BÀI TẬP TOÁN TỔ HỢP 2021

<u>CHƯƠNG I:</u> ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ.

<u>1.1</u>/ Chứng minh rằng tại mọi thời điểm của một giải đấu cờ với n kỳ thủ $(n \geq 2)$ tham dự theo thể thức thi đấu vòng tròn một lượt, luôn luôn có ít nhất hai kỳ thủ có số ván đã thi đấu là bằng nhau.

<u>1.2</u>/ Chứng minh rằng trong một nhóm 6 người bất kỳ luôn luôn có ít nhất ba người quen biết nhau hay có ít nhất ba người không quen biết nhau.

1.3/ Đồ thị G có tối đa bao nhiêu đỉnh nếu G có 19 cạnh và mọi đỉnh có bậc ≥ 3 ?

1.4/ Tìm số đỉnh của G biết G là một đồ thị đầy đủ có m cạnh $(m \geq 1)$.

<u>1.5</u>/ Một nhóm gồm n người $(n \geq 4)$ thỏa tính chất " với 4 người bất kỳ trong nhóm thì luôn luôn có ít nhất một người quen biết với cả ba người còn lại ". Chứng minh rằng có ít nhất một người trong nhóm quen biết với tất cả $(n - 1)$ người còn lại của nhóm.

<u>1.6</u>/ Giả sử trong một giải bóng đá có n đội tham dự $(n \geq 4)$ theo thể thức đá vòng tròn một lượt, đã có $(n + 1)$ trận đấu được tiến hành. Chứng minh rằng có ít nhất một đội bóng đã thi đấu được ít nhất 3 trận.

1.7/ Tìm số đỉnh của một đồ thị có: a) 10 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng 4.

b) 12 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng 2.

c) 16 cạnh với 3 đỉnh có bậc bằng 5 và các đỉnh còn lại có bậc bằng 3 và 4.

d) 21 cạnh với 3 đỉnh có bậc bằng 4 và các đỉnh còn lại đều có bậc bằng 5.

e) 24 cạnh và tất cả các đỉnh có bậc bằng nhau.

<u>1.8</u>/ $G = (V, E)$ là đồ thị vô hướng có m cạnh và n đỉnh $(m \geq 0$ và $n \geq 1)$. Chứng minh:

a) Nếu $m < n$ thì G có ít nhất một đỉnh có bậc ≤ 1.

b) Nếu $m \geq n$ thì G có ít nhất một chu trình sơ cấp (dùng qui nạp theo $n \geq 1$).

c) Nếu $\forall v \in V, d(v) \geq 2$ thì G có ít nhất một chu trình sơ cấp.

1.9/ Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ và $\varnothing \neq A \subset V$. Đặt h là số đỉnh bậc lẻ trong A. Đặt k là số cạnh của G thỏa tính chất " cạnh có một đỉnh thuộc A và một đỉnh không thuộc A". Chứng minh $(h – k)$ là một số nguyên chẵn.

1.10/ $G = (V, E)$ là đồ thị liên thông có ít nhất 2 đỉnh. Chứng minh G có ít nhất 2 đỉnh không phải là đỉnh khớp.

1.11/ $G = (V, E)$ là đồ thị đơn có m cạnh, n đỉnh và p thành phần liên thông $(m \geq 0, n \geq 1, p \geq 1)$.

a) Chứng minh $(n – p) \leq m$ (qui nạp theo $n \geq 1$. Xét trước $p = 1$ rồi xét tiếp khi $p \geq 2$) và $m \leq 2^{-1}(n – p)(n – p + 1)$ (qui nạp theo $p \geq 1$).

b) Suy ra nếu $2m > (n – 1)(n – 2)$ thì G liên thông.

1.12/ Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có $| V | \leq 2k + 1$ và $\forall v \in V, d(v) \geq k$. Chứng minh $\forall a, b \in V$ $(a \neq b)$, có đường trong G với độ dài ≤ 2 nối a và b.

1.13/ Có $2k$ trạm điện thoại $(k \geq 1)$ sao cho mỗi trạm được nối trực tiếp với ít nhất k trạm khác. Chứng minh bất kỳ hai trạm nào cũng liên lạc được với nhau (trực tiếp hoặc qua trung gian một trạm khác).

1.14/ Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ với $| X | \geq 2$.

Ta nói $\overline{G} = (V, E')$ là đơn đồ thị vô hướng bù của G nếu

" $\forall i, j \in X$ $(i \neq j)$, i và j kề nhau trong G $\Leftrightarrow$ i và j không kề nhau trong $\overline{G}$ ".

Chứng minh G hay $\overline{G}$ liên thông.

Cho một ví dụ để thấy G và $\overline{G}$ có thể đồng thời liên thông.

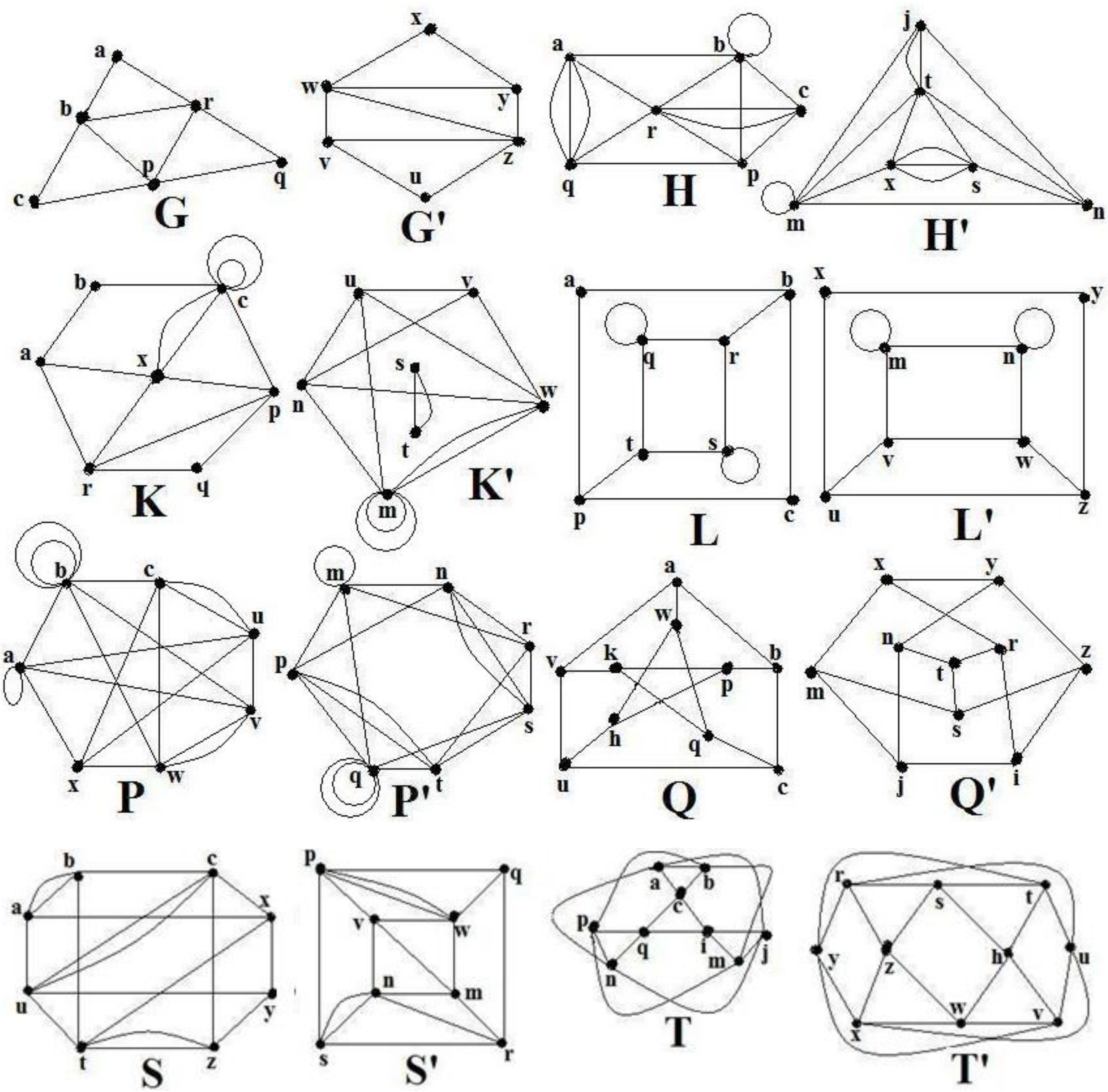
1.15/ Cho các đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ và $\overline{G} = (V, E')$ có $| E | = 15$ và $| E'| = 13$. Tính $| V |$.

1.16/ Cho G là đồ thị vô hướng liên thông có hai đường đi sơ cấp dài nhất và khác nhau. Chứng minh hai đường đó có ít nhất một đỉnh chung.

1.17/ Cho các đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ và $\overline{G} = (V, E')$ với $|X| = n \geq 2$ sao cho G đẳng cấu với $\overline{G}$. Tính $|E|$. Chứng minh có $k \geq 1$ thỏa $n = 4k$ hoặc $n = 4k + 1$.

1.18/ Cho đồ thị liên thông $G = (V, E)$ và $a \in V$. Chứng minh a là một điểm khớp của G nếu và chỉ nếu có $x, y \in V$ $(x \neq y)$ sao cho mọi đường trong G nối x và y đều phải đi qua a.

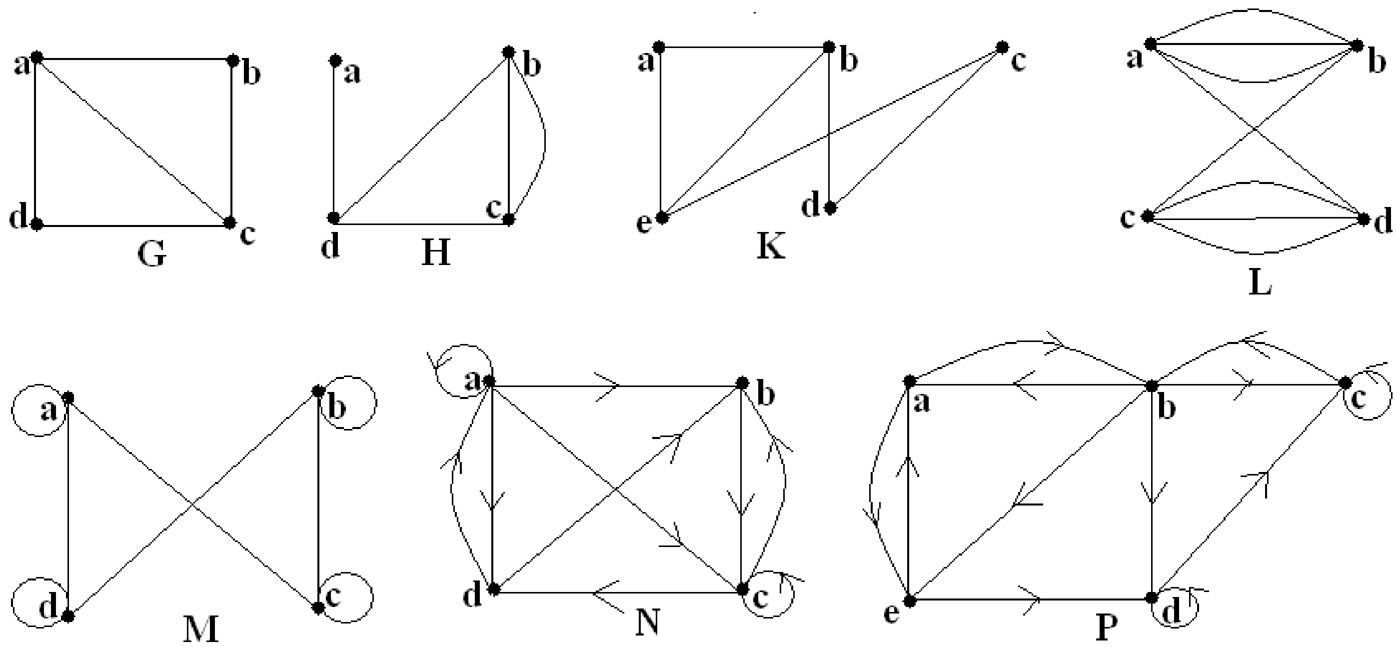
1.19/ Mỗi cặp đồ thị dưới đây (cặp G, G', cặp H, H', …) có đẳng cấu với nhau không ?



1.20/ Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ không có vòng thỏa $|V| \geq 2$ và $\forall v \in V, d(v) \geq 3$.

Chứng minh G có ít nhất một chu trình sơ cấp có độ dài chẵn.

1.21/ Viết ma trận kề và ma trận liên kết (nếu có) của các đồ thị dưới đây :

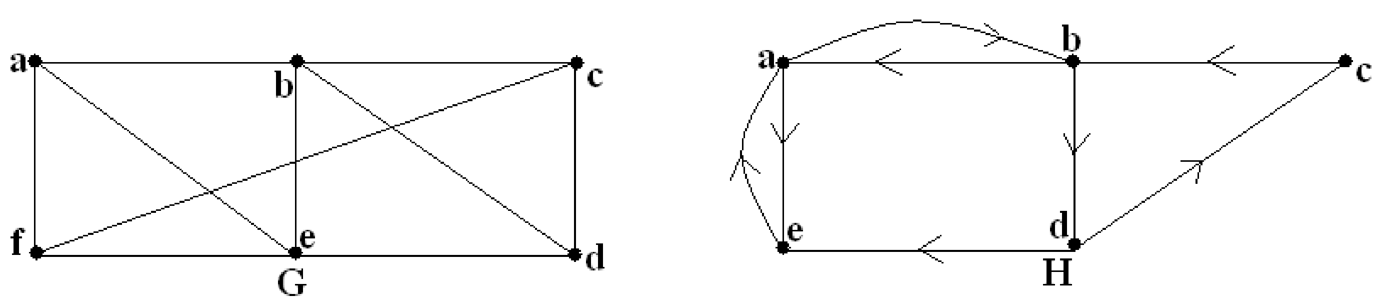


1.22/ Xét sự tồn tại của đồ thị vô hướng liên thông có 5 đỉnh với bậc lần lượt như dưới đây. Nếu có thì thử vẽ minh họa một trường hợp đơn, một trường hợp đa, một trường hợp giả có vòng và một trường hợp giả không có vòng. Nếu không có thì giải thich tại sao ?

a) 2, 3, 3, 3 và 3. b) 1, 2, 3, 4 và 4. c) 0, 1, 2, 2 và 3.

d) 1, 2, 3, 4 và 5. e) 3, 3, 3, 4 và 4. f) 2, 2, 3, 3 và 4.

1.23/ Cho các đồ thị G và H như sau:



a) Tìm số đường đi từ a đến b trong G có độ dài lần lượt là 2, 3, 4 và 5.

b) Tìm số đường đi từ c đến d trong H có độ dài lần lượt là 2, 3, 4 và 5.

1.24/ Cho các đồ thị vô hướng $G_i = (V_i = \{ v_1, v_2, \dots , v_i \}, E_i) \; [i = 2, 3, 4]$ với các ma trận kề lần lượt là

$$M_{G_1} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \; M_{G_2} = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ và } M_{G_3} = C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Tính A^k, B^k và C^k ($k = 2, 3, 4$).

b) Tìm số đường đi có độ dài lần lượt là 2, 3, 4 nối mỗi cặp đỉnh trong G_i ($i = 2, 3, 4$).
Suy ra độ dài ngắn nhất của đường nối mỗi cặp đỉnh trong G_i ($i = 2, 3, 4$).

c) Giải thích tính liên thông (hoặc rời rạc) của G_i ($i = 2, 3, 4$).

d) Vẽ phác họa (một trường hợp) cho mỗi đồ thị G_i ($i = 2, 3, 4$).

1.25/ Cho các đồ thị có hướng $G_i = (V_i = \{ v_1, v_2, \dots , v_i \}, U_i) \; [i = 2, 3, 4]$ với các ma trận kề lần lượt là

$$M_{G_1} = A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; M_{G_2} = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ và } M_{G_3} = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Tính A^k, B^k và C^k ($k = 2, 3, 4$).

b) Tìm số đường đi có độ dài lần lượt là 2, 3, 4 nối mỗi cặp đỉnh trong G_i ($i = 2, 3, 4$).
Suy ra độ dài ngắn nhất của đường nối mỗi cặp đỉnh trong G_i ($i = 2, 3, 4$).

c) Giải thích tính liên thông mạnh (hoặc không liên thông mạnh) của G_i ($i = 2, 3, 4$).

d) Vẽ phác họa (một trường hợp) cho mỗi đồ thị G_i ($i = 2, 3, 4$).

1.26/ Cho đồ thị có hướng $G = (V = \{ a, b, c \}, U)$ với ma trận kề là $M_G = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Chứng minh trong G không có đường nối a với c và không có đường nối b với c.

b) Vẽ phác họa (một trường hợp) cho đồ thị G.

1.27/ Vẽ đồ thị G nếu G có ma trận kề M_G lần lượt như sau :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

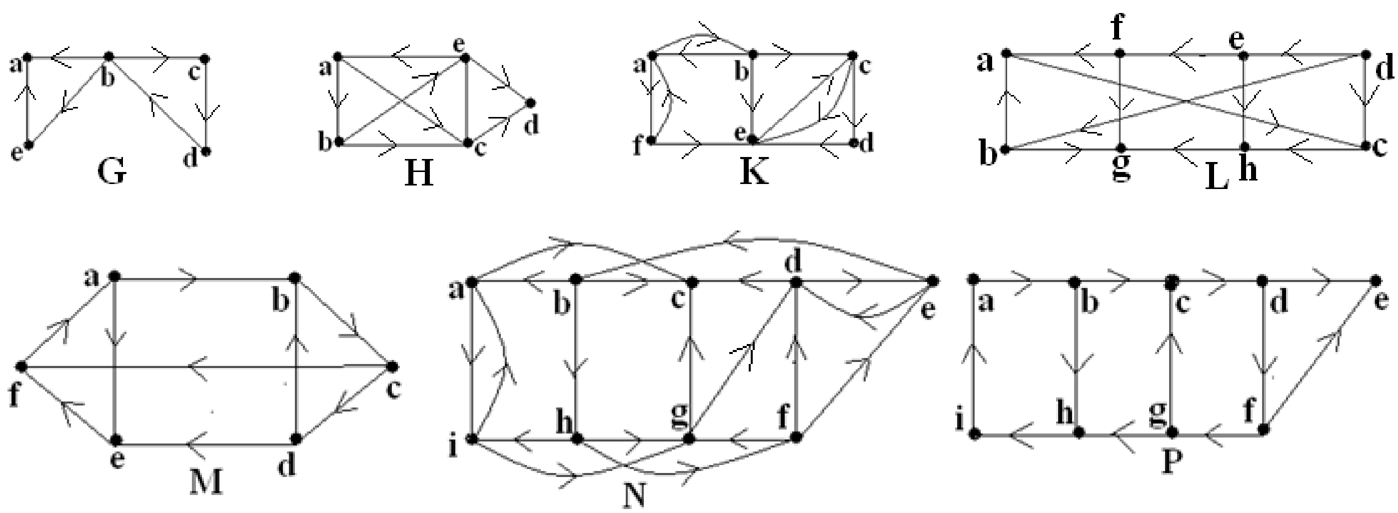
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.28/ Mỗi cặp đồ thị vô hướng có ma trận kề như sau có đẳng cấu với nhau không ? Tại sao ?

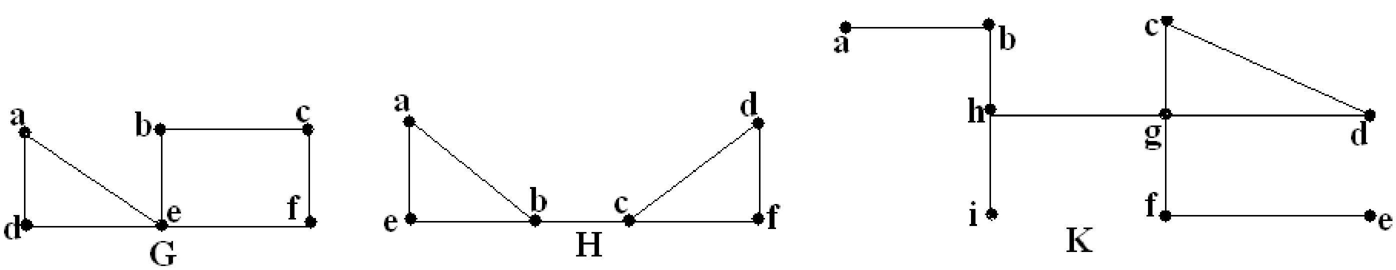
a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.29/ Các đồ thị nào dưới đây là liên thông mạnh ? Tại sao ? Nếu đồ thị nào không liên thông mạnh thì hãy xác định các thành phần liên thông mạnh của chúng.



1.30/ Xác định số liên thông đường và số liên thông cạnh của các đồ thị sau:



1.31/ Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ gồm 10 đỉnh a, b, c, d, e, f, g, h, i và j được biểu diễn theo danh sách kề như sau:

Đỉnh	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**
Đỉnh kề	d	d	h	b	g	a	c	g	h	a
Đỉnh kề	j	e		j	h	d	i	i		b
Đỉnh kề		f				g				

Tìm $d(v), \forall v \in V$ và viết ma trận kề M_G.

1.32/ Cho đơn đồ thị vô hướng $H = (V, E)$ gồm 10 đỉnh a, b, c, d, e, f, g, h, i và j được biểu diễn theo danh sách kề như sau:

Đỉnh	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**	**i**	**j**
Đỉnh kề	b	a,c	b	b,c	c	d	d	b	a	a
Đỉnh kề	i	d,h	d	e,f	d	e	f	d	b	b
Đỉnh kề	j	i,j	e,j	g,h	f	g	h	g,i	h,j	c,i

Tìm $d(v), \forall v \in V$ và viết ma trận kề M_H.

1.33/ Cho đồ thị có hướng $G = (V, E)$. Chứng minh $\sum_{v \in V} |d^+(v) - d^-(v)|$ là một số nguyên chẵn.

1.34/ Có bao nhiêu đơn đồ thị vô hướng không đẳng cấu với số đỉnh lần lượt là 2, 3 và 4 ?

1.35/ Có bao nhiêu đơn đồ thị có hướng không đẳng cấu với số đỉnh lần lượt là 2, 3 và 4 ?

1.36/ Có bao nhiêu đơn đồ thị vô hướng không đẳng cấu có (5 đỉnh và 6 cạnh) hoặc có (6 đỉnh và 4 cạnh) ?

1.37/ Có bao nhiêu đơn đồ thị vô hướng không đẳng cấu có 5 đỉnh và có (3 hoặc 4 cạnh) ?

1.38/ Xét sự tồn tại của đồ thị vô hướng liên thông có 6 đỉnh với bậc lần lượt như dưới đây. Nếu có thì thử vẽ minh họa một trường hợp đơn, một trường hợp đa, một trường hợp giả có vòng và một trường hợp giả không có vòng. Nếu không có thì giải thich tại sao ?

a) 0, 1, 2, 3, 4, 5. b) 1, 1, 1, 3, 3, 3. c) 3, 3, 3, 3, 3, 5. d) 2, 2, 2, 3, 3, 3.

e) 1, 2, 3, 4, 5, 6. f) 2, 2, 2, 2, 3, 3. g) 1, 2, 3, 4, 5, 5. h) 1, 2, 3, 3, 4, 5.

i) 2, 2, 2, 2, 2, 2. j) 1, 1, 1, 1, 1, 1. k) 1, 2, 2, 2, 2, 5. l) 2, 2, 2, 4, 4, 4.

<u>1.39</u>/ Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$. chứng minh rằng :

a) Nếu G có đúng hai đỉnh bậc lẻ a và b thì có đường (P) nối a và b trong G.

b) Nếu G có đỉnh bậc lẻ c thì G sẽ có ít nhất một đỉnh bậc lẻ d ($d \neq c$) sao cho có đường (P) nối c và d trong G.

<u>1.40</u>/ Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có $|V| = n \geq 2$. Chứng minh G liên thông nếu:

a) $\forall a, b \in V$ $(a \neq b)$, $d(a) + d(b) \geq n$. b) $\forall a \in V$, $d(a) \geq (n / 2)$.

<u>1.41</u>/ Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ liên thông có $|V| = n \geq 2$.

Chứng minh $\forall a, b \in V$ $(a \neq b)$, có đường sơ cấp (P) nối a và b trong G.

<u>CHƯƠNG II:</u> ĐỒ THỊ DẠNG CÂY.

2.1/ Vẽ cây $G = (V, E)$ nếu G tồn tại (nếu không tồn tại thì giải thích tại sao ?) trong các trường hợp sau: a) $|V| = 4, 5$ hoặc 6. b) $|V| = 8$ và mọi đỉnh có bậc 1.

c) $|V| = 8$ và mọi đỉnh có bậc 2. d) $|V| = 8$, G có 6 đỉnh bậc 2 và 2 đỉnh bậc 1.

e) $|V| = 8$, G có 1 đỉnh bậc 7 và 7 đỉnh bậc 1.

2.2/ Cho các cây $T_i = (V_i, E_i)$ với $n_i = |V_i|$ và $m_i = |E_i|$ $(i = 1, 2)$.

Tính n_1, n_2 và m_2 nếu biết $m_1 = 17$ và $n_2 = 2n_1$.

<u>2.3</u>/ a) G là một đồ thị vô hướng có m cạnh, n đỉnh và p thành phần liên thông ($m \geq 0$, n ≥ 1, p ≥ 1). Chứng minh G là một rừng khi và chỉ khi $m - n + p = 0$.

b) G là một rừng có 7 cây và 40 cạnh. Tính số đỉnh của G.

2.4/ a) T = (V, E) là một cây với $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$. Chứng minh số đỉnh treo của T là

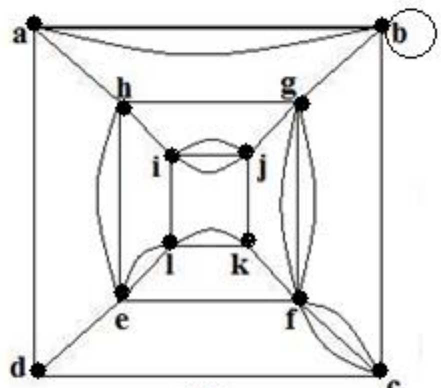
$$2 + \sum_{i=1}^{n}[\deg(v_i) - 2](\deg(v_i) \geq 3) \ .$$

b) G là một cây có một đỉnh bậc 3, hai đỉnh bậc 4, một đỉnh bậc 5 và các đỉnh còn lại có bậc ≤ 2. Tính số đỉnh treo của G.

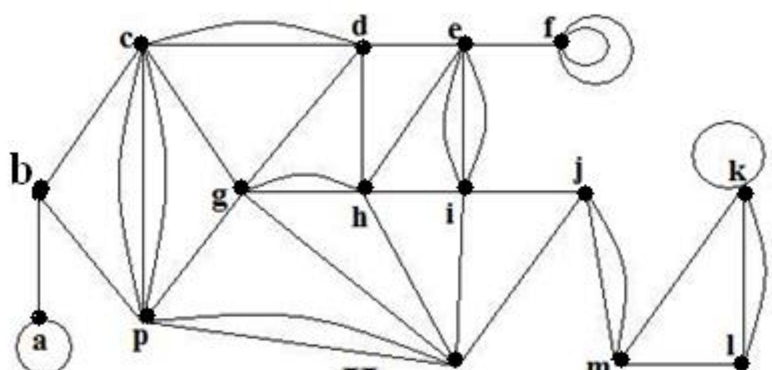
2.5/ a) T là một cây k_phân đủ có chiều cao bằng h. Tính số đỉnh trong tối đa của T.

b) T là một cây tứ phân đủ có chiều cao bằng 8. Tính số đỉnh trong tối đa của T.

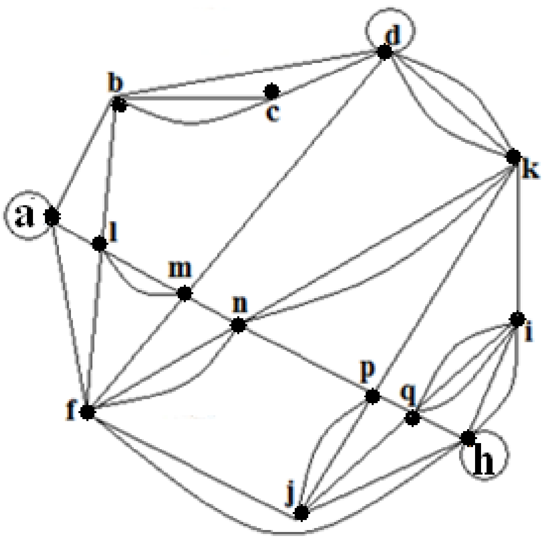
2.6/ Xác định cây khung của các đồ thị G, H, K và L bằng các thuật toán WFS và DFS:



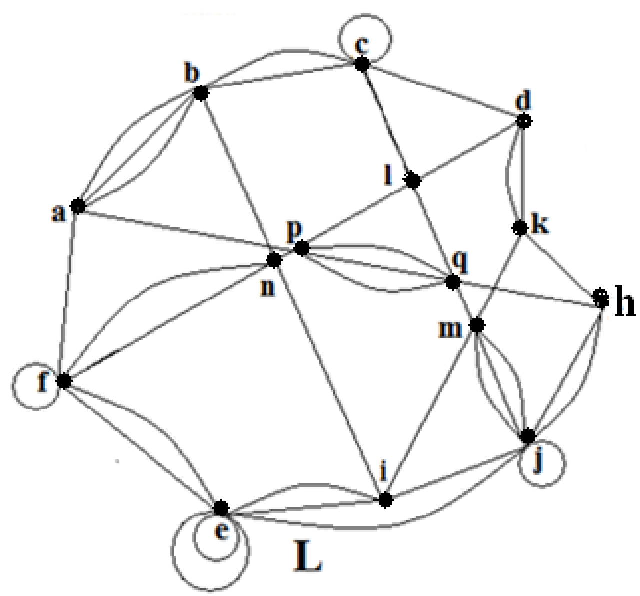
G



H



K



L

2.7/ Một cây nhị phân cân bằng có chiều cao h và số đỉnh tối thiểu của nó là n_h . Tính n_o , n_1 , n_2 và n_3. Chứng minh $\forall h \geq 1, n_h = h + 2$.

2.8/ a) T là một cây k_phân đủ có m đỉnh trong. Chứng minh T có (km + 1) đỉnh. Suy ra số cạnh và số lá của T.

b) T là một cây tam phân đủ có 34 đỉnh trong. Tính số đỉnh, số cạnh và số lá của T.

c) T là một cây ngũ phân đủ có 817 lá. Tính số đỉnh, số đỉnh trong và số cạnh của T.

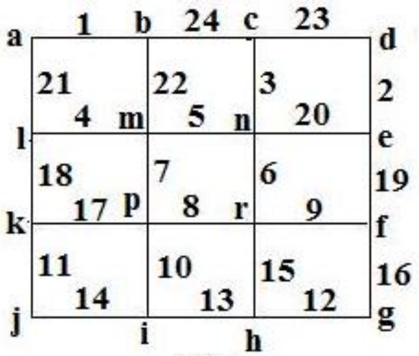
2.9/ Một một cây k_phân đủ có chiều cao bằng h được gọi là một cây k_phân đầy nếu mọi lá của nó đều ở mức h.

a) Tìm số lá, số đỉnh trong và số cạnh của một cây nhị phân đầy có chiều cao h lần lượt là 3, 5, 7 và 12.

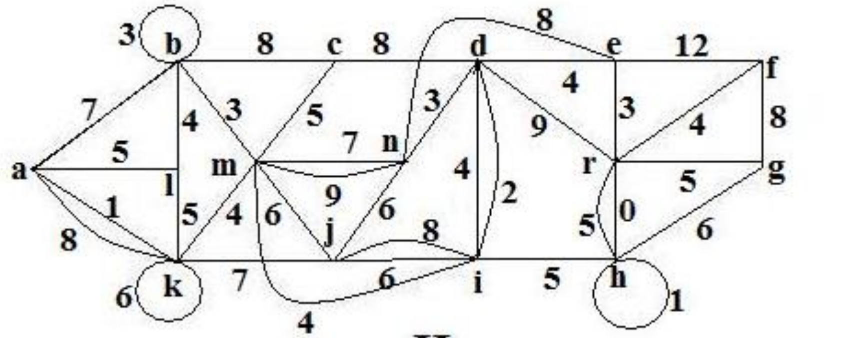
b) Tìm số đỉnh trong của một cây k_ phân đầy có chiều cao $h = 7$ và có 279.936 lá.

2.10/ Vẽ một cây nhị phân đủ có 4 đỉnh trong, 5 lá và có chiều cao bằng 3.

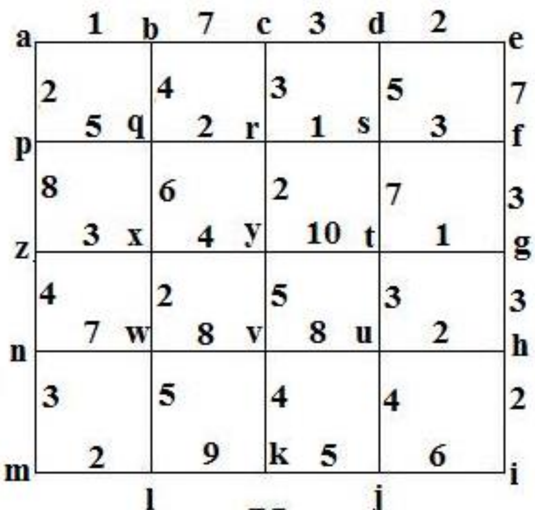
2.11/ Dùng thuật toán Prim và Kruskal cho các đồ thị G, H, K và L dưới đây để tìm:



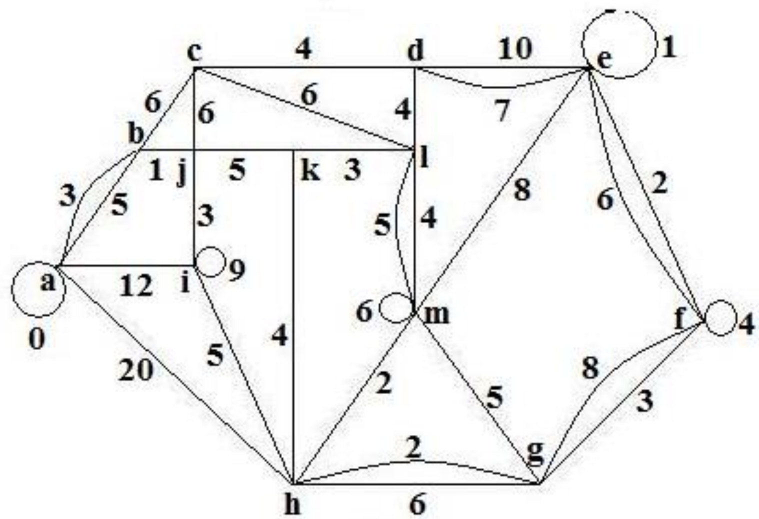
G



H



K



L

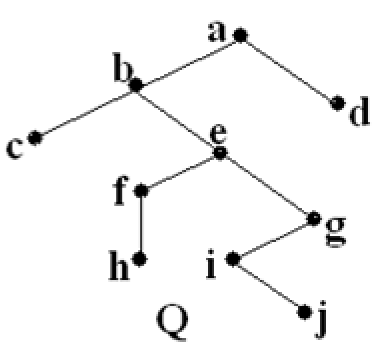
a) MST và M'ST của G .

b) MST của H có chứa cạnh $\overline{ef}$ và M'ST của H không chứa cạnh $\overline{dr}$.

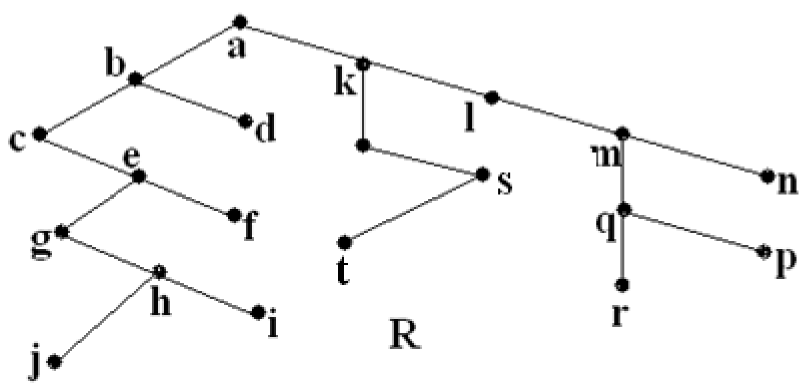
c) M'ST của K có chứa cạnh $\overline{ab}$ và MST của K không chứa cạnh $\overline{gt}$.

d) MST của L không chứa cạnh $\overline{bj}$ nhưng có chứa cạnh $\overline{ah}$.

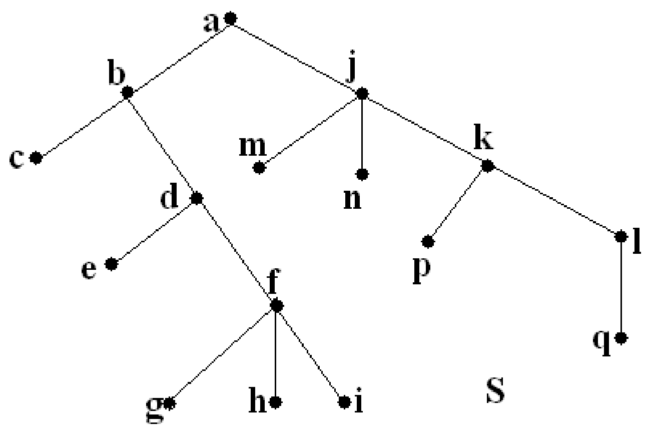
2.12/ Hãy duyệt các cây dưới đây bằng các thuật toán tiền thứ tự, trung thứ tự và hậu thứ tự:

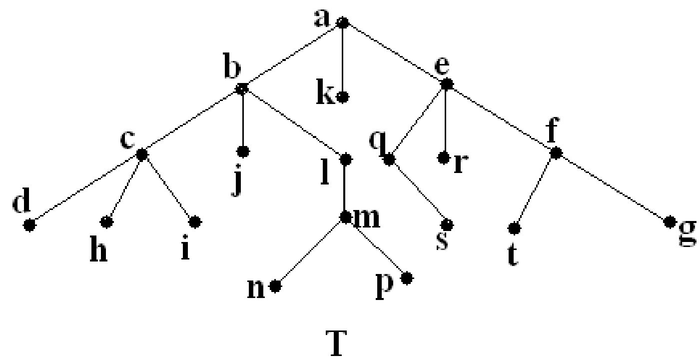


Q



R





2.13/ Viết các biểu thức sau bằng ký pháp Ba Lan và ký pháp Ba Lan nghịch đảo rồi vẽ cây nhị phân tương ứng với biểu thức của chúng:

a) (w + x – y) / (πx^3). b) n^{n^2} (mn – q). c) { [(a + b)c + d]e } – [(a + b)c + d].

2.14/ Tính giá trị của các biểu thức sau (được viết bằng ký pháp Ba Lan):

a) + 4 / * 2 3 + 1 – 9 ^ 2 3 b) / ^ 2 – 4 2 + 2 * 2 4

2.15/ Tính giá trị của các biểu thức sau (được viết bằng ký pháp Ba Lan nghịch đảo):

a) 1 2 + 3 4 * 1 1 / – – 2 * b) 1 2 1 2 * + * 4 * c) 1 4 2 3 4 * – + *

2.16/ Cho đồ thị liên thông G = (V, E).

a) Giả sử | V | = 13. Tìm số đỉnh và số cạnh của cây khung của G.

b) Chứng minh G có chứa chu trình $\Leftrightarrow$ | V | ≤ | E |.

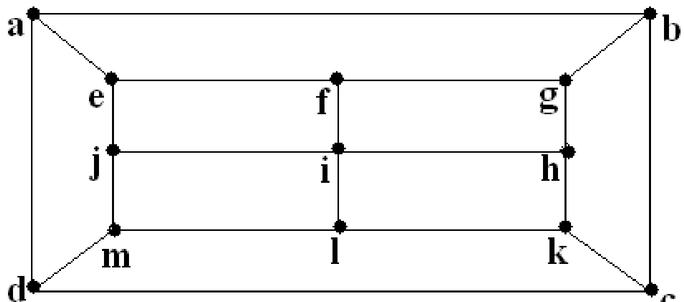
Cho ví dụ một đồ thị rời rạc có chứa chu trình nhưng có số đỉnh nhiều hơn số cạnh.

c) Giả sử G không có vòng và chỉ có một cây khung. Chứng minh G là một cây.

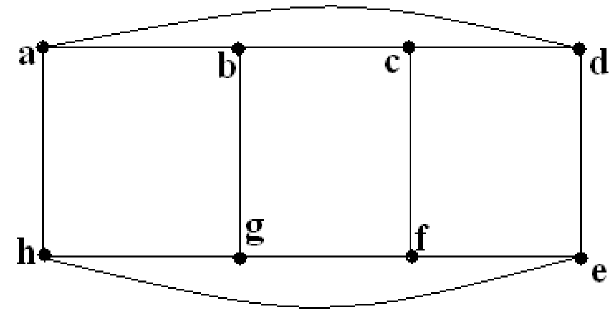
2.17/ a) T là cây có ít nhất 2 đỉnh. Chứng minh T là một đồ thị lưỡng phân.

b) Cho G là đồ thị vô hướng. Chứng minh G là đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi G không có chu trình nào hoặc mọi chu trình của G đều có độ dài chẵn.

2.18/ Các đồ thị sau có phải là đồ thị lưỡng phân không ? Tại sao ? Nếu là đồ thị lưỡng phân thì hãy phân hoạch tập hợp đỉnh thành hai phần riêng đặc trưng cho đồ thị lưỡng phân.



G



H

2.19/ Cho cây G = (V, E) có các đồ thị con liên thông $G_i = (V_i, E_i)$ (i = 1, 2).

a) Giải thích $G_i = (V_i, E_i)$ (i = 1, 2) là các cây.

b) Giả sử $E_3 = (E_1 \cap E_2) \neq \emptyset$. Chứng minh $V_3 = (V_1 \cap V_2) \neq \emptyset$ và $G_3 = (V_3, E_3)$ là cây.

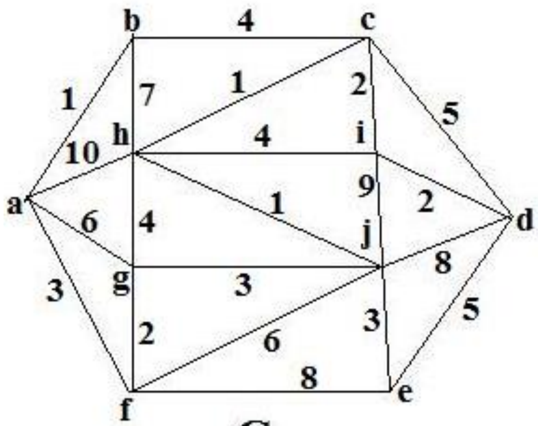
<u>2.20</u>/ Cho G = (V, E) liên thông và có trọng số.

a) Giả sử trong các cạnh không là vòng của G, có duy nhất một cạnh có trọng số nhỏ nhất (hay *lớn nhất*) Chứng minh mọi cây khung nhỏ nhất (MST) [hay *lớn nhất* (M’ST)] của G đều phải đi qua cạnh này.

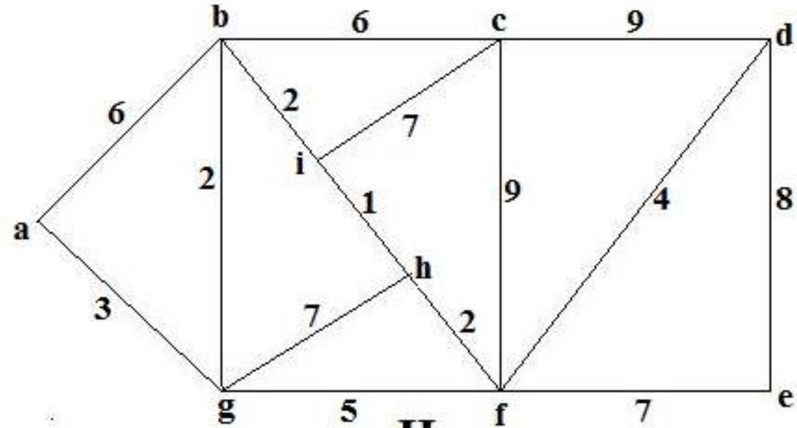
b) Giả sử trọng số của các cạnh của G đều khác nhau. Chứng minh rằng G có duy nhất một cây khung nhỏ nhất và một cây khung lớn nhất.

<u>CHƯƠNG III:</u> CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH

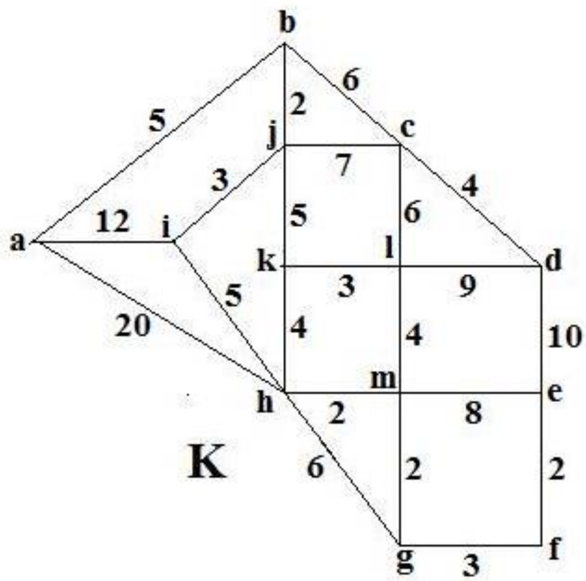
3.1/ Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến các đỉnh khác của các đồ thị liên thông sau rồi vẽ cây khung tương ứng với đường đi đó:


a b c d e f g h i j
1 4 7 1 2 10 4 5 6 4 1 9 2 3 8 3 2 6 3 5 8

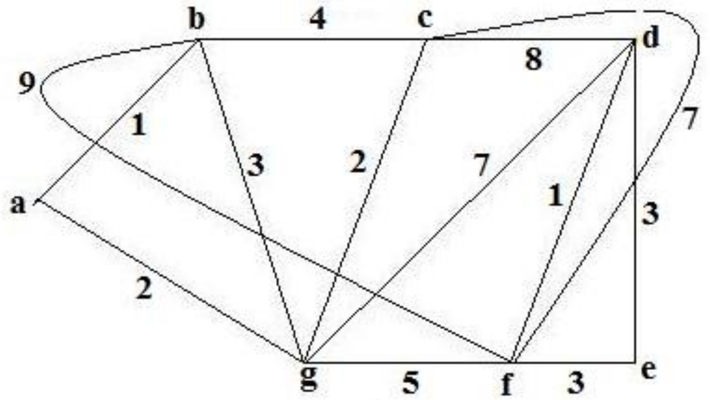
G


a b c d e f g h i
6 6 9 2 2 7 1 9 4 8 3 7 2 5 7

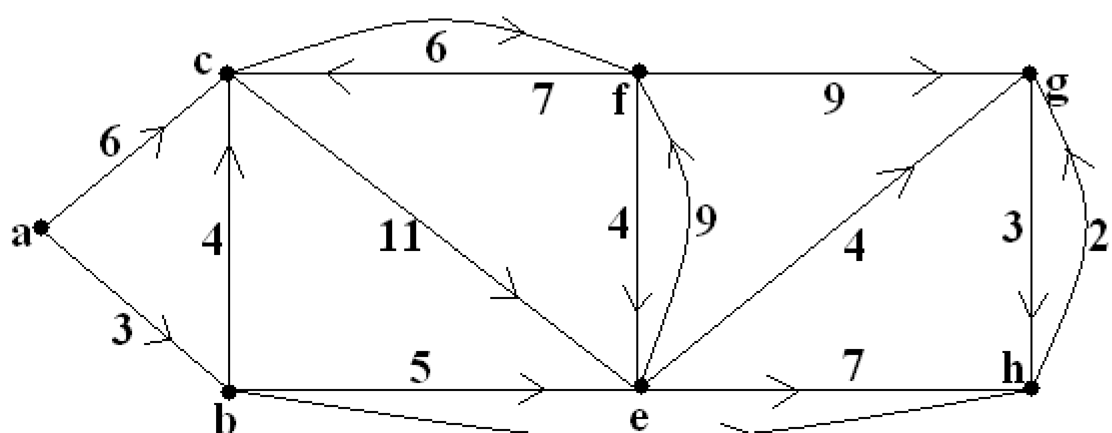
H


a b c d e f g h i j k l m
5 2 6 12 3 7 4 5 6 3 9 20 5 4 4 10 2 8 6 2 2 3

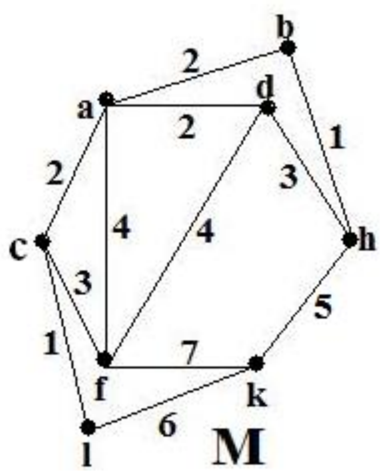
K

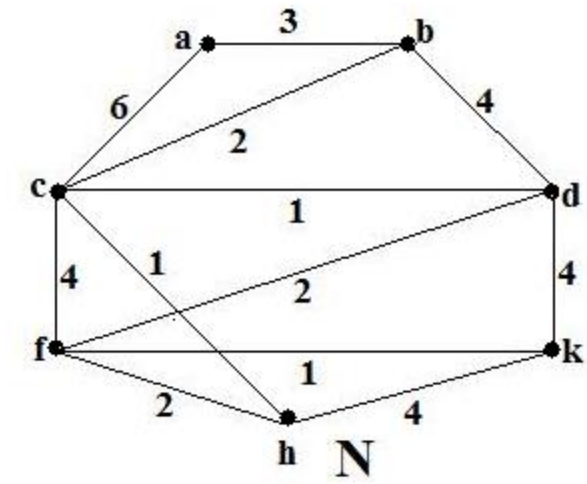

a b c d e f g
4 8 9 1 7 3 2 7 1 3 2 5 3

L

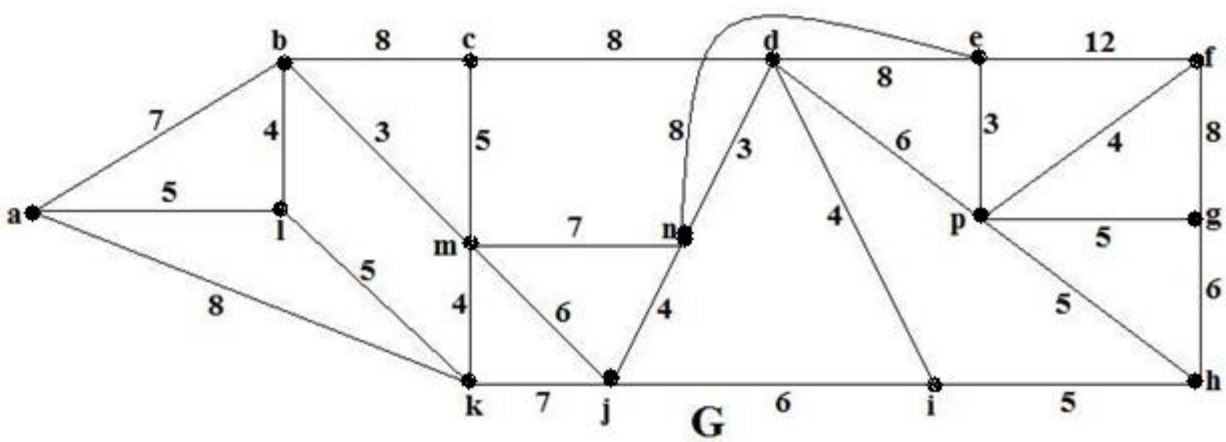

a b c d e f g h
6 7 9 6 4 11 4 9 4 3 2 3 5 7 12

P





3.2/ Cho đơn đồ thị liên thông có trọng số G dưới đây :



a) Tìm đường đi ngắn nhất trong G nối a và g. Vẽ đường đó và tính trọng số của nó.

b) Yêu cầu như câu a) sao cho đường này phải đi qua e.

c) Yêu cầu như câu a) sao cho đường này phải đi qua cạnh $\overline{di}$.

d) Yêu cầu như câu a) sao cho đường này không đi qua cạnh $\overline{al}$.

<u>3.3</u>/ Vẽ các đồ thị liên thông G và H có các ma trận trọng số tương ứng như sau: (các đỉnh lần lượt là a, b, c, e và f):

a) $D_G = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 0 & \infty \\ 7 & 5 & \infty & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $D_H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & 0 & -9 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 3 & 3 \\ 3 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Hãy chỉ ra đồ thị nào có mạch âm hoặc tìm đường đi ngắn nhất giữa các cặp đỉnh.

3.4/ Vẽ đồ thị có liên thông G có ma trận trọng số (các đỉnh lần lượt là a, b, c, e, f, g và h):

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & 9 & 10 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 15 & 5 & 16 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 0 & \infty & 1 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 & \infty & 10 \\ \infty & 12 & \infty & \infty & \infty & 0 & 7 \\ \infty & \infty & 18 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh h trong G mà

a) Không có yêu cầu gì thêm. b) đi qua e. c) không đi qua f. d) đi qua cạnh $\overline{fe}$.

<u>3.5</u>/ Tìm một ví dụ để thấy thuật toán DIJKSTRA không thể dùng cho đồ thị có trọng số âm.

<u>3.6</u>/ Vẽ các đồ thị liên thông G và H có các ma trận trọng số tương ứng như sau (các đỉnh lần lượt là a, b, c, e, f, g, h và đồ thị 6 đỉnh sẽ không có đỉnh h):

a) $D_G = \begin{pmatrix} 0 & 6 & \infty & \infty & 2 & 1 & \infty \\ \infty & 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & 8 \\ 7 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$.

b) $D_H = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -4 & \infty & 2 & \infty \\ 8 & \infty & 0 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 5 & 3 & 0 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & -9 & 0 & \infty \\ \infty & -2 & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Hãy chỉ ra đồ thị nào có mạch âm hoặc tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến các đỉnh khác rồi vẽ cây khung thể hiện đường đi tương ứng.

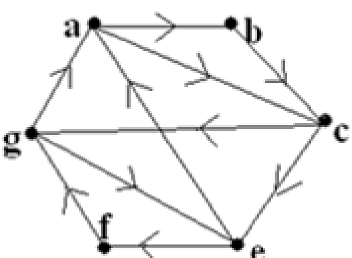
3.7/ Trên một bàn cờ $p \times q$ $(p, q \geq 3)$, có các hình chữ nhật 2×3 và 3×2 khác nhau. Quân mã chỉ được phép đi theo dạng từ đầu này đến đầu kia của một đường chéo trong một hình chữ nhật 2×3 hoặc 3×2 nào đó).

a) Xuất phát từ ô $(1,1)$, thực hiện tất cả các nước đi của một quân mã trên bàn cờ 3×4 để đi qua tất cả các ô mỗi ô một lần (không yêu cầu phải quay về ô xuất phát).

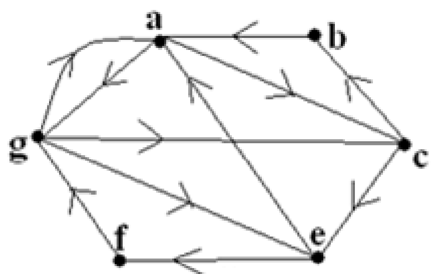
b) Xuất phát từ ô $(3,3)$, thực hiện tất cả các nước đi của một quân mã trên bàn cờ 5×5 để đi qua tất cả các ô mỗi ô một lần (không yêu cầu phải quay về ô xuất phát).

<u>3.8</u>/ Một giải bóng bàn với n đấu thủ ($n \geq 2$) tham dự theo thể thức thi đấu vòng tròn một lượt. Chứng minh rằng khi giải đấu kết thúc, ta có thể sắp xếp các đấu thủ thành một hàng dọc sao cho người đứng trước đã thắng người đứng sau kế tiếp.

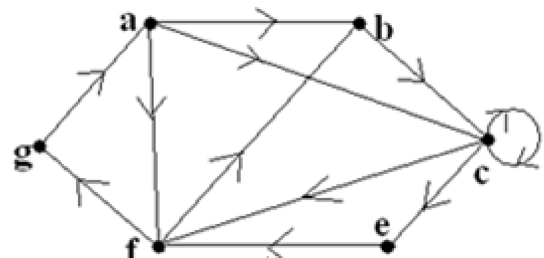
3.9/ Nếu đồ thị nào dưới đây có chu trình hay đường Euler thì xác định chúng theo thuật toán FLEURY. Giải thích rõ các trường hợp không có cả chu trình lẫn đường Euler.



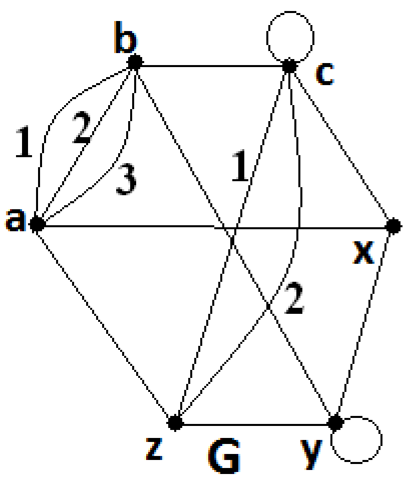
L



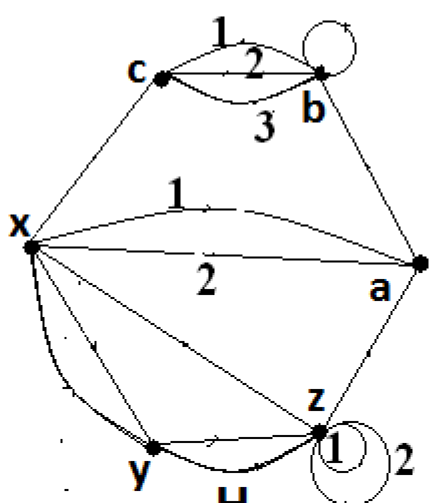
M



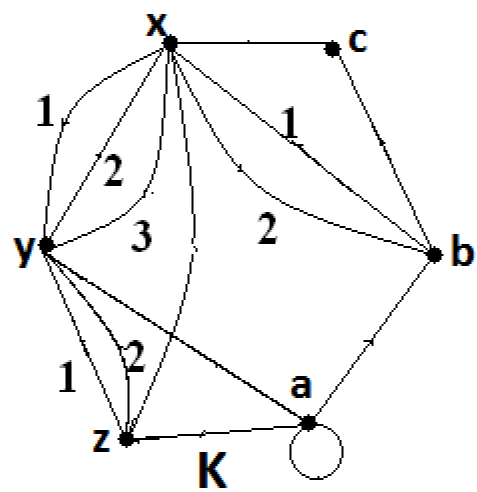
N



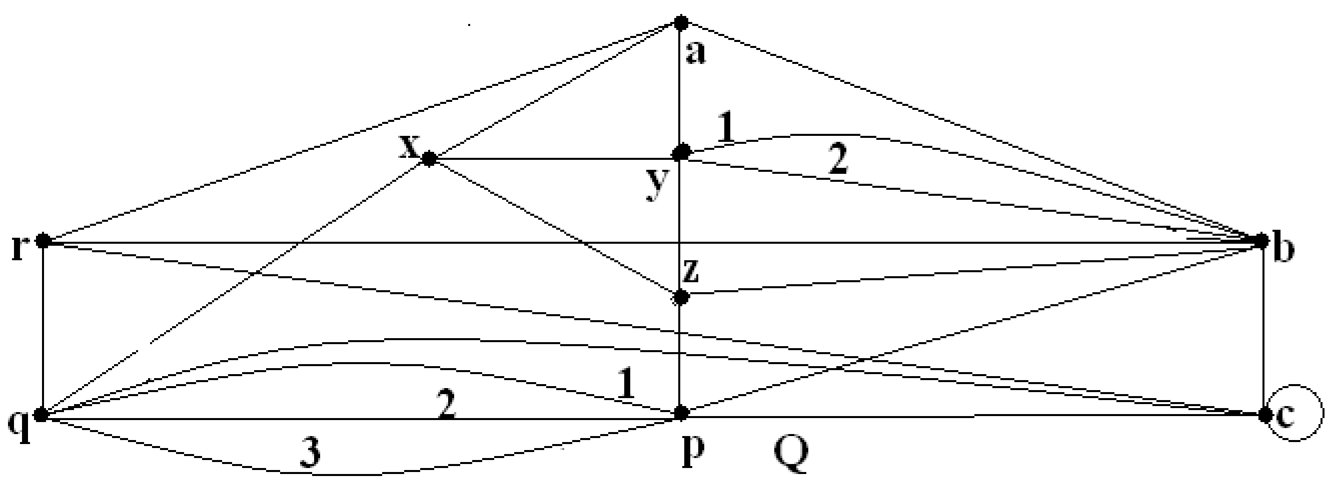
G



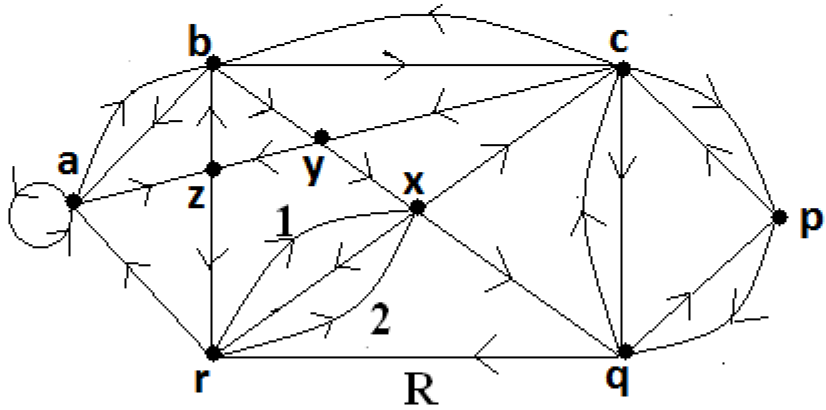
H



K

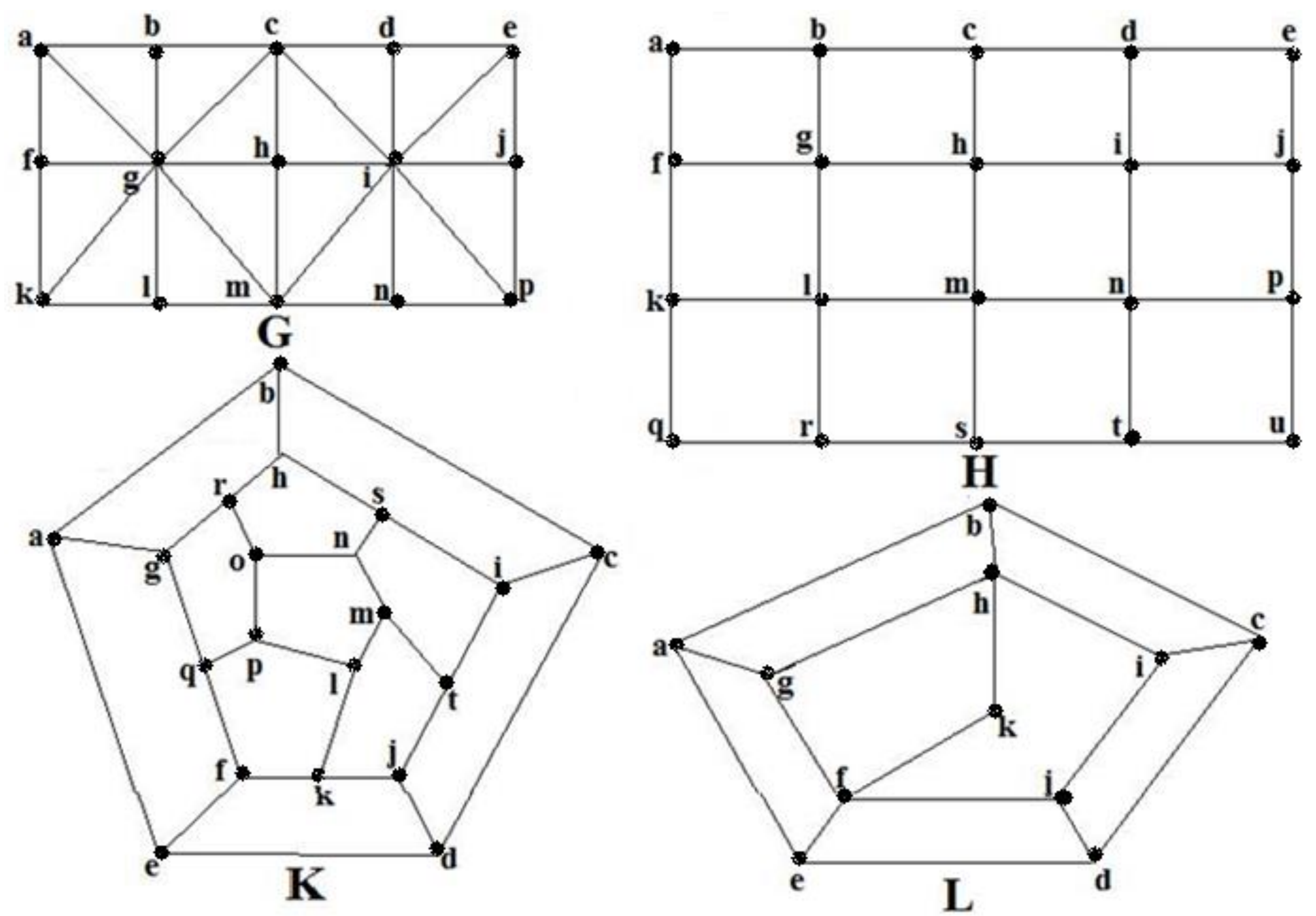


Q

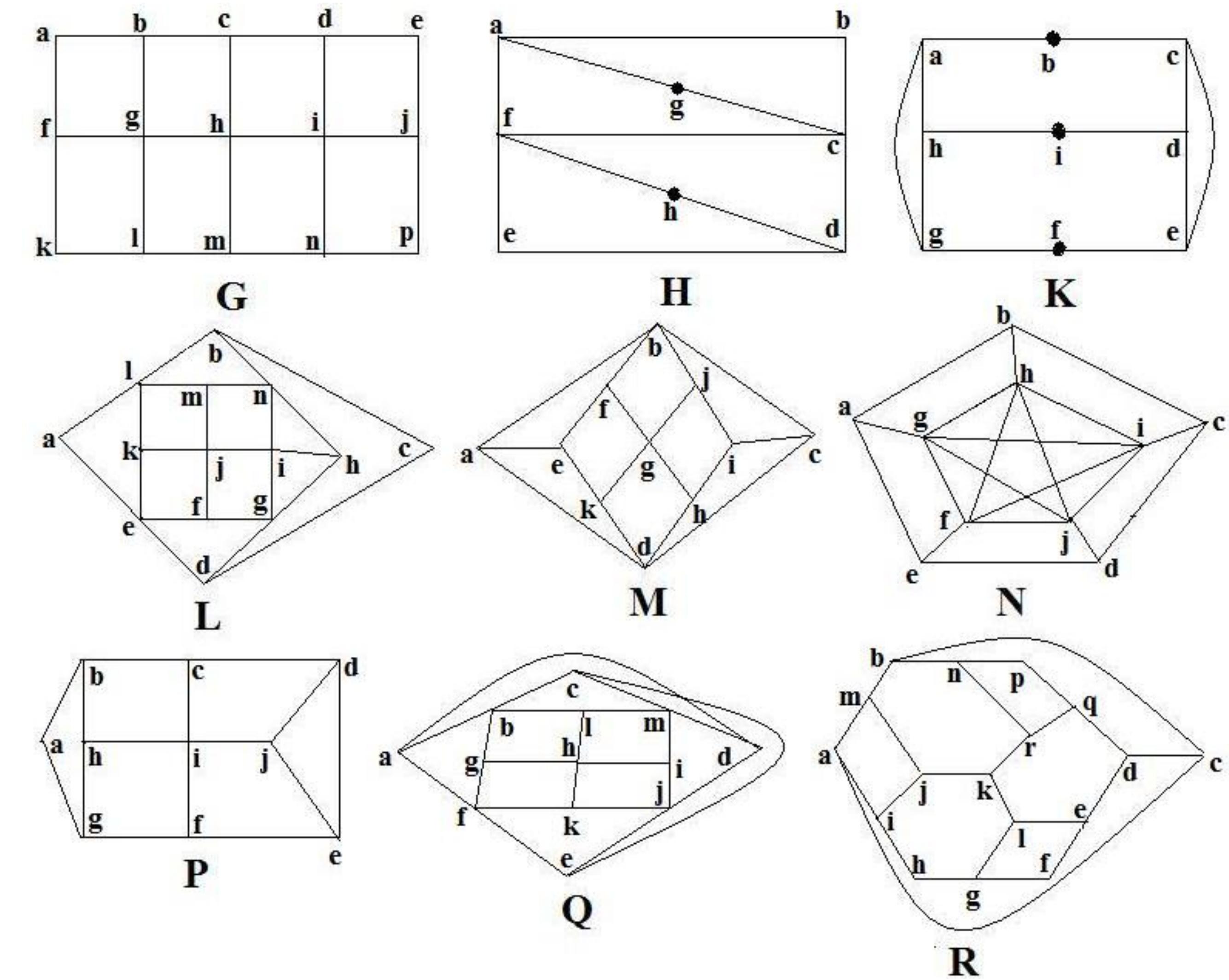


<u>3.10</u>/ Làm tương tự như bài **6.7** cho bàn cờ 8×8 với ô xuất phát và kết thúc đều là ô (1,1).

3.11/ a) Xác định một chu trình Hamilton và một đường Hamilton của các đồ thị sau:



b) Tìm một đường Hamilton và giải thích sự không tồn tại của chu trình Hamilton cho các đồ thị dưới đây:



3.12/ Vẽ các đồ thị G và H có các ma trận kề tương ứng như sau: (các đỉnh lần lượt là a, b, c, e, f, g và đồ thị 9 đỉnh sẽ có thêm các đỉnh h, i, j). Đồ thị nào có chu trình hay đường Euler ? Tại sao ? Nếu có thì xác định chúng theo thuật toán FLEURY.

a) $M_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $M_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.13/ Cho 10 quân cờ domino (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5) và (4,5).

Có thể xếp đúng luật chơi domino các quân cờ này trên một vòng tròn không ? Tại sao ?

3.14/ Cho $G = (V_1, V_2)$ là đồ thị lưỡng phân có chu trình Hamilton. Chứng minh $|V_1| = |V_2|$.

Suy ra không có chu trình Hamilton trong đồ thị lưỡng phân có số đỉnh là số lẻ.

CHƯƠNG IV: HÀM SINH.

4.1/ Tìm các hàm sinh có hệ số a_k $(k \geq 0)$ với a_k là số nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = k$ trong đó $0 \leq e_i \leq 5$ $(1 \leq i \leq 5)$.

b) $e_1 + e_2 + e_3 = k$ trong đó $0 < e_i < 6$ $(1 \leq i \leq 3)$.

c) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$ trong đó $2 \leq e_i \leq 7$ $(1 \leq i \leq 4)$, e_1 chẵn và e_2 lẻ.

d) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$ trong đó $e_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq 4)$.

e) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$ trong đó $e_i > 0$ $(1 \leq i \leq 4)$, e_2 lẻ ≤ 3 và e_4 lẻ.

4.2/ Tìm các hàm sinh có hệ số a_k $(k \geq 0)$ với a_k là số cách chọn k viên bi từ:

a) bốn loại bi.

b) 5 viên bi đỏ, 5 viên bi đen và 4 viên bi trắng.

c) sáu loại bi trong đó số bi loại một và số bi loại hai là số lẻ.

4.3/ Tìm các hàm sinh có hệ số a_k $(k \geq 0)$ với a_k là số cách xếp k vật giống nhau vào:

a) 5 hộp khác nhau sao cho mỗi hộp có ít nhất 3 vật.

b) 3 hộp khác nhau sao cho mỗi hộp có từ 3 đến 6 vật.

c) 4 hộp khác nhau sao cho mỗi hộp có nhiều nhất 5 vật.

4.4/ Dùng hàm sinh để tính số tổ hợp lặp chọn 5 mẫu tự từ 4 mẫu tự M, A, T, H sao cho T và H xuất hiện không quá một lần.

4.5/ Dùng hàm sinh để tính số cách xếp 16 viên kẹo giống nhau vào 4 hộp sao cho mỗi hộp có ít nhất 3 viên.

4.6/ Tìm hàm sinh có hệ số a_k $(k \geq 0)$ với a_k là số các số nguyên từ 0 đến 99999 có tổng các chữ số bằng k.

4.7/ Tìm các hàm sinh có hệ số a_k $(k \geq 0)$ với a_k là số nghiệm nguyên của các phương trình sau đây:

a) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$ trong đó $-3 \leq e_i \leq 3$ $(1 \leq i \leq 4)$.

b) $e_1 + e_2 + e_3 = k$ trong đó $e_1 \geq -2$, $2 \leq e_2 \leq 6$ và $e_3 \geq 0$.

4.8/ Tìm một hàm sinh có hệ số a_k $(k \geq 0)$ với a_k là số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$ trong đó $0 \leq e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq e_4$.

4.9/ Tìm một hàm sinh có hệ số a_k $(k \geq 0)$ để tính số cách chọn 5 số khác nhau từ các số 1, 2, 3,…, k sao cho không có hai số nguyên liên tiếp nhau trong 5 số đã chọn. Tính a_{20}.

4.10/ Tìm hệ số của x^{12} trong:

a) $(1-x)^{18}$. b) $(1-4x)^{-5}$. c) $(1+x)^{-8}$. d) $(1+x^3)^{-4}$.

4.11/ Tìm hệ số của x^{11} trong: a) $x^4(1-3x)^{-3}$. b) $x^3(1+4x)^{-2}$.

c) $x^2(1-x)^{-10}$. d) $(x+3)(1-x)^{-2}$. e) $x(x-3)(1-x)^{-4}$. f) $(1-x^2)^2(1+2x)^{-5}$.

4.12/ Tìm hệ số đứng trước: a) x^{10} trong $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$ $(n \geq 1)$.

b) x^k trong $(x^5 + x^6 + x^7 + \cdots)^8$ $(k \geq 40)$. c) x^7 trong $(1 + x^2 + x^4)(1+x)^n$ $(n \geq 3)$.

d) x^{16} trong $(x + x^2 + \cdots + x^5)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^5$. e) x^{17} trong $(x^2 + x^3 + \cdots + x^7)^3$.

f) x^{47} trong $(x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{25})(x + x^2 + \cdots + x^{15})(x^{20} + x^{21} + \cdots + x^{45})$.

g) x^{32} trong $(x^3 + x^4 + \cdots + x^7)^7$. h) x^{24} trong $(x + x^2 + \cdots + x^5)^8$.

i) x^{16} trong $(x + x^2 + \cdots + x^7)^4$. j) x^{36} trong $(x^2 + x^3 + \cdots + x^8)^5$.

k) x^{28} trong $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^9$. l) x^{18} trong $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)^6$.

m) x^{25} trong $(1 + x^3 + x^8)^{10}$.

4.13/ Dùng các hàm sinh để tính số cách chọn 10 quả bóng từ 3 loại bóng trắng, đỏ và xanh sao cho: a) mỗi loại bóng được chọn ít nhất 2 quả.

b) có không quá 2 quả bóng đỏ. c) số quả bóng xanh là số nguyên chẵn.

4.14/ Tìm một hàm sinh có hệ số a_k $(k \geq 0)$ với a_k là số phân hoạch của k thành:

a) các số nguyên chẵn dương. b) các số nguyên dương lẻ khác nhau.

4.15/ Nhóm bạn 20 người tặng 15 xe đạp cho các học sinh nghèo. Người thứ nhất có thể tặng một xe hoặc 5 xe hoặc không tặng gì cả. Mỗi người trong những người còn lại có thể tặng nhiều nhất là một xe. Hỏi có bao nhiêu cách quyên tặng 15 xe đạp ?

4.16/ Tìm một hàm sinh có hệ số a_k $(k \geq 0)$ với a_k là số phân hoạch của k thành các số nguyên dương sao cho mỗi số xuất hiện không quá 3 lần.

4.17/ Tìm một hàm sinh có hệ số a_k $(k \geq 0)$ với a_k là số nghiệm nguyên của phương trình $2x + 3y + 7z = k$ trong đó:

a) x, y và $z \geq 0$. b) $0 \leq z \leq 2 \leq y \leq 8 \leq x$.

4.18/ Có bao nhiêu cách đổi một tờ giấy bạc 50\$ thành các tờ 1\$, 2\$, 5\$, 10\$ và 20\$?

4.19/ Tìm một hàm sinh mũ có hệ số a_k $(k \geq 0)$ với a_k là số cách sắp xếp k người vào 6 căn phòng khác nhau sao cho số người của mỗi phòng là 2, 3 hoặc 4.

4.20/ Có bao nhiêu chuỗi tam phân (chỉ dùng các chữ số 0, 1, 2) có độ dài k $(k \geq 0)$ sao cho:

a) số các chữ số 0 là chẵn ? b) số các chữ số 0 và số các chữ số 1 đều chẵn ?

c) có xuất hiện các chữ số 0 và 1 ? d) không có chữ số nào xuất hiện đúng 2 lần ?

4.21/ Có bao nhiêu chuỗi tứ phân (chỉ dùng các chữ số 0, 1, 2, 3) có độ dài k $(k \geq 0)$ sao cho số các chữ số 0 và số các chữ số 1 đều chẵn ?

4.22/ Có bao nhiêu chuỗi ký tự có chiều dài k $(k \geq 0)$ được tạo bởi các mẫu tự a, b, c, d và e sao cho:

a) số lần xuất hiện của a là chẵn ? b) số lần xuất hiện của a và b đều là lẻ ?

4.23/ Có bao nhiêu cách chia 8 cuốn sách khác nhau cho 4 đứa trẻ sao cho đứa lớn nhất được ít nhất 2 cuốn ?

4.24/ Tìm các hàm sinh mũ có hệ số: a) $a_k = (1 + k)^{-1}$, $\forall k \geq 0$. b) $a_k = k!$, $\forall k \geq 0$.

4.25/ Tìm một hàm sinh mũ có hệ số a_k $(k \geq 0)$ với a_k là số cách sắp xếp k vật khác nhau vào 5 hộp thỏa $b_1 \leq b_2 \leq 4$ trong đó b_i là số vật được xếp vào hộp thứ i $(1 \leq i \leq 5)$.

4.26/ Chứng minh $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $e^{x+y} = e^x.e^y$ bằng cách khai triển đồng thời e^x và e^y.

4.27/ Sử dụng hàm sinh để tính các tổng số sau: a) $s_k = 0 + 1 + 2 + \cdots + k, \forall k \geq 0$.

b) $s_k = 7 + 10 + \cdots + (3k + 7), \forall k \geq 0$. c) $s_k = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2, \forall k \geq 1$.

d) $s_k = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \cdots + k(k + 1)(k + 2)(k + 3), \forall k \geq 1$.

4.28/ Tìm các hàm sinh có hệ số:

a) $a_k = k(k + 2), \forall k \geq 0$. b) $a_k = (k - 1)^2$, $\forall k \geq 0$. c) $a_o = 0$ và $a_k = k^{-1}, \forall k \geq 1$.

4.29/ Tìm các hàm sinh mũ có hệ số: a) $a_k = 2, \forall k \geq 0$. b) $a_k = (-1)^k, \forall k \geq 0$.

c) $a_k = 3k, \forall k \geq 0$. d) $a_k = k + 1, \forall k \geq 0$. e) $a_k = (-2)^k, \forall k \geq 0$.

f) $a_k = k(k - 1), \forall k \geq 0$. g) $a_k = (k + 1)^{-1}(k + 2)^{-1}, \forall k \geq 0$.

4.30/ Tìm hệ số của x^k $(k \geq 0)$ trong các hàm sinh sau đây:

a) $F(x) = e^{3x} - 3e^{2x}$. b) $F(x) = e^{-2x} - (1 - x)^{-1}$. c) $F(x) = e^{-3x} - (1 + x) + (1 - 2x)^{-1}$.

d) $F(x) = 2e^{-3x + 1}$. e) $F(x) = e^{x^2}$. f) $F(x) = xe^{x} - e^{x^3}$.

4.31/ Cho $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} x^k$ và $h(x) = f(x).g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{k!} x^k$.

Chứng minh rằng $\forall k \geq 0$, $c_k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a_i b_{k-i}$.

4.32/ Dùng hàm sinh để giải các hệ thức đệ qui sau đây: a) $a_o = 1$ và $a_n = a_{n-1} + 2$, $\forall n \geq 1$.

b) $a_o = 5$ và $a_n = 7a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. c) $a_o = 1$ và $a_n = a_{n-1} + n(n - 1), \forall n \geq 1$.

d) $a_o = 1$ và $a_n = 3a_{n-1} + 4n - 1, \forall n \geq 1$. e) $a_o = 1$ và $a_n = 2a_{n-1} + 2^n, \forall n \geq 1$.

4.33/ Dùng hàm sinh để giải các hệ thức đệ qui sau đây:

a) $a_o = a_1 = 1$ và $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$.

b) $a_o = 6, a_1 = 30$ và $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$.

c) $a_o = 4$, $a_1 = 12$ và $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n$, $\forall n \geq 2$.

d) $a_o = 2$, $a_1 = 5$ và $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2$, $\forall n \geq 2$.

e) $a_o = 20$, $a_1 = 60$ và $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 4^n + 6$, $\forall n \geq 2$.

f) $a_o = 0$, $a_1 = 1$ và $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3n$, $\forall n \geq 2$.

CHƯƠNG V: NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ.

5.1/ Tung một đồng xu 8 lần liên tiếp. Tính xác suất để mặt ngửa xuất hiện ít nhất 2 lần.

5.2/ Một lớp học có 50 nam và 60 nữ. Có bao nhiêu cách chọn 20 học sinh của lớp mà trong đó có cả nam lẫn nữ ?

5.3/ Chọn một số nguyên dương bất kỳ ≤ 10000. Tính xác suất để số đó chẵn hay số đó chia hết cho 7.

5.4/ Có bao nhiêu chuỗi số gồm 5 chữ số hệ thập phân mà trong đó:

a) chữ số 0 xuất hiện đúng một lần và không có chữ số nào xuất hiện đúng 3 lần ?

b) không có chữ số nào xuất hiện đúng 2 lần ?

5.5/ Trong một cuộc khảo sát phương tiện đi lại của 150 người, ta thấy 83 người có xe hơi, 97 người có xe máy, 28 người có xe đạp, 53 người có xe hơi lẫn xe máy, 14 người có xe hơi lẫn xe đạp, 7 người có xe máy lẫn xe đạp và 2 người có đủ 3 loại xe nói trên.

a) Có bao nhiêu người chỉ có xe đạp ?

b) Có bao nhiêu người chỉ có xe hơi và xe máy ?

c) Có bao nhiêu người không có chiếc xe nào cả ?

5.6/ Tính xác suất để tổng số nút xuất hiện khi tung liên tiếp 5 lần một con xúc sắc bằng 20.

5.7/ Khi thăm dò ý kiến khán giả về các ca sĩ X, Y, Z, ta thấy có 45% thích X, 50% thích Y, 60% thích Z, 35 % thích X và Y, 35 % thích X và Z, 35 % thích Y và Z, 25% thích cả ba ca sĩ. Hỏi tỉ lệ phần trăm số khán giả:

a) chỉ thích X ? b) chỉ thích đúng 2 trong 3 ca sĩ nói trên ? c) không thích ai cả ?

5.8/ Có bao nhiêu phép hoán vị σ trên các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 và 6 thỏa $\sigma(1) = 2$ hay $\sigma(3) = 4$ hay $\sigma(5) = 6$?

5.9/ Có bao nhiêu số nguyên dương $n \leq 20.000$ thỏa: a) n không chia hết cho 2, 3 và 5 ?

b) $(n, 44.100) = 1$? c) $(n, 347.633) = 1$?

5.10/ $\forall n \in \mathbf{N^*}$, đặt $\varphi(n) = \{ k \in \mathbf{N^*} \mid k \leq n$ và $(k, n) = 1 \}$(φ gọi là hàm phi Euler).

Tính $\varphi(50)$, $\varphi(420)$, $\varphi(5.187)$ và $\varphi(12.300)$.

5.11/ Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ nếu:

a) $0 \leq x_i < 8$ $(1 \leq i \leq 4)$. b) $-5 \leq x_i \leq 10$ $(1 \leq i \leq 4)$.

c) $0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 6$, $3 \leq x_3 \leq 7$ và $3 \leq x_4 \leq 8$.

5.12/ Có bao nhiêu số nguyên dương $n \leq 9.999.999$ sao cho tổng các chữ số hệ thập phân của n bằng 31?

5.13/ Một bài thi có 10 câu hỏi với tổng số điểm là 100. Có bao nhiêu cách phân chia điểm cho 10 câu hỏi ấy biết rằng:

a) Mỗi câu được ít nhất 5 điểm và nhiều nhất được 15 điểm?

b) Mỗi câu có số điểm là 5 hoặc 10 hoặc 15 ?

5.14/ Có bao nhiêu cách cắm 15 bông hoa vào 5 cái bình sao cho mỗi bình có ít nhất một bông và có nhiều nhất 4 bông với giả thiết:

a) các bông hoa giống hệt nhau ? b) các bông hoa đều khác nhau ?

5.15/ Tung 8 hột xúc xắc khác nhau cùng một lúc. Tính xác suất để cả 6 mặt 1, 2, 3, 4, 5, 6 đều xuất hiện.

5.16/ Có bao nhiêu chuỗi tam phân (dùng các chữ số 0, 1, 2) có độ dài 4 sao cho:

a) có đầy đủ 0, 1, 2 ? b) 1 xuất hiện đúng 2 lần ? c) 1 xuất hiện ít nhất 2 lần ?

5.17/ Có bao nhiêu chuỗi tam phân $x_1x_2\ldots x_n$ (dùng các chữ số 0, 1, 2) có độ dài n $(n \geq 2)$

sao cho $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ thỏa $x_i = x_{i+1}$?

5.18/ Cho từ abdefgimnorstwy (15 mẫu tự). Hỏi có bao nhiêu phép hoán vị của các mẫu tự trong trên mà không chứa các từ **bad**, **gift**, **snowy** và **friend** ?

5.19/ Có bao nhiêu các xếp các chữ số 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 thành một chuỗi ký tự gồm 9 mẫu tự mà không chứa **111**, **222** và **333** (chẳng hạn như 132231312, …) ?

5.20/ Có bao nhiêu phép hoán vị trên các mẫu tự của từ INFORMATION (*) sao cho bất cứ hai mẫu tự kề nhau nào trong (*) chỉ xuất hiện không quá một lần sau khi hoán vị ? (chẳng hạn ta không nhận phép hoán vị INFORINMOTA (**) vì hai mẫu tự kề nhau IN xuất hiện 2 lần trong (**).

5.21/ Có bao nhiêu phép hoán vị trên các mẫu tự của từ TAMELY sao cho T đứng trước A *hay* A đứng trước M *hay* M đứng trước E ?

5.22/ Có bao nhiêu phép hoán vị trên các mẫu tự của từ MATHEMATICS sao cho T luôn đứng trước A *hay* A luôn đứng trước M *hay* M luôn đứng trước E ?

5.23/ Có bao nhiêu phép hoán vị trên các mẫu tự của từ CORRESPONDENTS sao cho:

a) hai mẫu tự kề nhau phải khác nhau ?

b) Có đúng hai cặp mẫu tự dạng XX xuất hiện (chẳng hạn CO**RR**EOT**SS**PNDEN) ?

c) Có ít nhất ba cặp mẫu tự dạng XX xuất hiện (chẳng hạn CO**RR**EOT**SS**PDE**NN**) ?

5.24/ Rút ngẫu nhiên 13 lá bài từ một bộ bài có 52 lá. Tính xác suất để trong 13 lá bài được rút có:

a) đủ 4 dạng cơ, rô, chuồn và bích xuất hiện.

b) đúng ba dạng xuất hiện. c) đúng hai dạng xuất hiện.

5.25/ Có bao nhiêu cách chia 10 cuốn sách khác nhau cho 4 sinh viên sao cho:

a) có đúng hai sinh viên nhận được sách ?

b) có nhiều nhất là hai sinh viên nhận được sách ?

5.26/ a) Tính số song ánh f từ $A = \{1, 2, \ldots, 6, 7\}$ vào A sao cho có $a \in A$ thỏa $f(a) = a$.

Suy ra số song ánh f từ $A = \{ 1, 2, \ldots, 6, 7 \}$ vào A thỏa $f(a) \neq a, \forall a \in A$.

b) Tổng quát hóa kết quả trên cho các song ánh từ $X = \{ 1, 2, \ldots, n \}$ vào X.

5.27/ a) 10 bài kiểm tra được trả lại ngẫu nhiên cho 10 sinh viên (mỗi người nhận một bài). Tính xác suất để không có sinh viên nào nhận đúng bài của mình.

b) Tổng quát hóa bài toán trong trường hợp n bài thi trả lại ngẫu nhiên cho n sinh viên trong lớp (mỗi người nhận một bài và n là số nguyên dương bất kỳ).

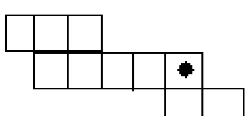
5.28/ Cho $| X | = m \geq | Y | = n$ ($m, n \in \mathbf{N^*}$). Tính số toàn ánh và số ánh xạ không toàn ánh từ X vào Y.

5.29/ Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 công việc khác nhau cho 5 người sao cho mỗi người đều nhận làm ít nhất một việc và mỗi việc đều có đúng một người nhận làm ?

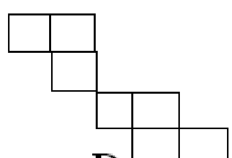
5.30/ Có bao nhiêu ánh xạ f từ $A = \{ 1, 2, \ldots, 9, 10 \}$ vào $B = \{ 1, 2, \ldots, 6, 7 \}$ thỏa

a) $| f(A) | = 4$? b) $| f(A) | \leq 4$?

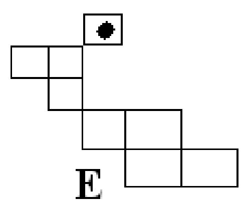
5.31/ Tìm đa thức quân Xe cho các bàn cờ C, D, E và F dưới đây:



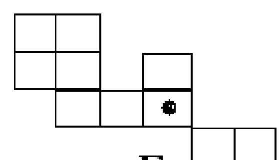
C



D



E



F

5.32/ Tính số song ánh f từ $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ vào X ($n \geq 2$) thỏa $f(i) \neq i + 1, \forall i \in X \setminus \{n\}$.

5.33/ Tính số cách sắp 4 người khách A, B, C và D ngồi vào 5 cái bàn a, b, c, d và e sao cho A không ngồi vào bàn a và b, B không ngồi vào bàn b, C không ngồi vào bàn c và d, D không ngồi vào bàn d và e.

5.34/ Các người nam A, B, C, D, E và các người nữ a, b, c, d cùng đăng ký tìm bạn trăm năm ở một văn phòng giới thiệu hôn nhân. Chuyên viên văn phòng biết rằng a không hợp với B và C, b không hợp với C, c không hợp với A và E, còn d thì không hợp với B. Hỏi văn phòng có bao nhiêu cách giới thiệu hôn nhân thích hợp ?

5.35/ Một đội bóng chuyền có các cầu thủ A, B, C, D, E và F được xếp vào các vị trí 1, 2, 3, 4, 5 và 6 ở trên sân. Huấn luyện viên biết A chơi yếu ở các vị trí 1 và 2, B và E đều chơi yếu ở vị trí 4, C chơi yếu ở các vị trí 1 và 5, D chơi yếu ở vị trí 2, còn F thì chơi yếu ở các vị trí 4 và 6.

Hỏi huấn luyện viên có bao nhiêu cách sắp xếp đội hình thi đấu hợp lý ở trên sân ?

5.36/ Các công nhân A, B, C, D, E, F và G được giao các công việc a, b, c, d, e, f và g (mỗi người nhận đúng một việc). Người giao việc biết rằng A không làm được các việc b và c, B không làm được các việc a và e, D không làm được các việc c và f, E không làm được các việc b và g, còn G không làm được việc d.

Hỏi người giao việc có bao nhiêu cách phân công việc hợp lý ?

5.37/ An tung một hột xúc xắc đỏ và một hột xúc xắc đen cùng một lúc và tung cặp hột xúc xắc đó tất cả 6 lần. Biết rằng các cặp số (1,2), (2,1), (2,5), (3,4), (4,1), (4, 5) và (6,6) đã không xuất hiện sau 6 lần tung [viết (x, y) nghĩa là mặt có x chấm xuất hiện trên hột xúc xắc đỏ và mặt có y chấm xuất hiện trên hột xúc xắc đen trong một lần tung].

Tính xác suất để tất cả các mặt 1, 2, 3, 4, 5 và 6 đều xuất hiện ở mỗi hột xúc xắc.

5.38/ Thầy giáo tặng các món quà a, b, c, d và e cho các học sinh A, B, C, D và E bằng hình thức bốc thăm. Biết rằng A và E đều không nhận được a và c, B không nhận được d, C không nhận được b và e, còn D thì không nhận được b. Tính xác suất để:

a) A nhận được e. b) B hoặc E nhận được e.

<u>CHƯƠNG VI:</u> CÁC SỐ ĐẾM NÂNG CAO.

6.1/ a) Tính C_7, C_8, C_9 và C_{10} theo hai cách (tính trực tiếp và dùng công thức đệ qui).

b) Tính S_n^2 (n = 6, 7, 8, 9, 10), S_n^{n-1} (n = 5, 6, 7, 8, 9, 10) và S_n^3 (n = 7, 8, 9, 10).

6.2/ Có bao nhiêu cách phân tích các số nguyên dương 30.030, 4.849.845, 74.364.290, 1.293.938.646 và 28.651.498.590 thành tích của 4 số nguyên ≥ 2 ?

6.3/ a) Viết x^5 thành một tổ hợp tuyến tính của các đa thức x, $x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$, $x(x-1)(x-2)(x-3)$ và $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

b) Viết x^6 thành một tổ hợp tuyến tính của các đa thức x, $x(x-1)$, $x(x-1)(x-2)$, $x(x-1)(x-2)(x-3)$, $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.

6.4/ Tính B_n (n = 7, 8, 9 , 10) để đếm số cách phân tích các số nguyên dương 4.849.845, 74.364.290, 1.293.938.646 và 28.651.498.590 thành tích của các số nguyên ≥ 2 ?

***GHI CHÚ*:** *Các bài tập có dấu gạch dưới (như* **1.1/** *, …) là các bài tập tương đối khó được khuyến khích làm thêm để rèn luyện khả năng vận dụng lý thuyết trong suy luận và tư duy logic.*