Hình học tính toán

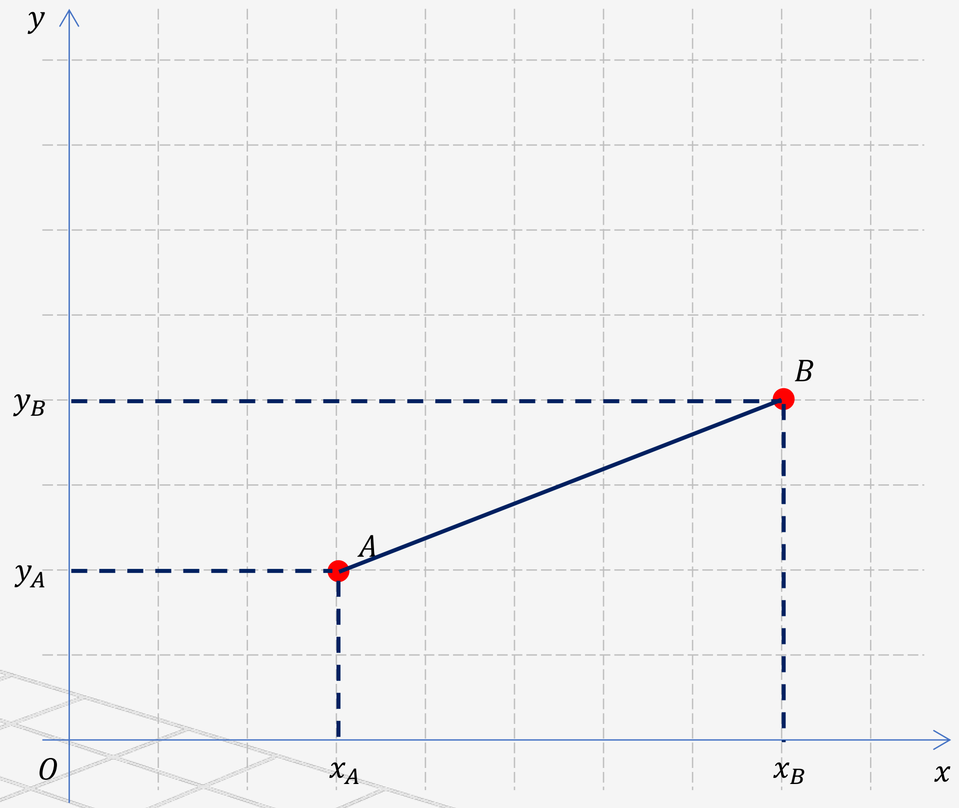
Trương Phước Hải

Nội dung

- Các đối tượng cơ bản của hình học mặt phẳng
- Cấu trúc dữ liệu biểu diễn
- Diện tích đại số của tam giác
- Ứng dụng diện tích đại số của tam giác
- Một số bài toán cơ bản

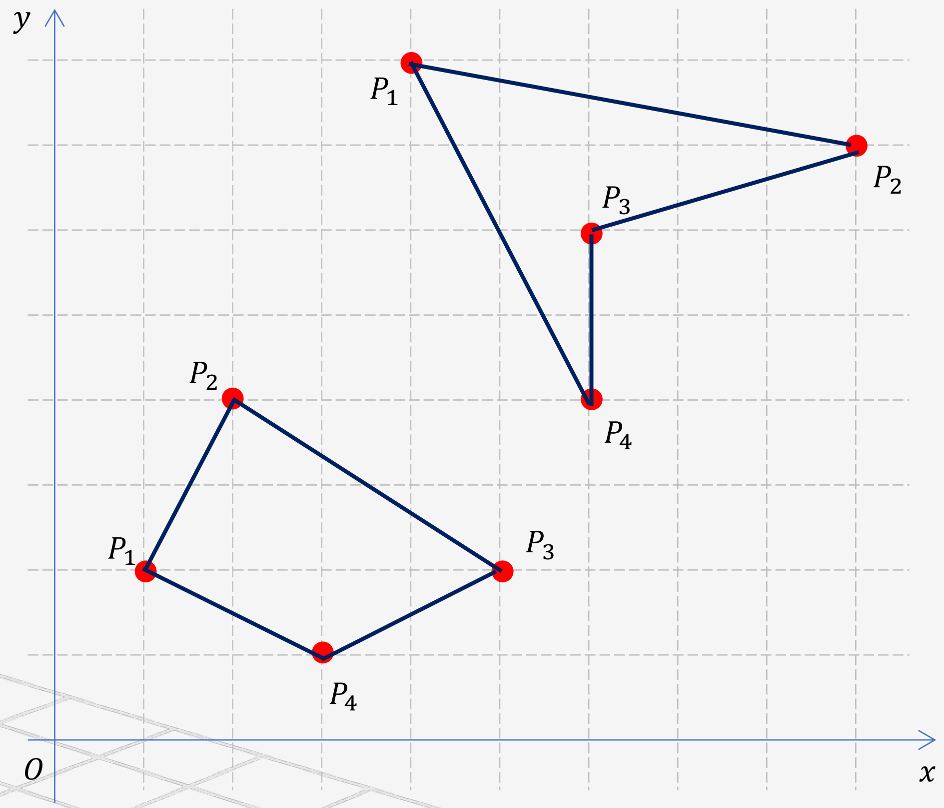
Các đối tượng cơ bản của hình học mặt phẳng

- Điểm: $A(x_A, y_A)$
- Đoạn thẳng: AB
- Đường thẳng
  - Tọa độ 2 điểm đi qua
  - Các hệ số của phương trình đường thẳng tổng quát



Các đối tượng cơ bản của hình học mặt phẳng

- Đa giác
  - Tập các đỉnh $P_1, P_2, \dots, P_n$



Nội dung

- Các đối tượng cơ bản của hình học mặt phẳng
- Cấu trúc dữ liệu biểu diễn
- Diện tích đại số của tam giác
- Ứng dụng diện tích đại số của tam giác
- Một số bài toán cơ bản
- Bài toán bao lồi

Cấu trúc dữ liệu biểu diễn các đối tượng cơ bản

- Điểm

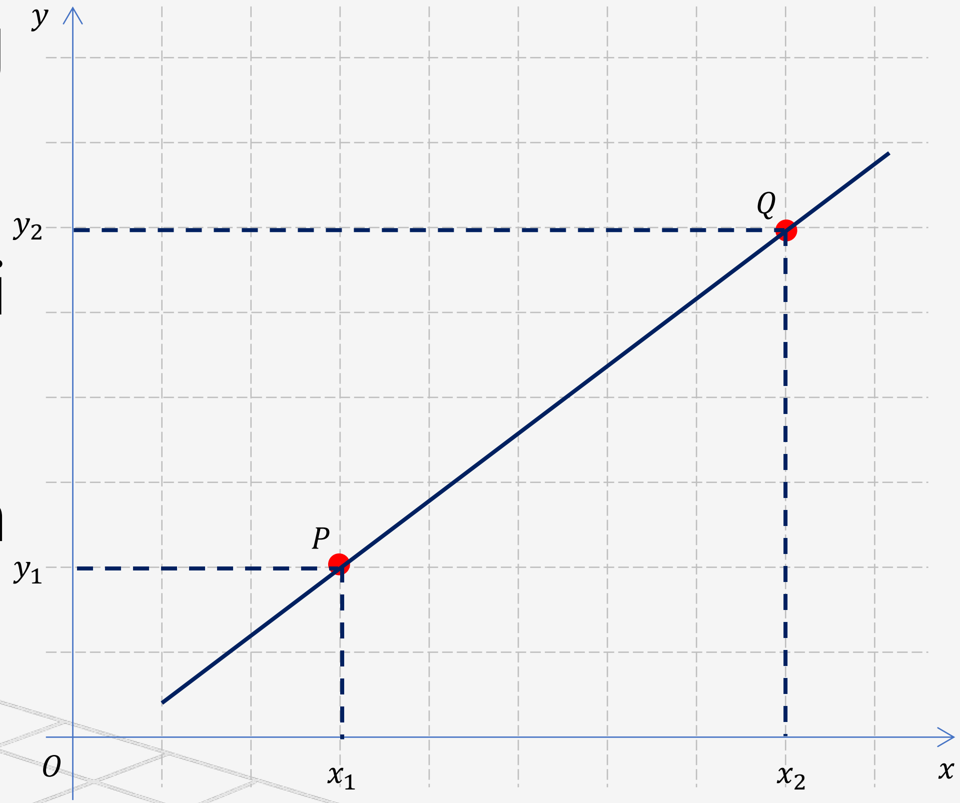
```
struct Point
{
    int x, y;
};
```

- Đoạn thẳng

```
struct Segment
{
    Point A, B;
};
```

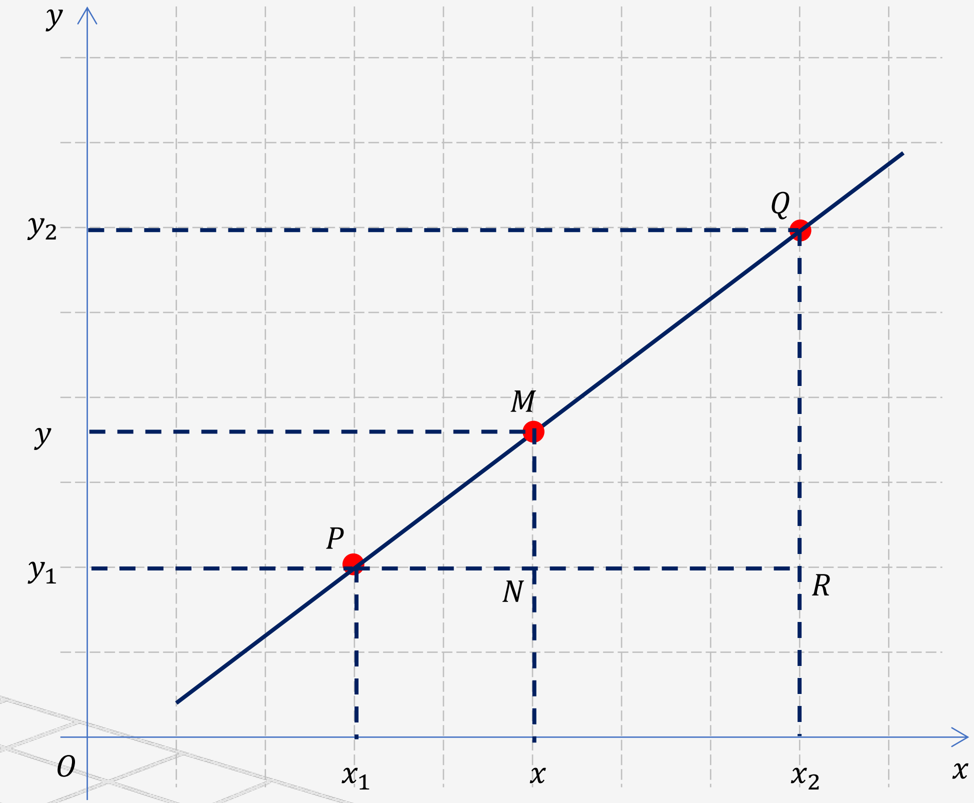
Cấu trúc dữ liệu biểu diễn các đối tượng cơ bản

- Phương trình đường thẳng tổng quát $Ax + By + C = 0$
  - Xác định bởi tọa độ 2 điểm đi qua $P(x_1, y_1)$ và $Q(x_2, y_2)$
  - Xác định bởi 3 hệ số (A, B, C) của phương trình tổng quát



Cấu trúc dữ liệu biểu diễn các đối tượng cơ bản

- Gọi $M(x,y)$ là điểm bất kỳ thuộc đường thẳng
- $\Delta PQR \sim \Delta PMN$
- $\Longrightarrow \dfrac{PN}{PR} = \dfrac{MN}{QR}$
- $\Longrightarrow \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$



Cấu trúc dữ liệu biểu diễn các đối tượng cơ bản

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\Longrightarrow (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_1(y_1 - y_2) + y_1(x_2 - x_1) = 0$$

- Ứng với phương trình đường thẳng tổng quát $Ax + By + C = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A = y_2 - y_1 \\ B = x_1 - x_2 \\ C = x_1(y_1 - y_2) + y_1(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Cấu trúc dữ liệu biểu diễn các đối tượng cơ bản

- Tính chất của phương trình đường thẳng tổng quát

Đặt $f(x, y) = (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_1(y_1 - y_2) + y_1(x_2 - x_1)$

Gọi $M(x_0, y_0)$ là điểm bất kỳ trong mặt phẳng

- Nếu $f(x_0, y_0) = 0$: điểm M thuộc đường thẳng
- Nếu $f(x_0, y_0) > 0$: điểm M thuộc nửa mặt phẳng phía trên
- Nếu $f(x_0, y_0) < 0$: điểm M thuộc nửa mặt phẳng phía dưới

Nội dung

- Các đối tượng cơ bản của hình học mặt phẳng
- Cấu trúc dữ liệu biểu diễn
- Diện tích đại số của tam giác
- Ứng dụng diện tích đại số của tam giác
- Một số bài toán cơ bản
- Bài toán bao lồi

Diện tích đại số của tam giác

- Công thức Heron

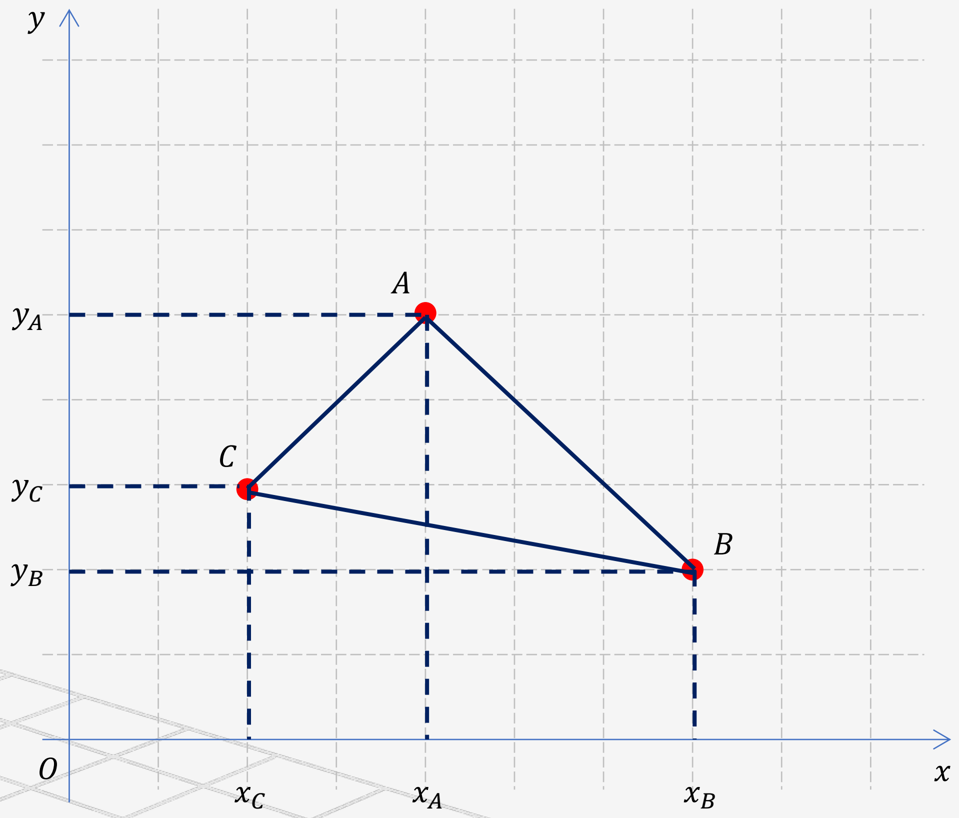
$$S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)}$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$p = (AB + AC + BC)/2$$



Diện tích đại số của tam giác

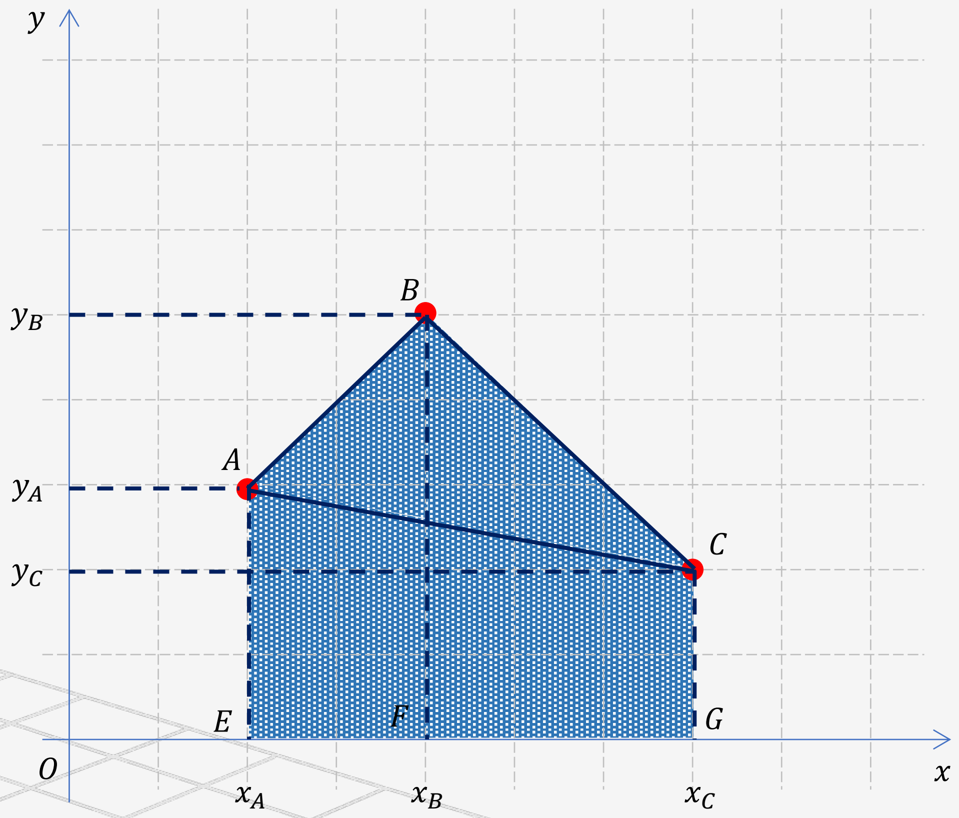
- Nhược điểm: sai số lớn
- Diện tích đại số

$$S_{ABC} = S_{ABFE} + S_{BCGF} - S_{ACGE}$$

$$S_{ABFE} = (y_B + y_A)(x_B - x_A)/2$$

$$S_{BCGF} = (y_C + y_B)(x_C - x_B)/2$$

$$S_{ACGE} = (y_A + y_C)(x_C - x_A)/2$$



Diện tích đại số của tam giác

$$S_{ABFE} = \frac{(y_B + y_A)(x_B - x_A)}{2}$$

$$S_{BCGF} = \frac{(y_C + y_B)(x_C - x_B)}{2}$$

$$S_{ACGE} = \frac{(y_A + y_C)(x_C - x_A)}{2}$$

Công thức tính diện tích đại số của tam giác ABC

A B C A

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}[(x_B - x_A)(y_B + y_A) + (x_C - x_B)(y_C + y_B) + (x_A - x_C)(y_A + y_C)]$$

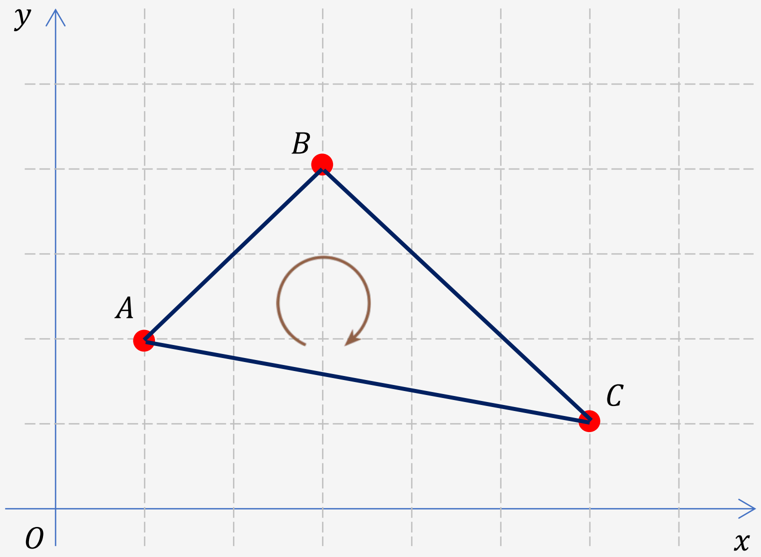
Diện tích đại số của tam giác

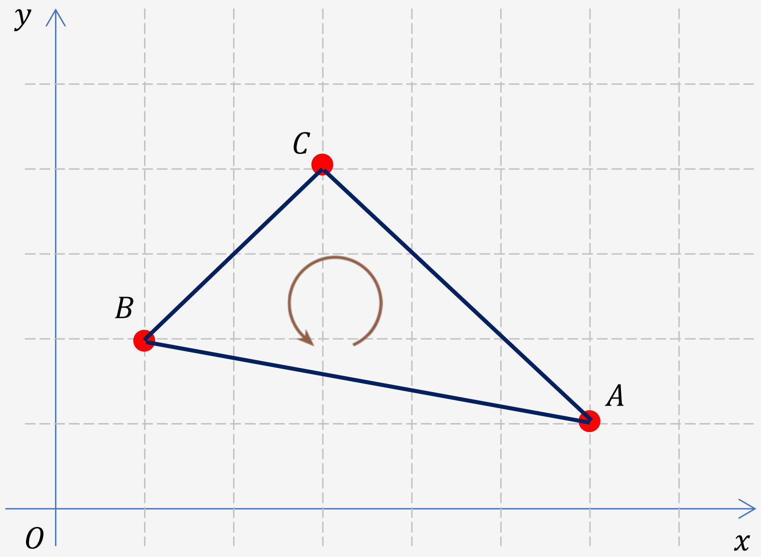
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}[(x_B - x_A)(y_B + y_A) + (x_C - x_B)(y_C + y_B) + (x_A - x_C)(y_A + y_C)]$$

$$S_{ACB} = \frac{1}{2}[(x_C - x_A)(y_C + y_A) + (x_B - x_C)(y_B + y_C) + (x_A - x_B)(y_A + y_B)]$$

- Nhận xét
  - Diện tích đại số của tam giác ABC và ACB đối nhau
  - Dựa vào dấu của diện tích đại số để xác định chiều các đỉnh

Diện tích đại số của tam giác





$$S_{ABC} = \frac{1}{2}[(x_B - x_A)(y_B + y_A) + (x_C - x_B)(y_C + y_B) + (x_A - x_C)(y_A + y_C)] = (2\times 6 + 3\times 5 - 5\times 3)/2 = 6$$

$$S_{ACB} = \frac{1}{2}[(x_C - x_A)(y_C + y_A) + (x_B - x_C)(y_B + y_C) + (x_A - x_B)(y_A + y_B)] = (-3\times 5 - 2\times 6 + 3\times 5)/2 = -6$$

Diện tích đại số của tam giác

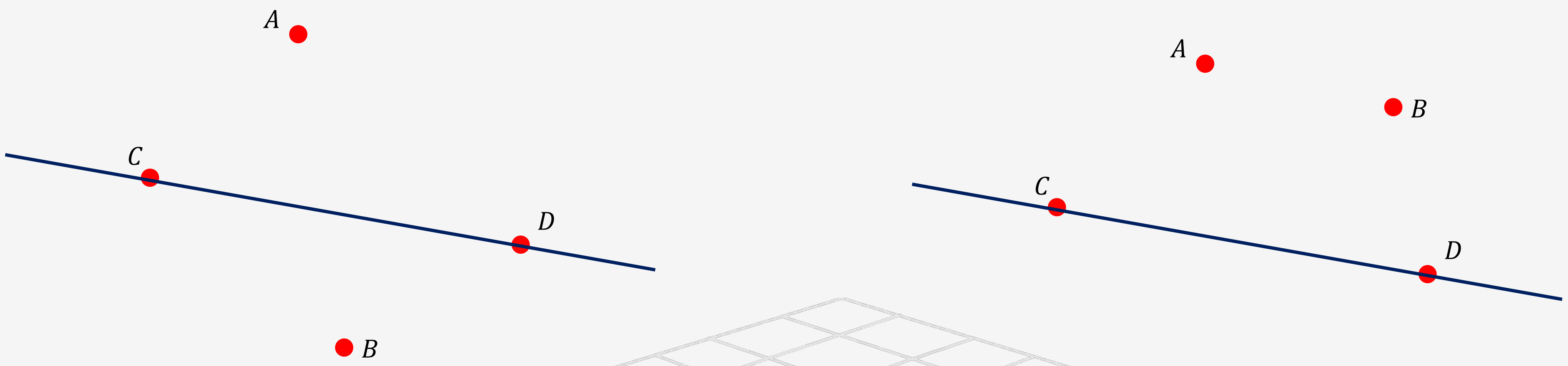
- Tính chất
  - $S > 0$: các đỉnh của tam giác được liệt kê thuận chiều kim đồng hồ (clockwise - cw)
  - $S < 0$: các đỉnh của tam giác được liệt kê ngược chiều kim đồng hồ (counter clockwise - ccw)

Nội dung

- Các đối tượng cơ bản của hình học mặt phẳng
- Cấu trúc dữ liệu biểu diễn
- Diện tích đại số của tam giác
- Ứng dụng diện tích đại số của tam giác
- Một số bài toán cơ bản
- Bài toán bao lồi

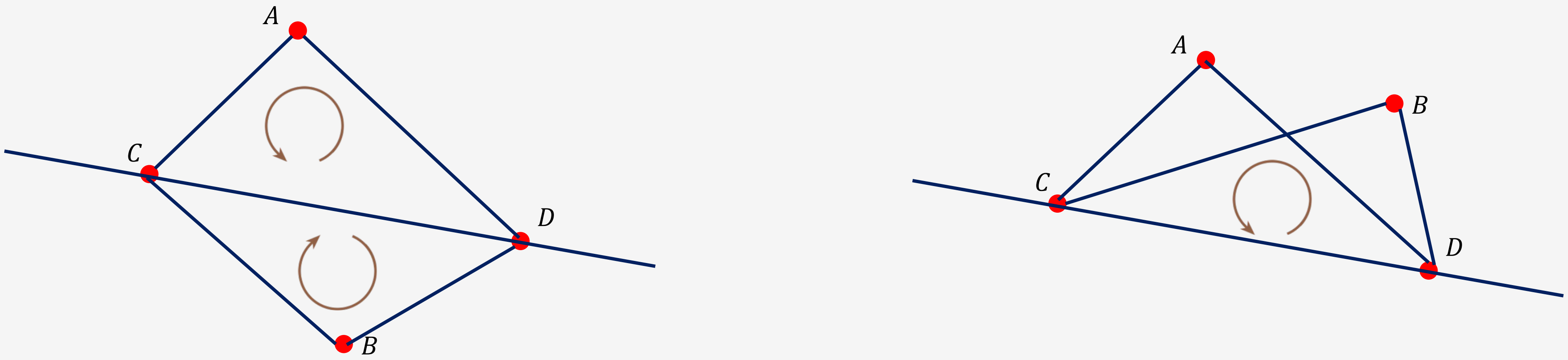
Ứng dụng diện tích đại số của tam giác

- Ứng dụng 1: kiểm tra 2 điểm A, B cùng hoặc khác phía so với đường thẳng đi qua 2 điểm C, D.



Ứng dụng diện tích đại số của tam giác

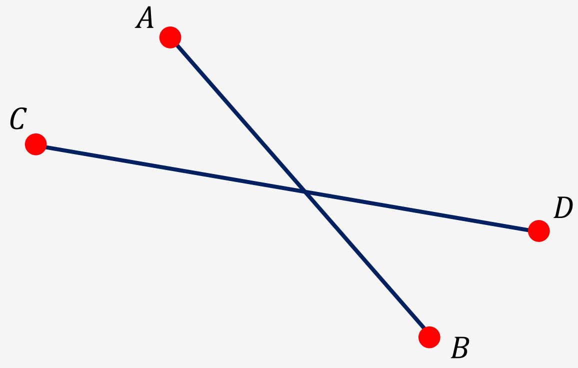
- Nhận xét

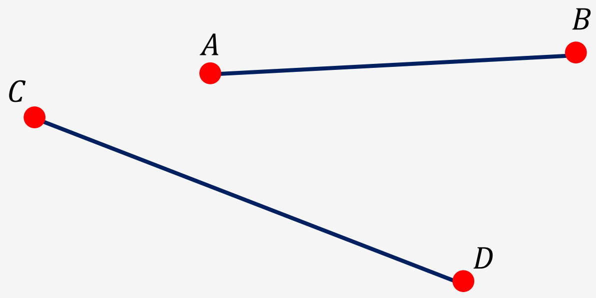


  - A, B khác phía nếu S_{ACD} và S_{BCD} trái dấu
  - A, B cùng phía nếu S_{ACD} và S_{BCD} cùng dấu

Ứng dụng diện tích đại số của tam giác

- Ứng dụng 2: kiểm tra 2 đoạn thẳng AB và CD có cắt nhau.

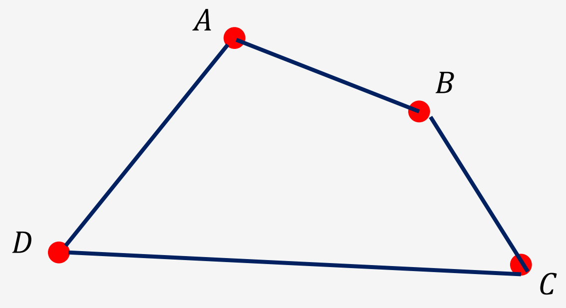




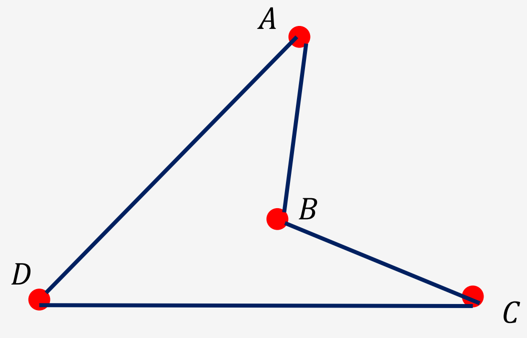
  - A, B khác phía so với đường thẳng qua C, D
  - C, D khác phía so với đường thẳng qua A, B

Ứng dụng diện tích đại số của tam giác

- Ứng dụng 3: kiểm tra tứ giác không tự cắt $ABCD$ lồi hay lõm



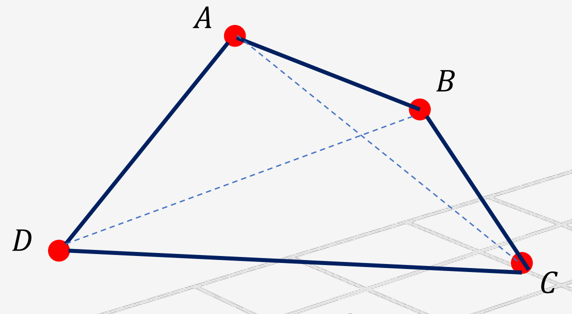
Tứ giác lồi



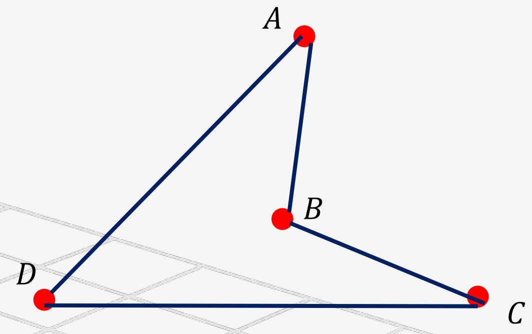
Tứ giác lõm

Ứng dụng diện tích đại số của tam giác

- Nhận xét:
  - Tứ giác $ABCD$ lồi nếu thỏa cả 2 điều kiện sau
    - \+ A, C khác phía so với đường thẳng qua B, D
    - \+ B, D khác phía so với đường thẳng qua A, C
  - Ngược lại là tứ giác lõm



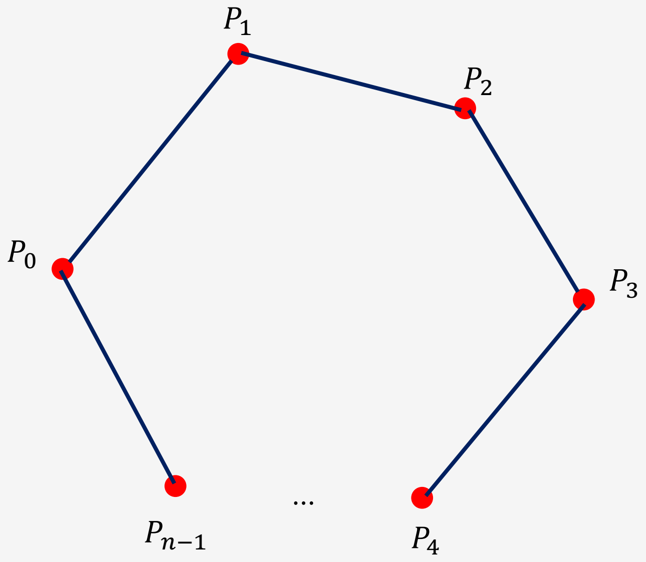
Tứ giác lồi



Tứ giác lõm

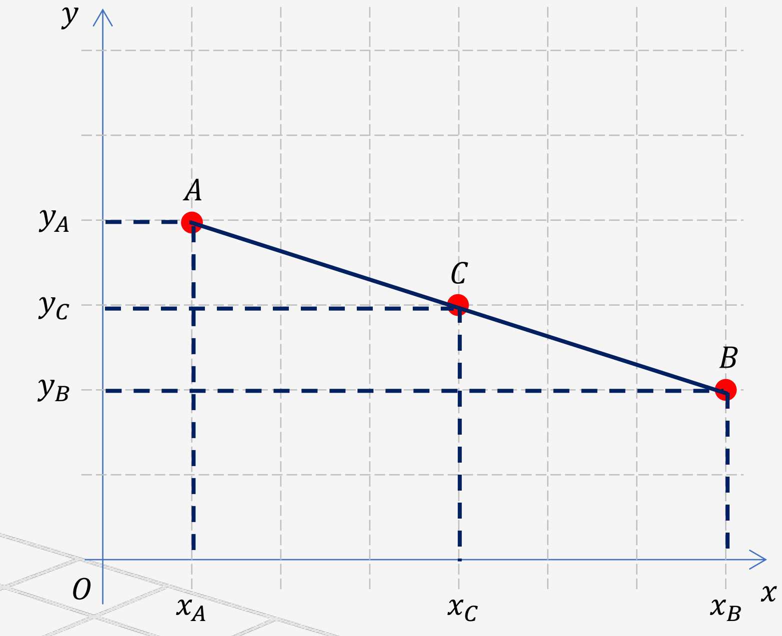
Ứng dụng diện tích đại số của tam giác

- Ứng dụng 4: kiểm tra đa giác n đỉnh $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ có là đa giác lồi
  - Nhận xét: đa giác là lồi nếu diện tích tất cả tam giác $S_{P_0P_1P_2}, S_{P_1P_2P_3}, \dots, S_{P_{n-1}P_0P_1}$ có cùng dấu
    - + Cùng dấu dương: thuận chiều kim đồng hồ
    - + Cùng dấu âm: ngược chiều kim đồng hồ



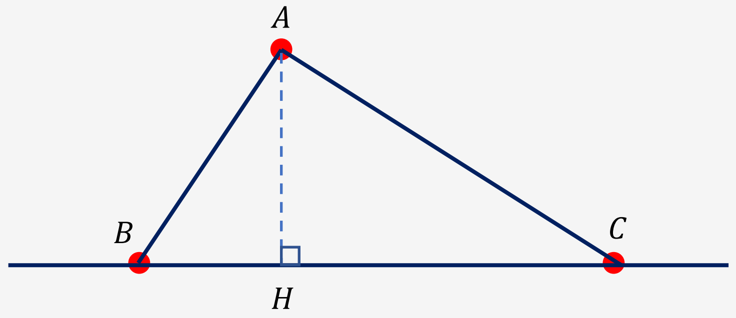
Ứng dụng diện tích đại số của tam giác

- Ứng dụng 5: Kiểm tra điểm C có thuộc đoạn thẳng AB
  - A, B, C thẳng hàng: $S_{ABC} = 0$
  - $(x_C - x_A) \times (x_C - x_B) \leq 0$
  - $(y_C - y_A) \times (y_C - y_B) \leq 0$



Ứng dụng diện tích đại số của tam giác

- Ứng dụng 6: Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng qua 2 điểm B, C
  - Tính diện tích tam giác ABC: S_{ABC}
  - Áp dụng công thức: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$



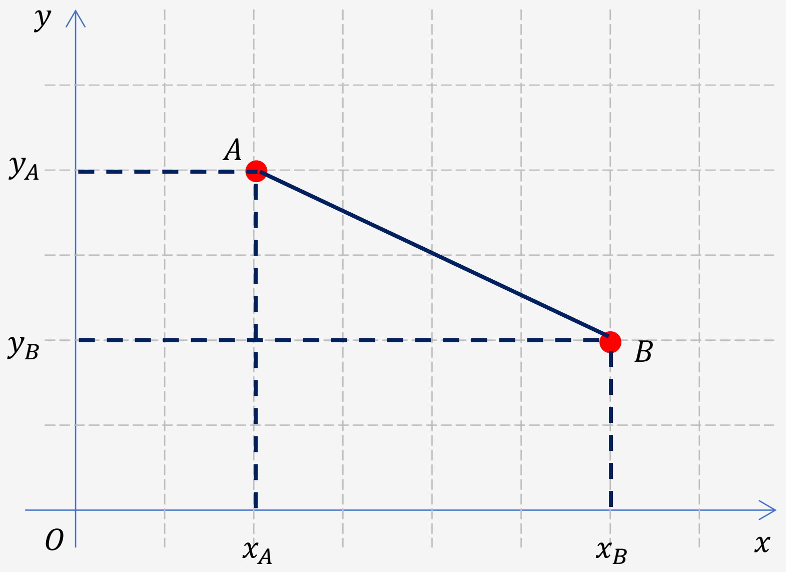
Nội dung

- Các đối tượng cơ bản của hình học mặt phẳng
- Cấu trúc dữ liệu biểu diễn
- Diện tích đại số của tam giác
- Ứng dụng diện tích đại số của tam giác
- Một số bài toán cơ bản
- Bài toán bao lồi

Một số bài toán cơ bản

- Bài toán 1: độ dài đoạn thẳng $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



Một số bài toán cơ bản

- Bài toán 1: độ dài đoạn thẳng $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

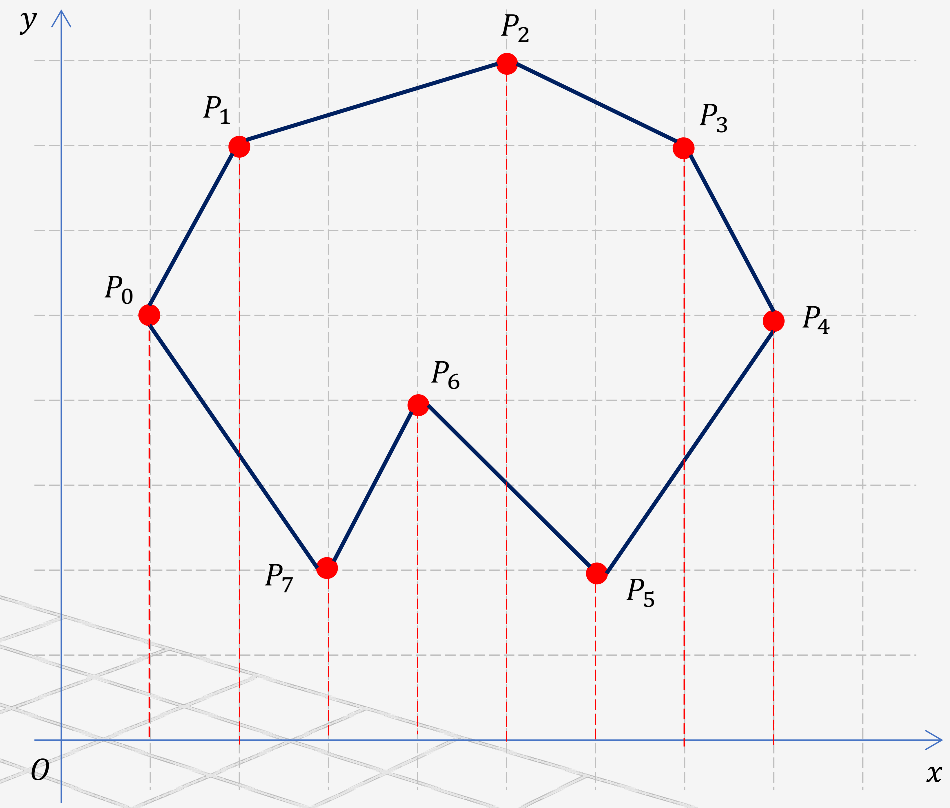
```
double Len(Point A, Point B)
{
    return sqrt((A.x-B.x)*(A.x-B.x)+(A.y-B.y)*(A.y-B.y));
}
```

Một số bài toán cơ bản

- Bài toán 2: diện tích đa giác không tự cắt n đỉnh với $P_i(x_i, y_i)$

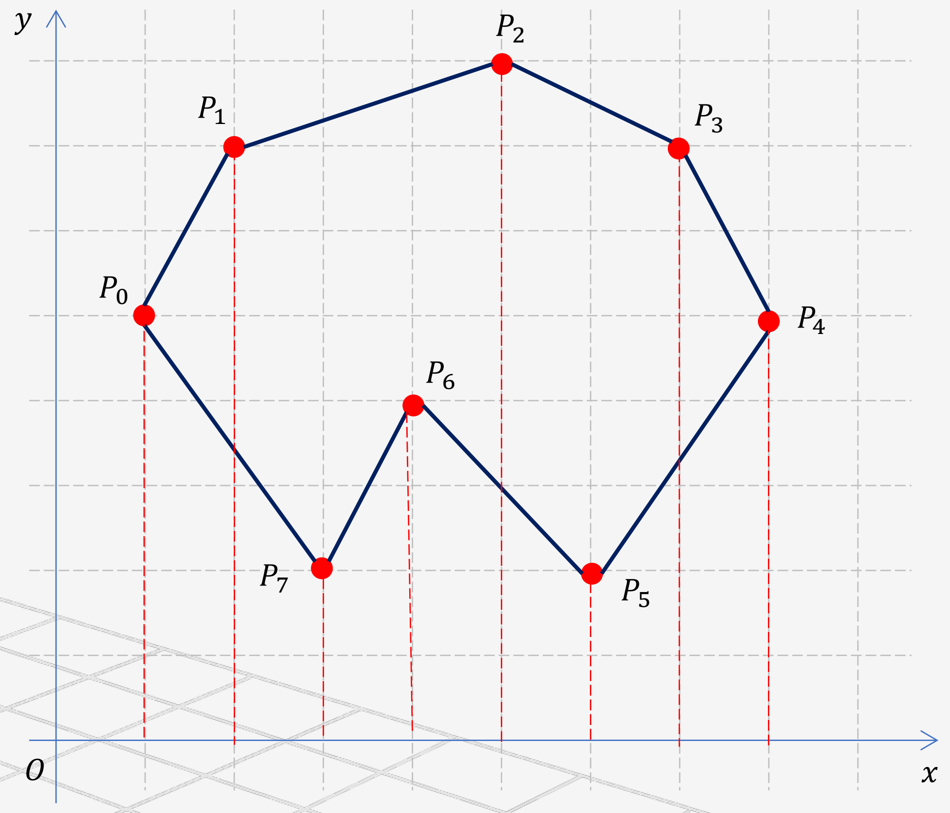
$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} + y_i)$$

với $P_n(x_n, y_n) = P_0(x_0, y_0)$



Một số bài toán cơ bản

- Tính chất:
  - $S > 0$: các đỉnh của đa giác liệt kê thuận chiều kim đồng hồ
  - $S < 0$: các đỉnh của đa giác liệt kê ngược chiều kim đồng hồ



Một số bài toán cơ bản

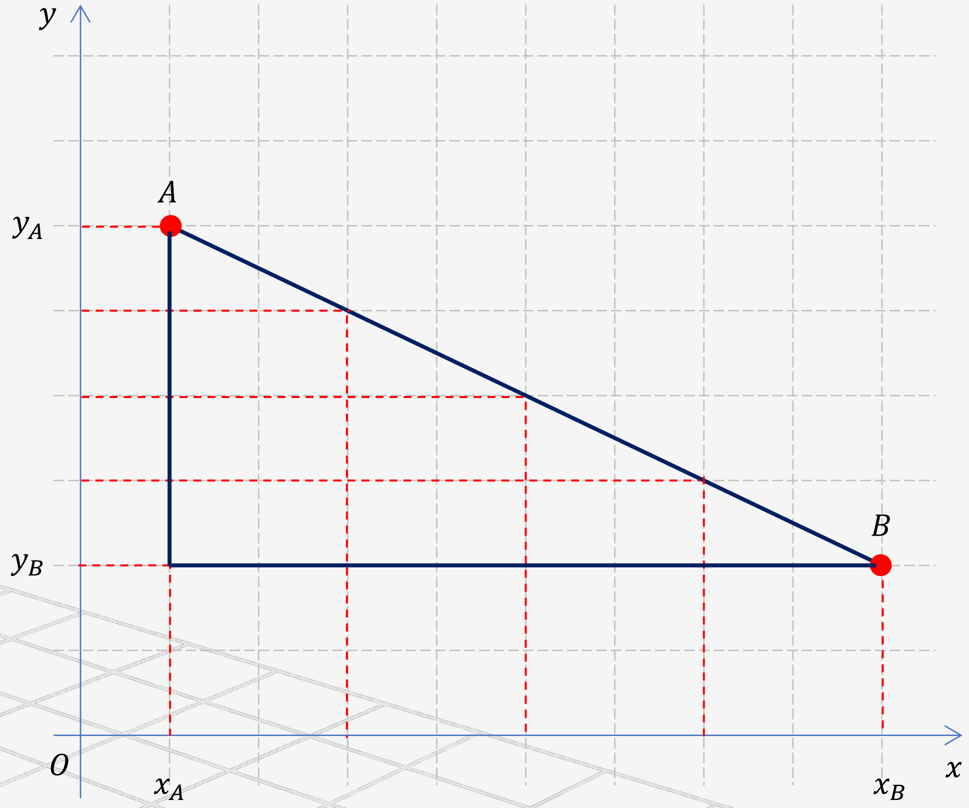
- Bài toán 2: diện tích đa giác không tự cắt n đỉnh với $P_i(x_i, y_i)$

```
double Area(Point P[], int n)
{
   double S = 0;
   P[n] = P[0];
   for (int i = 0; i < n; ++i)
      S = S + (P[i+1].x - P[i].x)*(P[i+1].y + P[i].y);
   return S/2;
}
```

Một số bài toán cơ bản

- Bài toán 3: số điểm nguyên thuộc đoạn thẳng $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$

$$GCD(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|) - 1$$

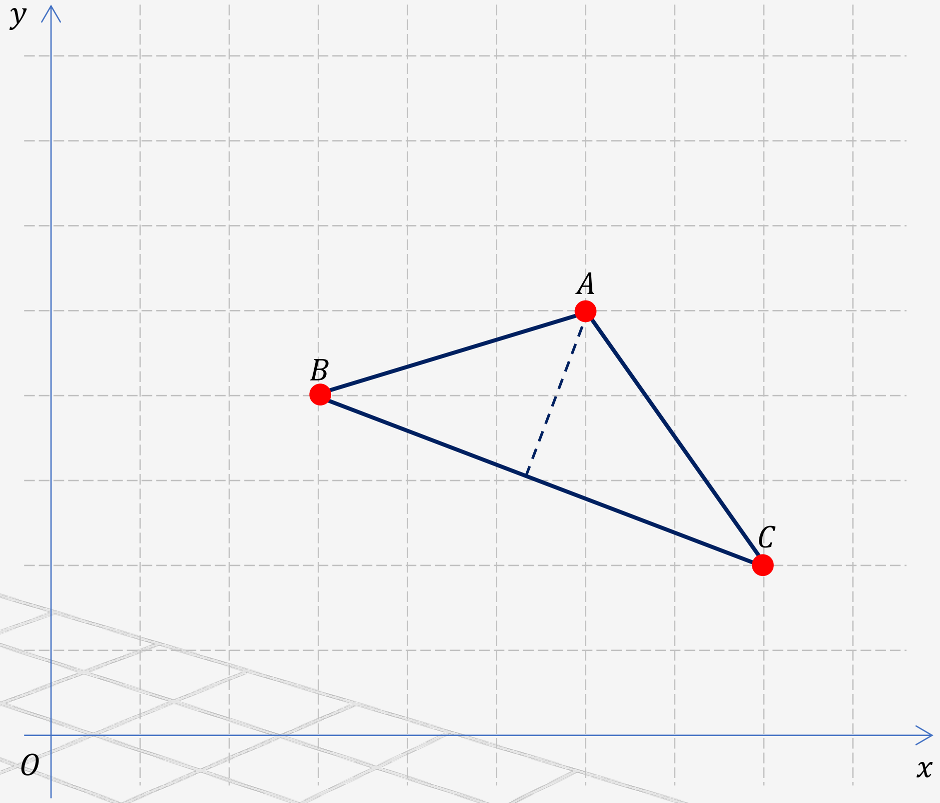


Một số bài toán cơ bản

- Bài toán 4: Tính khoảng cách từ điểm A đến đoạn thẳng BC.
  - TH1: $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ nhọn

$$AB^2 + BC^2 > AC^2; AC^2 + BC^2 > AB^2$$

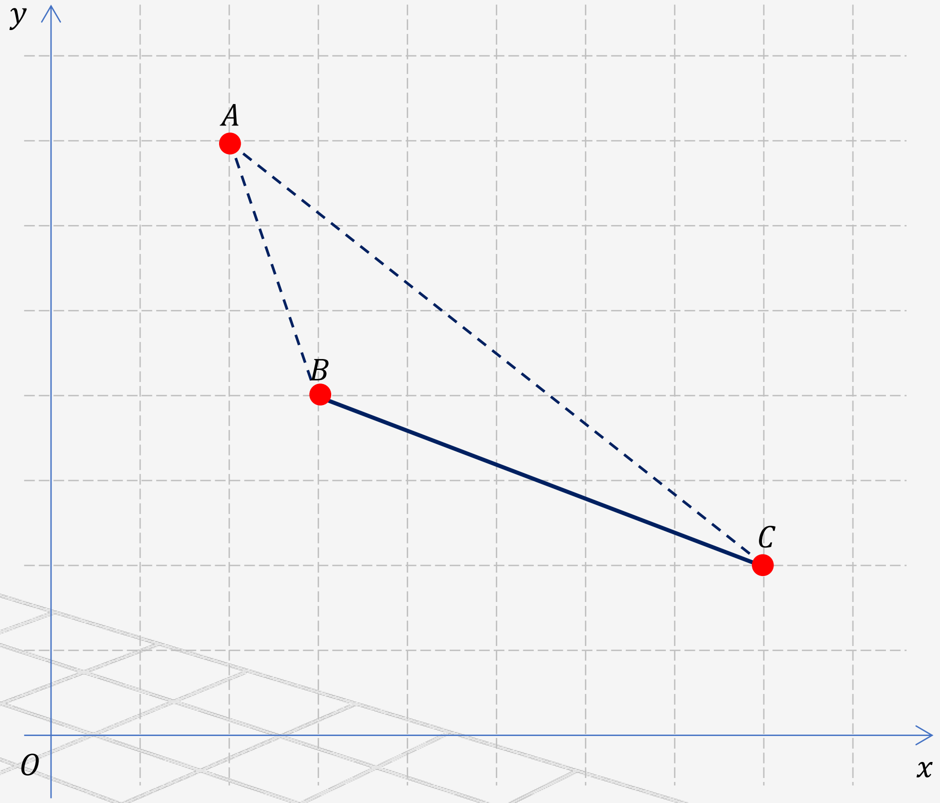
$$d = \frac{2 \times S_{ABC}}{BC}$$



Một số bài toán cơ bản

- Bài toán 4: Tính khoảng cách từ điểm A đến đoạn thẳng BC.
  - TH2: 1 trong 2 góc $\widehat{ABC}$ hoặc $\widehat{ACB}$ là góc tù

$$d = \min(AB, AC)$$



Một số bài toán cơ bản

- Bài toán 5: Tính khoảng cách từ điểm A đến đa giác $P_0P_1 \dots P_{n-1}$.

  Nhận xét:

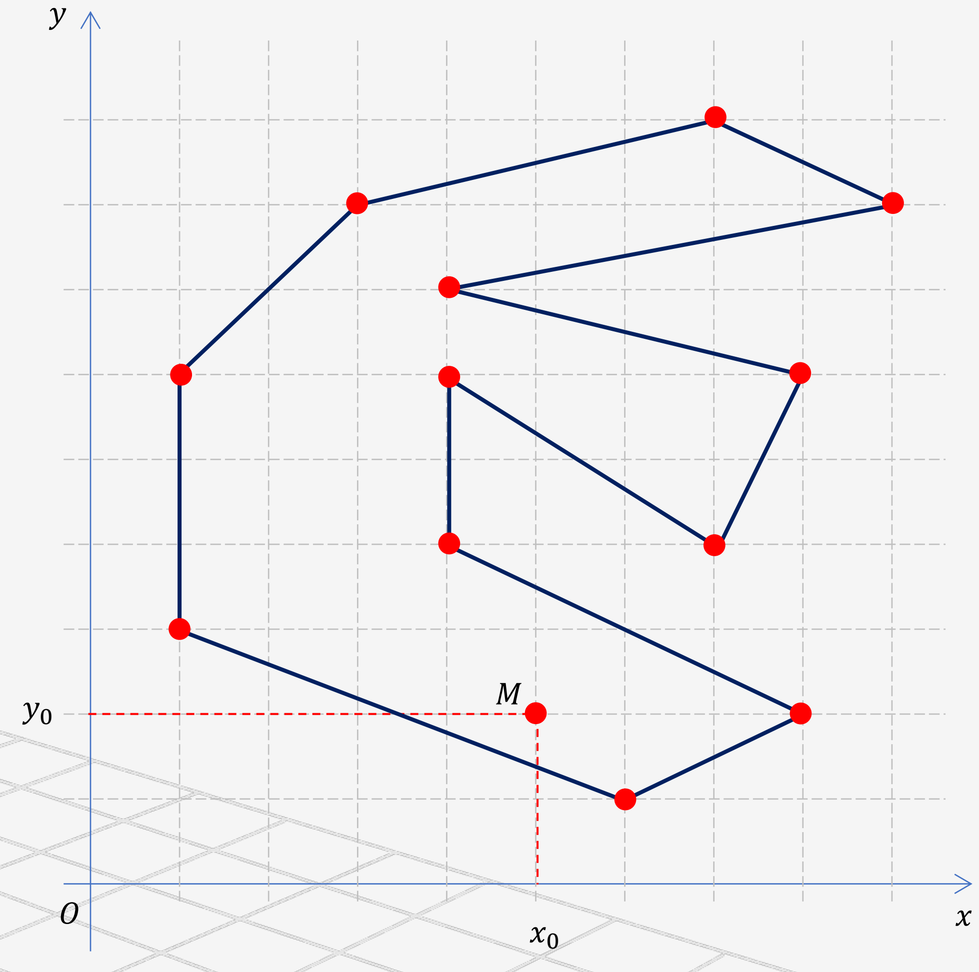
  - Khoảng cách từ A đến đa giác là khoảng cách nhỏ nhất từ A đến các cạnh của đa giác

$$d = \min\{d_0, d_1, \dots, d_{n-1}\}$$

với d_i khoảng cách từ A đến cạnh $P_iP_{i+1} (0 \le i < n)$

Một số bài toán cơ bản

- Bài toán 6: Kiểm tra $M(x_0, y_0)$ thuộc miền trong, miền ngoài hay trên biên đa giác.

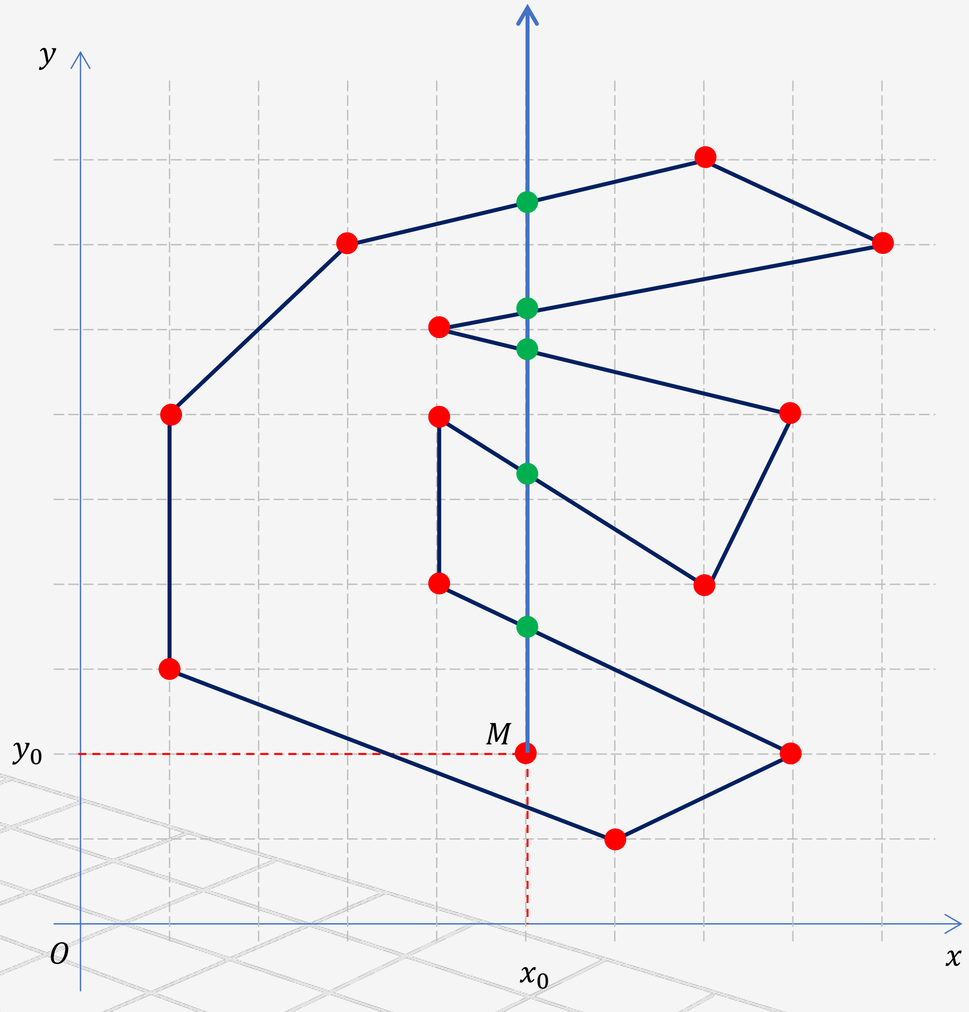


Một số bài toán cơ bản

- Bài toán 6:
  - Từ M kẻ tia // trục tung và đếm số giao điểm với các cạnh đa giác

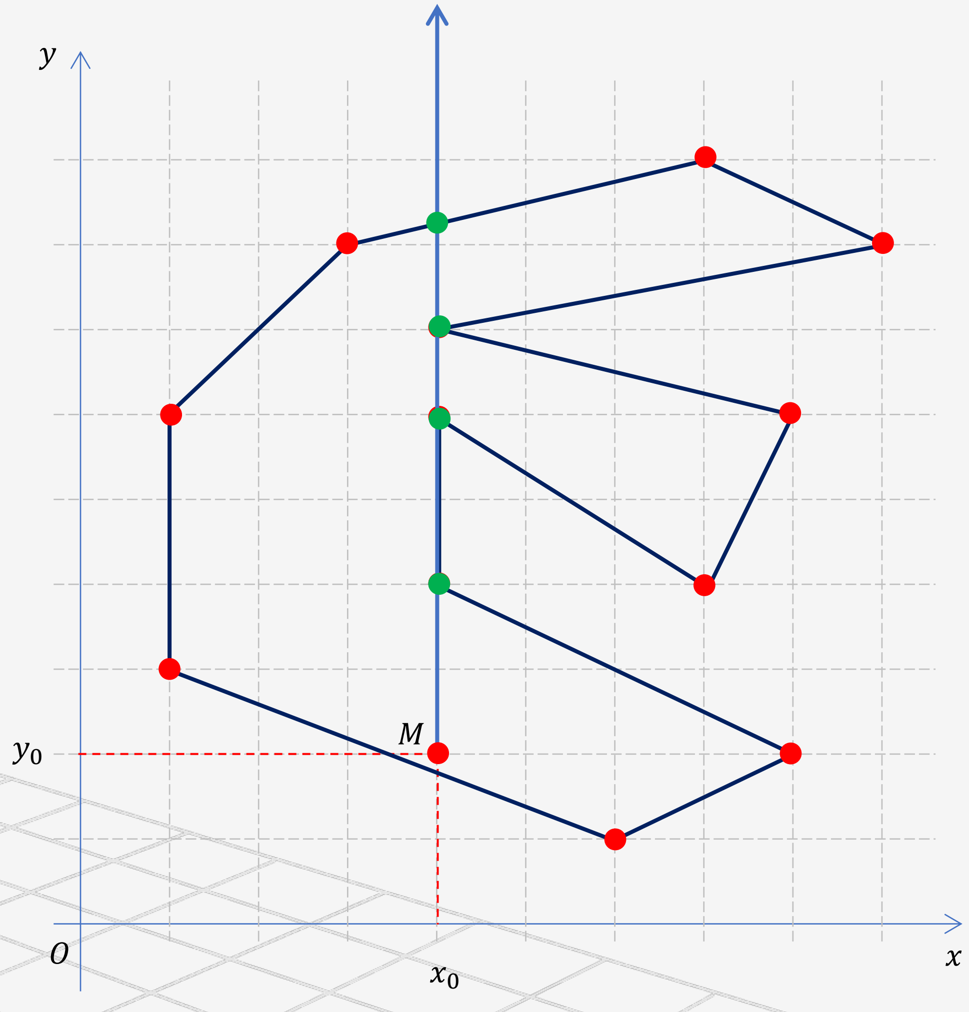
    \+ Số giao điểm chẵn: M thuộc miền ngoài của đa giác

    \+ Số giao điểm lẻ: M thuộc miền trong của đa giác



Một số bài toán cơ bản

- Bài toán 6: trường hợp đặc biệt

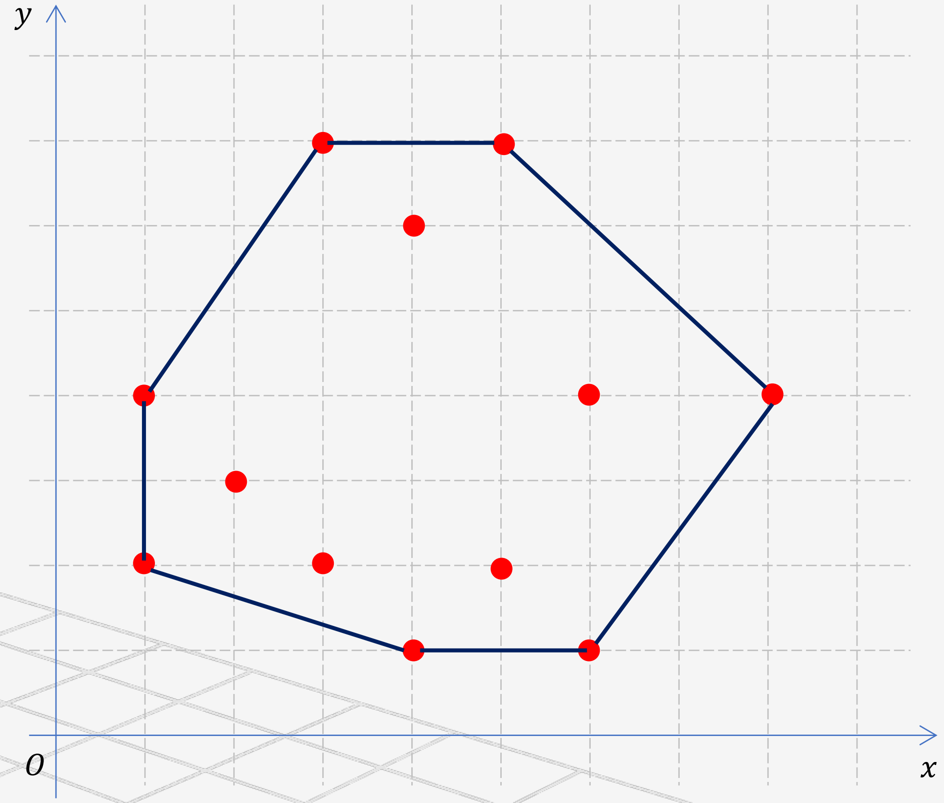


Nội dung

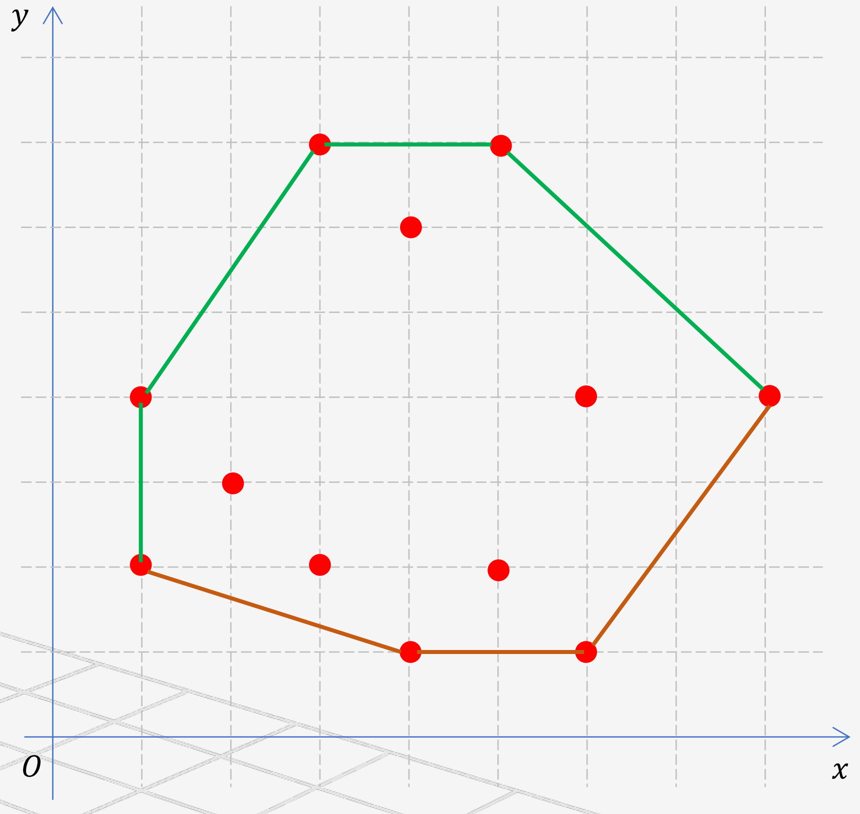
- Các đối tượng cơ bản của hình học mặt phẳng
- Cấu trúc dữ liệu biểu diễn
- Diện tích đại số của tam giác
- Ứng dụng diện tích đại số của tam giác
- Một số bài toán cơ bản
- Bài toán bao lồi

Bài toán bao lồi

- Cho tập điểm $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ trong mặt phẳng. Tìm đa giác lồi có diện tích nhỏ nhất chứa tập điểm.

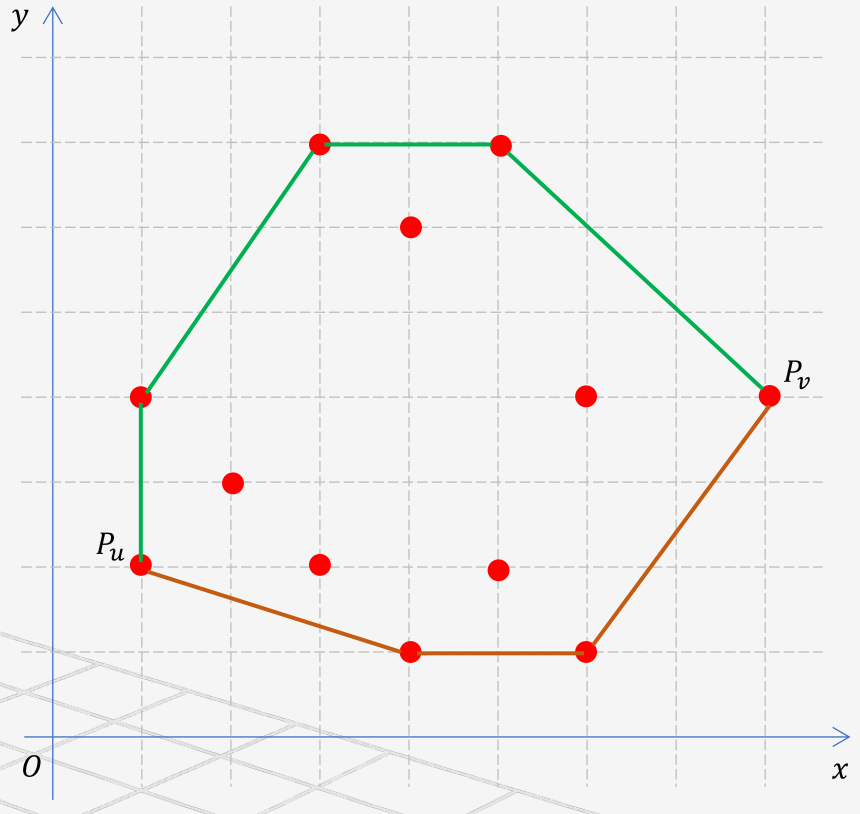


- Nhận xét
  - Bao lồi gồm 2 đường gấp khúc: đường nửa trên và đường nửa dưới
  - Các điểm thuộc đường nửa trên: có hoành độ tăng dần (cw)
  - Các điểm thuộc đường nửa dưới: có hoành độ giảm dần (cw)



- Nhận xét
  - 2 điểm đầu của đường gấp khúc có hoành độ nhỏ nhất và lớn nhất

$\Rightarrow$ Chọn 2 điểm đầu P_u và P_v của đường gấp khúc

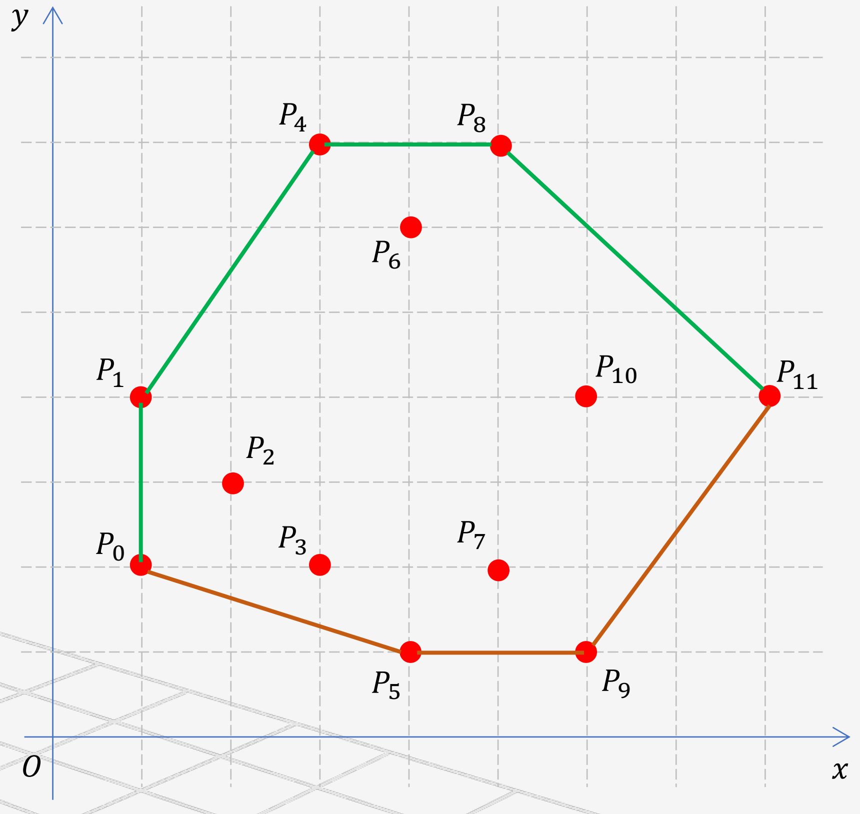


Bài toán bao lồi

- Nhận xét
  - P_u có hoành độ và tung độ nhỏ nhất, P_v có hoành độ và tung độ lớn nhất

$\Rightarrow$ Sắp xếp các đỉnh tăng dần theo x, cùng x thì sắp tăng dần theo y

+ $P_u = P_0, P_v = P_{n-1}$

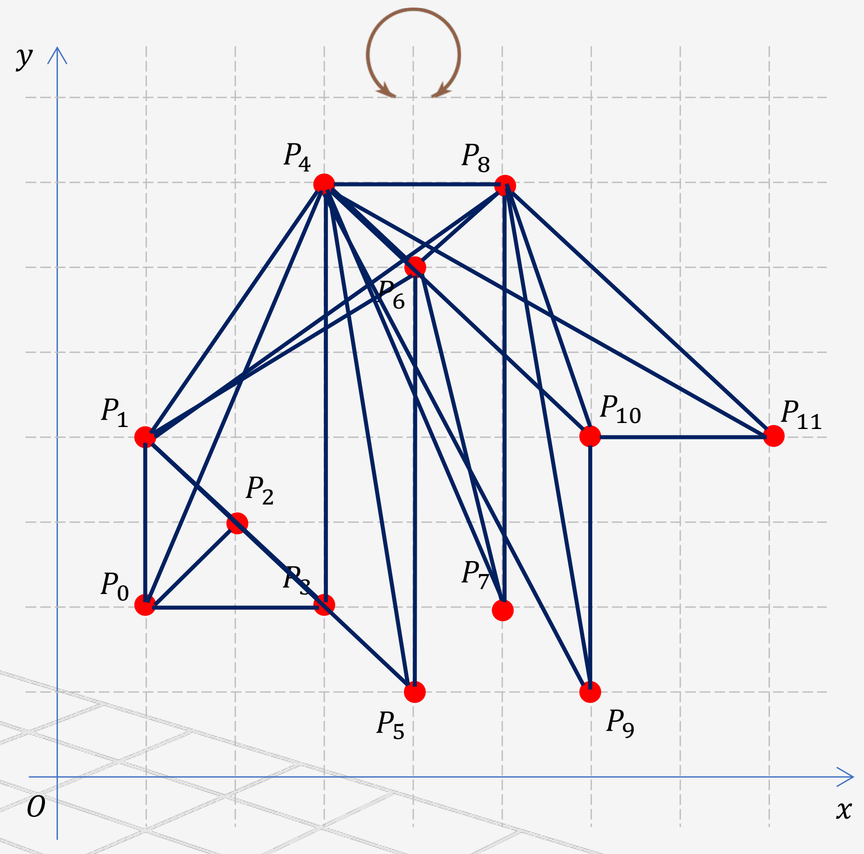


Bài toán bao lồi

- Minh họa xây dựng nửa đường trên

Nửa đường trên: $P_0\ P_1$

Các đỉnh đa giác: $P_2\ \ P_3\ \ P_4\ \ P_5\ \ P_6\ \ P_7\ \ P_8\ \ P_9\ \ P_{10}\ P_{11}$

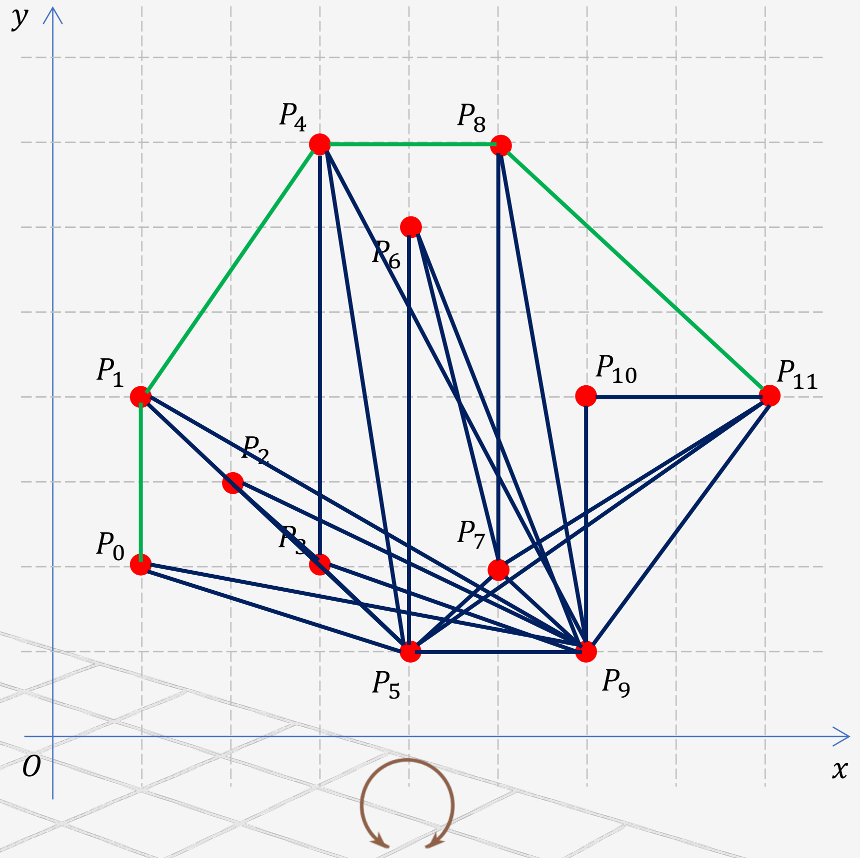


Bài toán bao lồi

- Minh họa xây dựng nửa đường dưới

Nửa đường dưới: $P_{11}\,P_{10}$

Các đỉnh đa giác: $P_9 \;\; P_8 \;\; P_7 \;\; P_6 \;\; P_5 \;\; P_4 \;\; P_3 \;\; P_2 \;\; P_1 \;\; P_0$



Bài toán bao lồi

- Thuật toán tìm bao lồi
  - Sắp các điểm tăng dần theo x, cùng x sắp tăng dần theo y
  - Tìm nửa đường trên
  - Tìm nửa đường dưới
- Độ phức tạp $O(n \log n)$

Bài toán bao lồi

- Thuật toán tìm bao lồi

```
m1=m2=2, C1[0]=P[0], C1[1]=P[1], C2[0]=P[n-1], C2[1]=P[n-2];
for (i = 2; i < n;) {//xây dựng nửa đường trên
   S = Area(C1[m1-2], C1[m1-1], P[i]);
   if (S <= 0) --m1;
   if (m1 < 2 || S > 0) C1[m1++] = P[i++];
}
for (i = n-3; i >= 0;) {//xây dựng nửa đường dưới
   S = Area(C2[m2-2], C2[m2-1], P[i]);
   if (S <= 0) --m2;
   if (m2 < 2 || S > 0) C2[m2++] = P[i--];
}
```

Bài toán bao lồi

- Nhận xét
  - Thuật toán tìm 2 đường gấp khúc:
    - \+ Tìm nửa đường bao trên
    - \+ Tìm nửa đường bao dưới
  - Độ phức tạp cài đặt: $O(n)$