Chương 3: Một số phân phối xác suất thông dụng

Nguyễn Thị Mộng Ngọc
University of Science, VNU - HCM
ngtmngoc@hcmus.edu.vn

Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$

Định nghĩa:

Cho biến ngẫu nhiên (b.n.n.) X rời rạc nhận hai trị số 0, 1. Ta nói X có phân phối Bernoulli khi:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 1 - p & \text{khi } x = 0 \\ p & \text{khi } x = 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

Kí hiệu: $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ trong đó $p \in (0, 1)$.

Đặc trưng

Kì vọng: $\mathbb{E}[X] = 0(1 - p) + 1.p = p$.
Phương sai: $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối Bernoulli: Mô hình

Coi một thí nghiệm ngẫu nhiên có hai kết quả $\Omega = \{\omega, \bar{\omega}\}$, trong đó $\mathbb{P}(\omega) = p$.
Gọi X là số lần ω xuất hiện

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) = 1 \\ \bar{\omega} &\longmapsto X(\bar{\omega}) = 0 \end{aligned}$$

Bảng phân phối xác suất của X:

X	1	0
P	p	$1 - p$

Vậy X có phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.
Nhận xét: *Mọi thí nghiệm ngẫu nhiên chỉ có hai kết quả đều có phân phối Bernouilli.*

1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối Bernoulli: Ví dụ

<u>VD</u>: Tung đồng xu (đồng nhất) một lần, chúng ta quan tâm mặt ngửa.

Đặt $X = \begin{cases} 1 & \text{nếu xuất hiện mặt ngửa} \\ 0 & \text{nếu xuất hiện mặt sấp} \end{cases}$ thì $X \sim \mathcal{B}(1, 1/2)$.

<u>VD khác</u>: Quan sát giới tính trong một lần sanh.

Đặt $Y = \begin{cases} 1 & \text{nếu con trai} \\ 0 & \text{nếu con gái} \end{cases}$ thì $Y \sim B(1, 1/2)$.

<u>VD khác</u>: Tung con xúc sắc (đồng nhất) một lần, chúng ta quan tâm mặt 6 chấm.

Đặt $Z = \begin{cases} 1 & \text{nếu mặt 6 xuất hiện} \\ 0 & \text{nếu là mặt khác} \end{cases}$ thì $Z \sim B(1, 1/6)$.

Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$

Định nghĩa:

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị $k = 0, 1, \ldots, n$ với xác suất

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

đgl có luật phân phối nhị thức với tham số n và p. Kí hiệu: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ trong đó $n \geq 0$ và $0 \leq p \leq 1$.

1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối nhị thức: Mô hình

Nhận xét :

- Khi có n phép thử Bernoulli độc lập, ở mỗi phép thử có xác suất thành công là p, thì biến ngẫu nhiên X chỉ số lần thành công sẽ có luật phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$. Ta gọi đó là mô hình nhị thức.
- Biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$ có thể biểu diễn dưới dạng tổng của n biến ngẫu nhiên độc lập X_i có phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối nhị thức : Ví dụ

VD : Một bài thi trắc nghiệm gồm 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm, mỗi câu trả lời sai trừ 2 điểm. Một sinh viên làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên đáp án cho các câu hỏi. Tính xác suất:

- (i) Để sinh viên được 4 điểm.
- (ii) Để sinh viên được điểm âm.

VD : Một bài trắc nghiệm của mệt game show trên truyền hình có 6 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 5 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án trả lời đúng. Một người làm bài trắc nghiệm này bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 5 phương án trả lời cho câu hỏi. Tính xác suất:

- (i) trả lời đúng 3 câu.
- (ii) trả lời đúng ít nhất 3 câu.

1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối nhị thức : Ví dụ (tt)

VD : Trong một gia đình có 6 người con. Tính xác suất gia đình này

- (i) có đúng 3 con trai.
- (ii) có nhiều nhất 3 con trai
- (iii) có ít nhất 3 con trai.

VD : Tại một địa phương tỉ lệ sốt rét là 25% dân số. Chọn ngẫu nhiên 6 người. Tính khả năng để có 4 người bị sốt rét.

VD : Một lô thuốc (rất nhiều), có tỉ lệ hỏng $p = 0.2$. Ta lấy ngẫu nhiên 5 lọ. Gọi X là số lọ hỏng trong số lọ lấy ra. Tìm hàm mật độ xác suất của X.

Phân phối nhị thức : hướng dẫn giải (tt)

Phân phối nhị thức : hướng dẫn giải (tt)

Phân phối nhị thức - Các đặc trưng

Định lý :

Nếu X là biến ngẫu nhiên có phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$ thì

1. $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathbb{V}ar(X) = npq$, với $q = 1 - p$.
2. $Mod(X)$ là (các) số nguyên thỏa $np - q \leq Mod(X) \leq np + p$.

Phân phối nhị thức - Ví dụ

Hàng đóng thành kiện, mỗi kiện 10 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm. Khi kiện hàng được giao cho khách hàng, khách hàng sẽ lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm trong kiện để kiểm tra. Nếu cả hai sản phẩm đều tốt, kiện hàng sẽ được nhận, ngược lại kiện hàng sẽ bị trả lại. Gọi X là số kiện hàng được nhận trong số 100 kiện hàng giao cho khách hàng. Tìm $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}ar(X)$ và $Mod(X)$.

Phân phối siêu bội $H(N,M,n)$

Định nghĩa :

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị $k = 0, 1, \ldots, n$ với xác suất

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

với $\max\{0, n-(N-M)\} \le k \le \min\{n, M\}$ đgl tuân theo luật phân phối siêu bội.
Kí hiệu : $X \sim \mathcal{H}(N, M, n)$.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n,p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N,M,n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Phân phối siêu bội - Mô hình và các đặc trưng

Mô hình siêu bội

Từ một hộp có M bi đỏ, $N-M$ bi đen lấy ngẫu nhiên không hoàn lại n bi. Gọi X là số bi đỏ trong n bi lấy ra. Khi đó $X \sim \mathcal{H}(n, M, N)$.

Đặc trưng :

Cho $X \sim \mathcal{H}(n, M, N)$ và đặt $p = \dfrac{M}{N}$, $q = 1-p$. Khi đó

i. $\mathbb{E}[X] = np$
ii. $Var(X) = npq\dfrac{N-n}{N-1}$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n,p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N,M,n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Phân phối siêu bội - Ví dụ

VD 4.10 : Một lớp có 50 sinh viên trong đó có 30 nữ. Cần chọn ra 10 bạn để tham gia vào công tác chuẩn bị cho 1 hoạt động sắp tới của trường. Nếu ta chọn các bạn trên một cách ngẫu nhiên, xác suất để số sinh viên nữ được chọn không quá 3 là bao nhiêu? Xác suất để chọn được ít nhất 1 sinh viên nữ là bao nhiêu?

VD 4.11 : Trong cửa hàng có bán 100 bóng đèn trong đó có 5 bóng hư mà không kiểm tra thì không thể xác định được. Một người khách chọn ngẫu nhiên 2 bóng đèn để mua. Tìm xác suất để người này mua được cả 2 bóng đèn đều tốt.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n,p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N,M,n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Gợi ý giải:

Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Định nghĩa

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị $k = 0, 1, 2, \ldots,$ với xác suất

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \text{với } \lambda > 0$$

đgl tuân theo phân phối Poison với tham số $\lambda > 0$.
Kí hiệu : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Đặc trưng

Nếu b.n.n X có phân phối Poisson với tham số λ, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, thì

- Kỳ vọng $\mathbb{E}(X) = \lambda$.
- Phương sai $\mathbb{V}ar(X) = \lambda$.

Định lý giới hạn Poisson

Cho $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ và đặt $\lambda = np$. Khi đó

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Nhận xét :

- Định lý trên cho thấy trong pp nhị thức nếu n lớn, p nhỏ, $np = \lambda$ thì ta có thể tính xác suất xấp xỉ theo luật Poisson và vì vậy việc tính toán sẽ dễ dàng hơn. Chú ý rằng xấp xỉ này được dùng khi $n \geq 100$, $p \leq 0.01$ và $np \leq 20$.
- Khi $n \geq 100$, $p \leq 0.01$ và $np \leq 20$ thì mô hình nhị thức tương đương với mô hình Poisson.

Phân phối Poisson - Mô hình

Đó là những quan sát mà số lần lặp lại lớn (n lớn) mà xác suất biến cố ta quan tâm $P(\omega) = p$ thì nhỏ.
Ví dụ ta quan tâm đến những biến cố hiếm, xảy ra trong một thời gian, không gian nhất định:

- Số trẻ em sinh đôi trong một năm tại 1 bệnh viện X
- Số tai nạn giao thông tại 1 ngã tư trong 1 năm
- Số hồng cầu trong mỗi ô của hồng cầu kế.
- Số chữ in sai trong một trang.
- Số người sống lâu trên 100 tuổi trong 1 cộng đồng dân cư.
- Số người đến một bưu điện nào đó trong 1 ngày.

Phân phối Poisson - Mô hình

Nhận xét

Các biến ngẫu nhiên được sử dụng để mô tả, "đếm" sơ lần xảy ra của một biến cố, sự kiện nào đó xảy ra trong một khoảng thời gian hay không gian (xác định) và thỏa một số điều kiện (thường thỏa trong thực tế) thường được mô tả bằng phân phối Poisson.

Phân phối Poisson - Ví dụ

<u>VD</u> : Xác suất gặp một thứ phẩm trong một kho sản phẩm cơ khí là 0,002. Tìm xác suất để gặp thứ phẩm trong 1000 sản phẩm kiểm tra.
<u>Gợi ý</u> : <u>VD</u> : Giả sử số lỗi in trong một trang nào đó của quyển sách có phân phối Poisson với tham số $\lambda = \frac{1}{2}$. Tính xác suất có ít nhất một lỗi in trong trang này.

<u>VD</u> : Giả sử xác suất tử vong của bệnh sốt xuất huyết là 0.007. Tính xác suất để có 5 người chết do sốt xuất huyết trong một nhóm 400 người

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Ví dụ khác

<u>VD</u> : Một trung tâm bưu điện nhận trung bình 150 cuộc điện thoại trong một giờ, tìm xác suất để trung tâm bưu điện này nhận không quá hai cuộc gọi trong một phút.
<u>Gợi ý</u> :

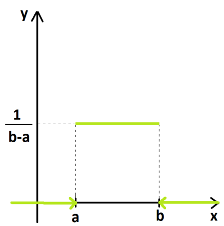
XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối đều $\mathcal{U}\,[a; b]$

Định nghĩa:

Biến ngẫu nhiên liên tục X đgl tuân theo phân phối đều trên đoạn $[a; b]$, ký hiệu $X \sim U\,[a; b]$, nếu X có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{khi } x \in [a, b] \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$



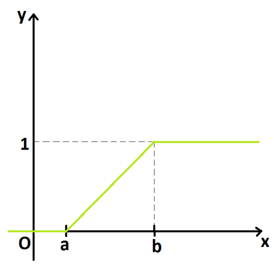
Hình: Hàm mật độ của phân phối đều trên khoảng $[a, b]$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối đều $\mathcal{U}\,[a; b]$

Hàm phân phối xác suất của $X \sim U\,[a; b]$ là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{khi } x \in [a, b] \\ 1 & \text{khi } x > b \end{cases}$$



Hình: Hàm phân phối xác suất của phân phối đều trên khoảng $[a, b]$

Phân phối đều $\mathcal{U}[a; b]$

Các đặc trưng của biến ngẫu nhiên có phân phối đều

Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên $[a, b]$ ($X \sim U[a, b]$) thì

(i) Kỳ vọng $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

(ii) Phương sai $\mathbb{V}ar(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$.

1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối đều $\mathcal{U}[a; b]$

VD : Tại một trạm xe buýt khoảng cách giữa các chuyến liên tiếp của một tuyến xe buýt T là 15 phút. Chuyến đầu tiên đến trạm lúc 7 giờ sáng. Nếu một hành khách tới trạm xe buýt vào một thời điểm có phân phối đều từ 7 giờ tới 7 giờ 30 để đi tuyến xe buýt T
Tính xác suất để anh ta đợi:

(i) ít hơn hoặc bằng 5 phút

(ii) ít hơn hoặc bằng 10 phút

(iii) từ 6 đến 12 phút

1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Giải

1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối mũ

Định nghĩa:

Biến ngẫu nhiên liên tục T đgl tuân theo phân phối mũ, kí hiệu $T \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, nếu T có hàm mật độ xác suất:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{nếu } t \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$

trong đó,

- λ: số biến cố trung bình xảy ra trong một đơn vị thời gian,
- t: số đơn vị thời gian cho đến biến cố kế tiếp.

Phân phối mũ

Nhận xét:

Phân phối mũ thường được dùng để mô tả phân phối của một khoảng thời gian cho đến khi một biến cố cụ thể nào đó xảy ra.

Ví dụ:

Khoảng thời gian chờ cho đến khi một xe bus đến trạm, khoảng thời gian cho đến khi một thiết bị điện tử bị hư, khoảng thời gian một hành khách chờ đến lượt được phục vụ tại một quầy dịch vụ ngân hàng, ...

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n,p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N,M,n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Phân phối mũ

Đặc trưng:

(i) Hàm phân phối của T:

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

(ii) Kì vọng: $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda}$

(iii) phương sai $\mathbb{V}(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n,p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N,M,n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Phân phối mũ

Ví dụ:

Tuổi thọ của thiết bị điện tử tuân theo phân phối mũ với tham số $\lambda = 1/10$ (đơn vị đo thời gian là năm). Xác suất để thiết bị này vẫn hoạt động trong 5 năm sau khi sản xuất là bao nhiêu?

Giải

Gọi T là tuổi thọ của thiết bị điện tử. Theo đề, $T \sim Exp(1/10)$ nên

$$P(T > 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{\frac{-1}{10}.5}) = 0,6065.$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n,p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N,M,n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

Phân phối mũ

Ví dụ:

Tuổi thọ (đơn vị giờ) của một loại bóng đèn A có thể được mô hình hóa bởi một biến ngẫu nhiên T tuân theo phân phối mũ.

(i) Xác định tham số λ của phân phối mũ này biết rằng $P(T \geq 800) = 0,2$.

(ii) Tính tuổi thọ trung bình của bóng đèn này.

Giải

Phân phối chuẩn hóa (Standard normal distribution)

Định nghĩa:

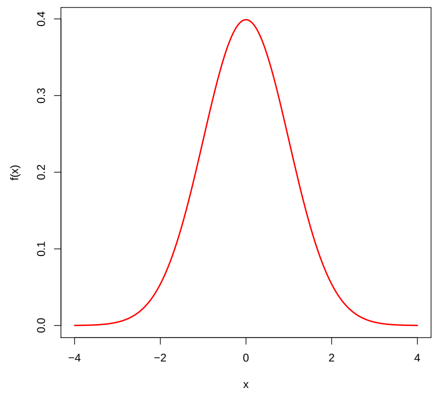
Biến ngẫu nhiên liên tục Z đgl tuân theo phân phối chuẩn (hay chuẩn tắc), kí hiệu $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ nếu Z có hàm mật độ:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

Đặc trưng:

1. Kì vọng: $\mathbb{E}[Z] = 0$
2. phương sai $\mathbb{V}(Z) = 1$

Phân phối chuẩn hóa $\mathcal{N}(0, 1)$



Hình: Hàm mật độ xác suất của $\mathcal{N}(0, 1)$

Phân phối chuẩn hóa $\mathcal{N}(0, 1)$

Hàm phân phối tích lũy

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

Với giá trị cụ thể của z, ta tra bảng để tìm giá trị $\Phi(z)$.

Tính chất:

1. $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$
2. $P(-a \leq Z \leq a) = 2\Phi(a) - 1$

Phân phối chuẩn hóa $\mathcal{N}(0, 1)$

VD : Cho biến ngẫu nhiên $Z \sim N(0, 1)$. Tính các xác suất sau:

1. $P(Z \leq 1.55)$
2. $P(Z \leq -1.45)$
3. $P(-1 < Z \leq 1.5)$

Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (Normal distribution)

Định nghĩa:

Cho biến ngẫu nhiên X liên tục, với $\sigma > 0$, μ là hai tham số, X có phân phối chuẩn, kí hiệu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, khi hàm mật độ có dạng

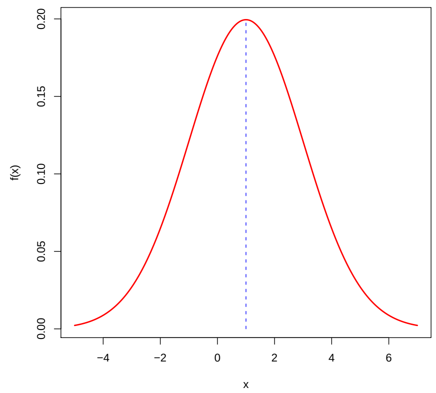
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{với } x \in \mathbb{R}$$

Đặc trưng:

1. Kì vọng: $\mathbb{E}[X] = \mu$
2. Phương sai $\mathbb{V}(Z) = \sigma^2$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(1, 2^2)$



Hình: Hàm mật độ xác suất của $\mathcal{N}(1, 4)$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối chuẩn - Phân phối chuẩn hóa

Định lý:

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ thì $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Định lý trên cho phép chúng ta đưa một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn bất kỳ về phân phối chuẩn hóa.

Hệ quả 1:

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ thì $P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

Hệ quả 2:

Nếu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ thì $P(a < X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Quy tắc $k\sigma$

Nếu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì

$$P(|X-\mu| < k\sigma) = P(-k \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le k) = 2\Phi(k) - 1.$$

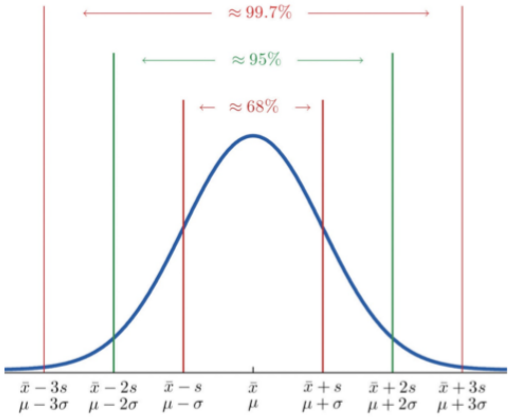
Đẳng thức trên đượ gọi là quy tắc $k\sigma$. Khi $k = 1, 2, 3$, ta có:

(i) $P(|X-\mu| < \sigma) = P(\mu - \sigma < X < \mu - \sigma) \approx 0.68$

(ii) $P(|X-\mu| < 2\sigma) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu - 2\sigma) \approx 0.955$

(iii) $P(|X-\mu| < 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu - 3\sigma) \approx 0.997$

Quy tắc $k\sigma$



XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Quy tắc $k\sigma$

VD : Chỉ số thông minh (IQ), được đo bằng bài kiểm tra IQ Stanford-Binet, có phân phối chuẩn trong một tổng thể nào đó. IQ trung bình là 100 điểm, và độ lệch chuẩn là 16 điểm. Hỏi phần trăm số người trong tổng thể có IQ

a. từ 140 trở lên?
b. từ 80 trở xuống?
c. giữa 80 và 140?

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Định lý Moivre - Laplace

Cho X là một biến ngẫu nhiên nhị thức với các tham số n và p. Khi đó với các số a, b bất kì, $a < b$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}dt$$

Chú ý rằng $\mathbb{E}[X] = np$, $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.

Áp dụng: Định lý nói rằng khi n lớn ta có thể xấp xỉ phân phối nhị thức $B(n, p)$ bằng phân phối chuẩn $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Điều kiện áp dụng

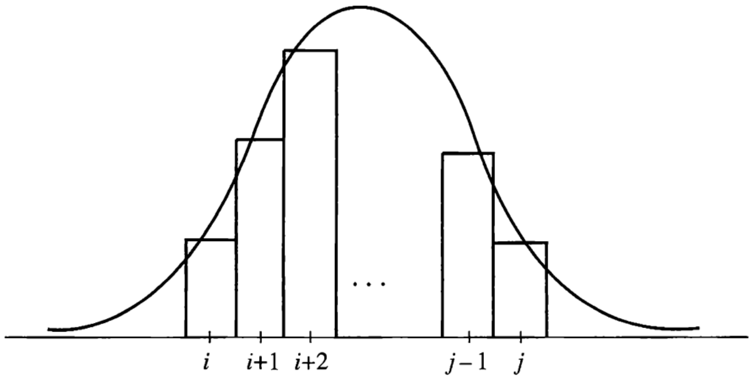
- Xác suất p không quá gần 0 hoặc 1, sao cho $0.1 < p < 0.9$.
- $np \geq 5$ và $np(1-p) \geq 5$.

Hiệu chỉnh liên tục (Correction for continuity): Vì X trong phân phối nhị thức là rời rạc nên khi tính xấp xỉ các giá trị xác suất của X bằng phân phối chuẩn ta đã chuyển sang một biến mới liên tục nên trong thực hành phải thực hiện phép hiệu chỉnh liên tục như sau:

$$P(X \leq x) = P(X < x + 0.5) \approx \Phi\left(\frac{x + 0.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X < x) = P(X < x - 0.5) \approx \Phi\left(\frac{x - 0.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

Hiệu chỉnh liên tục



XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

VD : Một xạ thủ có xác suất bắn trúng mục tiêu ở mỗi lần bắn là 0.8. Xạ thủ này bắn 64 phát vào bia. Tính xác suất

a) Có 50 phát trúng bia.
b) Có từ 45 đến 52 phát trúng bia.
c) Có không quá 51 phát trúng bia.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Phân phối chuẩn - tính chất

- Phân phối chuẩn là một trong những phân phối quan trọng nhất, được dùng để mô tả phân phối của nhiều biến ngẫu nhiên trong thực tế, như chiều cao/cân nặng của một người, tổng doanh thu của một công ty, điểm thi của sinh viên, sai số của một phép đo, v.v. Bên cạnh đó, định lý giới hạn trung tâm (central limit theorem) đã chứng tỏ rằng, phân phối chuẩn là phân phối xấp xỉ của nhiều phân phối khác như nhị thức, tổng các biến ngẫu nhiên độc lập, v.v.
- Một số tính chất của phân phối chuẩn:
  - Đồ thị có dạng như một cái chuông
  - Phân phối đối xứng
  - Trung bình = trung vị (median) = yếu vị (mode)
  - Vị trí của phân phối được xác định bởi kỳ vọng μ
  - Độ phân tán được xác định bởi độ lệch tiêu chuẩn σ
  - Xác định trên $\mathbb{R}$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Một số phân phối rời rạc
1.1 Phân phối Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$
1.2 Phân phối nhị thức $\mathcal{B}(n, p)$
1.3 Phân phối siêu bội $H(N, M, n)$
1.4 Phân phối Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
2. Một số phân phối liên tục
2.1 Phân phối đều
2.1 Phân phối mũ
2.3 Phân phối chuẩn hóa
2.4 Phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Một số ví dụ về phân phối chuẩn

Theo Borel nếu một biến ngẫu nhiên là kết quả của nhiều nguyên nhân, mỗi nguyên nhân tác động một ít và không có nguyên nhân nào là quyết định, thì biến ngẫu nhiên đó có phân phối chuẩn.
Vậy:

- Các số đo về đặc tính sinh học: chiều cao, cân nặng, huyết áp, nồng độ,. . . hầu như có phân phối chuẩn.
- Trong xã hội: lợi tức hàng năm, sản lượng một vụ mùa,. . . tuân theo phân phối chuẩn.
- Sai số trong đo lường về vật lí cũng có phân phối chuẩn.