HƯỚNG DẪN BÀI TẬP TOÁN HỌC TỔ HỢP 2021

CHƯƠNG I: ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ.

1.1/ Mỗi đội bóng xem như một đỉnh. Ở một thời điểm bất kỳ của giải đấu, mỗi trận đã đấu giữa hai đội nào đó xem như là cạnh duy nhất nối giữa hai đỉnh tương ứng. Ta có một đơn đồ thị. Việc chứng minh hai đội nào đó có cùng số trận đã thi đấu tương tự như chứng minh đồ thị có hai đỉnh nào đó cùng bậc trong Ví dụ của mục (**2.1**).

1.2/ Gọi 6 người là a, b, c, d, e, f. Phản chứng : giả sử trong ba người bất kỳ, ta luôn có hai người quen nhau và hai người không quen nhau. Nếu có một người quen với ít nhất 3 người khác : mâu thuẫn (?). Như vậy mỗi người chỉ quen tối đa với hai người khác. Nếu a quen với b và c thì d, e, f quen nhau (?): mâu thuẫn. Do đó mỗi người chỉ quen tối đa với một người khác. Nếu a quen với b thì c, d, e quen với nhau (?): mâu thuẫn.

1.3/ Đặt $| V | = n$. Ta có $2 \times 19 = 2 | E | = \sum_{v \in V} d(v) \geq 3n$ với n nguyên dương.

1.4/ Đặt $| V | = n$. Ta đã tính m theo n. Từ đó hãy tính n theo m.

1.5/ Qui nạp theo $n \geq 4$. Khi $n = 4$: hiển nhiên. Xét $n \geq 5$ và có giả thiết qui nạp. Gọi n người của nhóm là $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ta có thể xem a_n là người có nhiều người quen nhất trong nhóm. Khi đó a_n sẽ quen với $(n - 2)$ hoặc $(n - 1)$ người trong nhóm (?). Giả sử a_n chỉ quen với $(n - 2)$ người trong nhóm, chẳng hạn a_n quen với $a_2, \ldots, a_{n-1}$ và không quen với a_1. Nhóm a_1, a_n, a_i, a_j $(2 \leq i \neq j \leq n - 1)$ phải có a_i quen với a_j .

Nhóm a_1 , a_n , a_2 , a_3 phải có (a_2 quen với a_1 , a_n , a_3) hay (a_3 quen với a_1 , a_n , a_2): mâu thuẫn từ số người quen của a_2 hay của a_3 (?).

1.6/ Giả sử mỗi đội đã thi đấu tối đa 2 trận. Đây là đồ thị có n đỉnh và $(n + 1)$ cạnh. Dùng công thức $2 | E | = \sum_{v \in V} d(v)$ để suy ra mâu thuẫn.

1.7/ Đặt $| V | = n$. Dùng công thức $2 | E | = \sum_{v \in V} d(v)$ để tính toán và suy luận.

c) Gọi $x, y \in \mathbf{N^*}$ lần lượt là số đỉnh bậc 3 và 4. Ta có $(3 \times 5) + 3x + 4y = 2 \times 16$.

d) Gọi $x \in \mathbf{N^*}$ là số đỉnh bậc 5. Ta có $(3 \times 4) + 5(x - 3) = 2 \times 21$.

e) Gọi $r \in \mathbf{N}$ là bậc của mỗi đỉnh. Ta có $nr = 2 \times 24$ (có hai ẩn số n và r nguyên ≥ 0).

1.8/ a) Phản chứng và dùng công thức $2 | E | = \sum_{v \in V} d(v)$ để có mâu thuẫn.

b) Qui nạp theo $| V | = n \geq 1$. Nếu $n = 1$ thì hiển nhiên (?).

Cho $k \geq 2$. Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k$. Xét $n = k + 1$. Nếu G có đỉnh cô lập a thì $G' = (V' = V \setminus \{a\}, E)$ có chu trình sơ cấp (?). Nếu G có đỉnh treo a và cạnh treo α qua a thì $G' = (V \setminus \{a\}, E \setminus \{\alpha\})$ có chu trình sơ cấp (?).

Khi mọi đỉnh của G có bậc ≥ 2, xét đường sơ cấp (P) có độ dài lớn nhất của G.

Nếu (P) không là chu trình thì mọi đỉnh của (P) (gồm $a_1, a_2, \ldots, a_p$) khác nhau (?).

Đỉnh đầu a_1 có cạnh $\beta = \overline{a_o a_1} \notin (P)$ và $(P) \cup \{ \beta \}$ là một đường sơ cấp của G dài hơn (P) (?).

c) Dùng công thức $2 | E | = \sum_{v \in V} d(v)$ để có một bất đẳng thức và áp dụng b).

1.9/ $\sum_{v \in V} d(v) = k$ + một số chẵn (cộng thêm các bậc tạo ra từ các vòng có đỉnh thuộc A và từ các cạnh có hai đỉnh đều thuộc A).

$$\sum_{v\in A} d(v) = \sum_{v\in A} d(v)\,\text{lẻ} + \sum_{v\in A} d(v)\,\text{chẵn} = \sum_{v\in A}\{1+[d(v)-1]\}\,[\text{ d(v) lẻ }] + \sum_{v\in A} d(v)\,\text{chẵn}$$

$$= h + \text{một số chẵn.}$$

1.10/ Giả sử G có tối đa một đỉnh không khớp. Chọn đường đơn (P) trong G dài nhất nối a và b (a, b $\in$ V). Ta xem như a là một đỉnh khớp (?). Xét G' là đồ thị G xóa đỉnh a và các cạnh đi qua a. Gọi H là một thành phần liên thông của G' thỏa b $\in$ H (?) và chọn c $\in$ H. Khi đó mọi đường đơn nối b và c trong G phải đi qua a (?) và ta có một đường đơn (Q) trong G dài hơn đường đơn (P) (?).

1.11/ a) Xét p = 1. Ta chứng minh $(n - 1) \leq m$ bằng qui nạp theo $n \geq 1$. Khi n = 1 thì hiển nhiên. Cho $k \geq 2$ và giả sử bất đẳng thức đúng khi n = k. Xét n = k + 1.
Chọn a $\in$ V và G' = (V', E') là đồ thị G xóa đỉnh a và các cạnh đi qua a.

G' là đơn đồ thị có | V' | = k và | E' | < | E | (?) nên $(k - 1) \leq |E'| \leq (m - 1)$.

Xét $p \geq 2$: G có các TPLT là $G_j = (V_j , E_j)$ với $|V_j| = n_j$ và $|E_j| = m_j$ $(1 \leq j \leq p)$.

Từ $(n_j - 1) \leq m_j$ $(1 \leq j \leq p)$, ta suy ra ngay $(n - 1) \leq m$.

Ta chứng minh $2m \leq (n - p)(n - p + 1)$ bằng qui nạp theo $p \geq 1$.

Khi p = 1 thì bất đẳng thức đúng (?). Cho $k \geq 2$ và giả sử bất đẳng thức đúng khi p = k. Xét p = k + 1. Coi $G = H \cup G'$ với H là một TPLT của G và $H \cap G' = \varnothing$.

H có m_1 cạnh, n_1 đỉnh và G' có m_2 cạnh, n_2 đỉnh, k TPLT.

Ta có $2m_1 \leq (n_1 - 1)(n_1 - 1 + 1)$ và $2m_2 \leq (n_2 - k)(n_2 - k + 1)$. Để ý bất đẳng thức $(n_1 - 1)^2 + (n_1 - 1) + (n_2 - k)^2 + (n_2 - k) \leq (n_1 + n_2 - k - 1)^2 + (n_1 + n_2 - k - 1)$, ta sẽ có bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Nếu $p \geq 2$ thì ta có đồng thời hai bất đẳng thức mâu thuẫn nhau.

1.12/ Xét a, b $\in$ V (a $\neq$ b) và không có đường với độ dài ≥ 2 nối a và b. Do d(a) $\geq$ k và d(b) $\geq$ k nên có các đỉnh khác nhau $a_1, \ldots, a_p$, $b_1, \ldots, b_q \in V$ ($p \geq k \leq q$) và các cạnh $\overline{aa_i}$ ($1 \leq i \leq p$) và $\overline{bb_j}$ ($1 \leq j \leq q$) thỏa { a, b } $\cap$ { $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots , b_q$ } = $\varnothing$ (?).

Suy ra | V | $\geq$ 2k + 2 (?) : mâu thuẫn.

1.13/ Dùng **1.12**.

1.14/ Nếu G liên thông thì xong. Giả sử G rời rạc, nghĩa là có u, v $\in$ V (u $\neq$ v) và không có đường nối u và v trong G. khi đó có $\overline{uv} \in \overline{G}$. Ta chứng minh $\overline{G}$ liên thông.

Xét a, b $\in$ V (a $\neq$ b).

Nếu ($\overline{au} \in \overline{G}$ hay $\overline{ub} \in \overline{G}$) và ($\overline{av} \in \overline{G}$ hay $\overline{vb} \in \overline{G}$) thì mâu thuẫn (?).

Do đó ($\overline{au} \in G$ và $\overline{ub} \in G$) hay ($\overline{av} \in G$ và $\overline{vb} \in G$) : điều phải chứng minh (?).

Chọn G gồm 5 đỉnh và 5 cạnh của một ngũ giác lồi trên mặt phẳng. Khi đó G và $\overline{G}$ đều liên thông.

1.15/ H = G $\cup$ $\overline{G}$ là đơn đồ thị đầy đủ có 28 cạnh và dùng (**1.4**).

1.16/ Giả sử G có hai đường sơ cấp dài nhất (P), (Q) thỏa (P) và (Q) không có đỉnh chung. Gọi a và b lần lượt là hai đỉnh đầu của (P) và (Q). Ta có đường sơ cấp (L) của G nối a và b. Viết (P) : $\overline{a_1a_2...a_p}$ và (Q) : $\overline{b_1b_2...b_p}$ (a = a_1 và b = b_1). Ta có

i, j $\in$ {1, 2, …, p} và có đường sơ cấp (L’) [(L’) không có cạnh chung với (P) và (Q)] trong G nối a_i và b_j. Khi đó $\overline{a_1a_2...a_i} \cup$ (L’) $\cup$ $\overline{b_jb_{j+1}...b_p}$ hoặc $\overline{b_1b_2...b_j} \cup$ (L’) $\cup$ $\overline{a_ia_{i+1}...a_p}$

là đường sơ cấp trong G dài hơn cả (P) và (Q) (?) : mâu thuẫn.

1.17/ Đặt | E | = | E’ | = m. ta có $H = G \cup \overline{G}$ là đơn đồ thị đầy đủ có 2m cạnh và n đỉnh.

Tính m theo n để thấy n(n – 1) ⋮ 4 và suy ra điều phải chứng minh (?).

1.18/ ($\Rightarrow$) : Cho a là một điểm khớp của G. Đặt G’ là đồ thị G xóa a và xóa mọi cạnh đi qua a. Khi đó G’ rời rạc và có các đỉnh x, y trong G’ sao cho không có đường nối x và y trong G’. Xét đường (P) trong G nối x và y thì (P) $\not\subset$ G’ (?).

Nếu (P) không qua a thì (P) $\subset$ G’ (?) : mâu thuẫn.

($\Leftarrow$) : Giả sử có các đỉnh x, y trong G sao cho mọi đường nối x và y đều qua a. Đặt G’ là đồ thị G xóa a và mọi cạnh đi qua a. Nếu G’ liên thông thì có đường (P) trong G’ nối x và y. Ta có (P) $\subset$ G’ và (P) qua a: mâu thuẫn. Vậy G’ rời rạc.

1.19/ (G và G’) : tính số đỉnh bậc 2 của mỗi đồ thị.

(H và H’) : lập ma trận kề của mỗi đồ thị lần lượt theo các tập hợp đỉnh có thứ tự

V = { a, b, c, p, q, r } (của H) và V’ = { x, m, j, n, s, t } (của H’).

(K và K’) : xét tính liên thông của mỗi đồ thị.

(L và L’) : tính số chu trình đơn tứ giác của mỗi đồ thị.

(P và P’) : lập ma trận kề của mỗi đồ thị lần lượt theo các tập hợp đỉnh có thứ tự

V = { a, b, c, u, v, w, x } (của P) và V’ = { m, q, s, n, p, t, r } (của P’).

(Q và Q’) : lập ma trận kề của mỗi đồ thị theo các tập hợp đỉnh có thứ tự

V = { a, b, c, u, v, w, p, q, h, k }(của Q) và V’ = { m, s, z, i, j, x, t, y, r, n } (của Q’).

(S và S’) : tính số chu trình đơn tam giác của mỗi đồ thị.

(T và T') : T là đa đồ thị và T' là đơn đồ thị .

1.20/ Nếu G có các cạnh lặp thì G có ít nhất một chu trình sơ cấp có độ dài 2.

Xét G là đơn đồ thị. Ta có $|V| \geq 4$. Theo bài **1.8**, ta chọn (P) là một đường sơ cấp dài nhất của G thì (P) là một chu trình sơ cấp của G. Nếu (P) có độ dài chẵn thì xong.

Giả sử (P) có độ dài lẻ. Chọn hai đỉnh kề nhau a và b của (P) với $\alpha = \overline{ab} \in (P)$.

Do $d(a) \geq 3$ nên có đỉnh c thỏa $\beta = \overline{ac} \notin (P)$ (?). Nếu c không là đỉnh của (P) thì $(Q) = [\,(P) \setminus \{\,\alpha\,\}\,] \cup \{\,\beta\,\}$ cũng là một đường sơ cấp dài nhất của G mà (Q) không phải là một chu trình của (G) (?) : mâu thuẫn. Vậy c là một đỉnh của (P) và $(P) \cup \{\beta\}$ được chia thành hai chu trình sơ cấp chỉ có chung cạnh β và một trong hai chu trình đó có độ dài chẵn (?).

1.23/ a) Lập ma trận kề $A = M_G$ với $V = \{\, a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a_4 = d, a_5 = e, a_6 = f \,\}$.

Xét $k \in \{\, 2, 3, 4, 5 \,\}$. Số đường đi từ a đến b trong G có độ dài k bằng hệ số ở vị trí (1, 2) của ma trận A^k.

b) Lập ma trận kề $B = M_H$ với $V = \{\, a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, a_4 = d, a_5 = e \,\}$.

Xét $k \in \{\, 2, 3, 4, 5 \,\}$. Số đường đi từ c đến d trong H có độ dài k bằng hệ số ở vị trí (3, 4) của ma trận B^k.

1.24/ b) Hệ số ở vị trí (2, 1) của A, A^2, A^3, A^4 lần lượt là 1, 6, 29, 132. Như vậy số đường nối đỉnh v_2 với v_1 có độ dài 2, 3, 4 lần lượt là 6, 29 và 132. Đường ngắn nhất nối nối đỉnh v_2 với v_1 có độ dài là 1. Hệ số ở các vị trí khác được lý luận tương tự.

Hệ số ở vị trí $(3, 3)$ của B, B^2, B^3, B^4 lần lượt là $0, 10, 20, 140$. Như vậy số đường nối đỉnh v_3 với chính nó có độ dài $2, 3, 4$ lần lượt là $10, 20$ và 140. Đường ngắn nhất nối đỉnh v_3 với chính nó có độ dài là 2. Hệ số ở các vị trí khác được lý luận tương tự.

Hệ số ở vị trí $(1, 2)$ của C, C^2, C^3, C^4 lần lượt là $0, 0, 6, 24$. Như vậy số đường nối đỉnh v_1 với đỉnh v_2 có độ dài $2, 3, 4$ lần lượt là $0, 6$ và 24. Đường ngắn nhất nối nhất nối đỉnh v_3 với chính v_3 có độ dài là 3. Hệ số ở các vị trí khác được lý luận tương tự.

c) Từ A, ta thấy G_1 liên thông (2 đỉnh khác nhau của G_1 có cạnh nối).
Từ B^2, ta thấy G_2 liên thông (2 đỉnh khác nhau bất kỳ của G_2 luôn có đường nối).
Từ C^3, ta thấy G_3 liên thông (2 đỉnh khác nhau bất kỳ của G_3 luôn có đường nối).

1.25/ b) $\forall n \geq 1$, A^n là ma trận tam giác dưới nên không có đường nối đỉnh v_1 với đỉnh v_2.

Hệ số ở vị trí $(2, 2)$ của B, B^2, B^3, B^4 lần lượt là $0, 2, 4, 14$. Như vậy số đường nối đỉnh v_2 với chính nó có độ dài $2, 3, 4$ lần lượt là $2, 4$ và 14. Đường ngắn nhất nối đỉnh v_2 với chính nó có độ dài là 2. Hệ số ở các vị trí khác được lý luận tương tự.

Hệ số ở vị trí $(4, 3)$ của C, C^2, C^3, C^4 lần lượt là $0, 0, 1, 3$. Như vậy số đường nối đỉnh v_1 với đỉnh v_2 có độ dài $2, 3, 4$ lần lượt là $0, 1$ và 3. Đường ngắn nhất nối nhất nối đỉnh v_4 với đỉnh v_3 có độ dài là 3. Hệ số ở các vị trí khác được lý luận tương tự.

c) $\forall n \geq 1$, A^n là ma trận tam giác dưới nên G_1 không liên thông mạnh (không có đường nối từ đỉnh v_1 đến đỉnh v_2 trong G_1).

Từ B^2, ta thấy G_2 liên thông mạnh (2 đỉnh khác nhau bất kỳ của G_2 có đường nối).

Từ C^3, ta thấy G_3 liên thông mạnh (2 đỉnh khác nhau bất kỳ của G_3 có đường nối).

1.26/ a) $\forall n \geq 1$, A^n có các hệ số ở vị trí $(1, 3)$ và $(2, 3)$ đều bằng 0.

1.29/ Chỉ có M là liên thông mạnh. G không có đường nối từ a đến b.

H, K, N không có đường nối từ c đến a. L không có đường nối từ f đến a.

P không có đường nối từ e đến a.

1.30/ $\nu(G) = 1$, $\varepsilon(G) = 2$, $\nu(H) = 1$, $\varepsilon(H) = 1$, $\nu(K) = 1$ và $\varepsilon(K) = 1$.

1.33/ $\forall v \in V$, $d^+(v) - d^-(v) = d^+(v) + d^-(v) - 2d^-(v)$ nên $| d^+(v) - d^-(v) | - [d^+(v) + d^-(v)]$ là một số nguyên chẵn. Lấy tổng các giá trị trên theo $v \in V$.

1.34/ $n = 2$: G_1 (1 cạnh nối 2 đỉnh) và G_2 (2 đỉnh rời rạc).

$n = 3$: G_1 (3 cạnh của tam giác có 3 đỉnh), G_2 (2 cạnh liên tiếp nhau có 3 đỉnh),

G_3 (1 cạnh nối 2 đỉnh và 1 đỉnh rời rạc) và G_4 (3 đỉnh rời rạc).

$n = 4$: G_1 (4 cạnh của tứ giác và 2 đường chéo), G_2 (4 cạnh của tứ giác và 1 đường chéo), G_3 (4 cạnh của tứ giác có 4 đỉnh), G_4 (3 cạnh của tam giác và 1 cạnh đi từ 1 đỉnh của tam giác nối với 1 đỉnh bên ngoài), G_5 (3 cạnh liên tiếp có 4 đỉnh), G_6 (3 cạnh xuất phát từ 1 đỉnh nối với 3 đỉnh khác), G_7 (3 cạnh của tam giác và 1 đỉnh rời rạc), G_8 (2 cạnh liên tiếp có 3 đỉnh và 1 đỉnh rời rạc), G_9 (2 cạnh song song với 4 đỉnh, G_{10} (1 cạnh nối 2 đỉnh và 2 đỉnh rời rạc) và G_{11} (4 đỉnh rời rạc).

1.35/ Dùng các cấu trúc trong Bài **1.30** và thêm sự định hướng khác nhau trên các cạnh.

1.36/ a) (5 đỉnh và 3 cạnh): 4 trường hợp. b) (5 đỉnh và 4 cạnh): 7 trường hợp.

1.37/ a) (5 đỉnh và 6 cạnh): 6 trường hợp. b) (6 đỉnh và 4 cạnh): 10 trường hợp.

1.39/ a) Giả sử không có đường nối a và b trong G. Ta có hai thành phần liên thông rời nhau

G_a và G_b thỏa $a \in G_a$ và $b \in G_b$ (?). G_a chỉ có một đỉnh bậc lẻ a (?).

b) Xét G_c là thành phần liên thông của G có chứa c. G_c có thêm một đỉnh bậc lẻ d

nữa (?) và có đường (P) nối c và d trong G (?).

1.40/ a) Giả sử G rời rạc, nghĩa là có $a, b \in V$ $(a \neq b)$ và không có đường trong G nối a

và b. Ta có hai thành phần liên thông rời nhau G_a và G_b thỏa $a \in G_a$ và $b \in G_b$ (?).

Gọi p và q lần lượt là số đỉnh của G_a và G_b thì $d(a) + d(b) \leq p + q - 2 < n$ (?).

b) Suy từ a).

1.41/ Chọn đường (P) trong G nối a và b sao cho (P) có độ dài ngắn nhất. Giả sử (P)

không sơ cấp. Khi đó (P) đi qua đỉnh c nào đó ít nhất hai lần. Ta có thể loại bỏ một chu

trình tại c của (P) để có đường mới (Q) nối a và b trong (G) (?).

<u>CHƯƠNG II:</u> ĐỒ THỊ DẠNG CÂY.

2.1/ a), d) và e) Tồn tại cây G. b) và c) Tính $|E|$ để thấy G không tồn tại.

2.2/ Để ý $m_i = n_i - 1$ $(i = 1, 2)$.

2.3/ a) G có các tp liên thông là $G_i = (V_i, E_i)$ với $|V_i| = n_i$ và $|E_i| = m_i$ $(1 \leq i \leq p)$. Khi đó

$(m_i + n_i - 1) \geq 0$ $(1 \leq i \leq p)$ [Bài tập **1.11** câu a)] và $m - n + p = \sum_{i=1}^{p}(m_i - n_i + 1)$.

$(\Rightarrow)$: Xét rừng G với các cây G_i có $m_i = n_i - 1$ $(1 \leq i \leq p)$. Ta có $m - n + p = 0$ (?).

($\Leftarrow$): Giả sử $m - n + p = 0$. Khi đó $(m_i - n_i + 1) = 0$ $(1 \le i \le p)$ (?) nên G_i là cây

$(1 \le i \le p)$ (?) và G là rừng.

b) Áp dụng a).

2.4/ a) Đặt a = số đỉnh treo của T, b = số đỉnh bậc 2 của T và c = số đỉnh bậc ≥ 3 của T.

Khi đó $a + b + c = | V | = | E | + 1$.

Từ $2 | E | = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$, ta có $2(a + b + c - 1) = a + 2b + \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$ [$d(v_i) \ge 3$] rồi có kết quả.

b) Tính trực tiếp hoặc áp dụng a).

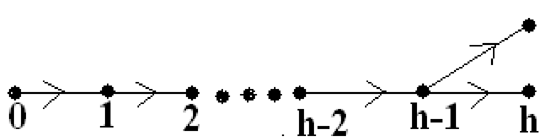
2.5/ a) Để tính số đỉnh trong tối đa của T, ta xét trường hợp mọi lá của T đều có mức h.

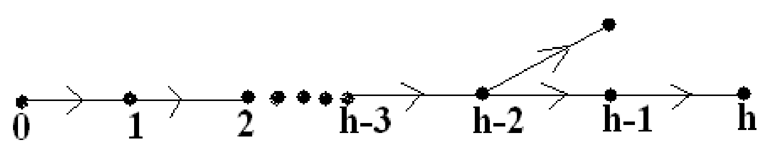
Số đỉnh mức j của T là k^j $(0 \le j \le h)$. Số đỉnh trong tối đa của T là $\sum_{j=0}^{h-1} k^j$.

b) Áp dụng a) với $k = 4$ và $h = 8$.

2.7/ $n_o = 1$, $n_1 = 3$, $n_2 = 4$ và $n_3 = 5$. Dưới đây là hai trong số các dạng cây nhị phân cân bằng

có chiều cao h và có số đỉnh tối thiểu (từ đó tính được ngay n_h) :





2.8/ a) Qui nạp theo $m \ge 1$. Nếu $m = 1$ thì hiển nhiên. Cho $p \ge 2$. Giả sử khi $m = p$ thì T

có $(kp + 1)$ đỉnh. Xét $m = p + 1$. T có $(p + 1)$ đỉnh trong. Chọn đỉnh trong a của T

kề với k lá. Nếu xóa bớt k lá này thì a trở thành lá của cây mới T'.

T' có $(kp + 1)$ đỉnh (?) nên T có $(kp + 1) + k = (p + 1)k + 1$ đỉnh. Từ đó suy ra số cạnh và số lá của T.

b), c) được suy từ a).

2.9/ a) Áp dụng a) của bài **2.8** với $k = 2$ và $h = 3, 5, 7, 12$.

Số đỉnh trong là $\sum_{j=0}^{h-1} k^j$. Số lá là k^h. Số đỉnh là $\sum_{j=0}^{h} k^j$. Số cạnh là $\sum_{j=1}^{h} k^j$.

b) Từ a) ta có $h = 7$ và $k^7 = 279.936$. Do đó $k = 6$. Số đỉnh trong là $\sum_{j=0}^{6} 6^j$.

2.16/ b) ($\Rightarrow$): G có ít nhất một cây khung $T = (V, E')$. Ta có $T \neq G$ (?) nên $E' \subset E$ và

$E' \neq E$. Ta có $|V| = |E'| + 1 \leq |E|$ (?).

($\Leftarrow$) (không cần giả thiết G liên thông): viết $G = G_1 \cup \ldots \cup G_k$ với $G_i = (V_i, E_i)$

là các thành phần liên thông của G ($1 \leq i \leq k$). Nếu G không chứa chu trình nào thì

G_i cũng vậy, nghĩa là G_i là cây và $|E_i| < |V_i|$ ($1 \leq i \leq k$). Suy ra $|E| < |V|$ (?) :

trái với giả thiết!

Xét ví dụ đồ thị G gồm 3 cạnh của tam giác ABC trên mặt phẳng và có 4 đỉnh

gồm 3 đỉnh A, B, C và trọng tâm H của tam giác ABC.

c) Xét cây khung $T = (V, E')$ của G thì $T \neq G$, $|V| = |E'| + 1$ và $|E'| < |E|$.

Gọi $T = (V, E')$ là cây khung duy nhất của G. Ta chỉ ra $E' = E$. Nếu $E' \neq E$, chọn

$\alpha \in (E \setminus E')$ thì $T' = T \cup \{\alpha\}$ chứa chu trình (C) đi qua α và $(C) \neq \{\alpha\}$ vì α

không là vòng. Chọn $\beta \in (C) \setminus \{\alpha\}$ thì $T'' = T' \setminus \{\beta\}$ là một cây khung của G

và $T'' \neq T$.

2.17/ a) $T = (V, E)$ là cây. Chọn gốc a cho T và gọi chiều cao của T là $h \geq 1$.

Đặt $V_1 = \{$ các đỉnh của T có mức là số nguyên chẵn (0, 2, 4, …) $\}$ và

$V_2 = \{$ các đỉnh của T có mức là số nguyên lẻ (1, 3, 5, …) $\}$.

Khi đó T là đồ thị lưỡng phân với V được phân hoạch thành V_1 và V_2 (?).

b) ($\Rightarrow$): Cho $G = (V, E)$ là đồ thị lưỡng phân với V được phân hoạch thành V_1 và V_2.

G có thể không có chu trình (chẳng hạn khi G là cây). Khi G có chu trình (C),

(C): $\overline{a_1b_1a_2b_2...a_mb_ma_1}$ trong đó $(a_1, a_2, \dots, a_m \in V_1$ và $b_1, b_2, \dots, b_m \in V_2)$ hoặc

$(a_1, a_2, \dots, a_m \in V_2$ và $b_1, b_2, \dots, b_m \in V_1)$. Rõ ràng (C) có độ dài chẵn.

($\Leftarrow$): Giả sử G liên thông và không có chu trình. Khi đó G là đồ thị lưỡng phân (?).

Giả sử $G = (V, E)$ liên thông và mọi chu trình trong G đều có độ dài chẵn. Chọn tùy ý $a \in V$. $\forall b \in V \setminus \{ a \}$, ta có đường (P_{ab}) trong G nối a và b (?).

Không thể có đồng thời một đường có độ dài chẵn và một đường có độ dài lẻ cùng nối a và b (?). Đặt $V_2 = \{ a \} \cup \{ b \in V \setminus \{ a \} / (P_{ab})$ có độ dài chẵn $\}$ và

$V_1 = \{ b \in V \setminus \{ a \} / (P_{ab})$ có độ dài lẻ $\}$. $\forall x, y \in V_i$ $(i = 1, 2)$, không có cạnh $\overline{xy}$ (?).

2.18/ Áp dụng **2.17**. G có chu trình có độ dài lẻ (?). Mọi chu trình trong H đều có độ dài chẵn (thử nhiều chu trình). Chỉ cần chọn $V_1 = \{a, b, c, d\}$ và $V_2 = \{e, f, g, h\}$ là xong.

2.19/ a) G_i không có chu trình $(i = 1, 2)$ (?).

b) Do $E_3 \neq \varnothing$ nên $V_3 \neq \varnothing$ (?). G_3 không có chu trình (?). Xét $a, b \in V_3$ $(a \neq b)$. Ta có

đường (P_{ab}) trong G_1 và đường (Q_{ab}) trong G_2 cùng nối a và b (?).

Suy ra $(P_{ab}) \equiv (Q_{ab})$ là đường trong G_3 nối a và b (?).

2.20/ Xét trường hợp MST (trường hợp M'ST lý luận tương tự).

a) Trong các cạnh không là vòng của G, gọi α là cạnh (duy nhất) có trọng số nhỏ nhất của G và T là một MST bất kỳ của G. Nếu T không qua α thì $T' = T \cup \{ \alpha \}$ chứa chu trình (C) đi qua α và $(C) \neq \{ \alpha \}$ vì α không là vòng. Chọn $\beta \in (C) \setminus \{\alpha\}$ thì $T'' = T' \setminus \{ \beta \}$ là một cây khung của G và T'' có trọng số nhỏ hơn trọng số của T.

b) Gọi T_1 và T_2 là hai MST tùy ý của G. Trong các cạnh không là vòng của G, gọi α

là cạnh (duy nhất) có trọng số nhỏ nhất của G. Theo a) thì T_1 và T_2 đều đi qua α.

T_1 và T_2 đều có thể được xây dựng từ thuật toán Kruskal bắt đầu từ cạnh α. Do các cạnh của G đều có trọng số khác nhau nên có thể thấy $T_1 \equiv T_2$.

<u>CHƯƠNG III:</u> CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH.

3.2/ a) Lập bảng tìm đường đi ngắn nhất từ a đến các đỉnh khác của G. Khi cột tương ứng với G ổn định thì dừng.

b) Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến e rồi tìm đường đi ngắn nhất từ e đến g.

Sau đó nối hai đường này với nhau.

c) Tìm đường đi ngắn nhất (P) từ a đến d rồi tìm đường đi ngắn nhất (Q) từ i đến g.

Nếu $\overline{di} \notin$ (P) và $\overline{di} \notin$ (Q) thì (P) $\cup$ $\overline{di}$ $\cup$ (Q) là đường cần tìm.

Nếu $\overline{di} \in$ (P) hay $\overline{di} \in$ (Q) thì (P) $\cup$ (Q) là đường cần tìm ($\overline{di} \equiv \overline{id}$ chỉ dùng một lần)

d) Không chọn đỉnh l khi sửa chữa đường đi.

3.5/ Dùng thuật toán DIJKSTRA cho đồ thị G có trọng số âm trong Ví dụ của (**1.6**), ta không thể đạt được kết quả mong muốn như khi dùng thuật toán FORD – BELLMAN.

3.7/ Thực hiện phương pháp WARNSDORFF (khả năng hoàn thành yêu cầu khá cao):

Xuất phát từ một ô tùy ý của bàn cờ, quân mã có nhiều nhất 8 ô để đi nước kế tiếp (đúng theo luật đi của quân mã). Các ô này gọi là “ *ô khả dĩ* ” của ô xuất phát. Ta xóa các ô mà quân mã đã đi qua. Nếu có nhiều *ô khả dĩ* của ô mà quân mã đang đứng, ta đi tiếp đến ô nào mà nó có ít *ô khả dĩ* chưa bị xóa nhất.

a) **(1,1)**, (2,3), (3,1), (1,2), (2,4), (3,2), (1,3), (2,1), (3,3), (1,4), (2,2) và **(3,4)**.

b) **(3,3)**, (1,2), (3,1), (5,2), (4,4), (2,5), (1,3), (2,1), (4,2), (5,4), (3,5), (1,4), (2,2), (4,1), (5,3), (4,5), (2,4), (4,3), (5,1), (3,2), (1,1), (2,3), (1,5), (3,4) và **(5,5)**.

3.8/ Gọi V là tập hợp n đấu thủ.

Qui nạp theo $n = |V| \geq 2$. Nếu $n = 2$ thì hiển nhiên đúng. Cho $q \geq 3$ và giả sử mệnh đề đúng khi $n \leq q$. Xét $n = q + 1$. Chọn tùy ý vận động viên a. Nếu a thắng (hoặc thua) tất cả các đấu thủ khác, ta dùng giả thiết qui nạp, ta sắp xếp được $(n - 1)$ đấu thủ trong $V \setminus \{a\}$ theo dạng $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1}$ (người đứng trước thắng người đứng sau).

Lúc đó ta có $a > a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1}$ hoặc $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > a$. Nếu a có trận thắng và có trận thua thì ta đặt $V_1 = \{ x \in V \mid x \text{ thắng } a \}$ và $V_2 = \{ x \in V \mid x \text{ thua } a \}$. Lúc đó $1 \leq |V_1| = p < n$ và $1 \leq |V_2| = q < n$. Dùng giả thiết qui nạp, ta sắp xếp được p đấu thủ trong V_1 theo dạng $b_1 > b_2 > \ldots > b_p$ và sắp xếp được q đấu thủ trong V_2 theo dạng $c_1 > c_2 > \ldots > c_q$. Lúc đó ta có $b_1 > b_2 > \ldots > b_p > a > c_1 > c_2 > \ldots > c_q$.

3.10/ (1,1), (2,3), (4,4), (6,5), (5,7), (7,8), (8,6), (7,4), (8,2), (6,1), (5,3), (4,1), (2,2), (1,4), (3,3), (5,4), (7,3), (8,1), (6,2), (8,3), (7,1), (5,2), (6,4), (4,3), (3,1), (1,2), (2,4), (3,6), (1,5), (2,7), (4,8), (6,7), (8,8), (7,6), (5,5), (3,4), (4,2), (2,1), (1,3), (2,5), (1,7), (3,8), (4,6), (5,8), (7,7), (8,5), (6,6), (4,5), (2,6), (1,8), (3,7), (1,6), (2,8), (4,7), (3,5), (5,6), (6,8), (8,7), (7,5), (6,3), (8,4), (7,2), (5,1), (3,2) và **(1,1)**.

3.11/ b) Đường Hamilton của G đi từ a đến k. Đường Hamilton của H đi từ g đến h.

Đường Hamilton của K đi từ a đến e. Đường Hamilton của L đi từ a đến m.

Đường Hamilton của M đi từ a đến f. Đường Hamilton của N đi từ a đến g.

Đường Hamilton của P đi từ a đến e. Đường Hamilton của Q đi từ a đến e.

Đường Hamilton của R đi từ b đến h.

3.13/ Vẽ một đồ thị G có 10 đỉnh và 30 cạnh như sau : mỗi quân cờ là một đỉnh, ở giữa hai quân cờ khác nhau (a, b) và (c, d) thỏa $\{ a, b \} \cap \{ c, d \} \neq \emptyset$ thì có một cạnh nối. G thỏa giả thiết của Định lý DIRAC.

3.14/ G có chu trình Ha (C) : $\overline{a_1b_1a_2b_2...a_mb_ma_1}$ với $a_1, a_2, \dots, a_m \in V_1$ và $b_1, b_2, \dots, b_m \in V_2$.

<u>CHƯƠNG IV:</u> HÀM SINH.

4.1/ a) $(1 + x + \cdots + x^5)^5$. b) $(x + x^2 + \cdots + x^5)^3$.

c) $(x^2 + x^4 + x^6)(x^3 + x^5 + x^7)(x^2 + x^3 + \cdots + x^7)^2$. d) $(1 + x + x^2 + \cdots)^4$.

e) $(x + x^2 + x^3 + \cdots)^2 (x + x^3)(x + x^3 + x^5)$.

4.2/ a) $(1 + x + x^2 + \cdots)^4$. b) $(1 + x + \cdots + x^5)^2 (1 + x + \cdots + x^4)$.

c) $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^2 (1 + x + x^2 + \cdots)^4$.

4.3/ a) $(x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^5$. b) $(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$. c) $(1 + x + \cdots + x^5)^4$.

4.4/ Tính hệ số a_5 từ hàm sinh $F(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^2(1 + x)^2$.

4.5/ Tính hệ số a_{16} từ hàm sinh $F(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^4$.

4.6/ $a_o = 1$ (có 1 số là 0), $a_1 = 5$ (có 5 số là 1, 10, 100, 1000 và 10000), $a_2 = 15$ (có 15 số là 2, 20, 11, 200, 110, 101, 2000, 1100, 1010, 1001, 20000, 11000, 10100, 10010, 10001).
$\forall k \geq 0$, a_k = tổng số nghiệm nguyên của 5 phương trình $\sum_{i=1}^{j} e_i = k$ $(1 \leq j \leq 5)$ với $e_1 \geq 1$, $e_i \geq 0$ $(2 \leq i \leq 5)$. Suy ra $F(x) = (1 + x + x^2 + \cdots) + (x + x^2 + x^3 + \cdots)\sum_{i=1}^{4}(1 + x + x^2 + \cdots)^i$.

4.7/ a) $F(x) = (x^{-3} + x^{-2} + x^{-1} + 1 + x + x^2 + x^3)^4 = x^{-12}(1 + x + \cdots + x^6)^4 = \sum_{k=-12}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^{k-12}$,

nghĩa là $\sum_{k=-12}^{+\infty} a_k x^{k+12} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = (1 + x + \cdots + x^6)^4$ và $a_k = b_{k+12}$, $\forall k \geq -12$.

b) $F(x) = (x^{-2} + x^{-1} + 1 + x + \cdots)(x^2 + x^3 + \cdots + x^6)(1 + x + x^2 + \cdots)$

$= (1 + x + \cdots + x^4)(1 + x + x^2 + \cdots)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

4.8/ Đặt $d_i = e_{i+1} - e_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq 3)$, số nghiệm nguyên của phương trình $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = k$ bằng số nghiệm nguyên của bất phương trình $4e_1 + 3d_1 + 2d_2 + d_4 \leq k$. Do đó hàm sinh là $F(x) = (1 + x^4 + x^8 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)$.

4.9/ Chọn 5 số nguyên $e_1, e_2, \ldots, e_5$ thỏa $1 \leq e_1 < e_2 < \ldots < e_5 \leq n$ với $d_i = e_{i+1} - e_i \geq 2$ $(1 \leq i \leq 5)$. Ta có bất phương trình $e_1 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq k$ chuyển thành phương trình $e_1 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = k$ với các nghiệm nguyên $e_1 \geq 1$, $d_1, d_2, d_3, d_4 \geq 2$ và $d_5 \geq 0$.

Do đó hàm sinh là $F(x) = (x + x^2 + x^3 + \cdots)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4(1 + x + x^2 + \cdots)$.

Ta có $a_k = 0$ $(0 \leq k \leq 8)$, $a_9 = 1$, $a_{10} = 6$, … và $a_{20} = C_{16}^{5}$.

4.10/ a) C_{18}^{12}. b) $4^{12}C_{16}^{4}$. c) C_{19}^{12}. d) C_{7}^{4}.

4.11/ a) $-3^7C_9^7$. b) $4^8C_9^8$. c) C_{18}^{9}. d) $C_{11}^{10} + 3C_{12}^{11}$. e) $C_{12}^{9} - 3C_{13}^{10}$. f) $2^{10}C_{13}^{9} - 2^{11}C_{15}^{11} - 2^7C_{11}^{7}$.

4.12/ a) $(1 - x)^{-n} = C_{n+9}^{10}x^{10} + \cdots$. b) $x^{40}(1 - x)^{-8} = C_{k-33}^{k-40}x^k + \cdots$.

c) $C_n^7 + C_n^5 + C_n^3$ (qui ước $C_n^p = 0$ khi $p > n$).

d) $x^{11}(1 + x + \cdots + x^4)(1 - x)^{-5} = (C_5^1 + C_6^2 + C_7^3 + C_8^4 + C_9^5)x^{16} + \cdots$.

e) $x^6(1 - x^6)^3(1 - x)^{-3} = (C_{13}^{11} - 3C_7^5)x^{17} + \cdots$.

f) $x^{31}(1 - x^{26})(1 - x^{16})(1 - x^{15})(1 - x)^{-3} = (C_{18}^{16} - C_3^1 - 1)x^{47} + \cdots$.

g) $x^{21}(1 - x^5)^7(1 - x)^{-7} = (C_{17}^{11} - C_7^1C_{12}^6 + C_7^1C_7^2)x^{32} + \cdots$.

h) $x^8(1-x^5)^8(1-x)^{-8} = (C_{23}^{16} - C_7^1 C_{18}^{11} + C_7^2 C_{13}^{6} - C_7^3 C_8^1)x^{24} + \cdots$.

i) $x^4(1-x^7)^4(1-x)^{-4} = (C_{15}^{12} - C_4^1 C_8^5)x^{16} + \cdots$.

j) $x^{10}(1-x^7)^5(1-x)^{-5} = (C_{30}^{26} - C_7^1 C_{23}^{19} + C_7^2 C_{16}^{12} - C_7^3 C_9^5)x^{26} + \cdots$.

k) $x^{18}(1-x^4)^9(1-x)^{-9} = (C_{18}^{10} - C_9^1 C_{14}^{6} + C_9^2 C_{10}^{2})x^{28} + \cdots$. l) $(1-x^3)^{-6} = C_{11}^{6} x^{18} + \cdots$.

m) $x^{25} = x^{3(3)+2(8)}$ nên $(1 + x^3 + x^8)^3(1 + x^3 + x^8)^3(1 + x^3 + x^8)^5 = C_{10}^{3} C_7^2 x^{25} + \cdots$.

4.13/ a) $F(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^3 = x^6(1-x)^{-3}$ có $a_{10} = C_6^4$.

b) $F(x) = (1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \cdots)^2 = (1 + x + x^2)(1-x)^{-2}$ có $a_{10} = C_9^8 + C_{10}^{9} + C_{11}^{10}$.

c) $F(x) = (1 + x + x^2)^2(1 + x^2 + x^4 + \cdots) = (1-x)^{-2}(1-x^2)^{-1}$ có

$a_{10} = 1 + C_3^2 + C_5^4 + C_7^6 + C_9^8 + C_{11}^{10}$.

4.14/ a) $F(x) = (1+ x^2 + x^4 + \cdots)(1+ x^4 + x^8 + \cdots)(1+ x^6 + x^{12} + \cdots) \ldots$

b) $F(x) = (1+ x^3)(1 + x^5)(1 + x^7)\ldots$

4.15/ $F(x) = (1 + x + x^5)(1 + x)^{19}$ có $a_{15} = C_{19}^{15} + C_{19}^{14} + C_{19}^{10}$.

4.16/ $F(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^3 + x^6 + x^9)$.

4.17/ a) $F(x) = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)(1 + x^7 + x1^4 + \cdots)$.

b) $F(x) = [\ (x^2)^8 + (x^2)^9 + (x^2)^{10} + \cdots][\ (x^3)^2 + (x^3)^3 + \cdots + (x^3)^8\ ][\ 1 + x^7 + (x^7)^2\ ]$.

4.18/ $\forall k \geq 0$, a_k là số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình $e_1 + 2e_2 + 5e_3 + 10e_4 + 20e_5 = k$.

$F(x) = (1+ x + x^2 + \cdots)(1+ x^2 + x^4 + \cdots)(1+ x^5 + x^{10} + \cdots)(1+ x^{10} + x^{20} + \cdots)(1+ x^{20} + x^{40} + \cdots)$.

Tính a_{50}.

4.19/ $E(x) = (\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!})^6$.

4.20/ a) E(x) = $(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^2 = \frac{e^{2x}(e^x+e^{-x})}{2} = \frac{e^{3x}+e^x}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{3^k+1}{2k!})x^k$.

Suy ra $a_k = \frac{3^k+1}{2}$, $\forall k \geq 0$.

b) E(x) = $(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)^2(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots) = \frac{e^x(e^x+e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{3x}+2e^x+e^{-x}}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty}[\frac{3^k+(-1)^k+2}{4k!}]x^k$.

Suy ra $a_k = \frac{3^k+(-1)^k+2}{4}$, $\forall k \geq 0$.

c) E(x) = $(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^2(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots) = (e^x-1)^2e^x = e^{3x}-2e^{2x}+e^x$

$= \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{3^k-2^{k+1}+1}{k!})x^k$. Suy ra $a_k = 3^k - 2^{k+1} + 1$, $\forall k \geq 0$.

d) E(x) = $(1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)^3 = (\frac{2e^x-x^2}{2})^3 = \frac{8e^{3x}-12x^2e^{2x}+6x^4e^x-x^6}{8}$

$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{3^k}{k!}x^k - 3\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{2k!}x^{k+2} + 3\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{4k!}x^{k+4} - \frac{x^6}{8}$. Suy ra $a_o = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = -3$,

$a_3 = -45$, $a_6 = -\frac{15049}{8}$ và $a_k = \frac{8.3^k-12k(k-1)2^k+6k(k-1)(k-2)(k-3)}{8}$ $(4 \leq k \neq 6)$.

4.21/ E(x) = $(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)^2(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^2 = \frac{e^{2x}(e^x+e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{4^k+2^{k+1}}{4k!})x^k + \frac{1}{4}$.

Suy ra $a_o = 1$ và $a_k = \frac{4^k+2^{k+1}}{4}$, $\forall k \geq 1$.

4.22/ a) E(x) = $(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^4(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)$. b) E(x) = $(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^3(1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots)^2$.

4.23/ E(x) = $(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^3 = (e^x - x - 1)e^{3x} = e^{4x} - xe^{3x} - e^{3x}$

$= \sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{4^k-3^k}{k!})x^k - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3^{k-1}}{(k-1)!}x^k$. Suy ra $a_8 = 4^8 - 3^8 - 8.3^7$.

4.24/ $e^{x+y} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 0}}\frac{k!}{i!\,j!}x^iy^j) = \sum_{k=0}^{+\infty}(\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 0}}\frac{1}{i!\,j!}x^iy^j) = (\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!})(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{y^j}{j!}) = e^x.e^y$.

4.25/ $b_1 = 0, 1, 2, 3, 4$. Ta có E(x) =

$$= (1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^3 [\ (1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!})+x(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!})+x^2(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!})+x^3(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!})+x^4\frac{x^4}{4!}\ ]$$

$$= (1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^3 . (1+x+\frac{3x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{17x^4}{24}+\frac{5x^5}{24}+\frac{5x^6}{24}+\frac{x^7}{24}+\frac{x^8}{24}).$$

4.26/ a) E(x) = $\frac{e^x-1}{x}$. b) E(x) = $\frac{1}{1-x}$.

4.27/ a) g(x) = $\frac{f(x)}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^3}$ nên $s_k = \frac{k(k+1)}{2}$, $\forall k \geq 0$.

b) g(x) = $\frac{f(x)}{1-x}=\frac{7-4x}{(1-x)^3}$ nên $s_k = \frac{(k+1)(3k+14)}{2}$, $\forall k \geq 0$.

c) g(x) = $\frac{f(x)}{1-x}=\frac{x(x+1)}{(1-x)^4}$ nên $s_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, $\forall k \geq 1$.

d) g(x) = $\frac{f(x)}{1-x}=\frac{24x}{(1-x)^6}$ nên $s_k = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5}$, $\forall k \geq 1$.

4.28/ a) F(x) = $\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$. b) F(x) = $\frac{4x^2-3x+1}{(1-x)^3}$. c) F(x) = $\frac{x}{(1-x)^2}$.

4.29/ a) $2e^x$. b) e^{-x}. c) $3xe^x$. d) $(x + 1)e^x$. e) x^2e^x. f) $x^{-2}(e^x - x - 1)$.

4.30/ a) $a_k = \frac{3^k-3.2^k}{k!}$. b) $a_k = \frac{(-2)^k-k!}{k!}$. c) $a_k = \frac{(-2)^k-[2^k-(-1)^k]k!}{k!}$. d) $a_k = \frac{2e(-3)^k}{k!}$.

e) $a_{2k} = \frac{1}{k!}$ và $a_{2k+1} = 0$. f) $a_k = \frac{1}{(3m-1)!}-\frac{1}{m!}$ (k = 3m) và $a_k = \frac{1}{(k-1)!}$ ($k \neq 3m$), $\forall m \in \mathbf{Z}$.

4.31/ $\forall k \geq 0$, $\frac{c_k}{k!}=\sum_{i=0}^{k}\frac{a_i}{i!}\frac{b_{k-i}}{(k-i)!}$ nên $c_k = \sum_{i=0}^{k}k!\frac{a_i}{i!}\frac{b_{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{k}C_k^i a_i b_{k-i}$.

4.32/ a) F(x) = $\frac{3-x}{(1-x)^3}$ và $a_n = 2n + 1$, $\forall n \geq 0$. b) F(x) = $\frac{5}{1-7x}$ và $a_n = 5.7^n$, $\forall n \geq 0$.

c) F(x) = $\frac{1-3x+5x^2-x^3}{(1-x)^4}$ và $a_n = \frac{2n^3-3n^2+n+3}{3}$, $\forall n \geq 0$.

d) F(x) = $-\frac{1}{2(1-x)}-\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{7}{2(1-3x)}$ và $a_n = \frac{7.3^n-4n-5}{2}$, ∀n ≥ 0.

e) F(x) = $\frac{1}{(1-2x)^2}$ và $a_n = (n + 1)2^n$, ∀n ≥ 0.

4.33/ a) F(x) = $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{2}{1-2x}$ và $a_n = 2^{n+1} - 2n - 1$, ∀n ≥ 0.

b) F(x) = $\frac{18}{1-3x}-\frac{12}{(1-x)^2}$ và $a_n = 18.3^n - 12.2^n$, ∀n ≥ 0.

c) F(x) = $-\frac{8}{9(1+x)}-\frac{2}{3(1-2x)^2}+\frac{38}{9(1-2x)}$ và $a_n = \frac{(3n+22)2^{n+1}-8(-1)^n}{9}$, ∀n ≥ 0.

d) F(x) = $\frac{13}{1-x}+\frac{5}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{24}{1-2x}+\frac{6}{(1-2x)^2}$ và $a_n = (6n-3)2^n + n^2 + 8n + 20$, ∀n ≥ 0.

e) F(x) = $\frac{16}{5(1-4x)}+\frac{31}{20(1+x)}+\frac{67}{4(1-3x)}-\frac{3}{2(1-x)}$ và $a_n = \frac{4^{n+3}+335.3^n+31(-1)^n-30}{20}$, ∀n ≥ 0.

f) F(x) = $\frac{5}{48(1-x)}-\frac{2}{3(1+2x)}+\frac{5}{16(1+3x)}+\frac{1}{4(1-x)^2}$ và $a_n = \frac{(-2)^{n+5}-5(-3)^{n+1}+12n+17}{48}$, ∀n ≥ 0.

<u>CHƯƠNG V:</u> NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ.

5.1/ Không gian mẫu Ω = { các kết quả có thể xảy ra sau 8 lần tung đồng xu liên tiếp } với

| Ω | = 2^8.

A_i = { các trường hợp có mặt ngửa ở lần tung thứ i } có | A_i | = 2^7 (1 ≤ i ≤ 8).

Số trường hợp có ít nhất hai mặt ngửa xuất hiện là $N_2^* = \sum_{i=0}^{8-2}(-1)^i C_{i+1}^i S_{i+2}$ với $S_2 = 28 \times 2$,

$S_3 = 56 \times 2^5$, $S_4 = 70 \times 2^4$, $S_5 = 56 \times 2^3$, $S_6 = 28 \times 2^2$, $S_7 = 8 \times 2^1$ và $S_8 = 1 \times 2^o$.

Xác suất cần tìm là $N_2^* / |\Omega|$.

5.2/ *Cách 1*: $\sum_{i=1}^{19} C_{50}^{i} C_{60}^{20-i}$ (tính toán rườm rà).

Cách 2: Z = { 50 nam và 60 nữ }, U = { E ⊂ Z | | E | = 20 }, A = { E ⊂ U | E toàn nam },

B = { E ⊂ U | E toàn nữ } thì A ∩ B = ∅, | U | = C_{110}^{20}, | A | = C_{50}^{20} và | B | = C_{60}^{20}.

Số cách chọn $|\, \overline{A} \cap \overline{B}\, |$ = | U | – (| A | + | B |).

5.3/ U = {k ∈ **N*** | k ≤ 10^5}, A = {k ∈ U | k ⋮ 2}, B = {k ∈ U | k ⋮ 7} và A ∩ B = {k ∈ U | k ⋮ 14}.

| U | = 10^5, | A | = 5000, | B | = 1428 và | A ∩ B | = 714. Từ đó tính được | A ∪ B |.

5.4/ a) Có 5 cách chọn vị trí cho chữ số 0 duy nhất trong chuỗi số. Ta quan tâm

U = { các chuỗi số gồm 4 chữ số thập phân (không có chữ số 0) } có | U | = 9^4,

A_i = { ε ∈ U | i xuất hiện đúng 3 lần trong ε } có | A_i | = 32 (i ∈ { 1, 2, 3, …, 9 }).

Để ý $S_i = 0$ (2 ≤ i ≤ 9) vì $A_i \cap A_j = \varnothing$ (1 ≤ i < j ≤ 9).

Do đó kết quả cần tìm là $5\,|\bigcap_{i=1}^{9} \overline{A_i}\,| = 5(\,|U| - \sum_{i=1}^{9} |A_i|\,)$.

b) V = { các chuỗi số gồm 5 chữ số thập phân } có | V | = 10^5,

B_i = { ε ∈ V | i xuất hiện đúng hai lần trong ε } có | B_i | = 7290 (0 ≤ i ≤ 9) và

| $B_i \cap B_j$ | = 240 (0 ≤ i < j ≤ 9).

Để ý $S_i = 0$ (3 ≤ i ≤ 9) vì $B_i \cap B_j \cap B_k = \varnothing$ (0 ≤ i < j < k ≤ 9).

Do đó kết quả cần tìm là $|\bigcap_{i=0}^{9} \overline{B_i}\,| = |V| - \sum_{i=0}^{9} |B_i| + \sum_{0 \le i < j \le 9} |B_i \cap B_j|$.

5.5/ U = { 150 người được khảo sát }, A = {x ∈ U | x có xe đạp}, B = {x ∈ U | x có xe máy},

C = { x ∈ U | x có xe hơi }.

a) A’ = { x ∈ U | x chỉ có xe đạp }. Tính | A ∩ (B ∪ C) | = | (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) | để có

$| A' | = | A | - | A \cap (B \cup C) |$.

b) $| (B \cap C) \setminus A | = | B \cap C | - | A \cap B \cap C |$.

c) $| \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} | = | U | - (| A | + | B | + | C |) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - | A \cap B \cap C |$.

5.6/ x_i = số nút xuất hiện ở lần tung thứ i có $1 \le x_i \le 6$ $(1 \le i \le 5)$. Ta có $x_1 + \cdots + x_5 = 20$ (*)

Đổi biến $0 \le y_i = (x_i - 1) \le 5$ $(1 \le i \le 5)$, ta có (*) $\Leftrightarrow$ $y_1 + \cdots + y_5 = 15$ (**).

U = { số nghiệm nguyên ≥ 0 của (**) }, A_i = { số nghiệm nguyên của (**) thỏa $y_i \ge 6$ }

$(1 \le i \le 5)$. Ta có $| U | = C_{19}^4$, $| A_i | = C_{13}^4$ $(1 \le i \le 5)$, $| A_i \cap A_j | = C_7^4$ $(1 \le i < j \le 5)$ và

$A_i \cap A_j \cap A_k = \varnothing$ $(1 \le i < j < k \le 5)$. Từ đó tính được

$\left| \bigcap_{i=1}^{5} \overline{A_i} \right| = | U | - \sum_{i=1}^{5} | A_i | + \sum_{1 \le i < j \le 5} | A_i \cap A_j |$. Để ý $| \Omega | = 6^5$ và suy ra xác suất cần tìm.

5.7/ U = { các khán giả được thăm dò ý kiến }. Đặt $| U | = 100a$ (để thuận tiện tính toán).

A = { fan của X }, B = { fan của Y }, C = { fan của Z }. Ta có $| A | = 45a$, $| B | = 50a$,

$| C | = 60a$, $| A \cap B | = | A \cap C | = | B \cap C | = 35a$ và $| A \cap B \cap C | = 25a$.

a) Tính $| A \setminus (B \cap C) | = | A | - (| A \cap B | + | A \cap C |) + | A \cap B \cap C |$.

b) Tính $N_2 = S_2 - 3S_3$.

c) Tính $| \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} |$.

5.8/ $U = S_6$, $A = \{ \sigma \in S_6 \mid \sigma(1) = 2 \}$, $B = \{ \sigma \in S_6 \mid \sigma(3) = 4 \}$ và $C = \{ \sigma \in S_6 \mid \sigma(5) = 6 \}$.

$| U | = 6!$, $| A | = | B | = | C | = 5!$, $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 4!$ và $| A \cap B \cap C | = 3!$.

$| A \cup B \cup C | = (| A | + | B | + | C |) - (| A \cap B | + | A \cap C | + | B \cap C |) + | A \cap B \cap C |$.

5.9/ b) $(n, 44.100) = 1$ $\Leftrightarrow$ (n không chia hết cho 2, 3, 5 và 7).

c) $(n, 347.633) = 1$ $\Leftrightarrow$ (n không chia hết cho 11, 13 và 17).

5.10/ Tương tự như **6.9**.

6.11/ Tương tự **6.10**.

5.12/ n có số chữ số hệ thập phân từ 4 đến 7. Ta đếm tất cả số nghiệm nguyên của các phương trình $x_1 + \cdots + x_m = 31$ với $1 \le x_1 \le 9, 0 \le x_i \le 9$ ($2 \le i \le m$ và $4 \le m \le 7$).

5.13/ a) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + \cdots + x_{10} = 100$ với $5 \le x_i \le 15 (1 \le i \le 10)$

b) Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $y_1 + \cdots + y_{10} = 20$ với $1 \le y_i \le 3$ $(1 \le i \le 10)$

5.14/ a) Đặt x_i = số bông cắm vào bình thứ i $(1 \le i \le 5)$. Ta đếm tất cả số nghiệm nguyên của

phương trình $x_1 + \cdots + x_5 = 15$ với $1 \le x_i \le 4$ $(1 \le i \le 5)$.

b) $\forall k \ge 0$, đặt a_k = số cách cắm k bông khác nhau vảo 5 bình sao cho số bông ở mỗi

bình khoảng từ 1 đến 4. Do các bông đều khác nhau nên ta có hàm sinh mũ

$E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k = (\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!})^5 = \frac{x^5}{24^5}(24 + 12x + 4x^2 + x^3)^5$. Ta cần tính hệ số a_{15}.

Ta có $a_{15} = \frac{15!}{24^5} b_{10}$ với b_{10} là hệ số đứng trước x^{10} trong khai triển

$(24 + 12x + 4x^2 + x^3)^5$. Khi tính $(24 + 12x + 4x^2 + x^3)^5$, ta thu được các số hạng sau

để tạo ra số hạng chứa x^{10} : $[12 \times 24 \times 2C_5^3 x(x^3)^3] + [4^2 \times 24 C_3^2 C_5^2 (x^3)^2(x^2)^2] +$

$+ [4 \times 12^2 C_3^2 C_5^2 (x^3)^2 x^2 x^2] + 4^5(x^2)^5 + [4^3 \times 12 \times 2C_5^3 x^3 x(x^2)^3]$.

5.15/ U = { số trường hợp có thể có khi tung đồng thời 8 xúc xắc } có $| U | = 6^8$.

A_i = { số trường hợp không có mặt i nút xuất hiện } có $| A_i | = 5^8$ $(1 \le i \le 6)$.

Khi đó $| A_i \cap A_j | = 4^8$ $(1 \le i < j \le 6)$, $| A_i \cap A_j \cap A_k | = 3^8$ $(1 \le i < j < k \le 6)$,

$| A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p | = 2^8$ $(1 \le i < j < k < p \le 6)$, $| A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p \cap A_q | = 1$

$(1 \le i < j < k < p < q \le 6)$ và $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 = \varnothing$.

Từ đó tính được $| \bigcap_{i=1}^{6} \overline{A_i} |$ và suy ra xác suất cần tìm.

5.16/ U = { chuỗi tam phân có độ dài 4 }, A_i = { $\varepsilon \in U$ | ε không chứa i } $(0 \le i \le 2)$, ta có

$| U | = 3^4$, $| A_i | = 2^4$ $(0 \le i \le 2)$, $| A_i \cap A_j | = 1$ $(0 \le i < j \le 2)$ và $| A_o \cap A_1 \cap A_2 | = 0$.

a) Tính $|\overline{A_o} \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2}|$. b) $2^2 C_4^2$. c) $3^4 - 2^4 - 4.2^3$.

5.17/ $U = \{$ chuỗi tam phân có độ dài n $\}$, $A_i = \{ \varepsilon = x_1x_2\ldots x_n \in U \mid x_i = x_{i+1} \}$ $(1 \le i \le n-1)$.

Ta có $|U| = 3^n$, $|A_i| = 3^{n-1}$ $(1 \le i \le n-1)$, $|A_i \cap A_j| = 3^{n-2}$ $(1 \le i < j \le n-1)$, … và

$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}| = 3^1$. Suy ra $\left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}S_i$.

5.18/ $U = \{$ các hoán vị trên chuỗi 15 mẫu tự $\}$ có $|U| = 15!$, $A_1 = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon$ chứa **bad** $\}$,

$A_2 = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon$ chứa **gift** $\}$, $A_3 = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon$ chứa **snowy** $\}$ ($|A_1| = 13!$, $|A_2| = 12!$,

$|A_3| = 11!$) và $A_4 = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon$ chứa **friend** $\}$($|A_4| = 10!$). Ta có $|A_1 \cap A_2| = 2.8!\,K_3^8$,

$|A_1 \cap A_3| = 2.7!\,K_3^7$, $|A_2 \cap A_3| = 2.6!\,K_3^6$, $|A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 0$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!3!\,K_4^3$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$

và $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$. Tính $\left|\bigcap_{i=1}^{4} \overline{A_i}\right|$.

5.19/ $U = \{$ các hoán vị lặp trên chuỗi 111222333 $\}$ và $A_i = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon$ chứa **iii** $\}$ $(1 \le i \le 3)$.

Ta có $|U| = 9!/(3!)^3$, $|A_i| = 7!/(3!)^2$ $(1 \le i \le 3)$, $|A_i \cap A_j| = 5!/3!$ $(1 \le i < j \le 3)$ và

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!$. Tính $\left|\bigcap_{i=1}^{3} \overline{A_i}\right|$.

5.20/ $U = \{$ các hoán vị của INFORMATION $\}$, $A = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có IN, IN $\}$,

$B = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có NI, NI $\}$, $C = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có IO, IO $\}$, $D = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có OI, OI $\}$,

$E = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có NO, NO $\}$, $F = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có ON, ON $\}$. Để ý $A \cap B = A \cap C =$

$= A \cap F = B \cap D = B \cap E = C \cap D = C \cap E = D \cap F = E \cap F = \varnothing$,

$|U| = 11!/8$, $|A| = |B| = |C| = |D| = |E| = |F| = 36$ và

$|A \cap D| = |A \cap E| = |B \cap C| = |B \cap F| = |C \cap F| = |D \cap E| = 2$.

Suy ra $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D} \cap \overline{E} \cap \overline{F}| = |U| - (|A| + |B| + |C| + |D| + |E| + |F|) +$

$+ (| A \cap D | + | A \cap E | + | B \cap C | + | B \cap F | + | C \cap F | + | D \cap E |).$

5.21/ U = { các hoán vị của TAMELY }, A = { $\varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có T đứng trước A },

B = { $\varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có A đứng trước M } và C = { $\varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có M đứng trước E }.

$| U | = 6!$, $| A | = | B | = | C | = 4!\,C_6^2$, $| A \cap B | = | B \cap C | = 3!\,C_6^3$, $| A \cap C | = 2!\,C_6^4\,C_4^2$ và $| A \cap B \cap C | = 2!\,C_6^4$. Từ đó tính $| A \cup B \cup C |$.

5.22/ U = { các hoán vị của MATHEMATICS }, A = { $\varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có T luôn đứng trước A },

B = {$\varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có A luôn đứng trước M} và C = {$\varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có M luôn đứng trước E}.

$| U | = 11! / (2!)^3$, $| A | = | B | = 7!\,C_{11}^4 / 2!$, $| C | = 8!\,C_{11}^3 / (2!)^2$, $| A \cap B | = 5!\,C_{11}^6$,

$| B \cap C | = 6!\,C_{11}^5 / 2!$, $| A \cap C | = 4!\,C_{11}^7\,C_7^4$, $| A \cap B \cap C | = 4!\,C_{11}^7$. Từ đó tính $| A \cup B \cup C |$.

5.23/ a) U = { các hoán vị của CORRESPONDENTS }, A_1 = { $\varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có EE },

A_2 = { $\varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có NN }, A_3 = { $\varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có OO }, A_4 = { $\varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có RR }

và A_5 = { $\varepsilon \in U \mid \varepsilon$ có SS }. Ta có $| U | = 14! / (2!)^5$, $| A_i | = 13! / (2!)^4$ $(1 \le i \le 5)$,

$| A_i \cap A_j | = 12! / (2!)^3$ $(1 \le i < j \le 5)$, $| A_i \cap A_j \cap A_k | = 11! / (2!)^2$ $(1 \le i < j < k \le 5)$,

$| A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p | = 10! / 2!$ $(1 \le i < j < k < p \le 5)$, $| A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 | = 9!$

Từ đó tính $\left| \bigcap_{i=1}^{5} \overline{A_i} \right|$. b) $N_2 = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i C_{i+2}^i S_{i+2}$. c) $N_3^* = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i C_{i+2}^i S_{i+3}$.

5.24/ Đặt U là tập hợp các cách rút 13 lá bài (từ bộ bài có 52 lá),

A_1 ={ cách rút 13 lá bài không có lá *cơ* }, A_2 ={ cách rút 13 lá bài không có lá *chuồn* },

A_3 ={ cách rút 13 lá bài không có lá *rô* } và A_4 ={ cách rút 13 lá bài không có lá *bích* }.

Ta có $| U | = C_{52}^{13}$, $| A_i | = C_{39}^{13}$ $(1 \le i \le 4)$, $| A_i \cap A_j | = C_{26}^{13}$ $(1 \le i < j \le 4)$,

$| A_i \cap A_j \cap A_k | = C_{13}^{13} = 1$ $(1 \le i < j < k \le 4)$ và $| A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 | = 0$.

a) $\left| \bigcap_{i=1}^{4} \overline{A_i} \right| = | U | - S_1 + S_2 - S_3 + S_4$. b) $N_1 = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i C_{i+1}^i S_{i+1}$. c) $N_2 = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i C_{i+2}^i S_{i+2}$.

5.25/ a) $C_4^2\sum_{i=1}^{9}C_{10}^{i}$. b) $C_4^2\sum_{i=1}^{9}C_{10}^{i}+4$.

5.26/ a) U = S_7 , A_i = { f ∈ U | f (i) = i } thì | A_i | = 6! (1 ≤ i ≤ 7), | $A_i \cap A_j$ | = 5! (1 ≤ i < j ≤ 7),

| $A_i \cap A_j \cap A_k$ | = 4! (1 ≤ i < j < k ≤ 7), | $A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p$ | = 3! (1 ≤ i < j < k < p ≤ 7),

| $A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p \cap A_q$ | = 2! (1 ≤ i < j < k < p < q ≤ 7),

| $A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p \cap A_q \cap A_r$ | = 1 = 1! (1 ≤ i < j < k < p < q < r ≤ 7),

| $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7$ | = 1 = 0! và | U | = 7!.

Ta có $|\bigcup_{i=1}^{7}A_i|$ = $S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 - S_6 + S_7$

$$= C_7^1 6! - C_7^2 5! + C_7^3 4! - C_7^4 3! + C_7^5 2! - C_7^6 1! + C_7^7 0! .$$

$$|\bigcap_{i=1}^{7}\overline{A_i}| = |U| - |\bigcup_{i=1}^{7}A_i| = C_7^0 7! - C_7^1 6! + C_7^2 5! - C_7^3 4! + C_7^4 3! - C_7^5 2! + C_7^6 1! - C_7^7 0! .$$

b) Số song ánh f : X → X sao cho ∃i ∈X, f (i) = i là $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i(n-i)!$. Số song ánh

f : X → X thỏa ∀i ∈X, f (i) ≠ i là $n! - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}C_n^i(n-i)! = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}C_n^i(n-i)!$.

5.27/ a) Áp dụng phần b) của **5.26** với n = 10. Không gian mẫu Ω có | Ω | = 10! .

b) Áp dụng phần b) của **5.26**. Không gian mẫu Ω có | Ω | = n! .

5.28/ | X | = m và Y = { $y_1, y_2, \dots , y_n$ } với m ≥ n.

Đặt U là tập hợp các ánh xạ từ X vào Y và A_i = { f : X → Y | y_i ∉ f (X) } (1 ≤ i ≤ n).

Ta có | U | = n^m , | A_i | = $(n-1)^m$ (1 ≤ i ≤ n), | $A_i \cap A_j$ | = $(n-2)^m$ (1 ≤ i < j ≤ n),

| $A_i \cap A_j \cap A_k$ | = $(n-3)^m$ (1 ≤ i < j < k ≤ n), … và $|\bigcap_{i=1}^{n}A_i|$ = $(n-n)^m$ = 0.

$S_1 = C_n^1(n-1)^m$, $S_2 = C_n^2(n-2)^m$, $S_3 = C_n^3(n-3)^m$, … và $S_n = C_n^3(n-n)^m = 0$.

Số ánh xạ không toàn ánh từ X vào Y là $|\bigcup_{i=1}^{n}A_i| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_n^i(n-i)^m$.

Số ánh xạ toàn ánh từ X vào Y là $|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}| = |U| - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i (n-i)^m$.

5.29/ Đếm số toàn ánh từ X vào Y với | X | = 10 > | Y | = 5. Áp dụng **6 .28**.

5.30/ Dùng **6.28** để tính a_i = số toàn ánh từ X vào Y với | X | = 10 > | Y | = i (1 ≤ i ≤ 4).

a) $C_7^4 a_4$.

b) $C_7^1 a_1 + C_7^2 a_2 + C_7^3 a_3 + C_7^4 a_4$.

5.31/ a) Δ là ô được đánh dấu trên C. Ta phân tích C theo các bàn cờ C_1 và C_2 .

C_1 và C_2 đều là phần hội của hai bàn cờ nhỏ rời nhau (mỗi bàn cờ nhỏ có ≤ 2 dòng).

b) D là phần hội của hai bàn cờ nhỏ rời nhau (mỗi bàn cờ nhỏ có tối đa 2 dòng).

c) Δ là ô được đánh dấu trên E. Ta phân tích E theo các bàn cờ E_1 và E_2 .

E_1 và E_2 đều là phần hội của hai bàn cờ nhỏ rời nhau (mỗi bàn cở nhỏ có 2 dòng).

d) Δ là ô được đánh dấu trên F. Ta phân tích F theo các bàn cờ F_1 và F_2 .

F_1 là phần hội của hai bàn cờ nhỏ rời nhau (mỗi bàn cở nhỏ có tối đa 2 dòng).

Trong F_2 , Δ là ô (3,3). Ta phân tích F_2 theo các bàn cờ G và H.

G là phần hội của hai bàn cờ nhỏ rời nhau (mỗi bàn cở nhỏ có tối đa 2 dòng).

Trong H, Δ là ô (3,2). Ta phân tích H theo các bàn cờ K và L.

H và K đều là phần hội của các bàn cờ nhỏ rời nhau (mỗi bàn cở nhỏ có ≤ 2 dòng).

5.32/ X có các tập con X_i = { i + 1 } (1 ≤ i ≤ n – 1) và X_n = ∅.

Ta có $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \{ \sigma \in S_n \mid \sigma(i) \notin X_i \ (1 \le i \le n) \}$.

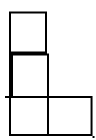
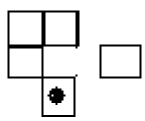
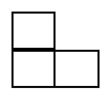
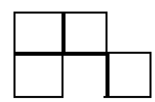
Trên bàn cờ n × n, các ô bị cấm là (1,2), (2,3), … và (n – 1, n). C là bàn cờ có từ các ô bị cấm. C là phần hội của (n – 1) bàn cờ nhỏ rời nhau và mỗi bàn cờ nhỏ chỉ có 1 ô.

Ta có $R(C,x) = (1 + x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k$ và $|P(X_1, X_2, ..., X_n)| = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k (n-k)! r_k(C)$.

5.33/ Thêm khách ảo E có thể sắp vào bàn tùy ý. Trên bàn cờ 5×5, các ô bị cấm là $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,4)$ và $(4,5)$. Các ô bị cấm tạo ra bàn cờ C. Bàn cờ C là phần hội của hai bàn cờ nhỏ rời nhau (mỗi bàn cờ nhỏ có hai dòng).

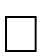
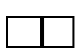
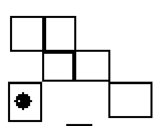
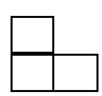
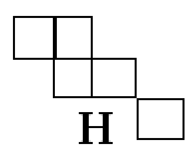
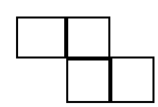
5.34/ Ta thêm một người nữ ảo e phù hợp với cả 5 nam. Trên bàn cờ 5×5, các ô bị cấm là $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,5)$ và $(4,2)$. Xóa cột 4, các ô bị cấm là $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,4)$ và $(4,2)$. Các ô bị cấm tạo ra bàn cờ C. Bàn cờ C là phần hội của hai bàn cờ nhỏ rời nhau (mỗi bàn cờ nhỏ có hai cột).

5.35/ Trên bàn cờ 6×6, các ô bị cấm là $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,1)$, $(3,5)$, $(4,2)$, $(5,4)$, $(6,4)$, $(6,6)$. C là bàn cờ có từ các ô bị cấm. Bàn cờ C là phần hội của các bàn cờ rời nhau D (cột 4 và 6) và E (cột $1, 2$ và 5). Ta có $R(C,x) = R(D,x).R(E,x) = (1 + 4x + 2x^2)R(E,x)$. Trong E, chọn Δ là ô được đánh dấu.


D

E

F

G

Ta có $R(E,x) = xR(F,x) + R(G,x) = x(1 + 3x + x^2) + (1 + 4x + 3x^2)$.

5.36/ Trên bàn cờ 7×7, các ô bị cấm là $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,5)$, $(4,3)$, $(4,6)$, $(5,2)$, $(5,7)$, $(7,4)$.


D = L

E

F

G

H

K

C là bàn cờ có từ các ô bị cấm. C là phần hội của các bàn cờ rời nhau D (cột 4), E (cột 1, 5) và F (cột 2, 3, 6, 7) nên $R(C,x) = R(D,x).R(E,x).R(F,x) = (1 + x)(1 + 2x)R(F,x)$. Trong F, chọn Δ là ô được đánh dấu. Ta có $R(F,x) = xR(G,x) + R(H,x) =$
$= x(1 + 2x) + R(K,x).R(L,x) = x(1 + 2x) + (1 + 4x + 3x^2)(1 + x)$.

5.37/ Số cặp nút có thể xuất hiện sau một lần tung hai xúc xắc là $6^2 - 7 = 29$.

U = { các trường hợp xảy ra sau 6 lần tung cặp xúc xắc } có $| U | = 29^6 = 594.823.321$.

$P(X_1, \dots, X_6) = \{ \sigma \in S_6 \mid \sigma(1) \neq 2, 1 \neq \sigma(2) \neq 5, \sigma(3) \neq 4, 1 \neq \sigma(4) \neq 5$ và $\sigma(6) \neq 6 \}$.

Trên bàn cờ 6×6, các ô bị cấm là (1,2), (2,1), (2,5), (3,4), (4,1), (4,5), (6,6). Các ô bị cấm tạo ra bàn cờ C. Bàn cờ C là phần hội của các bàn cờ rời nhau D (cột 1 và cột 5), E (cột 2), F (cột 4) và G (cột 6) nên ta có R(C,x) = R(D,x).R(E,x).R(F,x).R(G,x) =

$= (1 + 4x + 2x^2)(1 + x)^3 = 1 + 7x + 17x^2 + 19x^3 + 10x^4 + 2x^5$.

$| P(X_1, \dots, X_6) | = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k (6-k)! r_k(C) = 6! - 7.5! + 17.4! - 19.3! + 10 - 2 = 182$.

Số trường hợp thuận lợi cho yêu cầu bài toán là $6! \times 182 = 131.040$.

Xác suất cần tìm là (131.040 / 594.823.321) = 0,00022.

5.38/ Ta tính số cách chia quà thỏa giả thiết bài toán. Trên bàn cờ 5×5, các ô bị cấm là (1,1), (1,3), (2,4), (3,2), (3,5), (4,2), (5,1) và (5,3). Các ô bị cấm tạo ra bàn cờ H.

Bàn cờ H là phần hội của các bàn cờ rời nhau K (cột 1, 3), L (cột 2, 5) và M (cột 4) nên ta có $R(H,x) = R(K,x).R(L,x).R(M,x) = (1 + 4x + 2x^2)(1 + 3x + x^2)(1 + x)$

$= 1 + 8x + 22x^2 + 25x^3 + 12x^4 + 2x^5$.

$| P(X_1, \dots, X_5) | = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k (5-k)! r_k(H) = 5! - 8.4! + 22.3! - 25.2! + 12 - 2 = 20$.

a) Thêm yêu cầu A nhận được e : Tính số trường hợp A không nhận được e. Đặt $N = H \cup \{(1,5)\}$. Trong N, chọn Δ là ô (1,5). Ta có R.(N,x) = R(H,x) + xR(Q,x) với Q là phần hội của hai bàn cờ nhỏ rời nhau (mỗi bàn cờ nhỏ có một dòng hay một cột). Suy ra $R(N,x) = (1 + 8x + 22x^2 + 25x^3 + 12x^4 + 2x^5) + x(1 + 2x)^2$

$= 1 + 9x + 26x^2 + 29x^3 + 12x^4 + 2x^5$.

| P(X_1’, … , X_5) | = $\sum_{k=0}^{5}(-1)^k(5-k)!r_k(N)$ = 5! – 9.4! + 26.3! – 29.2! + 12 – 2 = 12.

Xác suất cần tìm là [(20 – 12) / 20] = 0,4.

b) Thêm yêu cầu B hoặc E nhận được e : Tính số trường hợp B và E không nhận được e. Đặt S = H $\cup$ { (2,5), (5,5) }. Trong S, chọn Δ là ô (2,5).

Ta có R(S,x) = xR(T,x) + R(Y,x) = x(1 + 2x)(1 + 4x + $2x^2$) + R(Y,x) với T là phần hội của hai bàn cờ nhỏ rời nhau (mỗi bàn cờ nhỏ có ≤ 2 cột) và Y = H $\cup$ { (5,5) }.

Trong Y, chọn Δ là ô (5,5). Ta có R(Y,x) = R(H,x) + xR(Z,x) = 1 + 8x + $22x^2$ + + $25x^3$ + $12x^4$ + $2x^5$ + x(1 + 2x)(1 + 3x + $2x^2$) = 1+ 9x + $27x^2$ + $35x^3$ + $16x^4$ + $2x^5$ với Z là phần hội của hai bàn cờ rời nhau (mỗi bàn cờ có hai dòng hay có một cột)

Vậy R(S,x) = 1 + 10x + $33x^2$ + $45x^3$ + $20x^4$ + $2x^5$.

| P(X_1, X_2’, … , X_5’) | = $\sum_{k=0}^{5}(-1)^k(5-k)!r_k(S)$ = 5! – 10.4! + 33.3! – 45.2! + 20 – 2 = 6.

Xác suất cần tìm là [(20 – 6) / 20] = 0,7.

CHƯƠNG VI: CÁC SỐ ĐẾM NÂNG CAO.

6.1/ a) C_n = $\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$ hoặc C_n = $\sum_{k=0}^{n-1}C_kC_{n-k-1}$ (n = 7, 8, 9 , 10).

b) S_n^2 = $2^{i-1} - 1$ (n = 6, 7, 8, 9, 10), S_n^{n-1} = C_n^2 (n = 5, 6, 7, 8, 9, 10) và

S_n^3 = 3S_{n-1}^3 + S_{n-1}^2 (n = 7, 8, 9, 10).

6.2/ Phân tích các số nguyên dương đã cho thành tích của các số nguyên tố dương khác nhau (dùng các số nguyên tố từ 2 đến 31).

6.3/ r^n = $\sum_{k=0}^{r}S_n^kA_r^k$ (n = 5, 6) và r = x (x là biến số nguyên ≥ 1).

6.4/ B_n **=** $\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^kB_k$ (n = 7, 8, 9 , 10) và dùng sự phân tích nguyên tố trong bài tập **6.2**.
