Лабораторная работа М104.
Оборотный маятник.

Цель работы - определение ускорения свободного падения g по измерению периода колебаний оборотного маятника.

Теория.

1. Динамика твердого тела, вращ-я вокруг неподв-й оси.

1.1) Моментом силы $\bar{F}$ относит. неподвижн. т. O называют векторное произведение радиуса-вектора $\bar{r}$, проведенного из точки O в точку приложения силы $\bar{F}$, на саму силу.

$$\bar{M} = [\bar{r}, \bar{F}]$$

1.2) Главным моментом внешних сил относ-но т. O назыв. вектор равный вект Σ моментов относ-о т. O всех сил действ-х на мех. систему.

$$M^{внеш} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_i, \bar{F}_i^{внеш}]$$

1.3) Моментом импульса $\bar{L}$ мат т. относит. неподвижн. т. О назыв. вект. произв. г. вектора $\bar{r}_i$ матер т. проведенного из т. О на импульс этой мат т $\bar{p}_i = \bar{m}_i \bar{v}_i$

$$\bar{L}_i = [\bar{r}_i, \bar{p}] \quad (4)$$

1.4) Момент инер. мех сист. относит. неподвиж т О назыв $\bar{L}$, равный вект Σ моментов имп относ-но той же т. всех мат точек системы (малых эл-ов твердого тела)

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_i ; \bar{p}_i] \quad (5)$$

1,5) Момент импульса твердого тела отн-о ~~точки~~ оси наз-т проекцию на эту ось вектора момента имп. тела относит. другой т., выбранной на рассматр-й оси.

1.6) Моментом силы относит. оси назыв. проекцию на эту ось вектора момента силы относит. любой т, находящ-я на этой оси.

1.7) Уравнение динамики тела, вращ-ся с угловой скоростью w вокруг неподвижной оси z, имеет вид.

$$\frac{dL}{dt} = M_z^{внеш}$$

1.8) Моментом инерции мех сист относ-но оси вращ z назыв J_z равную Σ произвед. масс т., всех там т., обр-х сист. на квадратн. их расстояния r_i от данной оси.

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{iz}^2 \quad (7)$$

Для тела массой которого непрер-но распред. по его V вычисления момента инерции произв. по формуле.

$$J_z = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$

Если тело в процессе вращения не дефо-ся, то его момент инерции не изм-я и ур-е (6) можно предст-ь след. образом

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{внеш} \quad or \quad J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^{внеш}$$

Момен...
оси я...
тела ...
по э...

1.9) Т...
инерции...
оси z...
инерции...
ей оси...
центр...
мом т...
J мет...

Гармони...
величин...

Физ-я в...
колебания...
если у...

Момент инерции тела отн-о оси явл-я мерой инерт-и тела при его вращении отн-но этой точки.

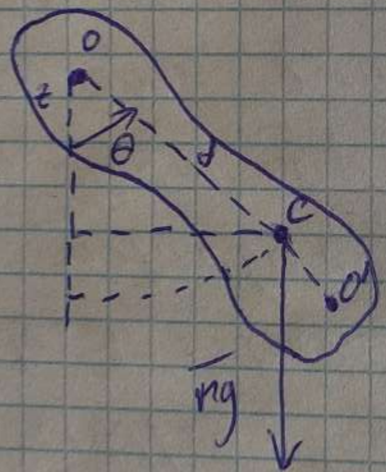
1.9) Т. Штейнера: момент инерции J_z отн-но произвольной оси z равен сумме момента инерции J_c отн-но парал-й ей оси z_c, проходящей через центр мас с тело и произ-я мат тела m на квадрат рас-я d между этими осями

Гармоническими наз-т пер-кие колебания величины $\xi(t)$, если $\xi(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

Физ-я величина $\xi(t)$ совершает гар-е колебания в том и только случае, если удов-м ур-ию.

$$a\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\xi = 0, \quad \text{где } \frac{b}{a} = \omega_0^2$$

Ф-ий маятник – твердое тело, может вращаться под действием своей силы тя-и mg вокруг неподв-й гор-ой оси качания маятника OZ, не прох-й через центр масс тела C.



$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,l \sin\theta$$

$l = |OC|$ – от ц. масс маятника до оси кач-я

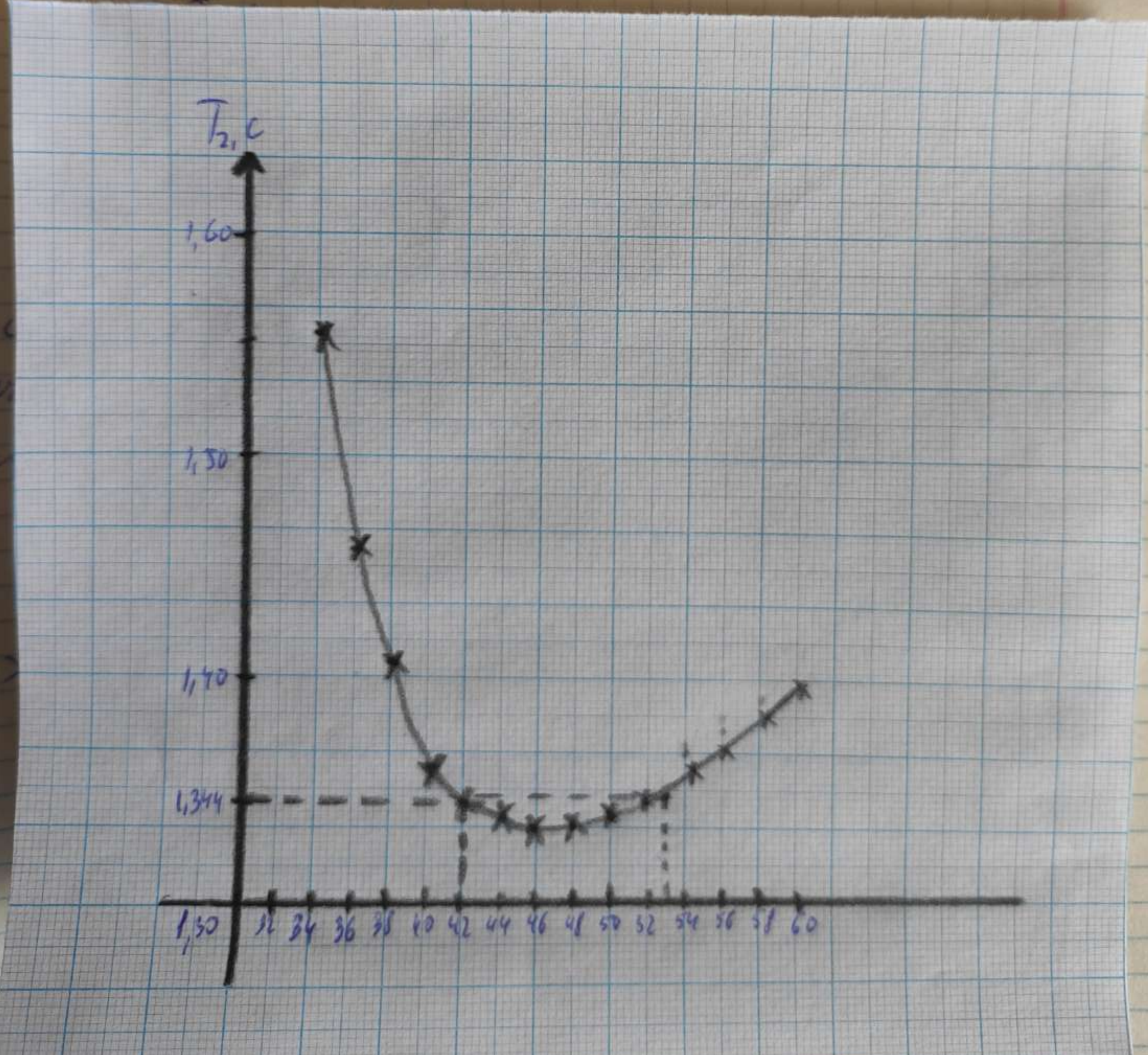
J – момент инерции

Точка O', проход-я чер-з точку подвеса O и центр масс C – центр качания физ-го маятника.

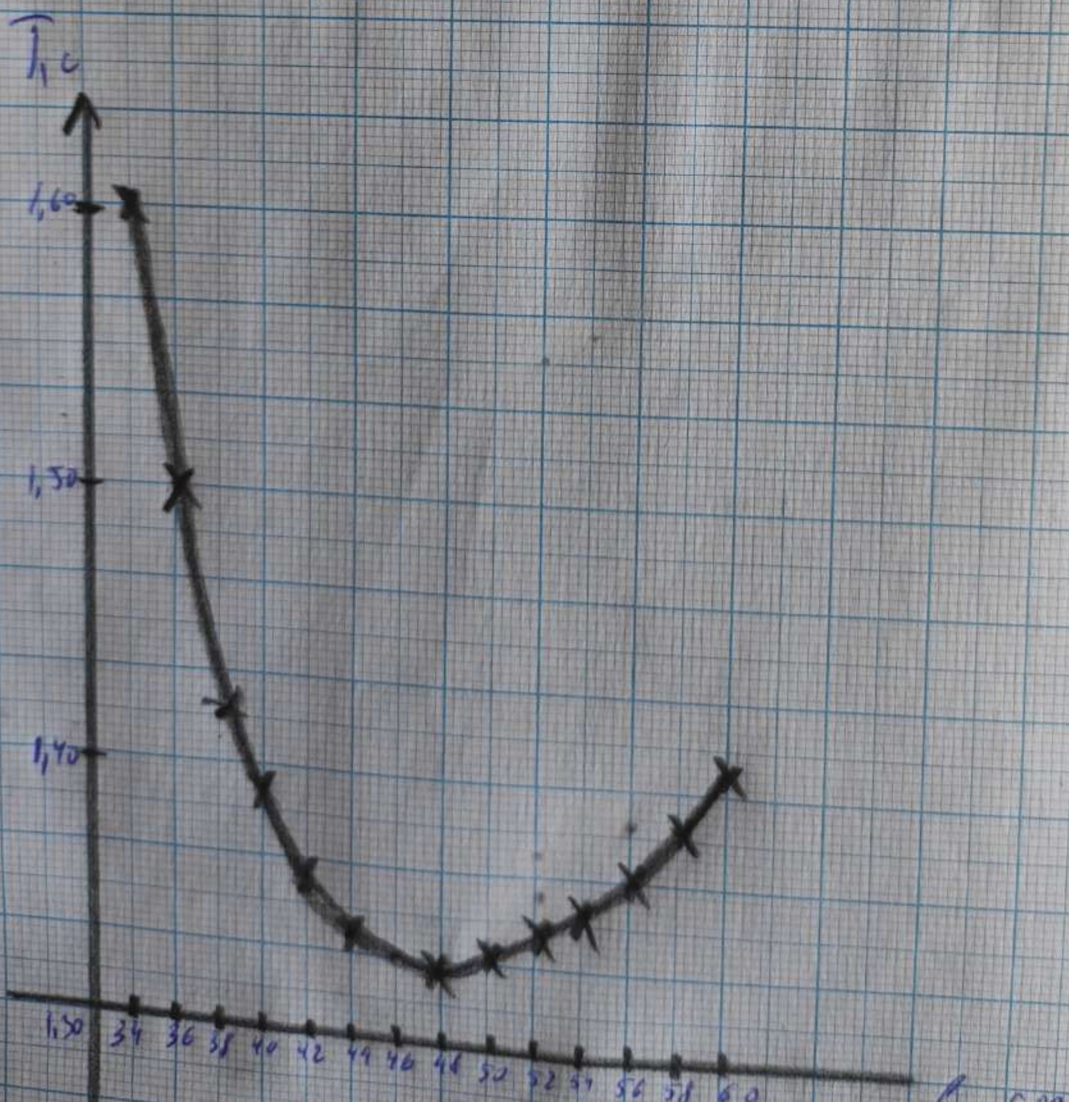
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}$$

Экспериментальная часть.

l, см	60	58	56	54	52	50	48	46	44	42	40	38	36	34
T_2, с	1,396	1,380	1,365	1,353	1,342	1,334	1,328	1,328	1,332	1,344	1,364	1,408	1,466	1,557



Длина l, м	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
Период T, с	1,607	1,500	1,425	1,382	1,353	1,338	1,330	1,329	1,334	1,356	1,358	1,371	1,381	1,407



$l_{пр} = l_a \pm 3$ см $\quad$ $l_a = 42$ см $\quad$ $52 < l_б < 54$

$l_{пр} = 42 \pm 3$ см

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l_{пр}$$

$$g = \left(\frac{2 \cdot 3,14}{1,344}\right)^2 \cdot 42 \approx 9,14 \text{ м/с}^2$$

$$\Delta g = g\sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_{пр}}{l_{пр}}\right)^2} = 9,14\sqrt{\left(\frac{0,016}{1,344}\right)^2 + \left(\frac{2}{42}\right)^2} \approx$$

$$\approx 0,4501 \text{ м/с}^2$$

$$g = 9,14 \pm 0,45 \text{ м/с}^2 \qquad \approx 9,81 \text{ м/с}^2$$

Контрольные вопросы.

1. Ур-е динамики тела вращ. с углов. скор-ю ω вокруг неподв-й оси z:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{внеш}$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega$$

2. Гарм-ие колеб-я период-е, если

$$\xi(t) = \begin{cases} A\sin(\omega_0 t + \varphi_{01}) \\ A\cos(\omega_0 t + \varphi_{02}) \end{cases} \qquad \varphi_{02} = \varphi_{01} - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2\,\xi = 0$$

3. Приведенная длина $l_{пр}$ физ маятника — длина мат маят. имеющая такой же период колеб-й, что и физ маят.

Дано

$M_1 = 4m$

$R_1 = 4R$

$r_2 = R$

$m_2 = 2m$

T - ?

$l_{пр}$?

Вывод. стержень - физ-маятник

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$, $d = \frac{l}{2}$ - рас-е от центра масс до оси вращ.

По т. Штейнера:

$$I = I_0 + Md^2, \text{ где } I_0 - \frac{Ml^2}{12},$$

$$d = \frac{4R}{2} = 2R$$

$$I_0 = \frac{Ml^2}{12} = \frac{4m \cdot 16R^2}{12}$$

$$I = \frac{16mR^2}{3} + 16mR^2 = \frac{16mR^2}{3} + \frac{3 \cdot 16mR^2}{3} = \frac{64}{3}mR^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{64\pi R^2}{3\cdot 4\pi\cdot 2Rg}} = 2\pi\sqrt{\frac{8R}{3g}}\ ; \quad l_{пр} = \frac{8}{3}R$$

4. Цент качания О обладает тем свой-ом, что если ось провести ч-з О, частота колеб-я маят. не изм-я, а центр качания будет в тчк. О т.е. О и О, взаимозаменяемы.