4 задача.

Для струны длиной l, натянутой с силой F и закрепленной, как указано на рисунке, необходимо:

1. Определить частоту колебаний и длину волны i-ой гармоники стоячей волны.

2. для этой гармоники нарисовать картинку:

а) стоячей волны амплитуды смещений точек струны.

б) распределения скоростей точек струны для момента времени $t = 0{,}25T$.

Дано:

Материал -

$L = 0{,}7$ м

$d = 0{,}1$ мм $= 1 \cdot 10^{-4}$ м

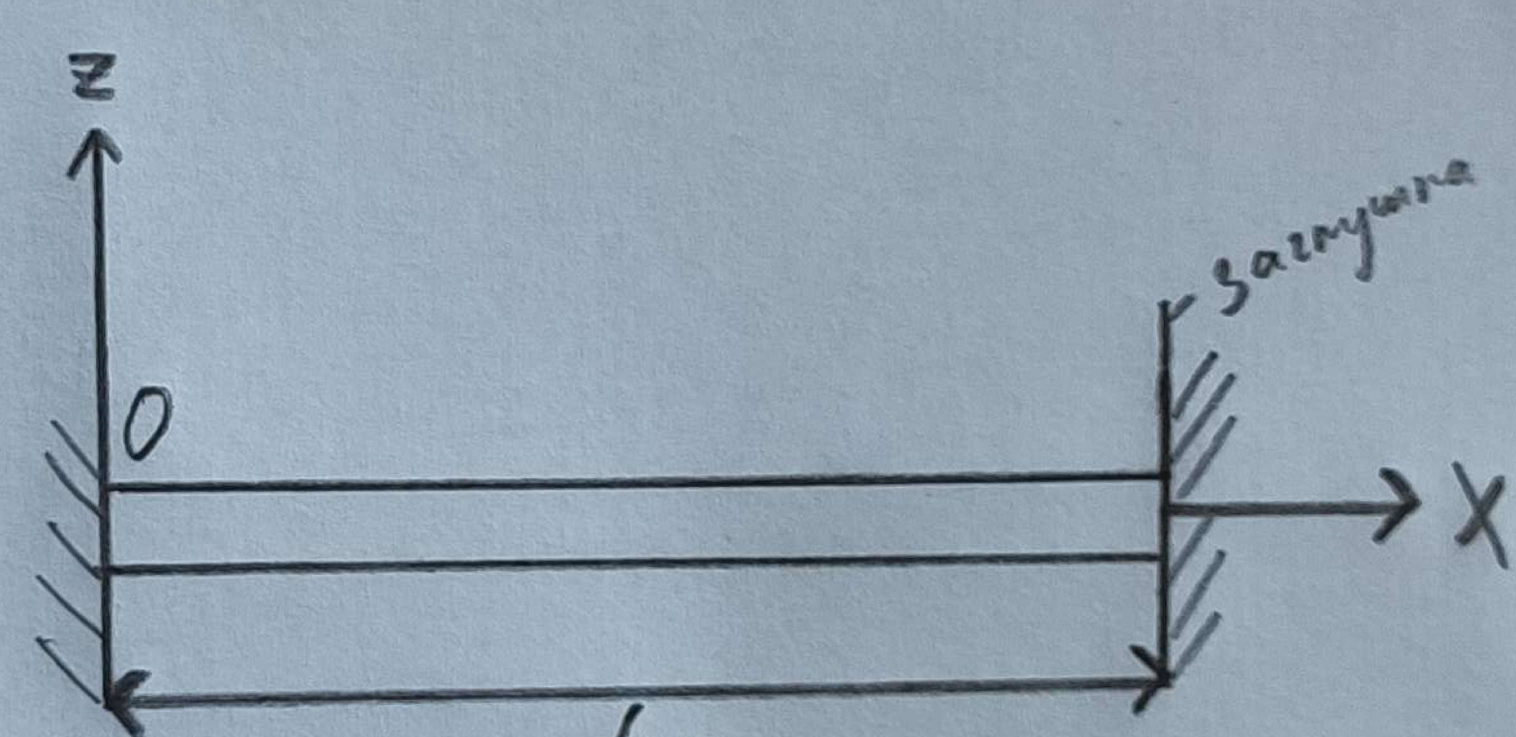
$\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3

$F = 2$ Н

$i = 2$

ω_n - ?

λ_n - ?



Уравнение плоской монохроматической гарм-ой волны вдоль OX имеет вид:

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\ [м^{-1}] \text{ — волновое число}$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}\ [м]$$

По принципу суперпозиций, возникает наложение волн друг на друга, без возмущений. При наложении встречных волн с один-ми A и ω возникают колебания — стоячая волна. После отражения от преград.

$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ - первая волна (1) $\quad \xi_2 = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$ - отраж-я (2)

Разность фаз не будет зависеть от времени $\Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$ - когерентные

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1) + A\cos(\omega t + kx + \varphi_2) = A(\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$$

$$+ \cos(\omega t + \varphi_2)) = A\left(2\cos\left(\frac{2\cdot\omega t + \varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{2kx + \varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\right) =$$

$$= 2A\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Начало отсчета X : $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$; Начало отсчета времени $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$

Уравнение суммы волн: $\xi = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$ - стоячей волны.

Если поставим заглушку, то возникнут колебания. Тогда фаза отраж-й волны будет смещена на Π.

$$\xi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \qquad \xi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx - 2kl - \Pi)$$

При их наложении: $\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx - 2kl - \Pi) =$

$$= 2A\cos\left(kl - kx - \frac{\Pi}{2}\right)\cos\left(\omega t - kl - \frac{\Pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2A\sin(kl - kx)\cdot\sin(\omega t - kl)$$

При $x = 0$, $A_{сп} = 2A\sin(kl)$

Если $\sin(kl) = 0 \Leftrightarrow kl = \pm\Pi n$ (при $n = 1, 2, 3.$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{\Pi}{l} n$ -волновое число или $\boxed{\frac{\Pi}{l} n = \frac{2\Pi}{\lambda}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{2l}{n}}$$

Частоты колебаний определим: $\omega = k\upsilon$

При $\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\rho_л}}$; $\rho_л = \rho S$; $S = \frac{\Pi d^2}{4}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\Pi \cdot n}{l} \cdot \sqrt{\frac{F 4}{\Pi d^2 \rho}} = \boxed{\frac{2n}{ld}\sqrt{\frac{\Pi \cdot F}{\rho}} = \omega_n}$$

При $n = 1 \Rightarrow \omega_n = \omega_1 = \frac{2}{l\delta}\sqrt{\frac{n \cdot F}{\rho}}$ – основная частота струн.

При $n > 1$ – гармоники или обертоны

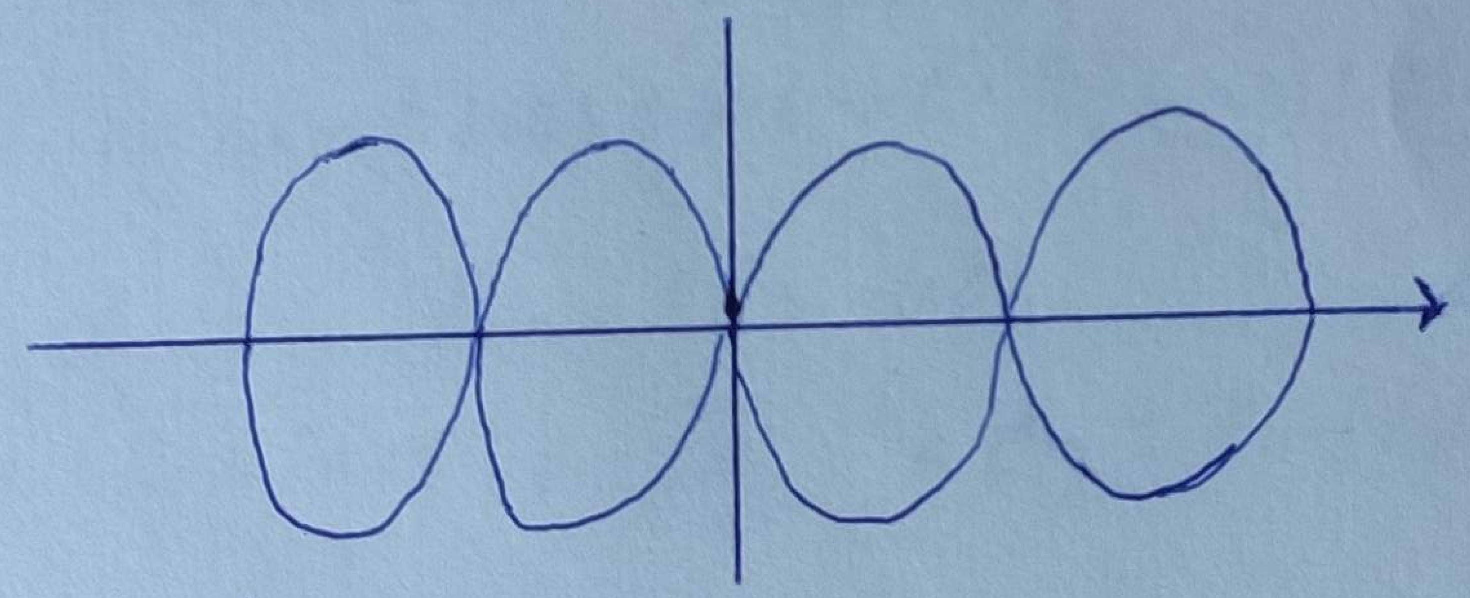
При $i = 2 \Rightarrow n = 3$

$$\omega_n = \omega_3 = \frac{2 \cdot 3}{0{,}7 \cdot 10^{-4}}\sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 2}{7{,}8 \cdot 10^{3}}} = \frac{2000\sqrt{12246}}{91} \approx 24321{,}24 \ c^{-1}$$

Длина волны 3-й гармоники стоячей волны:

$$\lambda_4 = \frac{2l}{n} = \frac{2 \cdot 0{,}7}{4} = 0{,}35 \ м$$

Качественная картинка амплитуд смещений:



(рисунок 1)

Ответ: 1. $\omega_n = \frac{2n}{l\delta}\sqrt{\frac{\pi F}{\rho}}$

2. При $n=1$ $\omega = \frac{2}{l\delta}\sqrt{\frac{\pi F}{\rho}}$ – основ. часть

При $n>1$ – отн-ся к обертонам

3. $\omega_9 = 24321 \ c^{-1}$

$\lambda_4 = 35 \cdot 10^{-2}$ м

4. рисунок 1