Лекция 4.2. Разреженные матрицы

В данной лекции описаны эффективные способы представления разреженных матриц.

Разреженные матрицы

Матричные задачи часто используются при решении разреженных линейных алгебраических уравнений; разреженных обычных и обобщенных спектральных задач и т.п., причем, матрицы при этом могут быть достаточно большие (> $1O^{10-20}$ элементов), а число ненулевых элементов при матрице порядка n может выражаться как: n^{1+g} , где g<1.

При, g <= 0.2 или g <= 0.5, считаем, что матрица разрежена.

Разреженность матрицы следует рассматривать только тогда, когда из ее разреженности имеет смысл извлекать выгоду при не обработке нулевых элементов.

Разреженную матрицу можно обрабатывать как плотную, и наоборот, плотную матрицу - как разреженную.

В обоих случаях получаются правильные числовые результаты, но вычислительные затраты растут.

Алгоритмы обработки разреженных матриц предусматривают действия только с ненулевыми элементами, т. о., число операций пропорционально числу ненулевых элементов. Отсюда следует, что имеет смысл хранить в памяти только ненулевые элементы.

Ленточные матрицы

Матрица называется ленточной, если в квадратной матрице, все ненулевые элементы заключены внутри ленты, образованной диагоналями, параллельными главной диагонали, т. о.,
что a$_{ij}$ $= 0$, если $> \beta$ и $a_{k,k-\beta} \neq 0$

Или $a_{k,k+\beta} \neq 0$ хотя бы для одного значения k. Здесь β - полуширина, а
$2 * \beta + 1$ - ширина ленты.

Если матрица симметрична, то достаточно хранить ее нижнюю или верхнюю полуленту, т. е.
β элементов в каждой строке.

В этом случае используется Диагональная схема хранения симметричных матриц
Она удобна, если $\beta << n$

Диагональная схема хранения симметричных матриц:

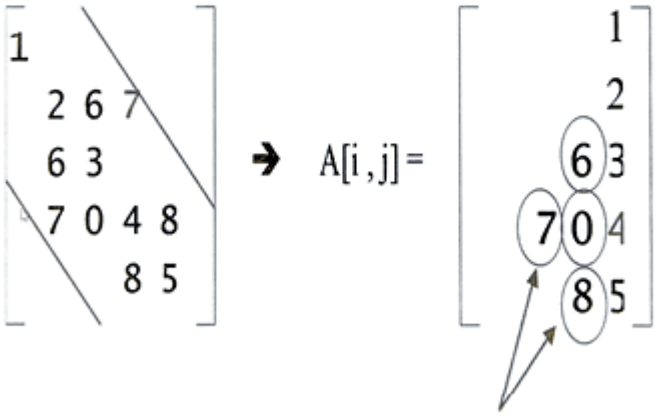


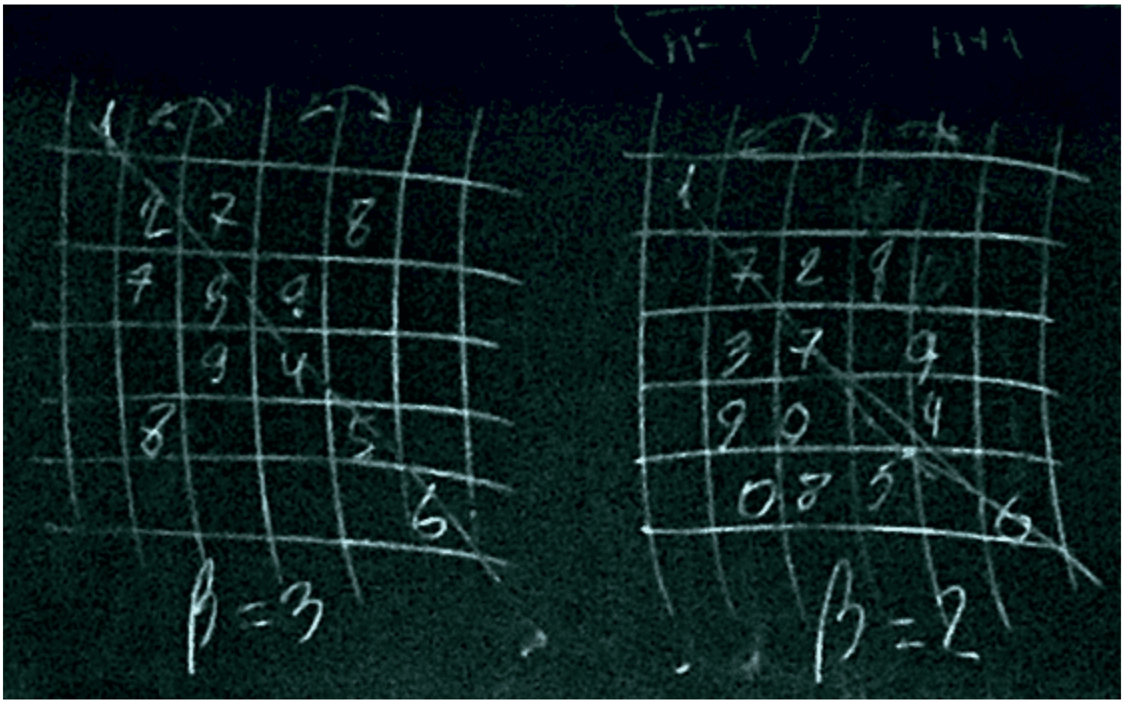
Рис.1. Элементы оболочки; Профиль = 4
Диагональная схема удобна, если **β** << **n**.

Важное свойство:

- ширина ленты зависит от порядка расположения строк и столбцов в ленточной матрице.
- Поэтому можно искать перестановки строк и столбцов, приводящие к уменьшению ширины ленты, что,
  в свою очередь, приводит к уменьшению запросов памяти и уменьшает работу.

Профильная схема хранения симметричных матриц:

- Более эффективная и простая схема хранения симметричных матриц, кот. называется профильной (оболочечной) схемой или схемой переменной ленты. (1966г. Дженнингс)
- В этом случае, для каждой строки ширина ленты будет определяться: $\beta_j = i - j_{min(i)}$,
- где $j_{min(i)}$, - мин-ный столбцовый индекс строки i, для которой $a_{ij} \neq 0$, тогда полуширина ленты равна $max(\beta_i)$.
- Оболочкой матрицы A будет множество элементов a_{ij}, для которых выполняется неравенство: $0 < i - j < \beta_i$
- Профиль матрицы A - это число элементов в ее
  оболочке:
- $profile(A) = \sum_i^n \beta_i$



- При использовании схемы Дженнингса все элементы оболочки, упорядоченные по возрастанию j в строках, включая нули, хранятся в одномерном массиве, например, AN. При этом диагональный элемент строки помещается в ее конец. Длина массива AN равна сумме профиля и порядка матрицы A. Необходим еще массив указателей (номеров), например, IA, элементы кот. есть указатели (номера) расположения диагональных элементов в AN.
- Пример: (см. рис.1) Профиль матрицы равен 4, т.е., элементов всего 4,
- \plus диагональные (5).
- Итого 9 элементов.

- Если $\mathbf{a_{11}}$– первый элемент в записи, тогда:

Позиция:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
• AN:	1	2	6	3	7	0	4	8	5

диагональные элементы

- IA : 1 2 4 7 9 - позиции диагональных элементов в AN

- Т. о., элементы имеют последовательные, легко вычисляемые индексы столбцов.

- Если матрица не сильно разрежена, то
  объем доп. памяти при таком хранении
  будет > объема памяти при обычном хранении матрицы. Схема переменной
  она - статическая, т. к. включение нового элемента, лежащего вне оболочки,
  требует изменения всей структуры (если только не используются записи
  переменной длины).

Связные схемы разреженного хранения

- При профильном хранении нули внутри ленты хранятся и + еще доп" память под IA (накладная). Можно предложить другую схему хранения, если нули рассеяны по всей матрице.
- Считаем, что матрица большая, то есть, в ней больше 1000 элементов.

Например,

$$A = \begin{bmatrix} & 3. & & \\ 4. & 7. & 8. & \\ & -5. & & 11. \\ & 1. & & \end{bmatrix}$$

- это портрет матрицы или шаблон нулей – не нулей

Схема хранеия матриц (Кнут 1968г.)

1. сами элементы в произвольном порядке a_{ij};
2. строчные индексы элементов (i);
3. столбцовые индексы элементов (j);
4. номер следующего ненулевого элемента строки;
5. номер следующего ненулевого элемента столбца;
6. указатель (номера эл-тов) для входа строк;
7. указатель (номера эл-тов) для входа столбцов;

Тогда для матрицы А, указанной выше, имеем:

	1	2	3	4	5	6	7	
1. **AN** =	3.	4.	7.	8.	-5.	11.	1.	*- элементы*
2. **I** =	1	2	2	2	3	3	4	*- их строки*
3. **J** =	2	1	2	3	2	4	2	*- их столбцы*
4. **NR** =	0	3	4	0	6	0	0	*- номер следующего элемента в строке (Next Row)*
5. **NC** =	3	0	5	0	7	0	0	*- номер след. элемента в столбце (Next Column)*
6. **JR** =	1	2	5	7				*– номера элементов (в **AN**), с которых начинается строка*
7. **JC** =	2	1	4	6				*- номера элементов (в **AN**), с которых начинается столбец*