

# Chương 4

# ĐẠI SỐ BOOLE

---

Giảng viên : Phạm Thị Lan

Bộ môn : Khoa học máy tính

Khoa : Công nghệ thông tin

# Nội dung

- 1. Đại số Boole
- 2. Hàm Boole
- 3. Biểu diễn hàm Boole
- 4. Mạch logic

# Mở đầu

- Các mạch trong máy tính và thiết bị điện tử có nhiều đầu vào ở trạng thái 0 hoặc 1, đầu ra là cũng là trạng thái 0 hoặc 1.
- Các mạch được xây dựng từ các thành phần cơ bản có 2 trạng thái khác nhau như công tắc (bật hoặc tắt), thiết bị quang học (có ánh sáng hoặc không có ánh sáng).
- George Boolean đưa ra các quy tắc logic cơ bản năm 1854. Claude Shannon chỉ ra cách sử dụng quy tắc này trong thiết kế mạch logic vào năm 1938. Các quy tắc này tạo cơ sở cho đại số Boole.

# Mục tiêu

- Nhắc lại được định nghĩa, các tính chất cơ bản trong đại số Boole.
- Chuyển đổi giữa các dạng biểu diễn hàm Boole (diễn đạt bằng lời, bảng giá trị, biểu thức).
- Xác định được dạng chuẩn tắc tổng, chuẩn tắc tích cho hàm Boole 2, 3, 4 biến.
- Vẽ được mạch logic của một hàm và xác định được hàm đầu ra của một mạch logic.
- Xây dựng được mạch logic cho một số bài toán đơn giản trong thực tế.

# 1. Đại số Boole

- Đại số Boole cung cấp các phép toán và các luật trên tập gồm hai giá trị  $\{0, 1\}$
- Ba phép toán: Phép lấy phần bù, phép lấy tổng + (hoặc OR), phép lấy tích  $\cdot$  (hoặc AND)

$$\overline{0} = 1 \qquad \overline{1} = 0.$$

$$1 + 1 = 1, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad 0 + 1 = 1, \qquad 0 + 0 = 0.$$

$$1 \cdot 1 = 1, \qquad 1 \cdot 0 = 0, \qquad 0 \cdot 1 = 0, \qquad 0 \cdot 0 = 0.$$

# 1. Đại số Boole

Tập  $B$  với ba phép toán:

- Phép lấy phần bù (kí hiệu:  $-$  )
- Phép lấy tổng Boole (kí hiệu:  $+$  )
- Phép nhân Boole (kí hiệu:  $.$  )

Được gọi là một đại số Boole nếu tập  $B$  có hai phần tử đặc biệt là 0 và 1 sao cho các đẳng thức sau được thỏa mãn (với  $x, y, z \in B$ ):

$$i) \quad x.1 = x + 0 = x$$

$$ii) \quad x + \bar{x} = 1 \text{ và } x.\bar{x} = 0$$

$$iii) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$iv) \quad x + y = y + x \text{ và } x.y = y.x$$

$$x.(y.z) = (x.y).z$$

$$v) \quad x.(y + z) = x.y + x.z \text{ và } (x.y) + z = (x + z).(y + z)$$

# 1. Đại số Boole

- **Thứ tự ưu tiên các phép toán:**
  - Theo thứ tự giảm dần: lấy phần bù, nhân, tổng.
  - Nếu có các cặp ngoặc thì ưu tiên ngoặc trong cùng trước.
- **Ví dụ:** Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$(1 + \overline{1}) + \overline{1.0}$$

$$1.0 + \overline{(0 + 1)}$$

# 1. Đại số Boole

## Ví dụ về Đại số Boole

- Ví dụ 1:
  - $B$  là tập các giá trị logic
  - Phần tử 0 là giá trị  $F$ , phần tử 1 là giá trị  $T$
  - Các phép toán *phủ định, tuyển, hội*
- Ví dụ 2:
  - $B$  là tập các tập con của một tập  $U$  cho trước
  - Phần tử 0 là tập rỗng, phần tử 1 là tập  $U$
  - Các phép toán là *phép lấy phần bù, phép hợp, phép giao*



# 1. Đại số Boole

## Các hằng đẳng thức Boole

Luật đồng nhất:

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

Luật bù:

$$x + \bar{x} = 1$$

$$x\bar{x} = 0$$

Luật nuốt:

$$x + 1 = 1$$

$$x \cdot 0 = 0$$

Luật lũy đẳng:

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

Luật giao hoán:

$$x + y = y + x$$

$$xy = yx$$

Luật kết hợp:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x(yz) = (xy)z$$

# 1. Đại số Boole

## Các hằng đẳng thức Boole

Luật hai lần lấy phần bù kép:

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Luật phân phối:

$$x + yz = (x + y)(x + z)$$

$$x(y + z) = xy + xz$$

Luật De Morgan:

$$\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{(x + y)} = \overline{x} \overline{y}$$

# 1. Đại số Boole

- Ví dụ: sử dụng các hằng đẳng thức chứng minh rằng

- Chứng minh:  $x(x + y) = x$

$$x(x + y) = (x + 0)(x + y) \quad \text{Luật đồng nhất}$$

$$= x + 0 \cdot y \quad \text{Luật phân phối}$$

$$= x + y \cdot 0 \quad \text{Luật giao hoán}$$

$$= x + 0 \quad \text{Luật nuốt}$$

$$= x \quad \text{Luật đồng nhất}$$

## 2. Hàm Boole

- Hàm Boole  $n$  biến  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , với  $B = \{0, 1\}$

$$f: B^n \rightarrow B$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$x$	$y$	$F(x, y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

$x$	$y$	$z$	$F(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

## 2. Hàm Boole

- **Hai hàm Boole bằng nhau:**

- Cho  $f$  và  $g$  là hai hàm Boole  $n$  biến được gọi là bằng nhau nếu và chỉ nếu với mọi  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$  thỏa

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- **Ví dụ:** chứng tỏ rằng hai hàm Boole sau bằng nhau

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 \cdot x_2 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \\ g(x_1, x_2) &= (\overline{x_1} + x_2) \cdot (x_1 + \overline{x_2}) \end{aligned}$$

## 2. Hàm Boole

### Các phép toán trên hàm Boole:

- Phần bù của một hàm

$$\overline{F}(x_1, \dots, x_n) = \overline{F(x_1, \dots, x_n)}.$$

- Tổng của hai hàm Boole

$$(F + G)(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n) + G(x_1, \dots, x_n)$$

- Tích của hai hàm Boole

$$(FG)(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n)G(x_1, \dots, x_n)$$

## 2. Hàm Boole

### Các hàm Boole 2 biến khác nhau

**TABLE 3** The 16 Boolean Functions of Degree Two.

$x$	$y$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	$F_{13}$	$F_{14}$	$F_{15}$	$F_{16}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

? Có bao nhiêu hàm Boole  
 $n$  biến khác nhau?

$$2^{2^n}$$

<i>Degree</i>	<i>Number</i>
1	4
2	16
3	256
4	65,536
5	4,294,967,296
6	18,446,744,073,709,551,616

## 2. Hàm Boole

### Luật đối ngẫu

- Phép nhân và phép cộng đối ngẫu với nhau
- 0 và 1 đối ngẫu với nhau

Từ biểu thức  $F$ , thay các đối tượng đối ngẫu với nhau thu được biểu thức đối ngẫu  $F_d$  của  $F$

Ví dụ:

$$F = x \cdot 0 + y \cdot (y + \bar{z} + 1)$$
$$\Rightarrow F_d = (x + 1) \cdot (y + y \cdot \bar{z} \cdot 0)$$



### 3. Biểu diễn hàm Boole

- **Biểu diễn bằng lời:**

- Hàm Boole  $F(x, y)$  là hàm chỉ nhận giá trị 1 khi và chỉ khi  $(x, y) = (0, 1)$  và nhận giá trị 0 tại mọi trường hợp khác.

- **Biểu diễn bằng bảng giá trị:**

x	y	$F(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

y \ x	0	1
	0	1
0	0	0
1	1	0

- **Biểu diễn bằng biểu thức Boole:**  $F(x, y) = \bar{x}y$

### 3. Biểu diễn hàm Boole

- Dạng chuẩn tắc của biểu thức biểu diễn hàm Boole:
  - Tổng chuẩn (tuyến chuẩn): Biểu thức là **tổng** của các **tích**, mỗi tích có đầy đủ các biến
  - Tích chuẩn (hội chuẩn): Biểu thức là **tích** của các **tổng**, mỗi tổng có đầy đủ các biến.
- Ví dụ:

$$F(x, y, z) = \overline{\overline{x}}\overline{y}z + \overline{x}\overline{y}\overline{z} + \overline{x}yz$$

$$F(x, y) = (x + y)(\overline{x} + y)(\overline{x} + \overline{y})$$

### 3. Biểu diễn hàm Boole

Ví dụ: Tìm dạng tổng chuẩn và tích chuẩn của hàm

$x$	$y$	$z$	$F(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

$$F(x, y, z) = x.y.\bar{z} + x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.\bar{z}$$

? Quy tắc tìm dạng  
tổng chuẩn từ bảng giá  
trị chân lý?

### 3. Biểu diễn hàm Boole

Ví dụ: Tìm dạng chuẩn tắc tổng và tích của hàm sau:

$x$	$y$	$z$	$F(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

$$F(x, y, z) = (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}).(\bar{x} + y + \bar{z}).$$
$$(x + \bar{y} + \bar{z}).(x + y + \bar{z}).$$
$$(x + y + z)$$

? Quy tắc tìm dạng tích chuẩn từ bảng giá trị chân lý?

### 3. Biểu diễn hàm Boole

? Tìm dạng tổng chuẩn của hàm Boole sau

$$F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$$

$x$	$y$	$z$	$x + y$	$\bar{z}$	$(x + y)\bar{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

### 3. Biểu diễn hàm Boole

? Tìm dạng tổng chuẩn của hàm Boole sau

$$F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$$

$$F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$$

$$= x\bar{z} + y\bar{z}$$

$$= x1\bar{z} + 1y\bar{z}$$

$$= x(y + \bar{y})\bar{z} + (x + \bar{x})y\bar{z}$$

$$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

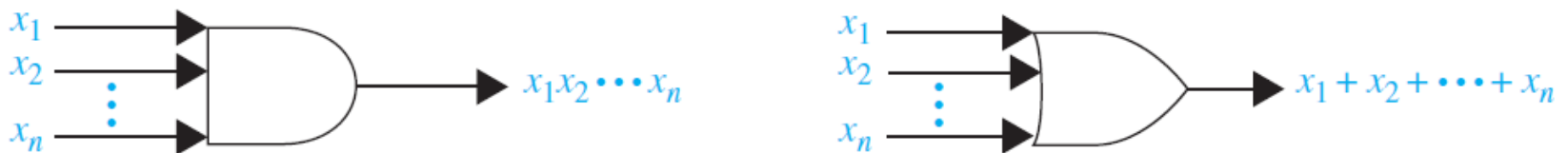
$$= xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}.$$

## 4. Mạch logic

- Các cổng logic cơ bản

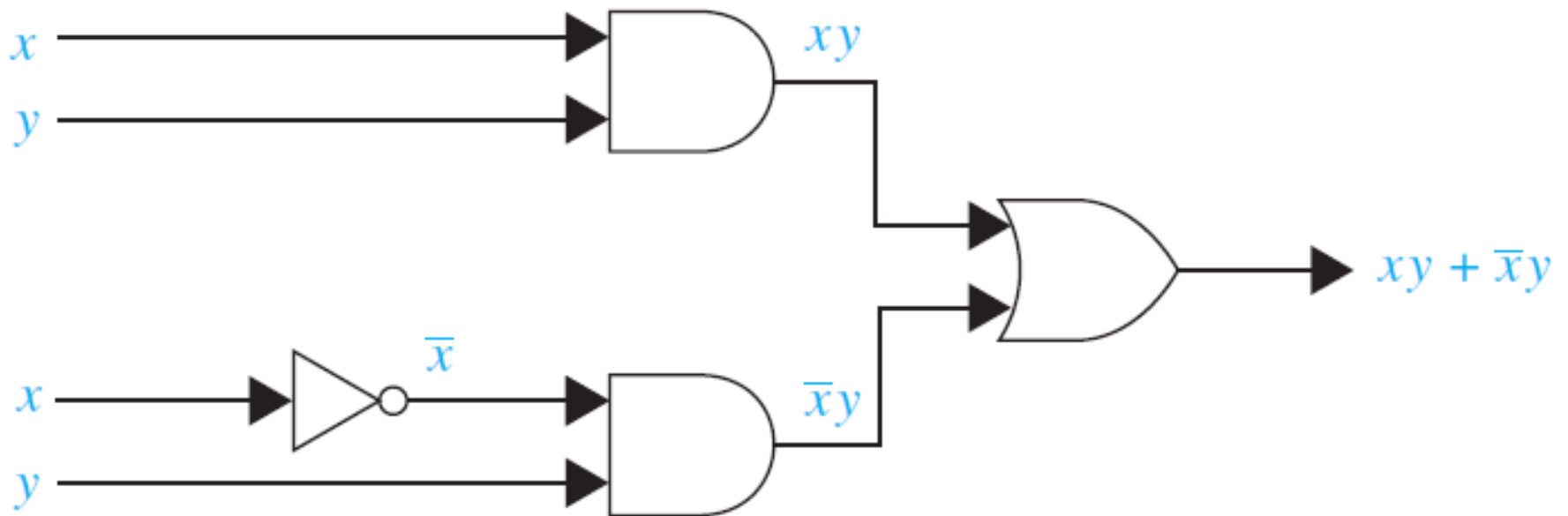


- Cổng logic AND, OR có nhiều đầu vào



## 4. Mạch logic

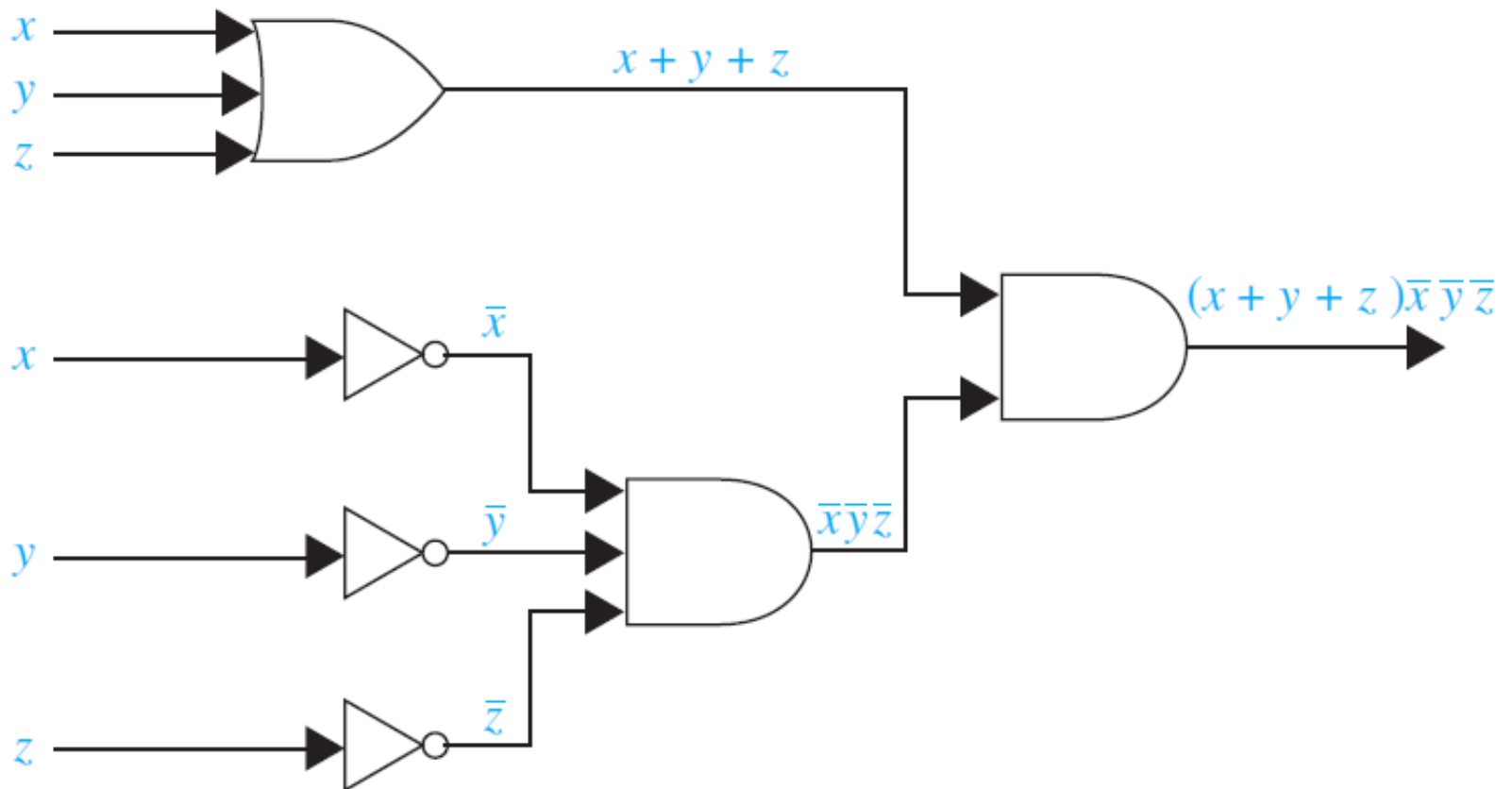
- Tổ hợp các cổng logic





## 4. Mạch logic

- Tổ hợp các cổng logic



## 4. Mạch logic

- **Ví dụ: Thiết kế mạch bỏ phiếu theo đa số**
  - Giả sử có 3 thành viên trong hội đồng quản trị để bỏ phiếu cho các quyết định.
  - Một quyết định được thông qua nếu có ít nhất 2 thành viên đồng ý.
- **Thiết kế mạch**
  - Kết quả bỏ phiếu của mỗi thành viên là 1 (đồng ý) hoặc 0 (không đồng ý).
  - Một quyết định được thông qua (giá trị 1) hoặc không được thông qua (giá trị 0)
  - Lập hàm Boole
  - Vẽ mạch logic

## 4. Mạch logic

- Lập hàm Boole (Bài toán bỏ phiếu)

x	y	z	F(x, y, z)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

$$F(x, y, z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz$$

## 4. Mạch logic

- **Lập hàm Boole (Bài toán bỏ phiếu)**

$$F(x, y, z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz$$

- **Dạng rút gọn của hàm**

$$F(x, y, z) = xy + xz + yz$$

- **Hãy vẽ hai mạch tương ứng với 2 hàm và so sánh.**
- **Nêu ý nghĩa của việc rút gọn biểu thức hàm.**

# Tổng kết chương

- Định nghĩa đại số Boole, các đẳng thức đáng nhớ
- Hàm Boole và các cách biểu diễn
- Dạng chuẩn tắc của hàm Boole
- Các thành phần trong mạch logic, vẽ mạch logic thực hiện hàm từ biểu thức cho trước.
- Thiết kế một số mạch logic đơn giản.