Họ và tên: Nguyễn Văn Lộc
MSSV: 20120131

Bài tập tuần 5
Môn Toán ứng dụng và thống kê

Tìm SVD của các ma trận sau

a. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$A^{\mathrm{T}}A - \lambda I = \begin{bmatrix} 9-\lambda & -9 \\ -9 & 9-\lambda \end{bmatrix}.$$

$$\det\left(A^{\mathrm{T}}A - \lambda I\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 9-\lambda & -9 \\ -9 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 18\lambda = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 18 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

$\sigma_1 = 3\sqrt{2}, \sigma_2 = 0.$
Với $\lambda = 18$, biến đổi

$$A^{\mathrm{T}}A - 18I = \begin{bmatrix} -9 & -9 \\ -9 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

được không gian riêng $E_\lambda = span\left\{(1,-1)\right\}$. Suy ra

$$v_1 = \frac{1}{\|(1,-1)\|}(1,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Với $\lambda = 0$, biến đổi

$$A^{\mathrm{T}}A - 0I = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

được không gian riêng $E_\lambda = span\left\{(1,1)\right\}$. Suy ra

$$v_2 = \frac{1}{\|(1,1)\|}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Với hệ trực chuẩn $\{u_1\}$ trong $\mathbb{R}^3$, ta tìm được $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $u_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ sao cho $\mathrm{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.
Thành lập các ma trận

$$U = \left[\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array}\right].$$

$$V = \left[\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right].$$

$$\Sigma = diag\left(\sigma_1, \sigma_2\right) = \left[\begin{array}{cc} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right].$$

b. $A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right].$

$$A^{\mathrm{T}}A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right].$$

$$A^{\mathrm{T}}A - \lambda I = \left[\begin{array}{cc} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{array}\right].$$

$$\det\left(A^{\mathrm{T}}A - \lambda I\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{cc} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{array}\right| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}.$$

$\sigma_1 = \sqrt{3}, \sigma_2 = \sqrt{2}.$
Với $\lambda = 3$, biến đổi

$$A^{\mathrm{T}}A - 3I = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right],$$

được không gian riêng $E_\lambda = span\left\{(1,0)\right\}$. Suy ra

$$v_1 = \frac{1}{\|(1,0)\|}(1,0) = (1,0).$$

Với $\lambda = 2$, biến đổi

$$A^{\mathrm{T}}A - 2I = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right],$$

được không gian riêng $E_\lambda = span\left\{(0,1)\right\}$. Suy ra

$$v_2 = \frac{1}{\|(0,1)\|}(0,1) = (0,1).$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2}Av_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Với hệ trực chuẩn $\{u_1, u_2\}$ trong $\mathbb{R}^3$, ta tìm được $u_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ sao cho B $= \{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.
Thành lập các ma trận

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\Sigma = diag\left(\sigma_1, \sigma_2\right) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 4 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$A^{\mathrm{T}}A - \lambda I = \begin{bmatrix} 8-\lambda & 4 & -8 \\ 4 & 2-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 8-\lambda \end{bmatrix}.$$

$$\det\left(A^{\mathrm{T}}A - \lambda I\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 18\lambda^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 18 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

$\sigma_1 = 3\sqrt{2}, \sigma_2 = 0.$
Với $\lambda = 18$, biến đổi

$$A^{\mathrm{T}}A - 18I = \begin{bmatrix} -10 & 4 & -8 \\ 4 & -16 & -4 \\ -8 & -4 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

được không gian riêng $E_\lambda = span\left\{(2, 1, -2)\right\}$. Suy ra

$$v_1 = \frac{1}{\|(2,1,-2)\|}(2,1,-2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Với $\lambda = 0$, biến đổi

$$A^{\mathrm{T}}A - 0I = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -8 \\ 4 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

được không gian riêng $E_\lambda = span\left\{(-1, 2, 0), (1, 0, 1)\right\}$. Suy ra

$$v_2 = \frac{1}{\|(-1,2,0)\|}(-1,2,0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

$$v_3 = \frac{1}{\|(1,0,1)\|}(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Với hệ trực chuẩn $\{u_1\}$ trong $\mathbb{R}^2$, ta tìm được $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sao cho $\mathrm{B} = \{u_1, u_2\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$.
Thành lập các ma trận

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

$$\Sigma = diag\left(\sigma_1, \sigma_2\right) = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$