Học phần TOÁN RỜI RẠC

(3 tín chỉ)

GIẢNG VIÊN: PHẠM THỊ LAN

KHOA: CÔNG NGHỆ THÔNG TIN - ĐHSPHN

Chương 1 Logic mệnh đề, suy luận

- 1. KHÁI NIỆM
- 2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MỆNH ĐỀ
- 3. ỨNG DỤNG LOGIC MỆNH ĐỀ
- 4. TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC
- 5. VỊ NGỮ, LƯỢNG TỬ
- 6. CÁC QUY TẮC SUY LUẬN

1. LOGIC MỆNH ĐỀ

Xét xem mục đích của các câu sau là gì?

- 1. Bây giờ là mấy giờ ?"
- 2. "Hà nội là thủ đô của Việt nam."
- 3. X + Y = Z
- 4. 1 + 1 = 2
- 5. 2 + 2 = 3
- 6. "Hãy suy nghĩ điều này cho kỹ lưỡng"
- 7. x + 1 = 2

1. LOGIC MỆNH ĐỀ

Định nghĩa: Một mệnh đề là một câu khẳng định hoặc đúng hoặc sai (không thể vừa đúng vừa sai)

Ví dụ các mệnh đề:

- "Hà Nội là thủ đô của Việt nam."
- 1 + 1 = 2
- 2 + 2 = 3

Ví dụ không phải mệnh đề:

- Bây giờ là mấy giờ ?"
- "Hãy suy nghĩ điều này cho kỹ lưỡng"
- x + 1 = 2
- X + Y = Z

1. LOGIC MỆNH ĐỀ

Giá trị chân lý:

- Câu khẳng định đúng là mệnh đề có giá trị chân lý T (truth)
- Câu khẳng định sai là mệnh đề có giá trị chân lý F (false)

Mệnh đề sơ cấp: là các mệnh đề sơ cấp khi bỏ bớt 1 thành phần thì không còn là mệnh đề nữa. (Tương ứng câu khẳng định 1 chủ ngữ - 1 vị ngữ)

- Bác Hồ sinh năm 1890
- Bác Hồ mất năm 1970

- 1. Phép phủ định
- 2. Phép tuyển
- 3. Phép hội
- 4. Phép tuyển có loại
- 5. Phép kéo theo
- 6. Phép tương đương

Với mỗi phép toán:

- Tên gọi, ký hiệu
- Cách xác định kết quả (bảng giá trị chân lý)
- Các liên từ diễn đạt

Phép tuyển:

- Mệnh đề p tuyển với mệnh đề q (ký hiệu $p \lor q$) là một mệnh đề.
- p∨q chỉ nhận giá trị T khi và chỉ khi ít nhất một trong hai mệnh đề p,
 q nhận giá trị T.
- p∨q nhận giá trị F khi và chỉ khi cả p, q đều nhận giá trị F.

Phép hội:

- Mệnh đề p hội mệnh đề q (ký hiệu p∧q) là một mệnh đề.
- $p \wedge q$ chỉ nhận giá trị T khi và chỉ khi p, q nhận giá trị T.
- $p \wedge q$ nhận giá trị F khi và chỉ khi hoặc p, q, hoặc cả hai nhận giá trị F.

Phép phủ định:

- Phủ định mệnh đề p (kí hiệu $\neg p$) là một mệnh đề
- $\neg p$ nhận giá trị F khi và chỉ khi mệnh đề p nhận giá trị T, nhận giá trị F khi và chỉ khi p nhận giá trị T.

Phép tuyển loại:

- Mệnh đề tuyển loại của p và q (ký hiệu p⊕q) là một mệnh đề.
- p⊕q chỉ đúng khi một trong p hoặc q là đúng và sai p và q có cùng giá trị chân lý.

Phép suy ra:

- Mệnh đề p suy ra q (ký hiệu $p \rightarrow q$) là một mệnh đề.
- $p \rightarrow q$ nhận giá F khi và chỉ khi p nhận giá trị T và q nhận giá trị F, nhận giá trị T trong các trường hợp còn lại

Phép tương đương:

- Tương đương của hai mệnh đề p, q (ký hiệu $p \leftrightarrow q$) là một mệnh đề.
- p ↔ q có giá trị T khi p và q có cùng giá trị chân lý và F khi p và q khác giá trị chân lý.

Phép toán	Liên từ
Phép phủ định	Không
Phép tuyển	Hoặc
Phép hội	Và; nhưng
Phép tuyển có loại	Không không
Phép kéo theo	Nếu thì; từ p suy ra q; q chỉ khi p
Phép tương đương	nếu và chỉ nếu; khi và chỉ khi; từ p suy ra q và ngược lại

2. BẢNG GIÁ TRỊ CHÂN LÝ

р	q	p∨q	p∧q	¬р	p⊕q	p→q	p↔ q
Т	Т	Т	Т	F	F	Т	Т
Т	F	Т	F	F	Т	F	F
F	Т	Т	F	Т	Т	Т	F
F	F	F	F	Т	F	T	Τ

Bài tập

Cho p và q là hai mệnh đề:

p: Nhiệt độ không khí dưới 0°.

q: Tuyết rơi.

Dùng p, q và các phép toán lôgic để biểu diễn các mệnh đề dưới đây:

- a. Nhiệt độ không khí dưới 0° và tuyết rơi.
- b. Nhiệt độ không khí dưới 0° nhưng không có tuyết rơi.
- c. Nhiệt độ không dưới 0° và không có tuyết rơi

Bài tập

Cho p và q là hai mệnh đề:

- p: Nhiệt độ không khí dưới 0°.
- q: Tuyết rơi.
- d. Nếu tuyết không rơi thì nhiệt độ không khí không dưới 0°.
- e. Nhiệt độ không khí dưới 0° hoặc không có tuyết rơi.
- f. Nếu nhiệt độ không khí dưới 0° thì có tuyết rơi.
- g. Hoặc nhiệt độ không khí dưới 0° hoặc có tuyết rơi
- h. Nhiệt độ không khí dưới 0° là điều kiện cần và đủ để có tuyết rơi.

2. BẢNG GIÁ TRỊ CHÂN LÝ

Thứ tự ưu tiên các phép toán:

- Các phép toán trong ngoặc thực hiện trước
- Khi không có ngoặc, thứ tự ưu tiên giảm dần là phép phủ định, phép hội, phép tuyển, phép suy ra, phép tương đương

Precedence of Logical Operators.				
Operator	Precedence			
_	1			
^ V	2 3			
\rightarrow \leftrightarrow	4 5			

Bài tập

Ví dụ: Cho mệnh đề phức hợp

$$A = p \to q \land \bar{r} \lor (p \to \bar{q})$$

a. Với p = T; q = F; r = T

Hãy xác định giá trị chân lý của mệnh đề A

b. Lập bảng giá trị chân lý của mệnh đề A

2. MỆNH ĐỀ ĐẢO VÀ PHẢN ĐẢO

Cho mệnh đề kéo theo $p \rightarrow q$

- Mệnh đề đảo là: $q \rightarrow p$
- Mệnh đề phản đảo là: $\neg q \rightarrow \neg p$

Ví dụ: Phát biểu mệnh đề đảo, mệnh đề phản đảo của mệnh đề sau:

"Nếu hôm nay có tuyết rơi, ngày mai tôi sẽ đi trượt tuyết"

2. Các phép toán logic trên bít

- Một bít chỉ có 2 giá trị 1 hoặc 0.
- Một bít có thể được sử dụng để biểu diễn giá trị chân lý: 1 – True, 0 – False.
- Các phép toán trên bít tương ứng với các phép toán logic.

	AND, and XOR.						
x	у	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$			
0	0	0	0	0			
0	1	1	0	1			
1	0	1	0	1			
1	1	1	1	0			

Table for the Rit Operators OR

01 1011 0110 11 0001 1101 11 1011 1111 bitwise *OR* 01 0001 0100 bitwise *AND* 10 1010 1011 bitwise *XOR*

Dịch các câu thông thường:

"Bạn có thể truy cập Internet trong khuôn viên trường chỉ khi bạn là sinh viên chuyên ngành khoa học máy tính hoặc bạn không phải là sinh viên năm nhất."

Các mệnh đề sơ cấp:

p: Bạn có thể truy cập Internet trong khuôn viên trường

q: Bạn là sinh viên chuyên ngành khoa học máy tính

r: Bạn là sinh viên năm nhất

$$(q \lor \neg r) \rightarrow p$$

Dịch các câu thông thường:

"Bạn không được đi xe máy nếu bạn dưới 16 tuổi, trừ khi bạn có giấy phép đặc biệt hoặc xe máy phân khối nhỏ"

Các mệnh đề sơ cấp:

p: Bạn không được đi xe máy

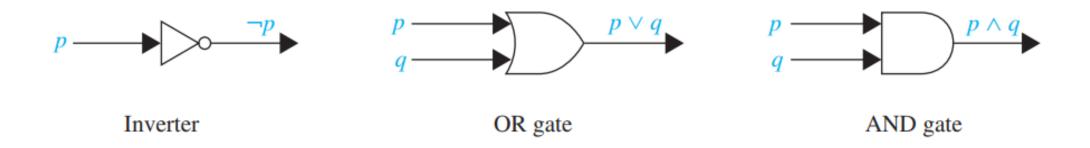
q: Bạn dưới 16 tuổi

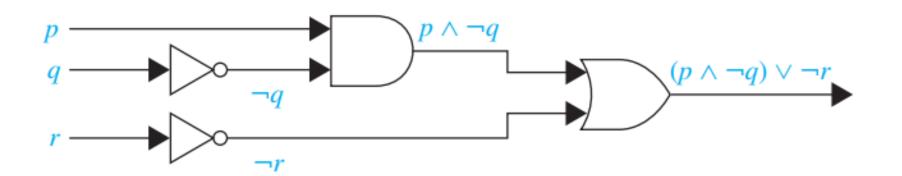
r: Bạn có giấy phép đặc biệt

s: Xe máy phân khối nhỏ

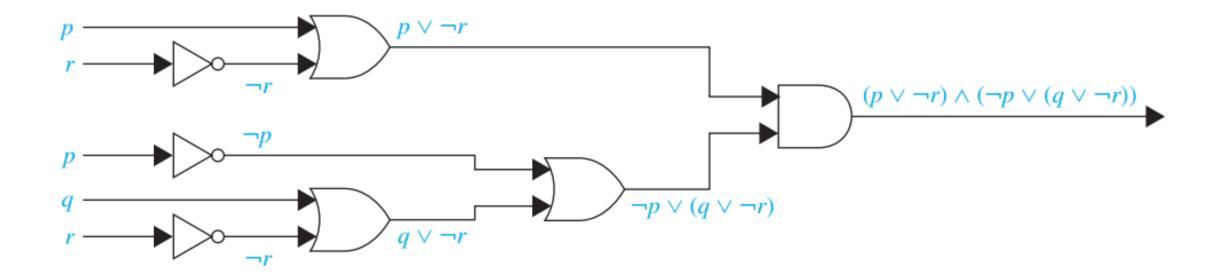
$$q \land \neg (r \lor s) \rightarrow p$$

Thiết kế mạch logic:





Thiết kế mạch logic:



Câu đố logic:

- Trong một ngôi làng có 2 kiểu người: luôn nói sự thật, luôn nói dối.
- Nếu bạn gặp A và B ở đầu làng.
 - ► A nói: "B là người nói thật"
 - ➤B nói: "Hai chúng tôi là 2 người đối lập"
- · Bạn hãy cho biết A, B là người nói thật hay người nói dối?

- p: A là người nói thật; q: B là người nói thật
- TH1: Nếu A là người nói thật.
- p đúng và q đúng >> A và B cùng là người nói thật
- Mâu thuẫn với câu nói của B
- → A không là người nói thật
- TH2: Nếu A là người nói dối
- p sai. A nói "B là người nói thật" cũng là sai >> q cũng sai
- B là người nói dối nên câu nói của B là sai >> A, B cùng loại
- Kết luận: A và B cùng là người nói dối

4. Tương đương logic

- 1. KHÁI NIỆM TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC
- 2. CÁC LUẬT TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC

4. TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC

Ví dụ: Cho hai mệnh đề \neg $(p \lor q)$ và $\neg p \land \neg q$ Hãy lập bảng giá trị chân lý và đưa ra nhận xét

TABLE 3 Truth Tables for $\neg(p \lor q)$ and $\neg p \land \neg q$.							
p	q	$p \lor q$	$\neg (p \lor q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \land \neg q$	
T	T	T	F	F	F	F	
Т	F	T	F	F	T	F	
F	T	T	F	T	F	F	
F	F	F	T	T	T	T	

Hai mệnh đề có giá trị chân lý như nhau trong mọi trường hợp

Nhận xét: giá trị chân lý của mệnh đề: $\neg(p \lor q) \leftrightarrow \neg p \land \neg q$

4. TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC

Định nghĩa 1:

- Một mệnh đề phức hợp mà luôn luôn đúng với bất kể các giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần của nó được gọi là hằng đúng.
- Một mệnh đề luôn luôn sai với mọi giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần của nó được gọi là hằng sai.

Định nghĩa 2. Hai mệnh đề p, q được gọi là tương đương logic với nhau (ký hiệu $p \equiv q$) khi và chỉ khi mệnh đề $p \leftrightarrow q$ là hằng đúng (hay p và q luôn có cùng giá trị chân lý).

Biểu thức tương đương	Tên luật
$p \wedge T \equiv p$	Luật đồng nhất
$p \vee F \equiv p$	
$p \vee T \equiv T$	Luật nuốt
$p \wedge F \equiv F$	(hấp thu)
$p \lor p \equiv p$	Luật luỹ đẳng
$p \wedge p \equiv p$	
$\neg(\neg p) \equiv p$	Luật phủ định kép
$p \lor \neg p \equiv T$ $p \land \neg p \equiv F$	Luật đầy đủ và phi mâu
$p \land \neg p \equiv F$	thuẫn

Biểu thức tương đương	Tên luật
$p \lor q \equiv q \lor p$	Luật giao hoán
$b \lor d \equiv d \lor b$	
$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$	Luật kết hợp
$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$	
$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$	Luật phân phối
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(phân bố)
$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$	Luật De Morgan
$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$	

Chứng minh các luật tương đương bằng lập bảng giá trị chân lý

TABLE 5 A Demonstration That $p \lor (q \land r)$ and $(p \lor q) \land (p \lor r)$ Are Logically Equivalent.							
p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \lor q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	Т	Т	T	T	Т
Т	T	F	F	Т	T	T	T
T	F	T	F	Т	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	Т	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Để chứng minh một mệnh đề phức hợp là hằng đúng:

C1: Lập bảng giá trị chân lý

Mọi trường hợp trong bảng, mệnh đề đều nhận giá trị đúng

C2: Sử dụng các luật tương đương logic để biến đổi mệnh đề tương đương với hằng T

- Biến đổi các phép tương đương, kéo theo
- Với biểu thức chỉ có 3 phép phủ định, tuyển, hội: sử dụng phù hợp các luật phân phối, giao hoán, kết hợp, đầy đủ và phi mâu thuẫn, luật nuốt, đồng nhất.

Bài tập

Ví dụ 1: Chứng minh: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)$ là hằng đúng theo 2 cách.

Ví dụ 2: Chứng minh $(p \land q) \rightarrow (p \lor q)$ là hằng đúng theo 2 cách

Ví dụ 3: Chứng minh $\neg(p \lor (\neg p \land q))$ và $\neg p \land \neg q$ là tương đương logic theo 2 cách

Xét các câu sau:

- "x > 2, x là số tự nhiên"
- "Với mọi số tự nhiên x, x > 2 là đúng"
- "Tồn tại một số tự nhiên x, x > 2 là đúng"

Ký hiệu:

- P(x): x > 2, $x \in N$ là hàm mệnh đề
- ∀ lượng tử với mọi (tất cả, với mỗi)
- ∘∃ lượng tử tồn tại (có ít nhất một)

Ví dụ: Cho hàm mệnh đề P(x): $x^2 - 2 = 0$, xác định trên tập các số tự nhiên N.

a. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

1)
$$\forall x P(x)$$

2)
$$\exists x P(x)$$

b. Giá trị chân lý của 2 mệnh đề trong a. thay đổi như thế nào khi tập xác định của x là:

- 1) Tập số nguyên Z
- 2) Tập số thực R

Định nghĩa 1. Lượng từ với mọi của P(x), ký hiệu là $\forall x$ P(x), là một mệnh đề "Với mọi phần tử x thuộc tập xác định thì P(x) đúng".

Định nghĩa 2. Lượng từ tồn tại của P(x), ký hiệu là $\exists x$ P(x), là một mệnh đề "Tồn tại một phần tử x trong tập xác định sao cho P(x) là đúng".

 $\forall x P(x), \exists x P(x)$ được gọi là **vị từ**.

Vị từ	Giá trị T	Giá trị F
∀x P(x)	P(x) đúng với mọi x trong tập xác định	Có một giá trị của x (trong TXĐ) để P(x) sai
		P(x) sai với mọi x trong tập xác định

Hàm mệnh đề 2 biến P(x, y)

- ∀x∃y P(x,y): Với mọi giá trị của x thì P(x, y) đúng cho một y nào đó.
- ∃x∀y P(x,y): Tồn tại một x nào đó mà P(x, y) đúng cho mọi y.

Biến y bị ràng buộc bởi biến x.

Cho hàm mệnh đề P(x, y): x nghỉ học ngày thứ y $x \in \{A, B, C, D, E\}$

Diễn đạt và xác định giá trị chân lý của mệnh đề:

- a) $\forall x \exists y P(x,y)$
- b) $\forall y \exists x P(x,y)$
- c) $\forall x \forall y P(x,y)$
- d) $\exists y \exists x P(x,y)$

HS	T2	T3	T4	T5	T6
Α	X		X	X	X
В	X		X		X
C	X	X		X	
D	X	X	X	X	X
E	X	X	X	X	

Cho hàm mệnh đề P(x, y): x nghỉ học ngày thứ y $x \in \{A, B, C, D, E\}$

Diễn đạt và xác định giá trị chân lý của mệnh đề:

- a) $\forall x \exists y \neg P(x,y)$
- b) $\forall y \exists x \neg P(x,y)$
- c) $\forall x \forall y \neg P(x,y)$
- d) $\exists y \exists x \neg P(x,y)$

HS	T2	T3	T4	T5	T6
Α	X		X	X	X
В	X		X		X
C	X	X		X	
D	X	X	X	X	X
Е	X	X	X	X	

Ví dụ: P(x, y): x - y > 2 xác định trên tập số nguyên Z

- ► $\forall x \exists y \ P(x,y)$: "Với mọi số nguyên x thì x y > 2 đúng cho một số nguyên y nào đó"
 - Là mệnh đề đúng vì với mọi x = a tùy ý thì x y > 2 đúng với y = a 3
- $\exists x \forall y \ P(x,y)$: "Tồn tại một số nguyên x mà x y > 2 đúng cho mọi số nguyên y".
 - \triangleright Là mệnh đề sai vì với mọi x = a bất kỳ, x y > 2 sai với y = a 1

Quy tắc phủ định

TABLE 2 De Morgan's Laws for Quantifiers.			
Negation	Equivalent Statement	When Is Negation True?	When False?
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	For every x , $P(x)$ is false.	There is an x for which $P(x)$ is true.
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is false.	P(x) is true for every x .

Quy tắc phủ định

$$\overline{\exists x \forall y P(x,y)} \leftrightarrow \exists x \forall y \overline{P(x,y)}$$

$$\overline{\exists x \forall y P(x,y)} \leftrightarrow \forall x \exists y \overline{P(x,y)}$$

Mệnh đề	Đúng khi	Sai khi
$\exists x \forall y P(x,y)$	Tồn tại một x mà $P(x, y)$ đúng cho mọi y	Với mọi x, có một y để $P(x, y)$ sai
$\forall x \exists y P(x, y)$	Với mọi x, P(x, y) đúng với một y nào đó	Tồn tại x, P(x, y) sai cho mọi y
$\forall x \forall y P(x, y)$	P(x, y) đúng cho mọi cặp x, y	Tồn tại một cặp x, y mà $P(x, y)$ sai
$\exists x \exists y P(x,y)$	Tồn tại một cặp x, y mà P(x, y) đúng	P(x, y) sai với mọi giá trị x, y

Bài tập

Cho Q(x, y): "sinh viên x đã tham gia chương trình y"

- *x thuộc tập các sinh viên trường SPHN
- y thuộc tập tất cả chương trình giả trí trên VTV

Biểu diễn các câu sau sang dạng ký hiệu:

- a) Có một sinh viên trong trường SPHN đã từng tham gia một chương trình trên VTV
- b) Không có sinh viên nào trong trường SPHN đã tham gia chương trình trên VTV
- c) Mọi chương trình trên VTV đều có sinh viên trường SPHN tham gia

Bài tập

Cho Q(x, y): $x^2 = y$, xác định trên tập số nguyên ZXác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau:

- a) $\exists x \forall y P(x, y)$
- b) $\forall x \exists y P(x, y)$
- c) $\forall x \forall y P(x, y)$
- d) $\exists x \exists y P(x, y)$

- $e) \exists y \forall x P(x, y)$
- f $\forall y \exists x P(x,y)$
- $g) \forall y \forall x P(x,y)$
- $h) \exists y \exists x P(x, y)$

Quy tắc khẳng định

Quy tắc và hằng đúng cơ sở

$$\frac{p}{p \to q}$$
$$\therefore q$$

$$(p \land (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

Ví dụ:

- Giả thiết: Nếu trời mưa thì chúng ta không đi làm.
 Hôm nay, trời mưa.
- Kết luận: Chúng ta không đi làm.

Quy tắc phủ định

Quy tắc và hằng đúng cơ sở

$$\frac{\neg q}{p \to q}$$
$$\therefore \neg p$$

$$(\neg q \land (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$$

Ví dụ:

- Giả thiết: Nếu trời mưa thì trời có sấm chớp. Trời không có sấm chớp.
- Kết luận: Trời không mưa.

Quy tắc rút gọn

Quy tắc và hằng đúng cơ sở

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

$$(p \land q) \rightarrow p$$

Ví dụ

Giả thiết: Bây giờ trời đang mưa và trời tối.

Kết luận: Bây giờ trời đang mưa.

Quy tắc cộng			
Quy tắc và hằng đúng cơ sở	$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \rightarrow (p \lor q)$	
Ví dụ	 Giả thiết: Bây giờ trời đang mưa. Kết luận: Bây giờ trời đang mưa hoặc trời tối. 		

Quy tắc loại trừ

Quy tắc và hằng đúng cơ sở

$$\begin{array}{c} p \lor q \\ \hline \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

$$((p \lor q) \land \neg p) \rightarrow q$$

Ví du

- Giả thiết: Tôi hoặc anh có mặt tại hiện trường vụ án. Tôi không có mặt tại hiện trường vụ án.
- Kết luận: Anh có mặt tại hiện trường vụ án.

Quy tắc tam đoạn luận

Quy tắc và hằng đúng cơ sở

$$p \to q$$

$$q \to r$$

$$\therefore p \to r$$

$$((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Ví dụ

- Giả thiết: Nếu trời mưa thì chúng ta không đi chơi ngoài trời hôm nay. Nếu chúng ta không đi chơi ngoài trời hôm nay thì chúng ta đi chơi ngoài trời ngày mai.
- Kết luận: Nếu trời mưa thì chúng ta đi chơi ngoài trời ngày mai.

Ví dụ 1: Tìm các quy tắc suy diễn trong lập luận sau:

"Nếu hôm nay trời mưa thì trận đá bóng sẽ bị hoãn lại. Trận đá bóng diễn ra, do vậy hôm nay trời không có mưa."

Ví dụ 2: Dùng quy tắc suy luận, rút ra được kết luận gì từ những giả thiết sau:

"Những người được chọn vào tuyển U23 khi có chuyên môn tốt và không quá 23 tuổi.", "Thắng được chọn vào U23."

CHÚC CÁC BẠN THÀNH CÔNG!