

Задача №2.

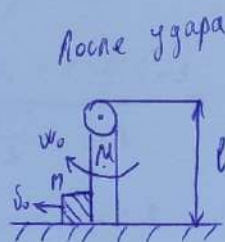
Однородный жесткий стержень длиной $l = 0,5 \text{ м}$ и массой $M = 0,5 \text{ кг}$ может свободно без трения вращаться вокруг горизонтальной оси O . При прохождении стержнем вертикального положения с угловой скоростью ω_0 его свободный конец ударяет по маленькому кубiku массой $m = 0,1 \text{ кг}$, который после удара движется в плоскости рисунка.

Дано:

$l = 0,5 \text{ м}$
 $M = 0,5 \text{ кг}$
 $m = 0,1 \text{ кг}$
 $\omega_0 = 1,5 \omega_{\text{отн}}$
 $v_0 = \omega_0 l$
 НУУ

$\omega_{\text{отн}} = ?$
 $\omega_x = ?$
 $\Delta E = ?$

Решение:



1. Найдем $\omega_{\text{отн}}$

По закону сохранения момента импульса (при $\omega_0 = \omega_{\text{отн}}$)

$$L = \varepsilon \dot{L}_i \Rightarrow I \omega_{\text{отн}} = m \delta l + I \omega_{\text{отн}}' \quad (1)$$

где δ - см-ть бруска после удара.

$$\delta = \omega_{\text{отн}} l \quad (2)$$

По закону сохр-я энергии после удара для ($\omega_0 = \omega_{\text{отн}}$)

(при полном обороте)

$$\frac{I (\omega_{\text{отн}}')^2}{2} = m g l \quad (3); \text{ Выразим } \omega_{\text{отн}}' \text{ с учетом (2)}$$

$$\omega_{\text{отн}}' = \sqrt{\frac{2 m g l}{I}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2 m g l}{M l^2}} = \sqrt{\frac{6 g}{l}} \quad (5)$$

По теореме Штейнера

$$I = I_0 + m d^2 \Rightarrow I = \frac{M l^2}{12} + M \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M l^2 \quad (4)$$

Составим систему из (1), (2), (3)

$$(1) \begin{cases} I \omega_{\text{отн}} = m \delta l + I \omega_{\text{отн}}' \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} I \frac{(\omega_{\text{отн}}')^2}{2} = m g l \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \delta = \omega_{\text{отн}} l \end{cases}$$

$$I \omega_{\text{отн}} = m \omega_{\text{отн}} l^2 + I \omega_{\text{отн}}'$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{отн}} (I - m l^2) = I \sqrt{\frac{6 g}{l}}$$

$$\omega_{\text{отн}} \left(\frac{M l^2}{3} - m l^2 \right) = \frac{M l^2}{3} \sqrt{\frac{6 g}{l}}$$

$$\omega_{\text{отн}} = \frac{\frac{M l^2}{3} \cdot \sqrt{\frac{6 g}{l}} \cdot 3}{l^2 \left(\frac{M}{3} - m \right) \cdot 3} = \frac{M \sqrt{\frac{6 g}{l}}}{M - 3 m} = \frac{0,5 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot 9,8}{0,5}}}{0,5 - 3 \cdot 0,1} = 27,1 \text{ рад/с}$$

② Найдём W_k

По ЗСЭ после удара

$$\frac{I(\omega_0')^2}{2} = Mgl + \frac{I W_k^2}{2} \quad (1)$$

По закону сохр-я момента импульса

$$I\omega_0 = m\dot{\phi}_0 l + I\omega_0' \quad (2), \text{ где } \dot{\phi}_0 = \omega_0 l$$

Выразим из (1) ω_0' с учетом т. Штейнера

$$\omega_0' = \frac{I\omega_0 - m\omega_0 l^2}{I} = \frac{\frac{Mc^2}{3} \cdot \omega_0 - m\omega_0 l^2}{\frac{Mc^2}{3}} = \frac{\omega_0 (M - 3m)}{M} \quad (3)$$

Из (1) выразим W_k , учитывая (3)

$$\frac{I W_k^2}{2} = \frac{I(\omega_0')^2}{2} - Mgl \Rightarrow W_k = \frac{2}{I} \left(\frac{I(\omega_0')^2}{2} - Mgl \right)$$

$$W_k = (\omega_0')^2 - \frac{2Mgl}{I} = (\omega_0')^2 - \frac{2Mgl \cdot 3}{Mc^2} = (\omega_0')^2 - \frac{6g}{l} = \frac{\omega_0^2 (M - 3m)^2}{M^2} - \frac{6g}{l}$$

$$W_k = \sqrt{\frac{2,25 \omega_0^2 (M - 3m)^2}{M^2} - \frac{6g}{l}} = \sqrt{\frac{2,25 \cdot 12,1^2 (0,5 - 3 \cdot 0,1)^2}{0,5^2} - \frac{6 \cdot 9,8}{0,5}} = 12,1 \text{ рад/с}$$

③ Найдём ΔE

1. По ЗСЭ в момент удара (НУУ)

$$\frac{I\omega_0^2}{2} + E_{п1} = \frac{I(\omega_0')^2}{2} + \Delta E + E_{п2} + \frac{m\dot{\phi}_0^2}{2} \quad (1)$$

$E_{п1} = E_{п2}$ т.к. положение стержня не изменилось.

Выразим ΔE

$$\Delta E = \frac{I\omega_0^2}{2} - \frac{I(\omega_0')^2}{2} - \frac{m\dot{\phi}_0^2}{2} \quad (2) \quad \text{Учитывая т. Штейнера}$$

$$\Delta E = \frac{\frac{Mc^2}{3} \omega_0^2}{2} - \frac{\frac{Mc^2}{3} \left(\frac{\omega_0^2 (M - 3m)^2}{M^2} \right)}{2} - \frac{m\omega_0^2 l^2}{2} = \frac{Mc^2 \omega_0^2}{6} - \frac{c^2 \omega_0^2 (M - 3m)^2}{6M} - \frac{m\omega_0^2 l^2}{2}$$

$$= \frac{M^2 c^2 (1,5)^2 (\omega_0 m)^2 - c^2 (1,5)^2 (\omega_0 m)^2 (M - 3m)^2 - m (1,5)^2 (\omega_0 m)^2 l^2 \cdot 3M}{6M}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \frac{(1,5)^2 \ell^2 (W_0 m)^2 (M^2 - M^2 + 6Mm - 9m - 3Mm)}{6M} = \\
 &= \frac{(1,5)^2 \ell^2 (W_0 m)^2 (3Mm - 9m)}{6M} = \frac{1,5^2 \ell^2 (W_0 m)^2 \cdot 3m (M - 3m)}{6M} = \\
 &= \frac{2,25 \cdot (0,5)^2 \cdot (27,1)^2 \cdot 3 \cdot 0,1 (0,5 - 3 \cdot 0,1)}{0,5 \cdot 6} = 8,3 \text{ Dm}
 \end{aligned}$$

Dados: $W_0 m = 27,1 \text{ (pag/c)}$
 $W_x = 12,1 \text{ (pag/c)}$
 $\Delta E = 8,3 \text{ (Dsc)}$