Задача №4.

Для прямого верт-го волновода длиной l, располож. в среде (воздухе или воде), как указано на соот-ем рисунке необходимо:

- вывести ф-лу для возм-х частот продольных волн, возбужденных в волноводе, при которых в нем образ-я стоячая волна;
- указать, какая частота колебаний явл-я основной, а какие частоты отн-я к обертонам.
- определить частоту и длину i-ой гармоники.
- для этой гармоники нарисовать вдоль волновода качеств-ю картинку:

 а) стоячей волны амплитуд смещений.

 б) стоячей волны амплитуд давлений.

Дано

$l = 1,5$ м

$i = 4$

$c = 1500$ м/с

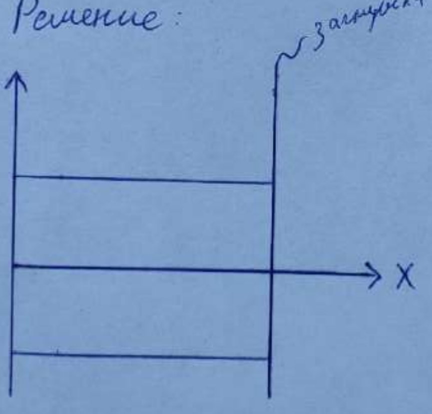
Среда - вода

ω - ?

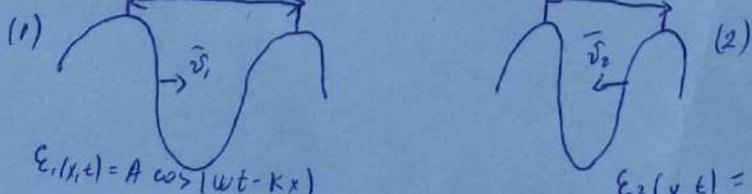
ω_i - ?

A_i - ?

Решение:



Рассмотрим две волны (один-е), движущ-ся в разные направления.



$\xi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ $\xi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$

где k - волновое число $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

После того, как волна (2) отразится от заглушки волновода, по волноводу распростран-я обратная отраженная волна с $\varphi = \pi$. После чего, отраженная волна: $\varepsilon_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx - 2kl - \pi)$

При наложении (1) и (2) волн получаем стоячую.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx - 2kl - \pi) =$$

$$= A(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx - 2kl - \pi)) = A\left(2 \cdot \frac{\cos(\omega t - kx + \omega t + kx - 2kl - \pi}{2}\right.$$

$$\left. \cdot \frac{\cos(\omega t - kx - \omega t - kx + 2kl + \pi)}{2}\right) = A(2\cos(kl - kx + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\omega t - kl - \frac{\pi}{2})$$

При $A_{ст} = 2A\sin(kl - kx)$; $\varepsilon(x,t) = 2A\sin(kl - kx)\sin(\omega t - kl)$

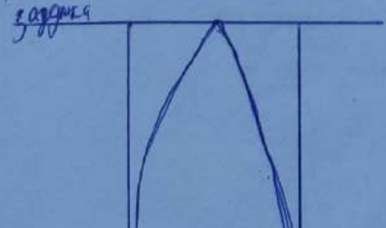
При $x = 0 \Rightarrow A_{ст} = 2A\sin kl$ (на открытом конце волновода как-я источ. кол-й $\Rightarrow$ должна быть пучность)

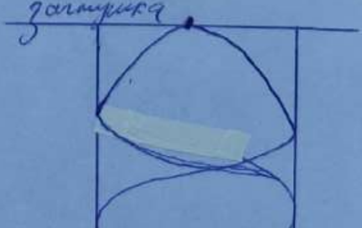
Из $A_{ст} = 2A\sin kl$ получаем $\sin kl = 1$:

$$kl = \pi i - \frac{\pi}{2}, \text{ при } k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow l = \frac{\lambda}{2}(i - \frac{1}{2}) = \frac{\lambda i}{2} - \frac{\lambda}{4} =$$

$$= \frac{2\lambda i - \lambda}{4} = \frac{\lambda(2i-1)}{4}$$ получаем: $\lambda = \frac{4l}{2i-1}$ ограничение для длины стоях. волны.

При $i = 1 \Rightarrow \lambda = 4l$ При $i = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{4l}{7}$





При $\lambda = \frac{c}{\nu}$; $w = 2\pi\nu \Rightarrow w = \frac{2\pi c}{\lambda}$

Подставим найден-ю λ в $w = \frac{2\pi c}{\lambda}$

$w = \frac{2\pi c\cdot(2i-1)}{4l} = \frac{\pi c(2i-1)}{2l}$; $i \in N$ - фор-а возм. частоты прод. волны при кот обр. стоячая волна

При $i=1$ $w = \frac{\pi c}{2l}$ - основная частота

При $i>1$ - частоты относ. к обертонам.

При $i = 4$

$$w(i) = \frac{\pi c(2\cdot 4-1)}{2l} = \frac{7\pi\cdot 1500}{2\cdot 1{,}5} = 10990 \,(Гц)$$

$$\lambda(i) = \frac{4l}{2\cdot 4-1} = \frac{4l}{8-1} = \frac{4\cdot 1{,}5}{7} \approx 0{,}857 \,(м)$$

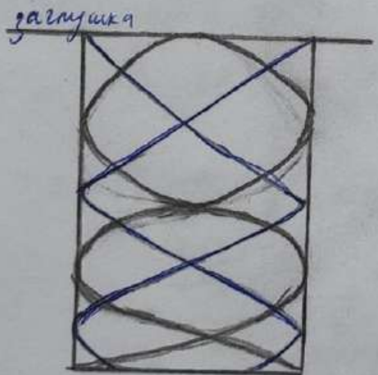


рисунок 1.

∝ - стоячая волна амплитуды давления.

∝ - смещений.

Ответ: 1) $w = \frac{\pi c(2i-1)}{2l}$; $i \in N$

2) При $i=1$ $w = \frac{\pi c}{2l}$ - осн. част.
При $i>1$ - частоты отн-ся к обертонам

3) $w(i) = 10990$ (Гц) $(i=4)$

$\lambda(i) = 10^{-3}\cdot 857$ (м)

4) рисунок 1.