

# Chương 4. TỔ HỢP CƠ BẢN

## Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

Để thực hiện việc tính toán các bài toán liên quan tới tổ hợp chúng ta sử dụng gói lệnh `combinat`. Để gọi gói lệnh này ta dùng

```
> with(combinat);
```

Chi, bell, binomial, cartprod, character, choose, composition, conjpart, decodepart, encodepart, fibonacci, firstpart, graycode, inttovec, lastpart, multinomial, nextpart, numbcomb, numbcomp, numbpert, numbperm, partition, permute, powerset, prevpart, randcomb, randpart, randperm, setpartition, stirling1, stirling2, subsets, vectoint

### 4.1 Tính toán các công thức tổ hợp.

- `n!` hay `factorial(n)`: Tính  $n!$
- `numbperm(n, k)`: Số chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$ .
- `binomial(n, k)`: Số tổ hợp chập  $k$  của  $n$ .
- `multinomial(n, k1, k2, ..., km)`: Số hoán vị lặp của  $n$  vật từ  $k_1$  vật loại 1,  $k_2$  vật loại 2, ...,  $k_m$  vật loại  $m$ . (hay  $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$ ).

```
> 6!;
```

720

```
> numbperm(6, 4);
```

360

```
> binomial(20, 6);
```

38760

```
> multinomial(10, 2, 3, 5);
```

2520

```
> expand(binomial(n, 3));
```

`#expand(exp)` : Khai triển biểu thức `exp`

$$\frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

### 4.2 Liệt kê hoán vị, chỉnh hợp

- `permute(n)`: Danh sách các hoán vị của  $[1, 2, \dots, n]$ .
- `permute(S)`: Danh sách các hoán vị của  $S$ , trong đó  $S$  là danh sách hay tập hợp.
- `permute(n, k)`: Danh sách các chỉnh hợp chập  $k$  của  $[1, 2, \dots, n]$ .

- **permute(S, k)**: Danh sách các chỉnh hợp chập  $k$  của  $S$ , trong đó  $S$  là danh sách hay tập hợp.
- **randperm(n)**: Một hoán vị ngẫu nhiên của  $[1, 2, \dots, n]$ .
- **randperm(S)**: Một hoán vị ngẫu nhiên của  $S$ .

```
> permute(3);
      [[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]]
> permute([1, 1, 2]);
      [[1, 1, 2], [1, 2, 1], [2, 1, 1]]
> permute({a, b, c});
      [[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]]
> permute(3, 2);
      [[1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 3], [3, 1], [3, 2]]
> permute([1, 1, 2], 2);
      [[1, 1], [1, 2], [2, 1]]
> permute({a, b, c}, 2);
      [[a, b], [a, c], [b, a], [b, c], [c, a], [c, b]]
```

Ta có thể dùng hàm **permute** để giải các bài toán liên quan tới liệt kê hoán vị lặp, chỉnh hợp lặp.

**Ví dụ 1.** Có hai chữ số 1, một chữ số 5 và ba chữ số 8, hãy

- Liệt kê tất cả các số có 2 chữ số được tạo từ các chữ số trên.
- Liệt kê tất cả các hoán vị của các chữ số trên.

```
> S:=[1, 1, 5, 8, 8, 8];
> permute(S, 2);
      [[1, 1], [1, 5], [1, 8], [5, 1], [5, 8], [8, 1], [8, 5], [8, 8]]
> L:=permute(S);
      [1, 1, 5, 8, 8, 8], [1, 1, 8, 5, 8, 8], [1, 1, 8, 8, 5, 8], [1, 1, 8, 8, 8, 5], [1, 5, 1, 8, 8, 8], ...
> nops(L);
      60
```

**Ví dụ 2.** Liệt kê tất cả các số có ba chữ số được tạo từ các chữ số 1, 2, 3, 4 (có thể lặp lại).

```
> S:=[1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4];
> L:=permute(S, 3);
      [1, 1, 1], [1, 1, 2], [1, 1, 3], [1, 1, 4], [1, 2, 1], [1, 2, 2], [1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 3, 1], ...
```

## 4.3 Liệt kê tổ hợp

- **choose(n)**: Danh sách các tổ hợp của  $[1, 2, \dots, n]$ .
- **choose(S)**: Danh sách (t.ư. tập hợp) các tổ hợp của  $S$ , trong đó  $S$  là danh sách (t.ư. tập hợp).
- **choose(n, k)**: Danh sách các tổ hợp chập  $k$  của  $[1, 2, \dots, n]$ .
- **choose(S, k)**: Danh sách (t.ư. tập hợp) các tổ hợp chập  $k$  của  $S$ , trong đó  $S$  là danh sách (t.ư. tập hợp).
- **randcomb(n, k)**: Một tổ hợp ngẫu nhiên chập  $k$  của  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- **randcomb(S, k)**: Một tổ hợp ngẫu nhiên chập  $k$  của  $S$ .

```
> choose(3);
      [], [1], [2], [3], [1, 2], [1, 3], [2, 3], [1, 2, 3]

> choose([a, a, b]);
      [], [a], [b], [a, b], [a, a], [a, a, b]

> choose({1, 2, 3});
      {}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}

> choose(4, 2);
      [1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]

> choose([a, a, b], 2);
      [[a, a], [a, b]]

> choose({1, 2, 3}, 2);
      {{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}}

> randcomb(6, 3)      #Kết quả ngẫu nhiên
      {2, 3, 6}

> randcomb([1, 2, 2, 3, 3, 3], 3)      #Kết quả ngẫu nhiên
      [2, 2, 3]
```

Ta có thể dùng hàm **choose** để giải các bài toán liên quan tới liệt kê tổ hợp lặp.

**Ví dụ 3.** An mua 2 cái nón từ cửa hàng có 3 loại nón A, B, C. Hãy liệt kê tất cả khả năng mua của An.

```
> S:=[A, A, B, B, C, C];
```

> **choose(S, 2);**

$[[A, A], [A, B], [A, C], [B, B], [B, C], [C, C]]$

## 4.4 Tìm hệ số của một đơn thức trong khai triển lũy thừa của đa thức

- **coeff(f, x<sup>k</sup>):** Tính hệ số của  $x^k$  trong đa thức  $f$
- **coeff(coeff(f, x<sup>k</sup>), y<sup>t</sup>):** Tính hệ số của  $x^k y^t$  trong đa thức  $f$
- **coeffs(f):** Dãy các hệ số của đa thức  $f$  (chỉ áp dụng khi  $f$  đã được khai triển)

> **f := (2\*x^3-2\*y+3\*z^2+4\*t)^10;**

$$f := (2x^3 - 2y + 3z^2 + 4t)^{10}$$

> **coeff(f, y^9);**    #Tính hệ số  $y^9$

$$-10240x^3 - 15360z^2 - 20480t$$

> **coeff(coeff(coeff(coeff(f, x^6), y^4), z^2), t^3);**    #Tính hệ số  $x^6 y^4 z^2 t^3$

$$154828800$$

> **h:=expand(f);**    # $h$  là dạng khai triển của  $f$

> **L := coeffs(h);**    # $L$  là dãy các hệ số của đa thức  $h$ .

$$L := -46448640, 65318400, -82575360, -25194240, 737280, -30965760, \dots$$

> **nops([L]);**

$$286$$

Như vậy đa thức  $f := (2x^3 - 2y + 3z^2 + 4t)^{10}$  có

- hệ số của đơn thức  $x^6 y^4 z^2 t^3$  là 154828800;
- số đơn thức của  $f$  là 286.

## ► Bài tập thực hành

Lưu ý: Không sử dụng các hàm trong gói lệnh **combinat**.

**Bài 1.** Cho số nguyên dương  $n$ . Hãy liệt kê tất cả hoán vị của  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

- Tên hàm: **HoanVi**
- Input: Số nguyên dương  $n$ .
- Output: Danh sách các hoán vị của  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- Gọi hàm: **HoanVi(5);**

**Bài 2.** Cho số nguyên dương  $n$  và số nguyên  $0 \leq r \leq n$ . Hãy liệt kê tất cả các

a) chỉnh hợp chập  $r$  của  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

b) tổ hợp chập  $r$  của  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

- Tên hàm: **ChinhHop, ToHop**
- Input: Hai số nguyên  $n$  và  $r$ .
- Output: Danh sách các chỉnh hợp (tổ hợp) chập  $r$  của  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- Gọi hàm: **ChinhHop(6, 3); ToHop(6, 3);**

**Bài 3.** Cho hai số nguyên dương  $n$  và  $r$ . Hãy liệt kê tất cả các

a) chỉnh hợp lặp chập  $r$  của  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

b) tổ hợp lặp chập  $r$  của  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

- Tên hàm: **ChinhHopLap, ToHopLap**
- Input: Hai số nguyên  $n$  và  $r$ .
- Output: Danh sách các chỉnh hợp (tổ hợp) lặp chập  $r$  của  $\{1, 2, \dots, n\}$ .
- Gọi hàm: **ChinhHopLap(3, 4); ToHopLap(3, 4);**

**Bài 4.** Cho phương trình  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  trong đó  $n, k$  là số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các biến nguyên không âm. Hãy liệt kê tất cả các nghiệm của phương trình.

- Tên hàm: **NghiemNguyen**
- Input: Hai số nguyên  $n$  và  $k$ .
- Output: Danh sách các nghiệm của phương trình  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ .
- Gọi hàm: **NghiemNguyen(3, 4);**

## Phần II. Bài tập

**4.1** Có 12 cung hoàng đạo. Hỏi trong tối thiểu bao nhiêu người thì chắc chắn có ít nhất 6 người có cùng cung hoàng đạo.

**4.2** Cần chọn ít nhất bao nhiêu số hạng từ tập  $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$  sao cho trong các số đã chọn

- a) có hai số có tổng số là một số lẻ?                      b) có hai số có hiệu số là 5?

**4.3** Có bao nhiêu hoán vị của chuỗi ký tự ABCDEFGH chứa

- a) ED?                      c) BA và FGH?                      e) CAB và BED?  
b) CDE?                      d) AB, DE, và GH?                      f) BCA và ABF?

**4.4** Có bao nhiêu cách sắp xếp

- a) 5 nam và 5 nữ xen kẽ nhau thành một hàng dọc? Câu hỏi tương tự cho trường hợp 6 nam và 5 nữ.  
b) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau?  
c) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 4 nữ đứng gần nhau?  
d) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau và 4 nữ đứng gần nhau?  
e) 6 nam và 4 nữ thành một hàng dọc sao cho 6 nam đứng gần nhau hay 4 nữ đứng gần nhau?  
f) 6 bác sĩ 7 kỹ sư và 8 luật sư thành một hàng ngang sao cho các đồng nghiệp đứng gần nhau?

**4.5** Cho hai đường thẳng song song  $d_1$  và  $d_2$ . Chọn 17 điểm khác nhau trên  $d_1$  và 20 điểm khác nhau trên  $d_2$ . Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu tam giác khác nhau?

**4.6** Có bao nhiêu cách chọn 6 đối tượng từ 10 đối tượng khác nhau sao cho các đối tượng trong các lần chọn

- a) không có thứ tự và không lặp lại?                      c) có thứ tự và không lặp lại?  
b) không có thứ tự và cho phép lặp lại?                      d) có thứ tự và cho phép lặp lại?

**4.7** Làm tương tự Bài 1.6 trong trường hợp chọn 10 đối tượng từ 6 đối tượng khác nhau.

**4.8** Có bao nhiêu chuỗi nhị phân có độ dài 8 sao cho trong chuỗi không có sáu số 0 đứng liền nhau?

**4.9** Một sinh viên cất một bộ sưu tập gồm 40 bức ảnh khác nhau vào 4 ngăn tủ sao cho mỗi ngăn tủ chứa 10 ảnh. Hỏi sinh viên đó có bao nhiêu cách cất ảnh vào các ngăn tủ nếu:

- a) Các ngăn tủ được đánh số thứ tự để phân biệt nhau ?  
b) Các ngăn tủ giống hệt nhau ?

**4.10** Cho  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Hỏi có bao nhiêu tập hợp con  $A$  của  $X$

- a) chứa đúng 3 phần tử ?
- b) chứa 1 và 2 ?
- c) chứa đúng 5 phần tử mà trong đó có 1 và 2 ?
- d) chứa một số chẵn các phần tử ?
- e) chứa một số lẻ các phần tử ?

**4.11** Cho  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Hỏi  $X$  có bao nhiêu tập con  $A$  với  $|A| = 5$  và thỏa

- a)  $A$  chứa 3.
- b)  $\max A = 7$ .
- c)  $\min A = 2$  và  $\max A = 8$ .
- d)  $\min A = 2$  hoặc  $\max A = 8$ .

**4.12** Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 và 6, ta lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 10 chữ số mà trong đó ba chữ số 2, hai chữ số 4 và các chữ số khác có mặt đúng một lần ?

**4.13** Phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$  có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

**4.14** Trong bài thi kết thúc môn học Toán rời rạc có 10 câu hỏi với tổng số điểm của 10 câu là 100. Có bao nhiêu cách phân chia điểm cho các câu nếu mỗi câu được ít nhất 5 điểm ?

**4.15** Có bao nhiêu cách xếp 30 viên bi giống nhau vào 5 cái hộp khác nhau sao cho hộp 1 chứa ít nhất 5 viên, hộp 2 và 3 chứa nhiều nhất 6 viên và các hộp khác là tùy ý ?

**4.16** Phương trình  $x + y + z + t = 20$  có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa  $x \geq 1, y > 2, z > 3, t > 4$ ?

**4.17** Tìm số nghiệm nguyên của phương trình  $x_1 + x_2 + x_3 = 20$  trong hai trường hợp sau:

- a)  $x_1 \geq 2, x_2 \geq 3$  và  $x_3 \geq 5$ .
- b)  $2 \leq x_1 < 9, x_2 > 2$  và  $x_3 > 4$ .

**4.18** Tìm số nghiệm nguyên của phương trình  $x + y + z + t = 32$  (hay bất phương trình  $x + y + z + t \leq 32$ ) nếu

- a)  $x, y, z, t \geq 0$ .
- b)  $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 1$  và  $t > 5$ .
- c)  $x > -1, y \geq -4, z > 4$  và  $t \geq 3$ .
- d)  $x, y, z > 0$  và  $1 \leq t < 25$ .

**4.19** Có bao nhiêu cách chia 18 viên kẹo giống nhau cho 5 đứa trẻ nếu

- a) chia tùy ý?
- b) đứa nào cũng được kẹo?
- c) đứa lớn nhất có 6 viên?
- d) đứa nhỏ nhất được ít nhất 4 viên?

**4.20** Tìm hệ số của  $x^8$  trong khai triển

- a)  $(2x + 3)(3x - 5)^{10}$
- b)  $[1 + x^2(1 - x)]^8$ .

**4.21** Tìm hệ số của đơn thức

- a)  $xy^2z^3t$  trong khai triển  $(x + 2y - z + 4t - 5u)^7$ .
- b)  $x^3y^9z^4t^3$  trong khai triển  $(2x - y^3 - 3z^2 + 4t^3)^9$ .