



Họ và tên SV: Nguyễn Văn Lộc  
 Mã số SV: 20120131  
 Ngày thi: 11/1/2022 Giờ thi: 15<sup>h</sup>40

Tên học phần: Toán học tổ hợp  
 Mã học phần: MTH00050  
 Số trang Tổng số trang: 1 8

Câu 1:

$a_k$  là số cách xếp  $k$  bit  $y$  khác nhau vào 6 hộp thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Giả  $e_i$  là số bit  $1$  hộp thứ  $i$  ( $i = 1, 6$ ). Ta có phương trình:

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 = k$$

với các điều kiện:

$$\begin{cases} e_1, e_2 \geq 0 \\ e_3 \geq 3 \\ e_4, e_5 \geq 2 \\ e_6 \neq 1 \text{ và } 10 : e_6 (e_6 \geq 0) \end{cases}$$

Từ các điều kiện trên, hàm sinh cho dãy  $\{a_k | k \geq 0\}$  là:

$$F(x) = (1+x^2)$$

$$F(x) = (1+x+x^2+x^3+\dots)^2 (x^3+x^4+x^5+\dots) (x^2+x^3+\dots)^2 (x^2+x^5+x^{10})$$

$$\Leftrightarrow F(x) = (1+x+x^2+\dots)^2 x^3 (1+x+x^2+\dots)^4 (1+x+x^2+\dots)^2 (x^2+x^5+x^{10})$$

$$\Leftrightarrow F(x) = x^7 (1+x+x^2+\dots)^5 x^2 (1+x^3+x^8)$$

$$\Leftrightarrow F(x) = x^9 (1+x^3+x^8) \frac{1}{(1-x)^5}$$

$$\Leftrightarrow F(x) = x^9 (1+x^3+x^8) \sum_{k=0}^{\infty} C_k^4 x^k$$

Hệ số  $a_{24}$  của  $x^{24}$  trong  $F(x)$  là hệ số của  $x^{15}$  trong  $(1+x^3+x^8) \sum_{k=0}^{\infty} C_k^4 x^k$

$$\text{Vậy: } a_{24} = C_{15}^4 + C_{12}^4 + C_7^4 = 6026$$

Họ và tên SV: Nguyễn Văn Lợi

Mã số SV: 20120131

Ngày thi: 4/1/2022. Giờ thi: 15<sup>h</sup>40

Tên học phần: Toán học tổ hợp

Mã học phần: MTH0050

Số trang/Tổng số trang: 2/8

Câu 2:

$b_k$  là số cách xếp  $k$  nhân viên vào 4 phòng làm việc thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Giả  $e_i$  là số nhân viên ở phòng thứ  $i$  ( $i = 1, 4$ ). Ta có phương trình:

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$$

Với các điều kiện:

$$\begin{cases} e_1, e_2 \geq 0 \\ e_3 \leq k' \\ e_4 \geq 1 \end{cases}$$

Từ các điều kiện trên, hàm sinh mũ của dãy  $\{b_k | k \geq 0\}$  là:

$$E(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^2 \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\Leftrightarrow E(x) = (e^x)^2 (e^x - 1) \cdot \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} (e^x - 1) (e^x - e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \frac{1}{2} (e^{3x} - e^{2x}) (e^x - e^{-x})$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \frac{1}{2} (e^{4x} - e^{2x} - e^{3x} + e^x)$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \frac{1}{2} (e^{4x} - e^{3x} - e^{2x} + e^x)$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{4^k x^k}{k!} - \frac{3^k x^k}{k!} - \frac{2^k x^k}{k!} + \frac{x^k}{k!} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{b_k}{k!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4^k - 3^k - 2^k + 1}{k!} \Rightarrow b_k = \frac{1}{2} (4^k - 3^k - 2^k + 1)$$



Họ và tên SV: Nguyễn Văn Lộc  
 Mã số SV: 20120131  
 Ngày thi: 11/1/2022, Giờ thi: 15h40

Tên học phần: Toán học tổ hợp  
 Mã học phần: MTH00050  
 Số trang Tổng số trang: 3 8

Câu 3:

a. ~~Giải  $A_i (i=1, 2, 3)$~~

a.  $A_i (i=1, 3)$  là tập hợp các dãy số gồm 5 chữ số dương trong hệ thập phân mà không chứa chữ số  $i$ .

$$|U| = 9^5 = 59049$$

$$|A_1| = 8^5 \Rightarrow S_1 = 3 \cdot 8^5 = 98098304$$

$$|A_i \cap A_j| = 7^5 \Rightarrow S_2 = C_3^2 \cdot 7^5 = 50421$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 6^5 \Rightarrow S_3 = 6^5 = 7776$$

a. Theo yêu cầu bài toán:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = S_1 - S_2 + S_3 = 55659$$

b. Theo yêu cầu bài toán:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3390$$

c. Theo yêu cầu bài toán:

$$N_1 = \sum_{i=0}^3 C_{4+i}^i$$

~~a. Theo yêu cầu bài toán:~~

$$N_1 = \sum_{i=0}^3 C_{4+i}^i S_{4+i} - S_4$$

c. Theo yêu cầu bài toán:

$$N_1 = \sum_{i=0}^3 (-1)^i C_{4+i}^i S_{4+i} = S_4 - C_2^1 S_3 + C_3^2 S_2 = 20790$$

d. Theo yêu cầu bài toán:

$$N_2^* = \sum_{i=0}^3 (-1)^i C_{4+i}^i S_{4+i} = S_4 - C_2^1 S_3 = 34869$$



Họ và tên SV: Nguyễn Văn Lộc  
Mã số SV: 20190131  
Ngày thi: 11/1/2022 Giờ thi: 15<sup>h</sup> 40

Tên học phần: Toán học tổ hợp  
Mã học phần: MTH00050  
Số trang/Tổng số trang: 4 / 8

Câu 4:

Ta thêm vào 2 "bàn trẻ ảo"

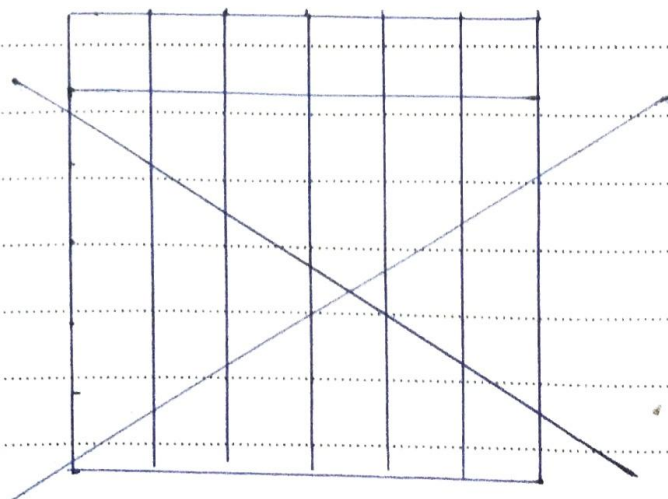
Ta thêm vào 1 "bàn trẻ ảo"  $f$  (có thể chọn mua bất kỳ căn nhà nào).

Bài toán trở thành tính  $|P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)|$  với  
 $x_1 = \{2, 3\}$ ,  $x_2 = \{1, 3\}$ ,  $x_3 = \{2, 3\}$ ,  $x_4 = \{5, 6\}$ ,  
 $x_5 = \{4, 5, 6\}$ ,  $x_6 = \emptyset$

Ta cần tìm cách đặt 6 quân xe lên bàn cờ  $6 \times 6$  nhưng phải tránh các ô bị cấm (được đánh dấu) như sau:

	1	2	3	4	5	6
a		•	•			
b	•		•			
c		•	•			
d					•	•
e				•	•	•
f						

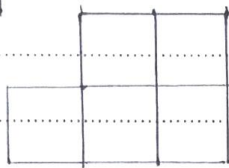
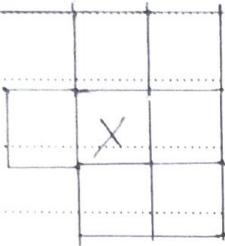
Gọi C là bàn cờ tạo bởi các ô bị cấm



}  $b^2$

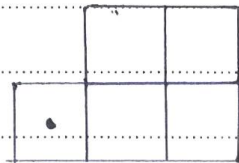
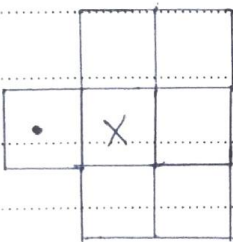
Họ và tên SV: Nguyễn Văn Lộc  
Mã số SV: 20120131  
Ngày thi: 11/1/2022 Giờ thi: 15<sup>h</sup>40

Tên học phần: Toán học tổ hợp  
Mã học phần: MTH000.50  
Số trang/Tổng số trang: 5 / 8



C (ô được đánh dấu x KHÔNG nằm trong C)

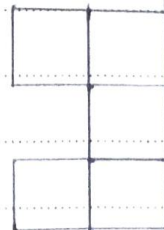
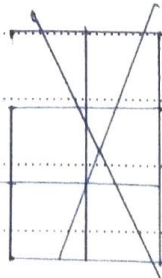
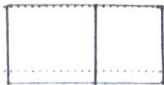
C gồm 2 phần rời nhau D và E như sau (ô được đánh dấu x KHÔNG nằm trong D)



D

E

Trong D, chọn  $\Delta$  là ô đánh dấu chấm (.)



F

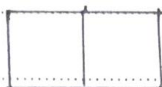
G

Trong E, chọn  $\Delta$  là ô được đánh dấu chấm (.)

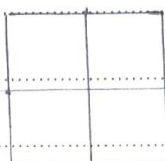


Họ và tên SV: Nguyễn Văn Lễ  
 Mã số SV: 20120131  
 Ngày thi: 11/1/2022 Giờ thi: 15<sup>h</sup>40

Tên học phần: Toán học tổ hợp  
 Mã học phần: MTH00050  
 Số trang/Tổng số trang: 6/8



H



I

$$\begin{aligned}
 r(C, x) &= r(D, x) \cdot r(E, x) = [x^6] \\
 R(C, x) &= R(D, x) \cdot R(E, x) = [xR(F, x) + R(G, x)] \cdot [xR(H, x) + R(I, x)] \\
 &= [x(1 + 4x + 2x^2) + (1 + 5x + 3x^2)] \cdot [x(1 + 2x + x^2) + (1 + 4x + 2x^2)] \\
 &= 1 + 11x + 41x^2 + 62x^3 + 44x^4 + 15x^5 + 2x^6 \\
 |P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)| &= \sum_{k=0}^6 (-1)^k (6-k)! r_k(C) \\
 &= 1 \cdot 6! - 11 \cdot 5! + 41 \cdot 4! - 62 \cdot 3! + 44 \cdot 2! - 15 \cdot 1! + 2 \cdot 0! \\
 &= 87
 \end{aligned}$$

Vậy các bạn trẻ có 87 cách chọn mua nhà đi ăn cơm.

Câu 5:

a. Số phép phân hoạch tam giác của đa giác là 10 cạnh trên một phẳng là số Catalan thứ 8 ( $C_8$ ).

$$C_8 = \frac{1}{8+1} \cdot C_{2 \cdot 8} = \frac{1}{9} \cdot C_{16} = 1430$$

b. ~~Số cách chia 7 cuốn truyện tranh khác nhau cho 5 đứa trẻ thỏa mãn đề bài là số Stirling loại 2:  $S_7^5$~~

$$S_7^5 = 5 \cdot S_6^5 + S_6^4 = 5 \cdot S_6^5 + 4 \cdot S_5^4 + S_5^3$$





Họ và tên SV: Nguyễn Văn Lê  
 Mã số SV: 20120131  
 Ngày thi: 11/1/2022 Giờ thi: 15h40

Tên học phần: Toán học tổ hợp  
 Mã học phần: MT11000-50  
 Số trang/Tổng số trang: 7 / 8

$$= 5 \cdot S_6^5 + 4 \cdot S_5^4 + 3 \cdot S_4^3 + S_4^2$$

$$= 5 \cdot C_6^2 + 4 \cdot C_5^3 + 3 \cdot C_4^2 +$$

b) Số cách chia 7 cuốn truyện tranh khác nhau cho 5 đứa trẻ thỏa mãn đề bài là:  $5! \cdot S_7^5$

$$S_7^5 = 5 \cdot S_6^5 + S_6^4$$

$$S_7^5 = 5 \cdot S_6^5 + S_6^4 = 5 \cdot S_6^5 + 4 \cdot S_5^4 + S_5^3$$

$$= 5 \cdot S_6^5 + 4 \cdot S_5^4 + 3 \cdot S_4^3 + S_4^2$$

$$= 5 \cdot C_6^2 + 4 \cdot C_5^2 + 3 \cdot C_4^2 + 2^3 - 1 = 140$$

Vậy số cách chia thỏa mãn đề bài là:

$$5! \cdot S_7^5 = 46800 \text{ (cách)}$$

c)  $B_0 = B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, B_5 = 52$

$$B_6 = \sum_{k=0}^5 C_5^k \cdot B_k = C_5^0 \cdot B_0 + C_5^1 \cdot B_1 +$$

$$+ C_5^2 \cdot B_2 + C_5^3 \cdot B_3 + C_5^4 \cdot B_4 + C_5^5 \cdot B_5$$

$$= 203$$



Họ và tên SV: Nguyễn Văn Lã

Mã số SV: 20120131

Ngày thi: 21/1/2022 Giờ thi: 15h40

Tên học phần: Toán học tổ hợp

Mã học phần: MTH0050

Số trang/Tổng số trang: 8/8

Do  $B_6 = 203$  nên có 203 phép phân hoạch một tập hợp  $T$  gồm 6 phần tử thành các tập con khác rỗng và nhau từng đôi một.