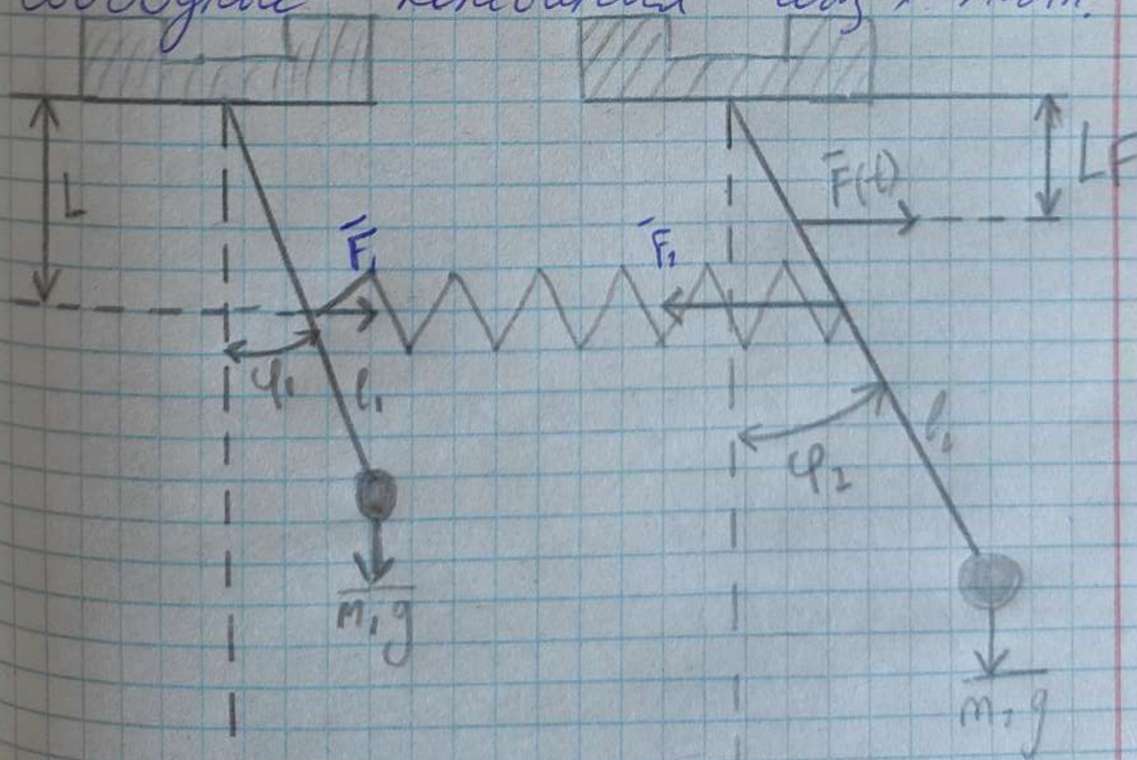
Лабораторная работа № 105.
Связанные маятники.

Цель работы - изучение свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы и внутренней упругой связью. Определение амплитудно - частотных хар-к этой кол-ой системы.

Свободные колебания связ-х маятн.



Уравнение движения 1-го маятника:

$$I_z \varepsilon_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} \qquad (1)$$

I_z - момент инерции отн-но O_z

$\varepsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$ - угловое ускорение

$\sum_{i=1}^{N} M_{iz}$ - сумма моментов внешних сил относ-но Oz, действ-х на данное тело

$$m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 = -m_1 g l_1 \sin\varphi_1 + F_1 L \cos\varphi_1 \qquad (2)$$

$-m_1 g l_1 \sin\varphi_1 = M_{Tz}$ - момент силы тяж-и маятника.

Момент F_1 $M_{1z} = F_1 L \cos\varphi_1$. $F_1 = k\Delta x \Rightarrow$

$\Rightarrow F_1 = kL(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$

$$|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|$$

$\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$

$$m_1 l_1^2 \ddot{\varphi} + m_1 g l_1 \varphi_1 - kL^2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \qquad (3)$$

Аналогично для 2 маятника.

$\varphi_1 = \varphi_1(t)$

$\varphi_2 = \varphi_2(t)$

ω_1 и ω_{11} собственные круговые частоты маятников.

Первое колебание $\varphi_1 = A_1' \cos(\omega t + \alpha_1)$,

$\varphi_2 = A_2' \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$

Второе колебание $\varphi_1 = A_1'' \cos(\omega_{11} t + \alpha_1)$,

$\varphi_2 = A_2'' \cos(\omega_{11} t + \alpha_2)$

$$\varphi_1 = B_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + D_1 \cos(\omega_{11} t + \alpha_2) \quad (4)$$

$$\varphi_2 = B_2 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + D_2 \cos(\omega_{11} t + \alpha_2) \quad (5)$$

$$B_1 = \frac{p_{12}}{p_{11} - \omega_1^2} B_2 \quad , \quad D_1 = \frac{p_{12}}{p_{11} - \omega_{11}^2} D_2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (6) \qquad \omega_{22} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kL^2}{ml^2}} \quad (7)$$

Т.к $p_{11} = p_{22}$; $p_{12} = p_{21}$, то

$$(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + \frac{g}{l}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$$

$$(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + \left(\frac{g}{l} + \frac{2kL^2}{ml^2}\right)(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

Пусть $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\eta = \varphi_1 - \varphi_2$, то

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\psi} + \omega_1^2 \psi = 0 \\ &\ddot{\eta} + \omega_{11}^2 \eta = 0 \end{aligned}\right\}$$ Свободные гармон-ие колебания с частотами ω_1 и ω_{11}

Если маятники одинаковые, то частота первого главного колебания $\cdot w_1$ соответствует синфазным колебаниям маятников

· частота II главного колебания - антифазным (противофазным) колеб-м маятника.

Синфазные колебания могут быть получены, если пружина связыв-ая маятники, не будет при их движении деформ-ся.

$$w_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Противофазные колебания получаем, если в нач. момент времени маятника отклон-я в разные стороны, но на равные углы и им сообщают равные по величине, но проти-ые напр-е нач-е скорость.

$$w_{11} > w_1$$

Если $\frac{2kL^2}{ml^2} \ll \frac{g}{l}$, то $w_{11} \approx w_1$

Практическая часть.

Исследование свободных инфо-х кол-ий.

Ход работы:

1. Измерил расстояние l от оси вращения каждого маятника до центра его диска.

2. Провел действия в соотв-и с пунктом 4-6 порядка р-па на устан-х.

3. Отклонил оба маятника в одну сторону на одинаковый угол (10°) от вертикали и опустил их.

4. Определил период и цикл-ую частоту эксперим-х значений инфазных колебаний по формулам.

$$T_1^э = \frac{t_n}{n}, \quad w_1^э = \frac{2\pi}{T_1^э}$$

t_n - время колебаний

n - число колебаний

$T_1^э = 2c$ $\quad T_1^э = \frac{120}{60} = 2c$

$w_1^э = \frac{2 \cdot 3{,}14}{2} = 3{,}1$ рад/с

5. Нашел частоту синфазных кол-ий по формуле $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

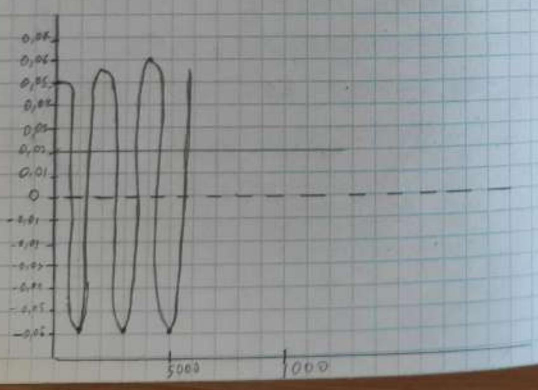
6. Расчитал относит-ю погр-ть определения частоты синфо-х кол-ий.

$$\varepsilon\omega_1 = \frac{|\omega_1 - \omega_1^э|}{\omega_1} \cdot 100\% \; ; \; \omega_1 = \sqrt{\frac{9,8}{0,94}} = 3,2 \text{ рад/с}$$

$$\varepsilon\omega_1 = \frac{|3,1 - 3,1|}{3,1} \cdot 100\% = 3,1\%$$

8. Делаем таблицу.

t_n, с	$T_1^э$, с	$\omega_1^э$, $с^{-1}$	l, м	ω_1, $с^{-1}$	ε, %
120	2	3,1	0,94	3,2	3,1



T=2с

Исследование своб-х синфа-х колебаний

1. Изм $h = 0,51$ м
2. $T_{11}^э = \frac{t_n}{n}$; $\omega_{11}^э = \frac{2\pi}{T_{11}^э}$ $T_{11}^э = \frac{30}{14} = 2,1$ с

$$\omega_{11}^э = \frac{2 \cdot 3,14}{2,1} \approx 2,99 \text{ рад/с}$$

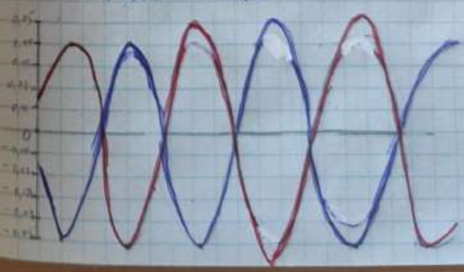
3. Отклонил маятник на равные углы в противоп-е стороны от полож. равнов-я.

t_n, с	$T_{11}^э$, с	$\omega_{11}^э$, $с^{-1}$	l, м	L, м	ω_{11}, $с^{-1}$	ε, %
120	2,1	2,99	0,94	0,51	3,41	1

$$\varepsilon\omega_{11} = \frac{|\omega_{11} - \omega_{11}^э|}{\omega_{11}} \cdot 100\% = \frac{|3,2 - 2,85|}{3,2} \cdot 100\% = 11\%$$

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kL^2}{ml^2}} = 3,48 \text{ рад/с}$$

$$= \sqrt{\frac{9,8}{0,94} + \frac{2k \cdot 0,26}{m \cdot 0,88}}$$



Исследование биений

1. Определении периода одного биения

$$\tau = \frac{t_б}{n} \qquad \tau = \frac{2\pi}{|\omega_{II} - \omega_I|} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{|3{,}48 - 3{,}2|} = 22{,}4$$

2. Среднее значение периода биений

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \tau_i$$

3. $$\varepsilon_\tau = \frac{|\tau - \langle \tau \rangle|}{\tau} \cdot 100\% = \frac{|22{,}4 - 27{,}52|}{22{,}4} \cdot 100\% = 22{,}8\%$$

№ опыта	$t_б$, с	τ_i, с	$\langle \tau \rangle$, с	τ, с	ε_τ, %	τ^0
1	120	26,6		22,4		
2	120	28,6				
3	120	27,9				
4	120	26,6				
5	120	27,9				
			27,52	22,4	22,8	26

~~$\tau = 2\pi$~~

$\tau_1 = \frac{120}{4{,}5}$

$\tau_2 = \frac{120}{4{,}2}$

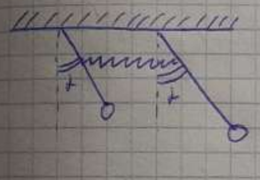
$\tau_3 = \frac{120}{4{,}3}$

$\tau_4 = \frac{120}{4{,}5}$

$\tau_5 = \frac{120}{4{,}3}$

Контрольные вопросы.

1. Синфазными наз-ся колебания, разность фаз которых равна нулю.



2. Антифазными наз-ся колебания, разность фаз которых сост-т π радиан

3. Биениями наз-я такие колебания связанных маятников при которых посредством пружины энергия одного маятника передается другому и наоборот.

4. ω_1 - синфазные колебания

ω_2 - антифазные колебания

5. Период биения не зависит от способа возбуждения колебаний.

Лабораторная работа М104.
Оборотный маятник.

Цель работы - определение ускорения свободного падения g по измерению периода колебаний оборотного маятника.

Теория.

1. Динамика твердого тела, вращ-я вокруг неподв-й оси.

1.1) Моментом силы $\bar{F}$ относит. неподвижн. т. O называют векторное произведение радиуса-вектора $\bar{r}$, проведенного из точки O в точку приложения силы $\bar{F}$, на саму силу.

$$\bar{M} = [\bar{r}, \bar{F}]$$

1.2) Главным моментом внешних сил относ-но т. O называв. вектор равный вект Σ моментов относ-о т. O всех сил действ-х на мех. систему

$$M^{внеш} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_i, \bar{F}_i^{внеш}]$$

1.3) Моментом импульса $\bar{L}$ мат т. относит. неподвижн. т. O называв вект. произв. г. вектора $\bar{r}_i$ матер т. проведенного из т. O на импульс этой мат т $\bar{p}_i = \bar{m}_i \bar{v}_i$

$$\bar{L}_i = [\bar{r}_i, \bar{p}] \quad (4)$$

1.4) Момент инер. мех сист. относит. неподвиж. т O называв $\bar{L}$, равный вект Σ моментов имп относ-но той же т. всех мат точек системы (малых эл-ов твердого тела)

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_i, \bar{p}_i] \quad (5)$$

1,5) Момент импульса твердого тела отн-о ~~точки~~ оси наз-т проекцию на эту ось вектора момента имп тела относит. другой т., выбранной на рассматр-й оси.

1.6) Моментом силы относит. оси называв. проекцию на эту ось вектора момента силы относит. любой т, находящ-я на этой оси.

1.7) Уравнение динамики тела, вращ-ся с угловой скоростью w вокруг неподвижной оси z, имеет вид.

$$\frac{dL}{dt} = M_z^{внеш}$$

1.8) Моментом инерции мех. сист. относ-но оси вращ z называется J_z равную Σ произвед. масс т., всех мат т., обр-х сист. на квадратн. их расстояния r_i от данной оси.

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2 \quad (7)$$

Для тела массой которого непрер-но распред. по его V вычисления момента инерции произв. по формуле:

$$J_z = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$

Если тело в процессе вращения не дефо-ся, то его момент инерции не изм-я и ур-е (6) можно предст-ь след. образом

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{внеш} \quad or \quad J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^{внеш}$$

Момент инерции тела отн-о оси явл-я мерой инерт-и тела при его вращении отн-но этой оски

1.9) Т. Штейнера: момент инерции J_z отн-но произвольной оси z равен сумме момента инерции J_c отн-но парал-й ей оси z_c, проходящей через центр мас с тело и произв-я мон тела m на квадрат рас-я d между этими осями