CHƯƠNG TỰ ÔN TẬP

TỔ HỢP CƠ BẢN (PHƯƠNG PHÁP ĐẾM)

Mục tiêu của chương này nhằm để ôn tập và củng cố lại các kiến thức về *Phương pháp đếm* đã được giới thiệu trong môn học TOÁN RỜI RẠC ở học kỳ đầu của khóa học.

I. CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM CƠ BẢN:

Ký hiệu $| X |$ là số phần tử của tập hợp hữu hạn X bất kỳ.

1.1/ MỆNH ĐỀ: Cho các tập hợp *hữu hạn* bất kỳ $A, B, A_1, A_2, \ldots$ và A_n .

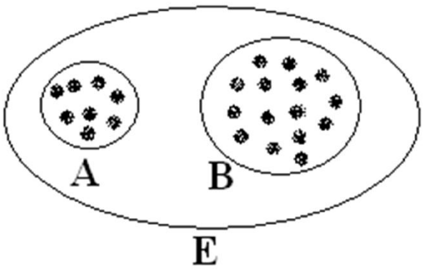
a) Nếu $A, B \subset E$ và A, B *rời nhau* ($A \cap B = \varnothing$) thì $| A \cup B | = | A | + | B |$.

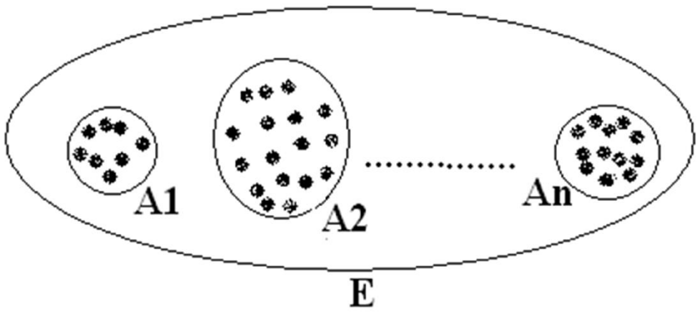
b) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$ và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *rời nhau từng đôi một*

($A_i \cap A_j = \varnothing$ khi $1 \leq i \neq j \leq n$) thì

$$| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n | = | A_1 | + | A_2 | + \cdots + | A_n |.$$

c) $| A \times B | = | A |.| B |$ và $| A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n | = | A_1 |.| A_2 |\ldots| A_n |$.





Ví dụ:

a) Lớp học L có 80 sinh viên nam và 65 sinh viên nữ. Ta có thể viết

$L = A \cup B$ với $A = \{ x \in L \mid x$ là nam $\}$, $B = \{ x \in L \mid x$ là nữ $\}$ và

$A \cap B = \varnothing$. Suy ra $| L | = | A \cup B | = | A | + | B | = 80 + 65 = 145$.

Vậy lớp học L có 145 sinh viên.

b) Trường T (cấp 2) có 300 học sinh lớp sáu, 280 học sinh lớp bảy, 250 học sinh lớp tám và 220 học sinh lớp chín. Ta có thể viết $T = A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9$

với $A_j = \{ x \in T \mid x$ học lớp $j \}$ $(6 \le j \le 9)$ và $A_i \cap A_j = \varnothing$ khi $6 \le i \ne j \le 9$.

Suy ra $|T| = |A_6| + |A_7| + |A_8| + |A_9| = 300 + 280 + 250 + 220 = 1.050$.

Vậy trường T có 1050 học sinh.

c) Tú có 6 áo, 5 quần tây và 4 đôi giày. Một bộ y phục bao gồm áo, quần và giày.

Đặt A = {các áo của Tú}, B = {các quần tây của Tú}, C = {các đôi giày của Tú}

và D = { các bộ y phục mà Tú có thể tạo dựng } = $A \times B \times C$.

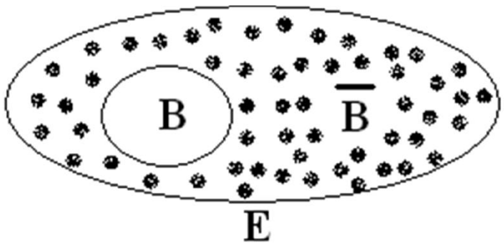
Số bộ y phục mà Tú có thể tạo dựng là $|D| = |A|.|B|.|C| = 6 \times 5 \times 4 = 120$ bộ.

1.2/ <u>MỆNH ĐỀ:</u> Cho tập hợp *hữu hạn* E và $B \subset E$.

a) Đặt $\wp(E) = \{ A \mid A \subset E \}$ ($\wp(E)$ là *tập hợp tất cả các tập hợp con* của E)

Nếu $|E| = n$ (n nguyên ≥ 0) thì $|\wp(E)| = 2^n$.

b) $|B| = |E| - |\overline{B}|$ (nếu việc đếm $|E|$ và $|\overline{B}|$ dễ dàng hơn việc đếm $|B|$).



<u>Ví dụ:</u> Cho $E = \{ 1, 2, 3, \dots, 8, 9 \}$ và $\Pi = \wp(E) = \{ A \mid A \subset E \}$.

a) Do $|E| = 9$ nên $|\Pi| = 2^9 = 512$.

b) Cho $\Phi = \{ A \mid A \subset E$ và $(1 \in A$ ***hay*** $2 \in A) \}$ thì $\Phi \subset \Pi$ và

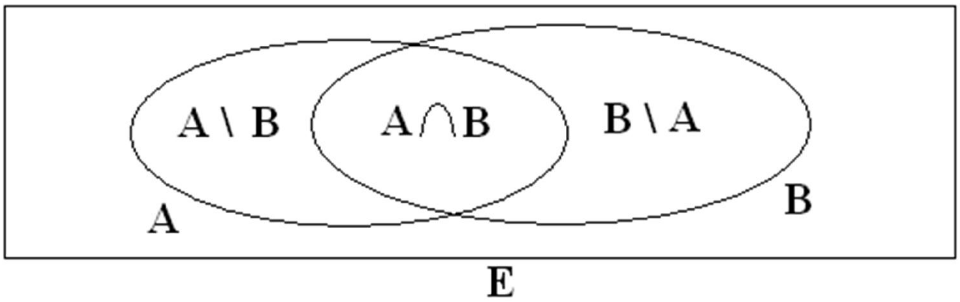
$\overline{\Phi} = \{ A \in \Pi \mid 1 \notin A$ ***và*** $2 \notin A \} = \wp(F)$ với $F = E \setminus \{1, 2\} = \{ 3, 4, \dots, 8, 9 \}$

và $|F| = 7$. Ta có $|\Phi| = |\Pi| - |\overline{\Phi}| = 2^9 - 2^7 = 512 - 128 = 384$.

1.3/ <u>NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ (đơn giản):</u> Cho các tập hợp *hữu hạn* $A, B \subset E$. Ta có

a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (nguyên lý bù trừ đơn giản).

b) $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A| = |B| + |A \setminus B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$.



Ví dụ: Lớp học L có 95 sinh viên học tiếng Anh, 60 sinh viên học tiếng Pháp và 43 sinh viên học tiếng Anh và tiếng Pháp. Giả sử mỗi sinh viên trong lớp L đều học tiếng Anh hay tiếng Pháp. Hỏi lớp L có bao nhiêu sinh viên ? Có bao nhiêu sinh viên chỉ học tiếng Anh? Có bao nhiêu sinh viên chỉ học tiếng Pháp ?

Đặt $A = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Anh $\}$, $B = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Pháp $\}$ thì

$L = A \cup B$ và $A \cap B = \{ x \in L \mid x$ học tiếng Anh và tiếng Pháp $\}$.

Ta có $|L| = |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 95 + 60 - 43 = 112$.

Số sinh viên chỉ học tiếng Anh $= |A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 95 - 43 = 52$.

Số sinh viên chỉ học tiếng Pháp $= |B \setminus A| = |B| - |A \cap B| = 60 - 43 = 17$.

1.4/ <u>NGUYÊN LÝ CỘNG:</u> Một công việc có thể thực hiện bằng *một trong* k *cách khác nhau* (chọn cách này thì không được chọn các cách khác). Cách thứ j có thể thu được m_j kết quả khác nhau ($1 \le j \le k$). Ta có số kết quả khác nhau có thể xảy ra khi thực hiện công việc là $(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)$.

Nguyên lý cộng được thể hiện bằng *ngôn ngữ tập hợp* trong phần a) và b) của **(1.1)**.

<u>Ví dụ:</u>

a) Người ta đưa vào danh sách bầu chọn " quả bóng vàng 2018 " gồm 2 cầu thủ Anh, 3 cầu thủ Bỉ, 4 cầu thủ Croatia và 5 cầu thủ Pháp. Số cầu thủ là ứng cử viên của " quả bóng vàng 2018 " là $5 + 4 + 3 + 2 = 14$ (cầu thủ).

b) Tủ sách của An có 10 sách Toán, 9 sách Lý và 8 sách Hóa (các sách đều khác nhau). An muốn chọn ra một sách từ tủ. Số cách chọn là $10 + 9 + 8 = 27$.

1.5/ <u>NGUYÊN LÝ NHÂN:</u> Một qui trình bao gồm k công việc *diễn ra liên tiếp* hoặc *đồng thời*. Việc thứ j có thể có m_j cách thực hiện khác nhau ($1 \leq j \leq k$).

Số phương án khác nhau để thực hiện xong qui trình là ($m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$).

Nguyên lý nhân được thể hiện bằng *ngôn ngữ tập hợp* trong phần c) của **(1.1)**.

<u>Ví dụ:</u>

a) Đi từ Sài gòn đến Cần Thơ là một qui trình bao gồm 4 công việc liên tiếp trong đó việc 1: đi từ Sài Gòn đến Long An (giả sử có 3 lộ trình), việc 2: đi từ Long An đến Tiền Giang (giả sử có 4 lộ trình), việc 3: đi từ Tiền Giang đến sử có 2 lộ trình) và việc 4: đi từ Vĩnh Long đến Cần Thơ (giả sử có 3 lộ trình).

Khi đó số lộ trình khác nhau để đi từ Sài Gòn đến Cần Thơ là $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$.

b) Xét số nguyên dương $N = \overline{abcd}$ có 4 chữ số hệ thập phân trong đó a tùy ý, b chẵn, c nguyên tố và $d > 3$. Việc xây dựng số N xem như một qui trình bao gồm 4 công việc đồng thời (a có 9 cách chọn, b có 5 cách chọn, c có 4 cách chọn và d có 6 cách chọn).

Số lượng số nguyên dương N có thể tạo ra là $9 \times 5 \times 4 \times 6 = 1.080$ (số).

c) Cho $|X| = m$ và $|Y| = n$ (m, n nguyên ≥ 1 và $X = \{ x_1, \ldots, x_m \}$).

Số ánh xạ f *từ* X *vào* Y là n^m [$\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, ảnh $f(x_j)$ có n cách chọn trong Y nên theo nguyên lý nhân, ta có $n \times \cdots \times n$ (m lần) $= n^m$ cách tạo ra ánh xạ f từ X vào Y]. Khi $m > n$ thì *không có đơn ánh* từ X vào Y.

Khi $m \le n$, *số các ánh xạ đơn ánh* f *từ* X *vào* Y là $[\, n! / (n-m)! \,]$

$\{$ các ảnh $f(x_1), \ldots, f(x_m)$ khác nhau trong Y nên $f(x_1)$ có n cách chọn, $f(x_2)$ có $(n-1)$ cách chọn, … và $f(x_m)$ có $[\, n-(m-1) \,]$ cách chọn. Theo nguyên lý nhân, ta có $n(n-1)\ldots[n-(m-1)] = [\, n!/(n-m)! \,]$ cách xây dựng ánh xạ đơn ánh f từ X vào $Y \}$. Suy ra khi $m \le n$, *số các ánh xạ không đơn ánh* f từ X vào Y là $n^m - [\, n!/(n-m)! \,]$.

1.6/ <u>NGUYÊN LÝ DIRICHLET:</u> (khẳng định *sự tồn tại*)

$\forall a \in \mathbf{R}$, $\lceil a \rceil$ là *số nguyên nhỏ nhất* $\ge a$. Ta nói $\lceil a \rceil$ là *phần nguyên già* của a.

Có n con cá và m cái ao (chưa có cá) thỏa $n > m$.

Thả hết n cá xuống m ao một cách tùy ý. Khi đó

a) Có ít nhất một ao chứa ít nhất 2 cá (phát biểu dạng đơn giản).

b) Có ít nhất một ao chứa ít nhất $\lceil n/m \rceil$ cá (phát biểu dạng mạnh).

<u>Ví dụ:</u>

a) Trong giảng đường hiện có 367 sinh viên. . Có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau (tính từ ngày 1/1 đến ngày 31/12 của mỗi năm kể cả năm nhuận). Số sinh viên (số cá) là $367 > 366$ = số ao (số ngày sinh nhật có thể có). Dùng nguyên lý Dirichlet, ta suy ra có ít nhất 2 sinh viên có cùng ngày sinh nhật.

b) Lớp học có 100 học sinh. Có ít nhất $\lceil 100/12 \rceil = 9$ học sinh có tháng sinh giống nhau và có ít nhất $\lceil 100/7 \rceil = 15$ học sinh có ngày sinh trong tuần (tính theo thứ hai, thứ ba, …, chủ nhật) là như nhau.

c) Cho $A \subset S = \{ 1, 2, 3, \ldots, 9, 10 \}$ và $|A| \ge 6$.

Chứng minh có $a, b \in A$ thỏa $a + b = 11$.

Mỗi số của A được xem như là một con cá có mã số chính là số đó. Ta có ≥ 6

cá. Tạo ra 5 ao B, C, D, E và F để thả cá từ tập hợp A với qui định đặc biệt (một cách thả đặc biệt) : B chỉ nhận cá có mã số 1 và 10, C chỉ nhận cá có mã số 2 và 9, D chỉ nhận cá có mã số 3 và 8, E chỉ nhận cá có mã số 4 và 7, F chỉ nhận cá có mã số 5 và 6. Số cá $\geq 6 > 5$ = số ao nên theo nguyên lý Dirichlet ta thấy ngay có ít nhất một ao nào đó chứa đúng 2 cá (ta gọi hai cá đó là a và b). Theo qui định đặc biệt, ta có $a + b = 11$.

II. GIẢI TÍCH TỔ HỢP (KHÔNG LẶP):

2.1/ PHÉP HOÁN VỊ: Cho số nguyên $n \geq 1$.

a) Một *phép hoán vị* (*không lặp*) trên n phần tử là một cách sắp xếp n phần tử khác nhau vào n vị trí cho sẵn sao cho mỗi vị trí chỉ nhận một phần tử.

b) Số phép hoán vị trên n phần tử là $P_n = n! = 1.2.3. \ldots (n-1).n$.

Ví dụ:

a) Ta có $P_3 = 3! = 6$ cách sắp xếp 3 phần tử a, b, c vào 3 vị trí cho trước (không xếp trùng) như sau: abc, acb, cba, bac, bca và cab. Ta có $P_7 = 7! =$ 5.040 cách sắp xếp 7 người vào một bàn dài có 7 ghế (không xếp trùng).

b) Xếp các chữ số 4, 5, 6, 7, 8, 9 thành một dãy số có 6 chữ số khác nhau. Có bao nhiêu dãy số có chữ số cuối là chẵn hoặc hai chữ số cuối đều là số nguyên tố ?

* Chữ số cuối chẵn phải là 4, 6 hoặc 8. Năm chữ số đầu là hoán vị của 5 chữ số còn lại. Số dãy số có được là $3 \times 5! = 3 \times 120 = 360$.

* Hai chữ số cuối đều là số nguyên tố nên phải là 57 hoặc 75. Bốn chữ số đầu là hoán vị của 4 chữ số còn lại. Số dãy số có được là $2 \times 4! = 2 \times 24 = 48$.

Tính chung, ta có $360 + 48 = 408$ dãy số thỏa yêu cầu bài toán.

c) 5 người Ý và 4 người Bỉ xếp thành một hàng dọc. Nếu yêu cầu hai người đứng gần nhau phải khác quốc tịch thì số cách xếp là $5! \times 4! = 2.880$.

Nếu muốn 5 người Ý đứng gần nhau thì số cách xếp là $5! \times 5! = 14.400$.

Nếu muốn 4 người Bỉ đứng gần nhau thì số cách xếp là $6! \times 4! = 17.280$.

Nếu muốn 5 người Ý đứng gần nhau ***và*** 4 người Bỉ đứng gần nhau thì số cách xếp là $2! \times 5! \times 4! = 5.760$. Nếu muốn 5 người Ý đứng gần nhau ***hay*** 4 người Bỉ đứng gần nhau thì số cách xếp là $14.400 + 17.280 – 5.760 = 25.920$.

2.2/ <u>PHÉP TỔ HỢP VÀ CHỈNH HỢP:</u> Cho các số nguyên $n \geq 1$ và $0 \leq m \leq n$.

a) Một *tổ hợp n chọn m* là một cách chọn ra m phần tử khác nhau từ n phần tử khác nhau cho trước mà *không quan tâm đến thứ tự chọn*.

b) Một *chỉnh hợp n chọn m* là một cách chọn ra m phần tử khác nhau từ n phần tử khác nhau cho trước mà *có quan tâm đến thứ tự chọn* (hoặc sau khi chọn xong lại tiếp tục xếp m phần tử đã chọn vào m vị trí cho sẵn).

c) Số tổ hợp n chọn m là $C_n^m = \binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

d) Số chỉnh hợp n chọn m là $A_n^m = C_n^m P_m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Chọn 4 học sinh từ 10 học sinh để lập đội trật tự. Số cách chọn là $C_{10}^4 = 210$.

b) Chọn 4 học sinh từ 10 học sinh để bổ nhiệm làm đội trưởng, đội phó, thư ký và thủ quĩ của một đội công tác xã hội. Số cách chọn là $A_{10}^4 = C_{10}^4 P_4 = 504$.

c) Lập các dãy số gồm 8 chữ số hệ thập phân mà trong đó có đúng 3 chữ số 2. Số dãy số có được là $C_8^3 \times 9^5 = 3.306.744$.

d) Lập các dãy số gồm 8 chữ số hệ thập phân mà trong đó mỗi chữ số 1, 4, 9 xuất hiện đúng một lần và các chữ số còn lại thì khác nhau từng đôi một. Số dãy số có được là $A_8^3 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 846.720$.

e) Từ 18 nam và 14 nữ, ta muốn chọn ra một tổ 3 người (tổ trưởng, thư ký, thủ quĩ). Muốn tổ trưởng là nam thì số cách chọn là $18 \times A_{31}^{2}$ = 16.740.

Muốn tổ gồm 3 nam thì số cách chọn là A_{18}^{3} = 4.896.

Muốn tổ trưởng có ít nhất một nữ thì số cách chọn là $A_{32}^{3} - A_{18}^{3}$ = 24.864.

f) Từ 11 nam và 9 nữ, ta chọn ra một đội công tác xã hội gồm 8 bạn.

Chọn tùy ý thì số cách chọn là C_{20}^{8} = 125.970.

Muốn đội có số nam và nữ chênh lệch nhau không quá 2 thì số cách chọn là

$C_{11}^{3} C_{9}^{5} + C_{11}^{4} C_{9}^{4} + C_{11}^{5} C_{9}^{3} = (165 \times 126) + (330 \times 126) + (462 \times 84)$ = 101.178.

2.3/ <u>TÍNH CHẤT:</u> Cho các số nguyên $n \ge 1$ và $0 \le m \le n$. Khi đó

a) $C_{n}^{m} = C_{n}^{n-m}$ (sự đối xứng ở hai cực).

b) $C_{n}^{0} = C_{n}^{n} = 1$ và $C_{n}^{1} = C_{n}^{n-1} = n$.

c) Khi $m \ge 1$ thì $C_{n+1}^{m} = C_{n}^{m} + C_{n}^{m-1}$ (hạ chỉ số dưới).

<u>Ví dụ:</u>

a) $C_{7}^{0} = C_{7}^{7} = 1,\ C_{7}^{1} = C_{7}^{6} = 7,\ C_{7}^{2} = C_{7}^{5} = 21$ và $C_{7}^{3} = C_{7}^{4} = 35$.

b) $C_{9}^{5} = C_{8}^{5} + C_{8}^{4} = (C_{7}^{5} + C_{7}^{4}) + (C_{7}^{4} + C_{7}^{3})$.

2.4/ <u>NHỊ THỨC NEWTON:</u> Cho số nguyên $n \ge 1$ và các số thực x, y. Ta có

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n}^{i} x^{i} y^{n-i} \quad \text{(số mũ của x tăng dần và số mũ của y giảm dần)}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} C_{n}^{i} x^{n-i} y^{i} \quad \text{(số mũ của x giảm dần và số mũ của y tăng dần).}$$

<u>Ví dụ:</u>

$$(x + y)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_{6}^{i} x^{i} y^{6-i} = y^6 + 6xy^5 + 15x^2y^4 + 20x^3y^3 + 15x^4y^2 + 6x^5y + x^6 =$$

$$= (y + x)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_{6}^{i} x^{6-i} y^{i} = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

2.5/ HỆ QUẢ: Cho số nguyên $n \geq 1$. Ta có

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = [\,(-1) + 1\,]^n = 0$.

c) Suy ra $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$.

III. GIẢI TÍCH TỔ HỢP (CÓ LẶP):

3.1/ PHÉP HOÁN VỊ LẶP: Cho các số nguyên dương $k, n_1, n_2, \ldots$ và n_k.

Có k *loại vật khác nhau*, loại thứ j có n_j vật *giống hệt nhau* ($1 \leq j \leq k$).

Tổng số vật là $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

a) Một *phép hoán vị lặp trên n phần tử nói trên* là một cách sắp xếp n phần tử đó vào n vị trí cho sẵn sao cho *mỗi vị trí chỉ nhận một phần tử* và *không phân biệt các vật cùng loại*.

b) Số phép hoán vị lặp trên n phần tử nói trên là

$$P_n^*(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}.$$

Ví dụ:

a) Từ các chữ số 8, 1, 1, 9, 9, 9, 6, 6, 6, 6, ta có thể tạo ra bao nhiêu dãy số khác nhau (mỗi dãy số có 10 chữ số, chẳng hạn như dãy số 6196816996, ...) ?

Đây là phép đếm số hoán vị lặp trên $n = 10$ phần tử với $k = 4$ loại vật, mỗi loại vật là một loại chữ số và số vật của mỗi loại là $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3$ và $n_4 = 4$. Số dãy số có được là $P_{10}^*(1,2,3,4) = \frac{10!}{1!2!3!4!} = 12.600$.

b) Nếu yêu cầu thêm đầu dãy là chữ số lẻ (1 hoặc 9) và cuối dãy là chữ số chẵn (6 hoặc 8) thì ta có được bao nhiêu dãy ?

Số dãy số có được là $P_8^*(1,3,4) + P_8^*(1,1,3,3) + P_8^*(2,2,4) + P_8^*(1,2,2,3) = 3.500$.

c) Nếu yêu cầu thêm đầu dãy là chữ số khác 6 thì số dãy số có được là

12.600 – $P_9^*(1,2,3,3)$ = 12.600 – 5.040 = 7.560.

3.2/ ÁP DỤNG: Cho các số nguyên $n \ge 1$, $k \ge 2$ và các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Ta có khai triển *đa thức Newton nhiều biến* (mở rộng nhị thức Newton) :

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_k=n \\ n_1,n_2,\ldots,n_k \ge 0}} P_n^*(n_1,n_2,\ldots,n_k)\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

trong đó $P_n^*(n_1,n_2,\ldots,n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Lưu ý: *Hệ số* và *số mũ* của các biến trong ngoặc đơn ở vế trái đều phải là 1.

Ví dụ:

a) Tìm hệ số của đơn thức $x^4y^5z^3u$ trong khai triển $(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13}$.

Đặt a = 9x, b = – 2y, c = 5z và d = – 8t. Dùng đa thức Newton, ta có :

$(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} = (a + b + c + d + u)^{13} = P_{13}^*(4,5,3,0,1)\, a^4b^5c^3d^o u^1 + \cdots$

$= \dfrac{13!}{4!5!3!0!1!}(9x)^4(-2y)^5(5z)^3(-8t)^o u^1 + \cdots = -\,360.360 \times 2^5\, 5^3 9^4 (x^4\, y^5 z^3 u) + \cdots$

Hệ số cần tìm là $-\,360.360 \times 2^5\, 5^3 9^4 = -\,9.457.287.840.000$.

b) Tìm hệ số của đơn thức $x^2y^{15}z^{12}t^2$ trong khai triển $(3x^2 + 4y^5 - z^3 - 5t)^{10}$.

Đặt a = $3x^2$, b = $4y^5$, c = $-z^3$ và d = – 5t. Dùng đa thức Newton, ta có :

$(3x^2 + 4y^5 - z^3 - 5t)^{10} = (a + b + c + d)^{10} = P_{10}^*(1,3,4,2)\, a^1b^3c^4d^2 + \cdots =$

$= \dfrac{10!}{1!3!4!2!}(3x^2)^1(4y^5)^3(-z^3)^4(-5t)^2 + \cdots = 12.600 \times 3^1 4^3 5^2 (x^2\, y^{15} z^{12} t^2) + \cdots$

Hệ số cần tìm là $12.600 \times 3^1 4^3 5^2 = 60.480.000$.

3.3/ PHÉP TỔ HỢP LẶP: Cho các số nguyên $k \ge 1$ và $m \ge 0$.

Có k *loại vật khác nhau*, mỗi loại vật có nhiều vật *giống hệt nhau*.

a) Một *tổ hợp lặp k loại vật chọn m* là một cách chọn ra m vật từ k loại vật nói trên sao cho *mỗi loại vật được chọn một số lần tùy ý không quá* m và *không phân biệt các vật cùng loại.*

b) Số tổ hợp lặp k loại vật chọn m là $K_k^m = C_{m+(k-1)}^{(k-1)} = C_{m+(k-1)}^m$.

<u>Ví dụ:</u>

An đến siêu thị mua 15 cái mũ. Siêu thị bán 4 loại mũ (cùng kiểu dáng, chất lượng và giá cả) có các màu trắng, xanh, đen và nâu. Hỏi An có bao nhiêu cách mua mũ (theo màu sắc) ?

Mỗi cách mua mũ là một tổ hợp lặp từ 4 loại vật chọn ra 15 vật.

Số cách mua mũ là $K_4^{15} = C_{15+(4-1)}^{(4-1)} = C_{18}^3 = 816$.

3.4/ <u>ÁP DỤNG:</u> Cho các số nguyên $k \geq 1$ và $m \geq 0$.

Tìm số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = m$ (các ẩn số $x_1, x_2, ...$ và x_k là các số nguyên ≥ 0).

Mỗi nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình trên chính là một cách chọn ra m vật từ k loại vật, mỗi giá trị x_j là số vật loại thứ j được chọn ($1 \leq j \leq k$).

Do đó số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình cũng là $K_k^m = C_{m+(k-1)}^{(k-1)}$.

<u>Ví dụ:</u>

a) Xếp tùy ý 20 viên bi (y hệt nhau) vào 4 cái hộp. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?

Gọi x_j là số bi xếp vào hộp thứ j ($1 \leq j \leq 4$) thì $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ và x_1, x_2, x_3 và x_4 nguyên ≥ 0. Số cách xếp = (số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình trên) = $K_4^{20} = C_{23}^3 = 1.771$.

b) Khai triển $(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13}$, ta được bao nhiêu đơn thức khác nhau ?

$$(9x - 2y + 5z - 8t + u)^{13} = \sum_{\substack{p+q+r+s+n=13 \\ p,q,r,s,n \geq 0}} c(p,q,r,s,n) x^p y^q z^r t^s u^n \text{ với } c(p,q,r,s,n) \in \mathbf{Z}.$$

Mỗi đơn thức $c(p, q, r, s, n)x^p y^q z^r t^s u^n$ tương ứng với một bộ số nguyên không âm (p, q, r, s, n) sao cho (p, q, r, s, n) chính là một nghiệm nguyên không âm của phương trình $p + q + r + s + n = 13$. Do đó số đơn thức xuất hiện = (số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $p + q + r + s + n = 13$) =

$= K_5^{13} = C_{17}^4 = 2.380$.

c) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z + t + u + v = 20$ trong đó $x \geq 2$, $y \geq 0$, $z \geq -3$, $t \geq 0$, $u \geq 4$ và $v = 3$ (*). Loại ẩn v, giữ nguyên các ẩn y, t và đổi biến $x' = (x - 2) \geq 0$, $z' = (z + 3) \geq 0$ và $u' = (u - 4) \geq 0$, ta được phương trình tương đương $x' + y + z' + t + u' = 14$ với x', y, z', t, u' đều nguyên ≥ 0 (**). Số nghiệm nguyên của (*) =

= Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_5^{14} = C_{18}^4 = 3.060$.

d) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x + y + z = 21$ trong đó $x > -4$, $y > 5$ và $2 \leq z < 7$ (*). Do x, y nguyên nên ($x > -4 \Leftrightarrow x \geq -3$) và ($y > 5 \Leftrightarrow y \geq 6$).

Đổi biến $x' = (x + 3) \geq 0$, $y' = (y - 6) \geq 0$ và $z' = (z - 2) \geq 0$, ta có phương trình tương đương $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' nguyên ≥ 0 và $z' < 5$ (**).

Xét phương trình $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 (I) và phương trình $x' + y' + z' = 16$ với x', y', z' đều nguyên ≥ 0 và $z' \geq 5$ (II).

Đổi biến $z'' = (z - 5) \geq 0$, (II) tương đương với phương trình

$x' + y' + z'' = 11$ với x', y', z'' đều nguyên ≥ 0 (III).

Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên của (**) =

= Số nghiệm của (I) – số nghiệm của (II) =

= Số nghiệm của (I) – số nghiệm của (III) = $K_3^{16} - K_3^{11} = C_{18}^2 - C_{13}^2 = 75$.

e) Tìm số nghiệm nguyên ≥ 0 của bất phương trình $x + y + z \leq 19$ (*).

Đặt $t = 19 - (x + y + z)$ thì ta có phương trình tương đương

$x + y + z + t = 19$ với x, y, z, t đều nguyên ≥ 0 (**).

Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) =

$= K_4^{19} = C_{22}^3 = 1.540$.

f) Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $x + y + z + t > -20$ trong đó

$x < 1, y \leq 4, z \leq -3$ và $t < 6$ (*).

Đổi biến $x' = -x \geq 0, y' = -y \geq -4, z' = -z \geq 3$ và $t' = -t \geq -5$, ta có bất phương trình tương đương $x' + y' + z' + t' \leq 19$. Đổi biến $y'' = (y' + 4) \geq 0$, $z'' = (z' - 3) \geq 0$ và $t'' = (t' + 5) \geq 0$, ta có bất phương trình tương đương $x' + y'' + z'' + t'' \leq 25$. Đặt $u = 25 - (x' + y'' + z'' + t'')$ thì ta có phương trình tương đương $x + y + z + t + u = 25$ với x, y, z, t, u nguyên ≥ 0 (**).

Số nghiệm nguyên của (*) = Số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) = $K_5^{25} = C_{29}^4 =$

$= 23.751$.
