

Chương 5. HÀM SINH

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

5.1 Hàm sinh

- `sum(h(i)*x^i, i = 0..infinity)`: Xây dựng hàm sinh biến x với hệ số của x^i là hàm $h(i)$.
- `series(exp, var, n)`: Khai triển biểu thức `exp` thành hàm sinh theo biến `var` với `n` thành phần đầu tiên.
- `coeff(f, x^k)`: Tính hệ số của x^k trong đa thức f

```
> sum((i^2+1)*x^i, i = 0 .. 8);
```

$$1 + 2x + 5x^2 + 10x^3 + 17x^4 + 26x^5 + 37x^6 + 50x^7 + 65x^8$$

```
> sum((i^2+1)*x^i, i = 0 .. infinity);
```

$$-\frac{2x^2 - x + 1}{(x - 1)^3}$$

```
> f := 1/(1-3*x+x^2): G := series(f, x, 9);
```

$$G := 1 + 3x + 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + 377x^6 + 987x^7 + 2584x^8 + O(x^9)$$

```
> coeff(G, x, 7);
```

$$987$$

Ví dụ 1. Tìm hệ số x^{50} trong $(x^{10} + x^{11} + \dots + x^{35})(x^2 + 2x^4 + 3x^6 + \dots + 10x^{20})$.

```
> f:=sum(x^i, i=10 .. 35)*sum(i*x^(2*i), i=1 .. 10);
```

```
> coeff(f, x, 50);
```

$$27$$

Ví dụ 2. Tìm hệ số của x^{16} trong $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^5$

```
> f:=(sum(x^i, i=2 .. infinity))^5;
```

$$f := -\frac{x^{10}}{(x - 1)^5}$$

```
> G:=series(f, x, 17): coeff(G, x, 16);
```

$$210$$

5.2 Phân hoạch số nguyên dương

Để tính toán các bài toán liên quan đến phân hoạch ta sử dụng hàm `partition` và `numbpart` trong gói lệnh `combinat`

- `partition(n)`: Danh sách các phân hoạch của n .
- `partition(n, max)`: Danh sách các phân hoạch của n với giá trị mỗi phân hoạch không vượt quá max

Để tìm số phân hoạch ta dùng hàm `numbpart(n)` và `numbpart(n, max)`

```
> partition(5);
[[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 2, 2], [1, 1, 3], [2, 3], [1, 4], [5]]

> partition(5, 3);
[[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 2, 2], [1, 1, 3], [2, 3]]

> numbpart(10);
42

> numbpart(10, 4);
23
```

5.3 Hệ thức đệ quy

Để giải hệ thức đệ quy ta sử dụng hàm `rsolve(eqns, fcns)`, trong đó `eqns` là các hệ thức đệ quy, điều kiện ban đầu; `fcns` là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $a_n = a_{n-1} + 2n$ với $a_0 = 1$.

```
> f := rsolve({a(n) = a(n-1)+2*n, a(0) = 1}, a(n)); simplify(f);
1 + n^2 + n
```

► Bài tập thực hành

Bài 1. Mỗi hàm sinh $G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ sẽ được lưu dưới dạng một mảng $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$. Hãy viết chương trình tính tổng, tích của hai hàm sinh và tính lũy thừa k của hàm sinh.

- Tên hàm: **Tong, Tich, LuyThua**
- Input: Hai danh sách G và H hoặc số nguyên dương k
- Output: Danh sách
- Gọi hàm: **Tong(G, H); Tich(G, H); LuyThua(G, k);**

Bài 2. Làm tương tự cho hàm sinh mũ

Bài 3. Cho n và r là những số nguyên dương. Hãy tính hệ số của x^n của hàm sinh

a) $\frac{1}{(1-x)(1-2x)\dots(1-rx)}$

b) $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^r)}$

- Tên hàm: **HeSo**
- Input: Số nguyên dương r và n
- Output: Hệ số của x^n
- Gọi hàm: **HeSo(r, n)**;

Bài 4. Liệt kê tất cả các phân hoạch của số nguyên dương n

- Tên hàm: **PhanHoach**
- Input: Số nguyên dương n
- Output: Danh sách các phân hoạch của n
- Gọi hàm: **PhanHoach(n)**;

Phần II. Bài tập

5.1 Tìm các hàm sinh của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với a_r là số nghiệm nguyên của các phương trình sau đây:

- a) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$ trong đó $e_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq 4$).
- b) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = r$ trong đó $0 \leq e_i \leq 5$ ($1 \leq i \leq 5$).
- c) $e_1 + e_2 + e_3 = r$ trong đó $0 < e_i < 6$ ($1 \leq i \leq 3$).
- d) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$ trong đó $2 \leq e_i \leq 7$ ($1 \leq i \leq 4$), e_1 chẵn, e_2 lẻ.
- e) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$ trong đó $e_i > 0$ ($1 \leq i \leq 4$), e_2, e_4 lẻ và $e_4 \leq 3$.

5.2 Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với a_r là số cách chọn r viên bi từ

- a) bốn loại bi.
- b) 5 năm viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu đen và 4 viên bi màu trắng.
- c) sáu loại bi trong đó số bi loại một và số bi loại hai là số lẻ.

5.3 Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với a_r là số cách sắp xếp r vật giống nhau vào trong

- a) 5 hộp khác nhau sao cho mỗi hộp có ít nhất 3 vật.
- b) 3 hộp khác nhau sao cho mỗi hộp có từ 3 đến 6 vật.
- c) 4 hộp khác nhau sao cho mỗi hộp có tối đa 5 vật.

5.4 Dùng hàm sinh để tính số tổ hợp lặp chập 5 của $\{M, A, T, H\}$, trong đó T và H chỉ xuất hiện không quá 1 lần.

5.5 Dùng hàm sinh để tính số cách sắp xếp 16 thanh kẹo sô cô la giống nhau vào 4 hộp sao cho mỗi hộp có ít nhất 3 thanh kẹo.

5.6 Tìm các hàm sinh của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với a_r là số nghiệm nguyên của các phương trình sau đây:

- a) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r$ trong đó $-3 \leq e_i \leq 3$ ($1 \leq i \leq 4$).
- b) $e_1 + e_2 + e_3 + = r$ trong đó $e_1 \geq -2, 2 \leq e_2 \leq 6$ và $e_3 \geq 0$.

5.7 Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với a_r là số các số tự nhiên từ 0 đến 99999 sao cho có tổng các chữ số là r .

5.8 Tìm hàm sinh của $\{a_n\}_{n \geq 0}$ với a_n là số cách chọn 5 số khác nhau từ các số $1, 2, 3, \dots, n$ sao cho không có hai số liên tiếp nhau. Sau đó tính a_{20} .

5.9 Tìm các hàm sinh của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với a_r là số nghiệm nguyên của phương trình

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r \text{ trong đó } 0 \leq e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq e_4.$$

5.10 Tìm hệ số của

- a) x^{10} trong $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^{20}$.
- b) x^{50} trong $(x^5 + x^6 + x^7 + \dots)^8$.
- c) x^7 trong $(1 + x^2 + x^4)(1 + x)^m$ với $m \geq 0$.
- d) x^{16} trong $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^5$.
- e) x^{17} trong $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)^3$.
- f) x^{47} trong $(x^{10} + x^{11} + \dots + x^{25})(x + x^2 + \dots + x^{15})(x^{20} + x^{21} + \dots + x^{45})$.
- g) x^{32} trong $(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)^7$.
- h) x^{24} trong $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^8$.
- i) x^{16} trong $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)^4$.
- j) x^{36} trong $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^5$.
- k) x^8 trong $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^5$.
- l) x^{18} trong $(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots)^6$.
- m) x^{25} trong $(1 + x^3 + x^8)^{10}$.

5.11 Tìm hệ số của x^{12} trong

- a) $(1 - x)^8$.
- b) $(1 + x)^{-8}$.
- c) $(1 - 4x)^{-5}$.
- d) $(1 + x^3)^{-4}$.

5.12 Tìm hệ số của x^{11} trong

- a) $\frac{x^4}{(1 - 3x)^3}$.
- b) $\frac{x^3}{(1 + 4x)^2}$.
- c) $\frac{x^2}{(1 - x)^{10}}$.
- d) $\frac{x + 3}{1 - 2x + x^2}$.
- e) $\frac{x^2 - 3x}{(1 - x)^4}$.
- f) $\frac{(1 - x^2)^5}{(1 - x)^5}$.

5.13 Sử dụng hàm sinh để tìm số cách chọn 10 quả bóng từ ba loại bóng đỏ, trắng và xanh sao cho

- a) mỗi loại bóng được chọn ít nhất 2 quả.
- b) mỗi loại bóng được chọn nhiều nhất 5 quả.
- c) có không quá 2 quả đỏ.
- d) số quả màu xanh là chẵn.

5.14 Nhóm bạn 20 người tặng 15 cuốn vở cho một học sinh nghèo. Người thứ nhất có thể tặng 1 cuốn hoặc 5 cuốn hoặc không tặng gì cả. Mỗi người trong những người còn lại có thể tặng nhiều nhất 1 cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách quyên tặng 15 cuốn vở ?

5.15 Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với a_r là số phân hoạch của r thành

- a) các số nguyên dương chẵn.
- b) các số nguyên dương lẻ khác nhau.

5.16 Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với a_r là số phân hoạch của r thành thành các số nguyên dương sao cho mỗi số xuất hiện không quá 3 lần.

5.17 Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với a_r là số nghiệm nguyên của phương trình $2x + 3y + 7z = r$ trong đó

a) $x, y, z \geq 0$

b) $0 \leq z \leq 2 \leq y \leq 8 \leq x$

5.18 Có bao nhiêu cách đổi một tờ giấy bạc 50\$ thành các tờ 1\$, 2\$, 5\$, 10\$ và 20\$?

5.19 Tìm hàm sinh mũ cho số cách sắp xếp r ($r \geq 0$) người “khác nhau” vào 6 phòng khác nhau biết rằng mỗi phòng có ít nhất 2 người và nhiều nhất 4 người.

5.20 Có bao nhiêu chuỗi tam phân (chỉ chứa 0, 1, 2) có độ dài bằng r ($r \geq 0$) sao cho

- a) số lần xuất hiện của 0 là chẵn.
- b) số lần xuất hiện của 0 và 1 đều là chẵn.
- c) có ít nhất 1 chữ số 0 và có ít nhất 1 chữ số 1.
- d) không có chữ số nào có xuất hiện đúng 2 lần.

5.21 Có bao nhiêu chuỗi tứ phân có độ dài bằng r ($r \geq 0$) sao cho tổng số lần xuất hiện 0 và số lần xuất hiện 1 là chẵn?

5.22 Có bao nhiêu cách chia 8 món đồ chơi khác nhau cho 4 đứa trẻ sao cho đứa trẻ thứ nhất được ít nhất 2 món?

5.23 Có bao nhiêu chuỗi ký tự có chiều dài n ($n \geq 0$) được tạo bởi các chữ cái a, b, c, d, e sao cho

- a) số lần xuất hiện b là chẵn?
- b) số lần xuất hiện a và b đều là lẻ?

5.24 Tìm hàm sinh mũ của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với a_r là số cách xếp r vật khác nhau vào trong 5 hộp thỏa $b_1 \leq b_2 \leq 4$, trong đó b_1, b_2 tương ứng là số vật được xếp vào hộp 1 và 2.

5.25 Tìm hàm sinh mũ của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với

- a) $a_r = 1/(r + 1)$.
- b) $a_r = r!$.

5.26 Chứng minh rằng $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^x e^y = e^{x+y}$ bằng việc khai triển đồng thời e^x và e^y .

5.27 Tính toán các tổng sau (sử dụng hàm sinh):

- a) $0 + 1 + 2 + \dots + n$.
- b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.
- c) $13 + 13 + \dots + 13$.
- d) $0 + 3 + 12 + \dots + 3n^2$.
- e) $7 + 10 + 13 + \dots + (3n + 7)$.
- f) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + \dots + n(n - 1)(n - 2)(n - 3)$.

5.28 Tìm hàm sinh của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với

a) $a_r = r(r+2)$.

b) $a_r = (r-1)^2$.

c) $a_r = 1/r \ (r \geq 1)$.

5.29 Tìm hàm sinh mũ của $\{a_r\}_{r \geq 0}$ với

a) $a_r = (-1)^r$.

d) $a_r = (-2)^r$.

b) $a_r = 3r$.

e) $a_r = r(r-1)$.

c) $a_r = r+1$.

f) $a_r = 1/[(r+1)(r+2)]$.

5.30 Tìm hệ số của x^r trong các hàm sinh sau

a) $e^{3x} - 3e^{2x}$.

d) e^{x^2} .

b) $e^{-2x} - [1/(1-x)]$.

e) $2e^{-3x+1}$.

c) $e^{-3x} - (1+x) + [1/(1-2x)]$.

f) $xe^x - e^{x^3}$.

5.31 Sử dụng hàm sinh để giải hệ thức đệ quy sau:

a) $a_n = a_{n-1} + 2$ với $a_0 = 1$

d) $a_n = 7a_{n-1}$ với $a_0 = 5$.

b) $a_n = a_{n-1} + n(n-1)$ với $a_0 = 1$

e) $a_n = 3a_{n-1} + 4n - 1$ với $a_0 = 1$.

c) $a_n = a_{n-1} + 2n$ với $a_0 = 1$

f) $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$ với $a_0 = 1$.

5.32 Sử dụng hàm sinh để giải hệ thức đệ quy sau:

a) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2, a_0 = a_1 = 1$

b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ với $a_0 = 6, a_1 = 30$.

c) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n$ với $a_0 = 4, a_1 = 12$.

d) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n^2$ với $a_0 = 2, a_1 = 5$.

e) $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 4^n + 6$ với $a_0 = 20, a_1 = 60$.

f) $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n$, với $a_0 = 0, a_1 = 1$.