

# Chương 2. TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

## Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

### 2.1 Tập hợp

Cho  $A$  là tập hợp và  $x$  là một phần tử, ta có một số hàm liên quan

- `{a, b, c, ...}`: Tạo ra tập hợp  $\{a, b, c, \dots\}$ .
- `{seq(f(i), i=n..m)}`: Tập hợp với các phần tử là  $f(i)$  với  $i$  chạy từ  $n$  đến  $m$ .
- `nops(A)`: Số phần tử của  $A$ .
- `op(A)`: Trích xuất tất cả các phần tử của  $A$ .
- `A[i]`: Phần tử thứ  $i$  của  $A$ .
- `member(x, A)`: Kiểm tra  $x$  có là phần tử của  $A$  không?.

```
> A:={1,5,2,2,3,2,3,4,7};
                                     {1, 2, 3, 4, 5, 7}
> nops(A);
                                     6
> op(A);
                                     1, 2, 3, 4, 5, 7
> A[6];
                                     7
> member(4, A);
                                     true
> member(6, A);
                                     false
> {seq(2^i, i = 1 .. 5)};
                                     {2, 4, 8, 16, 32}
```

Cho  $A, B$  là các tập hợp, khi đó

- `A union B`: Tìm hợp của  $A$  và  $B$ .
- `A intersect B`: Tìm giao của  $A$  và  $B$ .
- `A minus B`: Tìm hiệu của  $A$  và  $B$ .
- `A subset B`: Kiểm tra  $A$  có là tập con của  $B$  không?.

```
> A := {1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9}: B := {2, 4, 6, 8, 10}:
> A union B;
                                     {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
> A intersect B;
                                     {2, 6, 8}
```

> **A minus B;**

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$

> **A subset B;**

*false*

## 2.2 Ánh xạ

Một số hàm liên quan tới ánh xạ

- **f:=x -> exp:** Xây dựng ánh xạ một biến  $f$  với  $f(x) = exp$ , trong đó  $exp$  là một biểu thức theo biến  $x$ .
- **f:=(x, y, ...) -> exp:** Xây dựng ánh xạ nhiều biến  $f$  với  $f(x, y, \dots) = exp$ , trong đó  $exp$  là một biểu thức theo biến  $x, y, \dots$
- **f(t):** Tính giá trị ánh xạ  $f$  tại  $t$ .
- **f@g:** Tìm ánh xạ hợp  $f \circ g$ .
- **f@@k:** Tìm ánh xạ hợp  $k$  lần của  $f$ .
- **g:=x -> solve(f(y)=x, y):** Khi  $f$  là song ánh thì  $g$  chính là ánh xạ ngược của  $f$ .

> **f:=x -> (3\*x+2)/(x-5):**

$$f := x \rightarrow \frac{3x+2}{x-5}$$

> **f(4);**

$-14$

> **f3:=f@@3:    simplify(f3(t));    #Tìm ánh xạ hợp  $f^3$**

$$\frac{29t+42}{21t-139}$$

> **g:=t -> 2\*t+1;**

$$g := t \rightarrow 2t+1$$

> **h := g@f;    simplify(h(t));    #Tìm  $h = g \circ f$**

$$\frac{7t-1}{t-5}$$

> **fn := x-> solve(f(y) = x, y):    simplify(fn(t));    #Tìm ánh xạ ngược của  $f$**

$$\frac{2+5t}{-3+t}$$

## Phần II. Bài tập

**Bài 2.1** Những khẳng định nào sau đây là đúng

- |                          |                              |                          |
|--------------------------|------------------------------|--------------------------|
| a) $0 \in \emptyset$     | c) $\{0\} \subset \emptyset$ | e) $\{0\} \in \{0\}$     |
| b) $\emptyset \in \{0\}$ | d) $\emptyset \subset \{0\}$ | f) $\{0\} \subset \{0\}$ |

**Bài 2.2** Những khẳng định nào sau đây là đúng

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$                | c) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$                | e) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$     |
| b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ | d) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ | f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$ |

**Bài 2.3** Liệt kê các tập hợp sau:

- a)  $A = \{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- b)  $B = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
- c)  $C = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, m^2 < 2 \text{ và } 6n > n^2 - 7\}$
- d)  $D = \{2 \sin \frac{n\pi}{6} + 5 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- e)  $E = \{x = \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \sqrt{17} < n \leq \sqrt{80} \text{ và } \frac{1}{2} < x < 1\}$
- f)  $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 4} \leq 0\}$
- g)  $G = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^4 \geq 256 \text{ và } x = \sqrt{3} \cos x - \sqrt{2} \sin 3x\}$

**Bài 2.4** Cho  $A, B \subset \mathbb{R}$ . Viết  $\overline{A}$ ,  $\overline{B}$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  thành phần hội của các đoạn, khoảng rời nhau trong  $\mathbb{R}$ .

- a)  $A = (-9, -3) \cup [-1, 2] \cup [4, 5) \cup (7, 11] \cup (13, +\infty)$  và  
 $B = (-\infty, -7] \cup [-4, -2) \cup (0, 3) \cup (6, 8] \cup [10, 15]$
- b)  $A = (-\infty, -4) \cup [4, 7] \cup \{-1, 2, 8, 10\}$  và  $B = (-5, 1] \cup [6, 9) \cup \{-6, 3, 5, 10\}$ .

**Bài 2.5** Cho  $A, B, C, D \subset E$ . Hãy rút gọn các biểu thức sau đây:

- a)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$
- b)  $(A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (A \cap B)]$
- c)  $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$
- d)  $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$
- e)  $\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C \cap \overline{D})$

**Bài 2.6** Cho  $A, B, D \subset E$ . Hãy chứng minh

- a)  $D \setminus (A \cup B) = (D \setminus A) \cap (D \setminus B) = (D \cup B) \setminus (A \cup B)$
- b)  $D \setminus (A \cap B) = (D \setminus A) \cup (D \setminus B)$
- c)  $(A \cup B) \setminus D = (A \setminus D) \cup (B \setminus D)$
- d)  $(A \cap B) \setminus D = (A \setminus D) \cap (B \setminus D)$
- e)  $(A \setminus B) \setminus D = A \setminus (B \cup D) = (A \setminus D) \setminus (B \setminus D)$

**Bài 2.7** Cho  $A, B, H, K \subset E$ . Chứng minh

- a)  $[(A \cap H) \cup (B \cap K)] \subset [(A \cup B) \cap (H \cup K)]$
- b)  $(A \setminus H) \subset [(A \setminus B) \cup (B \setminus H)]$
- c)  $[(A \cup B) \setminus (H \cup K)] \subset [(A \setminus H) \cup (B \setminus K)] \subset [(A \cup B) \setminus (H \cap K)]$
- d)  $[(A \cup B) \setminus H] \subset [A \cup (B \setminus H)]$
- e)  $[(A \cup B) \setminus (A \cup H)] \subset (B \setminus H)$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong a), b), c), d) và e).

**Bài 2.8** Cho  $A = \{0, 1, a\}$ ,  $B = \{a, 2\}$  và  $C = \{2, b\}$ .

- a) Liệt kê các tập hợp  $A^2$ ,  $A \times B$ ,  $C \times A$ ,  $B \times C$  và  $C \times B$ .
- b) Liệt kê các tập hợp  $B^3$ ,  $A \times B^2$ ,  $C \times A \times C$ ,  $A \times B \times C$  và  $C^2 \times B$ .

**Bài 2.9** Cho  $A, B \subset E$  và  $H, K \subset F$ . Chứng minh

- a)  $A \times (H \setminus K) = (A \times H) \setminus (A \times K)$
- b)  $[(A \times H) \setminus (B \times K)] = [(A \setminus B) \times H] \cup [A \times (H \setminus K)]$
- c)  $(A \times H) \cap (B \times K) = (A \cap B) \times (H \cap K)$
- d)  $[(A \times H) \cup (B \times K)] \subset [(A \cup B) \times (H \cup K)]$
- e)  $[(A \setminus B) \times (H \setminus K)] \subset [(A \times H) \setminus (B \times K)]$

Cho các ví dụ để thấy trường hợp không có dấu đẳng thức xảy ra trong d) và e).

**Bài 2.10** Các qui tắc  $f : X \rightarrow Y$  sau có phải là ánh xạ không ? Tại sao ?

- a)  $X = (-2, 1]$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}$ ,  $\forall x \in X$
- b)  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = (6, +\infty)$ ,  $f(x) = e^x + 9e^{-x}$ ,  $\forall x \in X$
- c)  $X = Y = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln |\sin x|$ ,  $\forall x \in X$
- d)  $X = [-1, +\infty)$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = y$  sao cho  $y^2 - 2y = x$ ,  $\forall x \in X$
- e)  $X = [1, 3]$ ,  $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = 3x^2 - 9x + 5$ ,  $\forall x \in X$
- f)  $X = \mathbb{Q}$ ,  $Y = \mathbb{Z}$ ,  $f\left(\frac{m}{n}\right) = m^2 + 3^n - mn$ ,  $\forall \frac{m}{n} \in X$

**Bài 2.11** Xét tính đơn ánh và toàn ánh của các ánh xạ  $f : X \rightarrow Y$  sau:

- a)  $X = Y = \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \forall x \in X$
- b)  $X = [-2, +\infty), Y = (-20, +\infty), f(x) = x^2 + 6x - 3, \forall x \in X$
- c)  $X = Y = \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 4), \forall x \in X$
- d)  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}, Y = \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x - 3}{x}, \forall x \in X$
- e)  $X = \mathbb{R}, Y = [-2, 2], f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x, \forall x \in X$
- f)  $X = Y = \mathbb{R}, f(x) = 3 \cos 2x - 7x + 8, \forall x \in X$

**Bài 2.12** Xét hai ánh xạ  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi:  $f(x) = ax + b$  và  $g(x) = 1 - x + x^2$ . Giả sử  $g \circ f = f \circ g$ , hãy xác định  $a$  và  $b$ ?

**Bài 2.13** Xác định  $u = g \circ f, v = f \circ g$  và  $w = h \circ g \circ f$  (nếu có) khi  $f : X \rightarrow Y, g : Z \rightarrow T$  và  $h : U \rightarrow V$  trong đó

- a)  $X = Y = Z = T = U = V = \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1, g(x) = x^2 + x - 3$  và  $h(x) = x^3 + 4 \cos x$
- b)  $X = T = U = (0, +\infty), Y = Z = \mathbb{R}, V = [1, +\infty), f(x) = 3 \ln x - 2, g(x) = e^{\sin x}$  và  $h(x) = 5x^4 - x^2 + 1$
- c)  $X = V = \mathbb{R}, Y = Z = \mathbb{R} \setminus \{1\}, T = U = \mathbb{R} \setminus \{-3\}, f(x) = x^2 - 4x + 6, g(x) = \frac{3x + 2}{1 - x}$  và  $h(x) = \ln |x + 3|$

**Bài 2.14** Cho hai ánh xạ  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  được xác định bởi  $f(x) = x^2 - 3$  và  $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$ . Hãy tìm  $f(A), g(A), f^{-1}(A)$  và  $g^{-1}(A)$  với

- a)  $A = \{2, 3\}$
- b)  $A = \{-3, -2, 2, 3\}$
- c)  $A = (-3, 3)$
- d)  $A = (-3, 2]$
- e)  $A = [-7, 2]$
- f)  $A = (-4, -3] \cup [5, 6]$

**Bài 2.15** Tìm  $f(A), f(B), f(C), f(D), f(E), f(\mathbb{R}), f^{-1}(G), f^{-1}(H), f^{-1}(K), f^{-1}(L), f^{-1}(M)$  và  $f^{-1}(N)$  cho các ánh xạ sau

- a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  với  $f(x) = \begin{cases} x - 5 & \text{nếu } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$  trong đó

- $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$
- $B = [1, 3]$
- $C = (-1, 2)$
- $D = (-\infty, 0]$
- $E = (3, +\infty)$
- $G = \{-7, -5, -3, 1, 2, 5, 7, 9\}$
- $H = [-7, -5]$
- $K = (-5, 5)$
- $L = [7, +\infty)$
- $M = [1, 9)$
- $N = (-3, 2]$

- b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  với  $f(x) = \begin{cases} x + 7 & \text{nếu } x \leq 0 \\ 5 - 2x & \text{nếu } 0 < x < 3 \\ x - 1 & \text{nếu } x \geq 3 \end{cases}$  trong đó

- $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\}$
- $B = [-2, 1]$
- $C = (2, 4)$
- $D = (-1, 5]$
- $E = [0, +\infty)$
- $G = \{-5, -2, -1, 0, 4, 5, 7, 10, 11\}$
- $H = [-5, -1]$
- $K = (-\infty, 0]$
- $L = [-2, 4)$
- $M = (5, 10]$
- $N = (7, 11)$ .

**Bài 2.16** Chứng minh các ánh xạ dưới đây là song ánh và tìm ánh xạ ngược của chúng:

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

b)  $h : [1, 2) \rightarrow [5, 7), h(x) = 3x + \frac{2}{x}$

c)  $p : \mathbb{R} \rightarrow (-2, 3), p(x) = \frac{9 - 2e^x}{e^x + 3}$

d)  $q : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-3\}, q(x) = \frac{5 - 3x}{x - 1}$

e)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x - 3e^{-x} + 1$

f)  $r : (0, 3] \rightarrow (2, \frac{17}{4}], r(x) = (x+1) + \frac{1}{x+1}$

**Bài 2.17** Với các ánh xạ đã cho ở bài trên, hãy tìm các ánh xạ  $u, v, w$  thỏa  $p \circ^{-1} u = g, v \circ f = g$  và  $f \circ^{-1} w \circ p = g$ .