Chương 6: Lý thuyết đồ thị

Giảng viên: Phạm Thị Lan

Bộ môn: Khoa học máy tính

MỘT SỐ ĐỒ THỊ ĐƠN VÔ HƯỚNG ĐẶC BIỆT

NỘI DUNG

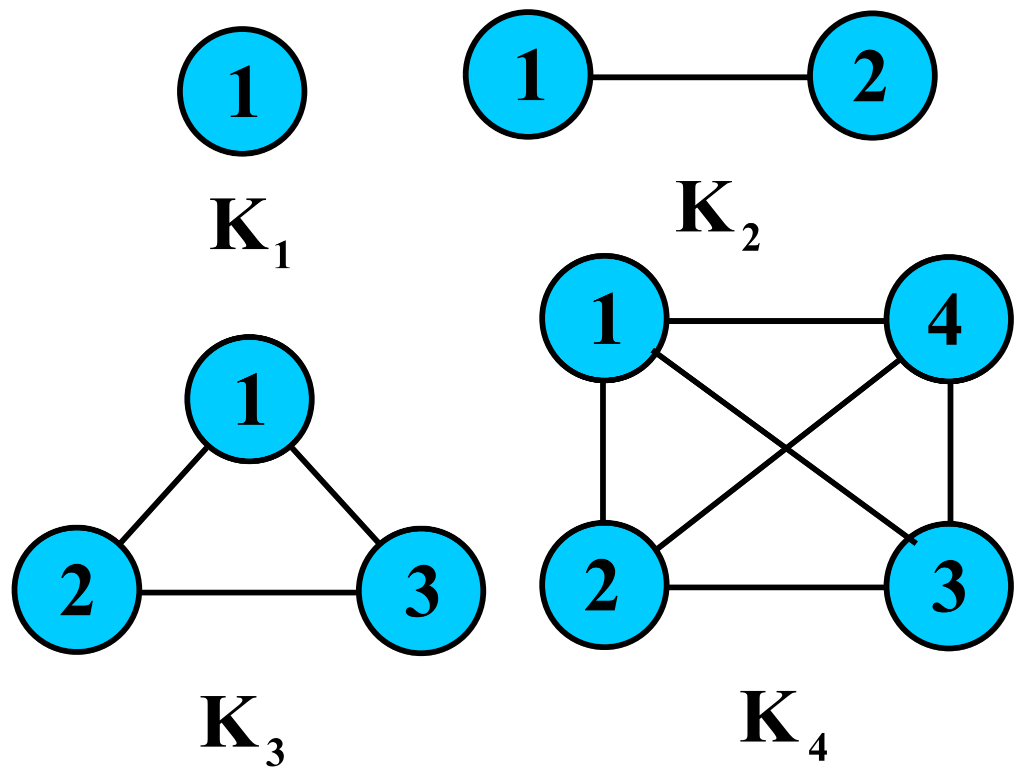
1. Đồ thị đầy đủ ☞
2. Đồ thị vòng ☞
3. Đồ thị hình bánh xe ☞
4. Đồ thị hình khối ☞
5. Đồ thị đều ☞
6. Đồ thị lưỡng phân ☞

1. ĐỒ THỊ ĐẦY ĐỦ

Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu K_n, là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh bất kỳ đều có cạnh nối.

K_n có:

- n đỉnh.
- deg(v) = n – 1.
- n.(n-1)/2 cạnh.



1. ĐỒ THỊ ĐẦY ĐỦ

Trong đời sống chúng ta gặp nhiều mô hình của đồ thị đầy đủ:

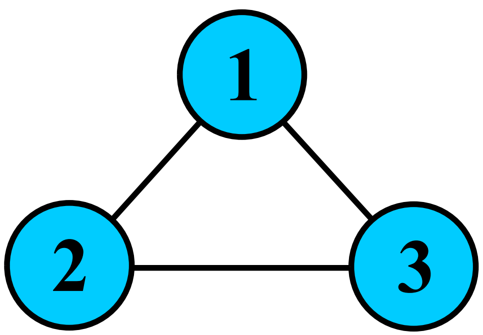
- Biểu diễn quan hệ quen biết của các học sinh trong một lớp học.

- Biểu diễn các cặp đấu trong một giải thi đấu mà các đội thi đấu vòng tròn một lượt

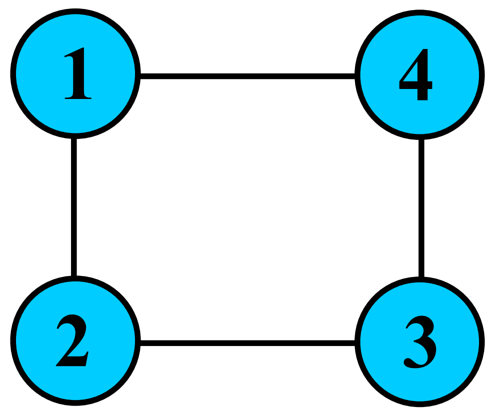
2. ĐỒ THỊ VÒNG

Đồ thị vòng $\boldsymbol{C_n}$ $(n \geq 3)$ là một đồ thị có n đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và có n cạnh $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$.

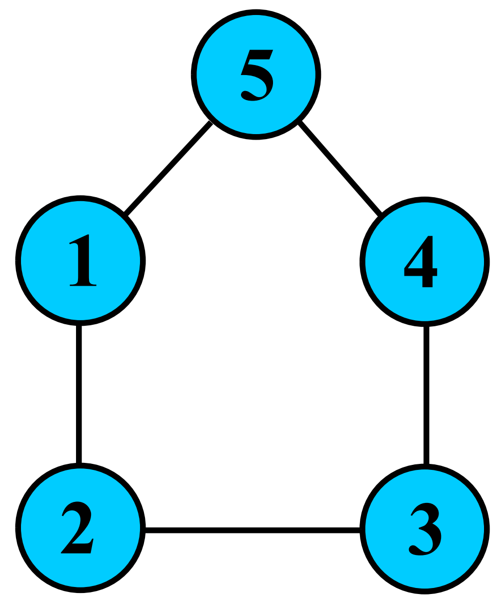
Ví dụ:



C_3



C_4



C_5

C_n có:

- n đỉnh, deg(v) = 2, n cạnh.

3. ĐỒ THỊ HÌNH BÁNH XE

Đồ thị hình bánh xe: Cho chu trình C_n ($n \geq 3$) và thực hiện:

- Thêm một đỉnh v_{new}.
- Thêm các cạnh nối v_{new} với đỉnh của chu trình

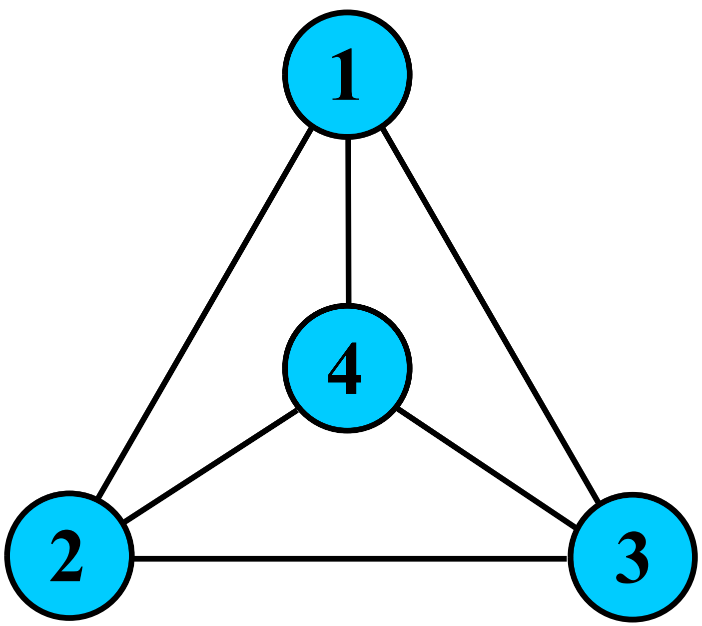
Ta sẽ được đồ thị hình bánh xe. Ký hiệu là W_n ($n \geq 3$).

W_n có:

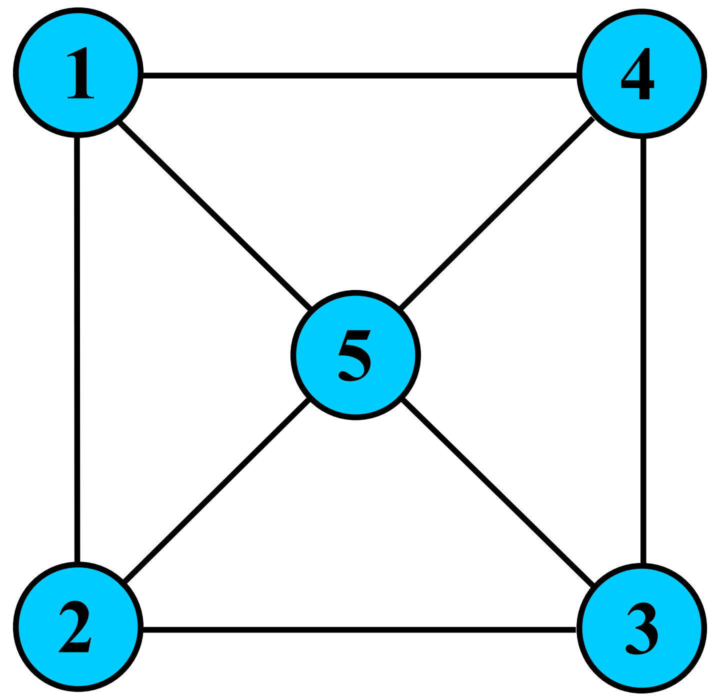
- $n + 1$ đỉnh.
- $deg(v_{new}) = n$, $deg(v) = 3$, $\forall\, v \neq v_{new}$
- $2n$ cạnh.

3. ĐỒ THỊ HÌNH BÁNH XE

Ví dụ:



W_3



W_4

4. ĐỒ THỊ HÌNH KHỐI

Đồ thị khối n chiều ($n \geq 1$), ký hiệu Q_n là đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh biểu diễn bằng một xâu nhị phân độ dài n. Hai đỉnh kề nhau khi và chỉ khi các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng 1 bít.

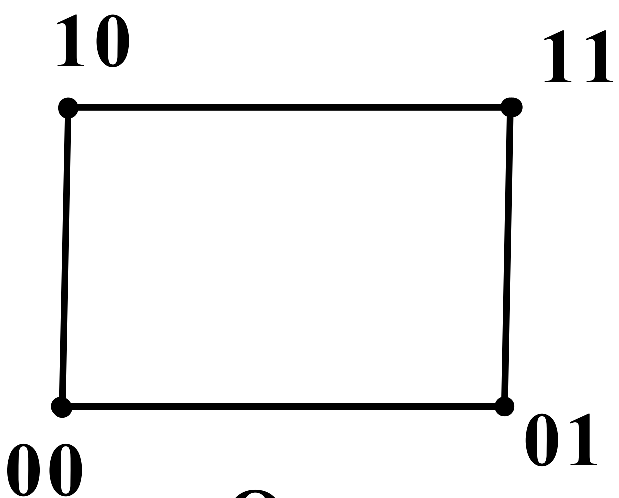
Bậc của mỗi đỉnh bằng n

Số cạnh là $n.2^{n-1}$

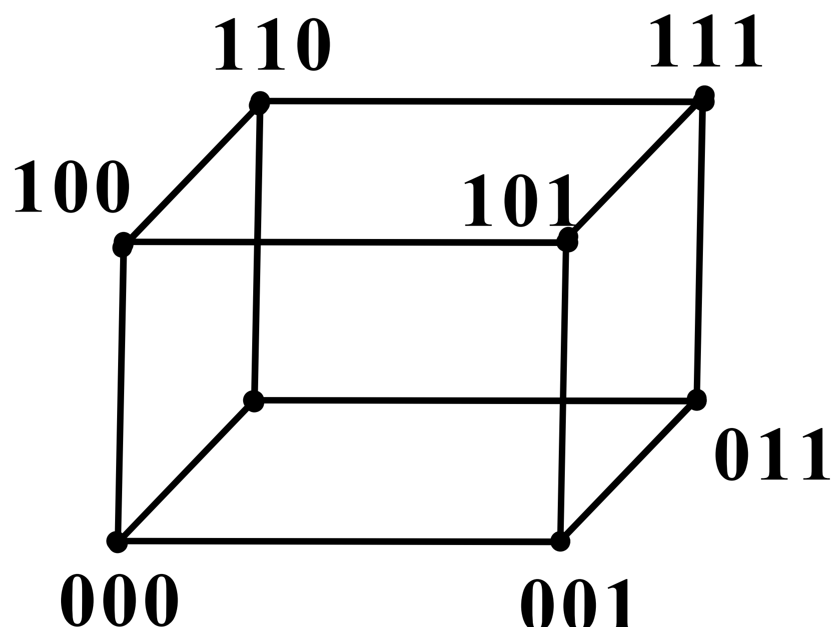
4. ĐỒ THỊ HÌNH KHỐI

Ví dụ:

Q_1



Q_2



Q_3

5. ĐỒ THỊ ĐỀU

***Đồ thị đều bậc k*: là đơn đồ thị mà mọi đỉnh đều có bậc k.**

Đồ thị đều bậc k có n đỉnh, khi đó:

- $Deg(v_i) = k$, $i = 1,\ldots,n$
- Có $(n*k)/2$ cạnh.

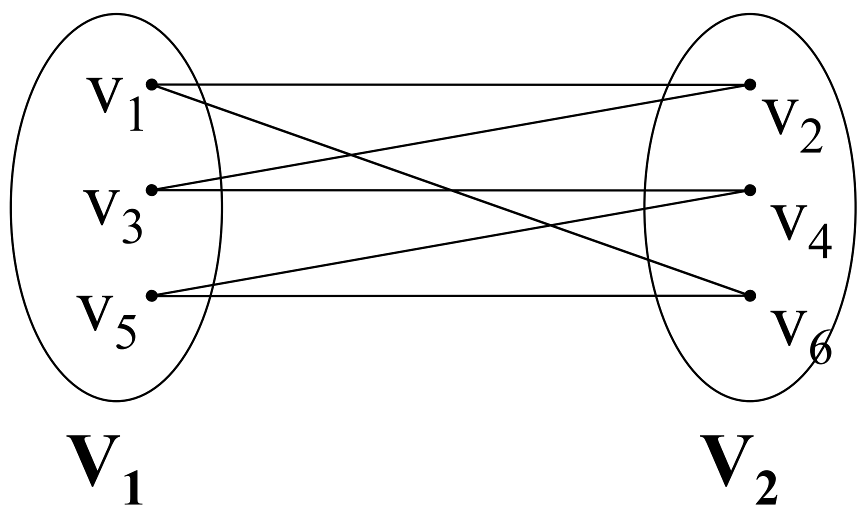
__Ví dụ:__

- Chu trình C_n là đồ thị đều bậc 2.
- Đồ thị đầy đủ K_n là đều bậc $n - 1$.

6. ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN

G = (V, E) được gọi là đồ thị lưỡng phân nếu tập đỉnh được phân hoạch thành V_1 và V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị chỉ nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2. Kí hiệu $G = (V_1, V_2, E)$

Ví dụ:



6. ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN

Hai tính chất của đồ thị lưỡng phân:

(1) Mỗi đồ thị con của đồ thị lưỡng phân cũng là một đồ thị lưỡng phân

(2) Đồ thị lưỡng phân không có khuyên

Ví dụ: Xét đồ thị biểu diễn quan hệ hôn nhân của một làng.

- Mỗi đỉnh biểu diễn một người
- Mỗi cạnh biểu diễn quan hệ vợ chông giữa 2 người

→ Đồ thị hai phía với V_1 là tập gồm toàn đàn ông, V_2 là tập gồm toàn đàn bà.

6. ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN

Định lí: Một đồ thị G là đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi mọi chu trình của nó có độ dài chẵn.

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả sử G = (V_1, V_2, E) là đồ thị lưỡng phân.

Xét một chu trình bất kỳ của G (v_1, v_2, …, v_n, v_1). Nếu $v_1 \in V_1$ thì $v_2 \in V_2$, cứ như vậy $v_n \in V_2$ và n là số chẵn. Tức là chu trình có độ dài chẵn.

6. ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN

Điều kiện đủ: Giả sử G = (V, E) là đồ thị mà tất cả các chu trình có độ dài chẵn.

Ta chứng minh rằng mỗi thành phần liên thông của G là một đồ thị lưỡng phân.

Xét thành phần G_1 có đỉnh v_0.

Với mỗi đỉnh v của G_1 ta chọn đường đi D nối v_0 với v.

Nếu độ dài đường đi D là chẵn thì $v \in V_1$, nếu độ dài lẻ thì $v \in V_2$.

6. ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN

Với hai tập đỉnh V_1 và V_2 được thiết lập như trên đã phân hoạch tập đỉnh của G_1 thành 2 phần thoả mãn mỗi cạnh chỉ nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2.

Như vậy, G_1 là đồ thị lưỡng phân

→ G là đồ thị lưỡng phân.

6. ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN

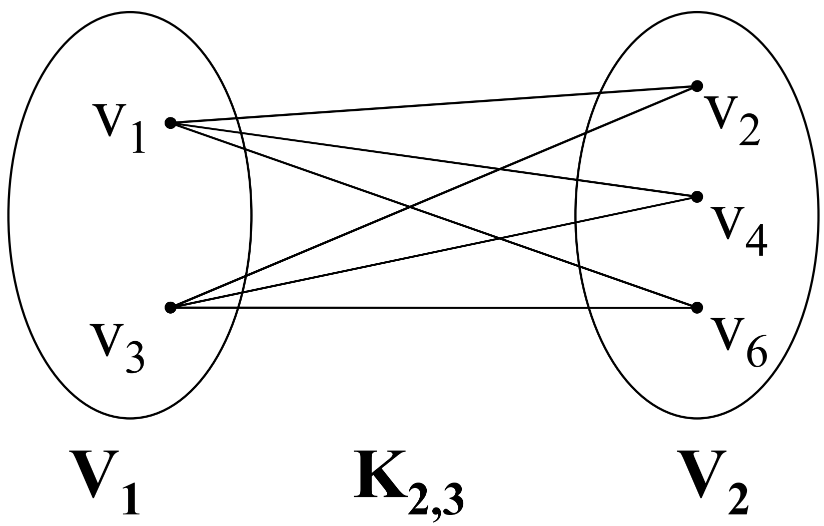
Đồ thị G = (V, E) là đồ thị lưỡng phân đầy đủ, ký hiệu là $K_{m,n}$, nếu G là đồ thị hai phía, tập đỉnh V phân hoạch thành 2 tập V_1, V_2 mà $|V_1| = m$ và $|V_2| = n$. Giữa hai đỉnh bất kỳ không cùng trong một lớp đỉnh thì luôn có đúng một cạnh nối.

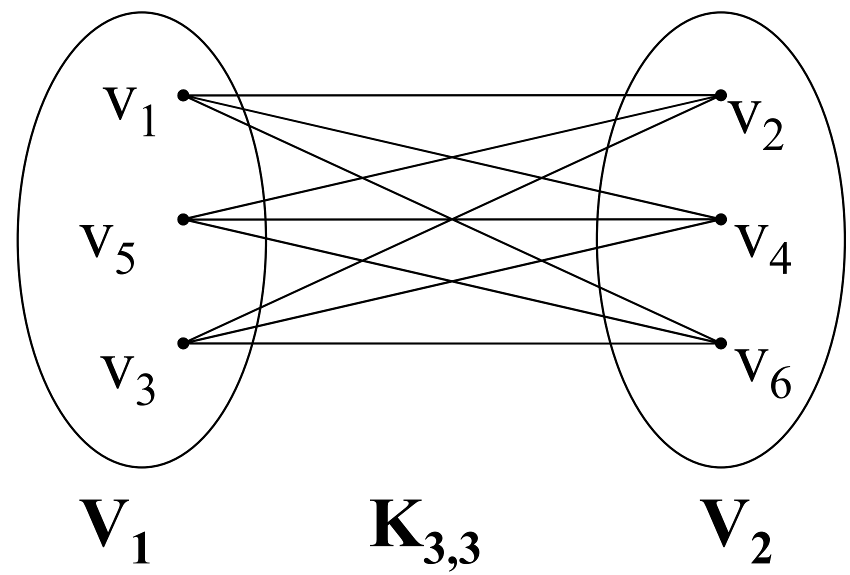
Với $K_{m,n}$ như trên, có:

- m + n đỉnh.
- $deg(v) = n \ \forall\ v \in V_1$, $deg(w) = m \ \forall\ w \in V_2$.
- (m.n)/2 cạnh.

6. ĐỒ THỊ LƯỠNG PHÂN

Ví dụ:

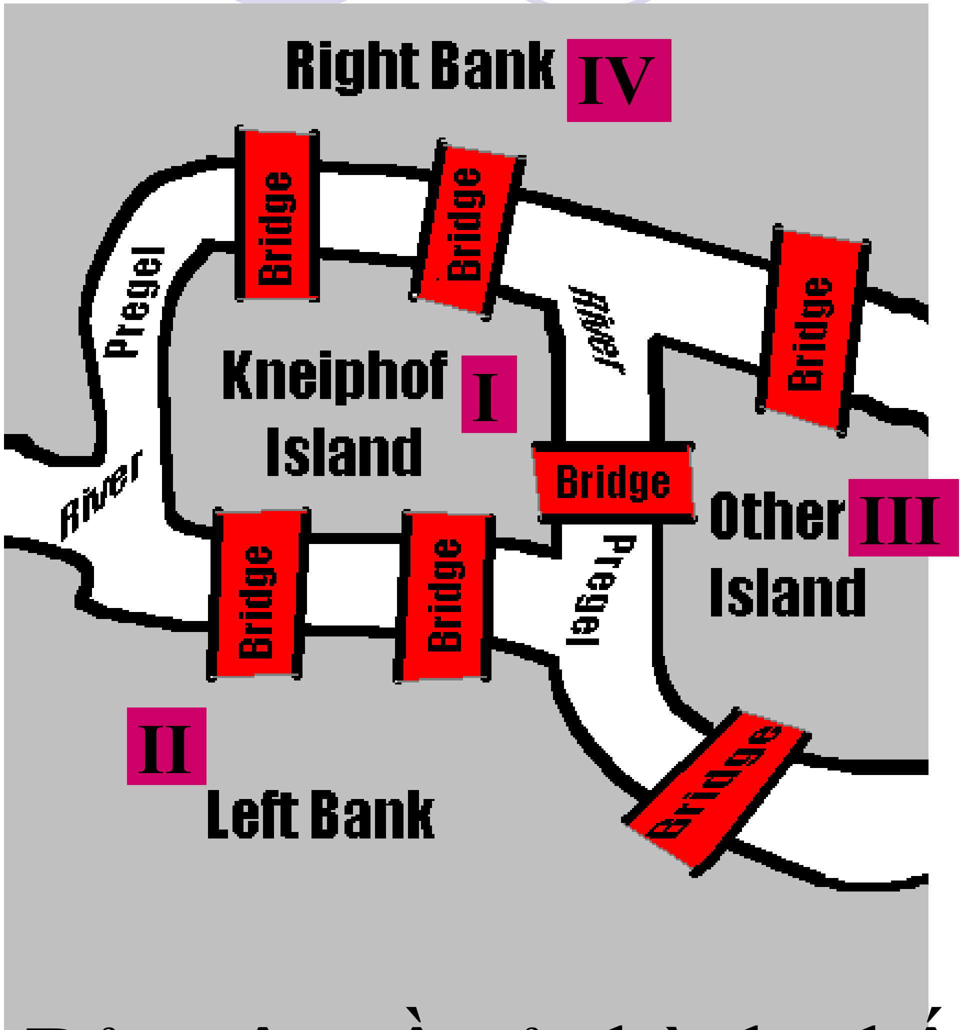




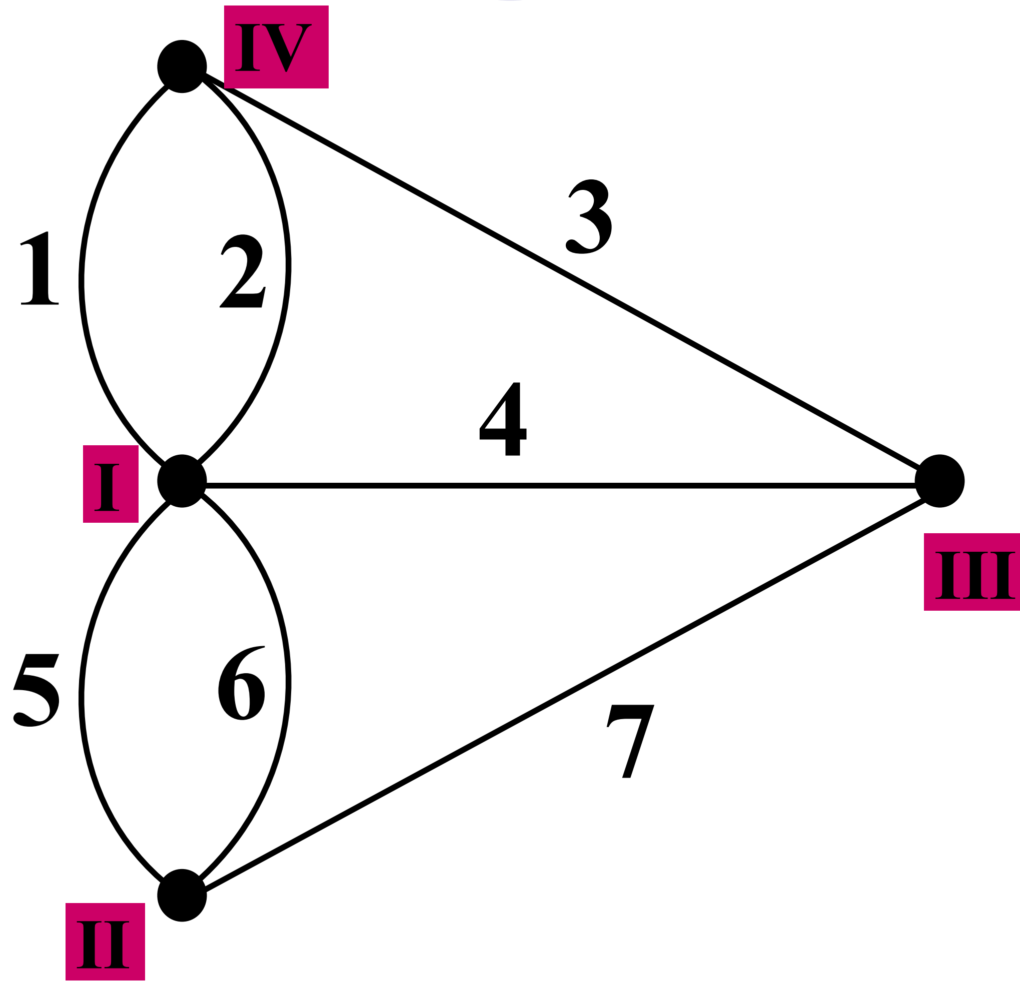
ĐƯỜNG MỘT NÉT EULER

CHU TRÌNH HAMILTON

1. ĐƯỜNG MỘT NÉT EULER



Bảy cây cầu ở thành phố Konigsberg



1. ĐƯỜNG MỘT NÉT EULER

Cho một đồ thị vô hướng có n đỉnh, m cạnh.

Một dãy chứa tất cả m cạnh của đồ thị và có dạng:

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_m, e_m, v_{m+1}$$

Sao cho cạnh e_i nối hai đỉnh v_i và v_{i+1}.

Dãy cạnh đó gọi là **đường một nét Euler**.

Nếu $v_1 \equiv v_{m+1}$ thì gọi đường một nét Euler khép kín.

Nếu $v_1 \neq v_{m+1}$ thì gọi đường một nét Euler mở.

1. ĐƯỜNG MỘT NÉT EULER

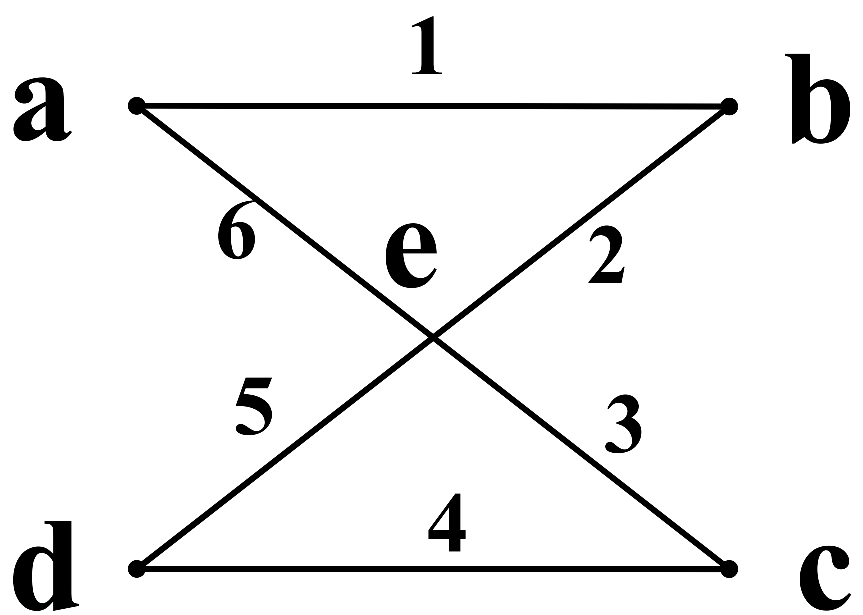
Định lý 1: G = (V, E) có đường một nét Euler khép kín khi và chỉ khi mọi đỉnh của V có bậc chẵn.

Định lý 2: G = (V, E) có đường một nét Euler mở khi và chỉ khi số đỉnh bậc lẻ của G là 2.

Đồ thị Euler được ứng dụng trong các bài toán thực tế như tìm hành trình ngắn nhất cho người đưa thư, xe thu rác, cảnh sát tuần tra.

1. ĐƯỜNG MỘT NÉT EULER

Ví dụ:

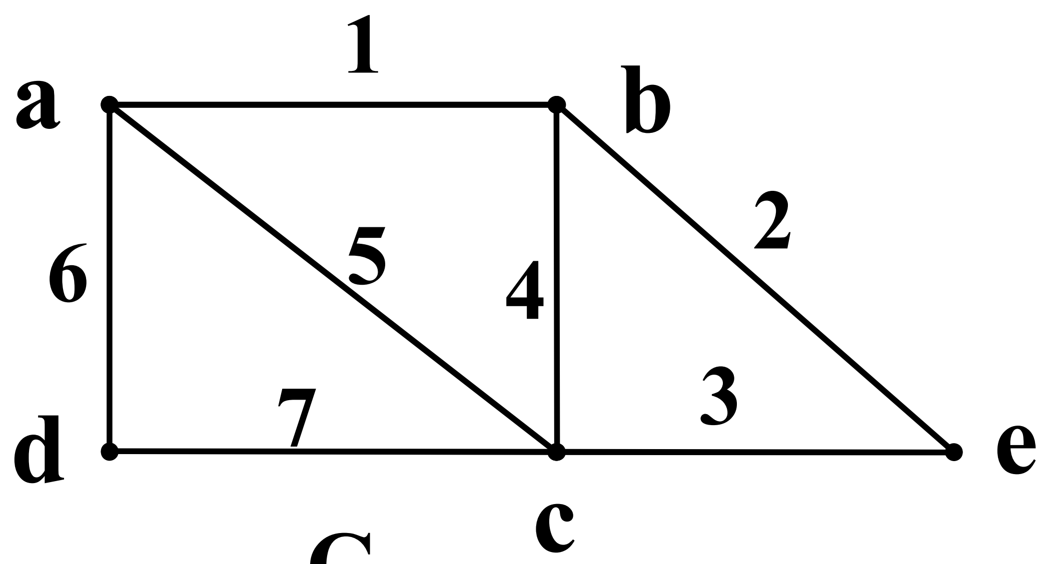


G_1

G_1 có đường một nét Euler kín

1. ĐƯỜNG MỘT NÉT EULER

Ví dụ:

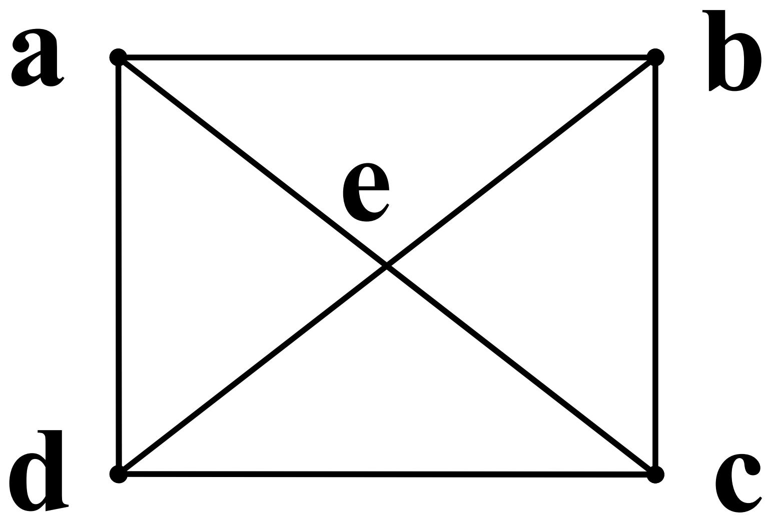


G_2

G_2 có đường một nét Euler mở

1. ĐƯỜNG MỘT NÉT EULER

Ví dụ:



G_2

G_2 không có đường một nét Euler

1. ĐƯỜNG MỘT NÉT EULER

<u>*Thuật toán tìm đường một nét Euler khép kín*</u>

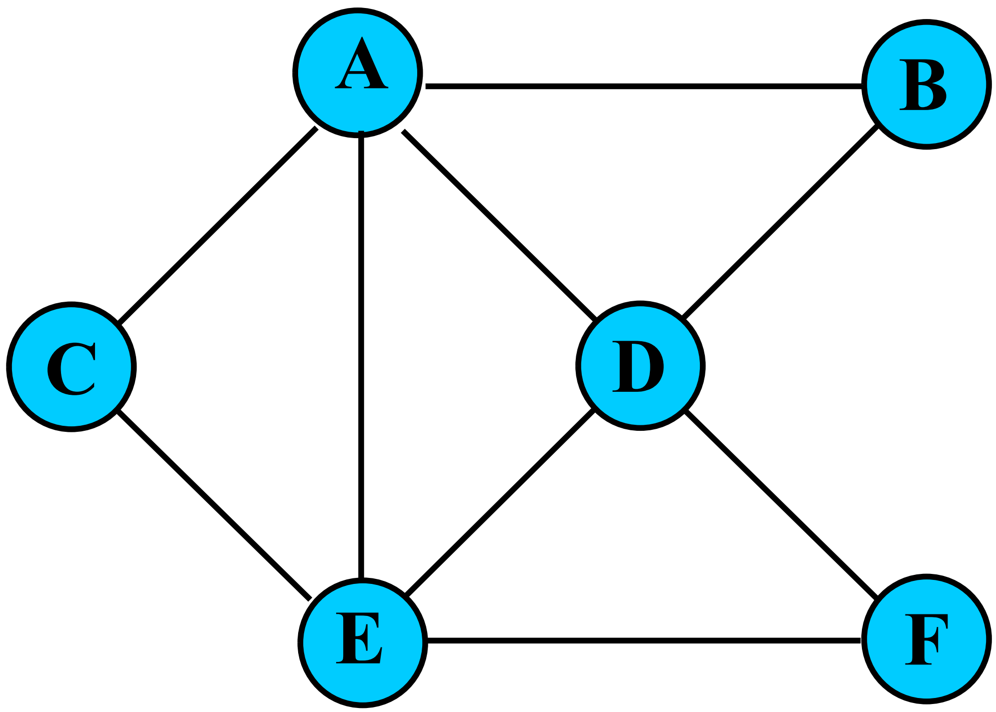
Bước 1: Chọn đỉnh a làm đỉnh bắt đầu. Xây dựng đường một nét kép kín con C’.

Bước 2: Loại bỏ các cạnh trong C’ khỏi đồ thị. Loại bỏ các đỉnh cô lập (nếu có).

Bước 3: Lấy một đỉnh chung của C’ và đồ thị còn lại để xây dựng đường một nét con tiếp theo C’’. Rồi khép vào C’ và quay lại bước 2. Lặp cho đến khi cách cạnh được đưa hết vào C’.

1. ĐƯỜNG MỘT NÉT EULER

Ví dụ:



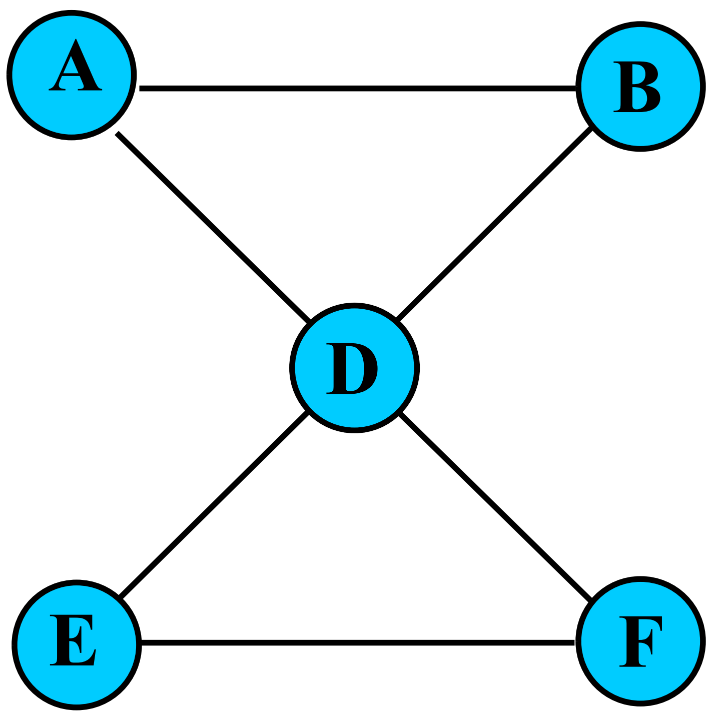
Đường một nét khép kín:

A – C – E – A

1. ĐƯỜNG MỘT NÉT EULER

Ví dụ: Đường một nét khép kín:

A – C – E – A



Đường một nét khép kín:

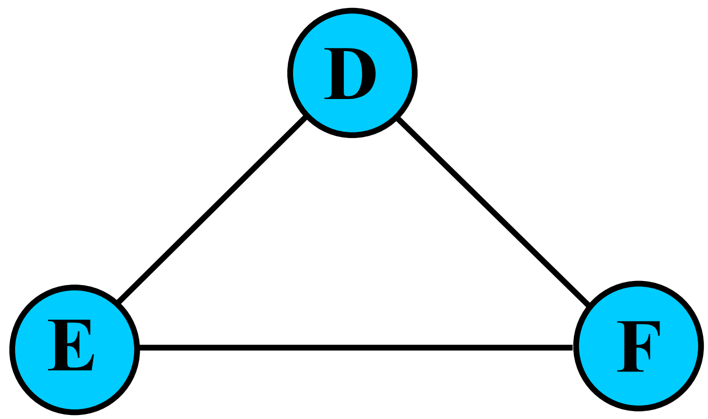
A – C – E – A – D – B - A

1. ĐƯỜNG MỘT NÉT EULER

Ví dụ:

Đường một nét khép kín:

A – C – E – A – D – B - A



Đường một nét khép kín Euler:

A – C – E – A – D – E – F – D – B - A

2. CHU TRÌNH HAMILTON

Cho G = (V, E), nếu tồn tại một chu trình C đi qua tất cả các đỉnh và mỗi đỉnh đúng một lần. Khi đó C gọi là chu trình Hamilton.

Nếu tồn tại đường đi H có tính chất như trên thì H được gọi là đường đi Hamilton.

Vấn đề tìm chu trình Hamilton trong đồ thị được nhà toán học Anh là Hamilton nêu ra năm 1858.

Đến nay, việc tìm tiêu chuẩn để nhận biết đồ thị Hamilton vẫn là mở và cũng chưa có thuật toán hiệu quả để kiểm tra một đồ thị có là Hamilton hay không?

2. CHU TRÌNH HAMILTON

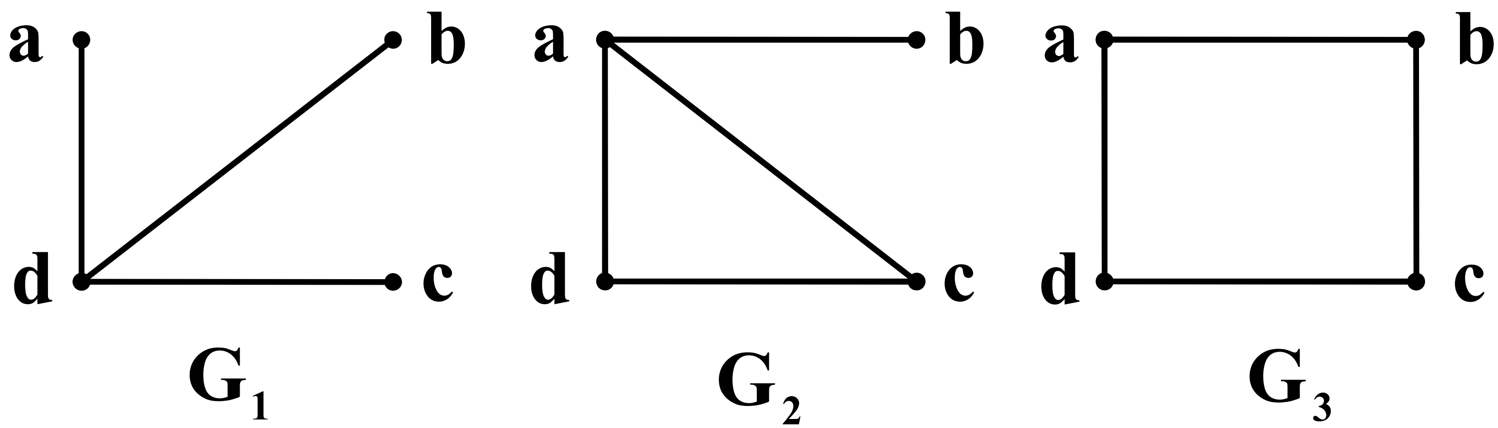
Whiney (1931): Trong đồ thị phẳng có mỗi miền là một tam giác với điều kiện 3 cạnh bất kỳ của nó lập thành một tam giác chỉ khi tam giác đó là một miền của đồ thị thì đồ thị là Hamilton

Tutte: Mọi đồ thị phẳng 4-liên thông đỉnh đều có một chu trình Hamilton

Dirac (1952): Đơn đồ thị vô hướng G có n > 2 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn n/2 là đồ thị Hamilton

2. CHU TRÌNH HAMILTON

Ví dụ:



G_1 không chứa đường đi và chu trình Hamilton

G_2 chứa đường đi Hamilton

G_3 chứa chu trình Hamilton

2. CHU TRÌNH HAMILTON

Thuật toán liệt kê tất cả các chu trình Hamilton

- Thuật toán được xây dựng trên cơ sở thuật toán quay lui cho phép liệt kê tất cả các chu trình Hamilton.
- Phát triển một dãy đỉnh x[1], x[2], …, x[k], … của đồ thị G = (V, E) cho bởi danh sách kề Ke(v), $v \in V$

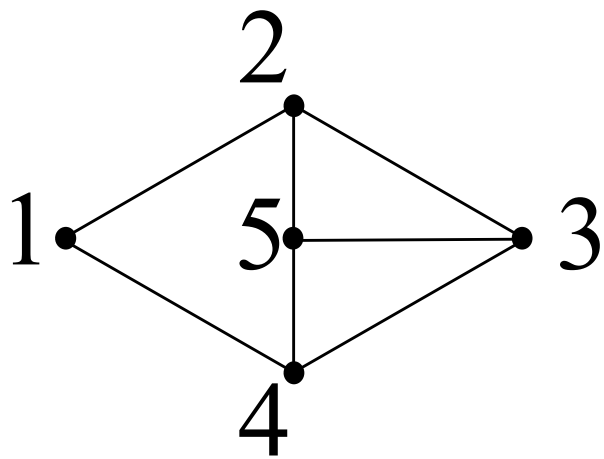
2. CHU TRÌNH HAMILTON

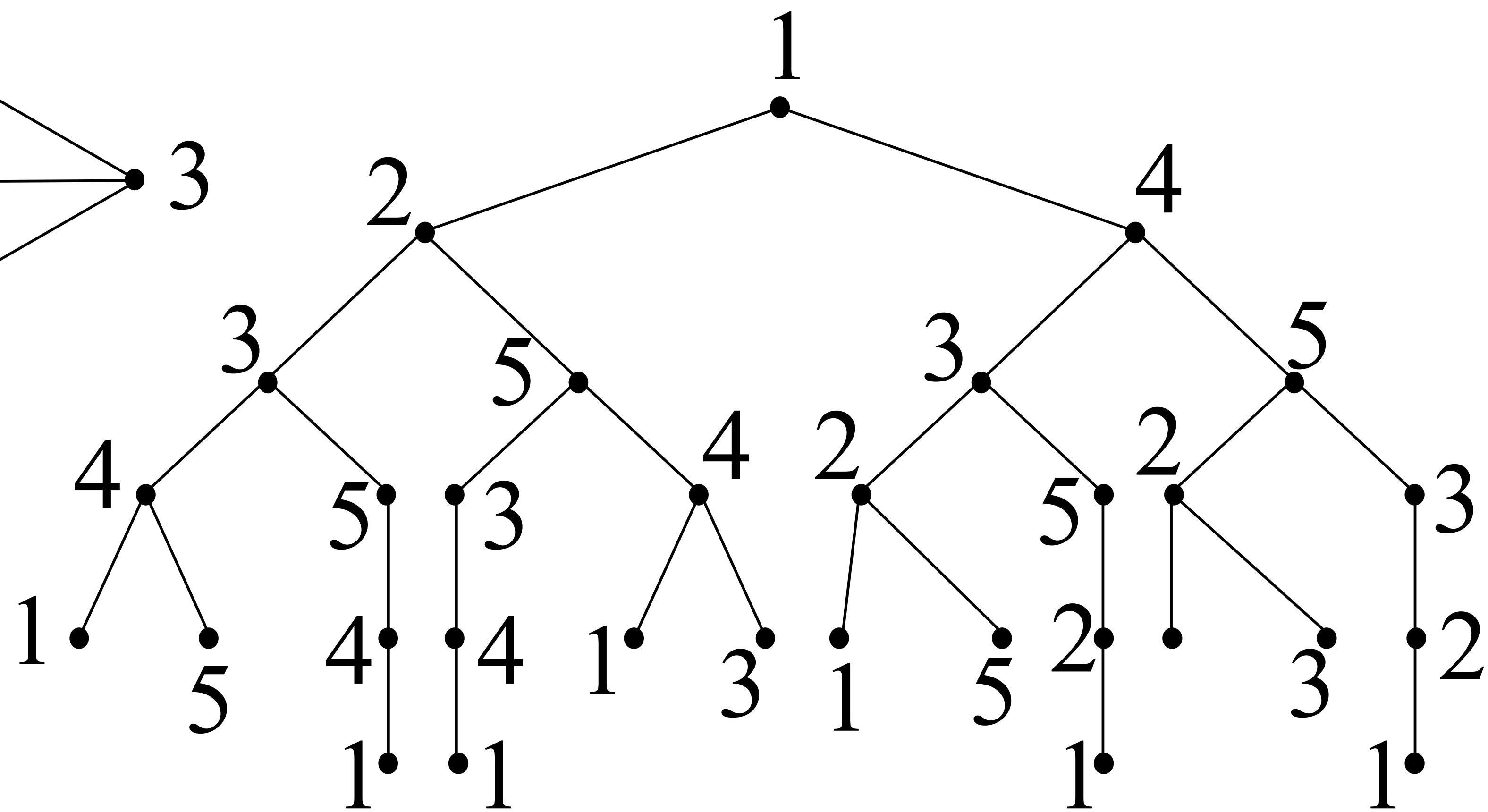
__Thuật toán liệt kê tất cả các chu trình Hamilton__

```
Procedure Hamilton(k);
Begin
    For y∈Ke(x[k-1]) do
        if (k=n+1)and(y=v0) then GhiNhan(x[1], …, x[n], v0)
        else if ChuaXet[y] then
    Begin
        x[k] := y;
        ChuaXet[y] := False;
        Hamilton(k+1);
        ChuaXet[y] = True;
    End;
End;
Begin
    For v∈V do ChuaXet[v] = True;
    x[1] := v0;
    ChuaXet[v0] := False;
    Hamilton(2);
End.
```

2. CHU TRÌNH HAMILTON

Ví dụ:





BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

1. BÀI TOÁN THỰC TẾ

Có 6 điểm du lịch trong một khu sinh thái là a, b, c, d, e, z. Giữa hai điểm có thể có hoặc không có đường đi trực tiếp.

Hãy tìm đường đi có khoảng cách ngắn nhất từ điểm a đến z.

1. BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài toán được mô hình hoá bằng đồ thị có trọng số như sau:

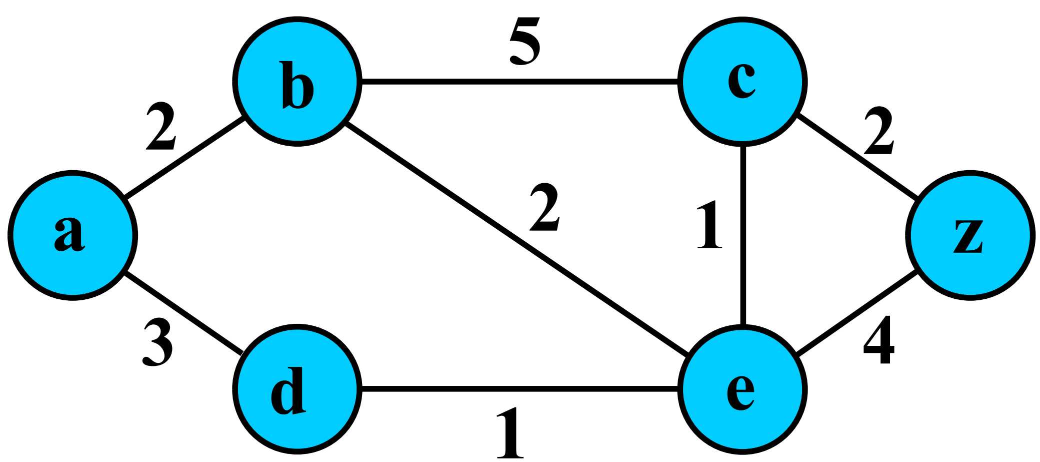
+ Mỗi đỉnh biểu diễn một điểm du lịch.

+ Hai đỉnh có cạnh nối nếu có đường đi trực tiếp.

+ Trọng số của cạnh được gán là khoảng cách từ điểm này sang điểm kia.

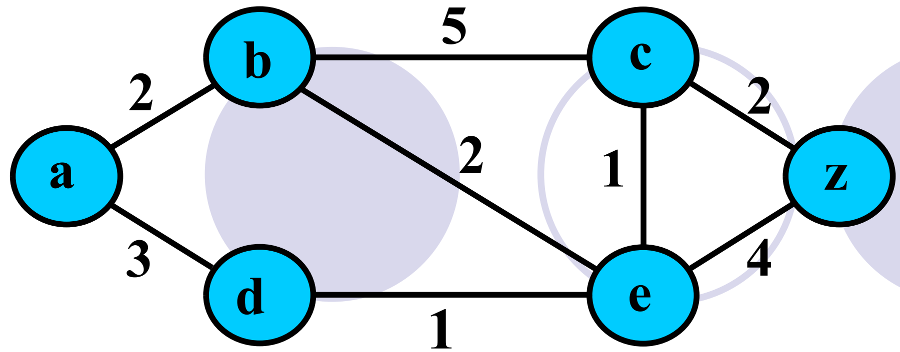
1. BÀI TOÁN THỰC TẾ

Đồ thị mô hình hoá bài toán

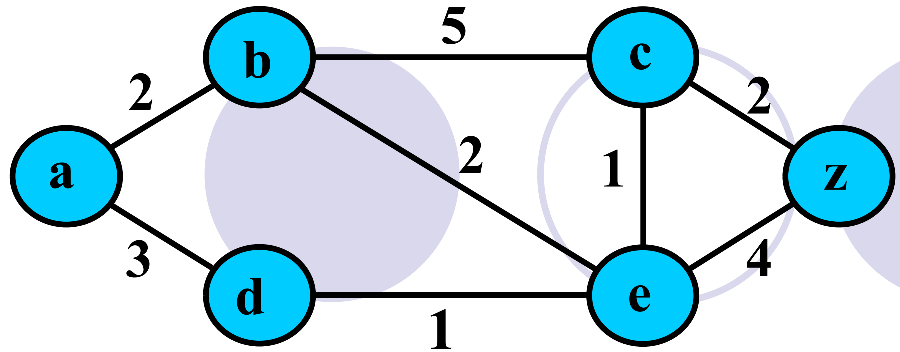


Đường đi ngắn nhất là đường đi có tổng trọng số cách cạnh của nó là nhỏ nhất.

Minh họa



TT	V	S	L(v)	Pr(v)
KT		∅	$L(a) = 0; L(b) = L(c) = L(d) = L(e) = L(z) = \infty$	
1	a	a	$L(b) = \min(0 + 2, \infty) = 2$ $L(d) = \min(0 + 3, \infty) = 3$ $L(e) = L(z) = L(c) = \infty$	$Pr(b) = a$ $Pr(d) = a$
2	b	a, b	$L(c) = \min(2 + 5, \infty) = 7$ $L(e) = \min(2 + 2, \infty) = 4$ $L(d) = 3, L(z) = \infty$	$Pr(c) = b$ $Pr(e) = b$
3	d	a, b, d	$L(e) = \min(3 + 1, 4) = 4$ $L(c) = 7, L(z) = \infty$	



TT	V	S	L(v)	Pr(v)
2	b	a, b	L(c) = min(2 + 5, ∞) = 7 L(e) = min(2 + 2, ∞) = 4 L(d) = 3, L(z) = ∞	Pr(c) = b Pr(e) = b
3	d	a, b, d	L(e) = min(3 + 1, 4) = 4 L(c) = 7, L(z) = ∞	
4	e	a, b, d, e	L(c) = min(4 + 1, 7)= 5 L(z) = min(4 + 4, ∞) = 8	Pr(c) = e Pr(z) = e
5	c	a, b, d, e, c	L(z) = min(5 + 2, 8) = 7	Pr(z) = c
6	z	a, b, d, e, c, z	**a - b - e - c – z**	

2. THUẬT TOÁN DIJKSTRA

Bài toán: Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến z của đồ thị có trọng số liên thông G = (V, E).

→ *Thuật toán Dijkstra (đề xuất năm 1959 do nhà toán học Hà Lan E.Dijkstra)*

Gọi L(v) là độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh v.

S là tập các đỉnh đã tìm được đường đi ngắn nhất từ a đến nó.

2. THUẬT TOÁN DIJKSTRA

Thuật toán:

+ *Bước 1*: $L(a) = 0$, $S = \emptyset$, $\forall\ v \in S$, $v \neq a$: $L(v) = \propto$

+ *Bước 2*: Nếu $z \in S$ thì kết thúc.

+ *Bước 3*: Chọn $v \notin S$ sao cho $L(v)$ là nhỏ nhất.

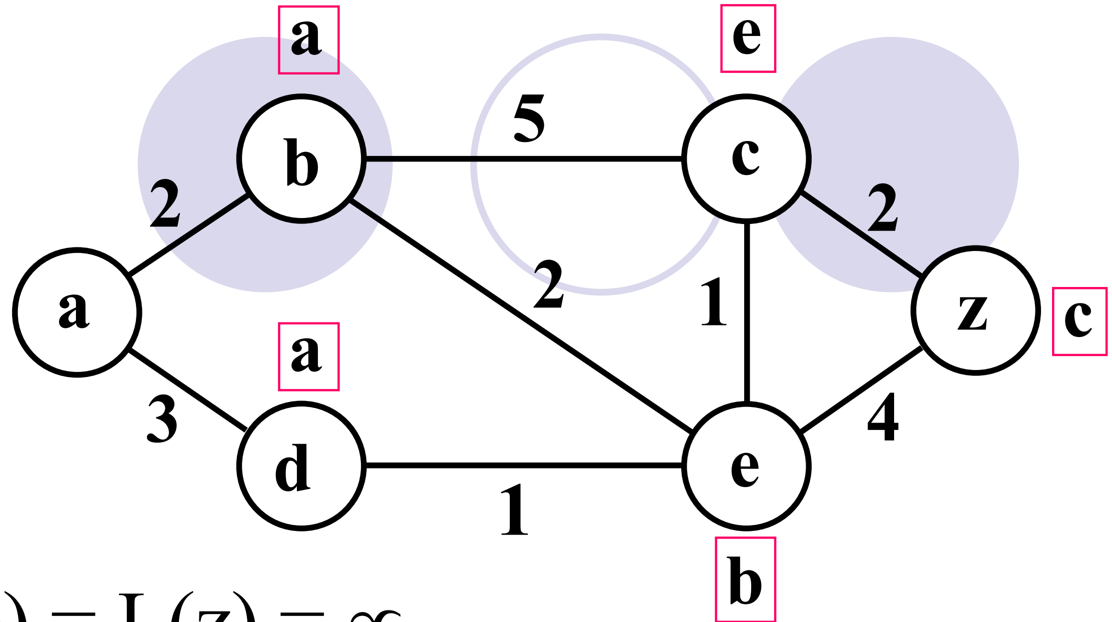
  Đưa v vào S.

+ *Bước 4*: với mỗi đỉnh x liền kề v và $x \notin S$ thì đặt:

  $L(x) = \min\{L(x), L(v) + c(v,x)\}$

  Quay lại bước 2.

3. VÍ DỤ



B1: $L(a) = 0, S = \varnothing$

$L(b) = L(c) = L(d) = L(e) = L(z) = \infty$

B2: $v = a, S = \{a\}$.

$L(b) = \min\{\infty, 2 + 0\} = 2$

$L(d) = \min\{\infty, 3 + 0\} = 3$

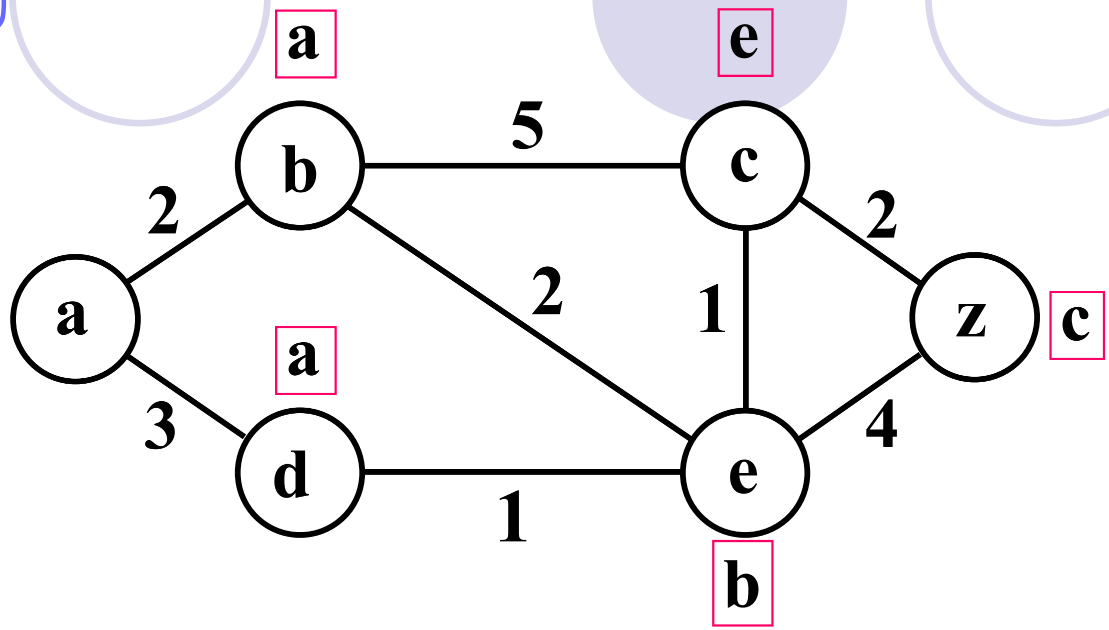
B3: $v = b, S = \{a,b\}, L(c) = 7, L(e) = 4, L(d) = 3, L(z)=\infty$

B4: $v = d, S = \{a,b,d\}, L(c) = 7, L(e) = 4, L(z) = \infty$

B5: $v = e, S = \{a,b,d,e\}, L(c) = 5, L(z) = 8$

B6: $v = c, S = \{a,b,d,e\}, L(z) = 7$

3. VÍ DỤ

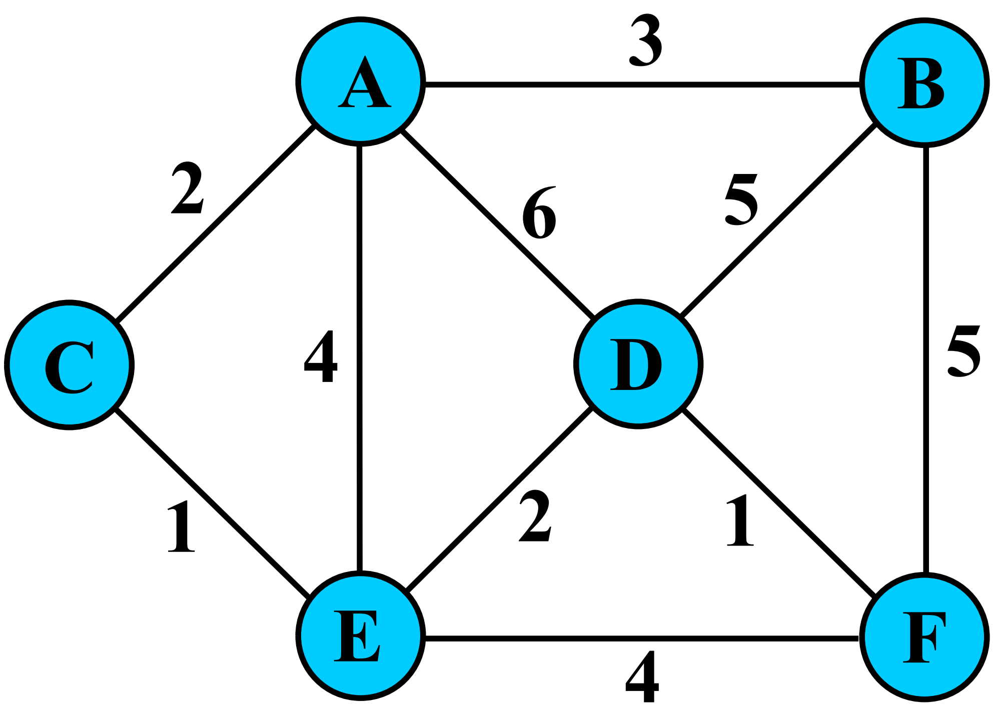


Đường đi ngắn nhất từ a đến z là:

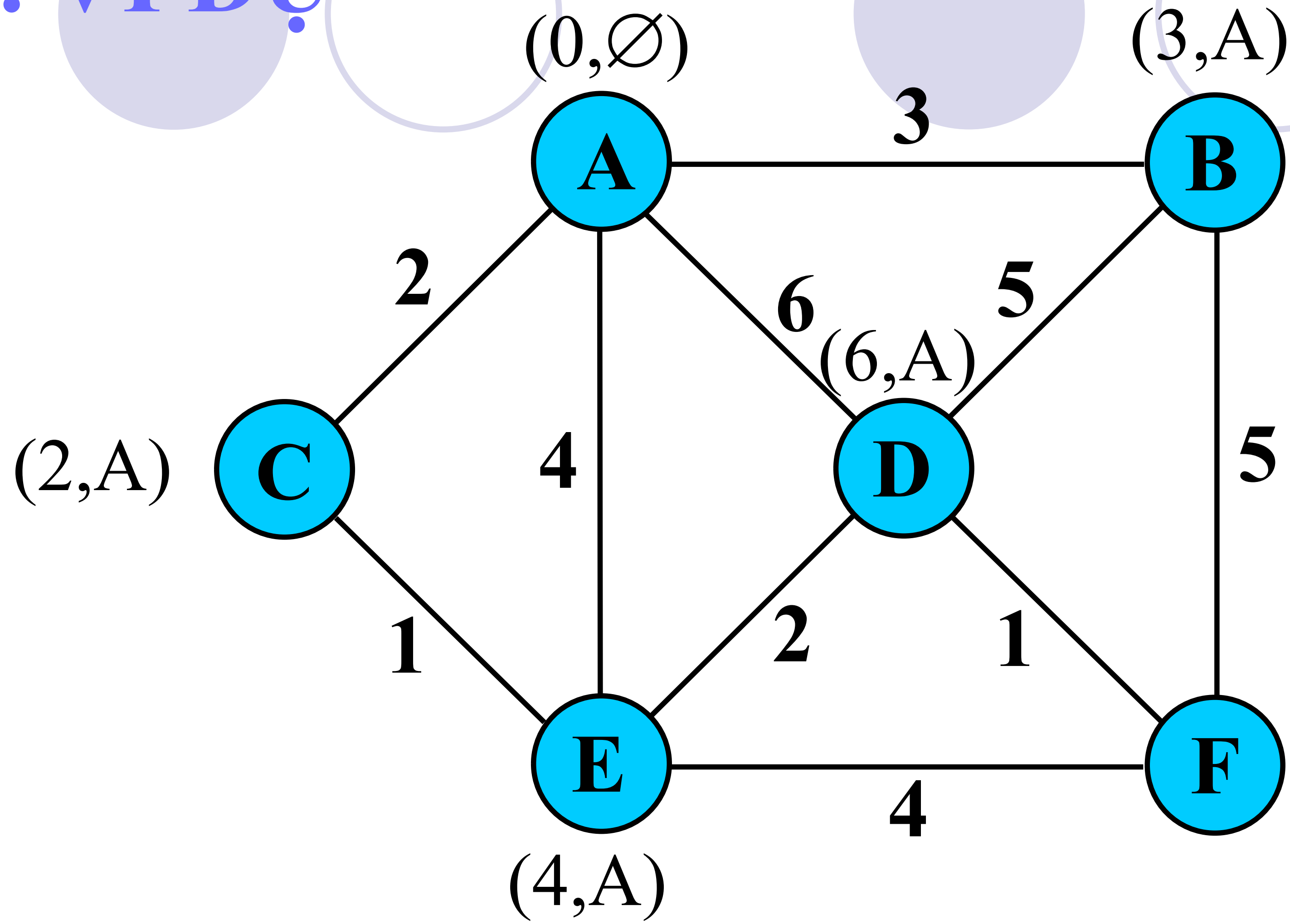
a – b – e – c - z

3. VÍ DỤ

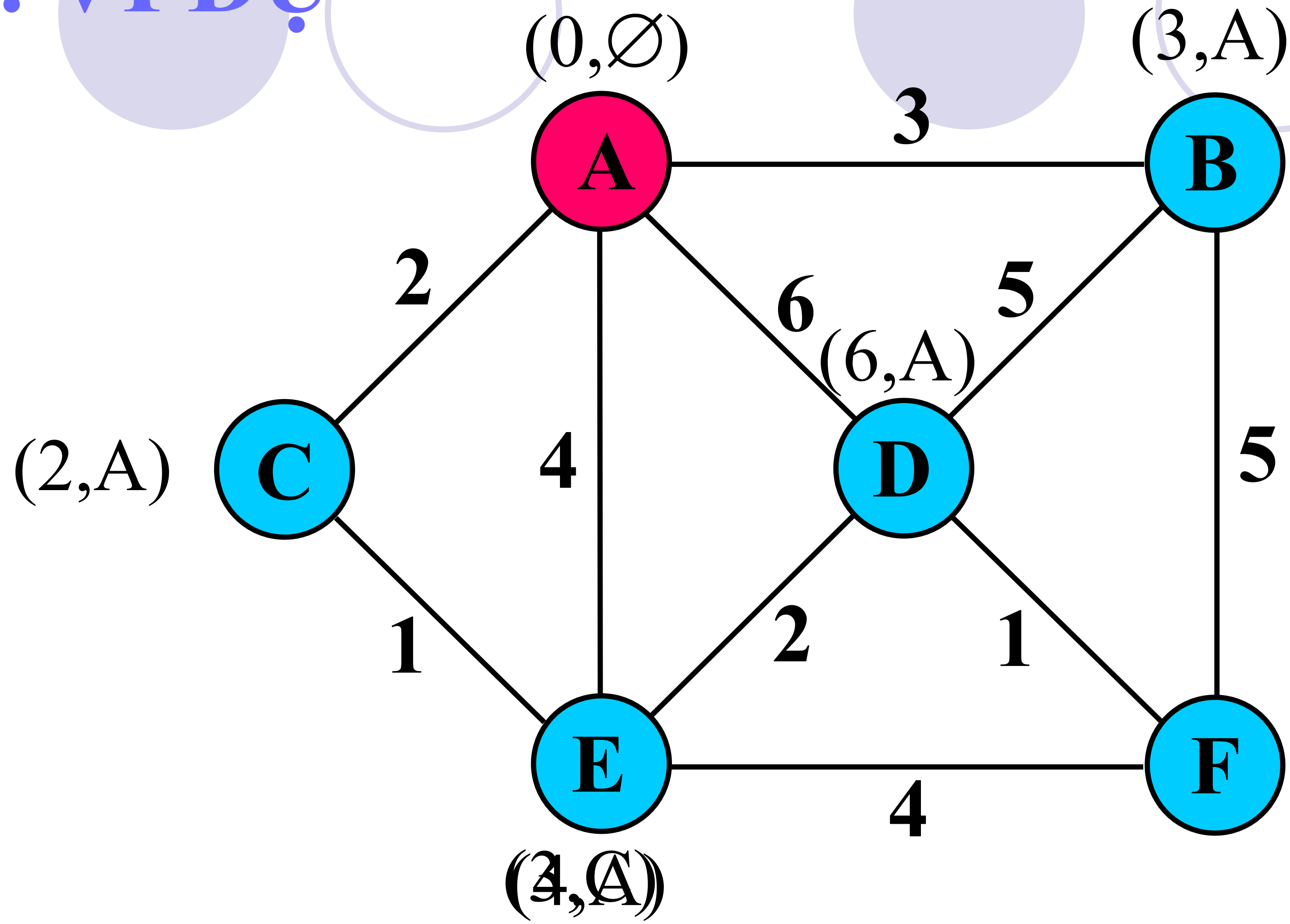
Tìm đường đi ngắn nhất từ A đến cách đỉnh còn lại trong đồ thị sau:



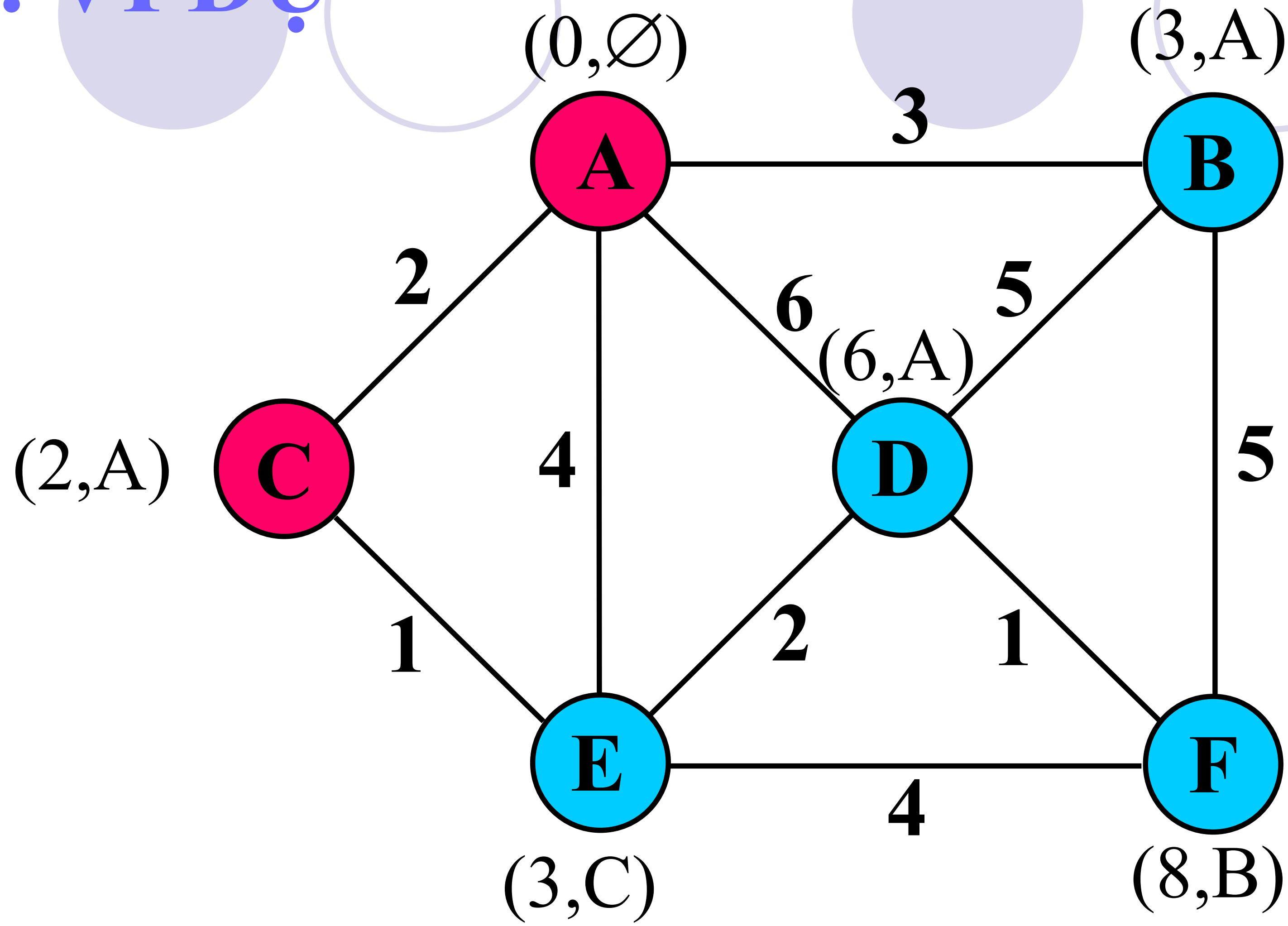
3. VÍ DỤ



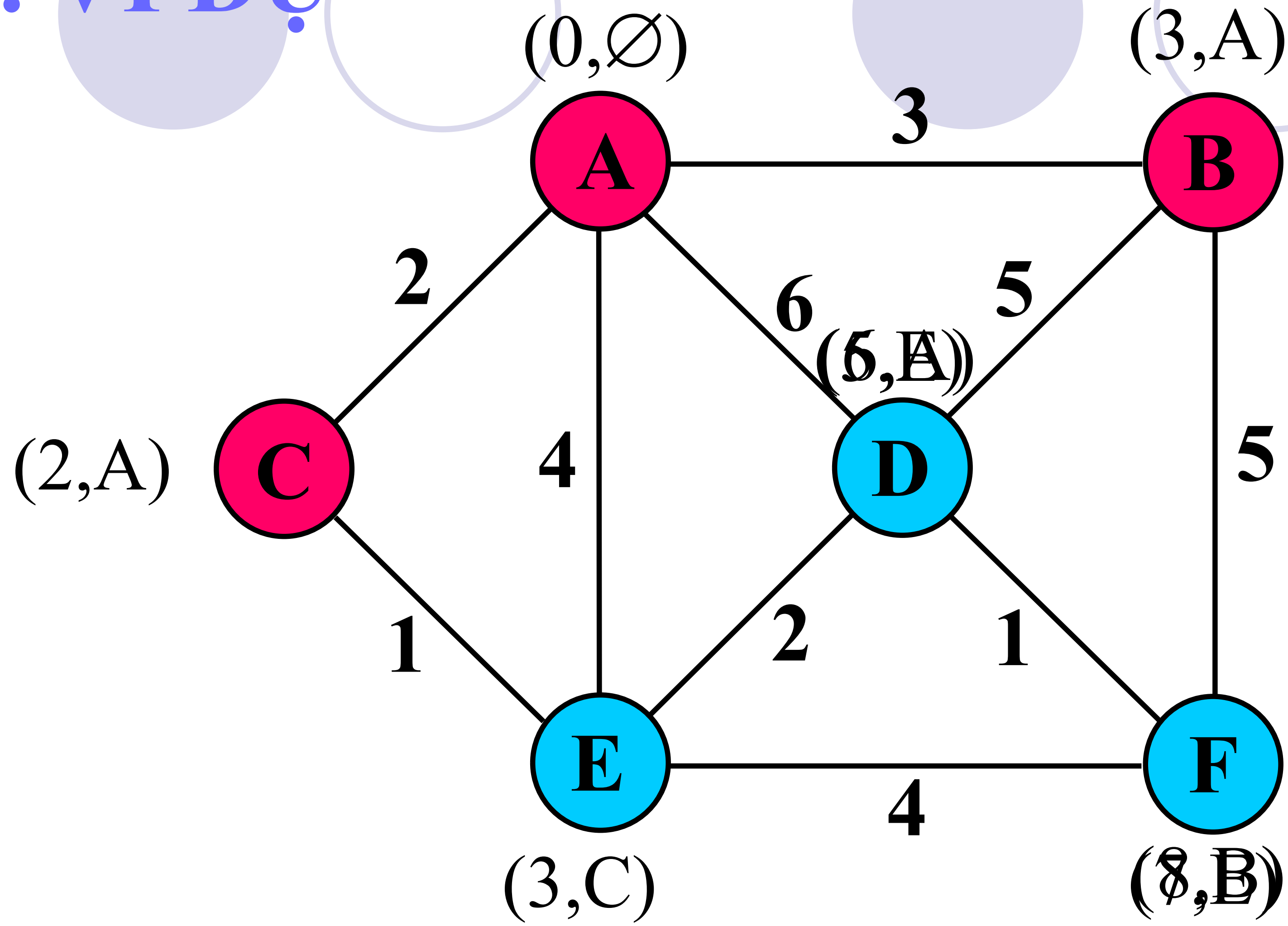
3. VÍ DỤ



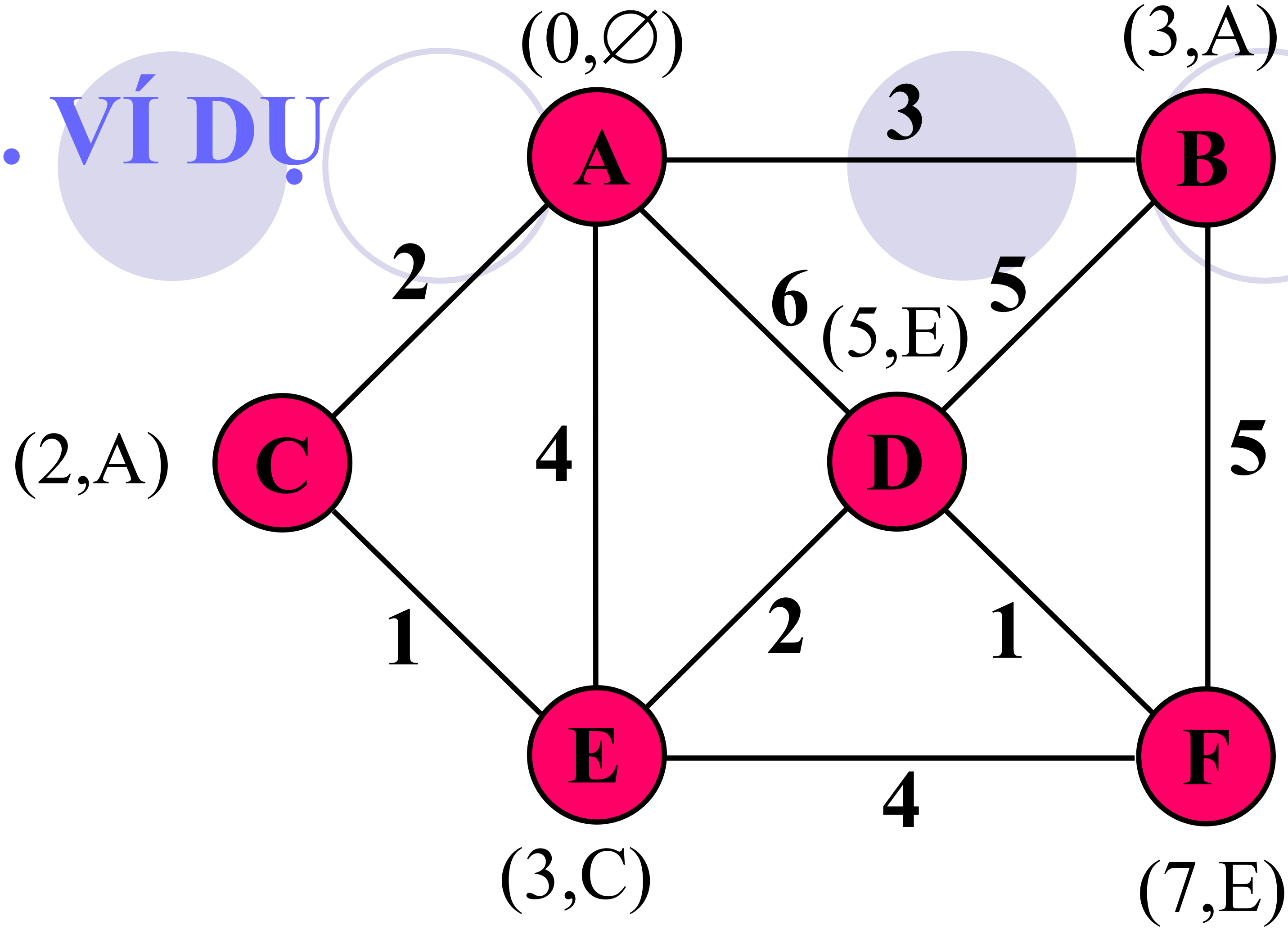
3. VÍ DỤ



3. VÍ DỤ



3. VÍ DỤ



A – B (3)

A – C (2)

A – C – E (3)

A – C – E – D (5)

A – C – E – F (7)