Задача 4. Фролов Е. ИУ7-35Б

21 вариант.

Плоская гарм-я электр-ая волна распр-ся в вакууме в полож-ом напр-ии оси Oz. Вектор плотности потока электр-ой энергии $\bar{S}$ имеет вид $\bar{S}(z,t) = S_m(\omega t - kz)$. Считая волновое число k и ампл-ое значение S_m вектора $\bar{S}$ известными и действ-ми величинами, что допустимо для однород-ой изотропной среды без эффектов поглощения.

Дано:

$S_m = 46{,}2$ [Вт/см²]

$k = 0{,}44$ [м⁻¹]

Найти - ?

E - ?

H - ?

ω - ?

$\langle \bar{S} \rangle$ - ?

$\langle S \rangle$ - ?

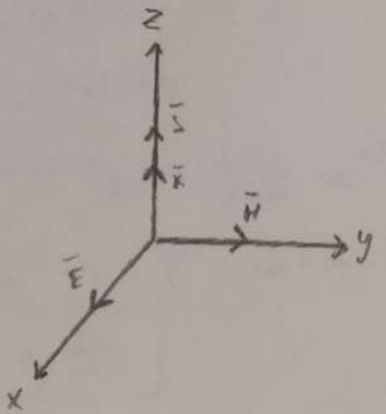
$\bar{j}_{см}$ - ?

$\langle |j_{см}| \rangle$ - ?

$k_{эф}$ - ?

Решение:

По условию волна расп-ся по оси Oz



В комплексной форме, векторы напряж-и эл. поля и магн. поля плоской гар-ой электромагн-ой волны будут иметь вид:

$$\begin{cases} \bar{E}(\bar{r}, t) = E_m \cdot e^{i(\omega t - \bar{k}\bar{r})} \\ \bar{H}(\bar{r}, t) = H_m \cdot e^{i(\omega t - \bar{k}\bar{r})} \end{cases} \quad (1)$$

Скалярное произв-е волнового вектора $\bar{k}$ и радиус-вектора $\bar{r}$ в коорд-ой форме:

По условию, что векторы вдоль Oz : $\bar{k}\bar{r} = \cancel{k_x x} + \cancel{k_y y} + k_z z = k_z z = kz \Rightarrow \boxed{\bar{k}\bar{r} = kz}$ - подставим это в (1)

Из уравнения Максвелла в дифф. форме:

$$\operatorname{rot}\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (2)$$

Тогда: $\operatorname{rot} E = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$ (из нашего условия вектор вдоль Ox) $= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial z}\cdot\bar{j} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\cdot\bar{k} = \frac{\partial}{\partial z}\left(E_m\cdot e^{i(\omega t - kz)}\cdot\bar{j}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(E_m e^{i(\omega t - kz)}\cdot\bar{k}\right) =$$

$$= -kE_m e^{i(\omega t - kz)}\cdot\bar{j}$$

Для $\bar{H}$: $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial t}\cdot\bar{i} + \frac{\partial H_y}{\partial t}\cdot\bar{j} + \frac{\partial H_z}{\partial t}\cdot\bar{k} = \frac{\partial H_y}{\partial t}\cdot j$

Учитывая ур-е (2):

$$-kE_m\cdot e^{i(\omega t - kz)}\cdot\bar{j} = -\mu_0\cdot\frac{\partial H}{\partial t}\,\bar{j}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{k}{\mu_0}E_m\cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

$$H = \int\frac{k}{\mu_0}E_m\cdot e^{i(\omega t - kz)}\,dt = \frac{kE_m}{\mu_0\omega}\cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

Связь k и ω: $k = \frac{\omega}{c} = \omega = kc$

$$\boxed{H_m = \frac{k}{\mu_0 kc}\cdot E_m = \frac{E_m}{\mu_0 c}}$$

• Вектор Пойтинга: $\bar{S} = \bar{E}\times\bar{H}$

По условию $\bar{S}(z,t) = S_m\cdot\cos^2(\omega t - kz)$

$$\bar{S} = \bar{E}\times\bar{H} = E_m\cos(\omega t - kz)\cdot H_m\cos(\omega t - kz) = \frac{E_m^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)$$

$$S_m\cos^2(\cancel{k}ct - kz) = \frac{E_m^2}{\mu_0 c}\cdot\cos^2(\cancel{\omega}t - kz)$$

$$S_m = \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \Rightarrow E_m = \sqrt{S_m\mu_0 c} \Rightarrow \boxed{E = \sqrt{\mu_0 c S_m}\cdot\cos(kct - kz)}$$

$$E(z,t) = \sqrt{46{,}2\cdot 3\cdot 10^8\cdot 1{,}26\cdot 10^{-6}}\cdot\cos(3\cdot 10^8\cdot 0{,}44\cdot t - 0{,}44z)\,\bar{i} =$$

$$= \underline{132\cos(1{,}32\cdot 10^8 t - 0{,}44z)\,\bar{i}}$$

$$H = H_m \cos(kct - kz) = \frac{E_m}{\mu_0 c} \cos(kct - kz) = \frac{\sqrt{S_m \cdot \mu_0 c}}{\mu_0 c} \cos(kct - kz) =$$

$$= \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}} \cos(kct - kz)\,\bar{j}$$

$$\bar{H} = \sqrt{\frac{46,2}{3 \cdot 10^8 \cdot 1,26 \cdot 10^{-6}}} \cos(1,32 \cdot 10^8 t - 0,44z) = 0,34 \cos(1,32 \cdot 10^8 t - 0,44z)\,\bar{j}$$

• Объемная плотность энергии эл. волны в вакууме.

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} = \qquad w = w_E + w_H$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \mu_0 c S_m \cos^2(kct - kz) + \frac{\mu_0}{2} \frac{S_m}{\mu_0 c} \cdot \cos^2(kct - kz) = \frac{S_m}{c} \cdot \cos^2(kct - kz)$$

$$w = \frac{46,2}{3 \cdot 10^8} \cos^2(1,32 \cdot 10^8 t - 0,44z) = 1,54 \cdot 10^{-7} \cos^2(1,32 \cdot 10^8 t - 0,44z)$$

$$\boxed{w = 1,54 \cdot 10^{-7} \cos^2(1,32 \cdot 10^8 t - 0,44z)\ \frac{Дж}{м^3}} \quad (3)$$

• Среднее по времени значение вектора Пойнтинга:

$$\langle \bar{S} \rangle = \langle S_z \rangle \cdot \bar{k}$$

$$\langle \bar{S}_z \rangle = S_m \langle \cos^2(wt - kz) \rangle$$

$$\langle \cos^2(wt - kz) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(wt - kz)\, dt = \frac{1}{2T} \int_0^T 1 + \cos(2(wt - kz))\, dt =$$

$$= \frac{1}{2T} \left(t + \frac{\sin(2(wt - kz))}{2w} \right) \Big|_0^T = \frac{1}{2T} \left(T - \frac{1}{2w} (\sin(2wT - 2kz) - \right.$$

$$\left. - \sin(2(0 - kz)) \right) = \frac{1}{2} \quad (т.к\ wT = 2\pi)$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \cdot S_m = \frac{1}{2} \cdot 46,2 = 23,1\ \frac{Дж}{м^2 \cdot с}$$

$\langle \bar{S} \rangle = 23,1 \cdot k\ \frac{Дж}{м^2 \cdot с}$, где $\bar{k}$ един-ый вектор вдоль Oz

$$\boxed{\langle \bar{S} \rangle = 23,1\ \frac{Дж}{м^2 \cdot с}}$$

• Среднее значение плотности потока энергии, перен-ой волной:

$$\langle S \rangle = \langle S_z \rangle = 23,1\ \frac{Дж}{м^2 \cdot с}$$

• Вектор плотности тока смещения.

$$j_{см} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = [D \cdot \varepsilon_0 \bar{E}] = \frac{\partial(\varepsilon_0 \bar{E})}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \cdot \bar{i} = \varepsilon_0 \frac{\partial(E_0 \cos(wt - kz))}{\partial t} \bar{i} =$$

$$= -\varepsilon_0 w E_0 \sin(wt - kz)\bar{i} = -8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}32 \cdot 10^{8} \cdot 132 \cdot \sin(1{,}32 \cdot 10^{8} t - 0{,}44z)$$

$$= -0{,}154 \sin(1{,}32 \cdot 10^{8} t - 0{,}44z)\bar{i}$$

• Среднее значение модуля плотности тока смещения

$$\langle |j_{см}| \rangle = \frac{1}{T} k \sqrt{S_m \varepsilon_0 c} \int_0^T |\sin(wt - kz)| \, dt \quad \text{при } w = kc$$

$$\int_0^T |\sin(kct - kz)| dt = \int_0^T |\sin(kct)| \, dt = 2 \left| \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(kct) \, dt \right| = 2 \cdot \left| -\frac{\cos(wt)}{w} \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right| =$$

$$\left| \frac{T}{2} = \frac{\pi}{kc} = \frac{\pi}{w} \right|$$

$$= \left| \frac{-2\cos(kct)}{kc} \right| = \frac{4}{kc} = \frac{4}{w}$$

Тогда $\langle |j_{см}| \rangle = \frac{1}{T} \frac{4}{w} k \sqrt{S_m \cdot \varepsilon_0 c} = \frac{w}{2\pi} \cdot \frac{4}{w} \cdot k \sqrt{\varepsilon_0 S_m \cdot c} = \frac{2k}{\pi} \sqrt{\varepsilon_0 S_m c} =$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}44}{3{,}14} \cdot \sqrt{3 \cdot 10^{8} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 46{,}2} = 0{,}09 \frac{A}{m^2}$$

• Модуль импульса $k_{ед}$ электр-ой волны.

Соотношение между плотн-ю потока энергии S и импульсом в ед. объема эл-ой волны:

$$\bar{k}_{ед} = \frac{\bar{S}}{c^2}$$

$$k_{ед}(z,t) = \frac{w(z,t)}{c}$$

Учитывая (3) $\Rightarrow k_{ед}(z,t) = \frac{S_m}{c^2} \cos^2(kct - kz) =$

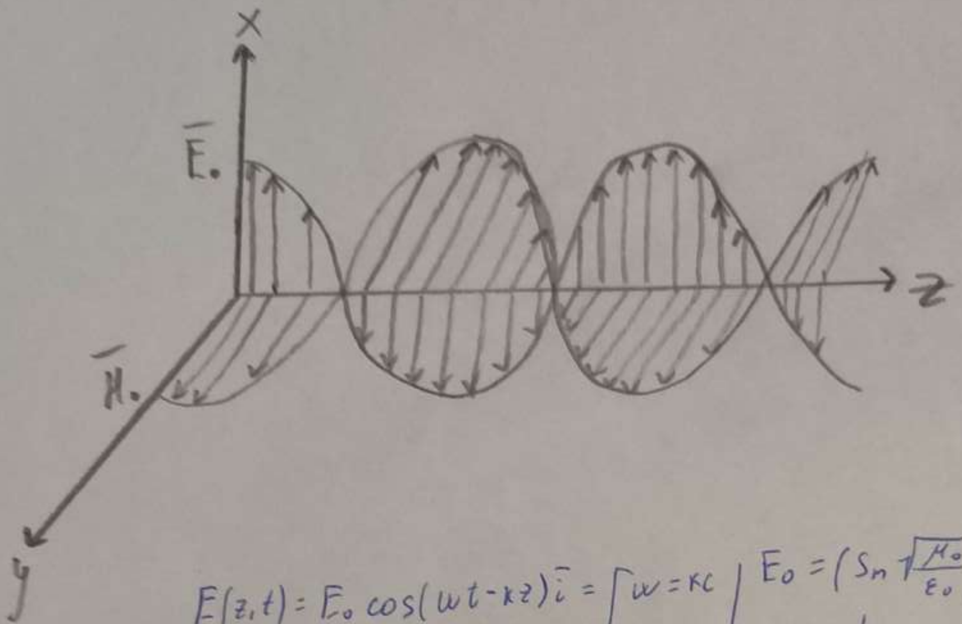
$$= \frac{46{,}2}{3 \cdot 10^{8}} \cdot \cos^2(0{,}44 \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot t - 0{,}44z) = \underline{5{,}13 \cdot 10^{-16} \cos^2(1{,}32 \cdot 10^{8} t - 0{,}44z)}$$

$$\boxed{k_{ед}(z,t) = 5{,}13 \cdot 10^{-16} \cos^2(1{,}32 \cdot 10^{8} t - 0{,}44z)}$$

• Волновое уравнение для компонента.

E_z и H_y

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad c\text{-скорость света.}$$



$$E(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz)\bar{i} = \left[\omega = kc \;\middle|\; \begin{array}{l} E_0 = \left(S_m\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\right) \\ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \\ E_0 = \sqrt{S_m\mu_0 c} \end{array}\right] =$$

$$= \sqrt{S_m\mu_0 c}\,\cos(kct - kz)\bar{i}$$

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} = -kc\sqrt{S_m\mu_0 c}\,\sin(kct - kz)\bar{i}$$

$$\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2} = -k^2c^2\sqrt{S_m\mu_0 c}\,\cos(kct - kz)\bar{i}$$

$$\frac{\partial^2\bar{H}}{\partial t^2} = -k^2c^2\sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\,\cos(kct - kz)\bar{j}$$

$$\frac{\partial^2\bar{H}}{\partial y^2} = -k^2\sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\,\cos(kct - kz)\bar{j}$$

Для мгновенной фот-ии волны возьмем момент $t=0$.

$$\bar{E}(x,0) = \sqrt{\mu_0 S_m c}\,\cos(kz)\bar{i}$$

$$\bar{H}(x,0) = \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\,\cos(kz)\bar{j}$$

Ответ: $E = 132\cos(1{,}32\cdot10^8 t - 0{,}44z)\bar{i}$

$H = 0{,}34\cos(1{,}32\cdot10^8 t - 0{,}44z)\bar{j}$

$w = 1{,}54\cdot10^{-7}\cos^2(1{,}32\cdot10^8 t - 0{,}44z)\ \frac{Дж}{м^3}$

$\langle\bar{S}\rangle = 23{,}1\ \frac{Дж}{м^2\cdot с}$

$\langle S\rangle = 23{,}1\ \frac{Дж}{м^2\cdot с}$

$\bar{j}_{см} = -0{,}154\sin(1{,}32\cdot10^8 t - 0{,}44z)\bar{i}$

$\langle|j_{см}|\rangle = 0{,}09\ \frac{А}{м^2}$

$k_{eg} = 5{,}13\cdot10^{-16}\cos^2(1{,}32\cdot10^8 t - 0{,}44z)$