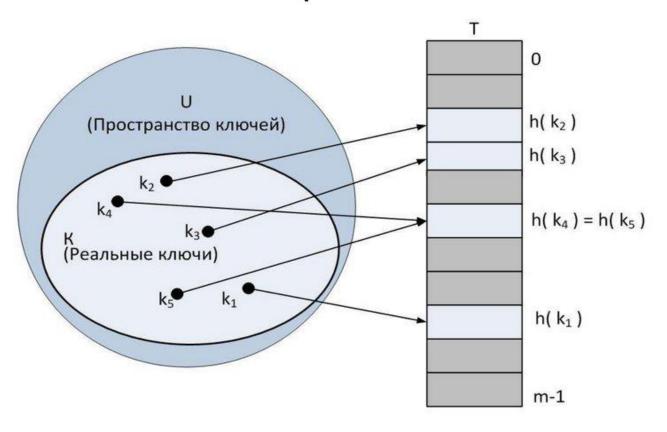
# Хеш-таблицы

С хешированием мы сталкиваемся очень часто: при работе с браузером (список Web-ссылок), текстовым редактором и переводчиком (словарь), языками скриптов (Perl, Python, PHP и др.), компилятором (таблица символов). По словам Брайана Кернигана, это «одно из величайших изобретений информатики». Заглядывая в адресную книгу, энциклопедию, алфавитный указатель, мы даже не задумываемся, что упорядочение по алфавиту является не чем иным, как хешированием. Хеширование: разбиение множества ключей (однозначно характеризующих элементы хранения и представленных, как правило, в виде строк или чисел) на непересекающиеся подмножества (наборы элементов), обладающие определенным свойством. Это свойство описывается функцией хеширования, (хеш-функцией), и называется хешадресом. Решение обратной задачи возложено на хеш-структуры (хештаблицы): по хеш-адресу они обеспечивают быстрый доступ к нужному элементу. В идеале для задач поиска хеш-адрес должен быть уникальным, чтобы за одно обращение получить доступ к элементу, характеризуемому заданным ключом (идеальная хеш-функция). Однако, на практике идеал приходится заменять компромиссом и исходить из того, что получающиеся наборы с одинаковым хеш-адресом содержат более одного элемента.

## Хеш-таблицы и коллизии



Коллизия – ситуация, когда два ключа хешированы в одну и ту же ячейку

# хеш-функция

- Эффективность использования деревьев для поиска информации – O(log<sub>2</sub>n).
- Если функция по значению ключа сразу определяет индекс элемента массива хранения информации, то это функция, по которой можно вычислить этот индекс. Такая функция называется **хеш-функцией** (от to hash крошить, рубить) и она ставит в соответствие каждому ключу (a<sub>i</sub>) индекс ячейки (j) хеш-адрес, где расположен элемент с этим ключом:
  - $h(a_i) = j$ , если j=(1,M),
- т. е. **ј** принадлежит множеству от 1 до М, где М размер массива.

# Простое представление ХЕШ- таблиц

Пусть необходимо сформировать библиотеку. Есть 2 пути:

- 1. Расставить все книги по алфавиту (по автору или названию), создать картотеку соответствия книги и ее местоположения. Пользоваться картотекой при поиске нужной книги.
- 2.Создать некую функцию, которая исходя из названия книги будет вычислять местоположение определенной книги с помощью хеш-функции. Ключом поиска в данном случае будет выступать название книги.

# Требования к хеш-функции

Хеш-функция должна иметь следующие свойства:

- Всегда возвращать один и тот же адрес для одного и того же ключа;
- Не обязательно возвращать разные адреса для разных ключей (не идеальная);
- Использовать все адресное пространство с одинаковой вероятностью;
- Быстро вычислять адрес.

# хеш-таблица

- Массив, заполненный в порядке, определенным хешфункцией это хеш-таблица. (процесс хеширование)
- Т.О. хеш-таблица это стр-ра данных вида «ассоциативный массив», которая ассоциирует ключи со значениями.

**Идеально:** хеш-адрес уникален для значения, тогда сложность:

#### О(1)!!! и НЕ зависит

от размерности набора данных.

**Иначе** возникает **коллизия** (конфликт): один хеш–адрес для разных ключей.

Хеширование предполагают 2 этапа:

- построение хеш-таблицы, используя хеш-функцию;
- использование хеш-таблицы для поиска

# Создание таблиц. Метод деления (модульный)

В качестве хеш-функции используется остаток от деления ключа (К) на М:

$$h(K) = K \mod M$$
  $h(K) = K \% M$ 

при N < M, где N – количество ключей, М – размер массива

#### М - Простое число!

- Данная функция очень проста, хотя и не самая лучшая.
  - Вообще, для количества ключей равного **31** при размерности массива **41** можно создать **41**<sup>31</sup>~**10**<sup>50</sup> хеш-функций, т. е. поиск хорошей хеш-функции достаточно сложная задача!

# Критерии «хорошей» хеш-функции

Хорошей является хеш-функция, удовлетворяющая условиям:

- 1. д. б. простой с вычислительной точки зрения (быстрой);
- 2. должна распределять ключи в хеш-таблице наиболее равномерно;
- 3. должна создавать минимальное число коллизий **Пример:** ключи целые числа (8 элементов)

ключи: 25, 19, 07, 34, 16, 61, 44, 81

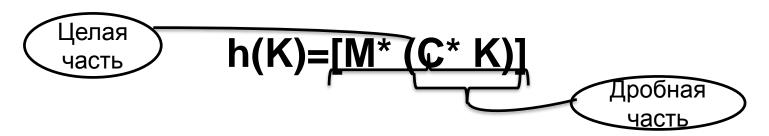
- массив M=11 (M ближайшее б**О**льшее простое число)
- 25 % 11 = 3
- 19 % 11 = 8
- 07 % 11 = 7....

индекс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ключ	44	34		25	81	16	61	07	19		

Для всех различных ключей различные индексы – бесконфликтная хеш-таблица

### Метод умножения (мультипликативный)

Для мультипликативного хеширования используется следующая формула:



- 1. Умножение ключа **К** на константу **С**, лежащую в интервале [0..1]. (частн. случай (Кнут рекомендует): константа = значение золотого сечения  $\phi = (\sqrt{5} 1)/2 \approx 0,6180339887$ ).
- 2. Дробная часть этого выражения и умножается на константу **М**, выбранную т. о., чтобы результат не вышел за границы хеш-таблицы.
- 3. Оператор [] возвращает наибольшее целое, которое меньше аргумента.
- 4. Для с отрицательными числами можно число х взять по модулю.

От выбора М и С зависит то, насколько оптимальным окажется хеширование умножением на определенной последовательности. Не имея сведений о входящих ключах, в качестве М следует выбрать одну из степеней двойки, т. к. умножение на  $2^m$  равносильно сдвигу на m разрядов, что компьютером производиться быстрее.

При таком С, хеш-коды распределяться достаточно равномерно, но многое зависит от начальных значений ключей.

**Например**, положим M=13, C=0,618033

Ключами возьмем числа: 25, 44 и 97.

Подставим их в функцию:

# Метод сложения (аддитивный)

Модификация метода деления. Используется для строк переменной длины (сложение по модулю 256). Недостаток: YX = XY (коллизии)

Пример: ключи строковые

$$h (END) = (69 + 78 + 68) \% 11 = 215 \% 11 = 6$$

h (NIL)=
$$(78 + 73 + 76)$$
 %  $11 = 227$  %  $11 = 7$ 

индекс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ключ	FOR		VAR, END???			BEGIN	END	OR, NIL ???		

Коллизия – хеш-функция отражает 2 разных эл-та из более широкого множества в один и тот же эл-нт более узкого множества

# Метод «исключающее ИЛИ»

Используется для строк переменной длины – аналогичен сложению, но дает разные ключи: XY != YX (последовательно применяется XOR к элементам строки)

В алгоритме добавляется случайная компонента (надо хранить!), чтобы еще улучшить результат (размер таблицы = 256):

For i ← 0 до длины слова

Sum ← sum + ord(st[i]) **xor** random(255)

H← sum mod 256;

# Например. VA и AV

- $V = 86 = 1010110_2$
- A =65=1000001<sub>2</sub>
- 1) random(255) -1010<sub>2</sub>
- 2) random(255) 1011<sub>2</sub>,
  - TO:
- V+A= $1010110_2$  xor  $1010 + 1000001_2$  xor 1011 = 1011100 + 1001010 = 10100110

• V+A=  $1000001_2$  xor  $1010 + 1010110_2$  xor 1011=101011 + 1011101 = 10010000

# метод середины квадрата

Один из самых очевидных и простых способов хеширования - метод середины квадрата:

• ключ возводится в квадрат и берется несколько цифр в середине. (предполагается, что ключ сначала приводится к целому числу, для совершения с ним арифметических операций). Метод хорошо работает до момента, когда нет большого количества нолей слева или справа.

# Динамическое хеширование

- Предыдущие методы хеширования статические, т.е. сначала выделяется некая хеш-таблица, под ее размер подбираются константы для хешфункции.
- Это не подходит для задач, в которых р-р БД меняется часто и значительно.

#### По мере роста БД можно:

- пользоваться изначальной хеш-функцией, теряя производительность из-за роста коллизий;
- выбрать хеш-функцию «с запасом» неоправданные потери дискового пространства;
- периодически менять функцию, пересчитывать все адреса - отнимает очень много ресурсов и выводит из строя базу на некоторое время.

#### Техника, позволяющая динамически менять размер хеш-структуры

- Хеш-функция генерирует т. наз. псевдоключ ("pseudokey"), использующийся лишь частично для доступа к элементу: генерируется дост. длинная битовая последовательность, которая д. б. достаточна для адресации всех потенциально возможных элементов. При статическом хешировании для этого потребовалась бы очень большая таблица (которая обычно хранится в ОП для ускорения доступа), здесь размер занятой памяти прямо пропорционален количеству элементов в базе данных.
  - Каждая запись в таблице хранится не отдельно, а в каком-то блоке ("bucket"). Эти блоки совпадают с физическими блоками на устройстве хранения данных. Если в блоке нет больше места, чтобы вместить запись, то блок делится на два, а на его место ставится указатель на два новых блока.
- Задача состоит в том, чтобы построить бинарное дерево, на концах ветвей кот. были бы указатели на блоки, а навигация осуществлялась бы на основе псевдоключа. Узлы дерева м. б. 2-х видов: узлы, показывающие др. узлы или узлы, показывающие блоки.

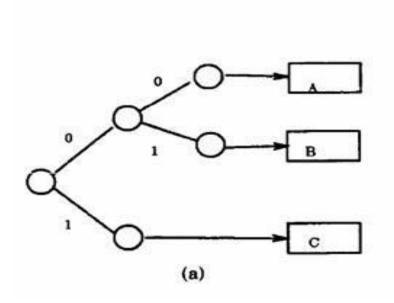
Например, пусть узел имеет такой вид, если он показывает на блок:

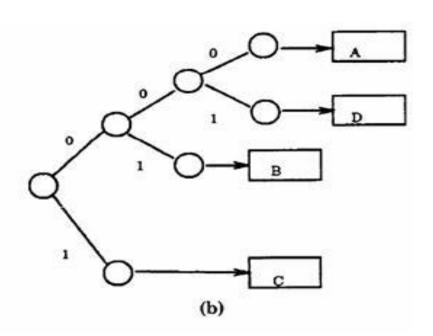
- Zero Null
- Bucket Указатель
- One Null

Если он будет показывать на два других узла (a, b), то он будет иметь такой вид:

- Zero Адрес **a**
- Bucket Null
- OneАдрес **b**

- Вначале имеется указатель на динамически выделенный пустой блок. При добавлении элемента вычисляется псевдоключ, и его биты поочередно используются для определения местоположения блока.
- Например, элементы с псевдоключами 00... будут помещены в блок **A**, а 01... в блок **B**. Когда **A** будет переполнен, он будет разбит т. о., что элементы 000... и 001... будут размещены в разных блоках (**A** и **D**).



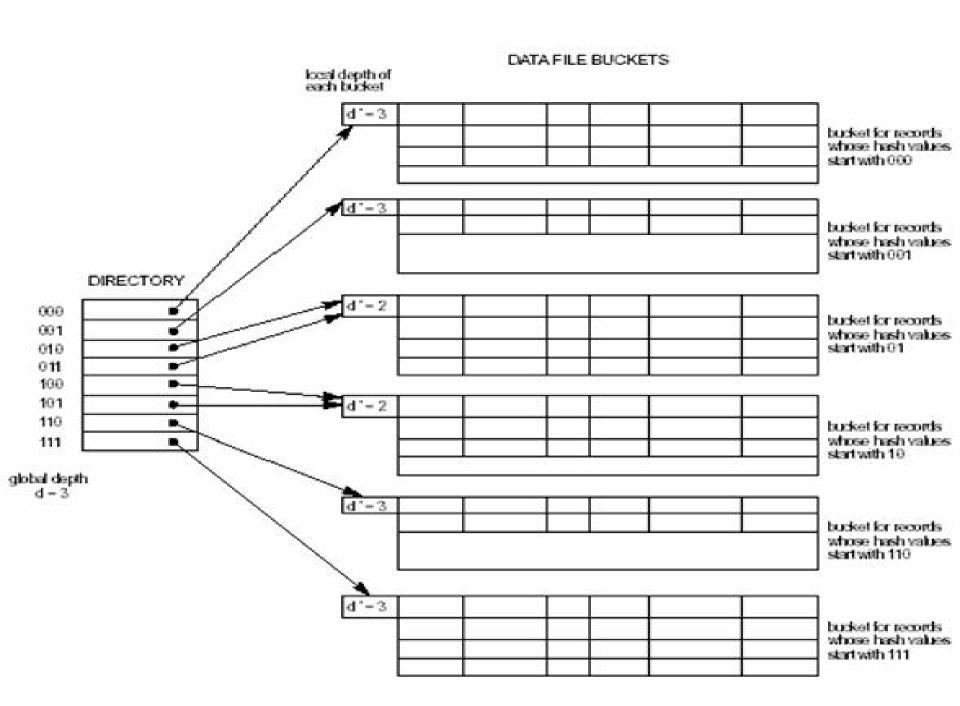


# Pасширяемое хеширование (extendible hashing)

Этот метод также предусматривает изменение р-ров блоков по мере роста БД, но это компенсируется оптимальным использованием места, т.к. за один раз разбивается не более одного блока, накладные расходы достаточно малы.

Вместо бинарного дерева - список, элементы кот. ссылаются на блоки. Сами элементы адресуются по некоторому количеству *i* битов псевдоключа. При поиске берется *i* битов псевдоключа и через список (directory) находится адрес искомого блока. При добавлении элементов сначала выполняется процедура, аналогичная поиску. Если блок неполон, добавляется запись в него и в БД. Если заполнен, он разбивается на 2, записи перераспределяются по описанному выше алгоритму. В этом случае возможно увеличение числа бит, необходимых для адресации. Размер списка удваивается и каждому вновь созданному элементу присваивается указатель, который содержит его родитель. Т. о., возможно, когда несколько элементов показывают на один и тот же блок. (за одну операцию вставки пересчитываются значения не более, чем одного блока).

Удаление производится по такому же алгоритму, только наоборот. Блоки, соответственно, могут быть склеены, а список – уменьшен в два раза.



# Рассмотрим это на примере

Хеш-таблица = каталог (directory), а каждая ячейка будет указывать на **емкость** (*bucket*) которая имеет определенную **вместимость** (capacity).

Глобальная глубина показывает сколько младших бит будут использоваться для того чтобы определить в какую емкость следует заносить значения. А из разницы локальной глубины и глобальной глубины можно понять сколько ячеек каталога ссылаются на емкость

Количество ссылающихся ячеек  $K=2^{G-L}$  где G — глобальная глубина, L — локальная глубина.

Пусть есть хеш-таблица, где содержатся числа:

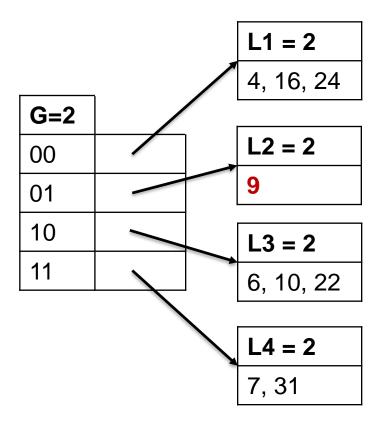
Глобальная глубина таблицы G=2, локальные глубины емкостей L1,Ll2, L3, L4 (=2), вместимость емкостей = 3

4	100
6	110
7	111
10	1010
16	100 <b>00</b>
22	101 <b>10</b>
24	11000
31	111 <b>11</b>

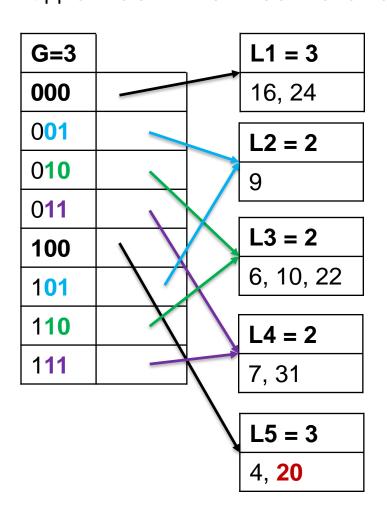
	L1 = 2
G=2	4, 16, 24
00	L2 = 2
10	6, 10, 22
01	5, 10, 22
11	L3 = 2
	L4 = 2
	*
	7, 31

Мы хотим добавить в этот каталог числа 9, 20, 26

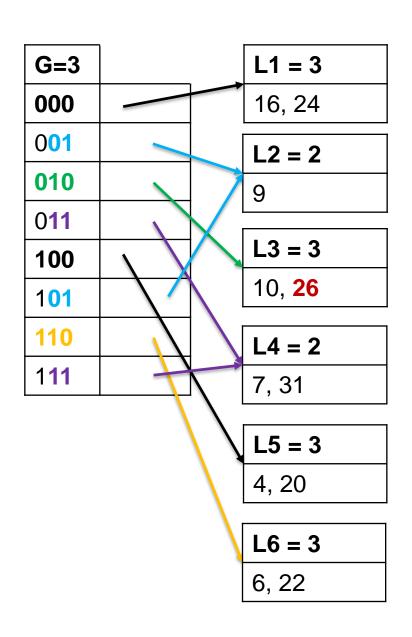
#### Добавляем 9 (1001)



#### Добавляем 20 (10**100)** Емкость 00 заполнена, L1=G Удваиваем к-во ячеек каталога G=3



#### Далее на вход поступает 26 (11**010**)



Последние 3 бита соответствуют емкости #3 Она заполнена. При этом L3<G Значит делим емкость на 2, увеличив локальную глубину, Перехешируем значения емкости, распределив ее по новым емкостям.

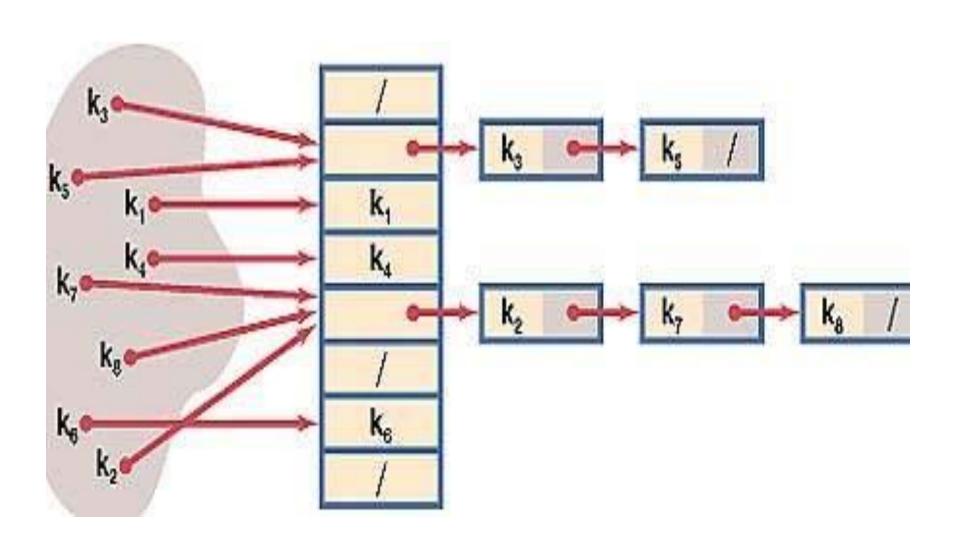
# Использование

Чаще всего расширяемое хеширование используется в базах данных так как:

- БД большие, при перехешировании всей БД доступа к базе нет на все время пересчета.
- При расширяемом хешировании перехешировать придется только малые группы, что не сильно замедлит работу базы данных.
- расширяемое хеширование хорошо работает в условиях динамически изменяемого набора записей в хранимом файле.

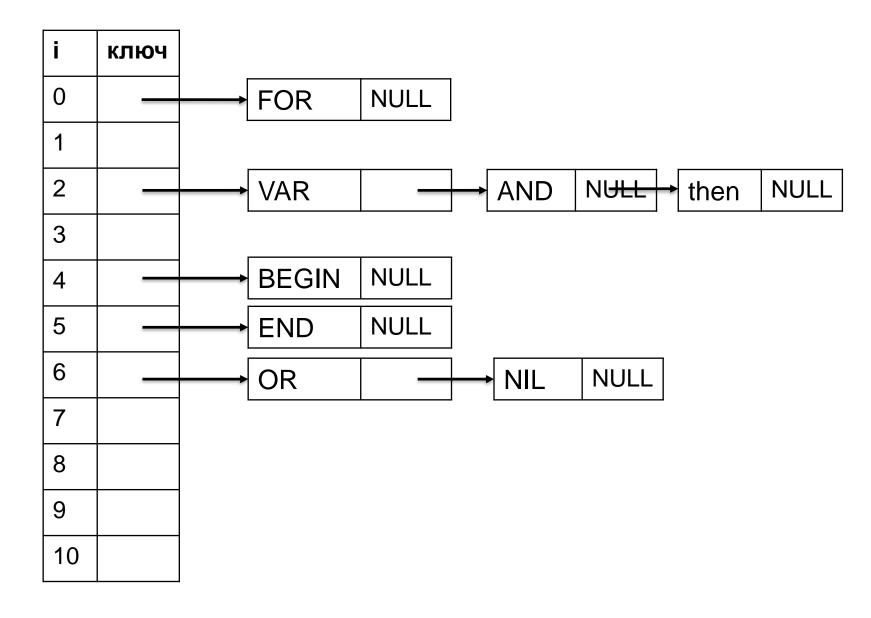
- Т.О., основное достоинство расширяемого хеширования - высокая эффективность, которая не падает при увеличении размера БД, разумное расходование места на устройстве хранения данных, т.к. блоки выделяются только под реально существующие данные, а список указателей на блоки имеет размеры, минимально необходимые для адресации данного кол-ва блоков.
- Расплата: разработчику приходится дополнительно усложнять программный код.

# Устранение коллизий



# (открытое хеширование - внешнее)

- Данные хранятся не в самой таблице, а в связных списках. В таблице ссылка на первый элемент списка
- Создается цепочка (список) элементов с одним ключом.
- Поиск в списке осуществляется простым перебором, т.к. при грамотном выборе хеш-функции любой из списков оказывается достаточно коротким.
- ключи: END, VAR, FOR, OR, AND, NIL, BEGIN
  - Основной недостаток для узлов указателей требуется дополнительное пространство.
     рекомендуемый размер хеш-таблицы: M=N/2 (рекомендация Microsoft 0.72\*M)
  - В нашем случае: 9 сравнений на 7 ключей. В среднем
     1.286 сравнений на поиск ключа



	IVICII	100 yerroge	//\ 
индекс	ключ	Указатель	
0	FOR	Nil Nil	
1		Nil Nil	
2	VAR	начало	AND then
3		Nil Nil	
4		Nil Nil	
5	BEGIN	Nil Nil	
6	END	Nil Nil	
7	OR	начало —	NIL
8		Nil Nil	
9		Nil Nil	

# Закрытое хеширование (внутреннее, открытая адресация)

- Имеется изначально пустая хеш-таблица Т размера М, массив А размера N (M≥N) и хеш-функция h(), пригодная для обработки ключей массива А;
- 2. Элемент **x**<sub>i</sub>, ключ которого **key**<sub>i</sub>, помещается в одну из ячеек хеш-таблицы, руководствуясь следующим правилом:
  - а) если  $\mathbf{h}(\mathbf{key_i})$  номер свободной ячейки таблицы  $\mathbf{T}$ , то в нее записывается  $\mathbf{x_i}$ ;
  - b) если **h(key<sub>i</sub>)** номер уже занятой ячейки таблицы **T**, то на занятость проверяется другая ячейка, если она свободна то **x**<sub>i</sub> заноситься в нее, иначе вновь проверяется другая ячейка, и так до тех пор, пока не найдется свободная или окажется, что все **M** ячеек таблицы заполнены.

ключ	13	27	19	29	52	63	4	35	18	07
хеш-значение	2	5	8	7	8	8	4	2	7	7

+ 13, 27, 19, 29

+ 52(2)

+ 18, 7(5,6)

i	ключ
0	
1	
2	13
3	
4 5	
5	27
6	
7	29
8	19
9	
10	

	- (-)
i	кл
0	
1	
2	13
3	
4	
5	27
6	
7	29
8	19
9	52
10	

-	кл
0	
1	
2	13
3	
4	
5	27
6	
7	29
8	19
9	52
10	63

+ 6	3(3)	+	4(1)	+ 3	35(2)	
i	кл	i	кл	i	кл	
0		0		0		
1		1		1		
2	13	2	13	2	13	
3		3		3	35	
4		4	4	4	4	
5	27	5	27	5	27	
6		6		6		
7	29	7	29	7	29	
8	19	8	19	8	19	
9	52	9	52	9	52	
10	63	10	63	10	63	

i	КЛ
0	
1	
2	13
3	35
4	4
5	27
6	
7	29
8	19
9	52
10	63

	КЛ	
0	18	
1	7	
2	13	
3		
4	4	
5	27	
6		
7	29	
8	19	
9	52	
10	63	

Среднее число сравнений для поиска 10 ключей:

```
Ключи 13, 27, 19, 29 ,4 по 1 сравнению ключи 52, 35 по 2 сравнения 63 - 3 сравнения,
```

18 - 5 сравнений,

7 - 6 сравнений

#### Итого:

$$5 + 2^2 + 3 + 5 + 6 = 23$$

23 сравнений, т.е. в среднем 2,3 сравнения на один ключ.

### Линейная адресация

(линейное исследование, linear probing), использует последовательность проверок, свободна ли ячейка с вычисл. индексом. Размер табл д.б. больше кол-ва ключей (M>N)

рекомендуемый размер хеш-таблицы: M=1.2\*N

Алгоритм построения хеш-таблицы:

(Ячейки таблицы - TABL[i], где 0 ≤ i< М

- N количество занятых узлов )
- 1. Установить i=h(K)
- 2. Если TABL[i] пуст, то перейти к шагу 4, иначе, если по этому адресу искомый эл-нт, алгоритм завершается.
- 3. Установить i=i– 1, если i< 0, то i=i+M. Вернуться к шагу 2.
- 4. Вставка, т.к. поиск оказался неудачным. Если N=M— 1, то алгоритм завершается по переполнению. Иначе увеличить N, пометить ячейку TABL[i] как занятую и установить в нее значение ключа K.

- алгоритм хорошо работает в начале заполнения таблицы
- Пример: ключи целые (значение хеш)
- ключи: 15(4), 17(6), 19(8), 37(4), 5(5), 28(6) M=11

индекс	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ключ					15	37	17	5	19	28

- + простота
- «кучкование»

#### Квадратичная адресация:

 $h=h+a^2$ ,

где а – это номер попытки.

Этот вид адресации достаточно быстр и предсказуем (1, 4, 9, 16, 25, 36 и т.д.).

Чем больше коллизий, тем дольше этот путь.

- + хорошее распределение по таблице
- занимает больше времени для просчета.

### Произвольная адресация:

использует заранее сгенерированный список случайных чисел для получения последовательности. Дает выигрыш в скорости, но несколько усложняет задачу программиста.

# Недостатки метода открытой адресации *(закрытого хеширования)*

- 1) он предполагает фиксированный размер таблицы. Если число записей превысит этот размер, то их невозможно вставлять без выделения таблицы большего размера и повторного вычисления значений хеширования для ключей всех записей, находящихся уже в таблице, используя новую хеш-функцию. (реструктуризация таблицы)
- **2)** из такой таблицы трудно удалить ключ (запись).

## Адресация с двойным хешированием

- Используются две хеш-функции h<sub>1</sub>(K) и h<sub>2</sub>(K). Последняя должна порождать значения в интервале от 1 до M– 1, взаимно простые с M.
- 1. Установить  $i=h_1(K)$
- 2. Если TABLE[i] пуст, то перейти к шагу 6, иначе, если по этому адресу искомый завершение.
- 3. Установить  $c=h_2(K)$
- 4. Установить i=i-c, если i<0, то i=i+M.
- 5. Если TABLE[i] пуст, то переход на шаг 6. Если искомое расположено по этому адресу, то завершение, иначе возвращаемся на шаг 4.
- 6. Вставка. Если N=M— 1, то алгоритм завершается по переполнению. Иначе увеличить N, пометить ячейку TABLE[i] как занятую и установить в нее значение ключа K.

- вариант дает значительно более хорошее распределение и независимые друг от друга цепочки. Но, он несколько медленнее из-за введения доп. функции.
- Д. Кнут предлагает несколько различных вариантов выбора доп. функции. Если М простое число и  $h_1(K) = K \mod M$ , то можно положить  $h_2(K)=1+(K \mod (M-1));$  но, если М нечетно, ( для простых чисел всегда), было бы лучше положить  $h_2(K)=1+(K \mod (M-2)).$
- Здесь обе функции достаточно независимы.
- Г. Кнотт в 1968 предложил при простом М использовать функцию:
- h<sub>2</sub>(K)=1, если h<sub>1</sub>(K)=0 и
- $h_2(K)=M-h_1(K)$  в противном случае (т.е.  $h_1(K)>0$ ).
- Этот метод выполняется быстрее повторного деления, но приводит к увеличению числа проб из-за повышения вероятности того, что два или несколько ключей пойдут по одному и тому же пути.

## Удаление элементов хеш-таблицы

- Очевидный способ удаления записей из закртытой хеш-таблицы не работает.
- Обрабатывать удаление можно, помечая элемент как удаленный, а не как пустой.
- Т. о. каждая ячейка в таблице будет содержать еще одно из трех значений: пустая, занятая, удаленная.
- При поиске удаленные элементы будут трактоваться как занятые, а при вставке – как пустые, соответственно.

# Применение хеширования

- Одно из побочных применений хеширования создается своего рода слепок, «отпечаток пальца» для сообщения, текстовой строки, области памяти и т. п. Он может стремиться как к «уникальности», так и к «похожести» (яркий пример слепка контрольная сумма СRC).
- В этом качестве применяется в криптографии. Здесь особенности: скорость вычисления д.б. минимальна, а сложность восстановления максимальна.
- Соответственно необходимо затруднить нахождение другого сообщения с тем же хеш-адресом.
- В российском стандарте цифровой подписи используется хеш-функция (256 бит) стандарта
- ΓΟCT P 34.11—94.

### Хеширование паролей

- Напр., для шифрования используется 128-битный ключ. Хеширование паролей позволяет запоминать не 128 байт (т.е.256 16-ричных цифр), а некот. осмысленное выражение, слово или послед-ность символов, называющуюся паролем.
- Существуют методы, преобразующие произносимую, осмысленную строку произвольной длины пароль, в указанный ключ заранее заданной длины. Часто для этого используются хеш-функции. В данном случае хеш-функцией (Х-Ф) называется такое математическое или алгоритмическое преобразование заданного блока данных, обладающее след. свойствами:
- X-Ф имеет бесконечную область определения,
- Х-Ф имеет конечную область значений,
- Х-Ф необратима,
- Изменение входного потока информации на один бит меняет около половины всех бит выходного потока, то есть результата X-Ф-ции
- Эти свойства позволяют подавать на вход хеш-функции пароли, то есть текстовые строки произвольной длины на любом национальном языке и, ограничив область значений функции диапазоном 0..2<sup>N-1</sup>, где N длина ключа в битах, получать на выходе достаточно равномерно распределенные по области значения блоки информации ключи.

#### Еще пример

Пользователь вводит пароль, от него вычисляется хеш, сверяется с тем, что лежит в базе.

Например, хеш-функция MD5 применима к любому тексту и на выходе получает строку фиксированной длины 128 бит. Хеши для возможных паролей вычисляются такими:

MD5("fdgdgdh dfhfgh") =
"1a503fd29bc6c64e1ffef9d0266b94e2"
MD5("qwerty") = "a86850deb2742ec3cb41518e26aa2d89"
MD5("Что такое хэш? Просьба написать упрощенно и незамысловато. ") =
"7baaa6aab5d700abdd7b2d7d6eb23e9f"

Эта функция просто вычисляется лишь в одну сторону. Т. е. посчитать по строке ее хеш легко, а получить из хеша исходную строку - вычислительно сложно и - это соответствие неоднозначно, т.к. могут быть коллизии. Т.О. даже если получить доступ к к.-.л. базе данных, паролей на руках не окажется!.

- Хеш-функции обычно являются частью механизма электронно-цифровой подписи. Технология ЭЦП является современной заменой обычной бумажной подписи и часто удобнее её.
- Рост известности понятия ЭЦП вполне согласуется с явлением роста электронного документооборота.
- хеш-функции могут использоваться для обнаружения искажений при доставке сообщений по сетевым каналам, в качестве псевдослучайного генератора, для усовершенствования защиты от подмен и подделок документов.
- Хеш-функции могут использоваться в качестве генератора случайных чисел. Правда по скорости они будут уступать обычным.