Chương 1: Đại cương về xác suất

Nguyễn Thị Mộng Ngọc
University of Science, VNU - HCM
ngtmngoc@hcmus.edu.vn

Định nghĩa

- **Phép thử** là sự thực hiện một nhóm điều kiện xác định, có thể là một thí nghiệm cụ thể, quan sát đo đạc hay thu thập dữ liệu về một hiện tượng nào đó.
- **Biến cố/sự kiện sơ cấp** là kết quả của phép thử.
- **Không gian mẫu** là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử. Kí hiệu là Ω.
- **Biến cố/sự kiện ngẫu nhiên** là một tập con của không gian mẫu có nhiều biến cố. Kí hiệu là A, B, ...

Ví dụ : Tung con xúc xắc là phép thử ngẫu nhiên còn việc lật lên một mặt nào đó là biến cố và $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Ví dụ khác: Phép thử tung 2 đồng xu có không gian mẫu là $\Omega = \{(S, S), (S, N), (N, S), (N, N)\}$.
Ví dụ khác: Phép thử tung con xúc xắc, gọi A là biến cố " Xuất hiện mặt có 2 chấm ", A là biến cố ngẫu nhiên.

Các loại biến cố

- **Biến cố chắc chắn** là biến cố nhất định sẽ xảy ra khi thực hiện một phép thử. Không gian mẫu là Ω là biến cố chắc chắn.
  Ví dụ: Phép thử tung con xúc xắc, biến cố " Xuất hiện mặt có số chấm nhỏ hơn hoặc bằng 6 " là biến cố chắc chắn.
- **Biến cố không thể ($\emptyset$)** là biến cố nhất định không xảy ra khi thực hiện một phép thử.
  Ví dụ: Phép thử tung con xúc xắc, biến cố " Xuất hiện mặt có 7 chấm " là biến cố không thể.

Các loại biến cố (tt)

- **Biến cố ngẫu nhiên** là biến cố có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi thực hiện một phép thử. Các biến cố ngẫu nhiên được kí hiệu là A, B, C . . . .
  Ví dụ: Phép thử tung con xúc xắc, gọi A là biến cố " Xuất hiện mặt có 2 chấm ", A là biến cố ngẫu nhiên.

Quan hệ giữa các biến cố

- **Quan hệ kéo theo:** Biến cố A kéo theo biến cố B, kí hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B xảy ra.

  Ví dụ : Phép thử tung con xúc xắc, gọi A là biến cố " Xuất hiện mặt có 6 chấm" và B là biến cố " Xuất hiện mặt chẵn". Khi đó ta có $A \subset B$.

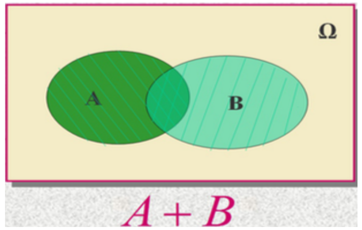
- Đặc biệt: Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì A và B là hai biến cố tương đương. Kí hiệu $A = B$

  Ví dụ: Mỗi số chấm trên mặt xúc xắc tương ứng 5 điểm, gọi A là biến cố " Xuất hiện mặt có 6 chấm" và B là biến cố " được 30 điểm". Khi đó ta có $A = B$.

1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ
3.5 Công thức Bayes
3.6 Công thức

Biến cố tổng

- **Tổng của hai biến cố:** Tổng của hai biến cố A và B, kí hiệu $A \cup B$ hay $A + B$, biến cố $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi có ít nhất A hoặc B xảy ra.

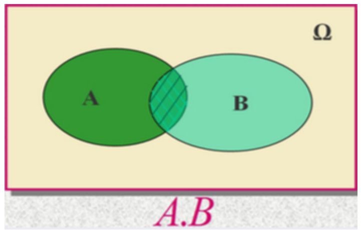


- Tổng của một dãy các biến cố $\{A_1, \ldots, A_n\}$ là biến cố $\cup_{i=1}^{n} A_i$, biến cố này xảy ra khi có ít nhất một trong các biến cố A_i xảy ra.

1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Biến cố tích

- **Tích của hai biến cố:** Tích của hai biến cố A và B, kí hiệu $A \cap B$ hay $A.B$, biến cố $A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi cả hai A và B cùng xảy ra.

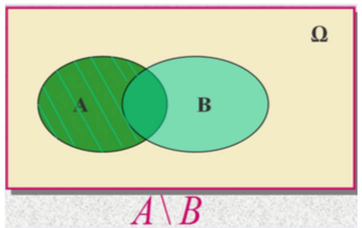


- Tích của một dãy các biến cố $\{A_1, \ldots, A_n\}$ là biến cố $\cap_{i=1}^{n} A_i$, biến cố này xảy ra khi tất cả các biến cố A_i cùng xảy ra.

1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Biến cố hiệu

Biến cố hiệu: Biến cố hiệu của A và B, kí hiệu $A \backslash B$, là biến cố xảy ra nếu A xảy ra nhưng B không xảy ra.



Ví dụ

Một thợ săn bắn hai viên đạn vào một con thú và con thú sẽ chết nếu nó bị trúng cả hai viên đạn.

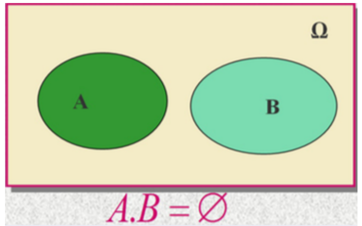
Gọi A_i: " viên đạn thứ i trúng con thú", $i = 1, 2$;
A: "con thú bị trúng đạn";
B: "con thú bị chết".
Khi đó, ta có: $A = A_1 \cup A_2$ và $B = A_1 \cap A_2$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ
3.5 Công thức Bayes
3.6 Công thức

Các biến cố xung khắc

- A xung khắc với B nếu A và B không đồng thời xảy ra trong một phép thử.

  A và B gọi là xung khắc nếu $A \cap B = \emptyset$.



- Dãy các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là xung khắc từng đôi một nếu $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$.

Ví dụ: Phép thử tung con xúc xắc, gọi A là biến cố "Xuất hiện mặt chẵn", B là biến cố "Xuất hiện mặt 3 chấm".

Khi đó, A và B xung khắc.

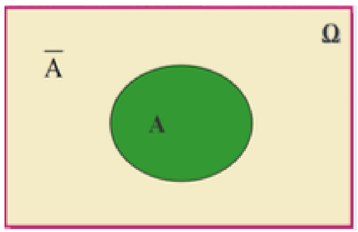
XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Biến cố đối lập (biến cố bù)

Biến cố đối lập của A, kí hiệu là $\bar{A}$, là biến cố xảy ra khi A không xảy ra và ngược lại.

A và $\bar{A}$ gọi là đối lập $\iff A \cap \bar{A} = \emptyset$ và $A \cup \bar{A} = \Omega$
hay

$$\bar{A} = \Omega \backslash A$$



Ví dụ: Phép thử tung con xúc xắc, gọi A là biến cố "Xuất hiện mặt chẵn", khi đó $\bar{A}$ là biến cố "Xuất hiện mặt lẽ".

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Biến cố đối lập (biến cố bù) (tt)

- **Tính chất:**

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

- **Chú ý:**
  Hai biến cố đối lập thì xung khắc nhưng ngược lại hai biến cố xung khắc thì chưa chắc đối lập.
  Ví dụ: Hai sinh viên A và B cùng thi môn XSTK, gọi A: "sinh viên A thi đậu"; B: " sinh viên B không thi đậu"; C: " một sinh viên thi đậu".

  Khi đó, A và B xung khắc nhưng không đối lập; B và C không xung khắc.

Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B gọi là độc lập nếu biến cố này xảy ra hay không thì không phụ thuộc vào biến cố kia.

Ví dụ: Bắn 2 phát đạn vào bia, gọi A là biến cố "phát thứ I trúng bia ", B là biến cố " phát thứ II trúng bia". Khi đó A và B là hai biến cố độc lập.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ
3.5 Công thức Bayes
3.6 Công thức Bernoulli

Khái niệm về xác suất

Xác suất của một biến cố là một con số, số đó đặc trưng cho khả năng xuất hiện biến cố đó khi thực hiện phép thử.

Nhận xét :

Xác suất của biến cố A, kí hiệu là $P(A)$.

- $P(A)$ càng lớn (càng gần 1) thì khả năng xuất hiện biến cố A càng cao.
- $P(A)$ càng nhỏ (càng gần 0) thì khả năng xuất hiện biến cố A càng thấp.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển

Giả sử phép thử thỏa mãn 2 điều kiện sau:

- Không gian mẫu có một số hữu hạn phân tử,
- Các kết quả xảy ra đồng khả năng (các kết quả có khả năng xuất hiện như nhau).

Khi đó, ta định nghĩa xác suất của biến cố A ($A \subset \Omega$) là

$$P(A) = \frac{\text{số trường hợp xảy ra thuận lợi đối với A}}{\text{số trường hợp có thể xảy ra}} = \frac{n_A}{n}$$

Ví dụ: Tính xác suất của biến cố A "xuất hiện mặt chẵn" trong phép thử tung con xúc xắc (đều đặn và đồng nhất).

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{3}{6} = 0.5.$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Phương pháp tính xác suất bằng định nghĩa cổ điển

- Phương pháp suy luận trực tiếp

  Ví dụ: Trong bình có a trái banh xanh và b trái banh đỏ. Lấy ngẫu nhiên một trái, tính xác suất để lấy được trái banh xanh .

  Giải : *Gọi A biến cố "trái banh được lấy là xanh ",*

  $$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{a}{a+b}$$

- Phương pháp dùng sơ đồ:
  - ○ sơ đồ hình cây
  - ○ sơ đồ dạng bảng
  - ○ sơ đồ dạng tập hợp (sơ đồ Venn)

Sơ đồ hình cây

Ví dụ: Giả sử xác suất sinh con trai và con gái là như nhau. Một gia đình có 3 con, tính xác suất để gia đình đó có 2 con gái.

Giải :

Sơ đồ dạng bảng

Ví dụ: Tung một con xúc xắc đồng nhất 2 lần. Tính xác suất để có một lần được 6 chấm.

Giải :

Sơ đồ dạng tập hợp (sơ đồ Venn)

Ví dụ: Trong một lớp 50 sinh viên có 20 người chơi bóng đá , 15 người chơi bóng chuyền, 10 người chơi bóng rổ, 8 người chơi bóng đá và bóng chuyền, 5 người chơi bóng đá và bóng rổ, 3 người chơi bóng chuyền và bóng rổ, 1 người chơi 3 môn bóng đá, bóng chuyền và bóng rổ. Chọn ngẫu nhiên 1 sinh viên, tính xác suất để người đó chơi ít nhất 1 môn bóng.

Giải :

Phương pháp dùng các công thức của giải tích tổ hợp

Ví dụ: Một người gọi điện thoại nhưng lại quên hai số cuối của số điện thoại và chỉ nhớ rằng hai số đó khác nhau. Tính xác suất để người đó chỉ quay ngẫu nhiên một lần đúng số cần gọi.

Giải:

Phương pháp dùng các công thức của giải tích tổ hợp (tt)

Ví dụ khác: Một hộp gồm 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp, tính xác suất để:

- a. Có 1 bi xanh.
- b. Có 2 bi xanh.

Giải:

XSTK

N.T. M. Ngọc

Ưu điểm, nhược điểm

Ưu điểm: tính được tính chính xác giá trị của xác suất và không cần tiến hành phép thử.

Nhược điểm: do đòi hỏi phải có hữu hạn các biến cố và tính đồng khả năng của chúng mà trong thực tế lại có nhiều phép thử không có tính chất đó.

Do đó, cần đưa ra định nghĩa khác về xác suất để khắc phục những hạn chế trên.

XSTK

N.T. M. Ngọc

2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê (bằng tần suất)

Định nghĩa: Giả sử thực hiện một phép thử nào đó n lần độc lập trong cùng điều kiện (kết quả của phép thử sau không phụ thuộc vào kết quả của phép thử trước), trong đó biến cố A xảy ra k lần.
Khi đó, k gọi là tần số xuất hiện của biến cố A và

$f(A) = f_n(A) = \frac{k}{n}$ là tần suất xuất hiện của biến cố A trong n phép thử.

Khi số phép thử tăng lên vô hạn ($n \to \infty$), tần suất $f_n(A)$ tiến đến một giới hạn xác định. Ta định nghĩa giới hạn này là xác suất của biến cố A.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n}$$

Trong thực tế, khi số phép thử đủ lớn thì $P(A) \approx f(A)$

XSTK

N.T. M. Ngọc

Ví dụ:

Để nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng xu, người ta tiến hành tung đồng xu nhiều lần độc lập trong cùng điều kiện và thu được kết quả sau:

Người làm thí nghiệm	Số lần tung (n)	Số lần được mặt sấp (k)	Tần suất $f(A) = \frac{k}{n}$
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

Nhận xét: Qua ví dụ này ta thấy khi số phép thử tăng lên thì tần suất xuất hiện mặt sấp dao động ngày càng ít hơn xung quanh giá trị không đổi là 0.5. Điều này cho phép hi vọng là khi số phép thử tăng lên vô hạn, tần suất sẽ hội tụ về giá trị 0.5.

Ưu điểm, nhược điểm

Ưu điểm: không đòi hỏi phép thử có hữu hạn các biến cố đồng khả năng, tíng xác suất dựa trên quan sát thực tế vì vậy được ứng dụng rộng rãi.

Nhược điểm: do đòi hỏi phải lặp lại nhiều lần phép thử. Trong nhiều bài toán thực tế điều này không cho phép do điều kiện và kinh phí làm phép thử, ...

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ
3.5 Công thức Bayes
3.6 Công thức

2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học

Xét một phép thử đồng khả năng, không gian mẫu có vô hạn phần tử và được biểu diễn thành một miền hình học Ω có độ đo xác định (độ dài, diện tích, thể tích). Biến cố $A \subset \Omega$ được biểu diễn bởi miền hình học A. Khi đó, xác suất xảy ra A được xác định bởi:

$$P(A) = \frac{\text{độ đo của miền A}}{\text{độ đo của miền } \Omega}$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ: Bài toán gặp gỡ

Bài toán gặp gỡ: Hai người hẹn gặp nhau tại một địa điểm vào khoảng 11 giờ đến 12 giờ. Ho quy ước rằng người đến trước sẽ chỉ đợi 20 phút nếu không gặp sẽ đi. Giả sử việc đeesn điểm hẹn của mỗi người là ngẫu nhiên. Tìm xác suất để hai người gặp nhau?

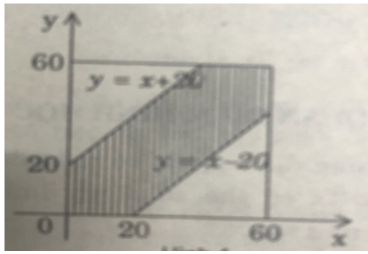
XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Giải: Bài toán gặp gỡ

Gọi x, y là thời điểm đến điểm hẹn của mỗi người. Biểu diễn x, y lên mặt phẳng tọa độ xOy.

- *Tập các kết quả có thể xảy ra là các điểm trong hình vuông cạnh là 60 (ta lấy phút làm đơn vị):* $0 \leq x \leq 60$ *và* $0 \leq y \leq 60$.
- *Tập các điểm thuận lợi để hai người gặp nhau là phần gạch chéo trong hình:*

$$\{(x, y) : |x - y| \leq 20\}.$$



Gọi A là biến cố " Hai người gặp nhau". Theo công thức xác suất hình học, ta có:

$$P(A) = \frac{\text{độ đo của miền } A}{\text{độ đo của miền } \Omega} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)

Cho không gian đo được $(\Omega, \mathcal{A})$,ta nói P là độ đo xác suất trên $(\Omega, \mathcal{A})$ nếu
$P : \mathcal{A} \to [0, 1]$, thỏa mãn 3 tiên đề sau:

- 1) $\forall A \in \mathcal{A}$: $0 \le P(A) \le 1$;
- 2) $P(\Omega) = 1$;
- 3) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ xung khắc từng đôi một, $A_i \in \mathcal{A}$ thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

Khi đó $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ được gọi là không gian xác suất.

XSTK
N.T. M. Ngọc

Từ các tiên đề trên, ta có thể suy ra các kết quả sau:

- $P(\emptyset) = 0$
- Nếu A, B hai biến cố xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \subset B$, ta có: $P(A) \le P(B)$
- $0 \le P(A) \le 1$.

XSTK
N.T. M. Ngọc

3. Các công thức xác suất cơ bản

Cho không gian mẫu Ω, và đã định nghĩa biến cố, xác suất của biến cố.

XSTK
N.T. M. Ngọc

3.1 Công thức cộng xác suất

- Nếu A, B là hai biến cố xung khắc thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xung khắc từng đôi một thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

- Nếu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là một nhóm đầy đủ các biến cố thì

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Ví dụ

Xác suất để một xạ thủ bắn bia trúng điểm 10 là 0.1, trúng điểm 9 là 0.2, trúng điểm 8 là 0.25 và ít hơn điểm 8 là 0.45. Xạ thủ ấy bắn một viên đạn. Tính xác suất để xạ thủ được ít nhất 9 điểm.

Giải:

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ
3.5 Công thức Bayes
3.6 Công thức Bernoulli

3.1 Công thức cộng xác suất (tt)

- Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Nếu A, B, C là ba biến cố bất kì thì

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- Nếu $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là dãy các biến cố bất kì thì

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_1 \ldots A_n)$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ

Một cửa hàng giày dép thống kê được trong số các khách đến cửa hàng có 50% khách mua giày, 40% khách mua dép, 20% khách mua giày và dép. Tính xác suất để một khách đến cửa hàng có mua sản phẩm.

Giải:

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

3.2 Công thức xác suất điều kiện

○ **Định nghĩa:** Xác suất của biến cố A được tính với điều kiện biến cố B đã xảy ra gọi là xác suất có điều kiện của biến cố A đối với biến cố B .

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{với } P(B) > 0.$$

Tương tự, xác suất của biến cố B được tính với điều kiện biến cố A đã xảy ra là

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \qquad \text{với } P(A) > 0.$$

Tính chất của xác suất có điều kiện

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- $P(B|B) = 1$
- Nếu $AC = \emptyset$ thì

$$P[(A \cup C)|B] = P(A|B) + P(C|B)$$

- $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ
3.5 Công thức Bayes
3.6 Công thức Bernoulli

Ví dụ

Ví dụ: Tung đồng thời hai con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc ≥ 10 biết rằng ít nhất một con đã ra 5 chấm.

Giải: ○ Ví dụ khác: Một bộ bài có 52 lá bài. Tính xác suất để rút được lá át, biết rằng lá bài rút ra là lá bài màu đen.

Giải:

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

3.3 Công thức nhân xác suất

- Hai biến cố A, B là hai biến cố bất kỳ, từ định nghĩa xác suất có điều kiện, ta suy ra
$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$
- Cho A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ là họ n biến cố, khi đó

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1})$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ

Một lô hàng gồm 20 sản phẩm trong đó có 2 phế phẩm. Người ta lần lượt lấy mỗi lần 1 sản phẩm để kiểm tra (không hoàn lại) cho đến khi phát hiện đủ 2 phế phẩm thì dừng.
a.Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lần II.
b.Tính xác suất để việc kiểm tra dừng lại ở lần III.

Giải:

Các biến cố độc lập

- Hai biến cố A và B độc lập với nhau khi và chỉ khi $P(AB) = P(A)P(B)$.
  Suy ra, nếu A độc lập với B thì

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

- Các biến cố $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ độc lập toàn phần khi và chỉ khi $\forall \mathrm{I} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $P(\cap_{i\in \mathrm{I}} A_i) = \prod_{i\in \mathrm{I}} P(A_i)$

XSTK
N.T. M. Ngọc

1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ
3.5 Công thức Bayes
3.6 Công thức Bernoulli

Ví dụ

Có hai túi, túi I đựng 3 bi trắng, 7 bi đỏ, 15 bi xanh; túi II đựng 10 bi trắng, 6 bi đỏ, 9 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 1 bi từ mỗi túi. Tìm xác suất để 2 bi được lấy ra từ 2 túi là cùng màu.

Giải:

XSTK
N.T. M. Ngọc

1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ

Khảo sát giới tính của những người con trong các gia đình có 2 con (theo thứ tự sinh trước/sau) có độc lập với nhau hay không?

Giải:

XSTK
N.T. M. Ngọc

1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Chú ý

- Sự độc lập từng đôi của các biến cố không dẫn đến sự độc lập toàn phần của các biến cố. Ví dụ:

Xét phép thử ngẫu nhiên có các kết quả đồng khả năng

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\mathbb{P}(\omega)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Đặt: $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4\}$, $C = \{\omega_3, \omega_4\}$ *thì*

$$P(AB) = P(A).P(B)$$
$$P(AC) = P(A).P(C)$$
$$P(BC) = P(B).P(C)$$

nhưng

$$P(ABC) \neq P(A).P(B).P(C)$$

- Nếu biến cố A độc lập với biến cố B thì A cũng độc lập với $\bar{B}$.

Hệ đầy đủ các biến cố

Dãy n các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu

- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$
  và
- $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$ và $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ
3.5 Công thức Bayes
3.6 Công thức Bernoulli

Công thức xác suất đầy đủ (toàn phần)

Cho $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ là hệ đầy đủ các biến cố và B là biến cố nào đó liên quan đến hệ thì

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ

Một lớp học có 100 sinh viên trong đó có 60 nam và 40 nữ. Số sinh viên đạt môn toán cho ở bảng sau:

	Đạt	Không đạt
Nam	46	14
Nữ	34	6

Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp này. Tính xác suất (bằng công thức xác suất đầy đủ) để chọn được sinh viên đạt môn toán.

‘ Giải:

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ

Một nông trường có 4 đội sản xuất. Đội 1 sản xuất 1/3 tổng sản lượng nông sản của nông trường. Đội 2 sản xuất 1/4 tổng sản lượng, đội 3 sản xuất 1/4 tổng sản lượng và đội 4 sản xuất 1/6 tổng sản lượng. Tỉ lệ phế phẩm tương ứng với các đội sản xuất là 0.15; 0.08; 0.05 và 0.01.
Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho của nông trường. Tìm xác suất để lấy phải một phế phẩm.

Giải :

Công thức Bayes

Cho $\{A_i\}_{i=1,2,...,n}$ là hệ đầy đủ các biến cố và B là biến cố nào đó liên quan đến hệ sao cho $P(A) > 0$. Khi đó, $\forall i = 1, 2, ..., n$,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} \quad \text{với} \quad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

Đặc biệt:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$$

với

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$$

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ
3.5 Công thức Bayes
3.6 Công thức Bernoulli

Ví dụ

Có 3 hộp đựng sản phẩm, mỗi hộp có 10 sản phẩm, trong đó số phế phẩm lần lượt là $2, 3, 4$. Chọn ngẫu nhiên một hộp, rồi từ hộp đó rút ra ngẫu nhiên một sản phẩm.
a. Tính xác suất để sản phẩm chọn ra là phế phẩm.
b. Nếu sản phẩm rút ra là phế phẩm, thì theo bạn phế phẩm đó có khả năng thuộc hộp nào nhiều nhất, tại sao ?
Giải:

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Ví dụ

Một hộp có 10 bi đỏ và 5 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, mỗi lần 1 bi không hoàn lại. Tính xác suất
a. được 2 bi đỏ.
b. bi lấy ra lần sau là đỏ.
c. lần đầu lấy được bi đỏ, biết rằng lần sau cũng được bi đỏ.

XSTK
N.T. M. Ngọc
1. Biến cố và xác suất
1.1 Phép thử và biến cố
1.2 Quan hệ giữa các biến cố
1.3 Các phép tính trên các biến cố
2. Khái niệm và các định nghĩa về xác suất
2.1 Khái niệm về xác suất
2.2 Định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển
2.3 Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê
2.4 Định nghĩa xác suất theo quan điểm hình học
2.5 Định nghĩa xác suất theo tiên đề (tiên đề Kolmogorov)
3. Các công thức xác suất cơ bản
3.1 Công thức cộng xác suất
3.2 Công thức xác suất điều kiện
3.3 Công thức nhân xác suất
3.4 Công thức xác suất đầy đủ

Công thức Bernoulli

Xét một dãy n phép thử độc lập giống nhau, trong mỗi phép thử chỉ xảy ra hai trường hợp: hoặc biến cố A xảy ra với xác suất p $(0 \leq p \leq 1)$ hoặc biến cố A không xảy ra với xác suất $q = 1 - p$. Những bài toán thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là tuân theo lược đồ Bernoulli. Khi đó xác suất để trong n phép thử độc lập nói trên, biến cố A xuất hiện đúng k lần là :

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{với } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Ví dụ

Ví dụ: Bắn 6 viên đạn vào bia, xác suất trúng bia của mỗi viên là 0.7. Tính xác suất để có đúng 3 viên trúng bia.

Ví dụ khác: Một sinh viên thi trắc nghiệm môn XSTK gồm có 10 câu hỏi, mỗi câu có 4 phần lựa chọn trả lời, trong đó chỉ có 1 phần đúng. Giả sử sinh viên làm bài bằng cách lựa chọn ngẫu nhiên các phần của câu hỏi. Tính xác suất để
a. Sinh viên vừa đủ điểm đậu.
b. Sinh viên chọn đúng ít nhất 1 câu hỏi.