

# Chương 3. PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

## Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Để thực hiện việc tính toán các bài toán liên quan tới tổ hợp chúng ta sử dụng gói lệnh `combinat`. Để gọi gói lệnh này ta dùng

> `with(combinat);`

Chi, bell, binomial, cartprod, character, choose, composition, conjpart, decodepart, encodepart, fibonacci, firstpart, graycode, inttovec, lastpart, multinomial, nextpart, numbcomb, numbcomp, numbpert, numbperm, partition, permute, powerset, prevpart, randcomb, randpart, randperm, setpartition, stirling1, stirling2, subsets, vectoint

### 3.1 Tính toán các công thức tổ hợp.

- `n!` hay `factorial(n)`: Tính  $n!$
- `numbperm(n, k)`: Số chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$ .
- `binomial(n, k)`: Số tổ hợp chập  $k$  của  $n$ .
- `multinomial(n, k1, k2, ..., km)`: Số hoán vị lặp của  $n$  vật từ  $k_1$  vật loại 1, ...,  $k_m$  vật loại  $m$ .  
(hay  $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$ )

> `6!`;

720

> `numbperm(6, 4);`

360

> `binomial(20, 6);`

38760

> `multinomial(10, 2, 3, 5);`

2520

> `expand(binomial(n, 3));`

#`expand(exp)` : Khai triển biểu thức `exp`

$$\frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

### 3.2 Liệt kê hoán vị, chỉnh hợp

- `permute(n)`: Danh sách các hoán vị của  $[1, 2, \dots, n]$ .
- `permute(S)`: Danh sách các hoán vị của  $S$ , trong đó  $S$  là danh sách hay tập hợp.
- `permute(n, k)`: Danh sách các chỉnh hợp chập  $k$  của  $[1, 2, \dots, n]$ .
- `permute(S, k)`: Danh sách các chỉnh hợp chập  $k$  của  $S$ , trong đó  $S$  là danh sách hay tập hợp.

- `randperm(n)`: Một hoán vị ngẫu nhiên của  $[1, 2, \dots, n]$ .
- `randperm(S)`: Một hoán vị ngẫu nhiên của  $S$ .

> `permute(3);`

$[[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]]$

> `permute([1, 1, 2]);`

$[[1, 1, 2], [1, 2, 1], [2, 1, 1]]$

> `permute({a, b, c});`

$[[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]]$

> `permute(3, 2);`

$[[1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 3], [3, 1], [3, 2]]$

> `permute([1, 1, 2], 2);`

$[[1, 1], [1, 2], [2, 1]]$

> `permute({a, b, c}, 2);`

$[[a, b], [a, c], [b, a], [b, c], [c, a], [c, b]]$

Ta có thể dùng hàm `permute` để giải quyết các bài toán liên quan tới liệt kê hoán vị lặp, chỉnh hợp lặp.

**Ví dụ 1.** Có hai chữ số 1, một chữ số 5 và ba chữ số 8, hãy

- Liệt kê tất cả các số có 2 chữ số được tạo từ các chữ số trên;
- Liệt kê tất cả các hoán vị của các chữ số trên.

> `S:=[1, 1, 5, 8, 8, 8];`

> `permute(S, 2);`

$[[1, 1], [1, 5], [1, 8], [5, 1], [5, 8], [8, 1], [8, 5], [8, 8]]$

> `L:=permute(S);`

$[1, 1, 5, 8, 8, 8], [1, 1, 8, 5, 8, 8], [1, 1, 8, 8, 5, 8], [1, 1, 8, 8, 8, 5], [1, 5, 1, 8, 8, 8], \dots$

> `nops(L);`

60

**Ví dụ 2.** Liệt kê tất cả các số có ba chữ số được tạo từ các chữ số 1, 2, 3, 4 (có thể lặp lại).

> `S:=[1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4];`

> `L:=permute(S, 3);`

$[1, 1, 1], [1, 1, 2], [1, 1, 3], [1, 1, 4], [1, 2, 1], [1, 2, 2], [1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 3, 1], \dots$

> `nops(L);`

64

### 3.3 Liệt kê tổ hợp

- `choose(n)`: Danh sách các tổ hợp của  $[1, 2, \dots, n]$ .
- `choose(S)`: Danh sách (tập hợp) các tổ hợp của  $S$ , trong đó  $S$  là danh sách (tập hợp).
- `choose(n, k)`: Danh sách các tổ hợp chập  $k$  của  $[1, 2, \dots, n]$ .
- `choose(S, k)`: Danh sách (tập hợp) các tổ hợp chập  $k$  của  $S$ , trong đó  $S$  là danh sách (tập hợp).
- `randcomb(n, k)`: Một tổ hợp ngẫu nhiên chập  $k$  của  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- `randcomb(S, k)`: Một tổ hợp ngẫu nhiên chập  $k$  của  $S$ .

```
> choose(3);
      [], [1], [2], [3], [1, 2], [1, 3], [2, 3], [1, 2, 3]
> choose([a, a, b]);
      [], [a], [b], [a, b], [a, a], [a, a, b]
> choose({1, 2, 3});
      {}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}
> choose(4, 2);
      [1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]
> choose([a, a, b], 2);
      [a, a], [a, b]
> choose({1, 2, 3}, 2);
      {{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}}
```

Ta có thể dùng hàm `choose` để giải quyết các bài toán liên quan tới liệt kê tổ hợp lặp.

**Ví dụ 3.** An mua 2 cái nón từ cửa hàng có 3 loại nón A, B, C. Hãy liệt kê tất cả khả năng mua của An.

```
> S:=[A, A, B, B, C, C];
> choose(S, 2);
      [A, A], [A, B], [A, C], [B, B], [B, C], [C, C]
```

### 3.4 Tìm hệ số của một đơn thức trong khai triển lũy thừa của đa thức

- `coeff(f, x^k)`: Tính hệ số của  $x^k$  trong đa thức  $f$
- `coeff(coeff(f, x^k), y^t)`: Tính hệ số của  $x^k y^t$  trong đa thức  $f$
- `coeffs(f)`: Dãy các hệ số trong đa thức  $f$  (chỉ áp dụng khi  $f$  đã được khai triển)

```
> f := (2*x^3-2*y+3*z^2+4*t)^10;
```

$$f := (2x^3 - 2y + 3z^2 + 4t)^{10}$$

```
> coeff(f, y^9);    #Tính hệ số y^9
```

$$-10240x^3 - 15360z^2 - 20480t$$

```
> coeff(coeff(coeff(coeff(f, x^6), y^4), z^2), t^3);    #Tính hệ số x^6y^4z^2t^3
```

$$154828800$$

```
> h:=expand(f);    #h là dạng khai triển của f
```

```
> L := coeffs(h);    #L là dãy các hệ số của đa thức h.
```

$$L := -46448640, 65318400, -82575360, -25194240, 737280, -30965760, \dots$$

```
> nops([L]);
```

$$286$$

Như vậy đa thức  $f := (2x^3 - 2y + 3z^2 + 4t)^{10}$  có

- hệ số của đơn thức  $x^6y^4z^2t^3$  là 154828800;
- số đơn thức của  $f$  là 286.

## Phần II. Bài tập

**Bài 3.1** Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 6 chữ số khác nhau mà trong đó có chữ số 0?

**Bài 3.2** Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài 12 mà có

- a) chính xác 3 bit 1?
- b) tối đa 3 bit 1?
- c) tối thiểu 3 bit 0?
- d) ít nhất 3 bit 0 và 3 bit 1?

**Bài 3.3** Có bao nhiêu hoán vị của chuỗi ký tự ABCDEFGH chứa

- a) ED?
- b) CDE?
- c) BA và FGH?
- d) AB, DE, và GH?
- e) CAB và BED?
- f) BCA và ABF?

**Bài 3.4** Từ 15 nam và 10 nữ, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đội gồm 12 người nếu

- a) chọn tùy ý
- b) có 6 nam
- c) có ít nhất 8 nam
- d) có nam ít hơn nữ
- e) có cả nam và nữ
- f) có số nam là chẵn

**Bài 3.5** Cho  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Hỏi có bao nhiêu tập hợp  $A$  con của  $S$  có 5 phần tử mà

- a) chứa phần tử 3;
- b)  $\min A = 3$ ;
- c)  $\min A \leq 3$ ;
- d)  $\min A \geq 4$ ;
- e)  $\max A = 8$ ;
- f)  $\min A = 2$  và  $\max A = 8$ .

**Bài 3.6** Cho  $S = \{1, 2, 3, \dots, 14, 15\}$ . Hỏi có bao nhiêu tập hợp  $A \subset S$  mà

- a)  $A$  chỉ có toàn số lẻ
- b)  $A$  có 3 số lẻ
- c)  $|A| = 8$  và  $A$  có 3 số lẻ
- d)  $A$  có 3 số lẻ và ít nhất 5 số chẵn

**Bài 3.7** Cho  $n$  là số nguyên dương và  $S = \{1, 2, \dots, n\}$ . Hỏi có bao nhiêu tập  $A \subset S$  sao cho  $A$  có ít nhất một số chẵn? (xét  $n$  chẵn, lẻ)

**Bài 3.8** Tìm số tự nhiên  $n \geq 7$  biết rằng chỉ có một phần tử số tập con gồm 5 phần tử của  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  có chứa số 7.

**Bài 3.9** Cho số nguyên  $n \geq 2$ . Có bao nhiêu cách chia  $n$  sinh viên thành 2 đội mà trong đó

- a) một đội học tiếng Anh và một đội học tiếng Pháp?
- b) cả hai đội cùng đi làm công tác xã hội như nhau? (xét trường hợp  $n$  chẵn và lẻ)

**Bài 3.10** Có bao nhiêu cách chia 12 cây bút khác nhau cho 4 đứa trẻ nếu

- a) mỗi đứa được 3 cây;
- b) hai đứa lớn mỗi đứa 4 cây và hai đứa nhỏ mỗi đứa 2 cây.

**Bài 3.11** Cho số nguyên  $n \geq 4$ . Xét tất cả các tam giác tạo từ 3 đỉnh khác nhau của một đa giác đều có  $n$  cạnh. Hỏi

- a) có tất cả bao nhiêu tam giác như vậy?
- b) có bao nhiêu tam giác có chung 2 cạnh với đa giác trên?
- c) có bao nhiêu tam giác có chung đúng 1 cạnh với đa giác trên?
- d) có bao nhiêu tam giác không có chung cạnh nào với đa giác trên?

**Bài 3.12** Có bao nhiêu cách sắp xếp

- a) 5 nam và 5 nữ xen kẽ nhau thành một hàng dọc? Câu hỏi tương tự cho trường hợp 6 nam và 5 nữ.
- b) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau?
- c) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 4 nữ đứng gần nhau?
- d) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau và 4 nữ đứng gần nhau?
- e) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau hay 4 nữ đứng gần nhau?
- f) 6 bác sĩ 7 kỹ sư và 8 luật sư thành một hàng ngang sao cho các đồng nghiệp đứng gần nhau?

**Bài 3.13** Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 cặp vợ chồng ngồi vào bàn tròn có 10 ghế (các ghế được đánh số thứ tự) nếu

- a) xếp tùy ý?
- b) những người chồng ngồi gần nhau?
- c) vợ chồng ngồi gần nhau?

**Bài 3.14** Với các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số mà trong mỗi số chữ số 2 có mặt đúng 3 lần, chữ số 4 có mặt đúng 2 lần và các chữ số khác mỗi chữ số có mặt đúng 1 lần.

**Bài 3.15** Tìm hệ số của đơn thức

- a)  $xy^2z^3t$  khi khai triển  $(x + 2y - z + 4t - 5u)^7$
- b)  $x^3y^9z^4t^3$  khi khai triển  $(2x - y^3 - 3z^2 + 4t^3)^9$

**Bài 3.16** Có bao nhiêu cách treo 3 áo đỏ, 4 áo trắng và 5 áo xanh thành một hàng dọc (các áo đều khác nhau) nếu

- a) treo tùy ý
- b) các áo cùng màu treo gần nhau
- c) các áo màu trắng treo gần nhau
- d) các áo màu đỏ treo gần nhau và các áo màu xanh treo gần nhau
- e) áo đầu hàng có màu xanh
- f) áo đầu hàng có màu đỏ và áo cuối hàng có màu trắng.

**Bài 3.17** Làm lại Bài 3.16 nhưng với giả thiết là các áo cùng màu được xem là giống nhau.

**Bài 3.18** Tìm số nghiệm nguyên của phương trình  $x + y + z + t = 32$  (hay bất phương trình  $x + y + z + t \leq 32$ ) nếu

a)  $x, y, z, t \geq 0$

c)  $x > -1, y \geq -4, z > 4, t \geq 3$

b)  $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 1, t > 5$

d)  $x, y, z > 0$  và  $1 \leq t < 25$

**Bài 3.19** Có bao nhiêu cách chọn 20 tờ giấy bạc từ các loại tiền 1 đồng, 2 đồng, 5 đồng, 10 đồng và 20 đồng? Nếu yêu cầu thêm có ít nhất 7 tờ 5 đồng và không quá 8 tờ 20 đồng thì có bao nhiêu cách chọn?

**Bài 3.20** Có bao nhiêu cách chia 18 viên kẹo giống nhau cho 5 đứa trẻ nếu

- a) chia tùy ý
- b) đứa nào cũng có kẹo
- c) đứa lớn nhất có 6 viên
- d) đứa nhỏ nhất được ít nhất 4 viên
- e) đứa lớn nhất nhận không quá 7 viên

**Bài 3.21** Khi khai triển  $(x + y + z + t)^{10}$  ta được bao nhiêu đơn thức khác nhau? Trong số đó có bao nhiêu đơn thức  $x^m y^n z^u t^v$  (không kể hệ số phía trước) thỏa  $m \geq 2, n \leq 3$  và  $v \geq 1$ ?

**Bài 3.22** Có bao nhiêu cách chia 15 viên kẹo chanh (giống nhau) và 10 viên kẹo dứa (giống nhau) cho 6 đứa trẻ sao cho đứa nào cũng có cả hai thứ kẹo?

**Bài 3.23** Có bao nhiêu cách mua 20 hộp sơn với đúng 7 màu trong số 10 màu mà cửa hàng có?

**Bài 3.24** Xét chuỗi ký tự bao gồm phần chữ cái đứng trước và phần chữ số đứng sau. Phần chữ cái có 9 chữ cái  $\alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma$  xếp tùy ý ( $\alpha, \beta, \gamma$  là 3 chữ cái khác nhau lấy tùy ý từ  $A, E, H, P, Y$ ). Phần chữ số là 6 chữ số  $xyzuvw$  ( $x, y, z, u, v, w$  được lấy tùy ý từ  $0, 1, 2, \dots, 8, 9$ ) thỏa  $7 \leq x + y + z + u + v + w \leq 9$ . Hỏi có tất cả bao nhiêu chuỗi ký tự như vậy?

**Bài 3.25** Cần chọn bao nhiêu số từ tập  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$  để đảm bảo rằng trong đó có ít nhất hai số có tổng bằng 16?

**Bài 3.26** Cho  $A$  là tập hợp con của  $S = \{1, 2, \dots, 25\}$  thỏa  $|A| \geq 14$ . Chứng minh rằng tồn tại hai phần tử  $a, b \in A$  thỏa  $a \neq b$  và  $a + b = 26$ .

**Bài 3.27** Cho  $S = \{1, 2, \dots, 100\}$  và  $A \subset S$  thỏa  $|A| \geq 11$ . Chứng minh rằng tồn tại hai phần tử  $x, y \in A$  sao cho  $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$ . Tổng quát hóa kết quả trên theo 2 hướng khác nhau: theo  $|S|$  hoặc theo  $(\sqrt{x}$  và  $\sqrt{y})$ .

**Bài 3.28** Lấy 10 điểm khác nhau tùy ý trên một tam giác đều có cạnh bằng 3cm. Chứng minh rằng trong số đó có ít nhất 2 điểm có khoảng cách không quá 1cm.

**Bài 3.29** Từ thứ hai đến thứ bảy của mỗi tuần có 12 buổi (sáng và chiều). Có 782 sinh viên đăng ký học đàn theo các buổi nói trên trong tuần: mỗi sinh viên có thể chọn từ 2 đến 4 buổi. Chứng minh rằng có ít nhất 2 sinh viên có lịch học trong tuần hoàn toàn giống nhau.

**Bài 3.30** Xếp các con số  $1, 2, \dots, 25$  một cách tùy ý trên một đường tròn. Chứng minh rằng có 3 số gần nhau trên đường tròn có tổng  $\geq 41$  và có 3 số gần nhau trên đường tròn có tổng  $\leq 37$ .

**Bài 3.31** Cho  $S = \{1, 2, \dots, 14\}$  và  $A \subset S$  thỏa  $|A| \geq 6$ . Chứng minh có  $H, K \subset A$  (mà  $\emptyset \neq H \neq K \neq \emptyset$ ) thỏa  $|H| \leq 5, |K| \leq 5$  và  $\sum_{h \in H} h = \sum_{k \in K} k$ .