Chương 6: Lý thuyết đồ thị

Giảng viên: Phạm Thị Lan

Bộ môn: Khoa học máy tính

ĐỊNH NGHĨA VÀ PHÂN LOẠI

NỘI DUNG

1. Định nghĩa đồ thị ☞

   1.1. Đồ thị vô hướng

   1.2. Đồ thị có hướng

2. Phân loại đồ thị ☞

1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

Khái niệm đồ thị là một mô hình toán học dùng để giải quyết rất nhiều bài toán và các vấn đề toán học.

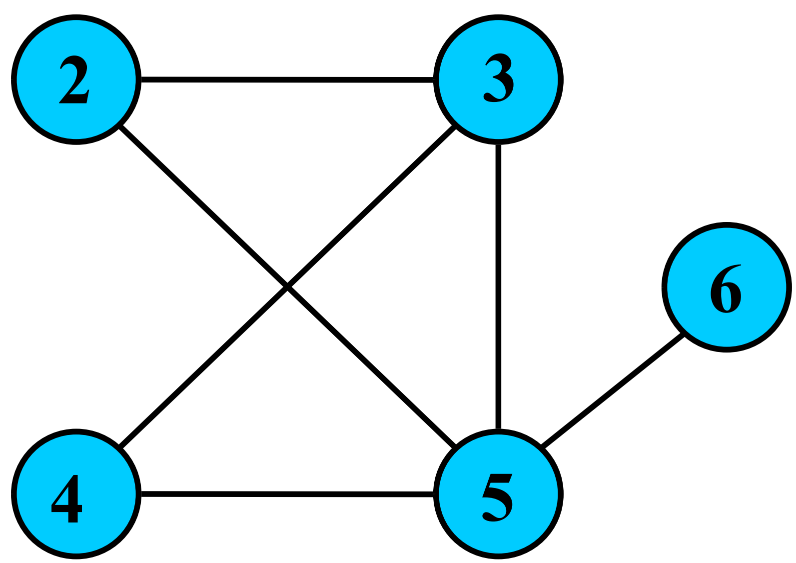
Một đồ thị có thể hiểu một cách đơn giản là một hệ thống các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh này với nhau.

Ví dụ: Một bản đồ giao thông là một đồ thị với hệ thống đỉnh là các ngã ba, ngã tư. Các đường đi là các cạnh của đồ thị.

1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

1.1. Đồ thị vô hướng

Ví dụ: Cho tập V = {2, 3, 4, 5,6}. Hãy biểu diễn quan hệ nguyên tố cùng nhau của tập trên.



1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

1.1. Đồ thị vô hướng

Đồ thị vô hướng G = (V, E). Trong đó:

+ V là tập hợp, các phần tử của nó được gọi là đỉnh.

+ E là tập hợp, mỗi phần tử là một cặp không thứ tự (v, w) của 2 đỉnh thuộc V.

(v, w) được gọi là cạnh nối v và w.

$\Rightarrow (v, w) \equiv (w, v)$

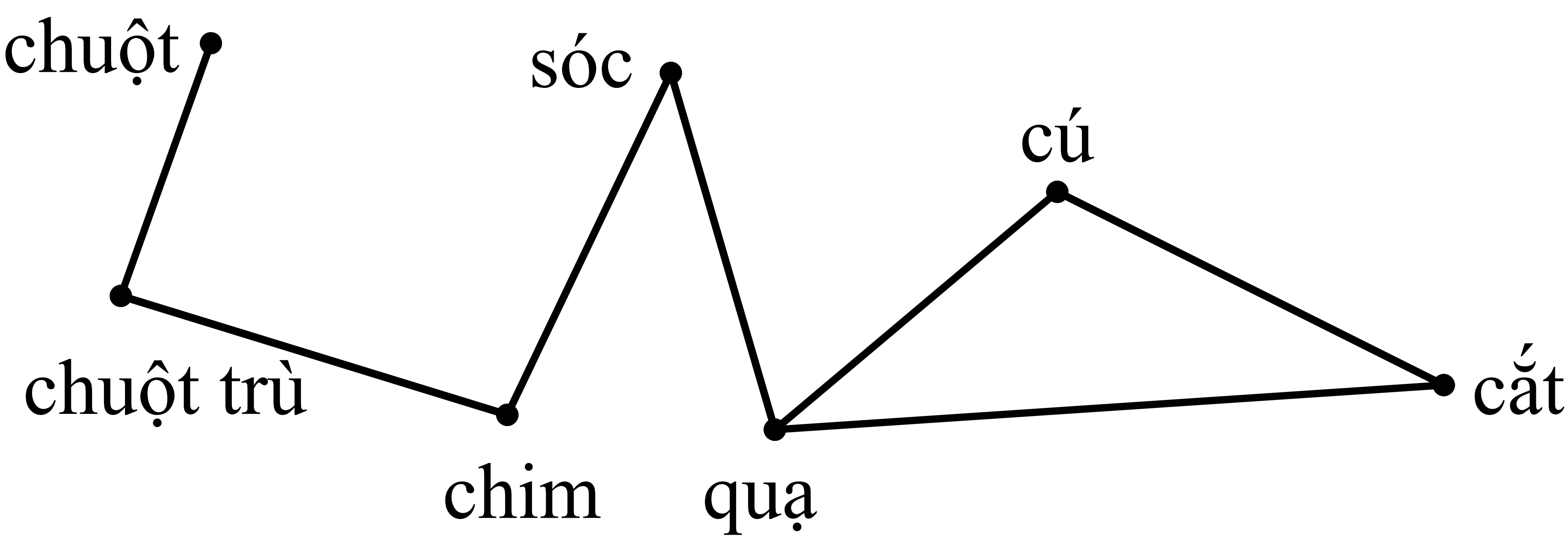
1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

1.1. Đồ thị vô hướng

<u>Ví dụ:</u> Đồ thị cạnh tranh trong sinh thái học

Mỗi loài là được biểu diễn bằng một đỉnh.

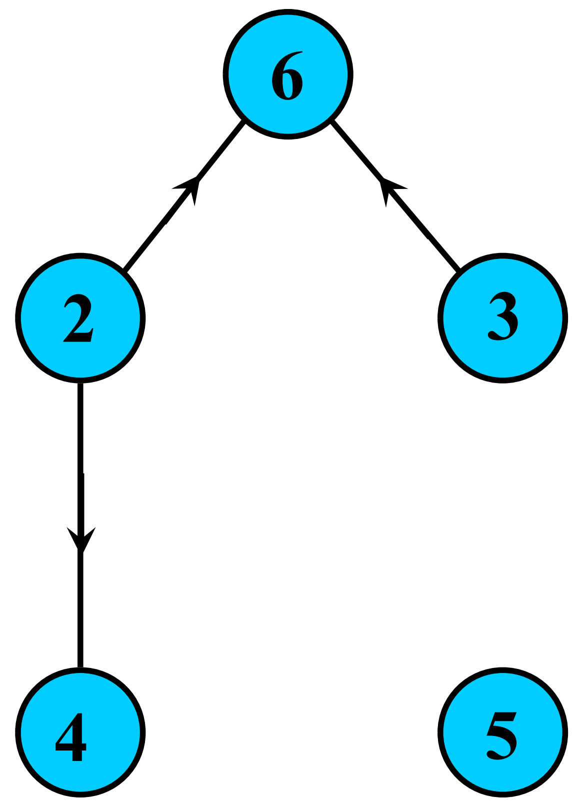
Nếu hai loài cạnh tranh thức ăn với nhau thì hai đỉnh tương ứng có cạnh nối



1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

1.2. Đồ thị có hướng

Ví dụ: Cho tập V = {2, 3, 4, 5,6}. Hãy biểu diễn quan hệ: aRb ⇔ a là ước của b và a ≠ b



1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

1.2. Đồ thị có hướng

Đồ thị có hướng G = [V, E]. Trong đó:

+ V là tập hợp, các phần tử của nó được gọi là đỉnh.

+ E là tập hợp, mỗi phần tử là một cặp có thứ tự [v, w] của hai đỉnh của tập V.

[v, w] gọi là cung từ v đến w.

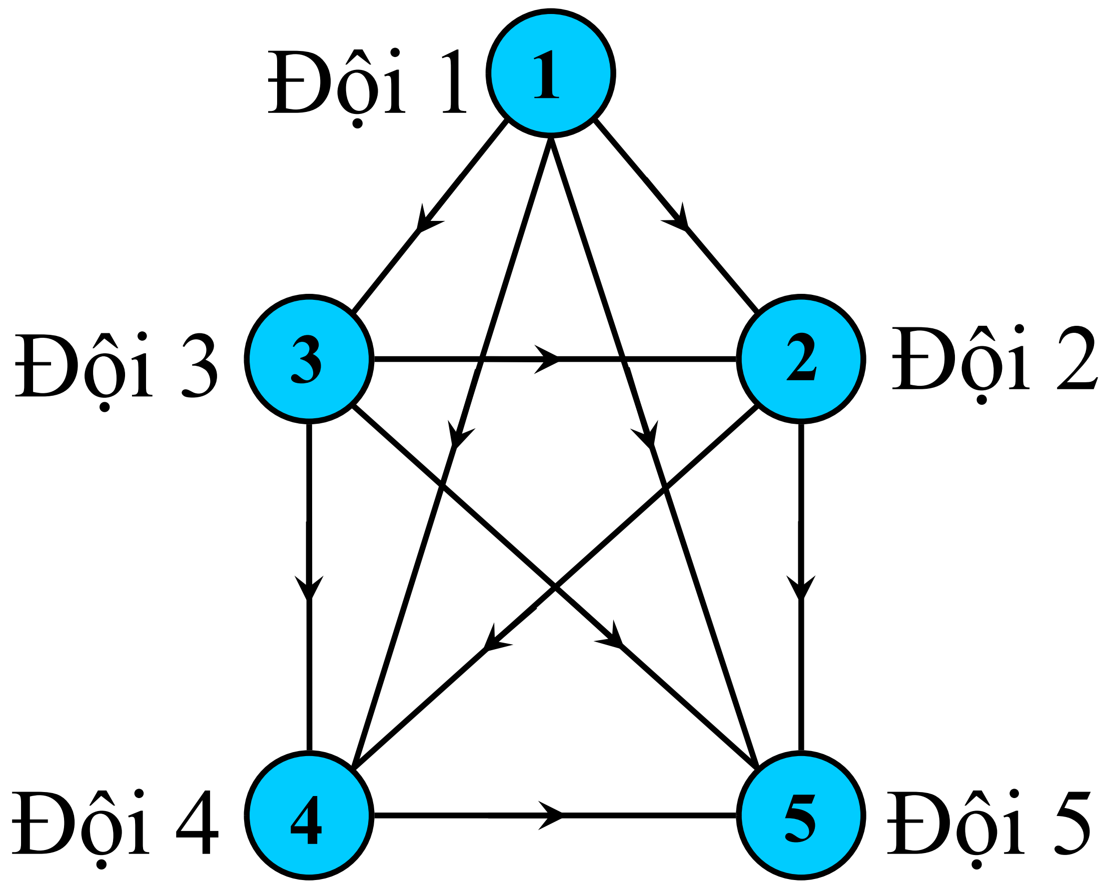
$\Rightarrow$ [v, w] $\neq$ [w, v]

1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

1.2. Đồ thị có hướng

__Ví dụ:__ Đồ thị thi đấu vòng tròn.

[a, b] có nghĩa là đội a thắng đội b



1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

Một số thuật ngữ: Cạnh $e=(v,w)\in E$, $v\in V$, $w\in V$, khi đó:

+ e là cạnh liên thuộc v, w.

+ v, w được gọi là kề nhau

+ v, w gọi là đỉnh đầu mút của cạnh e.

+ Nếu $e=[v,w]$ thì v gọi là đỉnh đầu (đỉnh xuất phát), w là đỉnh cuối (đỉnh đích) của cung e.

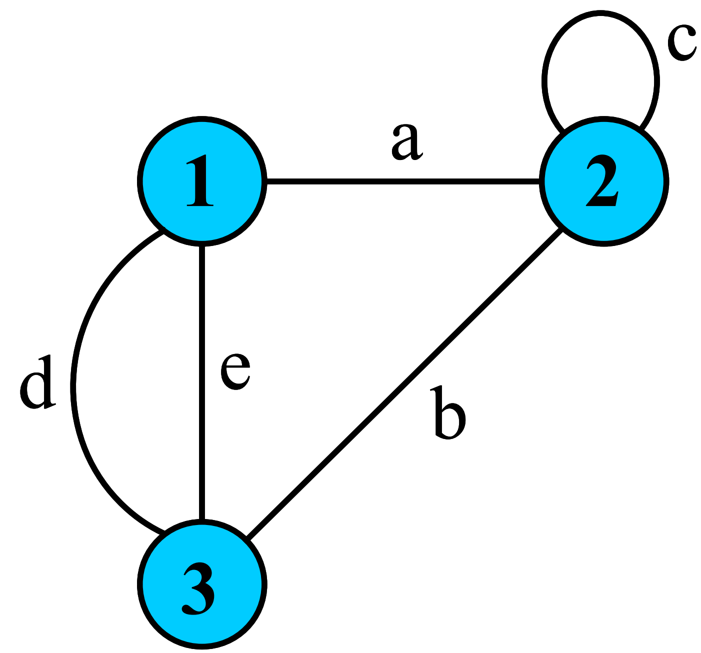
+ Nếu $v \equiv w$ thì e được gọi là khuyên.

+ Nếu có e’ = (v,w) thì e và e’ được gọi là hai cạnh song song (cùng liên thuộc một cặp đỉnh).

1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

<u>Ví dụ:</u>

+ Cạnh a liên thuộc 2 đỉnh 1 và 2.
+ Đỉnh 1 và 2 gọi là hai đỉnh kề nhau.
+ Cạnh c là khuyên
+ Cạnh d và e song song



2. PHÂN LOẠI ĐỒ THỊ

Phân loại theo tính chất cạnh của đồ thị:

+ Đồ thị vô hướng là đồ thị mà tất cả các cạnh là cạnh vô hướng.

+ Đồ thị có hướng là đồ thị mà tất cả các cạnh là có hướng.

+ Đồ thị hỗn hợp là đồ thị có cả cạnh vô hướng và cạnh có hướng.

2. PHÂN LOẠI ĐỒ THỊ

<u>*Ví dụ*</u>: Đồ thị hỗn hợp

Một bản đồ giao thông của Hà Nội là một đồ thị hỗn hợp. Trong đó:

+ Các đỉnh biểu diễn các nút giao thông (ngã ba, ngã tư đường…)

+ Các cạnh biểu diễn các con đường nối các nút giao thông đó.

- Cạnh có hướng nếu là đường một chiều
- Cạnh vô hướng nếu là đường hai chiều.

2. PHÂN LOẠI ĐỒ THỊ

Ngoài ra, ta còn có:

+ Đồ thị đơn là đồ thị mà không có khuyên và cạnh song song.

+ Đồ thị điểm là đồ thị chỉ có một đỉnh và không có cạnh nào.

+ Đồ thị rỗng là đồ thị không có đỉnh và không có cạnh.

2. PHÂN LOẠI ĐỒ THỊ

Các bài sau đây chúng ta chỉ nó về đồ thị vô hướng.

Ở bài cuối cùng chúng ta sẽ nói về đồ thị có hướng.

CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA ĐỒ THỊ

NỘI DUNG

1. Đồ thị con và đồ thị thành phần ☞
   1.1. Đồ thị con
   1.2. Đồ thị thành phần
2. Bậc của đỉnh ☞
3. Đường đi và chu trình ☞
4. Liên thông
   4.1. Khái niệm ☞
   4.2. Thành phần liên thông ☞
   4.3. Đỉnh cắt, cạnh cầu ☞
   4.4. Chỉ số liên thông ☞

1. ĐỒ THỊ CON VÀ ĐỒ THỊ THÀNH PHẦN

1.1. Đồ thị con

Định nghĩa:

Cho G = (V, E).

G' = (V', E')

Nếu $V' \subset V$

$E' \subset E$

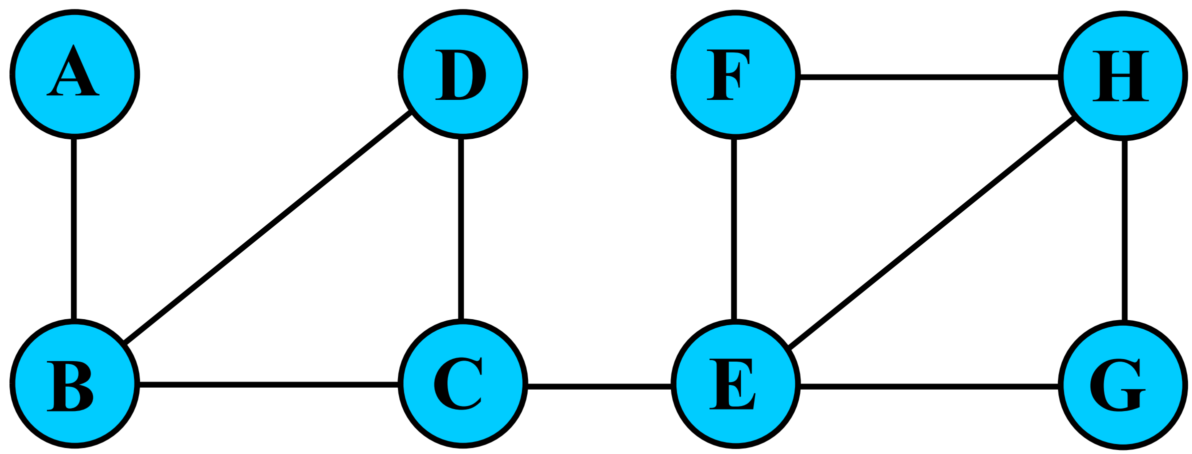
Thì G' gọi là đồ thị con của G.

1. ĐỒ THỊ CON VÀ ĐỒ THỊ THÀNH PHẦN

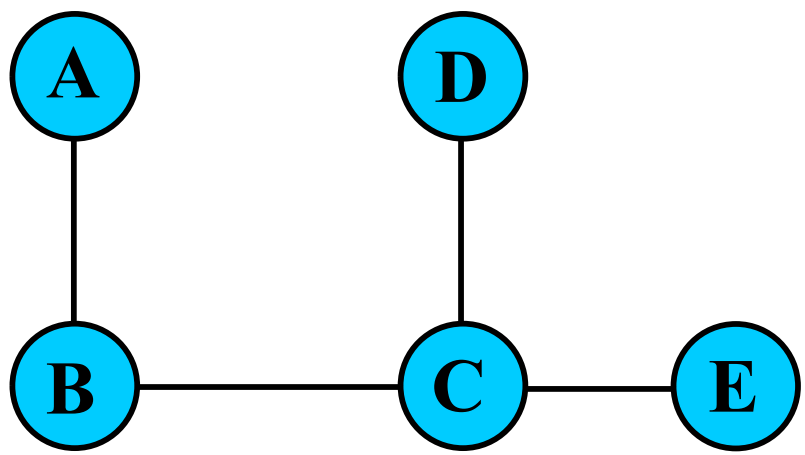
1.1. Đồ thị con

<u>Ví dụ:</u> đồ thị con

G



G_1



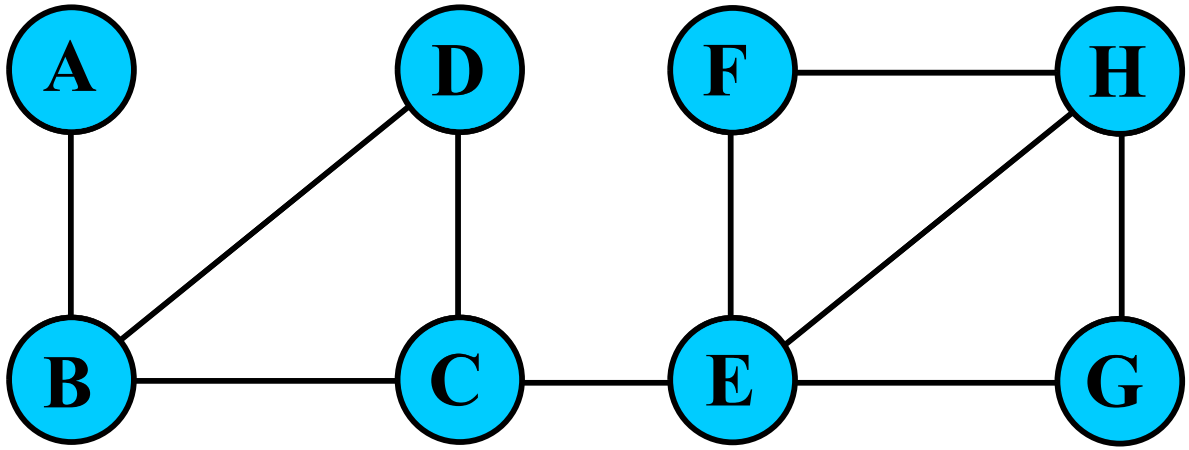
G_1 là đồ thị con của G

1. ĐỒ THỊ CON VÀ ĐỒ THỊ THÀNH PHẦN

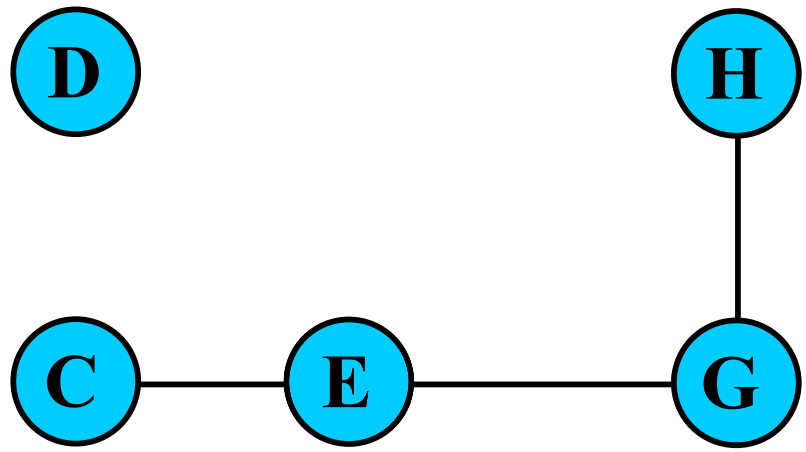
1.1. Đồ thị con

<u>Ví dụ:</u> đồ thị con

G



G_2

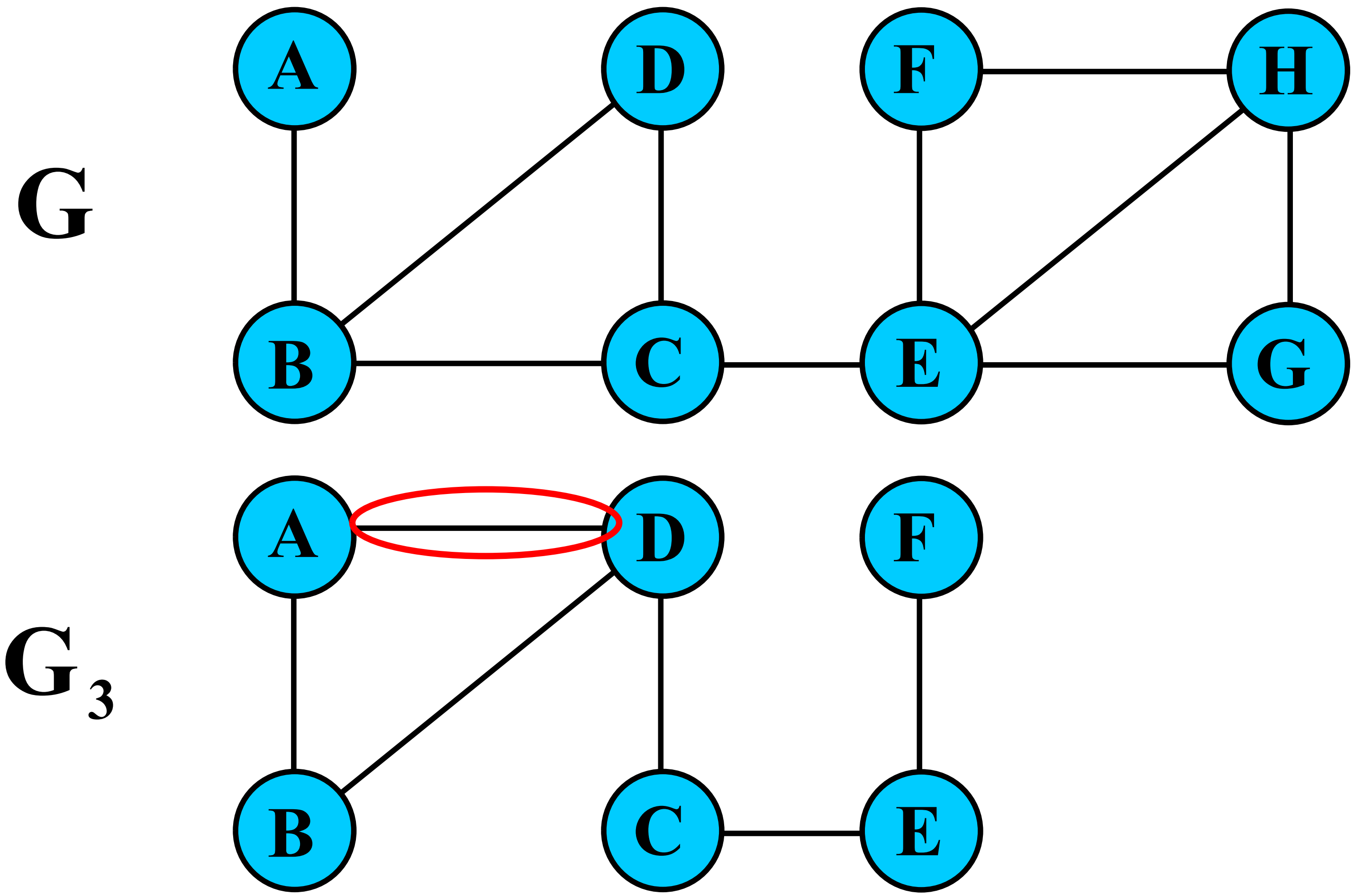


G_2 là đồ thị con của G

1. ĐỒ THỊ CON VÀ ĐỒ THỊ THÀNH PHẦN

1.1. Đồ thị con

<u>Ví dụ:</u> đồ thị con



G_3 là không là đồ thị con của G

1. ĐỒ THỊ CON VÀ ĐỒ THỊ THÀNH PHẦN

1.2. Đồ thị thành phần

Định nghĩa:

Cho G = (V, E).

G’ = (V’, E’)

Nếu: + $V' \subset V$

+ $\forall$ v, w $\in$ V’ và (v, w) $\in$ E thì (v, w) $\in$ E’

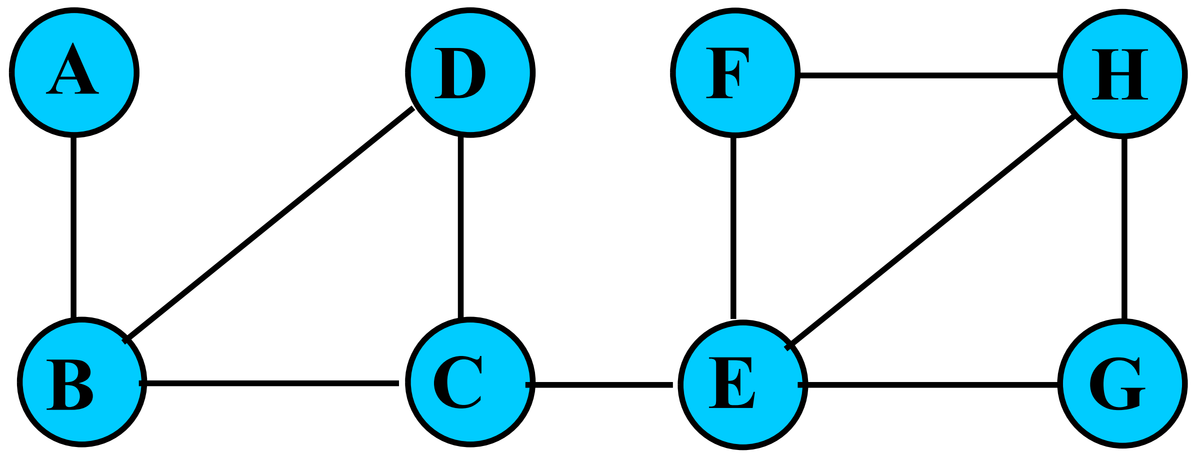
Thì G’ gọi là đồ thị thành phần của G.

1. ĐỒ THỊ CON VÀ ĐỒ THỊ THÀNH PHẦN

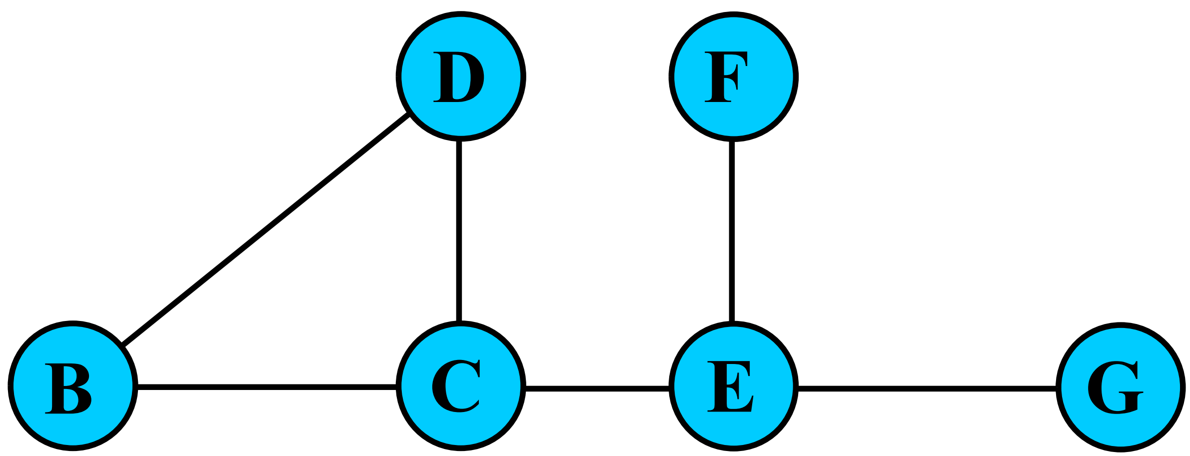
1.2. Đồ thành phần

Ví dụ:

G



G_4



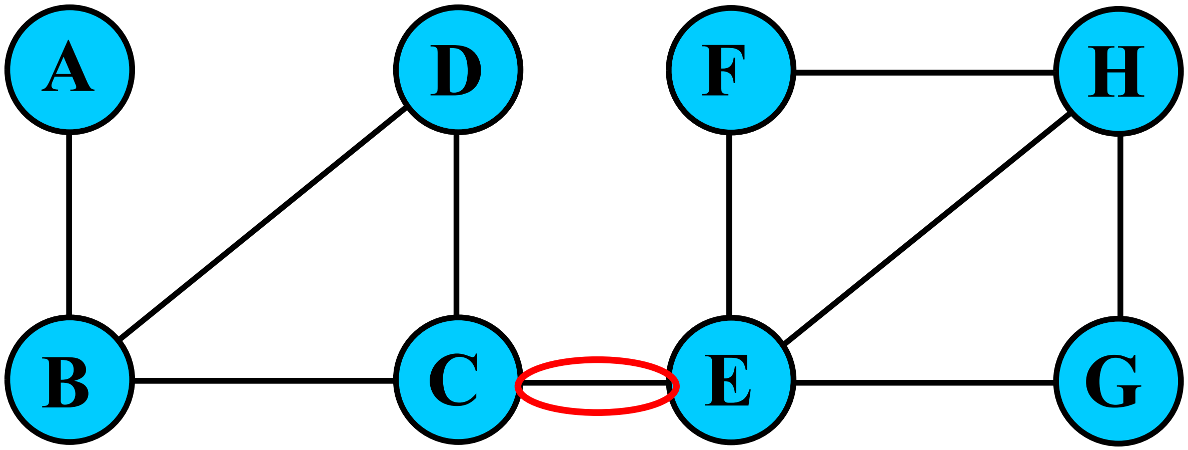
G_4 là đồ thị thành phần của G

1. ĐỒ THỊ CON VÀ ĐỒ THỊ THÀNH PHẦN

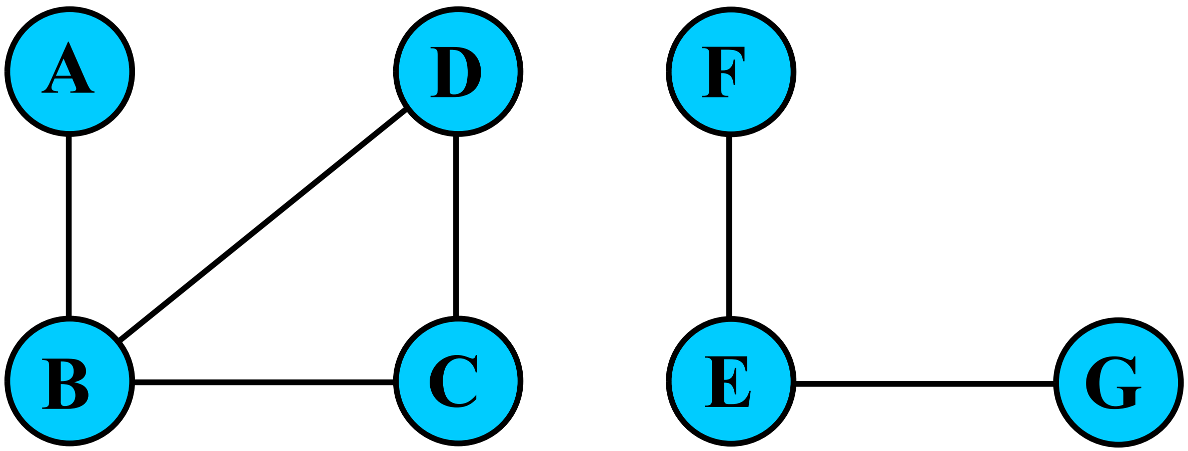
1.2. Đồ thành phần

Ví dụ:

G



G_5



G_5 là đồ thị con nhưng không là đồ thị phần của G

2. BẬC CỦA ĐỈNH

Cho G = (V, E), $v \in V$.

+ Bậc của v bằng số cạnh liên thuộc với nó.

+ Tại v có khuyên thì thêm 2 đơn vị.

Ký hiệu là deg(v).

Trường hợp đặc biệt:

Deg(v) = 0 → v là đỉnh cô lập

Deg(v) = 1 → v là đỉnh treo

2. BẬC CỦA ĐỈNH

<u>Ví dụ:</u>

deg(A) = 0; deg(B) = 1

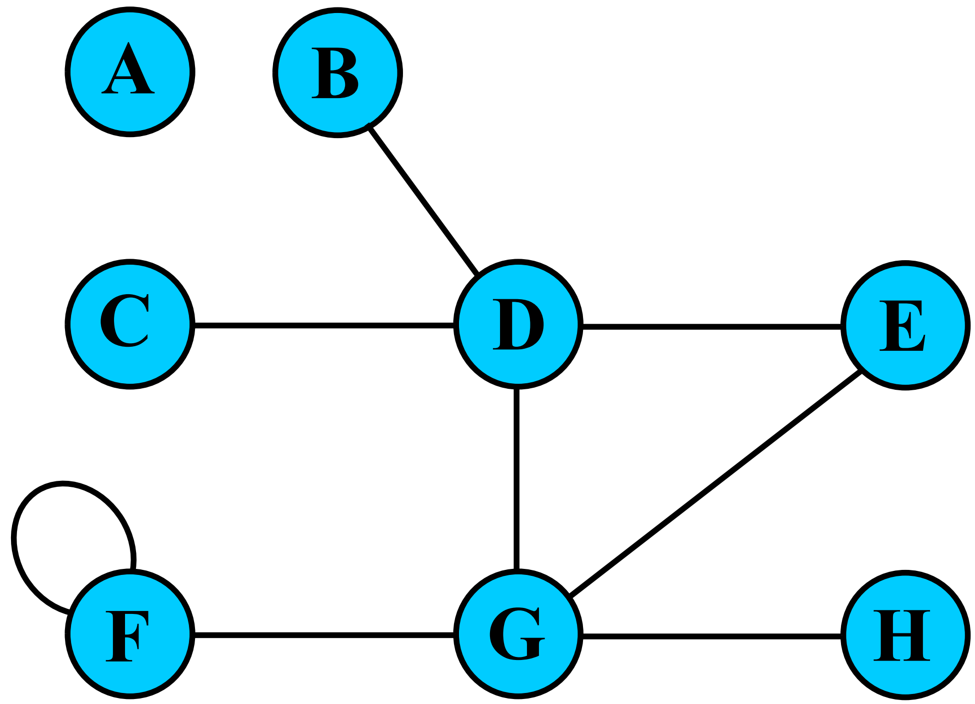
deg(C) = 1; deg(D) = 4

deg(E) = 2; deg(F) = 3

deg(G) = 4; deg(H) = 1

A là đỉnh cô lập.

B, C, H là đỉnh treo.



2. BẬC CỦA ĐỈNH

Định lý: Cho G = (V,E) có m cạnh. Khi đó:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Hệ quả: G = (V,E) có số đỉnh có bậc lẻ là số chẵn.

3. ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH

Đường đi là dãy các cạnh $e_i = (v_i, v_{i+1})$ (i=1, 2,…, m) mà các đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}$ đôi một khác nhau.

Ký hiệu: $H = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_m, v_{m+1})$

Đường đi $H = (v_1, e_1, v_2, \ldots, e_m, v_{m+1})$

mà $v_1 \equiv v_{m+1}$ được gọi là **chu trình**.

Độ dài đường đi (chu trình) bằng số cạnh của nó.

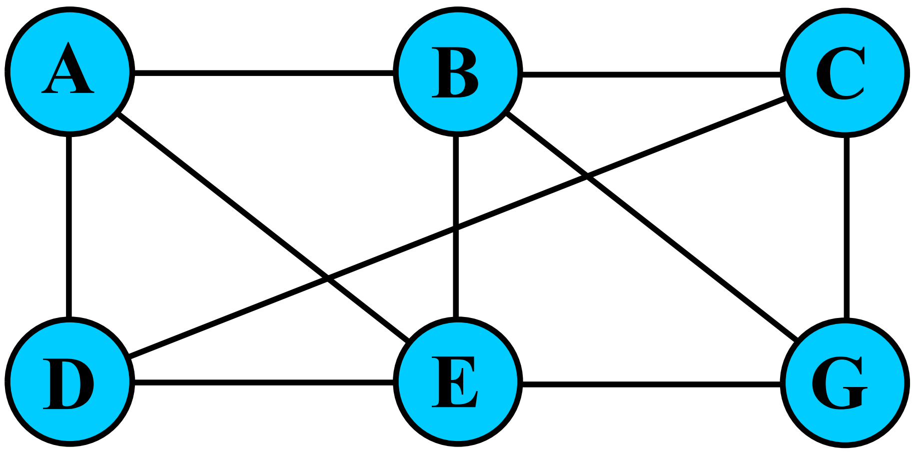
Khi đồ thị là đơn thì đường đi (chu trình) được ký hiệu đơn giản bằng dãy các đỉnh.

$H = (v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1})$

$C = (v_1, v_2, \ldots, v_m, v_1)$

3. ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH

<u>*Ví dụ*</u>



A, D, C, G, E - đường đi độ dài 4

D, E, C, A – không là đường đi

B, C, G, E, B – chu trình độ dài 4

3. ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH

<u>*Nhận xét*</u>:

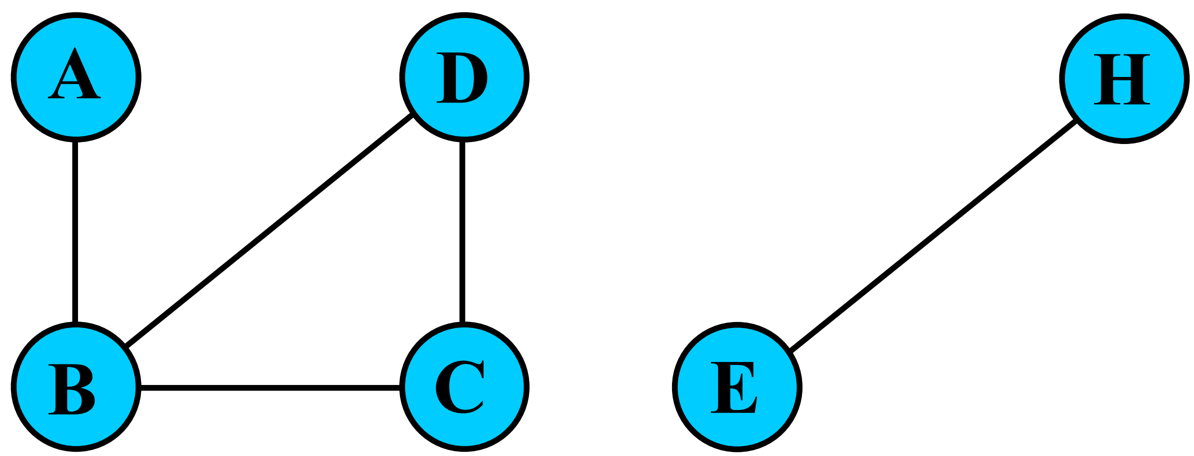
- Khuyên là một chu trình độ dài 1.
- Nếu đồ thị có cặp cạnh song song thì có chu trình độ dài 2.
- Một đồ thị không là đồ thị đơn thì luôn có chu trình (độ dài 1 hoặc 2)
- Trong đồ thị đơn mỗi chu trình độ dài ít nhất là 3, không phải lúc nào cũng tìm được một chu trình.

4. LIÊN THÔNG

4.1. Khái niệm

Hai đỉnh liên thông: v và w được gọi là liên thông với nhau nếu có một dãy cạnh kế tiếp nối v với w.

Ví dụ:



A và D, E và H là các cặp đỉnh liên thông

A và E, B và H là các cặp đỉnh không liên thông

4. LIÊN THÔNG

4.1. Khái niệm

Tính chất cơ bản của quan hệ liên thông hai đỉnh:

+ $\forall$ v $\in$V thì v liên thông với chính nó.

+ v liên thông với w thì w liên thông với v

+ Nếu v liên thông w và w liên thông u thì v và u liên thông.

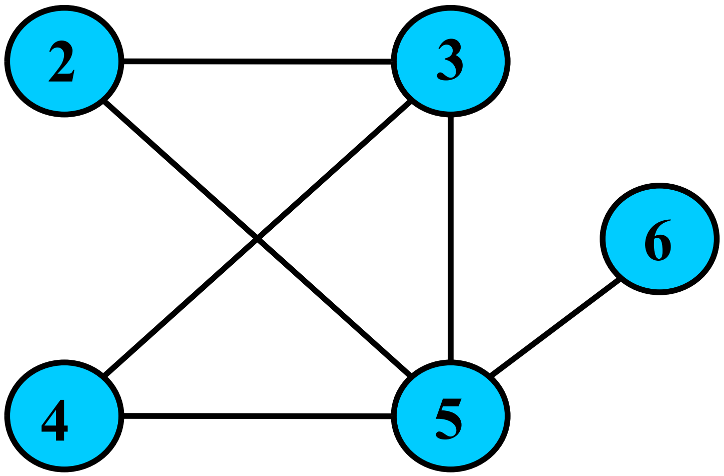
$\Rightarrow$Quan hệ liên thông hai đỉnh là quan hệ tương đương.

4. LIÊN THÔNG

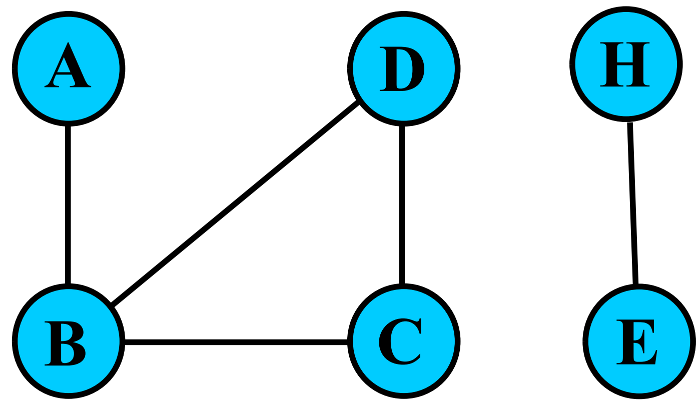
4.1. Khái niệm

Đồ thị liên thông là một đồ thị mà hai đỉnh bất kỳ liên thông với nhau.

<u>*Ví dụ:*</u>



Là đồ thị liên thông



Không là đồ thị liên thông

4. LIÊN THÔNG

4.2. Thành phần liên thông

Quan hệ liên thông giữa các đỉnh chia tập đỉnh V thành các tập đỉnh con thoả mãn hai đỉnh bất kỳ:

+ Nếu thuộc cùng một tập đỉnh con thì liên thông với nhau.

+ Nếu thuộc hai tập đỉnh con khác nhau thì không liên thông với nhau.

4. LIÊN THÔNG

4.2. Thành phần liên thông

Mỗi tập đỉnh con cùng với các cạnh nối các đỉnh của chúng tạo thành một đồ thị thành phần.

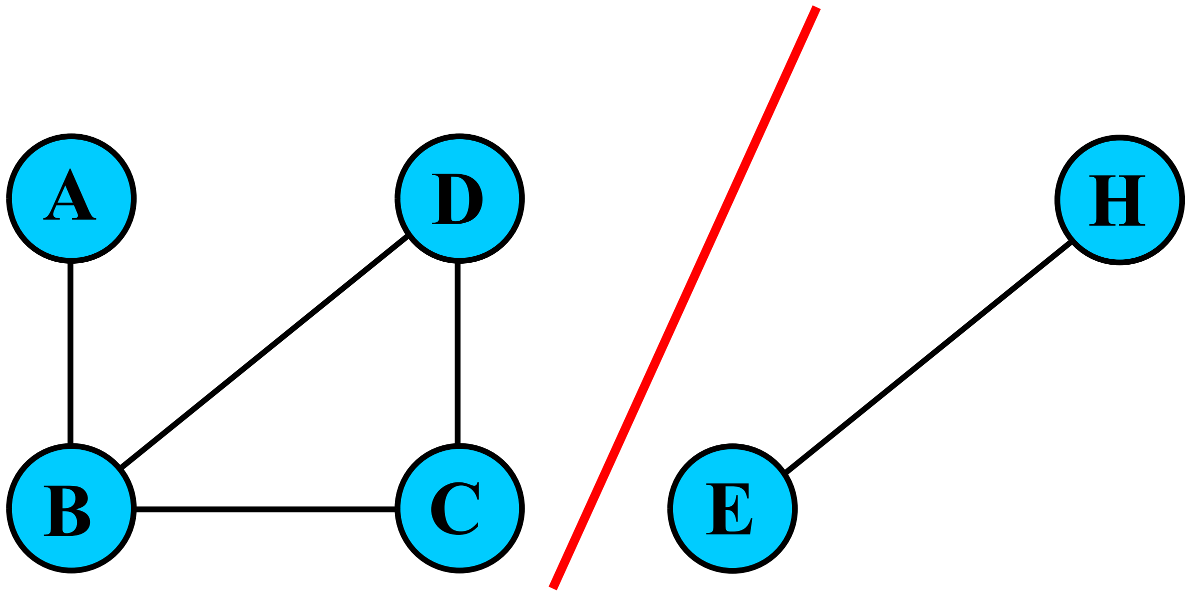
Đồ thị thành phần này được gọi là thành phần liên thông của đồ thị đã cho.

$\Rightarrow$ Một đồ thị không liên thông được chia thành các đồ thị thành phần liên thông.

4. LIÊN THÔNG

4.2. Thành phần liên thông

Ví dụ:



Có hai thành phần liên thông

4. LIÊN THÔNG

4.3. Đỉnh cắt, cạnh cầu

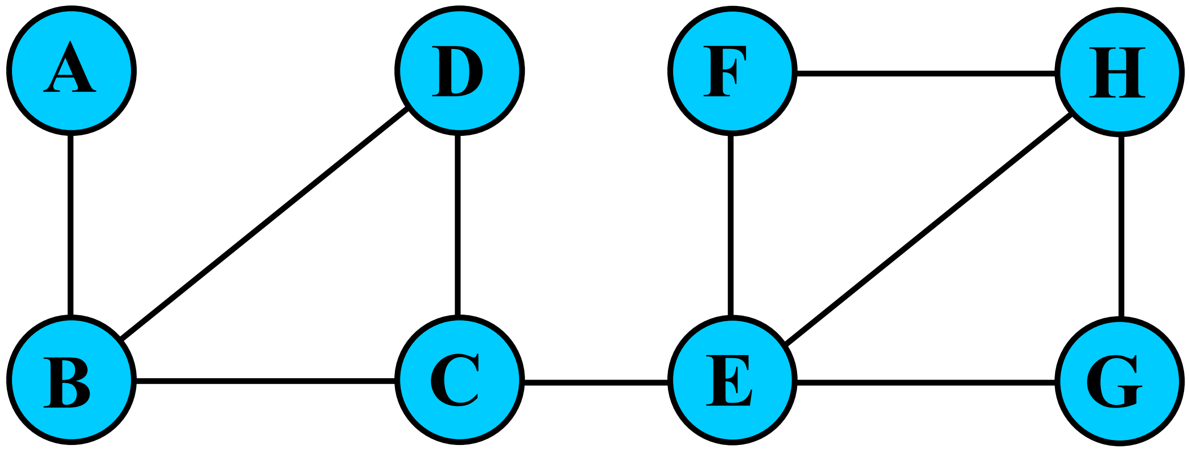
Đỉnh cắt: v được gọi là đỉnh cắt nếu bỏ nó cùng các cạnh liên thuộc sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị con.

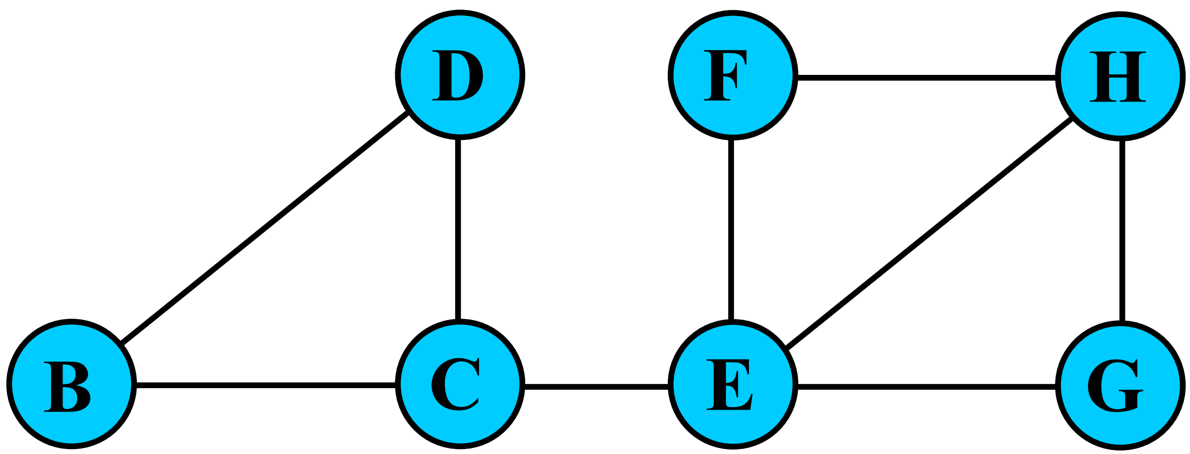
Cạnh cầu: e được gọi là cạnh cầu nếu xoá nó thì sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị con.

4. LIÊN THÔNG

4.3. Đỉnh cắt, cạnh cầu

Ví dụ:



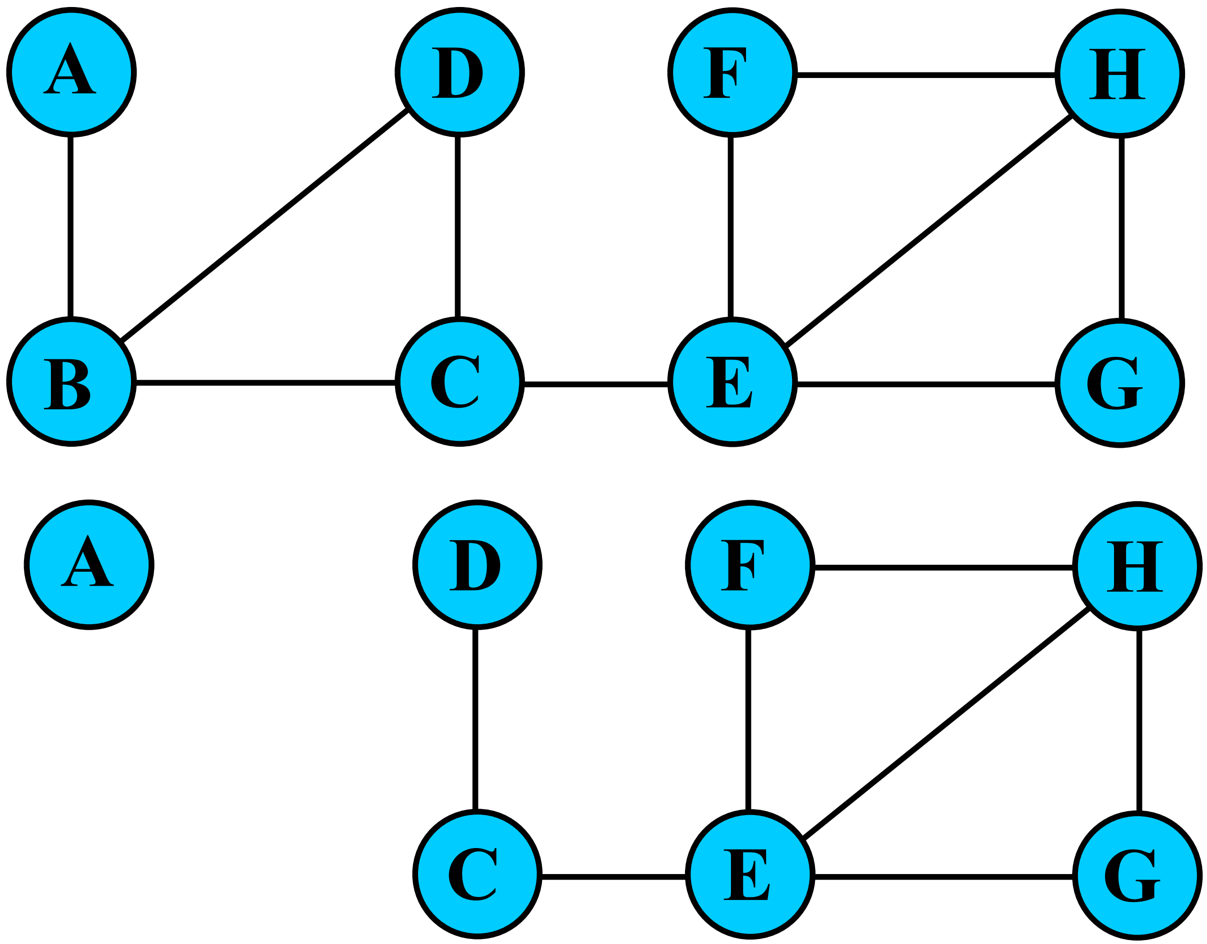


A không là đỉnh cắt

4. LIÊN THÔNG

4.3. Đỉnh cắt, cạnh cầu

Ví dụ:

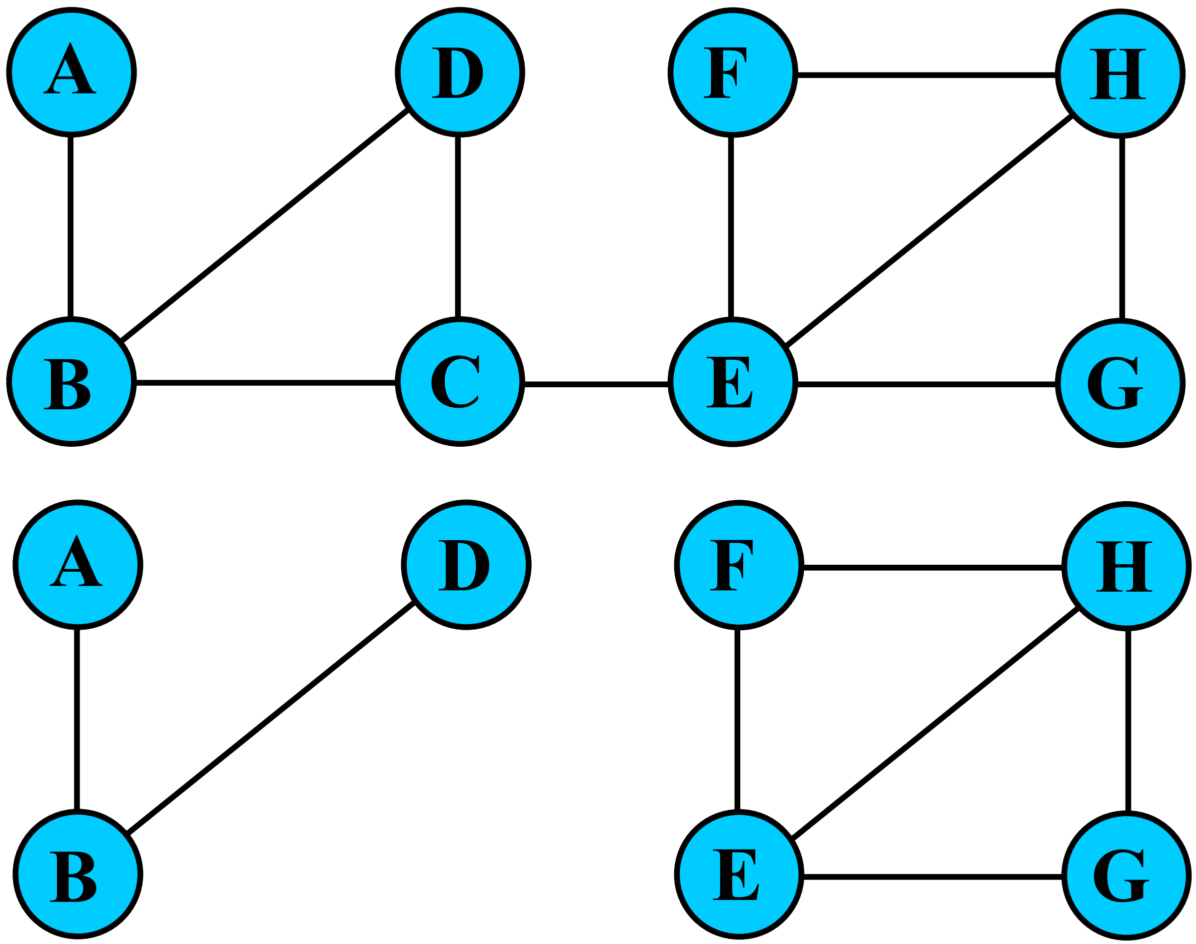


B là đỉnh cắt

4. LIÊN THÔNG

4.3. Đỉnh cắt, cạnh cầu

Ví dụ:

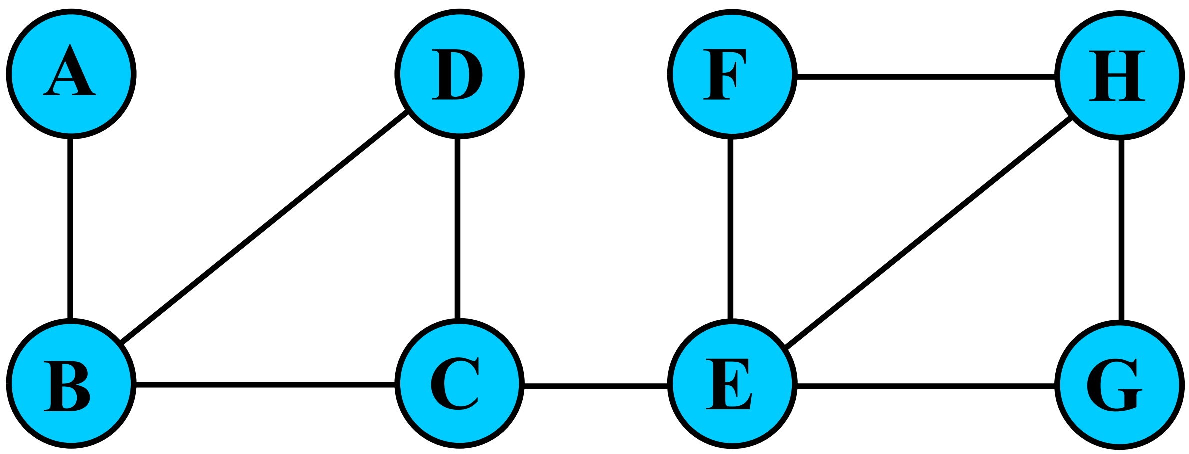


C là đỉnh cắt

4. LIÊN THÔNG

4.3. Đỉnh cắt, cạnh cầu

Ví dụ:



B

C

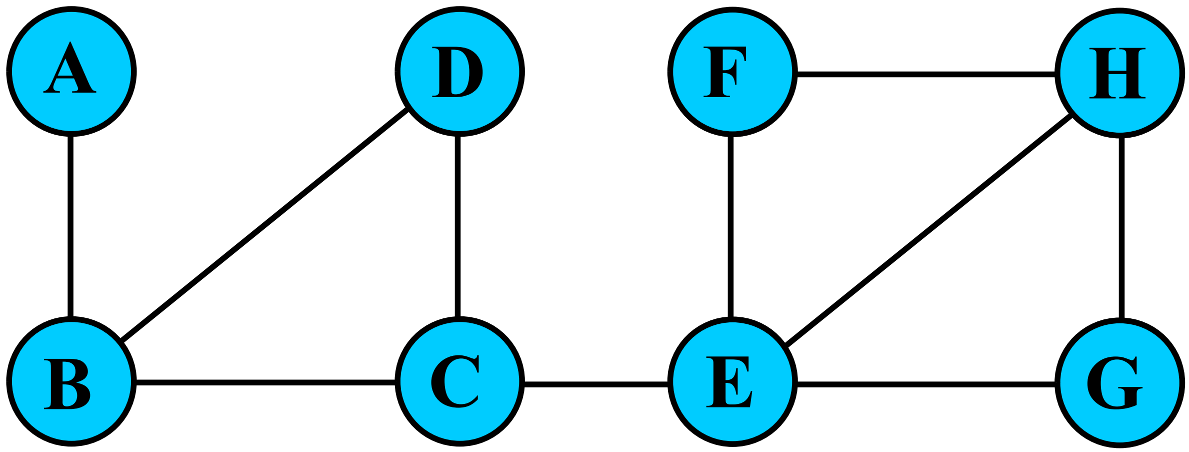
E

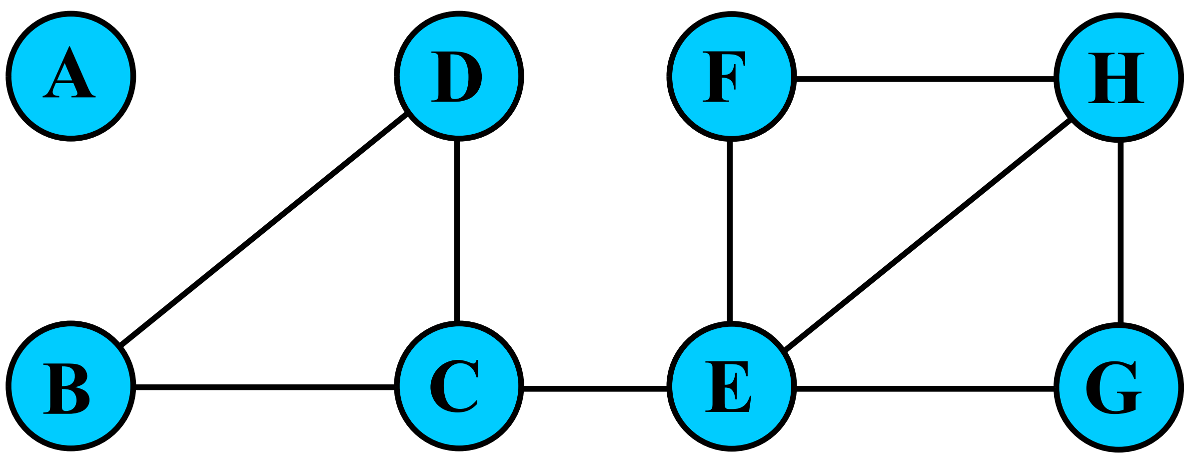
là đỉnh cắt

4. LIÊN THÔNG

4.3. Đỉnh cắt, cạnh cầu

Ví dụ:



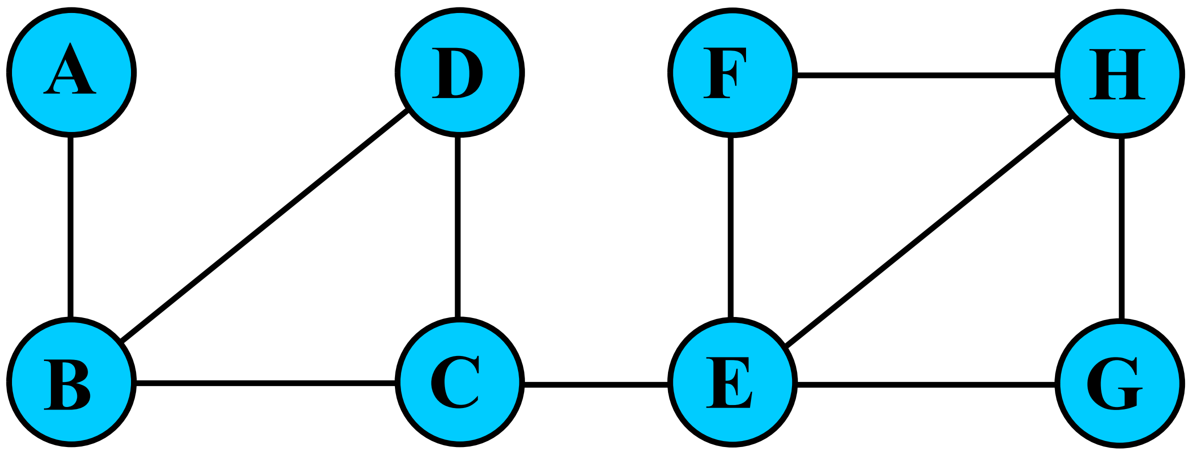


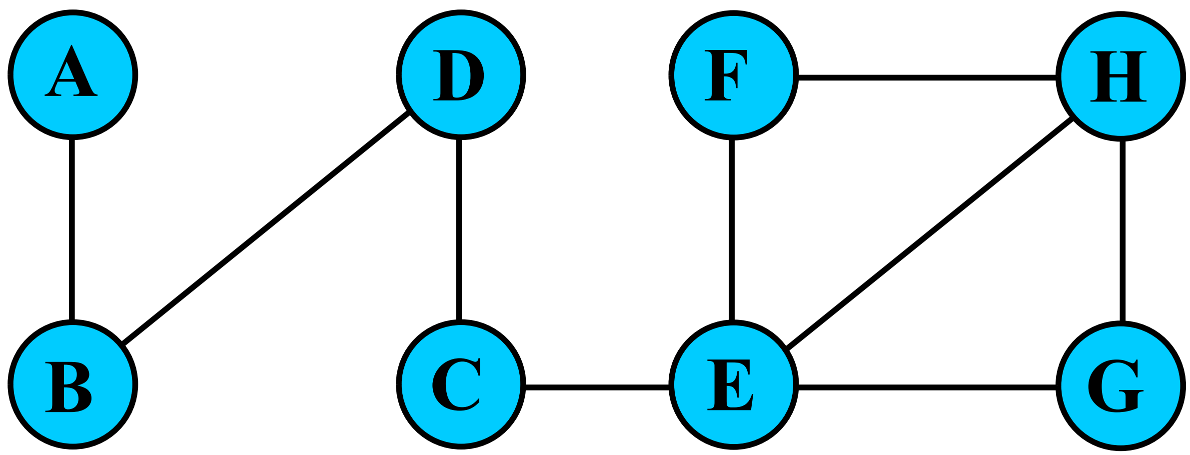
(A, B) là cạnh cầu

4. LIÊN THÔNG

4.3. Đỉnh cắt, cạnh cầu

Ví dụ:



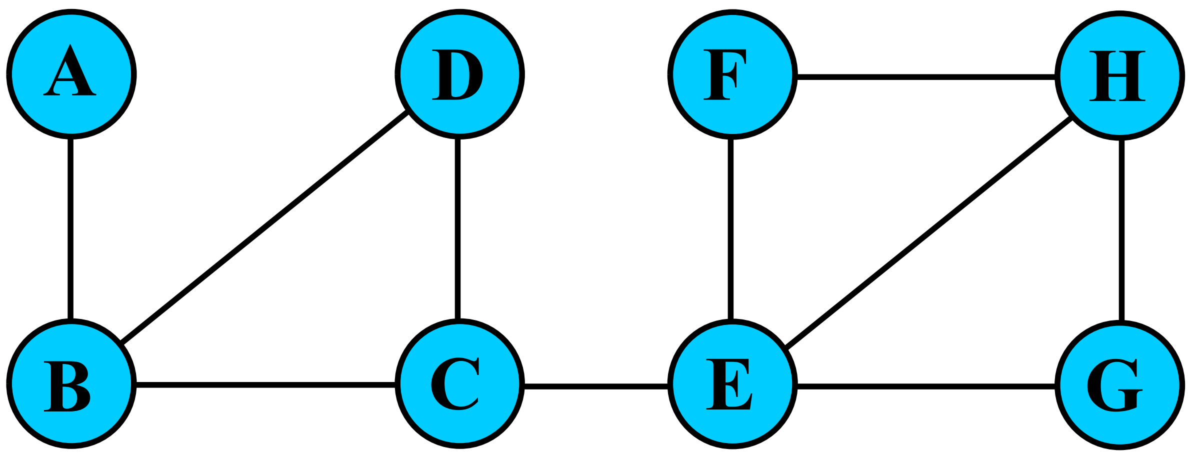


(B, C) không là cạnh cầu

4. LIÊN THÔNG

4.3. Đỉnh cắt, cạnh cầu

Ví dụ:



(A, B)

(C, E)

là cạnh cầu

4. LIÊN THÔNG

4.4. Chỉ số liên thông

Cho G = (V,E) liên thông, $k \in N$, $k \geq 2$.

Nếu xoá đi t (t< k) đỉnh bất kỳ đồ thị thu được vẫn là liên thông thì nói G là đồ thị k-liên thông

Số tự nhiên lớn nhất κ thoả mãn điều kiện:

- G là κ - liên thông.

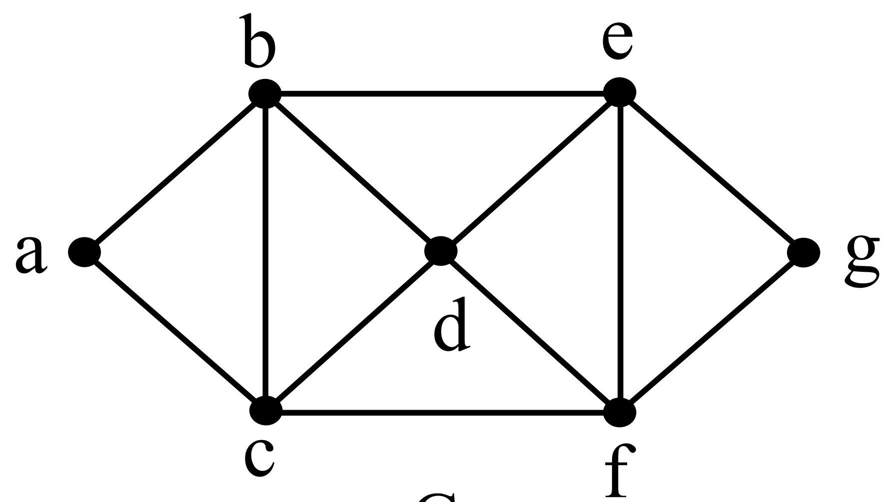
- Nhưng không có (κ + 1) – liên thông

Khi đó κ được gọi là chỉ số liên thông của G.

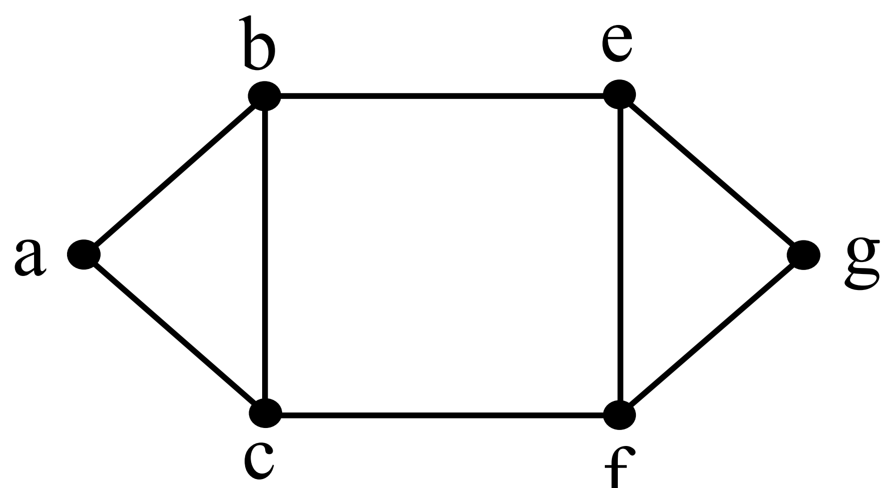
4. LIÊN THÔNG

4.4. Chỉ số liên thông

Ví dụ:



G

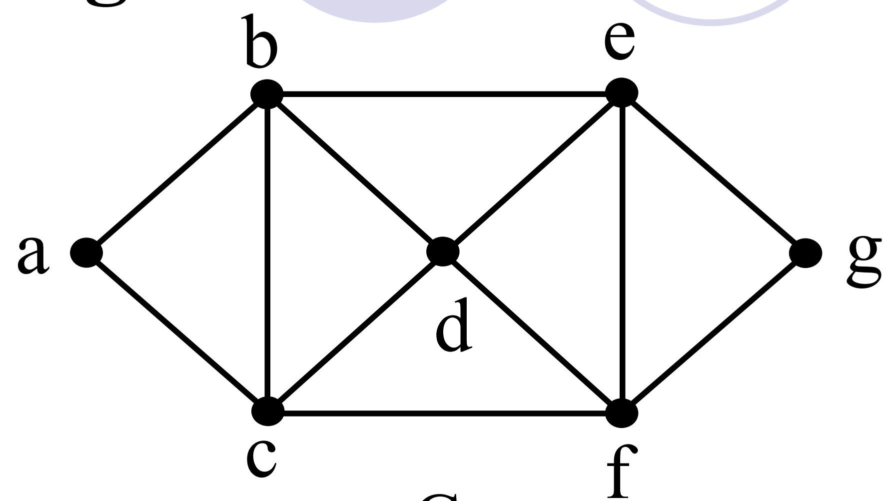


H

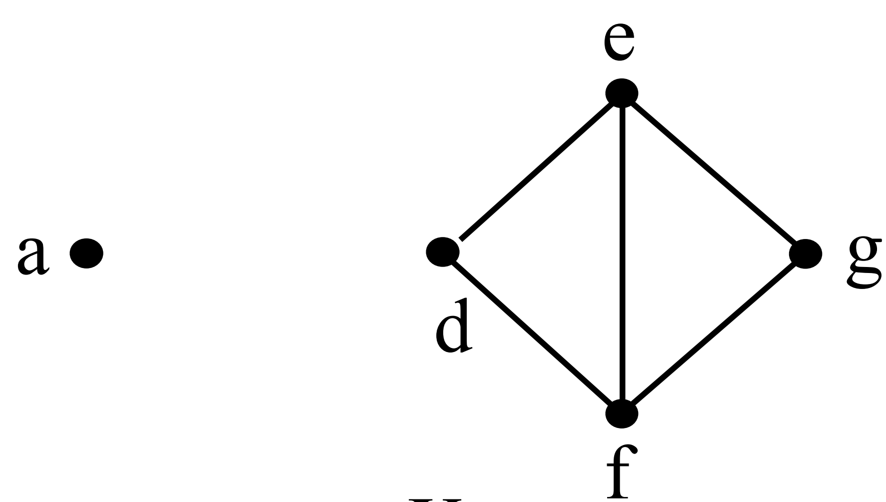
4. LIÊN THÔNG

4.4. Chỉ số liên thông

Ví dụ:



G



K

G là 2-liên thông

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ TRÊN MÁY TÍNH

SỰ ĐẲNG CẤU HAI ĐỒ THỊ

NỘI DUNG

1. Ma trận kề ☞
2. Ma trận trọng số ☞
3. Ma trận liên thuộc ☞
4. Sự đẳng cấu giữa hai đồ thị ☞

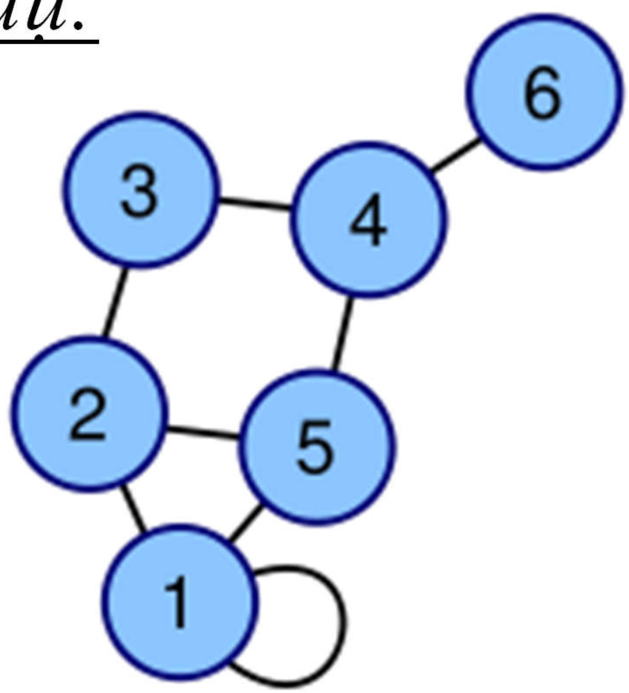
1. MA TRẬN KỀ

Cho G = (V, E), V = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ma trận kề biểu diễn G là A = $[a_{ij}]_{n \times n}$.

a_{ij} là số cạnh liên thuộc hai đỉnh v_i và v_j.

Ví dụ:



$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

1. MA TRẬN KỀ

<u>Nhận xét:</u>

- Ma trận kề của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng

- Tổng các phần tử dòng (cột) của ma trận kề chính bằng bậc của đỉnh tương ứng (không có khuyên).

- Xét ma trận tích $A^p = A.A\ldots A$ (p thừa số). Khi đó a_{ij}^p là số đường đi khác nhau độ dài p từ đỉnh i đến đỉnh j.

2. MA TRỌNG SỐ

Đồ thị có trọng số:

Cho G = (V, E) có:

- V = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
-$\forall e \in E$, e được gán trọng số c(e).

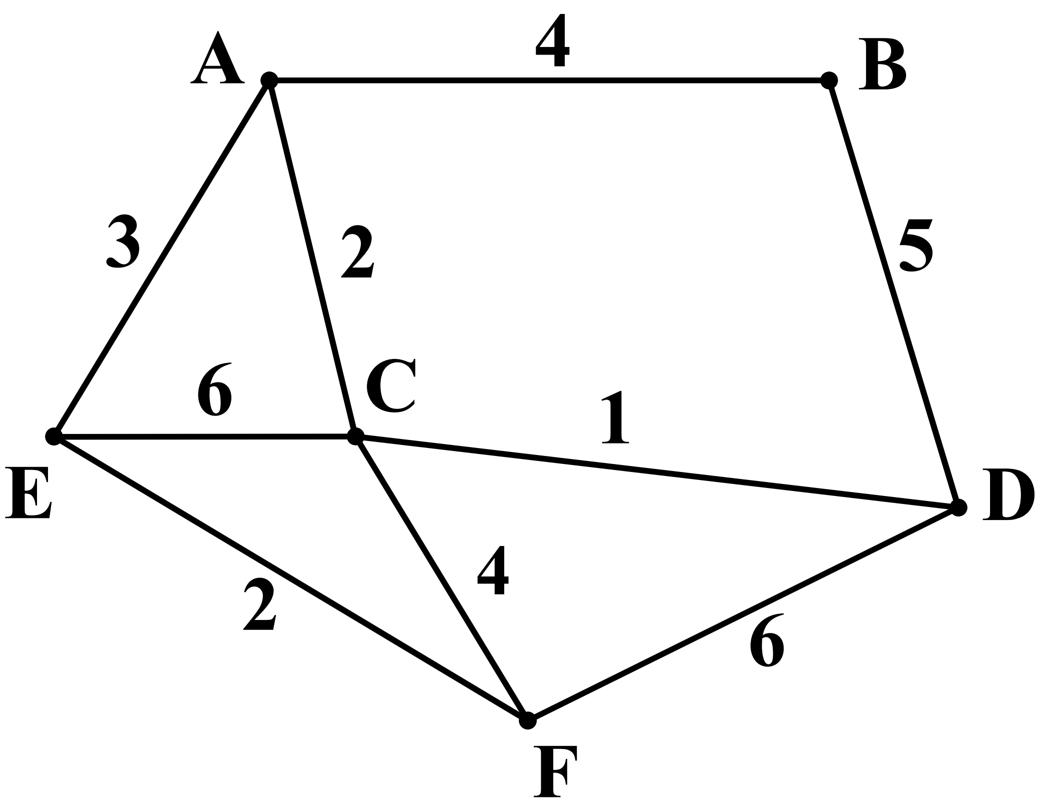
Ma trận trọng số biểu diễn G là $C = [c_{ij}]_{n \times n}$

$$c_{ij} = \begin{cases} c(v_i, v_j) & \text{nÕu}(v_i, v_j) \in E \\ \theta & \text{nÕu}(v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

Trong đó: $\theta \in \{0, +\infty, -\infty\}$

2. MA TRỌNG SỐ

Ví dụ: $C_{ij} = 0$ khi $(v_i, v_j) \notin E$



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 4 & 2 & 0 & 3 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 6 & 4 \\
0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 4 & 6 & 2 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

3. MA TRẬN LIÊN THUỘC

Cho G = (V, E), với:

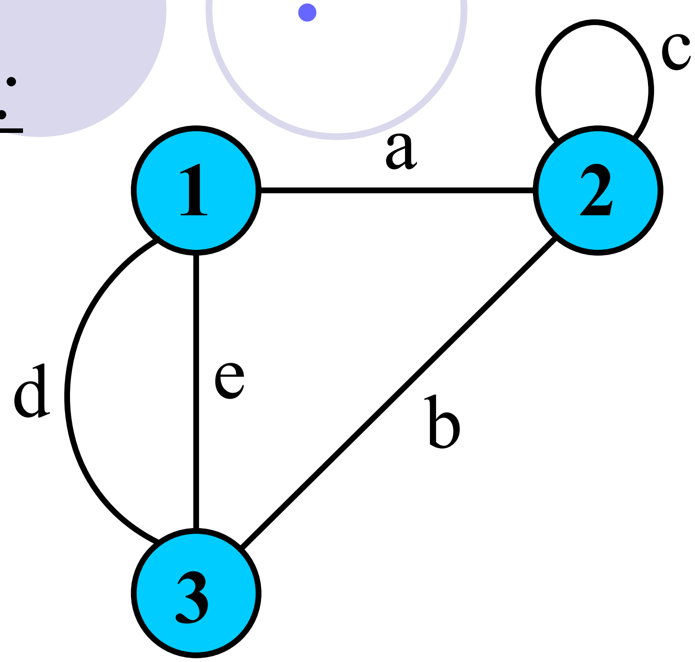
- $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
- $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

Ma trận liên thuộc biểu diễn G là $M = [m_{ij}]_{n \times m}$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{neu } e_j \text{ lien thuoc } v_i \\ 0 & \text{neu } e_j \text{ khong lien thuoc } v_i \end{cases}$$

3. MA TRẬN LIÊN THUỘC

Ví dụ:



$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline 1 & & & & & \\ 2 & & & & & \\ 3 & & & & & \end{array}$$

Nhận xét:

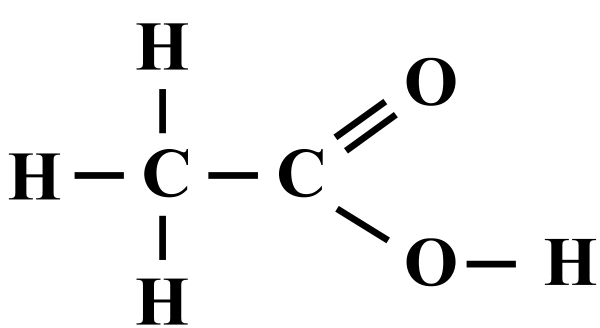
- Hai cột giống nhau tương ứng với hai cạnh song song
- Cột mà chỉ có một phần tử bằng 1 tương ứng với khuyên.
- Nếu đồ thị không có khuyên thì tổng các phần tử theo hàng chính bằng bậc của đỉnh tương ứng.

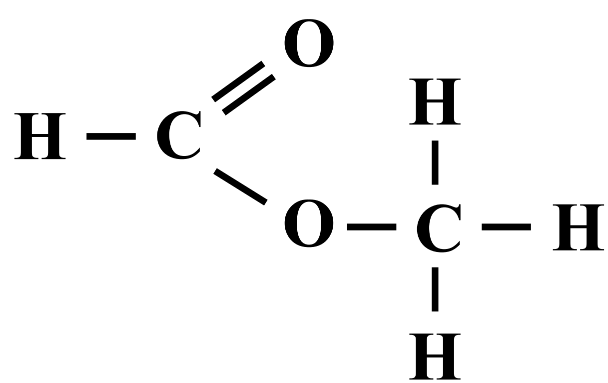
4. SỰ ĐẲNG CẤU GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Trong hoá học, các đồ thị được dùng để tạo mô hình các hợp chất. Có nhiều chất có cùng công thức phân tử nhưng cấu trúc khác nhau. Chúng được biểu diễn bằng các đồ thị khác nhau.

→Các đồ thị có cùng cấu trúc được gọi là các đồ thị đẳng cấu biểu diễn mô hình của cùng một chất.

Ví dụ: Xét công thức phân tử $C_2H_4O_2$.





4. SỰ ĐẲNG CẤU GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Cho hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$

Nếu tồn tại một song ánh

$$f: V_1 \to V_2$$

Sao cho f bảo toàn quan hệ liền kề giữa các cặp đỉnh, tức là:

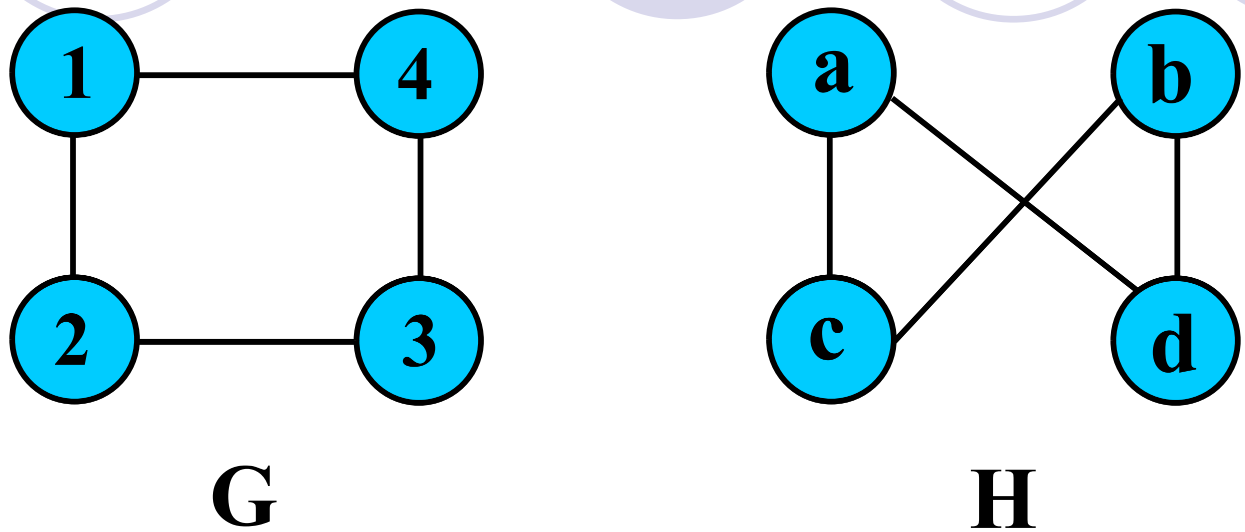
$(v, w) \in E_1$ khi và chỉ khi $(f(v), f(w)) \in E_2$.

Khi đó: G_1 và G_2 được gọi là đẳng cấu với nhau.

f được gọi là một phép đẳng cấu.

4. SỰ ĐẲNG CẤU GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Ví dụ:



$f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$

$f(1) = a \quad f(2) = c$

$f(3) = b \quad f(4) = d$

$(1, 2) - (a, c) \quad (1, 4) - (a, d)$

$(2, 3) - (c, b) \quad (3, 4) - (b, d)$

G và H đẳng cấu với nhau

4. SỰ ĐẲNG CẤU GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Nhận xét:

- Để xác định sự đẳng cấu giữa hai đồ thị là một bài toán không đơn giản, vì giữa hai đồ thị có n đỉnh tồn tại tới n! song ánh giữa hai tập đỉnh.

- Để chỉ ra hai đồ thị không đẳng cấu với nhau ta chỉ ra chúng không có một tính chất mà hai đồ thị đẳng cấu phải có:

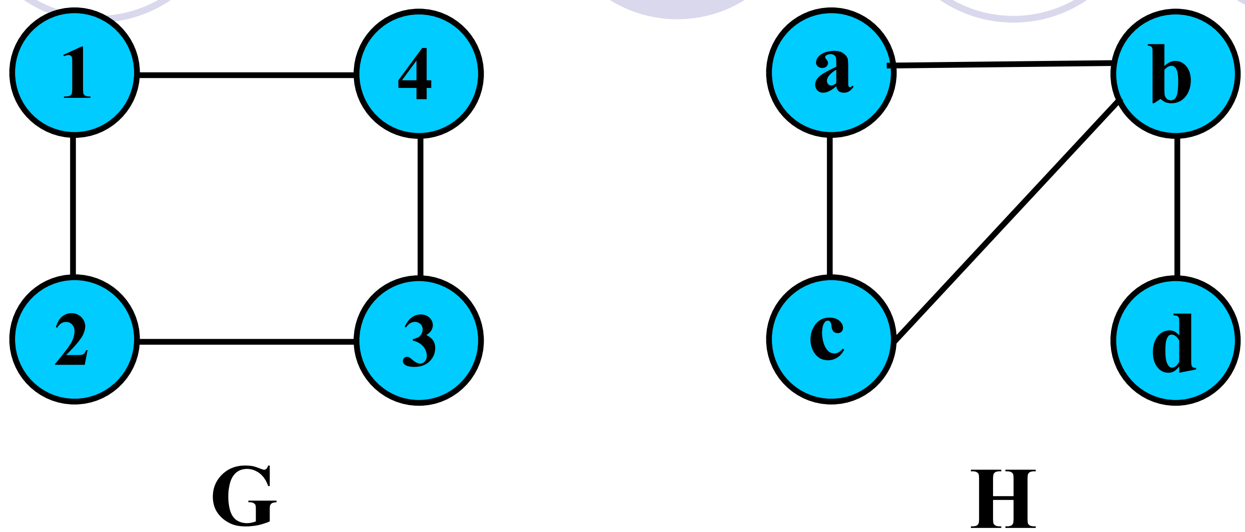
+ Số lượng đỉnh

+ Số lượng cạnh

+ Bậc của các đỉnh

4. SỰ ĐẲNG CẤU GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Ví dụ:

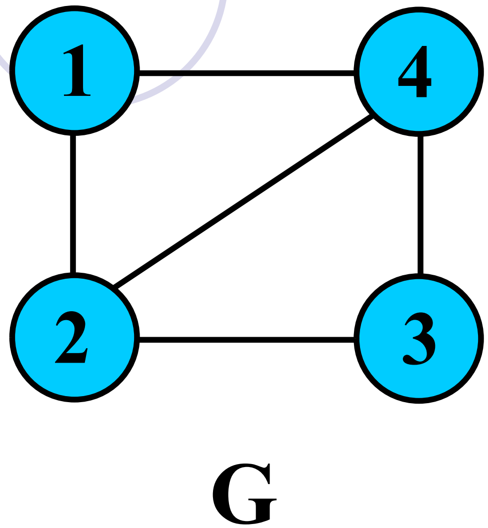


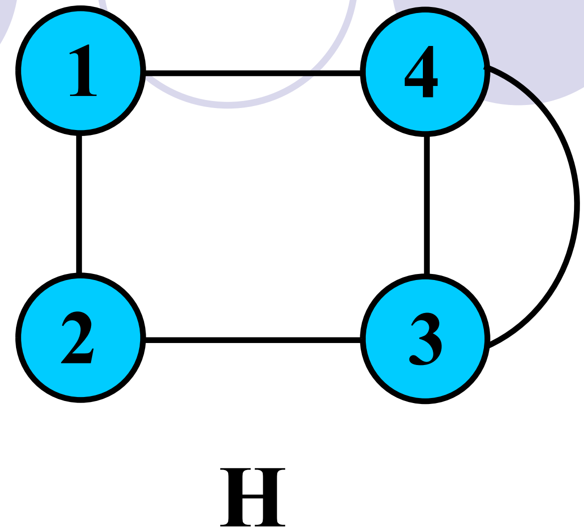
+ Số đỉnh: cùng 4 đỉnh.
+ Số cạnh: cùng 4 cạnh.
+ Bậc của đỉnh:
  G: mỗi đỉnh có bậc 2.
  H: 2 đỉnh bậc 2, 1 đỉnh bậc 3,
  1 đỉnh bậc 1.

G và H không đẳng cấu với nhau

4. SỰ ĐẲNG CẤU GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Ví dụ:





+ Số đỉnh: cùng 4 đỉnh.
+ Số cạnh: cùng 4 cạnh.
+ Bậc của đỉnh:

G và H không đẳng cấu với nhau

G: 2 đỉnh bậc 2, 2 đỉnh bậc 3 (mỗi đỉnh bậc 2 kề với 2 đỉnh bậc 3).

H: 2 đỉnh bậc 2, 2 đỉnh bậc 3 (mỗi đỉnh bậc 2 kề với một đỉnh bậc 3 và một đỉnh bậc 2.