

Bài tập chương 2: Biến ngẫu nhiên - Vectơ ngẫu nhiên

N. T. Mộng Ngọc

1. Dòng điện trong một mạch nhất định được đo bằng một ampe kế là biến ngẫu nhiên liên tục X với hàm mật độ sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0,075x + 0,2 & \text{khi } 3 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{nơi khác.} \end{cases}$$

(a) Tính $\mathbb{P}(X \leq 4)$ và so sánh với xác suất $\mathbb{P}(X > 4)$.

(b) Tính xác suất $\mathbb{P}(3,5 \leq X \leq 4,5)$ và $\mathbb{P}(X > 4,5)$.

2. Cho X là biến ngẫu nhiên có phân phối xác suất

X	1	2	3	4	5	6	7
p	a	2a	2a	3a	a^2	$2a^2$	$7a^2+a$

(a) Xác định a.

(b) Tính $P(X \geq 5)$ và $P(X < 3)$

(c) Tìm k nhỏ nhất sao cho $P(\leq k) \geq 1/2$.

3. Cho hai biến ngẫu nhiên độc lập X và Y có bảng phân phối xác suất sau Lập bảng

X	-1	0	1	2
P	0,3	0,2	0,3	0,2

Y	-1	0	1
P	0,3	0,4	0,3

bảng phân phối xác suất của $X + Y$ và $X.Y$.

4. Linda là một nhân viên bán hàng tại một đại lý ô tô lớn. Với mức hoa hồng 25% lợi nhuận tính trên mỗi chiếc xe cô bán, Linda dự kiến sẽ kiếm được 350\$ cho mỗi chiếc xe hơi bán được và 400\$ cho mỗi chiếc xe tải hoặc SUV bán được. Linda thúc đẩy bản thân bằng cách sử dụng ước lượng xác suất cho doanh thu của mình. Vào một ngày Thứ Bảy của tháng Tư, cô ước tính doanh số bán xe hơi của mình như sau: và xe tải hoặc SUV như sau:

Đặt X là số xe hơi Linda bán và Y số xe tải hoặc SUV.

Số xe bán	0	1	2	3
Xác suất	0,3	0,4	0,2	0,1

Số xe bán	0	1	2
Xác suất	0,4	0,5	0,1

- (a) Hãy tính trung bình lượng xe mỗi loại cô ta bán từ đó suy ra doanh thu trung bình cô ta thu được.
- (b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn cho biến X .
5. Một nhà sản xuất ổ đĩa bán ra các thiết bị lưu trữ với dung lượng 1 terabyte, 500 gigabyte và 100 gigabyte với tỷ lệ tương ứng là 50%, 30% và 20%. Doanh thu ước tính trong năm tương ứng với từng thiết bị bán ra là 50 triệu \$, 25 triệu \$ và 10 triệu \$. Xác định hàm xác suất, hàm phân phối cho doanh thu của thiết bị lưu trữ trong năm đó. Tính doanh thu trung bình của thiết bị lưu trữ trong năm đó.
6. Đặt ngẫu nhiên mỗi một trái banh trong ba trái banh đang có vào một trong ba cái chén. Tìm phân phối xác suất cho Y với Y là số cái chén trống.
7. Một giáo sư đại học không bao giờ kết thúc bài giảng của mình trước khi hết giờ và luôn hoàn thành bài giảng của mình trong vòng 2 phút sau giờ học. Cho X là thời gian trôi qua giữa thời điểm hết tiết học và kết thúc bài giảng của giáo sư. Giả sử hàm mật độ của X là:
- $$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{nơi khác.} \end{cases}$$
- (a) Tìm k .
- (b) Hãy tính xác suất bài giảng kết thúc trong vòng 1 phút sau khi giờ học kết thúc.
- (c) Hãy tính xác suất bài giảng tiếp tục diễn ra sau khi giờ học kết thúc từ 60 s tới 90 s.
- (d) Xác suất mà bài giảng tiếp tục trong ít nhất 90 s ngoài giờ kết thúc là bao nhiêu?
8. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{nếu } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

(a) Tìm hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $Y = 2X - 3$.

(b) Tính $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{V}(X)$ và $\mathbb{V}(Y)$.

9. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0, \\ 1 & \text{nếu } x > \pi/4, \\ \sin(2x) & \text{nếu } 0 \leq x \leq \pi/4. \end{cases}$$

(a) Tìm hàm mật độ xác suất của X .

(b) Tính $P(-\pi/6 \leq X \leq \pi/4)$.

10. Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) :

X \ Y	Y		
	1,5	2	3,5
1	3λ	λ	0
2	2λ	4λ	2λ
4	λ	2λ	5λ

(a) Xác định hằng số λ .

(b) Tìm các phân phối lề của BNN X và của BNN Y .

(c) Tìm hàm mật độ có điều kiện của Y khi biết $X = x$ và hàm mật độ có điều kiện của X khi biết $Y = y$.