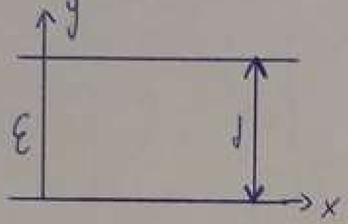
Задача 1.3. Фролов Евгений ИУ1-35Б.

21-Вариант.

Плоский диэлек-й конденсатор заряжен до разности потенциалов U и расстояние между обкладками равно d. Диэл-я прон-ть меняется между обкладками по закону $\varepsilon = f(y)$



$$\varepsilon = \frac{d_0^n + d}{d_0^n - y^n} \qquad n = 0,5$$

$$\frac{d_0}{d} = \frac{3}{1} \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d} - \sqrt{y}}$$

Построить графики распред-я модулей в-в электр-го поля E, поляриз-ии P и элект-го смещ-я D между обкладками конден-ра. Опреде-лить пов-ую плотность связ-х зарядов на нижней и верхней поверх-ях диэлек-а, распредел-е объем-й плотности связанных зарядов $\rho'(y)$, напр-ть max E и емкость конд-ра на ед. площади.

Дано:

U - разность потенц-в

d

$\varepsilon = f(y)$

$f(y) = \frac{d_0^n}{d_0^n - y^n}$

$d_0 = 3d$; $n = 0,5$

Найти:

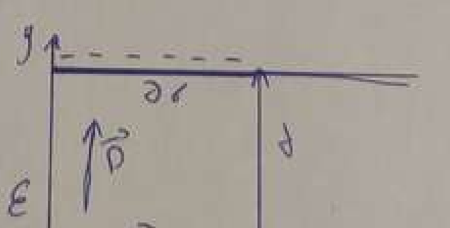
$E(y)$ - ? $\quad \sigma_в$ - ?

$D(y)$ - ? $\quad \sigma_н$ - ?

$P(y)$ - ? $\quad \rho'(y)$ - ?

$\max(E(y))$ - ? $\quad C_s$

Решение:



• По т. Гаусса:

$$\oint \bar{E}\, d\bar{S} = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0 S}$$

$$\varepsilon = f(y) = \frac{d_0^n}{d_0^n - y^n} = \frac{3d^n}{3d^n - y^n} = \frac{\sqrt{3d}}{\sqrt{3d} - \sqrt{y}} \Rightarrow$$

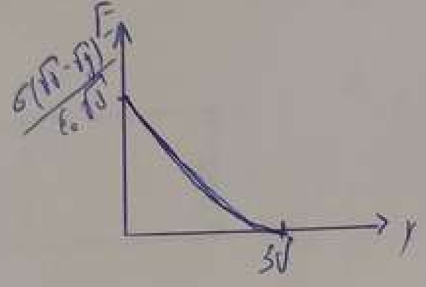
$$\Rightarrow E(y) = \frac{q(\sqrt{3d} - \sqrt{y})}{\sqrt{3d}\, \varepsilon_0 S} = \sigma \frac{(\sqrt{3d} - \sqrt{y})}{\sqrt{3d}\, \varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot (\sqrt{3d} - \sqrt{y})}{\varepsilon_0 \sqrt{3d}}$$

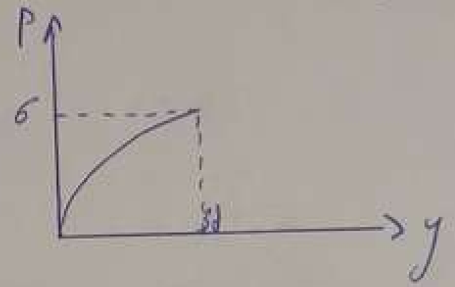
$$E_{max} = \left(\frac{\sigma\cdot(\sqrt{d3}-\sqrt{y})}{\varepsilon_0\sqrt{d3}}\right)' = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0\sqrt{d3}}\cdot(\sqrt{y})' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\sqrt{dy\cdot 3}}$$

$$E_{max} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\sqrt{dy}}$$

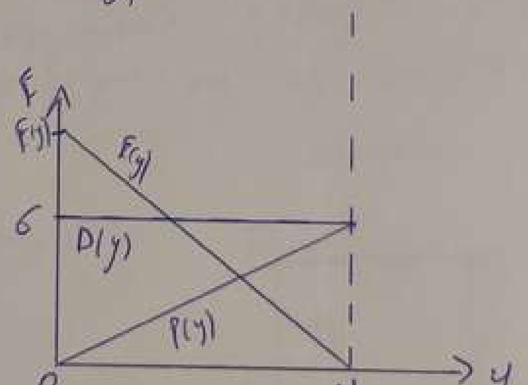
• $\bar P = (\varepsilon-1)\varepsilon_0\bar E = \frac{(\varepsilon-1)\varepsilon_0 q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \sigma\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} = \frac{\sigma\sqrt{y}}{\sqrt{d3}} \Rightarrow \underline{P(y) = \frac{\sigma\sqrt{y}}{\sqrt{d3}}}$

• $\bar D = \varepsilon_0\bar E + \bar P = \frac{\sigma}{\varepsilon} + \frac{\sigma(\varepsilon-1)}{\varepsilon} = \frac{\sigma+\sigma\varepsilon-\sigma}{\varepsilon} = \sigma \Rightarrow \underline{D(y) = \sigma}$





- $E(y) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma\sqrt{y}}{\varepsilon_0\sqrt{d3}}$ - убыв-я лин-я функция
- $D(y)$ - const
- $P(y) = \frac{\sigma\sqrt{y}}{\sqrt{d3}}$ - возраст лин-я ф-я.



• Определим поверх-ю плотн-ть:

$\sigma' = P_n = P\cos\alpha = \frac{\sigma(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\cos\alpha$

Зависимость между поляризов-ю среды P и пов-ой плотн-ью σ' связанных зарядов на границе диэлек-ов:

$P_{2n} - P_{1n} = \sigma'$

На нижней обкл-ке $P_{1n} = 0$ (нет диэлектрика снаружи) $\Rightarrow$

$\sigma'_н = -P_{2n} = 0$; $\boxed{\sigma'_н = 0}$

На верхней $P_{2n} = 0$ (нет диэл-ка снаружи) $\Rightarrow \sigma'_в = -P_{1n} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\sigma'_в = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}}$$

• Объемная плотность зарядов $\rho'(y)$:

$$\rho'(y) = -\operatorname{div} P \quad \text{т.е.} \quad \rho' = -\frac{dP_y}{dy} = -\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\sigma\sqrt{y}}{\sqrt{3d}} = -\frac{\sigma}{2\sqrt{3dy}}$$

$$\rho'(y) = -\frac{\sigma}{2\sqrt{3dy}}$$

Емкость конд-ра на ед площади:

Найдем U (разность пот-ов между обклад-и)

$$U = \int_0^{3d} E\,dy = \int_0^{3d}\frac{\sigma(\sqrt{3d}-\sqrt{y})}{\varepsilon_0\sqrt{3d}}dy = \int_0^{3d}\left(\frac{\sigma\cdot\sqrt{3d}}{\varepsilon_0\sqrt{3d}} - \frac{\sigma\sqrt{y}}{\varepsilon_0\sqrt{3d}}\right)dy =$$

$$= \int_0^{3d}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma\sqrt{y}}{\varepsilon_0\sqrt{3d}}\right)dy = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot y\Big|_0^{3d} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\sqrt{3d}}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{3d} =$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot 3d - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\sqrt{3d}}\left(\frac{2}{3}\cdot(3d)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{9d\sqrt{3d}\cdot\sigma - 2\sigma\cdot(3d)^{\frac{3}{2}}}{3\varepsilon_0\sqrt{3d}} =$$

$$= \frac{3\sigma d\sqrt{3d}}{3\varepsilon_0\sqrt{3d}} = \boxed{\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}} \quad \text{откуда} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{U\varepsilon_0}{d}}$$

Емкость конд-ра $C = \frac{Q}{U}$

Емкость ед-цы площади: $\frac{C}{S} = \frac{Q}{US} = \frac{\sigma}{U}$

Тогда $\frac{C}{S} = \frac{\sigma}{U}$; $\frac{C}{S} = \frac{\varepsilon_0}{d}$

Проверка:

1) $q' = \int_0^{3d}\rho'(y)S\,dy + \sigma_н S + \sigma_б S =$

$$= \int_0^{3d} -\frac{\sigma}{3d}S\,dy + \sigma = -\frac{3d\sigma}{3d} + \sigma = -\sigma + \sigma = 0$$

т.е. сумм-й связан-й заряд-ов $= 0$

2) $w = \frac{ED}{2} = \frac{\sigma^2(\sqrt{3d}-\sqrt{y})}{2\varepsilon_0\sqrt{3d}}$

$$\int_V w\,dV = \int_0^{3d}\frac{\sigma^2(\sqrt{3d}-\sqrt{y})}{2\varepsilon_0\sqrt{3d}}S\,dy = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\sqrt{3d}}\cdot\int\sqrt{3d}-\sqrt{y}\,dy =$$

$$= \frac{3\sigma^2 S\sqrt{3d}\,y - 2\sigma^2 S y\sqrt{y}}{6\varepsilon_0\sqrt{3d}}\Big|_0^{d} = \frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0}$$

$$\int_V w\,dV = \frac{CU^2}{2} = \frac{\sigma^2 d^2\varepsilon_0 S}{2\varepsilon_0^2 d} = \frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0}$$

Получаем, что

$$\int_V w\,dV = \frac{CU^2}{2} = \frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0}$$

Ответ:

$E(y) = \frac{\sigma(\sqrt{3d}-\sqrt{y})}{\varepsilon_0\sqrt{3d}}$

$D(y) = \sigma$

$P(y) = \frac{\sigma\sqrt{y}}{\sqrt{3d}}$

$E_{max} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\sqrt{dy}}$

$\sigma_н = 0$

$\sigma_б = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$

$\rho = -\frac{U\varepsilon_0}{d2\sqrt{3dy}}$