Chương 3
LÝ THUYẾT TỔ HỢP

GIẢNG VIÊN: PHẠM THỊ LAN
BỘ MÔN: KHOA HỌC MÁY TÍNH
KHOA: CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Mục tiêu

- Hiểu 2 nguyên tắc đếm cơ bản và các công thức chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp.

- Liệt kê và phân biệt được các cấu hình chỉnh hợp, tổ hợp, hoán vị.

- Vận dụng được nguyên tắc đếm và các cấu hình tổ hợp để:
  - Giải được một số bài toán đếm trong thực tế.
  - Đánh giá được không gian bài toán, số lượng kết quả trong một số bài toán trong Tin học. Từ đó, đánh giá được độ khó của một số bài toán ứng dụng đơn giản trong Tin học.

Nội dung chính

1. Các nguyên lý đếm cơ bản
   1.1. Nguyên lý cộng
   1.2. Nguyên lý nhân
   1.3. Nguyên lý trừ
2. Các công thức tổ hợp
   2.1. Chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp cơ bản
   2.2. Chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp tổng quát
3. Liệt kê chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp

1. Các nguyên lý đếm cơ bản

- NGUYÊN LÝ CỘNG
- NGUYÊN LÝ NHÂN
- NGUYÊN LÝ TRỪ

1. Các nguyên lý đếm cơ bản

Ví dụ 1: Cần chọn ra một quyển sách để đọc. Biết rằng, có 5 cuốn sách văn học, 3 cuốn sách khoa học. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Ví dụ 2: Cần chuẩn bị tài liệu cho môn TRR gồm 1 vở ghi và 1 giáo trình. Có 5 mẫu vở ghi khác nhau, có 2 giáo trình khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách hoàn thành chuẩn bị tài liệu?

Ví dụ 3: Trong lớp 5A có 10 học sinh đạt giải môn Toán, 15 học sinh đạt giải môn Văn, 5 học sinh đạt giải cả hai môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh đạt giải được đi dự lễ tuyên dương?

Nêu nguyên tắc khái quát để tính số cách trong các ví dụ trên?

Nguyên Lý Cộng

Ví dụ 1: Cần chọn ra một quyển sách để đọc. Biết rằng, có 5 cuốn sách văn học, 3 cuốn sách khoa học. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Giải: Số cách chọn sách là: 5 + 3 = 8 cách.

Ví dụ 2: Giả sử cần chọn một chuyến bay hoặc tàu đi từ Hà Nội vào Đà Nẵng trong ngày chủ nhật. Có 4 chuyến bay khác nhau, có 5 chuyến tàu khác nhau và có 10 chuyến ô tô khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ Hà Nội vào Đà Nẵng trong chủ nhật?

Giải: Số cách thực hiện là:

4 + 5 + 10 = 19 cách

Nguyên Lý Cộng

Tổng quát:

Giả sử có một công việc có thể làm theo 2 phương pháp độc lập.

- PP thứ nhất có thể thực hiện bằng n_1 cách
- PP thứ hai có thể tiến hành bằng n_2 cách

Khi đó sẽ có $n_1 + n_2$ cách để giải giải quyết một việc trên.

Hoàn toàn tương tự mở rộng cho trường hợp có k phương pháp khác nhau cho công việc.

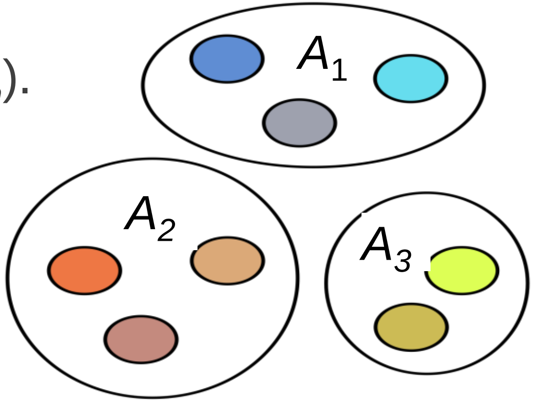
Nguyên Lý Cộng

- Nguyên lý cộng được phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp như sau:
  - Nếu A, B là hai tập rời nhau thì

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

  - Nếu $A_1, A_2, .., A_n$ là những tập hợp rời nhau thì:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$
$$= N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_n).$$



Nguyên Lý Nhân

Ví dụ 3: Cần chuẩn bị tài liệu cho môn TRR gồm 1 vở ghi và 1 giáo trình. Có 5 mẫu vở ghi khác nhau, có 2 giáo trình khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách hoàn thành chuẩn bị tài liệu.

Giải: Số cách chuẩn bị là: 5 x 2 = 10 cách.

Ví dụ 4: Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế của một giảng đường bằng một chữ cái và sau đó là một số nguyên nhỏ hơn 100. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế có thể ghi nhãn khác nhau.

Giải:

Có nhiều nhất là 26 x 100 = 2600 ghế được ghi nhãn.

Nguyên Lý Nhân

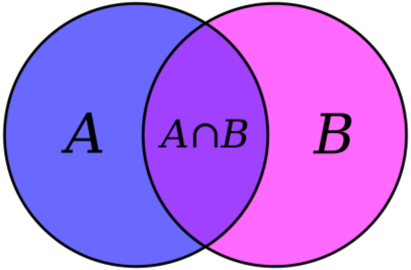
- Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra hai giai đoạn cần thực hiện.
  - GĐ thứ nhất được thực hiện bằng n_1 cách
  - GĐ thứ hai được thực hiện bằng n_2 cách sau khi GĐ thứ nhất đã được làm
  - Khi đó sẽ có $n_1.n_2$ cách thực hiện nhiệm vụ này.
- Nguyên lý nhân có thể được phát biểu tổng quát bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:
  - Nếu $A_1, A_2, .., A_m$ là những tập hợp hữu hạn,

    $$N(A_1\times A_2\times \ldots \times A_m) = N(A_1).N(A_2) \ldots N(A_m).$$
  - Nếu $A_1 = A_2 =. . = A_m$ thì $N(A^k) = N(A)^k$

Nguyên Lý Trừ

Ví dụ: Lớp toán học rời rạc có 25 sinh viên giỏi tin học, 13 sinh viên giỏi toán và 8 sinh viên giỏi cả toán và tin học. Hỏi lớp có bao nhiêu sinh viên nếu mỗi sinh viên hoặc giỏi toán hoặc học giỏi tin học hoặc giỏi cả hai môn?

Giải:



- A tập là tập các sinh viên giỏi Tin.
- B là tập các sinh viên giỏi Toán.
- Khi đó $A \cap B$ là tập sinh viên giỏi cả Toán và Tin.
- Tổng số sinh viên trong lớp là $N(A \cup B)$

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 25 + 13 - 8 = 30.$$

Nguyên Lý Trừ

Ví dụ: Có bao nhiêu số nguyên dương không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11.

Giải:

A là tập các số nguyên dương không lớn hơn 1000 chia hết cho 7

B là tập các số nguyên dương không lớn hơn 1000 chia hết cho 11

Khi đó tập số nguyên dương không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc chia hết cho 11 là $N(A \cup B)$.

Theo công thức ta có:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

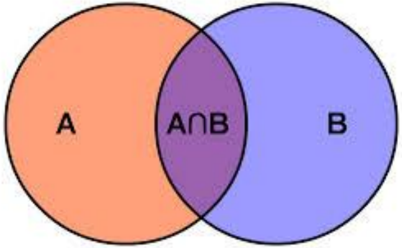
$$= \lfloor 1000/7 \rfloor + \lfloor 1000/11 \rfloor - \lfloor 1000/(7.11) \rfloor$$

$$= 142 + 90 - 12 = 220$$

Nguyên Lý Trừ

Nếu hai tập *A* và *B* thì:

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$

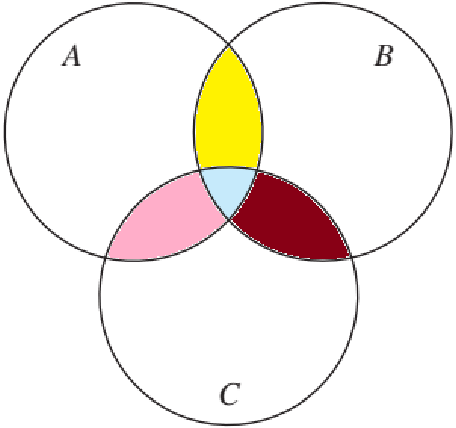


Nếu cho 3 tập *A*, *B*, *C*, ta có:

$N(A \cup B \cup C) = (N(A) + N(B) + N(C))$

$- (N(A \cap B) + N(B \cap C) + N(C \cap A))$

$+ N(A \cap B \cap C)$.



2. Các công thức tổ hợp

2.1. CÁC CÔNG THỨC CHỈNH HỢP, HOÁN VỊ, TỔ HỢP CƠ BẢN

2.2. CÁC CÔNG THỨC CHỈNH HỢP, HOÁN VỊ, TỔ HỢP TỔNG QUÁT

2. Công Thức Tổ Hợp

2.1. Các công thức chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp cơ bản

a) Chỉnh hợp

b) Hoán vị, hoán vị trên đường tròn

c) Tổ hợp

2.2. Các công thức chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp tổng quát

a) Chỉnh hợp lặp

b) Hoán vị có các phần tử giống nhau

c) Tổ hợp lặp

2. Các công thức tổ hợp

2.1. CÁC CÔNG THỨC CHỈNH HỢP, HOÁN VỊ, TỔ HỢP CƠ BẢN

2.2. CÁC CÔNG THỨC CHỈNH HỢP, HOÁN VỊ, TỔ HỢP TỔNG QUÁT

Chỉnh hợp

Ví dụ: Từ các chữ số trong tập {1, 2, 3, 4} lập các số gồm 3 chữ số khác nhau. Hãy liệt kê các chữ số thỏa điều kiện.

Giải:

123 …

124 …

134 …

234 …

Tất cả có: $4 \times 3 \times 2 = 24$ số

Chỉnh hợp

Định nghĩa: Một chỉnh hợp chập *k* của *n* phần tử là dãy có thứ tự gồm *k* thành phần lấy từ *n* phần tử của tập đã cho, không thể lấy lặp lại.

Theo nguyên lý nhân, số các tất cả các chỉnh hợp lặp chập *k* của *n* là

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chỉnh hợp

Ví dụ 1. Từ bảng chữ cái tiếng Anh có thể tạo ra được bao nhiêu xâu có độ dài 5 gồm các ký tự đôi một khác nhau.

Giải:

Bảng chữ cái tiếng Anh gồm 26 kí tự [‘A’..’Z’], số các xâu có độ dài 5 được chọn từ 26 chữ cái là chỉnh hợp chập 5 của 26 phần tử. Nên có tất cả:

$$P_{26}^{5} = \frac{26!}{(26-5)!} = 7.893.600$$

Chỉnh hợp

Ví dụ 2. Trong một cuộc thi có 10 thí sinh. Hỏi có bao nhiêu cách trao giải nhất, nhì, ba cho 3 thí sinh khác nhau?

Giải:

Mỗi cách trao giải là một chỉnh hợp không lặp chập 3 của 10.

$$P_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Hoán vị

Định nghĩa: Một hoán vị của n phần tử khác nhau là một cách xếp có thứ tự các phần tử đó.

- Số các hoán vị của tập n phần tử có thể coi là trường hợp riêng của chỉnh hợp không lặp với $k = n$.
- Có thể đồng nhất một hoán vị với một song ánh từ tập n phần tử lên chính nó.
- Số hoán vị của tập gồm n phần tử là $P(n, n) = n!$

Hoán vị

Ví dụ 1. Có 6 người xếp thành hàng để chụp ảnh. Hỏi có thể bố trí chụp được bao nhiêu kiểu ảnh khác nhau.

Giải:

Mỗi kiểu ảnh là một hoán vị của 6 người.

Do đó có 6! = 720 kiểu ảnh khác nhau có thể chụp.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số {1, 2, 3, 4}

Giải:

Mỗi hoán vị của các phần tử trong tập {1, 2, 3, 4} tạo thành 1 số thỏa điều kiện

Có 4! = 24 số

Hoán vị

Ví dụ 3. Một thương nhân đi bán hàng tại 8 thành phố. Chị ta bắt đầu hành trình của mình tại một thành phố đang sinh sống và phải qua 7 thành phố kia theo bất kỳ thứ tự nào, sau đó quay về thành phố ban đầu. Hỏi có bao nhiêu lộ trình khác nhau mà thương nhân có thể đi?

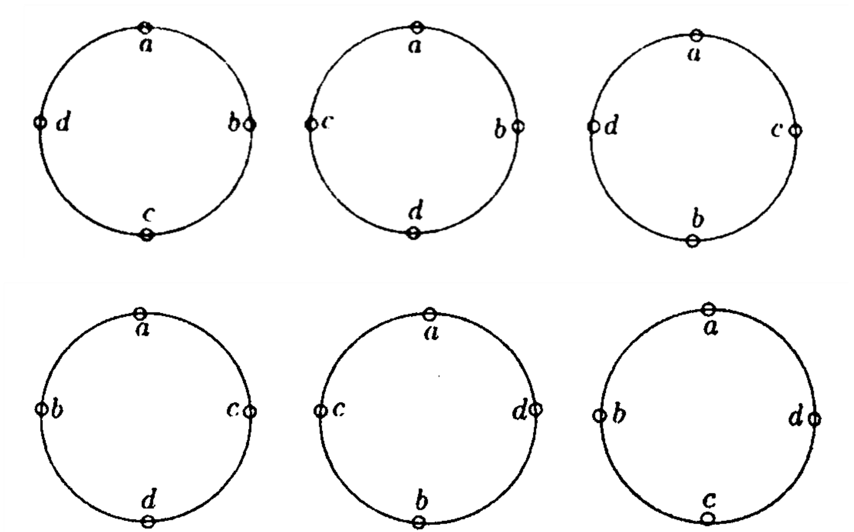
Giải:

Vì thành phố xuất phát đã được xác định. Do vậy thương nhân có thể chọn tuỳ ý 7 thành phố còn lại để hành trình.

Như vậy, tất cả số hành trình của thương nhân có thể đi qua là 7! = 5040.

Hoán vị trên đường tròn

Ví dụ: Cho tập hợp *A* = {*a*, *b*, *c*, *d*}. Tìm tất cả các hoán vị khác nhau của các phần tử của *A* trên đường tròn? Nếu coi 2 hoán vị là một nếu xoay một góc thì trùng nhau.



Hoán vị trên đường tròn

Tính số các hoán vị khác nhau của một tập hợp A gồm *n* phần tử khác nhau nằm trên một đường tròn?

Định lý: Số các hoán vị tròn khác nhau của tập hợp *A* có *n* phần tử khác nhau là $Q_n = (n - 1)!$

Tổ hợp

Ví dụ: có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử của tập A = {1, 2, 3, 4, 5}

Giải:

{1, 2, 3} {1, 2, 4} {1, 2, 5}

{1, 3, 4} {1, 3, 5} {1, 4, 5}

{2, 3, 4} {2, 3, 5} {2, 4, 5}

{3, 4, 5}

Có tất cả 10 tập con 3 phần tử của A

Tổ hợp

Định nghĩa: Một tổ hợp chập k của n phần tử là một **tập hợp con** k phần tử của một tập n phần tử cho trước (không lặp, không có thứ tự).

Định lý. Số tập hợp con k phần tử của một tập A có n phần tử cho trước là:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tổ hợp

Ví dụ 1: Có bao nhiêu cách chọn 5 trong số 10 cầu thủ của một đội bóng để sang trường khác thi đấu?

Giải: Số cách chọn là $C_{10}^{5} = \dfrac{10!}{5!.5!} = 252$

Ví dụ 2: Trong 10 cầu thủ trên có 3 cầu thủ nữ. Có bao nhiêu cách chọn một đội gồm 5 cầu thủ trong đó có 2 nữ.

Giải:

- Chọn 2 trong 3 cầu thủ nữ. Có C(2, 3) = 3 cách

- Chọn 3 trong 7 cầu thủ nam. Có C(3, 7) = 35 cách

-Tất cả có: $3 \times 35 = 105$

2. Các công thức tổ hợp

2.1. CÁC CÔNG THỨC CHỈNH HỢP, HOÁN VỊ, TỔ HỢP CƠ BẢN

2.2. CÁC CÔNG THỨC CHỈNH HỢP, HOÁN VỊ, TỔ HỢP TỔNG QUÁT

Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa: Một chỉnh hợp lặp chập *k* của *n* phần tử là dãy có thứ tự gồm *k* thành phần lấy từ *n* phần tử của tập đã cho, có thể lấy lặp lại.

Theo nguyên lý nhân, số các tất cả các chỉnh hợp lặp chập *k* của n sẽ là n^k

Ví dụ: Liệt kê chỉnh hợp lặp chập 3 của các phần tử trong tập {0, 1}

000	001	010	011
100	101	110	111

Chỉnh hợp lặp

Ví dụ 1: Từ các chữ số {1, 2, 3} có thể tạo ra bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số.

Giải: Mỗi số gồm 5 chữ số là 1 chỉnh hợp lặp chập 5 của các phần tử trong tập {1, 2, 3}

Tất cả có: $3^5 = 243$ số

Ví dụ 2. Từ bảng chữ cái tiếng Anh có thể tạo ra được bao nhiêu xâu có độ dài 5.

Giải: Bảng chữ cái tiếng Anh gồm 26 kí tự [‘A’..’Z’], số các xâu có độ dài 5 được chọn từ 26 chữ cái chính là chỉnh hợp lặp 5 của 26 phần tử và bằng 26^5

Chỉnh hợp với tần số lặp cho trước

Ví dụ: Tính các số tự nhiên có 7 chữ số, trong đó có 3 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 2 chữ số 3.

Một số là một dãy gồm 7 chữ số có thứ tự, tần số lặp của các chữ số cho trước.

Định lý: Cho trước một tập hợp A có n phần tử. Số các dãy *k* phần tử có lặp ($k_1 + k_2 + \ldots + k_n$) và ($k = k_1 + \ldots + k_n$) là:

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$$

Chỉnh hợp với tần số lặp cho trước

Ví dụ: Khi hoán vị các chữ cái của từ CONGNGHE thì được bao nhiêu xâu ký tự khác nhau?

Theo công thức chỉnh hợp lặp với tần số tương ứng:

C – 1; O – 1; N – 2; G – 2; H – 1; E – 1

$$\frac{8!}{2!.2!} = 10080$$

Lưu ý: Có thể coi cấu hình chỉnh hợp với tần số lặp cho trước tương ứng với hoán vị khi có các phần tử giống nhau.

Tổ hợp lặp

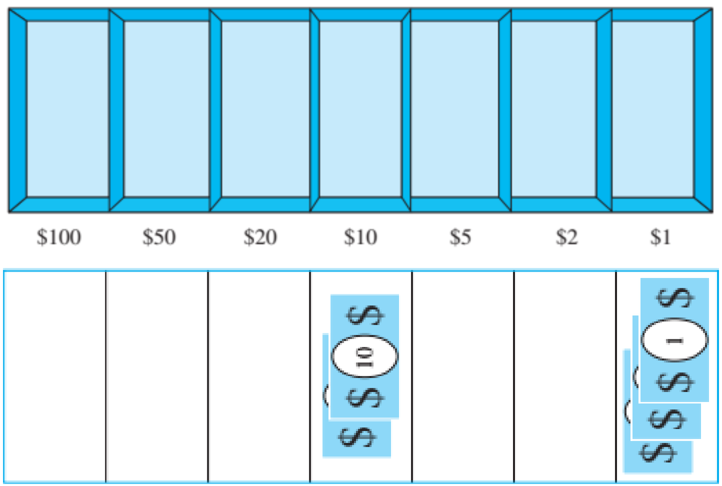
Ví dụ 1: Cần mua 4 quả từ các loại táo, cam, lê (mỗi loại có ít nhất 4 quả). Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Có tất cả 15 cách chọn khác nhau như sau:

4 táo	4 cam	4 lê
3 táo, 1 lê	3 táo, 1 cam	3 cam, 1 táo
3 cam, 1 lê	3 lê, 1 táo	3 lê, 1 cam
2 táo, 2 cam	2 táo, 2 lê	2 cam, 2 lê
2 táo, 1 cam, 1 lê	2 cam, 1 táo, 1 lê	2 lê, 1 táo, 1 cam

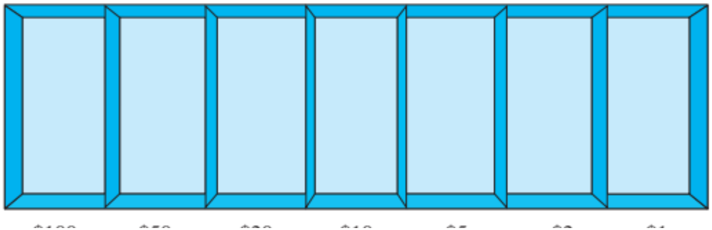
Tổ hợp lặp

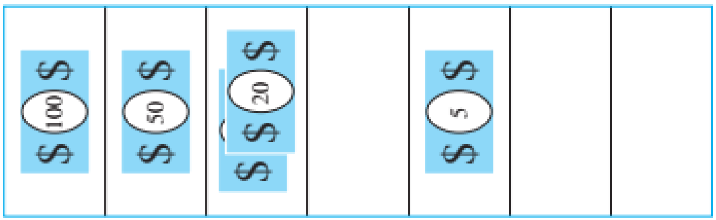
Ví dụ 2: Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ tiền từ các mệnh giá 1$, 2$, 5$, 10$, 20$, 50$, 100$. Số tờ của mỗi mệnh giá ít nhất là 5 tờ.



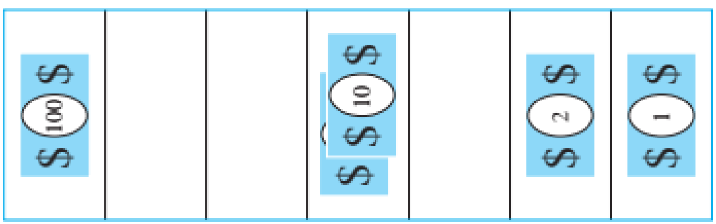
| | | * * | | | * * *

Tổ hợp lặp





* | * | * * | | * | |

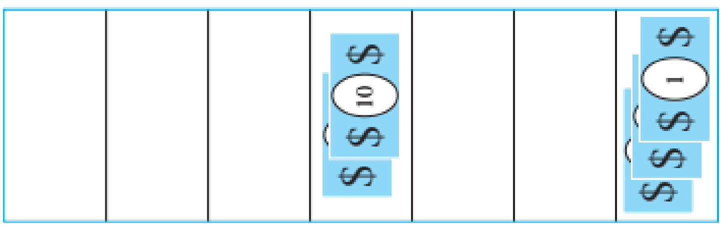


* | | | * * | | * | *

Tổ hợp lặp

Số cách chọn là một cách sắp xếp 6 thanh đứng và 5 dấu *

$$C(5,11) = \frac{11!}{5!.6!} = 462$$



| | | * * | | | * * *

Tổ hợp lặp

Định nghĩa: Số cách chọn *k* phần tử từ tập có *n* phần tử, không kể thứ tự, các phần tử có thể chọn lặp lại là một tổ hợp lặp chập *k* của *n*.

Công thức tính tổ hợp lặp chập *k* của *n* là:

$$R(k, n) = C(k, n + k - 1)$$

Các cấu hình và công thức

Cấu hình	Tính chất lặp lại	Tính thứ tự	Công thức tính
Chỉnh hợp chập *k* của *n*	Không	Có	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Chỉnh hợp lặp chập *k* của *n*	Có	Có	n^k
Tổ hợp chập k của *n*	Không	Không	$\frac{n!}{(n-k)!.k!}$
Tổ hợp lặp chập *k* của *n*	Có	Không	$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!.k!}$
Hoán vị *n* phần tử khác nhau	Không	Có	$n!$

3. Liệt kê các cấu hình

- LIỆT KÊ HOÁN VỊ
- LIỆT KÊ TỔ HỢP

Mở đầu

Ví dụ 1: Một người bán hàng cần đi đến 6 thành phố khác. Tất cả có 6! = 720 hành trình khác nhau. Hãy tìm hành trình có chi phí rẻ nhất.

Ví dụ 2: cho một tập gồm 6 số nguyên dương {10, 14, 18, 32, 45, 56}. Hỏi có một tập con có tổng bằng 100 hay không?

Ví dụ 3: Một công ty có 95 nhân viên. Cần chọn ra một nhóm gồm 12 nhân viên có đủ 25 yêu cầu để thực hiện 1 dự án. Một nhân viên có thể thỏa nhiều hơn một yêu cầu. Có thể chọn được nhóm thực hiện dự án hay không?

Cần liệt kê tất cả các phương án. Với mỗi phương án kiểm tra điều kiện có thỏa được không.

Liệt kê hoán vị

Ví dụ: Cho tập *A* = {1, 2, 3, 4}. Hãy liệt kê các số tự nhiêm gồm 4 chữ số trong *A* theo thứ tự tăng dần.

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

Hãy nêu ra quy tắc liệt kê các hoán vị theo thứ tự từ điển tăng dần.

Liệt kê hoán vị

Quy tắc liệt kê hoán vị của $\{1, 2, \ldots, n\}$

- Hoán vị nhỏ nhất là 1, 2, …, n
- Hoán vị lớn nhất là n, n-1, …,2, 1
- Thuật toán tìm hoán vị **liền sau** $a_1a_2\ldots a_n$
  - B1: Tìm chỉ số j sao cho $a_j < a_{j+1} > a_{j+2} > \ldots > a_n$
  - B2: Đổi chỗ a_j và số nhỏ nhất lớn hơn a_j trong dãy $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$
  - B3: Sắp xếp dãy $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$ theo thứ tự tăng dần

Liệt kê hoán vị

Ví dụ 1: Tìm hoán vị liền sau của 362541

- Bước 1: Vì 2 < 5 > 4 > 1 (j = 3)
- Bước 2: Đổi vị trí của 2 và 4 → 364521
- Bước 3: Sắp xếp các phần tử sau vị trí 3 theo thứ tự tăng dần → **364125**

Ví dụ 2: Tìm hoán vị liền sau của 4176532

- Bước 1: Vì 1 < 7 > 6 > 5 > 3 > 2 (j = 2)
- Bước 2: Đổi vị trí của 1 và 2 → 4276531
- Bước 3: Sắp xếp các phần tử sau vị trí 2 theo thứ tự tăng dần → **4213567**

Liệt kê tổ hợp

Ví dụ: Liệt kê các tổ hợp chập 3 của {1, 2, 3, 4, 5}

- Trong mỗi tổ hợp, các phần tử được liệt kê tăng dần (Có C(3, 5) = 10 tổ hợp)
- {1, 2, 3} {1, 2, 4} {1, 2, 5}
- {1, 3, 4} {1, 3, 5} {1, 4, 5}
- {2, 3, 4} {2, 3, 5} {2, 4, 5}
- {3, 4, 5}

Quy tắc liệt kê các tổ hợp chập k của n là gì?

Liệt kê tổ hợp

Quy tắc liệt kê tổ hợp chập k của {1, 2, …, n}

- Tổ hợp nhỏ nhất là {1, 2, …, k}
- Tổ hợp lớn nhất là {n-k+1, n-k+2, …, n-1, n}
- Thuật toán tìm tổ hợp **liền sau** $a_1a_2\ldots a_k$
  - B1: Duyệt từ phải qua trái, tìm chỉ số j đầu tiên sao cho $a_j \neq n-k+j$
  - B2: Thay $a_j = a_j + 1$ và $a_m = a_{m-1}+1$, m = j+1, j+2, …, k

Bước 1 để tìm chỉ số j mà phần tử tại đó khác phần tử cùng vị trí trong tổ hợp lớn nhất

Liệt kê tổ hợp

Ví dụ 1: Tìm tổ hợp chập 4 của {1, 2, 3, 4, 5, 6} liền ngay sau {1, 2, 5, 6}

B1: Tổ hợp lớn nhất là {3, 4, 5, 6} → Vị trí $j = 2$ là vị trí đầu tiên từ bên phải mà phần tử trong tổ hợp {1, 2, 5, 6} khác với phần tử trong {3, 4, 5, 6}

B2: Thay $a_2 = 2+1 = 3$; $a_3 = a_2+1 = 4$, $a_4 = a_3+1 = 5$

Tổ hợp liền sau cần tìm: {1, 3, 4, 5}

Ví dụ 2: Tìm tổ hợp chập 6 của {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} liền ngay sau {2, 4, 7, 8, 9, 10}

B1: Vị trí $j = 2$ có giá trị $4 \neq 6$ (6 là vị trí 2 trong tổ hợp lớn nhất {5, 6, 7 ,8, 9, 10}).

B2: Tổ hợp liền sau cần tìm là: {2, 5, 6, 7, 8, 9}


Thank you