Chương 2. CÂY

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Để thực hành các bài toán liên quan tới đồ thị và cây chúng ta sử dụng gói lệnh GraphTheory. Để gọi gói lệnh này ta dùng

```
> with(GraphTheory);
```

[AcyclicPolynomial,AddArc,AddEdge,AddVertex,AdjacencyMatrix,AllPairsDistance, . . .]

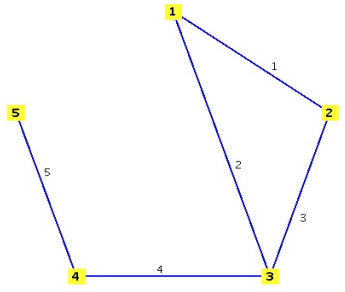
2.1 Đồ thị có trọng số

- Graph(E): Tạo ra đồ thị có tập cạnh (cung) E và có trọng số. Nếu E = $\{[\{i,j\},w],\ldots\}$ thì đồ thị có được là vô hướng, trong đó cạnh ij có trọng số là w. Nếu E = $\{[[i,j],w],\ldots\}$ thì đồ thị có được là có hướng, trong đó cung ij có trọng số là w.
- Graph(V, E): tương tự như Graph (E) trong đó danh sách đỉnh là V.
- Edges(G, weights): Danh sách các cạnh của đồ thị G kèm theo trọng số
- WeightMatrix(G): Ma trận trọng số của đồ thị G.
- Graph(W, weighted): Tạo ra đồ thị vô hướng có trọng số từ ma trận trọng số W
- Graph(directed, W, weighted): Tạo ra đồ thị có hướng có trọng số từ ma trận trọng số W

```
> with(GraphTheory):
> E:={ [{1, 2}, 1], [{1, 3}, 2], [{2, 3}, 3], [{3, 4}, 4], [{4, 5}, 5] };
  G := Graph(E);
```

G := 'Graph 1: an undirected weighted graph with 5 vertices and 5 edge(s)'

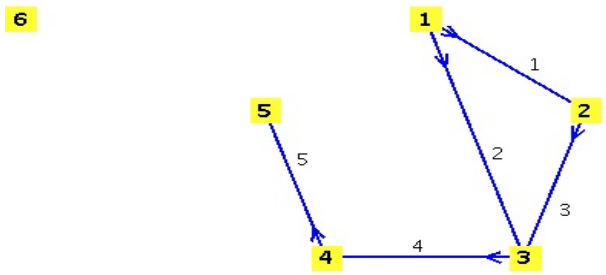
```
> DrawGraph(G);
```




```
> V := [1, 2, 3, 4, 5, 6]:
  E := {[ [1, 2], 1], [[1, 3], 2], [[2, 3], 3], [[3, 4], 4], [[4, 5], 5] ]}:
> H := Graph(V, E);
```

H := 'Graph 2: a directed weighted graph with 6 vertices and 5 arc(s)'

```
> DrawGraph(H);
```




```
> Edges(H, weights);
```

$$[[1,2],1],[[1,3],2],[[2,3],3],[[3,4],4],[[4,5],5]$$

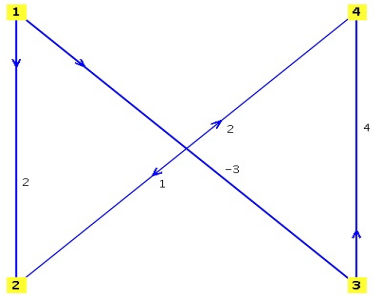
```
> WeightMatrix(H);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> W := Matrix([ [0, 2, -3, 0], [0, 0, 0, 2], [0, 0, 0, 4], [0, 1, 0, 0] ]):
  G := Graph(directed, W, weighted);
```

G := Graph 3: a directed weighted graph with 4 vertices and 5 arc(s)

```
> DrawGraph(G);
```



Ngoài ra để tạo ngẫu nhiên một đồ thị có trọng số, ta sử dụng thêm gói lệnh RandomGraphs. Nghĩa là gọi `> with(RandomGraphs);`

- RandomGraph(n, m, weights =i ..j): Tạo ra đồ thị vô hướng **liên thông** có trọng số có n đỉnh, m cạnh và trọng lượng mỗi cạnh có giá trị trong đoạn [i, j]
- RandomGraph(n, m, connected, weights =i ..j): Tạo ra đồ thị vô hướng có trọng số có n đỉnh, m cạnh và trọng lượng mỗi cạnh có giá trị trong đoạn [i, j]
- RandomGraph(n, m, directed, weights =i ..j): Tạo ra đồ thị **có hướng** có trọng số có n đỉnh, m cạnh và trọng lượng mỗi cạnh có giá trị trong đoạn [i, j]

```
> with(RandomGraphs);
```

[AssignEdgeWeights, RandomBipartiteGraph, RandomDigraph, RandomGraph, ...]

```
> G := RandomGraph(6, 7, weights = -10 .. 5):
  DrawGraph(G);
> H := RandomGraph(10, 9, connected, weights = -15 .. 5);
  DrawGraph(H);
> T := RandomGraph(5, 6, directed, weights = 8 .. 20);
  DrawGraph(T);
```

2.2 Cây

- RandomTree(n): Tạo ngẫu nhiên một cây có n đỉnh.
- RandomTree(n, degree < k): Tạo ngẫu nhiên một cây có n đỉnh và bậc mỗi đỉnh nhỏ hơn k
- RandomTree(n, weights =i ..j): Tạo ngẫu nhiên một cây có trọng số có n đỉnh và trọng lượng mỗi cạnh có giá trị trong đoạn [i, j]
- RandomTree(n, degree < k, weights =i ..j): Tạo ngẫu nhiên một cây có trọng số có n đỉnh, bậc mỗi đỉnh nhỏ hơn k và trọng lượng mỗi cạnh có giá trị trong đoạn [i, j]

```
> with(GraphTheory):
  with(RandomGraphs):
> T1 := RandomTree(20):
  DrawGraph(T1);
> T2 := RandomTree(30, degree < 4);
  DrawGraph(T2);
> T3 := RandomTree(40, weights = 1 .. 10);
  DrawGraph(T3);
> T4 := RandomTree(50, degree < 5, weights = 2 .. 5);
  DrawGraph(T4);
```

Một số lệnh liên quan đồ thị và cây

- IsTree(G): Kiểm tra G có phải là cây hay không?
- SpanningTree(G): Tìm một cây khung của đồ thị G.
- NumberOfSpanningTrees(G): Số lượng cây khung của đồ thị G.
- MinimalSpanningTree(G): Tìm một cây khung ngắn nhất của đồ thị có trọng số G.

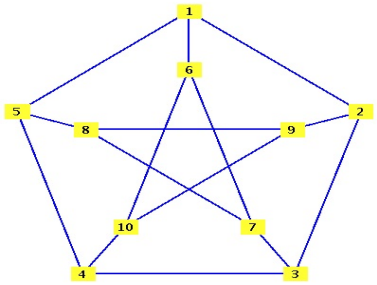
```
> G:= Graph({{1, 2}, {1, 3}}):
  IsTree(G);
```

$$true$$

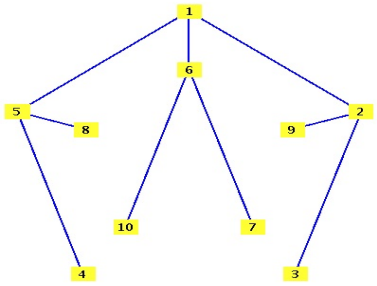
```
> H := Graph({{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}}):
  IsTree(H);
```

$$false$$

```
> with(SpecialGraphs);      # gói lệnh chứa một số đồ thị đặc biệt
> P := PetersenGraph();
> T := SpanningTree(P);
> DrawGraph(P);
```



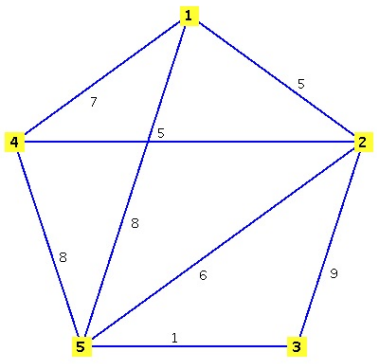

```
> DrawGraph(T);
```



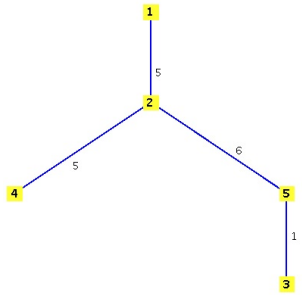

```
> NumberOfSpanningTrees(P);
```

$$2000$$

```
> W := Matrix([[0, 5, 0, 7, 8], [5, 0, 9, 5, 6], [0, 9, 0, 0, 1], [7, 5, 0, 0, 8], [8, 6, 1, 8, 0]]):
> G := Graph(W):
  DrawGraph(G);
```



```
> T := MinimalSpanningTree(G);
  DrawGraph(T);
```



▷ Bài tập thực hành

Bài 1. Cho ma trận kề của đồ thị đơn vô hướng G. Hãy viết chương trình kiểm tra G có là cây không?

Bài 2. Cho ma trận kề của đồ thị đơn vô hướng liên thông G. Hãy viết chương trình tìm cây khung của G bằng

a) thuật toán BFS

b) thuật toán DFS

Bài 3. Cho danh sách các cạnh và trọng lượng tương ứng của chúng của một đồ thị G. Hãy viết chương trình tìm ma trận trọng số của G.

Bài 4. Cho ma trận trọng số của đồ thị vô hướng liên thông G. Hãy tìm cây khung ngắn nhất và cây khung dài nhất của G bằng

a) thuật toán Kruskal

b) thuật toán Prim

Bài 5. Cho biểu thức số học dưới dạng tiền tố (hậu tố, trung tố). Hãy viết chương trình tính giá trị của nó.

Phần II. Bài tập

2.1 Cho các cây $T_i = (X_i, E_i)$ với $n_i = |X_i|$ và $m_i = |E_i|$ $(i = 1, 2)$. Tính n_1, n_2 và m_2 nếu biết $m_1 = 17$ và $n_2 = 2n_1$.

2.2 Cho G là một rừng có 7 cây và 40 cạnh. Tìm số đỉnh của G.

2.3 Cho G là một cây có một đỉnh bậc 3, hai đỉnh bậc 4, một đỉnh bậc 5 và các đỉnh còn lại có bậc ≤ 2. Tính số đỉnh treo của G.

2.4 Cho $T = (X, E)$ là một cây với $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Chứng minh rằng số đỉnh treo của T là

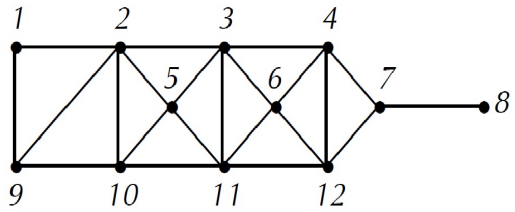
$$2 + \sum_{i=1 d(i)\geq 3}^{n} \Big(\deg(i) - 2\Big).$$

2.5 Cho G là một đồ thị vô hướng gồm n đỉnh, m cạnh và p thành phần liên thông (m $\geq 0, n \geq 1, p \geq 1$). Chứng minh rằng

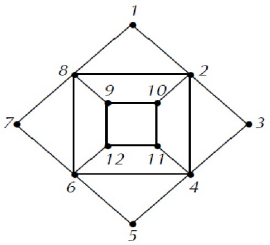
a) $m \geq n - p$.

b) G là một rừng nếu và chỉ nếu $m - n + p = 0$.

2.6 Hãy tìm cây khung của hai đồ thị sau bằng thuật toán BFS và DFS:



G_1



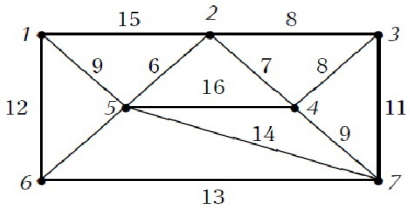
G_2

2.7

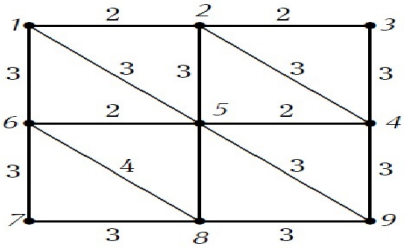
a) Chứng minh mỗi cây là một đồ thị lưỡng phân.

b) Cho G là đồ thị vô hướng. Chứng minh G là đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi G không có chu trình nào hoặc mọi chu trình của G đều có độ dài chẵn.

2.8 Cho hai đồ thị sau:



G_1



G_2

Đối với mỗi đồ thị hãy dùng thuật toán Kruskal và Prim để

a) tìm cây khung ngắn nhất.

b) tìm cây khung ngắn nhất chứa cạnh 34.

c) tìm cây khung dài nhất nhất.

d) tìm cây khung dài nhất có chứa cạnh 67 và không chứa cạnh 34.

2.9 Vẽ một cây nhị phân đủ có chiều cao $h = 3$, có 4 đỉnh trong và 5 lá.

2.10 Cho T là cây k-phân đủ có m đỉnh trong. Chứng minh rằng số đỉnh của T là $km + 1$.

2.11 Cho $T = (X, E)$ là một cây tam phân đủ có 34 đỉnh trong. Tính số cạnh và số lá của T.

2.12 Cho $T = (X, E)$ là một cây ngũ phân đủ có 817 lá. Hỏi T có bao nhiêu đỉnh trong?

2.13 Cho T là một cây tứ phân đủ có chiều cao 8. Hỏi T có nhiều nhất là bao nhiêu đỉnh trong? Còn nếu T là k-phân đủ có chiều cao h thì số đỉnh trong tối đa của T là bao nhiêu?

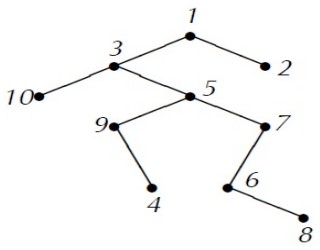
2.14 Một cây k-phân đủ có chiều cao h được gọi là cây k-phân đầy nếu tất cả các lá của nó đều ở mức h. Tìm số lá của cây nhị phân đầy nếu

a) $h = 3$. b) $h = 7$. c) $h = 12$.

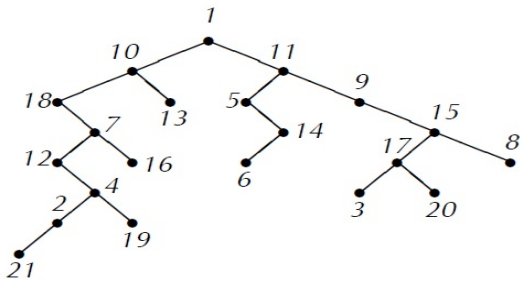
2.15 Cho T là cây nhị phân đầy. Tính số đỉnh trong và số cạnh của T biết chiều cao của T là $h = 5$.

2.16 Cho T là cây k-phân đầy có chiều cao 7 và 279 936 lá. Hỏi T có bao nhiêu đỉnh trong?

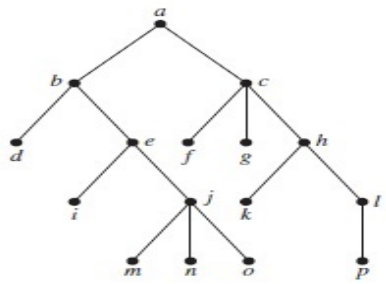
2.17 Cho các cây sau



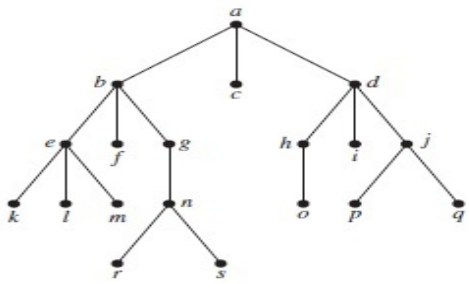
T_1



T_2



T_3



T_4

Hãy liệt kê các đỉnh của các cây khi dùng các phép duyệt tiền thứ tự, hậu thứ tự và trung thứ tự.

2.18 Viết các biểu thức sau đây bằng ký pháp Balan và ký pháp Balan ngược rồi vẽ cây nhị phân của các biểu thức tương ứng.

a) $\dfrac{w+x-y}{\pi x^3}$

b) $(n^n)^n(mn-q)$

c) $(((a+b)*c+d)*e)-((a+b)*c+d)$.

2.19 Tính giá trị biểu thức được viết bằng ký pháp Balan sau

a) $+4/*2\ 3+1-9\hat{}2\ 3$

b) $\hat{}2-4\ 2+2*2\ 4$

Lưu ý: $\hat{}$ là phép toán lấy lũy thừa.

2.20 Tính giá trị biểu thức được viết bằng ký pháp Balan ngược sau

a) $1\ 2+3\ 4*1\ 1/--2*$

b) $1\ 2\ 1\ 2*+*4*$

c) $1\ 4\ 2\ 3\ 4*-+*$