Задача 3.2.2. Фролов Евгений ИУ7-35Б

21- вариант.

По двум гладким медным шинам сползает невесомая перемычка, к которой приложена сила $F(t)$. Сопротивление перемычки равно R_0, сечение S, концен-я n_0. Перемычка замыкает эл-ую цепь, состоящую либо из конд-ра ёмкости C, либо индук-и L или из сопр-ия R. Расстоя-е между шинами l. Система нах-ся в однородном пер-ом магн-ом поле с индукцией $B(t)$, перп-ом плоскости, в которой перем-ся перемычка. Сопротивление шин, скол-их контактов, а также самоиндукция контура пренеб-о малы. Ускорение перемычки в нач-ый момент времени конечно, положение определено и равно $y(0) = y_0$.

Дано

n

$M = 3n$

$F = -fe^{-nt}$

R_0, S, L

$B_z = -ce^{-nt}$

Найти:

$I(t) = ?$

$y = y(t) - ?$

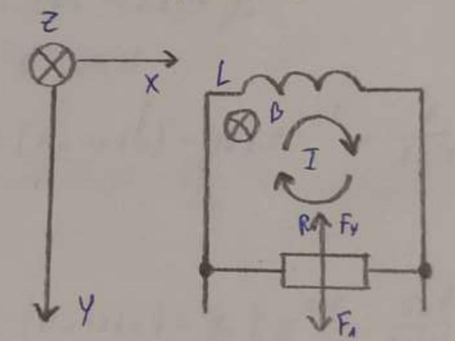
$y_{max} - ?$

$F_{1y} - ?$

$F_{1x} - ?$

$E(t) - ?$

Решение:



1. Уравнение Кирхгофа:

$$\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_{si} = I R_0$$

$$-l\frac{d(B_z y)}{dt} - L\frac{dI}{dt} = I R_0$$

$$l\frac{d(B_z y)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I R_0\right)$$

Для перемычки по II з. Ньютона

$-F_y + F_A = m\frac{d^2 y}{dt^2}$, из условия перемычка невесомая, тогда $m = 0$:

$$-F_y + F_A = 0$$

$$-F_y + I B_z l = 0$$

$$I(t) = -\frac{fe^{-nt}}{ce^{-3nt}} = \frac{fe^{2nt}}{cl}$$

• Закон Ома для неоднор-го участка цепи:

$R_0 I = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$

$\varphi_2 - \varphi_1 = U = -L\frac{dI}{dt}$, при $I = \frac{fe^{2nt}}{cl}$

$\frac{R_0 f}{cl} e^{2nt} = U + e^{-3nt}(3ncl\cdot y(t) - cl\cdot y'(t))$

Получаем дифф. уравнение

$$y'(t) - 3n\cdot y(t) = -\frac{fn}{c^2l^2}(R_0 + 2Ln)e^{5nt}$$

в котором $y_{o.o.} = ke^{3nt}$

$$y_{ч.н} = -\frac{f}{2c^2l^2}(R_0 + 2Ln)e^{5nt}$$

Тогда общее решение: $y(t) = y_{o.o.} + y_{ч.н}$

$y(t) = ke^{3nt} - \frac{f}{2c^2l^2}(R_0 + 2Ln)e^{5nt}$. Из условия $y(0) = y_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{f}{2c^2l^2}(R_0 + 2Ln) + y_0$

Подставим k в $y(t)$

$$y(t) = \left(\frac{f}{2c^2l^2}(R_0 + 2Ln) + y_0\right)e^{3nt} - \frac{f}{2c^2l^2}(R_0 + 2Ln)e^{5nt}$$

• Найдем y_{max}:

$$\frac{dy}{dt} = 3n\left(\frac{f}{2c^2l^2}(R_0 + 2Ln) + y_0\right)e^{3nt} - \frac{5nf}{2c^2l^2}(R_0 + 2Ln)e^{5nt} = 0 \quad (*)$$

Прологарифмируем:

$$t_0 = \frac{1}{2n}\left(\ln\left(\frac{3f}{2c^2l^2}(R_0 + 2Ln) + y_0\right) - \ln\left(\frac{5f}{2c^2l^2}(R_0 + 2Ln)\right)\right)$$

$$y_{max} = y(t_0) = \left(\frac{3}{5} + \frac{y_0 c^2 l^2}{5f(R_0 + 2Ln)}\right)\left(\frac{3}{2}y_0 + \frac{f}{2c^2l^2}(R_0 + 2Ln)\right)$$

• Ток в перемычке зависит от напр-ти элек-го поля:

$I(t) = \frac{U(t)}{R_0}$

$I(t) = \frac{E(t)l}{R_0} \Rightarrow E(t) = \frac{I(t)R_0}{l} = \frac{fe^{2nt}}{cl^2}\cdot R_0$

• Найдем проекцию силы Лоренца на ось Y.

$F_{Ly} = e[\bar{v}_x \bar{B}]$

$j = nev_x$ откуда скорость движения в проводнике $v_x = \frac{j}{ne}$

С другой стороны $j = \frac{I}{S} \Rightarrow v_x = \frac{j}{ne} = \frac{I}{neS}$, где $I = \frac{fe^{2nt}}{ce}$

$v_x = \frac{I}{neS} = \frac{fe^{2nt}}{neSce} = \frac{fe^{2nt}}{cneSe}$

Знаем, что $\bar{v}_x \perp \bar{B}$, тогда $\sin(\bar{v}_x, \bar{B}) = 1$

$F_{Ly} = e[\bar{v}_x, \bar{B}] = ev_x B = \frac{-fe^{-nt}}{neS}$

Найдем проекцию на ось

$F_{Lx} = -|q_0| v_y B_z$

$F_{Lx} = -|q_0| \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)\left(-ce^{-3nt}\right)$

$F_{Lx} = |q_0|\left(3y_0 n e^{3nt} + 3nf(R_0 + Ln)\frac{e^{3nt}}{nce^2}\right)ce^{-3nt} = |q_0|\left(3y_0 cn + 3\frac{f(R_0 + 2n)}{ce^2}e^{nt}\right)$

Сила Ампера

$F_A = IB_z l = \frac{fe^{2nt}}{ce^2} ce^{-3nt} = -fe^{-nt}$; $\boxed{F_A = -fe^{-nt}}$

Сила Лоренца:

$F_L = nSl\sqrt{F_{Lx}^2 + F_{Ly}^2} = nSl\sqrt{q_0^2\left(2y_0 cn + 3f\frac{(R_0 + Ln)}{ce^2}e^{nt}\right)^2 + \frac{f^2}{n^2e^2S^2}e^{-2nt}} =$

$= \frac{F_L}{F_A} = \frac{nSl\sqrt{q_0^2\left(3y_0 cn + 3f\frac{(R_0 + Ln)}{ce^2}e^{nt}\right)^2 + \frac{f^2}{n^2e^2S^2}e^{-2nt}}}{fe^{-nt}}$

• Выполним проверку рез-ов

Сила Ампера – рез-т действия силы Лоренца на каждый носитель зарядов и явл-я суммой этих сил.

$F_A = \Sigma F_L$

$F_A = F_{Ly} N$, где $N = nSl$

$F_A = F_{Ly} \cdot N = -\frac{fe^{-nt}}{neS} \cdot nSl = \boxed{-fe^{-nt}}$ – совпадает с выч-й силой F_A до этого.

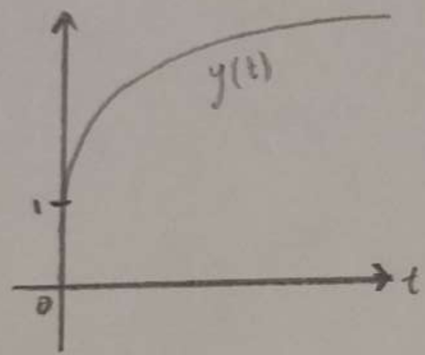
Построим графики зависимостей $\frac{I(t)}{I_{max}}$ и $\frac{y(t)}{y(0)}$

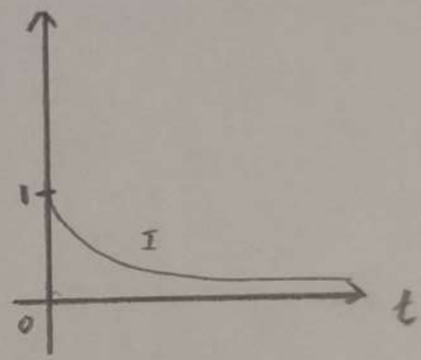
$$\frac{I(t)}{I_{max}} = \frac{e^{-nt}}{e^{-nt_{max}}}$$

$$\frac{y(t)}{y(0)} = \frac{\left(\frac{f}{2c^2\ell^2}(R_0+2Ln)+y_0\right)e^{3nt} - \frac{f}{2c^2\ell^2}(R_0+2Ln)e^{5nt}}{y(0)}$$

Возьмем $A = \frac{f(R_0+2Ln)}{2c^2\ell^2 y_0}$

$$\frac{y(t)}{y(0)} = (A+1)e^{3nt} - Ae^{5nt}$$





Ответ: $I = \frac{fe^{2nt}}{c\ell}$

$y(t) = \left(\frac{f}{2c^2\ell^2}(R_0+2Ln)+y_0\right)e^{3nt} - \frac{f}{2c^2\ell^2}(R_0+2Ln)e^{5nt}$

$y_{max} = y(t_0) = \left(\frac{3}{5} + \frac{y_0 c^2\ell^2}{5f(R_0+2Ln)}\right)\left(\frac{3}{2}y_0 - \frac{f}{2c^2\ell^2}(R_0+2Ln)\right)$

$F_{ny} = -\frac{fe^{-nt}}{n\ell 3}$

$F_{nx} = -e\left(3n\left(\frac{f}{2c\ell^2}(R_0+2Ln)+cy_0\right) - \frac{5nf}{2c\ell^2}(R_0+2Ln)e^{2nt}\right)$

$E(t) = \frac{fR}{c\ell^2}e^{2nt}$