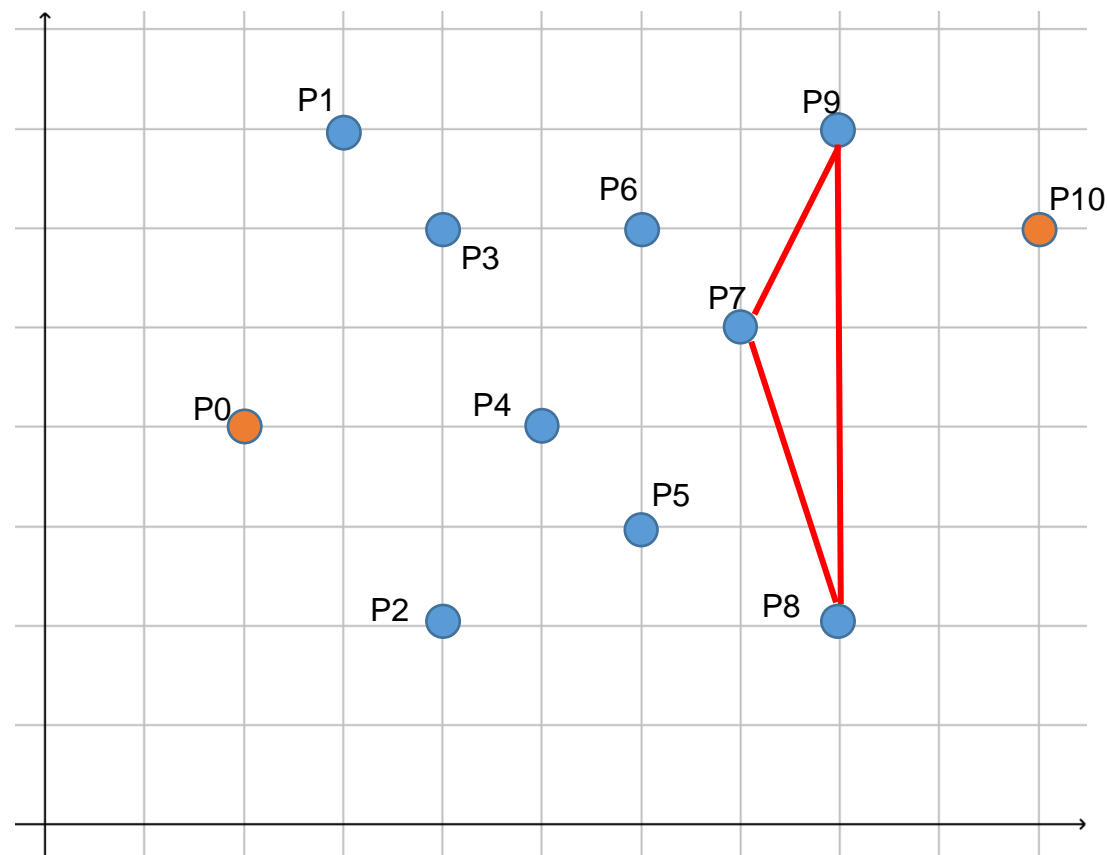
Đường bao lồi trên:

S1



P9

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P7, P8, P9)$ ,  
 $T < 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê nghịch chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  xóa P8 ra khỏi S1



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

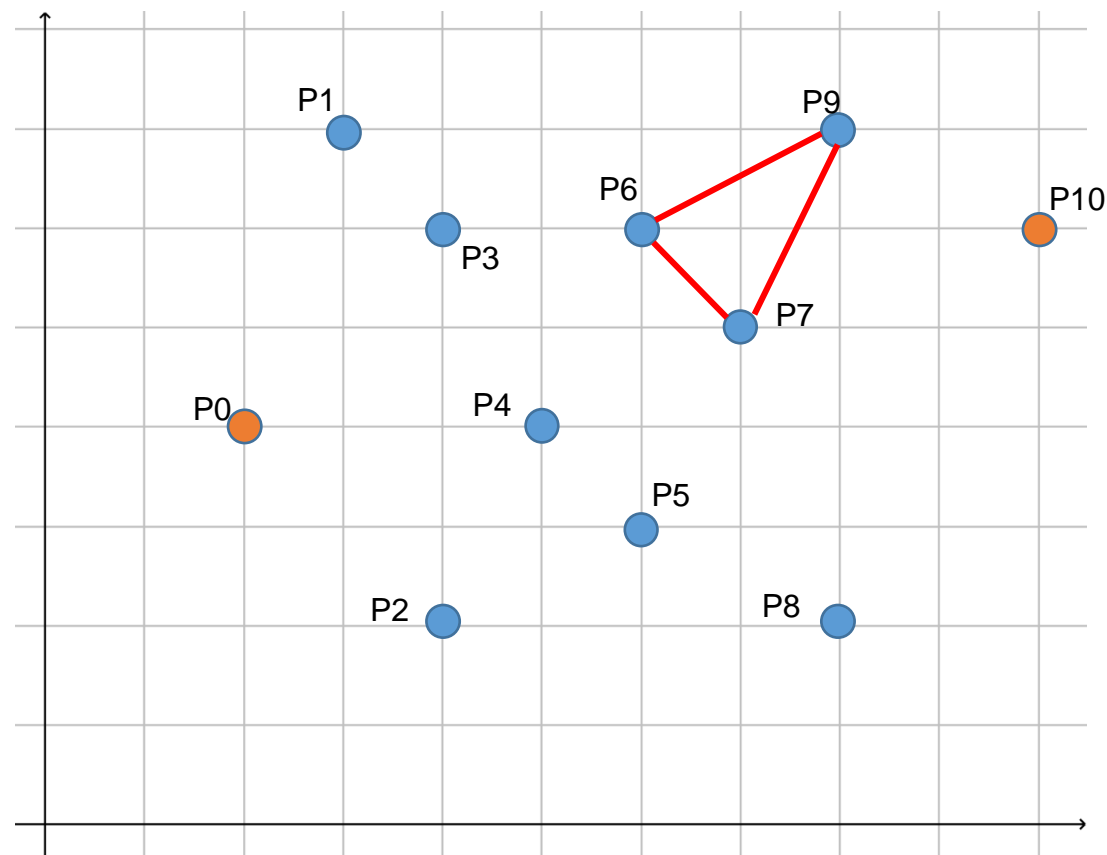
Đường bao lồi trên:

S1



P9

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P6, P7, P9)$ ,  
 $T < 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê nghịch chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  xóa  $P7$  ra khỏi S1



## BAO LỒI

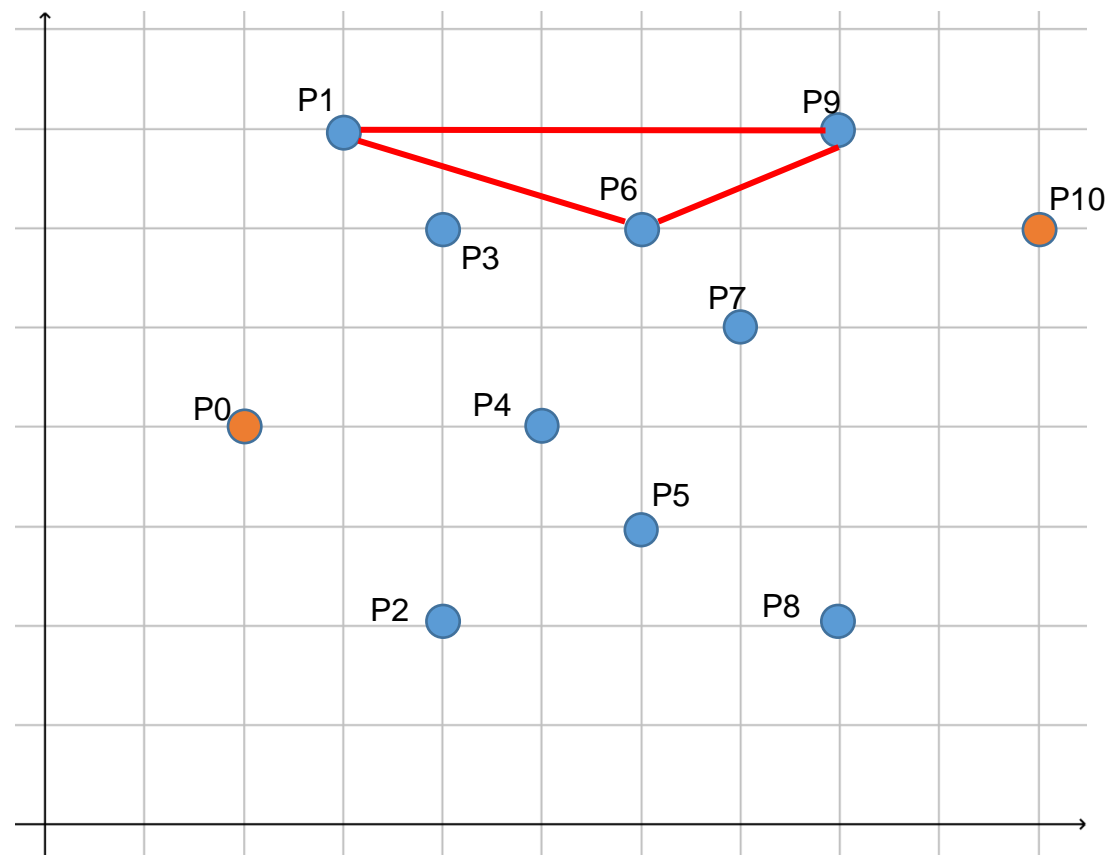
Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

Đường bao lồi trên:

S1



Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P1, P6, P9)$ ,  
 $T < 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê nghịch chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  xóa  $P6$  ra khỏi  $S1$



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

Đường bao lồi trên:

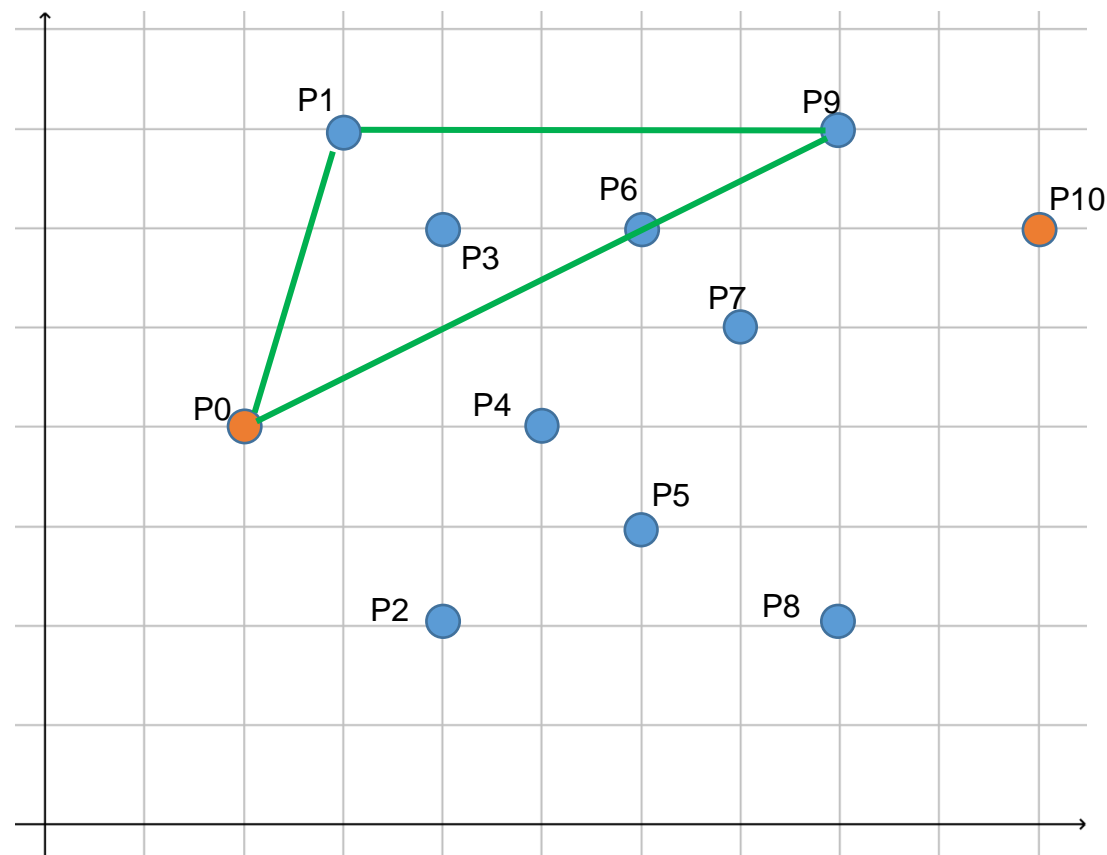
S1

P0

P1

P9

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P0, P1, P9)$ ,  
 $T > 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê thuận chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  Thêm  $P9$  vào  $S1$



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

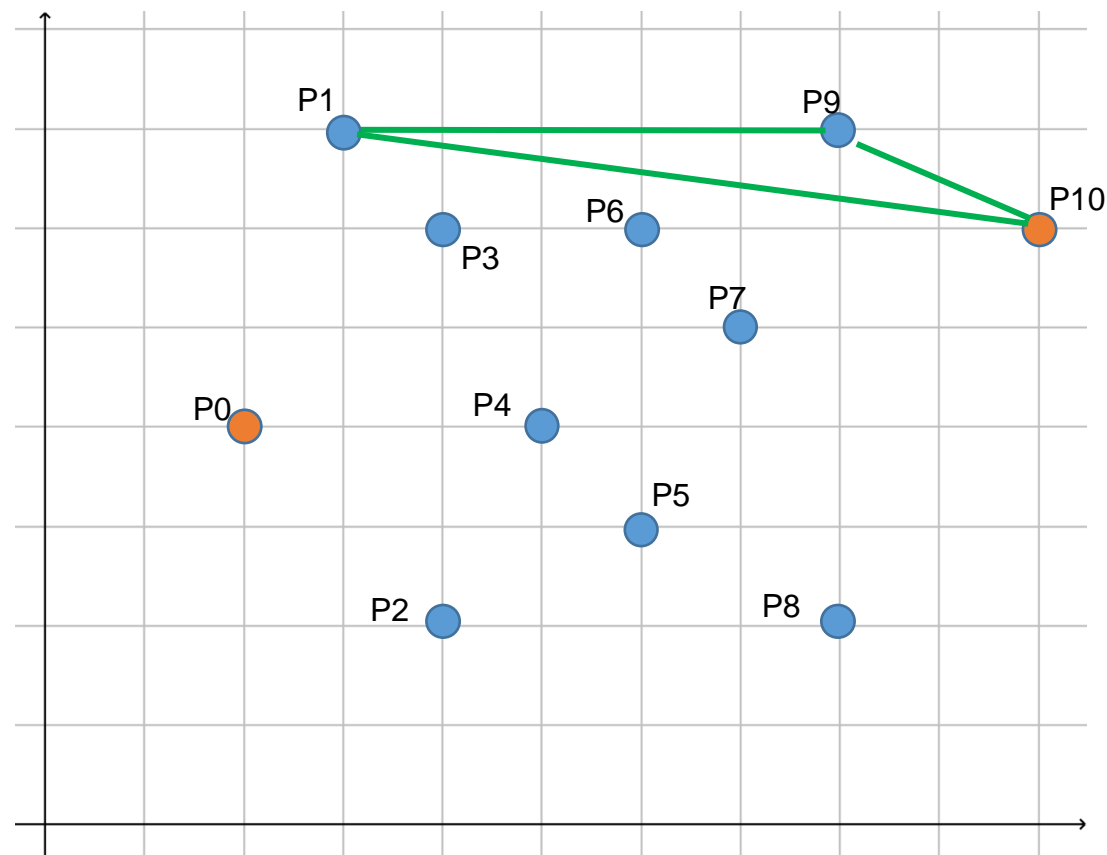
Đường bao lồi trên:

S1

P0 P1 P9

P10

Xét diện tích đại số  $T$  của tam giác  $(P1, P9, P10)$ ,  
 $T > 0 \rightarrow$  các điểm liệt kê thuận chiều đồng hồ  
 $\rightarrow$  Thêm P10 vào S1



## BAO LỒI

Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

Đường bao lồi trên:

S1

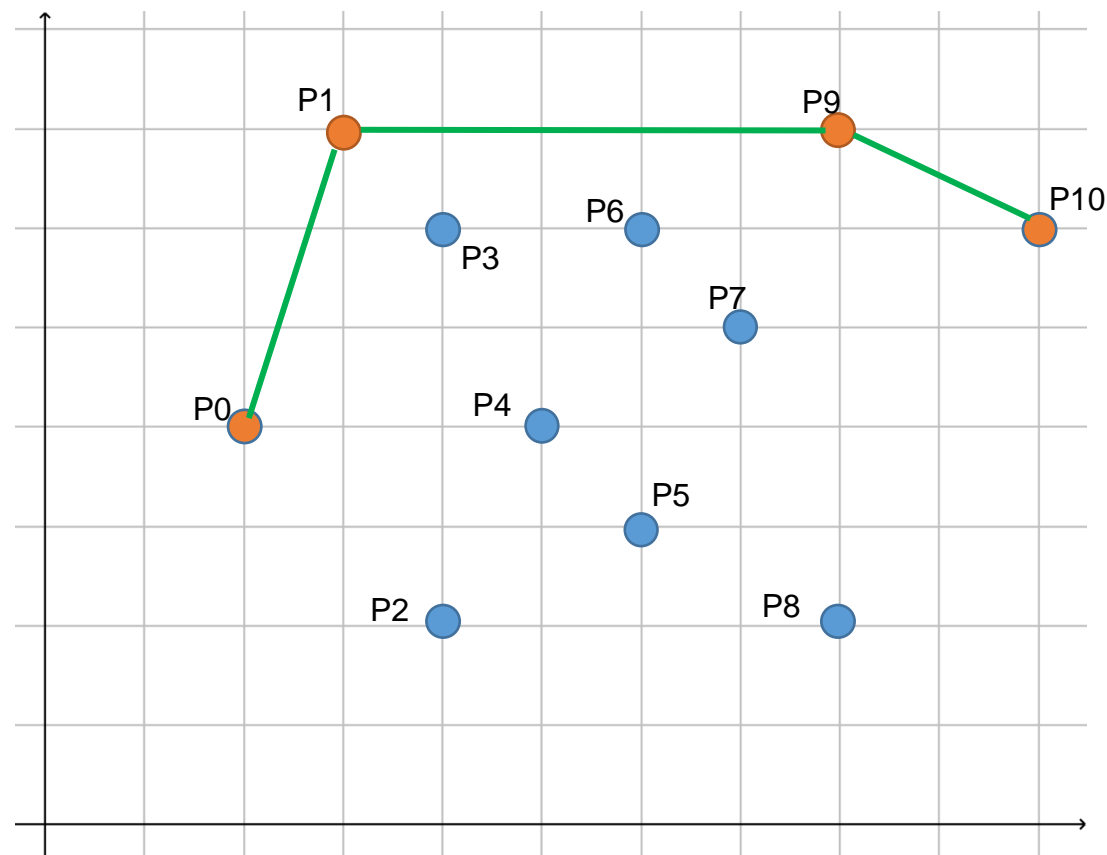
P0

P1

P9

P10

Quá trình tạo đường bao lồi trên kết thúc khi điểm  $P_{n-1}$  được thêm vào S1.



## BAO LỒI

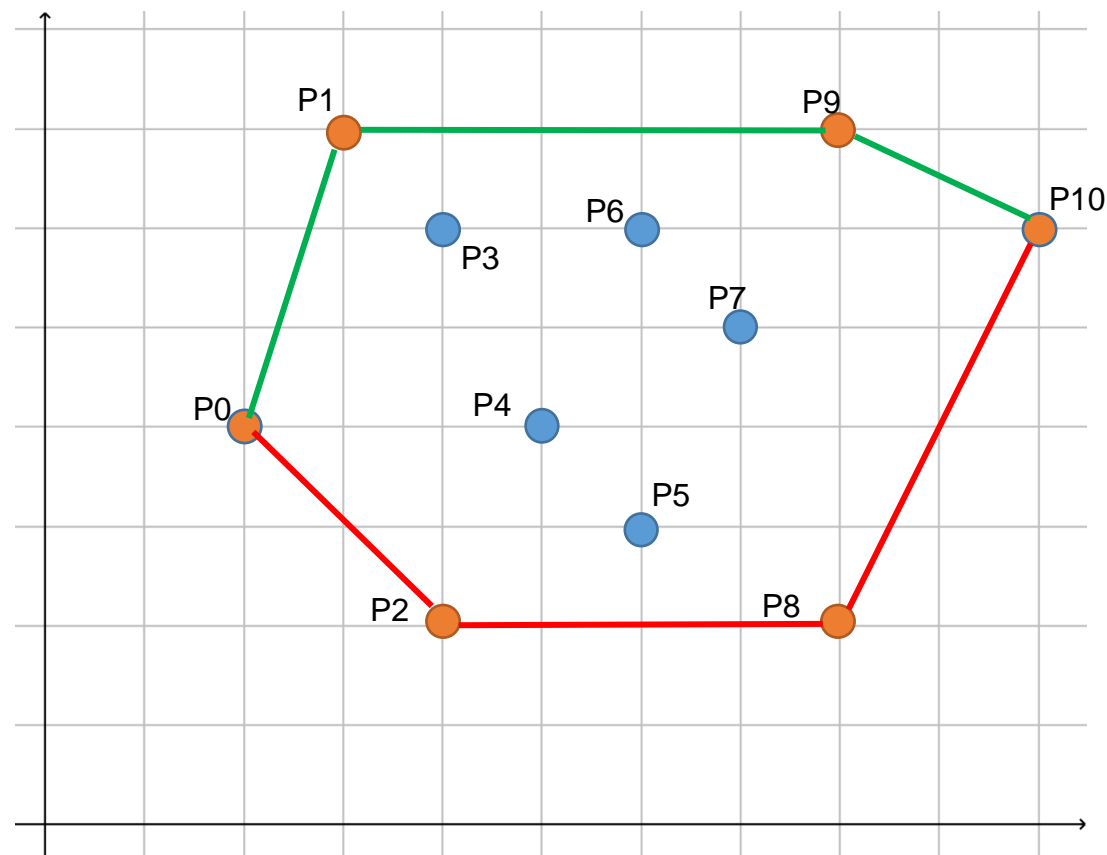
Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

Đường bao lồi dưới tương tự như các bước đã trình bày, ta được danh sách như sau:

S2

P0	P2	P8	P10
----	----	----	-----

Lưu ý: khi xây dựng đường bao lồi dưới, ta ưu tiên chọn dấu của diện tích đại số các tam giác con cho phù hợp.





## BAO LỒI

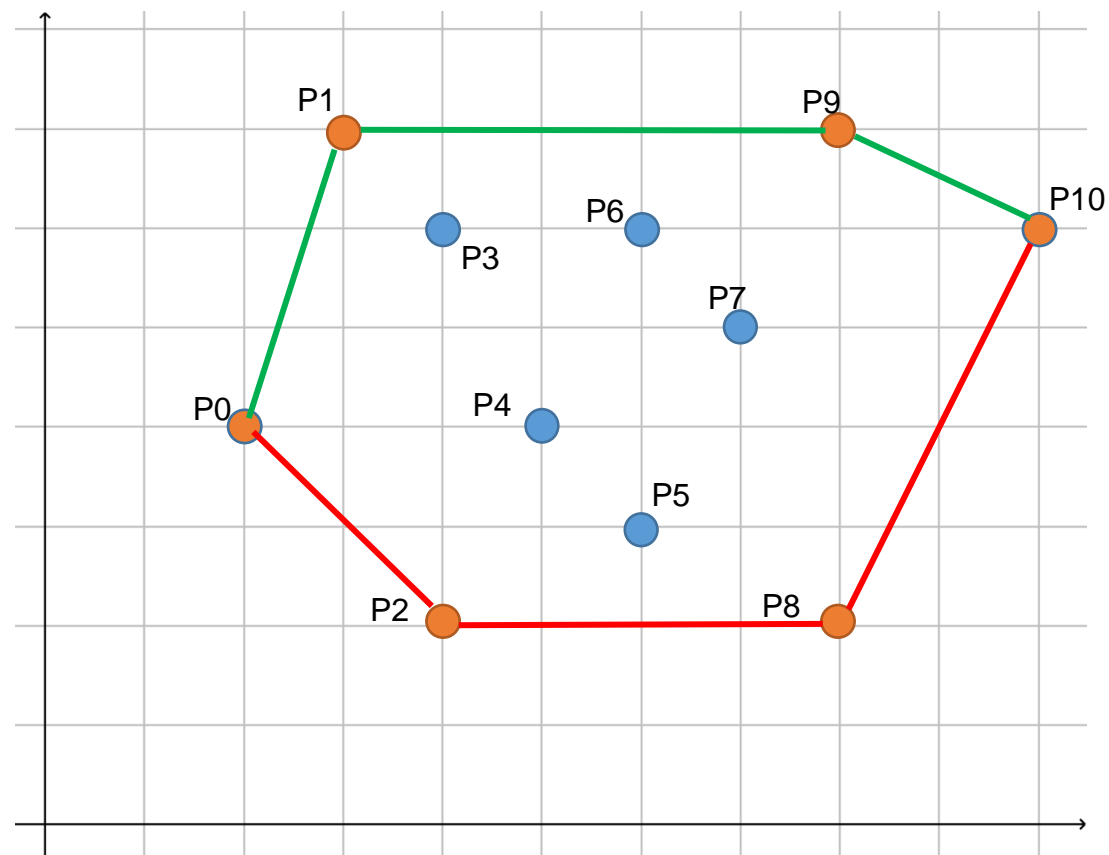
Xây dựng bao lồi bằng cách xây dựng 2 đường bao lồi trên và dưới.

S1

P0	P1	P9	P10
----	----	----	-----

S2

P0	P2	P8	P10
----	----	----	-----



## BAO LỒI

Một số lưu ý:

- Trong quá trình xây dựng đường bao lồi trên và dưới, chúng ta có thể cài đặt song song (người học suy nghĩ thêm)
- Lưu ý về dấu diện tích đại số tam giác khi xét đường bao lồi trên và dưới cho thích hợp.

