Chương 5. SỐ NGUYÊN

Phần I. Hướng dẫn sử dụng Maple

5.1 Phép chia

Một số hàm liên quan tới phép chia và biểu diễn số nguyên.

- iquo(a, b): tính phần thương khi chia a cho b
- irem(a, b): tính phần dư khi chia a cho b
- convert(n, base, b): biểu diễn theo cơ số b của số nguyên n, kết quả được viết theo thứ tự ngược.
- convert($[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k]$, base, b, c): chuyển một số có dạng biểu diễn theo cơ số b ($(a_k\, a_{k-1} \ldots a_1\, a_0)_b$) sang dạng biểu diễn theo cơ số c. Lưu ý dạng biểu diễn được viết theo thứ tự ngược.
- convert(n, binary): biểu diễn nhị phân của n.
- convert(n, octal): biểu diễn bát phân của n.
- convert(n, hex): biểu diễn thập lục phân của n.

```
> iquo(234, 5);
                                46
> irem(234, 5);
                                4
> convert(23234, base, 4);       #Lưu ý kết quả được viết theo thứ tự ngược
                        [2, 0, 0, 3, 2, 2, 1, 1]
> convert([2, 0, 0, 3, 2, 2, 1, 1], base, 4, 10);
                           [4, 3, 2, 3, 2]
> convert(2324, binary);
                            100100010100
> convert(2324, octal);
                                4424
> convert(4534, hex);
                                11B6
```

5.2 Ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất

- igcd(a_1, a_2,. . . ,a_n): tính ước chung lớn nhất của $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- ilcm(a_1, a_2,. . . ,a_n): tính bội chung nhỏ nhất của $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
- igcdex(a, b, ‘s‘, ‘t‘): trả về giá trị d =igcd(a, b) và hai giá trị s, t sao cho $d = sa + tb$

```
> igcd(8723122, 30556708);
```
$$254$$
```
> igcd(24, 12, 18);
```
$$6$$
```
> ilcm(24, 12, 18);
```
$$72$$
```
> igcdex(712, 546, 's', 't');
```
$$2$$
```
> s;
```
$$125$$
```
> t;
```
$$-163$$

5.3 Số nguyên tố

- isprime(a): kiểm tra a có phải là số nguyên tố không?
- ithprime(n): số nguyên tố thứ n
- nextprime(a): số nguyên tố nhỏ nhất mà lớn hơn hay bằng a
- prevprime(a): số nguyên tố lớn nhất mà nhỏ hơn hay bằng a
- ifactor(a): phân tích a thành thừa số nguyên tố.
- ifactors(a): phân tích a thành thừa số nguyên tố và được viết dưới dạng danh sách.

```
> isprime(265261);
```
$$true$$
```
> ithprime(45);
```
$$197$$
```
> nextprime(14);
```
$$17$$
```
> prevprime(35);
```
$$31$$
```
> ifactor(29717395672536);
```
$$(2)^3(3)^5(11)(13)^2(31)(265261)$$
```
>ifactors(29717395672536);
```
$$[1, [[2, 3], [3, 5], [11, 1], [13, 2], [31, 1], [265261, 1]]]$$
```
>ifactors(-29717395672536);
```
$$[-1, [[2, 3], [3, 5], [11, 1], [13, 2], [31, 1], [265261, 1]]]$$

Phần II. Bài tập

Ký hiệu : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ và $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Bài 5.1 Tìm tất cả $k \in \mathbb{Z}$ thỏa

a) $(k^2+5k+5)(k^2-2k-9) = 1$

b) $(3k^2+4k-17)(-5k^2+k+49) = -2$

Bài 5.2 Tìm tất cả $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa

a) $x+y+xy = 0$

b) $3^x = 4y+1$

c) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{y}{3}$

d) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{4}$

Bài 5.3 Cho $n \in \mathbb{N}$ và $m, k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh

a) $7 \,|\, (2^n-1) \Leftrightarrow 3 \,|\, n$

b) 7 không chia hết (2^n+1)

c) 100 không chia hết (9^n+1)

d) $11 \,|\, (k^2+3k+5) \Leftrightarrow k = 4t+11$ với $t \in \mathbb{Z}$

e) 121 không chia hết (k^2+3k+5)

f) $11 \,|\, (6k-7m) \Leftrightarrow 11 \,|\, (4m-5k)$

g) $13 \,|\, (m+4k) \Leftrightarrow 13 \,|\, (10m+k)$

h) $17 \,|\, (3m+2k) \Leftrightarrow 17 \,|\, (5m+9k)$

Bài 5.4 Tìm số nguyên a sao cho

a) $a \equiv -15 \pmod{27}$ và $126 \le a \le 152$.

b) $a \equiv 24 \pmod{31}$ và $-85 \le a \le -55$.

c) $a \equiv 99 \pmod{41}$ và $100 \le a \le 140$.

d) $a \equiv 16 \pmod{42}$ và $201 \le a \le 242$.

Bài 5.5 Cho a, b là những số nguyên và $a \equiv 11 \pmod{19}$, $b \equiv 3 \pmod{19}$. Tìm số nguyên c với $0 \le c \le 18$ sao cho

a) $c \equiv 13a \pmod{19}$.

b) $c \equiv 8b \pmod{19}$.

c) $c \equiv a-b \pmod{19}$.

d) $c \equiv 7a+3b \pmod{19}$.

e) $c \equiv 2a^2+3b^2 \pmod{19}$.

f) $c \equiv a^3+4b^3 \pmod{19}$.

Bài 5.6 Tìm $d = (m,n)$, $e = [m,n]$ theo 2 cách khác nhau (bằng thuật chia Eulide và phân tích ra thừa số nguyên tố), chỉ ra dạng tối giản của $\dfrac{m}{n}$ rồi chọn $a, b, u, v \in \mathbb{Z}$ sao cho $d = am+bn$ và $\dfrac{1}{e} = \dfrac{u}{m} + \dfrac{v}{n}$ nếu m và n có các giá trị sau đây:

a) 43 và 16

b) 128 và -352

c) -442 và 276

d) -675 và -459

e) 936 và 715

f) 6234 và -3312

g) -35298 và 6768

h) -8820 và -36288

i) 12096 và 17640

j) 87657 và -44441

k) -654321 và 123456

l) -148500 và -7114800

Bài 5.7 Chứng minh $\forall k \in \mathbb{Z}$,

a) $(14k+3,\, 21k+4) = 1$

b) $(24k+2,\, -60k-4) = 2$

c) $(18k-12,\, 21-30k) = 3$

d) $(20-75k,\, 25-100k) = 5$.

Bài 5.8 Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_k^{r_k}$ là dạng phân tích thừa số nguyên tố của n.

a) n có bao nhiêu ước số dương và có bao nhiêu ước số ?

b) Giả sử n có $2m$ ước số dương. Chứng minh $\forall j \in 1, 2, \ldots, k, \exists s_j \in \mathbb{N}^*, r_j = 2^{s_j} - 1$.

Bài 5.9 Cho $n = 2^{14}3^9 5^8 7^{10} 11^3 13^8 37^{10}$.

a) n có bao nhiêu ước số dương và có bao nhiêu ước số ?

b) n có bao nhiêu ước số dương chia hết cho $2^3 3^4 5^7 11^2 37^2$?

c) n có bao nhiêu ước số dương chia hết cho 1 166 400 000?

Bài 5.10 Phân tích 15!, 20! và 25! thành tích của các thừa số nguyên tố.

Bài 5.11 Cho $k \in \mathbb{N}^*$. Tìm một $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho n có đúng k ước số dương.

Bài 5.12 Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq 2$.

a) Chứng minh $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$.

b) Giả sử $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_k^{r_k}$ là dạng phân tích thừa số nguyên tố của m và có $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ thỏa r_j lẻ. Chứng minh $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$.

Bài 5.13 Hãy biểu diễn các số sau theo hệ nhị phân, bát phân và thập lục phân

a) 15

b) 234

c) 3453

d) 24234535

e) 45324523

f) 65646434234

Bài 5.14 Hãy biểu diễn các số sau theo hệ thập phân

a) $(1\,1011)_2$

b) $(10\,1011\,0101)_2$

c) $(11\,1011\,1110)_2$

d) $(111\,1100\,0001\,1111)_2$

e) $(572)_8$

f) $(1604)_8$

g) $(423)_8$

h) (2417)8

i) $(80E)_{16}$

j) $(135\text{AB})_{16}$

k) $(\text{ABBA})_{16}$

l) $(\text{DEFACED})_{16}$

Bài 5.15 Hãy tính tổng và tích của các cặp số sau và biểu diễn chúng theo cơ số tương ứng.

a) $(100\,0111)_2$, $(111\,0111)_2$

b) $(1110\,1111)_2$, $(1011\,1101)_2$

c) $(10\,1010\,1010)_2$, $(1\,1111\,0000)_2$

d) $(10\,0000\,0001)_2$, $(11\,1111\,1111)_2$

e) $(112)_3$, $(210)_3$

f) $(2112)_3$, $(12021)_3$

g) $(20001)_3$, $(1111)_3$

h) $(120021)_3$, $(2002)_3$

i) $(763)_8$, $(147)_8$

j) $(6001)_8$, $(272)_8$

k) $(1111)_8$, $(777)_8$

l) $(54321)_8$, $(3456)_8$

m) $(1\text{AE})_{16}$, $(\text{BBC})_{16}$

n) $(20\text{CBA})_{16}$, $(\text{A}01)_{16}$

o) $(\text{ABCDE})_{16}$, $(1111)_{16}$

p) $(\text{E}0000\text{E})_{16}$, $(\text{BAAA})_{16}$