Функциональный анализ в примерах и задачах

С. В. Ревина Л. И. Сазонов

Оглавление

I Метрические пространства **4**

1 Основные понятия **5**

1.1 **Аксиомы метрики** . . . 5

1.2 **Примеры задания метрик на прямой** . . . 6

1.3 **Неравенства Гельдера и Минковского** . . . 8

1.4 **Метрики в $\mathbb{R}^n$** . . . 13

1.5 **Шары в метрических пространствах** . . . 16

1.6 **Сходимость последовательностей** . . . 18

1.7 **Эквивалентные метрики** . . . 18

1.8 **Декартово произведение метрических пространств** . . . 19

1.9 **Открытые и замкнутые множества** . . . 20

2 Пространства последовательностей **23**

2.1 **Определения пространств последовательностей** . . . 23

2.2 **Сходимость в пространствах последовательностей** . . . 25

2.3 **Связь между пространствами ℓ_p и S** . . . 27

2.4 **Сепарабельность** . . . 28

2.5 **Пример неархимедовой метрики** . . . 30

3 Пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций **36**

3.1 **Линейные нормированные пространства $C[a,b]$, $C^m[a,b]$** 36

3.2 **Примеры счетно-нормированных пространств** . . . 39

4 Пространства Лебега **41**

4.1 **Пространства $L_p(a,b)$, $1 \leqslant p < \infty$** . . . 41

4.2 **Экстремальные точки шара $\overline{S}_1(0)$ в пространствах $L_p(0,1)$** 47

4.3 **Пространство $L_\infty(a,b)$** . . . 51

4.4 **Пространства $L_{p,\ loc}(\Omega)$** . . . 54

5 Непрерывность отображений 56

6 Полнота метрических пространств 60
6.1 Определение полноты 60
6.2 Доказательство полноты 61
6.3 Пример неполного пространства 64
6.4 Теорема о пополнении 65
6.5 Принцип вложенных шаров и теорема Бэра 67

7 Принцип сжимающих отображений 70
7.1 Общие сведения 70
7.2 Применение к алгебраическим уравнениям и системам 72
7.3 Применение к интегральным и дифференциальным уравнениям 77

8 Линейные нормированные пространства 85
8.1 Банаховы пространства 85
8.2 Гильбертовы пространства 86
8.3 Эквивалентные нормы 90
8.4 Подпространство 91

9 Компактность в метрических пространствах 93
9.1 Относительная компактность и ограниченность 93
9.2 Критерий Хаусдорфа 95
9.3 Гильбертов кирпич 96
9.4 Отображения на компактных множествах 98
9.5 Компактность в $C[0,1]$ 102

10 Топологические пространства 106

Часть I

Метрические пространства

Глава 1

Основные понятия

В этой главе основные определения теории метрических пространств иллюстрируются простыми примерами, в основном относящимися к конечномерному случаю.

Для первоначального ознакомления с метрическими пространствами хорошо подходит книга [11, глава 1], в ней разобрано большое количество примеров. Можно также рекомендовать книги [9, 12, 13, 15, 7].

1.1 Аксиомы метрики

Абстрактное понятие метрики является обобщением понятия "расстояние". При этом свойства расстояния (неотрицательность; равенство нулю тогда и только тогда, когда точки пространства совпадают; симметричность; неравенство треугольника) положены в основу определения метрики.

Определение 1.1. *Метрикой на множестве X называется функция $\rho : X \times X \longmapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим трем аксиомам:*

$$1.\quad \rho(x,y) \geqslant 0, \quad \textit{причем} \quad \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$2.\quad \rho(x,y) = \rho(y,x);$$

$$3.\quad \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) \quad \forall x,y,z \in X.$$

Заметим, что перечисленные аксиомы не являются независимыми. Так, если в аксиоме треугольника 3 положить $x = y$, то, с учетом аксиомы симметричности 2, получим условие неотрицательности метрики из первой аксиомы

$$\rho(y, z) \geqslant 0.$$

Задача 1.1. *Докажите, что аксиомы метрики эквивалентны следующим двум аксиомам:*

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$.

Определение 1.2. *Метрическим пространством называется множество с заданной на нем метрикой, т.е. пара* (X, ρ).

Элементы метрического пространства называются точками (это могут быть функции, числовые последовательности, операторы и т.д.). В общем случае одно и то же множество X можно превратить в различные метрические пространства, задавая по-разному метрики. Приведем примеры метрических пространств.

1.2 Примеры задания метрик на прямой

Пример 1.1. *Пусть сначала* $X = \mathbb{R}$. *Стандартной метрикой на прямой называется метрика, которая задается по правилу*

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Очевидно, что первые две аксиомы выполняются по свойствам модуля, а третья следует из неравенства

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \tag{1.1}$$

если в нем положить $a = x - z$, $b = z - y$.

Помимо стандартной, существуют и другие метрики на прямой.

Пример 1.2. *Теперь зададим на* $X = \mathbb{R}$ *так называемую дискретную (или тривиальную) метрику:*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = y \\ 1 & \text{при} \quad x \neq y \end{cases} \tag{1.2}$$

Выполнение первых двух аксиом метрики очевидно. Неравенство треугольника могло бы не выполняться только в одном случае: если в левой части этого неравенства находится единица:

$$\rho(x, y) = 1,$$

а в правой части — ноль:

$$\rho(x, z) = 0, \quad \rho(z, y) = 0.$$

Но тогда $x = z = y$. Следовательно, $\rho(x, y) = 0$ — противоречие.

Задача 1.2. *Пусть X — произвольное множество. Докажите, что (1.2) определяет метрику на X.*

Пример 1.3. *Пусть $X = \mathbb{R}$. Зададим метрику по правилу*

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Первые две аксиомы метрики, очевидно, выполняются. Для доказательства третьего свойства достаточно проверить выполнение неравенства

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}. \tag{1.3}$$

В свою очередь (1.3) следует из неравенства

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqslant \frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|}. \tag{1.4}$$

Если рассмотреть функцию $f(t) = \dfrac{t}{1 + t}$ на множестве неотрицательных чисел, то (1.4) можно трактовать как свойство неубывания функции $f(t)$. Легко убедиться, что $f(t)$, действительно, является возрастающей функцией.

Задача 1.3. *Пусть X - произвольное множество, $\rho(x, y)$ - метрика на нем. Покажите, что функции*

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}, \quad \rho_2(x, y) = min(\rho(x, y), 1)$$

— метрики на X.

Задача 1.4. *Докажите, что*

$$\rho(x, y) = |arctg(x) - arctg(y)|$$

является метрикой на $\mathbb{R}$.

Задача 1.5. *Каким условиям должна удовлетворять определенная на* $\mathbb{R}$ *непрерывная функция* $u = f(v)$, *чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику с помощью равенства*

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|?$$

1.3 Неравенства Гельдера и Минковского

Чтобы проверить выполнение неравенства треугольника для основных примеров метрических пространств, нам понадобится неравенство Минковского. В следующей серии упражнений устанавливается справедливость неравенства Минковского для конечных сумм, а затем оно распространяется на ряды.

Определение 1.3. *Числа* p *и* q *называются сопряженными показателями, если они удовлетворяют условиям*

$$1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Задача 1.6. *Докажите, что для любых неотрицательных чисел* a *и* b *и сопряженных показателей* p *и* q *справедливо неравенство Юнга*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.5}$$

Указание. Считая $b \geqslant a > 0$, разделите обе части неравенства (1.5) на b^q и рассмотрите функцию

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x$$

при $x \geqslant 1$.

Задача 1.7. *Докажите, что в неравенстве Юнга достигается равенство*

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

тогда и только тогда, когда $a^p = b^q$.

Пример 1.4. *Пусть*

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$, *для любых неотрицательных* a *и* b *выполняется интерполяционное неравенство Юнга*

$$ab \leqslant \varepsilon a^{\frac{1}{\alpha}} + \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\beta}} b^{\frac{1}{\beta}}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Заменим в (1.5)

$$a \to \varepsilon^{\frac{1}{p}} a, \quad b \to \varepsilon^{-\frac{1}{p}} b.$$

Тогда, по неравенству Юнга, с учетом условий $p > 1$, $q > 1$:

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}} b^q}{q} \leqslant \varepsilon a^p + \varepsilon^{-\frac{q}{p}} b^q.$$

Полагая $\alpha = \dfrac{1}{p}$, $\beta = \dfrac{1}{q}$, приходим к (1.6). □

Задача 1.8. *Воспользовавшись неравенством Юнга (1.5), установите неравенство Гельдера для конечных числовых наборов*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right\}^{1/q}, \tag{1.7}$$

где p *и* q *— сопряженные показатели.*

Указание. Разделите обе части (1.7) на правую часть и примените почленно неравенство Юнга (1.5).

Задача 1.9. *Выведите условия, при которых в неравенстве Гельдера (1.7) достигается знак равенства:*

$$\frac{|a_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|^p} = \frac{|b_i|^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} |b_i|^q}, \quad \operatorname{sgn} a_i b_i = const, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.8}$$

При $p = q = 2$ неравенство Гельдера (1.7) называется неравенством Коши-Буняковского:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right\}^{1/2}. \tag{1.9}$$

Если ввести обозначения

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n),$$

через $\|a\|$, $\|b\|$ обозначить евклидову норму (длину) векторов a и b соответственно,

$$\|a\| = \left\{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right\}^{1/2}, \quad \|b\| = \left\{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right\}^{1/2},$$

а через (a, b) — их скалярное произведение

$$(a, b) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

то неравенство Коши-Буняковского примет вид

$$|(a, b)| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|. \tag{1.10}$$

Так как скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$ равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$(a, b) = \|a\| \cdot \|b\| \cos(a \hat{,} b),$$

то неравенство Коши-Буняковского допускает простую геометрическую трактовку — косинус угла между векторами a и b по модулю не превосходит единицу!

Знак равенства в неравенстве (1.10) имеет место тогда и только тогда, когда векторы a и b коллинеарны:

$$a = Cb.$$

В следующих разделах будет показано, что вид неравенства (1.10) и его геометрический смысл сохраняется для абстрактных гильбертовых пространств.

Пример 1.5. *Выведем неравенство Минковского*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}, \tag{1.11}$$

$1 \leqslant p < \infty$ *из неравенства Гельдера (1.7).*

Доказательство. Для случая $p = 1$ неравенство Минковского следует из элементарного неравенства для модулей

$$|a_k+b_k| \leqslant |a_k|+|b_k|. \tag{1.12}$$

Пусть теперь $p > 1$. Применив (1.12), приходим к неравенству

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p = \sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k||a_k+b_k|^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}|a_k||a_k+b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}|b_k||a_k+b_k|^{p-1}.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части по неравенству Гельдера:

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

С учетом того, что $(p-1)q = p$, последнее неравенство преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p}\right) \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p},$$

откуда следует (1.11).

□

Задача 1.10. *Сформулируйте условия, при которых в неравенстве Минковского (1.11) достигается знак равенства.*

Аналогично выводятся неравенства Гельдера и Минковского для рядов.

Задача 1.11. *Выведите неравенство Гельдера для рядов*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k\right| \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right\}^{1/p} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q\right\}^{1/q}, \tag{1.13}$$

в предположениях, что p и q — сопряженные показатели, и ряды в правой части неравенства сходятся.

Задача 1.12. *Выведите неравенство Минковского для рядов*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{1.14}$$

в предположении, что ряды в правой части неравенства сходятся.

Пусть, по-прежнему, p и q подчиняются соотношению

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

но p – положительное число, меньшее 1: $0 < p < 1$. Тогда q будет отрицательным:

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} < 0, \quad q < 0.$$

Оказывается, что в этом случае знак в неравенстве Юнга меняется на противоположный.

Задача 1.13. *Докажите, что для любых положительных чисел a и b и показателей p и q, удовлетворяющих условиям*

$$0 < p < 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

справедливо обратное неравенство Юнга

$$ab \geqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.15}$$

Указание. Для функции $y = x^{p-1}$ при $x > 0$ рассмотрите три ситуации: 1)$b > a^{p-1}$; 2)$b = a^{p-1}$; 3)$b < a^{p-1}$.

Если $0 < p < 1$, то в неравенствах Гельдера и Минковского, так же, как в неравенстве Юнга, знак меняется на противоположный.

Задача 1.14. *Докажите, что для любых положительных $a_i > 0$, $b_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$ и показателей p и q, удовлетворяющих условиям*

$$0 < p < 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

выполняется обратное неравенство Гельдера

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k^q \right\}^{1/q}, \tag{1.16}$$

Доказательство аналогично доказательству неравенства Гельдера, только вместо обычного неравенства Юнга применяется обратное.

Из обратного неравенства Гельдера (1.16) можно получить обратное неравенство Минковского.

Задача 1.15. *Докажите, что для любых положительных $a_i > 0$, $b_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$ и показателя p, удовлетворяющего условию $0 < p < 1$, справедливо обратное неравенство Минковского*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p \right)^{1/p}, \tag{1.17}$$

Аналогично формулируются и доказываются обратные неравенства Гельдера и Минковского для рядов.

1.4 Метрики в $\mathbb{R}^n$

Все метрические пространства, рассматриваемые в данном разделе, обладают важным свойством — они являются линейными нормированными. Дадим определение линейного нормированного пространства.

Определение 1.4. *Линейное пространство X над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ называется нормированным, если определена функция $\|\cdot\| : X \longmapsto \mathbb{R}$, называемая нормой и удовлетворяющая следующим аксиомам:*

1. $\|x\| \geqslant 0$, *причем* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$*(или* $\mathbb{C}$*)*;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$.

Каждое линейное нормированное пространство является метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Задача 1.16. *Какие из метрических пространств на $\mathbb{R}$, рассмотренные в примерах предыдущего раздела, являются линейными нормированными?*

Пример 1.6. *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Аналогом стандартной метрики на прямой является*

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Первые две аксиомы метрики, очевидно, выполняются. Неравенство треугольника следует из (1.1).

Метрика ρ_1 используется в теории кодирования. Пусть

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i = 0 \vee x_i = 1\}$$

— множество вершин единичного куба в $\mathbb{R}^n$. Расстояние между двумя вершинами — число перемен нулей и единиц, необходимое, чтобы получить из координат одной вершины координаты другой. Каждая такая перемена есть переход вдоль одного из ребер куба. Таким образом, ρ_1 есть кратчайший путь по ребрам куба между рассматриваемыми его вершинами.

Пространство $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$ является линейным нормированным. Норма $\|x\|_1$ определяется как расстояние от x до 0:

$$\|x\|_1 = \rho(x, 0) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Пример 1.7. *Определим на $\mathbb{R}^n$ евклидову метрику*

$$\rho_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$$

Расстояние между точками в этой метрике — среднее квадратичное уклонение.

В евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ помимо нормы

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

можно ввести скалярное произведение

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Пример 1.8. *На $\mathbb{R}^n$ можно также определить метрику ρ_p по правилу:*

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

p фиксировано.

Первая и вторая аксиомы метрики очевидны, аксиома треугольника следует из неравенства Минковского (1.11).

Пример 1.9. *Пусть опять $X = \mathbb{R}^n$. Устремив $p \to \infty$ в выражении для метрики $\rho_p(x,y)$ при фиксированных x и y, получим функцию*

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|,$$

которая также определяет метрику в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Докажем, что

$$\lim_{p\to\infty} \rho_p(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|. \tag{1.18}$$

Представим выражение $\rho_p(x,y)$ в виде

$$\rho_p(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - y_i|^p}{\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|^p}\right)^{1/p}$$

Для второго сомножителя справедливо двойное неравенство

$$1^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - y_i|^p}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|^p} \right)^{1/p} \leqslant n^{\frac{1}{p}}.$$

Устремив p к бесконечности, получим, что выражение в центральной части неравенства стремится к единице. Таким образом, (1.18) доказано.

Аксиомы метрики для

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|,$$

очевидно, выполняются. □

1.5 Шары в метрических пространствах

Определение 1.5. *Открытым шаром радиуса r с центром в точке x в метрическом пространстве (X, ρ) называется множество*

$$S_r(x) = \{y \in X : \rho(y, x) < r\}.$$

Замкнутым шаром радиуса r с центром в точке x называется множество

$$\overline{S}_r(x) = \{y \in X : \rho(y, x) \leqslant r\}.$$

Из определения следует, что шар — непустое множество, центр шара всегда ему принадлежит.

Задача 1.17. *Нарисуйте шар $S_1(0)$ на плоскости $X = \mathbb{R}^2$, выбрав в качестве метрик*

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2},$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1\leqslant i\leqslant 2} |x_i - y_i|.$$

А может ли шар быть квадратом для евклидовой метрики? Приведите пример соответствующего пространства.

Так как метрическое пространство не обязано быть линейным, в нем могут происходить необычные явления.

Задача 1.18. *Может ли в метрическом пространстве шар большего радиуса лежать строго внутри шара меньшего радиуса [15, с. 36]?*

Пример 1.10. *Докажем, что в метрическом пространстве невозможно строгое включение* $S_2(x) \subset S_1(y)$.

Доказательство. Предположим, что все точки шара $S_2(x)$ принадлежат шару $S_1(y)$, и это включение строгое. Это означает, что для любой точки $t \in S_2(x)$ выполняется условие $t \in S_1(y)$, но найдется точка $z \in S_1(y)$, которая не принадлежит "меньшему"шару: $z \notin S_2(x)$.

Взяв в качестве точки t центр шара радиуса 2, из условия $t \in S_1(y)$ выводим, что расстояние между центрами рассматриваемых шаров меньше единицы:

$$\rho(x, y) < 1.$$

В то же время

$$\rho(y, z) < 1; \quad \rho(z, x) \geqslant 2.$$

Оценив расстояние между z и x по неравенству треугольника, приходим к противоречию:

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, z) < 1 + 1 = 2.$$

□

Задача 1.19. *Сформулируйте обобщение утверждения предыдущего примера.*

Пример 1.11. *В теории распознавания образов применяется пространство Хемминга* (Ω_n, ρ^σ). *Через* Ω_n *обозначено множество векторов*

$$\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$$

с двоичными координатами $\omega_i = 0$ *или* $\omega_i = 1$, $i = 1, \dots n$,

$$\rho^\sigma(\omega, \tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i |\omega_i - \tilde{\omega}_i|,$$

$\sigma_i > 0$ — *заданы.*

Задача 1.20. *Докажите, что в метрическом пространстве Хемминга существуют шары, имеющие несколько центров. Приведите пример шара в* (Ω_n, ρ^σ)*, совпадающего со множеством своих центров.*

1.6 Сходимость последовательностей

Определение 1.6. *Последовательность* $x_n \in X$ *сходится к точке* $x \in X$*, если*

$$\rho(x_n, x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 1.7. *Последовательность* x_n *называется ограниченной, если она содержится в некотором шаре.*

Из определения метрики следуют общие свойства сходящихся последовательностей.

Задача 1.21. *Докажите, что из сходимости последовательности в метрическом пространстве следует сходимость любой ее подпоследовательности; предел сходящейся последовательности единственен; из сходимости последовательности следует ее ограниченность [11, с. 16].*

1.7 Эквивалентные метрики

Определение 1.8. *Две метрики* ρ_1 *и* ρ_2 *называются эквивалентными, если существуют константы* C_1,C_2>0 *такие, что* $\forall x, y \in X$

$$C_1\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant C_2\rho_1(x, y)$$

Задача 1.22. *Докажите, что последовательности одновременно сходятся или расходятся в эквивалентных метриках.*

Задача 1.23. *Пусть* X *- произвольное множество,* $\rho(x, y)$ *- метрика на нем, а метрика* $\rho_1(x, y)$ *задана по правилу*

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

Найдите условия, при которых метрики ρ *и* ρ_1 *эквивалентны.*

Задача 1.24. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Найдите условие эквивалентности следующих метрик на $\mathbb{R}$*

$$\rho_1(x,y) = |x-y|, \quad \rho_2(x,y) = |f(x) - f(y)|.$$

Задача 1.25. *Являются ли метрики*

$$\rho_1(x,y) = |x-y|, \quad \rho_2(x,y) = |arctg(x) - arctg(y)|.$$

эквивалентными на всей вещественной оси, на конечном интервале?

Задача 1.26. *Докажите, что*

$$\rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad \rho_\infty(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$$

являются эквивалентными метриками на $\mathbb{R}^n$.

Задача 1.27. *Пусть метрика ρ_p задается по правилу*

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

Проверьте, что метрики $\rho_p(x,y)$, $\rho_q(x,y)$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ являются эквивалентными метриками на $\mathbb{R}^n$.

1.8 Декартово произведение метрических пространств

Если (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) — два метрических пространства, то в прямом произведении $X_1 \times X_2$ можно ввести метрики

$$\begin{aligned} d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) &= \left(\rho_1^2(x_1,y_1) + \rho_2^2(x_2,y_2)\right)^{1/2}, \\ d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) &= \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2), \end{aligned}$$

$$d_3((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max(\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2))$$

$\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in X_1 \times X_2$.

Задача 1.28. *Покажите, что метрики d_1, d_2, d_3 эквивалентны.*

В силу эквивалентности этих метрик, на декартовом произведении метрических пространтв можно определить метрику любым из указанных способов. Таким образом, пара $(X_1 \times X_2, d)$, где в качестве метрики d берется любая из указанных метрик, является метрическим пространством.

Заметим, что сходимость в $X_1 \times X_2$ — "покоординатная":

$$(x_1, x_2) \longmapsto (y_1, y_2) \Leftrightarrow \rho_1(x_1, y_1) \to 0, \rho_2(x_2, y_2) \to 0.$$

Задача 1.29. *Докажите, что для любых четырех точек x, y, z, t метрического пространства справедливы неравенства:*

1. $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leqslant \rho(x, y);$
2. $|\rho(x, z) - \rho(y, t)| \leqslant \rho(x, y) + \rho(z, t)$

(неравенство четырехугольника).

Задача 1.30. *Докажите, что метрика $\rho : X \times X \longmapsto \mathbb{R}$ — непрерывная функция [15, с. 32].*

1.9 Открытые и замкнутые множества

Определение 1.9. *Множество называется открытым в X, если вместе с каждой своей точкой x оно содержит и некоторый шар $S_r(x)$.*

Определение 1.10. *Точка $x \in X$ называется предельной точкой множества $M \subset X$, если существует последовательность $x_n \in M$, $x_n \neq x$, сходящаяся к x.*

Определение 1.11. *Замыканием множества A (обозначение — $\overline{A}$) называется объединение этого множества и множества всех его предельных точек.*

Определение 1.12. *Множество замкнуто, если оно совпадает со своим замыканием.*

Пример 1.12. *Зададим на прямой $X = \mathbb{R}$ стандартную метрику*

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Тогда интервал (a, b) является открытым множеством, отрезок $[a, b]$ — замкнутым множеством, а полуинтервал $[a, b)$ не является ни открытым, ни замкнутым множеством.

Пример 1.13. *Однако, если метрику оставить прежней*

$$\rho(x, y) = |x - y|,$$

а в качестве всего пространства рассматривать интервал $X = (a, b)$, то он будет как открытым, так и замкнутым множеством. То же самое справедливо для отрезка и полуинтервала.

Замыкание открытого шара $S_r(x)$ будем обозначать через $\overline{S_r(x)}$, в отличие от замкнутого шара $\overline{S}_r(x)$. В метрических пространствах $\overline{S_r(x)}$ и $\overline{S}_r(x)$ не обязаны совпадать.

Задача 1.31. *Докажите, что открытый шар в метрическом пространстве есть открытое множество, замкнутый шар — замкнутое множество.*

Пример 1.14. *Пусть X – произвольное множество. Определим на X дискретную метрику:*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = y \\ 1 & \text{при} \quad x \neq y \end{cases}$$

Докажем, что любое подмножество X является одновременно и открытым, и замкнутым множеством.

Доказательство. Любое подмножество пространства X открыто, так как вместе с любой точкой x в нем содержится шар $S_{1/2}(x)$ (этот шар состоит из одной точки!).

Любое подмножество пространства X замкнуто. Если оно состоит из одной точки, то у него нет предельных точек. Если оно состоит более чем из одной точки — то тоже нет, в силу специфики задания метрики. □

Задача 1.32. *Докажите, что замыкание открытого шара в метрическом пространстве содержится в замкнутом шаре, но может с ним не совпадать [15, с. 37].*

Задача 1.33. *Пусть* F_1 *и* F_2 *— замкнутые множества в метрическом пространстве и* $F_1 \bigcap F_2 = \varnothing$. *Постройте открытые множества* U_1 *и* U_2 *такие, что*

$$F_1 \subset U_1, \quad F_2 \subset U_2 \quad \text{и} \quad U_1 \bigcap U_2 = \varnothing.$$

Задача 1.34. *Пусть* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *– система открытых множеств в метрическом пространстве* X. *Покажите, что*

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha, \quad \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

— открытые множества.

Задача 1.35. *Сформулируйте и докажите соответствующие утверждения для замкнутых множеств.*

Задача 1.36. *Докажите, что открытое множество можно представить в виде объединения шаров.*

Задача 1.37. *Докажите, что замкнутое множество можно представить в виде пересечения дополнений к шарам.*

Задача 1.38. *Докажите, что множество* M *в метрическом пространстве открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда его дополнение* X/M *замкнуто (открыто).*

Глава 2

Пространства последовательностей

Непосредственным обобщением на бесконечномерный случай пространств $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ являются пространства последовательностей ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$ и ℓ_∞. Важную роль в приложениях играет также пространство всех последовательностей S.

2.1 Определения пространств последовательностей

Рассмотрим множество числовых последовательностей

$$x = (x_1, x_2, ...).$$

Оно является линейным пространством. Для того чтобы на этом множестве определить норму по правилу

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty.$$

Таким образом, приходим к определению пространства ℓ_1:

$$\ell_1 = \left\{ x = (x_1, x_2, ...) \left| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty, \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i| \right. \right\}$$

Аналогично определяется ℓ_2

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, ...) \left| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty, \quad \rho_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \right. \right\}$$

Помимо нормы,

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

в ℓ_2 можно задать скалярное произведение

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

Забегая вперед, отметим, что ℓ_2 называется координатным гильбертовым пространством, так как любое сепарабельное гильбертово пространство изоморфно ℓ_2.

Для любого вещественного p, $1 \leqslant p < \infty$, пространства ℓ_p определяются так:

$$\ell_p = \left\{ x = (x_1, x_2, ...) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty, \quad \rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \right\}$$

Выполнение аксиомы треугольника в ℓ_p следует из неравенства Минковского для рядов (1.14).

ℓ_p является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Бесконечномерным аналогом пространства $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ является пространство ограниченных числовых последовательностей

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_1, x_2, ...) \,\middle|\, \sup_{1 \leqslant i < \infty} |x_i| < \infty, \quad \rho_\infty(x, y) = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |x_i - y_i| \right\}$$

Пример 2.1. *Покажем, что*

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}. \tag{2.1}$$

является метрикой в пространстве S всех числовых последовательностей.

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{2^k}\frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|} \leqslant \frac{1}{2^k},$$

то ряд (2.1) сходится.

Первая и вторая аксиомы метрики, очевидно, выполняются. Неравенство треугольника следует из неравенства (1.3)

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

которое было доказано в первой главе. □

Задача 2.1. *Можно ли в пространстве S задать норму, согласованную с метрикой данного пространства (2.1)?*

2.2 Сходимость в пространствах последовательностей

Пример 2.2. *Докажем, что сходимость в пространстве S совпадает с покоординатной сходимостью.*

Доказательство. Пусть последовательность $x^{(n)}$ сходится к некоторому элементу x в пространстве S. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер элемента последовательности N такой, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1+|x_k^{(n)} - x_k|} < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Зафиксируем номер координаты k. Тогда

$$\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1+|x_k^{(n)} - x_k|} < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Так как ε произвольно, а k фиксировано, то последнее неравенство означает, что

$$|x_k^{(n)} - x_k| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{2.2}$$

то есть из сходимости последовательности в S следует покоординатная сходимость.

Обратно, пусть выполняется (2.2). Докажем сходимость последовательности $x^{(n)}$ в S.

Так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

сходится, то остаток ряда стремится к нулю:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m : \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\rho(x^{(n)}, x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k|} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)} - x_k|}{1 + |x_k^{(n)} - x_k|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(первое слагаемое мало за счет покоординатной сходимости, так как число слагаемых конечно.) □

Задача 2.2. *Докажите, что сходимость в пространствах ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ включает покоординатную сходимость. Верно ли обратное?*

Пример 2.3. *Исследуем сходимость следующих последовательностей в пространствах ℓ_p, ℓ_∞, S:*

а) $x^{(n)} = (1, \; 2, \; \ldots, \; n, \; 0, \; \ldots);$
б) $y^{(n)} = (1/n, \; 1/n, \; \ldots, \; 1/n, \; 0, \; \ldots);$

Сначала найдем покоординатный предел. Для первой последовательности он имеет вид

$$x = (1, 2, \ldots, n, \ldots).$$

Следовательно, последовательность $x^{(n)}$ сходится в пространстве S.

Она не сходится ни в одном из пространств ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$. Действительно, покоординатный предел не принадлежит этим пространствам: $x \notin \ell_p$, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда: $x_i \not\to 0$ при $i \to \infty$.

Последовательность $x^{(n)}$ не сходится также в пространстве ℓ_∞. Покоординатный предел не принадлежит этому пространству, так как

$$\sup_{1 \leqslant i < \infty} |x_i| = \infty.$$

Покоординатный предел второй последовательности – последовательность, состоящая из нулей:

$$y = (0, 0, \ldots).$$

Следовательно, последовательность $y^{(n)}$ сходится в S.

Сходимость в пространстве ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$ означает, что

$$\rho(y^{(n)}, y) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{n^{\frac{p-1}{p}}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому $y^{(n)}$ сходится в ℓ_p при $1 < p < \infty$.

Наконец, последовательность сходится в ℓ_∞, так как

$$\rho_\infty(y^{(n)}, y) = \sup_{1 \leqslant i < \infty} \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Задача 2.3. *В каких из пространств ℓ_p, ℓ_∞, S сходятся следующие последовательности $(\alpha > 0)$:*

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ x^{(n)} = (1,\ 1,\ \ldots,\ \underbrace{1}_{n},\ 0,\ \ldots); \\ &\text{б)}\ x^{(n)} = (1/n^\alpha,\ 1/n^\alpha,\ \ldots,\ 1/n^\alpha,\ 0,\ \ldots)? \end{aligned}$$

2.3 Связь между пространствами ℓ_p и S

Пример 2.4. *Докажем, что для пространств последовательностей выполняются теоретико-множественные включения*

$$\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset \ell_\infty \subset S, \quad 1 < p < q < \infty.$$

Доказательство. Очевидно, что пространство всех последовательностей S охватывает все пространства ℓ_p.

По определению, пространству ℓ_p принадлежат те последовательности, для которых ряд
$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$$
сходится. Следовательно, общий член ряда должен стремиться к нулю.

Если $x_i \to 0$ при $i \to \infty$, и $p < q$, то
$$|x_i|^q < |x_i|^p.$$
Поэтому
$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q < \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p.$$
Следовательно, $\ell_p \subset \ell_q$ при $p < q$.

Кроме того, из сходимости последовательности x_n следует ее ограниченность. Поэтому $\ell_q \subset \ell_\infty$. □

Задача 2.4. *Из результатов предыдущего примера следует, что на ℓ_1 определены все метрики пространств ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и S. Докажите, что они попарно неэквивалентны.*

2.4 Сепарабельность

Определение 2.1. *Множество M плотно в множестве N, если $\overline{M} \supset N$.*

Определение 2.2. *Если M плотно во всем пространстве X, то говорят, что M всюду плотно в X.*

Определение 2.3. *Метрическое пространство (X, ρ) называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.*

Задача 2.5. *Пользуясь тем, что множество рациональных чисел Q всюду плотно в $\mathbb{R}$, приведите пример счетного всюду плотного множества в $\mathbb{R}^n$, установив тем самым сепарабельность этого пространства.*

Пример 2.5. *Докажем, что ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$ — сепарабельные метрические пространства.*

Доказательство. Докажем, что в ℓ_p при $1 \leqslant p < \infty$ существует счетное всюду плотное множество. Пусть

$$M = \{x_0| \quad x_0 = (r_1,\ r_2, \dots,\ r_n, 0, \dots)\},$$

где $r_i \in \mathbb{Q}$ — произвольные рациональные числа , n — произвольное натуральное число. Тогда M счетно.

Докажем, что M всюду плотно в ℓ_p. Надо показать, что любой элемент $x \in \ell_p$ можно приблизить элементами из M, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\ \ x \in l_p\ \exists\, x_0 \in M:\ \|x - x_0\|_{\ell_p} < \varepsilon.$$

Т. к. $x \in l_p$, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$$

сходится. Тогда остаток этого ряда стремится к нулю, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n:\ \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

По данному номеру n подберем элемент $x_0 \in M$ вида

$$x_0 = (r_1,\ r_2, \dots,\ r_n, 0, \dots)$$

такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - r_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|x - x_n\|_{\ell_p}^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$$

и счетное всюду плотное множество построено. □

Пример 2.6. *Докажем, что ℓ_∞ — не сепарабельно.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$M = \{x \in l_\infty | x_i = 0 \text{ или } x_i = 1\}.$$

Так как множеству M можно поставить во взаимно-однозначное соответствие множество всех подмножеств натурального ряда, то M имеет мощность континуума.

Если два различных элемента x и y принадлежат множеству M, то расстояние между ними равно единице:

$$\|x - y\|_{\ell_\infty} = 1.$$

Таким образом, в пространстве ℓ_∞ существует континуум элементов, отстоящих друг от друга на расстояние, равное единице.

Доказательство несепарабельности пространства проведем от противного. Предположим, что пространство сепарабельно. Тогда существует всюду плотное множество K в ℓ_∞. Рассмотрим шар с центром в произвольной точке множества K с радиусом, равным $\dfrac{1}{3}$.

Если K всюду плотно, вне этих шаров нет элементов пространства — каждый из элементов ℓ_∞ попал хотя бы в один такой шар. Шаров счетное число, а в пространстве существует множество мощности континуума. Следовательно, хотя бы в один шар попали две различные точки из множества M. Обозначим их m_1 и m_2. Тогда

$$\|m_1 - m_2\|_{\ell_\infty} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Но так как

$$\|m_1 - m_2\|_{\ell_\infty} = 1,$$

следовательно, приходим к противоречию. □

Задача 2.6. *Докажите сепарабельность пространства S [11, с. 24, 55].*

2.5 Пример неархимедовой метрики

Пример 2.7. *В множестве всевозможных последовательностей натуральных чисел для элементов*

$$x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots), \quad y = (m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$$

обозначим через $k_0(x, y)$ наименьший индекс, при котором $n_k \neq m_k$. Докажем, что:

а)

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ \frac{1}{k_0(x,y)} & x \neq y \end{cases}$$

есть метрика на X;

б) аксиома треугольника выполняется в X в усиленной форме:

$$\rho(x, z) \leqslant \max(\rho(x, y), \rho(y, z)); \tag{2.3}$$

в) если $\rho(x, y) \neq \rho(y, z)$, то $\rho(x, z) = \max(\rho(x, y), \rho(y, z))$;

г) любой открытый шар $S_r(x)$ является одновременно замкнутым множеством и $S_r(y) = S_r(x)$ для любого $y \in S_r(x)$;

д) любой замкнутый шар $\overline{S}_r(x)$ является одновременно открытым множеством и $\overline{S}_r(y) = \overline{S}_r(x)$ для любого $y \in \overline{S}_r(x)$;

е) если два шара в X имеют общую точку, то один из них содержится в другом;

ж) расстояние между двумя различными открытыми шарами радиуса r, содержащимися в замкнутом шаре радиуса r, равно r;

з) пространство X сепарабельно;

и) последовательность $x_n \in X$ фундаментальна, тогда и только тогда, когда

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

к) пространство X полно.

Доказательство. Докажем пункты а)—д) сформулированных утверждений.

Первая и вторая аксиомы метрики, очевидно, выполняются. Для доказательства неравенства треугольника достаточно установить, что выполняется неравенство (2.3).

Докажем (2.3). Рассмотрим три случая: 1) $\rho(x, y) > \rho(y, z)$; 2) $\rho(x, y) < \rho(y, z)$; 3) $\rho(x, y) = \rho(y, z)$.

В первом случае, если $x = z$, то (2.3) выполняется. Если $x \neq z$, то из неравенства

$$\rho(x, y) > \rho(y, z)$$

следует, что
$$k_0(x, y) < k_0(y, z).$$
То есть до координаты $k_0(x, y)$ включительно элементы y и z неразличимы. Начиная с $k_0(x, y)$ элемент x отличается от y, следовательно, x отличается от z. Тогда $k_0(x, z) = k_0(x, y)$, то есть
$$\rho(x, z) = \rho(x, y).$$
Итак, доказана импликация:
$$\rho(x, y) > \rho(y, z) \Longrightarrow \rho(x, z) = \rho(x, y).$$

Аналогично, поменяв местами в последнем рассуждении x и z, во втором случае получим:
$$\rho(x, y) < \rho(y, z) \Longrightarrow \rho(x, z) = \rho(y, z).$$

Наконец, в третьем случае, из равенства $\rho(x, y) = \rho(y, z)$ следует, что $k_0(x, y) = k_0(y, z)$. Но тогда должно выполняться неравенство
$$k_0(x, z) \geqslant k_0(x, y).$$
Действительно, если предположить, что $k_0(x, z) < k_0(x, y)$, то, повторяя те же рассуждения, что и в первом случае, придем к равенству
$$k_0(y, z) = k_0(x, z),$$
из которого следует, что
$$k_0(y, z) = k_0(x, z) < k_0(x, y),$$
что противоречит предположению. Тогда
$$\rho(x, y) = \rho(y, z) \Longrightarrow \rho(x, z) \leqslant \rho(y, z).$$
Выполнение аксиомы треугольника в усиленной форме (2.3) доказано.

Попутно доказано и утверждение пункта в): если $\rho(x, y) \neq \rho(y, z)$, то
$$\rho(x, z) = \max(\rho(x, y), \rho(y, z)).$$

Теперь докажем, что любой открытый шар $S_r(x)$ является одновременно замкнутым множеством, причем выполняется равенство:

$$\overline{S_r(x)} = S_r(x). \tag{2.4}$$

В рассматриваемом пространстве открытый шар радиуса r определяется следующим образом:

$$S_r(x) = \left\{ z : k_0(x, z) > \frac{1}{r} \right\} \bigcup \{z = x\}$$

Докажем, что шар $S_r(x)$ содержит все свои предельные точки.

Точка x_* называется предельной точкой шара $S_r(x)$, если существует последовательность

$$z_n \in S_r(x), \quad z_n \neq x$$

такая, что

$$\rho(z_n, x_*) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Для данной метрики это означает, что

$$k_0(x, z_n) > \frac{1}{r}, \quad k_0(z_n, x_*) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Требуется доказать, что для любой предельной точки шара x_* выполняется неравенство $\rho(x, x_*) < r$, то есть

$$k_0(x, x_*) > \frac{1}{r} \quad \text{или} \quad x = x_*.$$

Предположим противное: $k_0(x, x_*) \leqslant \dfrac{1}{r}$. Так как для достаточно больших n выполняется неравенство

$$k_0(z_n, x_*) > k_0(x, z_n),$$

то $k_0(x, x_*) = k_0(x, z_n)$. Но правая часть этого равенства больше $\dfrac{1}{r}$, а левая, по предположению, не превосходит $\dfrac{1}{r}$ — противоречие. Равенство (2.4) доказано.

Теперь докажем, что для любого $y \in S_r(x)$ шар с центром в точке y радиуса r совпадает с шаром с центром в точке x радиуса r:

$$S_r(x) = S_r(y).$$

Сначала покажем, что

$$S_r(y) \subset S_r(x).$$

Пусть $z \in S_r(y)$, то есть

$$k_0(y,z) > \frac{1}{r}.$$

Так как $y \in S_r(x)$, то $k_0(x,y) > \frac{1}{r}$. Докажем, что $z \in S_r(x)$, то есть

$$k_0(x,z) > \frac{1}{r}.$$

Действительно, если $y \neq z \neq x$, то

$$k_0(x,z) = \min(k_0(y,z), k_0(x,y)) > \frac{1}{r}.$$

Если же $z = y$, то

$$k_0(x,z) \geqslant k_0(x,y) > \frac{1}{r}.$$

Аналогично для $z = x$.

Включение $S_r(x) \subset S_r(y)$ доказывается заменой в предыдущем рассуждении x на y.

Докажем, что любой замкнутый шар $\overline{S}_r(x)$ является одновременно открытым множеством. По определению,

$$\overline{S}_r(x) = \left\{ z : k_0(x,z) \geqslant \frac{1}{r} \right\} \bigcup \{z = x\}$$

Требуется доказать, что для любой точки $z \in \overline{S}_r(x)$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $S_\varepsilon(z) \subset \overline{S}_r(x)$. Более подробно: для любого z: $k_0(x,z) \geqslant \frac{1}{r}$ найдется $\varepsilon > 0$:

$$\forall y \quad k_0(z,y) > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow k_0(x,y) \geqslant \frac{1}{r}.$$

Так как

$$k_0(x,y) \geqslant \min(k_0(x,z), k_0(z,y)),$$

то достаточно выбрать $\varepsilon < r$.

Докажем, что $\overline{S}_r(y) = \overline{S}_r(x)$ для любого $y \in \overline{S}_r(x)$. Пусть $z \in S_r(y)$, то есть $k_0(y,z) \geqslant \dfrac{1}{r}$. Покажем, что $z \in S_r(x)$, то есть $k_0(x,z) \geqslant \dfrac{1}{r}$. Так как $y \in \overline{S}_r(x)$, то $k_0(y,x) \geqslant \dfrac{1}{r}$. По неравенству треугольника

$$k_0(x,z) \geqslant \min(k_0(y,z), k_0(y,x)) \geqslant \frac{1}{r}.$$

□

Задача 2.7. *Докажите утверждения е), ж), з) примера.*

Пространство, рассмотренное в последнем примере, обладает довольно экзотическими свойствами. Это связано с тем, что неравенство треугольника в форме (2.3) соответствует геометрии, в которой не выполняется аксиома Архимеда (по-другому называемая аксиомой измеримости).

Аксиома Архимеда состоит в следующем. Рассмотрим прямую и выберем на ней два отрезка a и b с началом в одной точке, причем длина отрезка a меньше длины отрезка b. Тогда, прикладывая меньший отрезок a доль прямой достаточное число раз, мы в конце концов превзойдем больший отрезок b.

Как следует из свойства в), все треугольники в неархимедовом пространстве с метрикой (2.3) — равнобедренные.

Два разных шара не могут частично пересекаться: либо они не имеют общих точек, либо один из них содержится внутри другого.

Метрики, подобные рассмотренной выше, применяются в теоретической физике. Так, в монографии [4] для описания свойств микромира предлагается ввести так называемую p-адическую норму на множестве рациональных чисел. Неархимедовость этой нормы согласуется с соотношением неопределенности Планка.

Глава 3

Пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций

3.1 Линейные нормированные пространства $C[a,b]$, $C^m[a,b]$

$C[a,b]$ — стандартное обозначение пространства непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с максимум-метрикой

$$\rho(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Аксиомы метрики, очевидно, выполняются. Неравенство треугольника следует из неравенства для модулей (1.3).

Последовательность f_n сходится к f в метрике $C[a,b]$, если

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому сходимость в $C[a,b]$ последовательности элементов f_n к f есть равномерная сходимость последовательности функций $f_n(t)$ к функции $f(t)$ на отрезке $[a,b]$.

Задача 3.1. *Пространство $C[a,b]$ является линейным нормированным относительно нормы*

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Задача 3.2. *Что собой представляет шар $S_1(0)$ в $C[a,b]$?*

$C[a,b]$ — сепарабельное пространство. Счетное всюду плотное множество в нем образуют многочлены с рациональными коэффициентами $P_Q[a,b]$. Действительно, любой многочлен можно сколь угодно точно приблизить многочленами с рациональными коэффициентами. Поэтому $P_Q[a,b]$ всюду плотно во множестве всех многочленов $P[a,b]$:

$$P_Q[a,b] \subset P[a,b]$$

По теореме Вейерштрасса, любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить многочленами, поэтому

$$P[a,b] \subset C[a,b].$$

В следующих главах будет доказана полнота пространства $C[a,b]$. Таким образом, $C[a,b]$ — сепарабельное банахово пространство.

На множестве непрерывно-дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ функций зададим метрику по правилу

$$\rho(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t) - g'(t)|. \tag{3.1}$$

Сходимость последовательности f_n к f по этой метрике означает, что последовательности функций $f_n(t)$ равномерно сходится к функции $f(t)$ на отрезке $[a,b]$, и последовательность производных $f_n'(t)$ также сходится к $f'(t)$ равномерно.

Задача 3.3. *Пространство $C^1[a,b]$ является линейным нормированным относительно нормы*

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|.$$

Задача 3.4. *Что собой представляет шар $S_1(0)$ в $C^1[a,b]$?*

Задача 3.5. *Докажите сепарабельность пространства $C^1[a,b]$.*

В $C^1[a,b]$ можно задать эквивалентную метрику по правилу:

$$\rho_1(f,g) = \max(\max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|, \max_{t\in[a,b]} |f'(t) - g'(t)|)$$

Действительно, для метрик ρ (3.1) и ρ_1 выполняется двойное неравенство:

$$\rho_1(f,g) \leqslant \rho(f,g) \leqslant 2\rho_1(f,g).$$

Задача 3.6. *Приведите другие примеры метрик в $C^1[a,b]$, эквивалентных ρ (3.1).*

Аналогично определяется пространство m раз непрерывно-дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$.

Задача 3.7. *Пусть $C^m[a,b]$ — множество всех m раз непрерывно-дифференцируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$. Докажите, что*

$$\rho(f,g) = \sup_{0\leqslant n\leqslant m} \max_{t\in[a,b]} |f^{(n)}(t) - g^{(n)}(t)|. \tag{3.2}$$

— метрика на $C^m[a,b]$.

Задача 3.8. *Что означает сходимость в пространстве $C^m[a,b]$?*

Задача 3.9. *Пространство $C^m[a,b]$ является линейным нормированным относительно нормы*

$$\|f\| = \sup_{0\leqslant n\leqslant m} \max_{t\in[a,b]} |f^{(n)}(t)|.$$

Задача 3.10. *Докажите сепарабельность пространства $C^m[a,b]$.*

Задача 3.11. *Приведите пример метрики на множестве m раз непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций, эквивалентной (3.2).*

Позже мы докажем полноту пространства $C^m[a,b]$.

Если Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, то пространства непрерывных в замыкании Ω функций $C(\overline{\Omega})$ и m раз непрерывно дифференцируемых в замыкании Ω функций $C^m(\overline{\Omega})$ определяются аналогично.

3.2 Примеры счетно-нормированных пространств

На множестве непрерывных на интервале (a, b) функций также можно задать метрику. При этом используется та же конструкция, что и для определения метрики в пространстве последовательностей S. Полученное пространство нормированным не будет, оно является счетно-нормированным.

Определение 3.1. *Последовательность x_n в линейном нормированном пространстве X называется фундаментальной, если $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$.*

Определение 3.2. *Две нормы в линейном пространстве X называются согласованными, если любая последовательность $x_n \in X$, фундаментальная по каждой из этих норм и сходящаяся к некоторому пределу $x \in X$ по одной из этих норм, сходится к тому же пределу и по второй норме.*

Определение 3.3. *Линейное пространство X называется счетно-нормированным, если в нем задана счетная система согласованных друг с другом норм $\|x\|_n, \quad n = 1, 2, \ldots$.*

В каждом счетно-нормированном пространстве можно ввести метрику по правилу:

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_n}{1 + \|f - g\|_n}. \tag{3.3}$$

Вместо норм в (3.3) могут задаваться полунормы. Полунорма отличается от нормы тем, что из равенства нулю $\|f\| = 0$ не следует, что $f = 0$.

Пример 3.1. *Пространство $C(a, b)$ определяется как множество непрерывных на интервале (a, b) функций $f(t)$ со счетной системой полунорм:*

$$\|f\|_n = \max_{t \in K_n} |f(t)|, \quad (a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

K_n — компактные множества (в данном случае отрезки), такие, что $K_n \subset K_{n+1}$.

Метрика в $C(a,b)$ задается по правилу

$$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\max\limits_{t\in K_n}|f(t)-g(t)|}{1+\max\limits_{t\in K_n}|f(t)-g(t)|}. \tag{3.4}$$

Сходимость по метрике ρ (3.4) — это равномерная на любом компактном множестве K_n сходимость функций.

Рассмотрим функции, непрерывные на прямой.

Задача 3.12. *Докажите, что на множестве $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$ можно ввести метрику*

$$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\max\limits_{-n\leqslant t\leqslant n}|f(t)-g(t)|}{1+\max\limits_{-n\leqslant t\leqslant n}|f(t)-g(t)|}$$

Задача 3.13. *Что означает сходимость в $C(\mathbb{R})$?*

Аналогично определяется пространство $C(\Omega)$ для любой области $\Omega\in\mathbb{R}^n$.

Теперь рассмотрим множество всех бесконечно дифференцируемых функций на отрезке.

Задача 3.14. *Пусть $C^\infty[a,b]$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$. Докажите, что*

$$\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\max\limits_{t\in[a,b]}|f^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}{1+\max\limits_{t\in[a,b]}|f^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}$$

— метрика на $C^\infty[a,b]$.

Задача 3.15. *Каков смысл сходимости в $C^\infty[a,b]$?*

Задача 3.16. *Докажите сепарабельность пространства $C^\infty[a,b]$.*

Структуру счетно-нормированного пространства можно также ввести на множестве функций, бесконечно дифференцируемых на прямой.

Задача 3.17. *Аналогично предыдущим упражнениям определите метрику на $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Глава 4

Пространства Лебега

4.1 Пространства $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$

Пространство $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$ (сравните с определением ℓ_p) состоит из функций $f(x)$, измеримых по Лебегу, таких, что существует интеграл Лебега от p-ой степени $f(x)$

$$\int\limits_a^b |f(x)|^p dx < \infty,$$

и расстояние определяется по формуле:

$$\rho_p(f, g) = \left\{ \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

Две функции, отличающиеся на множестве меры ноль, отождествляются как элементы $L_p(a, b)$.

Строго говоря, элементами пространства $L_p(a, b)$ являются классы эквивалентных (т.е. отличающихся на множестве меры ноль) функций, а расстояние между классами определяется как расстояние между любыми их представителями.

Выполнение неравенства треугольника в $L_p(a, b)$ следует из неравенства Минковского для интегралов:

$$\left\{ \int\limits_a^b |f(x) + g(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \leqslant \left\{ \int\limits_a^b |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} + \left\{ \int\limits_a^b |g(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}, \tag{4.1}$$

$1 \leqslant p < \infty$, которое (при $p \neq 1$) вытекает из неравенства Гельдера:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left\{\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \left\{\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx\right\}^{1/q}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{4.2}$$

$1 < p, q < \infty$.

Задача 4.1. *Докажите неравенство Гельдера (4.2) для измеримых по Лебегу функций.*

Указание. Примените неравенство Юнга (1.5).

Задача 4.2. *Докажите, что неравенство Гельдера обращается в равенство, если*

$$\begin{cases} \dfrac{|f(x)|^p}{\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx} = \dfrac{|g(x)|^q}{\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx}, \\ \operatorname{sgn} f(x)g(x) \underset{\text{всюду}}{\overset{\text{почти}}{=}} const. \end{cases}$$

Задача 4.3. *Выведите неравенство Минковского (4.1) из неравенства Гельдера.*

Задача 4.4. *Проверьте выполнение аксиом метрики для $\rho_p(f,g)$.*

Задача 4.5. *Пользуясь тем, что множество непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций $C[0,1]$ всюду плотно в пространстве $L_p(0,1)$, установите сепарабельность $L_p(0,1)$ при $1 \leqslant p < \infty$.*

Далее в этой главе через $\|f\|_{L_p(a,b)}$ обозначается норма функции f в пространстве $L_p(a,b)$:

$$\|f\|_{L_p(a,b)} = \left\{\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

При $p = q = 2$ из неравенства Гельдера (4.2) получаем неравенство Коши-Буняковского:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leqslant \left\{ \int_a^b |f(x)|^2\,dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b |g(x)|^2\,dx \right\}^{1/2}. \tag{4.3}$$

Пространство $L_2(a,b)$ отличается от прочих $L_p(a,b)$ тем, что в нем можно задать скалярное произведение. Напомним определение скалярного произведения.

Определение 4.1. *Пусть X — линейное пространство X над полем $\mathbb{C}$. Функция $(,) : X \times X \longmapsto \mathbb{C}$ называется скалярным произведением, если она удовлетворяет следующим аксиомам:*

1. $(x,x) \geqslant 0$, *причем* $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$;
3. $(x,y) = \overline{(y,x)}$;

$\forall x,y,z \in X$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *черта означает комплексное сопряжение.*

В случае вещественного линейного пространства скалярное произведение симметрично.

Задача 4.6. *Докажите, что формула*

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

задает скалярное произведение в вещественном пространстве $L_2(a,b)$.

Неравенство Коши-Буняковского (4.3) можно переписать в виде

$$|(f,g)| \leqslant \|f\|_{L_2(a,b)} \|g\|_{L_2(a,b)}.$$

Определим косинус угла между элементами пространства $L_2(a,b)$ по формуле

$$\cos(\widehat{f,g}) = \frac{(\widehat{f,g})}{\|f\|_{L_2(a,b)} \|g\|_{L_2(a,b)}}.$$

Тогда неравенство Коши-Буняковского допускает следующую трактовку: косинус по модулю не превосходит единицу.

Задача 4.7. *Равенство в неравенстве Коши-Буняковского выполняется тогда и только тогда, когда $f(x) = c\,g(x)$ (то есть $|\cos(\widehat{f, g})| = 1$).*

Теперь сформулируем утверждения о пространствах $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$, которые доказываются с помощью неравенства Гельдера (4.2).

Пример 4.1. *Справедливо включение:*

$$L_p(a, b) \subset L_q(a, b) \quad \textit{при} \quad p \geqslant q.$$

Доказательство. Пусть $f \in L_p(a, b)$. Тогда q-ю степень нормы f в пространстве $L_q(a, b)$ можно представить в виде

$$\|f\|^q_{L_q(a,b)} = \int\limits_a^b |f(x)|^q\,dx = \int\limits_a^b 1 \cdot |f(x)|^q\,dx.$$

К правой части этого выражения применим неравенство Гельдера с сопряженными показателями r и s: $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$.

$$\int\limits_a^b 1 \cdot |f(x)|^q\,dx \leqslant \left(\int\limits_a^b 1\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int\limits_a^b |f(x)|^{qs}\,dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Положив $s = \dfrac{p}{q}$ и учитывая, что тогда $r = \dfrac{p}{p-q}$, перепишем правую часть последнего неравенства в виде

$$\left(\int\limits_a^b 1\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int\limits_a^b |f(x)|^{qs}\,dx\right)^{\frac{1}{s}} = (b-a)^{\frac{p-q}{p}}\,\|f\|^q_{L_p}.$$

Окончательно,

$$\|f\|^q_{L_q(a,b)} \leqslant (b-a)^{\frac{p-q}{p}}\,\|f\|^q_{L_p(a,b)}.$$

Извлекая степень q, приходим к оценке:

$$\|f\|_{L_q(a,b)} \leqslant (b-a)^{\frac{p-q}{p\,q}}\,\|f\|_{L_p(a,b)}, \quad p \geqslant q. \tag{4.4}$$

□

Задача 4.8. *Пусть $1 \leqslant p < r < q < \infty$. Тогда любая функция $f \in L_p(a,b) \cap L_q(a,b)$ принадлежит пространству $L_r(a,b)$, и выполняется неравенство:*

$$\|f\|_{L_r(a,b)} \leqslant \|f\|^{\alpha}_{L_p(a,b)} \|f\|^{\beta}_{L_q(a,b)},$$

где $\alpha = \dfrac{1/r - 1/q}{1/p - 1/q}$, $\beta = \dfrac{1/p - 1/r}{1/p - 1/q}$.

Норму функции в L_r можно оценить также через сумму двух слагаемых, одно из которых велико, а другое мало.

Задача 4.9. *Пусть $f \in L_p(a,b)$, $f \in L_q(a,b)$, $p < q$. Тогда $f \in L_r(a,b)$ для всех r таких, что $p < r < q$, и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется оценка*

$$\|f\|_{L_q(a,b)} \leqslant \varepsilon \|f\|_{L_p(a,b)} + \varepsilon^{-\mu} \|f\|_{L_q(a,b)}, \tag{4.5}$$

где

$$\mu = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}, \ 1 \leqslant p < r < q < \infty.$$

Указание. Для доказательства воспользуйтесь интерполяционным неравенством Юнга

$$ab \leqslant \varepsilon a^{\frac{1}{\alpha}} + \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\beta}} b^{\frac{1}{\beta}}, \tag{4.6}$$

которое справедливо для любого $\varepsilon > 0$, для любых неотрицательных a и b, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Пример 4.2. *Пусть $f \in L_p(a,b)$, $g \in L_q(a,b)$. Тогда fg принадлежит $L_s(a,b)$, где показатель s определяется из равенства:*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

и выполняется оценка:

$$\|fg\|_{L_s(a,b)} \leqslant \|f\|_{L_p(a,b)} \|g\|_{L_q(a,b)}.$$

Доказательство. Обозначим $p' = \dfrac{p}{s}$, $q' = \dfrac{q}{s}$. Тогда выполняется равенство $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{q'} = 1$. Применим неравенство Гельдера с сопряженными показателями

p', q':

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|^s\,dx \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^{p's}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_a^b |g(x)|^{q's}\,dx\right)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \left(\int\limits_a^b |f(x)|^{p}\,dx\right)^{\frac{s}{p}} \left(\int\limits_a^b |g(x)|^{q}\,dx\right)^{\frac{s}{q}} = \|f\|^s_{L_p(a,b)}\|g\|^s_{L_q(a,b)}.$$

Таким образом, $\|fg\|_{L_s(a,b)} \leqslant \|f\|_{L_p(a,b)}\|g\|_{L_q(a,b)}$. □

Задача 4.10. *Пусть $f \in L_p(a,b)$, $g \in L_q(a,b)$, $h \in L_r(a,b)$, причем*

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда fgh суммируема и выполняется неравенство:

$$\|fgh\|_{L_1(a,b)} \leqslant \|f\|_{L_p(a,b)}\|g\|_{L_q(a,b)}\|h\|_{L_r(a,b)}.$$

Вернемся к неравенству Минковского. Если хотя бы одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ равна нулю почти всюду, то неравенство Минковского превращается в равенство. Если же ни одна из функций не обращается в ноль почти всюду, то условия обращения неравенства в равенство формулируются по-разному для случаев $p = 1$ и $p > 1$.

Задача 4.11. *Проверьте, что при $p = 1$ неравенство Минковского обращается в равенство, если*

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} g(x), \tag{4.7}$$

а при $p > 1$, если

$$f(x) = c\,g(x),\ \ c > 0. \tag{4.8}$$

В следующем разделе будет показано, что различие условий (4.7) и (4.8) приводит к тому, что множества экстремальных точек шаров в $L_p(a,b)$ при $p = 1$ и $p > 1$ различны.

4.2 Экстремальные точки шара $\overline{S}_1(0)$ в пространствах $L_p(0,1)$

Определение 4.2. *Пусть X — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Замкнутым отрезком, соединяющим точки a и b, называется множество точек*

$$\{f \in X \mid f = t\,a + (1-t)\,b,\ t \in [0,1]\}.$$

Определение 4.3. *Множество $M \subset X$ называется выпуклым, если $\forall\, m_1,\ m_2 \in M$ отрезок, соединяющий точки m_1 и m_2, принадлежит X.*

Далее в этом параграфе будем предполагать, что M — выпуклое множество.

Определение 4.4. *Точка $x^* \in M$ называется экстремальной точкой множества M, если x^* не является серединой никакого отрезка, целиком принадлежащего M.*

То, что x^* является серединой, означает

$$x^* = \frac{1}{2}(a+b),\ a,\ b \in M,\ a \neq b,\ b \neq x^*. \tag{4.9}$$

Если M - открытое множество, то для него экстремальных точек нет по определению открытого множества.

Пример 4.3. *Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана евклидова норма*

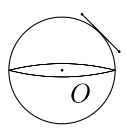
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Рассмотрим замкнутый единичный шар

$$\overline{S}_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leqslant 1\}.$$

Тогда множество экстремальных точек — это сфера

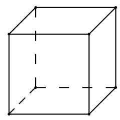
$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}.$$



Пример 4.4. *Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ замкнутый прямоугольный параллелепипед*

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_i| \leqslant 1; \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Экстремальные точки – его вершины.



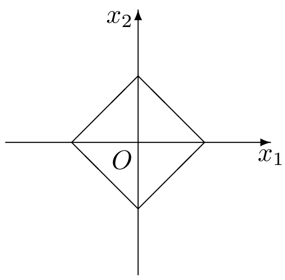
Пример 4.5. *Аналогично, если на плоскости задана евклидова метрика, то экстремальные точки замкнутого единичного круга $\bar{S}_1(0)$ заполняют окружность. Если же на плоскости задать метрику по-другому:*

$$\rho_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

так, что

$$\|x\| = |x_1| + |x_2|,$$

то замкнутый единичный шар в этой метрике является квадратом. Следовательно, экстремальные точки — его вершины.



Оказывается, что нечто подобное наблюдается в пространствах функций L_p. Если $p > 1$, то экстремальные точки замкнутого единичного шара заполняют сферу. А если $p = 1$, то экстремальных точек нет (элементы, отличающиеся на множестве меры ноль, отождествляются)!

Пример 4.6. *В пространствах $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$ экстремальные точки замкнутого шара заполняют сферу $\{f \mid \|f\|_{L_p} = 1\}$. Других экстремальных точек нет.*

Доказательство. На первом этапе доказательства рассмотрим открытый шар. Докажем, что никакая точка открытого шара $S_1(0)$ не является экстремальной точкой замкнутого шара $\overline{S}_1(0)$.

Пусть сначала f принадлежит замкнутому шару радиуса $\frac{1}{2}$:

$$\|f\|_{L_p} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Докажем, что найдутся элементы $g,\ h \in \overline{S}_1(0)$ такие, что f является серединой отрезка, соединяющего g и h: $f = \frac{1}{2}(g+h)$.

Действительно, если положить $g = 2f,\ h = 0$, то $f = \dfrac{1}{2}(g+h)$ и

$$\|g\|_{L_p} = 2\|f\|_{L_p} \leqslant 1; \quad \|h\| = 0.$$

Следовательно, $g,\ h \in \overline{S}_1(0)$ и никакая точка $f \in \overline{S}_{\frac{1}{2}}(0)$ не является экстремальной точкой шара $\overline{S}_1(0)$.

Теперь рассмотрим сферический слой

$$\frac{1}{2} < \|f\|_{L_p} < 1.$$

Пусть $\|f\|_{L_p} = \frac{1}{M}$, где $1 < M < 2$, тогда $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = tf(x) + (1-t)f(x),$$

где $t = \dfrac{M}{2}$, $t \in (\dfrac{1}{2}, 1)$, то есть

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[M\,f(x) + (2-M)f(x)\right].$$

Положим

$$g(x) = M\,f, \quad h(x) = (2-M)f(x).$$

Тогда

$$\|g\|_{L_p} = M\,\|f\|_{L_p} = M\,\frac{1}{M} = 1, \quad \|h\|_{L_p} = (2-M)\|f\|_{L_p} = \frac{2-M}{M}.$$

Так как $M > 1$,то $2 - M < M$. Следовательно,

$$\frac{2-M}{M} < \frac{M}{M} = 1.$$

Поэтому $\|h\|_{L_p} < 1$ и $g,\, h \in \overline{S}_1(0)$. Таким образом, никакая точка открытого шара не может быть экстремальной точкой замкнутого шара.

Замечание 4.1. *Если рассмотреть* $f_t = tg + (1-t)h$, g, $h \in \overline{S}_1(0)$, $t \in [0,1]$, *то по свойству нормы* $f_t \in \overline{S}_1(0)$, $t \in [0,1]$, *т. е.*

$$\|f_t\|_{L_p} \leqslant t\,\|g\|_{L_p} + (1-t)\|h\|_{L_p} \leqslant t \cdot 1 + (1-t)\cdot 1 = 1.$$

Замечание 4.2. *В проведенном доказательстве важно, что* $f \neq g$, $f \neq h$, *т. е. отрезок не вырождается в точку.*

Теперь докажем, что точки сферы

$$\{f \mid \|f\|_{L_p} = 1\}$$

являются экстремальными точками замкнутого шара $\overline{S}_1(0)$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что для любой точки f единичной сферы найдутся элементы g, h, которые принадлежат замкнутому шару $\overline{S}_1(0)$ и f является серединой отрезка, соединяющего g и h:

$$f = \frac{1}{2}(g+h).$$

При этом $f \neq g$, $f \neq h$. Тогда, по неравенству Минковского

$$1 = \|f\|_{L_p} = \frac{1}{2}\|g+h\|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(\|g\|_{L_p} + \|h\|_{L_p}).$$

Так как $\|g\|_{L_p} \leqslant 1$ и $\|h\|_{L_p} \leqslant 1$, то знак строгого неравенства в последнем неравенстве невозможен, следовательно, необходимо, чтобы каждая из норм равнялась единице: $\|g\|_{L_p} = 1$, $\|h\|_{L_p} = 1$.

Тогда

$$\|g+h\|_{L_p} = \|g\|_{L_p} + \|h\|_{L_p}. \tag{4.10}$$

Поскольку $1 < p < \infty$ (это важно!), то $g = c\,h$, $c > 0$. Поэтому

$$f = \frac{1}{2}(c\,h + h) = \frac{c+1}{2}\,h.$$

Так как $\|f\|_{L_p} = 1$, $\|h\|_{L_p} = 1$, то $\dfrac{c+1}{2} = 1$. Следовательно, $c = 1$. Тогда $g = h$, $f = h$, т. е. отрезок превращается в точку — противоречие. □

Задача 4.12. *Экстремальных точек замкнутого шара* $\overline{S}_1(0)$ *в пространстве* $L_1(0,1)$ *не существует.*

4.3 Пространство $L_\infty(a, b)$

Пусть $y = g(x)$ — ограниченная сверху функция на интервале (a, b), то есть существует такая константа M, что

$$g(x) \leqslant M \quad \forall x \in (a, b).$$

Тогда можно определить точную верхнюю грань функции $g(x)$.

Определение 4.5. *M_* называется точной верхней гранью (супремумом) функции $g(x)$*

$$M_* = \sup_{x \in (a,b)} g(x),$$

если выполняются следующие свойства

1) $g(x) \leqslant M_*$, т. е. M_* – одна из верхних граней функции $g(x)$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, x_\varepsilon \neq \varnothing, x_\varepsilon \in (a, b) : \; g(x_\varepsilon) > M_* - \varepsilon.$

Пусть теперь $g(x)$ ограничена сверху почти всюду на интервале (a, b):

$$g(x) \leqslant M \quad \text{п.в.} \quad x \in (a, b).$$

Тогда можно определить существенный супремум функции $g(x)$.

Определение 4.6. *Число α_* называется существенным супремумом функции $g(x)$*

$$\alpha_* = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a,b)} g(x),$$

если

1) $g(x) \leqslant \alpha_*$ *почти всюду в* (a, b).

2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \subset (a, b)$: $\operatorname{mes}(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \neq 0$, $\forall \, x \in (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \quad g(x) > \alpha_* - \varepsilon$.

Существенный супремум можно определить и по-другому.

Определение 4.7.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a,b)} g(x) = \inf \left\{ \alpha \,|\, \operatorname{mes}(x \in (a, b) : g(x) > \alpha) = 0 \right\}.$$

Задача 4.13. *Докажите эквивалентность двух определений существенного супремума.*

Пространство $L_\infty(a,b)$ определяется как множество измеримых на (a,b) функций $f(x)$, для каждой из которых существует константа α_f, зависящая от f такая, что для почти всех $x \in (a,b)$ выполняется неравенство:

$$|f(x)| \leqslant \alpha_f,$$

и норма f определяется как существенный супремум модуля функции $f(x)$:

$$\|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a,b)} |f(x)|,$$

где

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a,b)} |f(x)| = \inf_{\alpha\in R}\{\alpha|\operatorname{mes}(x \in (a,b) : |f(x)| > \alpha) = 0\}.$$

Докажите следующие утверждения о пространстве $L_\infty(a,b)$:

Задача 4.14. $L_\infty(a,b)$ *— не сепарабельное пространство.*

Задача 4.15. *Пространство* $L_\infty(a,b)$ *вложено в каждое из пространств* $L_p(a,b)$ *при* $1 \leqslant p < \infty$*:*

$$L_\infty(a,b) \subset \bigcap_{p=1}^{\infty} L_p(a,b),$$

причем выполняется неравенство:

$$\|f\|_{L_p(a,b)} \leqslant (b-a)^{1/p}\|f\|_{L_\infty(a,b)} \quad \forall p : 1 \leqslant p < \infty.$$

Задача 4.16. *Пусть* $f \in L_1(a,b)$*,* $g \in L_\infty(a,b)$*. Докажите неравенство Гельдера:*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(a,b)} |g(t)|.$$

Прежде, чем сформулировать следующее утверждение о пространстве $L_\infty(a,b)$, напомним его конечномерный аналог.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $1 \leqslant p < \infty$ заданы нормы

$$\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

а также максимум-норма

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо предельное соотношение

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$$

Аналогичная связь существует между нормами в пространствах $L_p(a, b)$ при $1 < p < \infty$ и нормой в пространстве $L_\infty(a, b)$.

Пример 4.7. *Справедливо предельное соотношение*

$$\|f\|_{L_\infty(a,b)} = \lim_{p \to \infty} \|f\|_{L_p(a,b)}.$$

Доказательство. Чтобы перейти к пределу, оценим $\|f\|_{L_p(a,b)}$ сверху и снизу. С одной стороны:

$$\|f\|_{L_p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{x \in (a,b)} |f(x)| \, (b-a)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Таким образом,

$$\|f\|_{L_p(a,b)} \leqslant (\operatorname{mes} \Omega)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty(a,b)}. \tag{4.11}$$

С другой стороны, по определению существенного супремума, для любого $\varepsilon > 0$ найдется интервал ненулевой длины $(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$, который является подмножеством (a, b) такой, что для всех x из этого интервала справедлива оценка

$$\forall\, x \in (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \quad |f(x)| > \|f\|_{L_\infty(a,b)} - \varepsilon.$$

Возведем последнее неравенство в степень p и проинтегрируем по интервалу $(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$. Получим

$$\int_{a_\varepsilon}^{b_\varepsilon} |f(x)|^p \, dx > \left(\|f\|_{L_\infty(a,b)} - \varepsilon\right)^p (b_\varepsilon - a_\varepsilon).$$

Тогда

$$\|f\|_{L_p(a,b)} > \|f\|_{L_p(a_\varepsilon,b_\varepsilon)} > (\|f\|_{L_\infty(a,b)} - \varepsilon)(b_\varepsilon - a_\varepsilon)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4.12)$$

Из (4.11) — (4.12) следует двойное неравенство

$$(\|f\|_{L_\infty(a,b)} - \varepsilon)(b_\varepsilon - a_\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_{L_p(a,b)} \leqslant (b_\varepsilon - a_\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty(a,b)}. \qquad (4.13)$$

Устремив $p \to +\infty$, получим требуемое равенство. □

Доказанные утверждения позволяют рассматривать шкалу пространств $L_p(a,b)$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Задача 4.17. *Установите для конечного интервала (a,b) теоретико-множественные включения*

$$L_\infty(a,b) \subset L_p(a,b) \subset L_q(a,b) \subset L_1(a,b), \quad 1 < q < p < \infty.$$

Сохраняются ли указанные включения для неограниченного интервала?

Задача 4.18. *Из результатов предыдущей задачи следует, что на $L_\infty(a,b)$ определены все метрики $\rho_p(f,g)$, $1 \leqslant p < \infty$. Являются ли они эквивалентными?*

Задача 4.19. *Найдите норму функции $f(t) = t^\alpha$ в тех пространствах $L_p(0,1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, которым эта функция принадлежит.*

4.4 Пространства $L_{p,\ loc}(\Omega)$

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, не обязательно ограниченная. Множество измеримых в Ω функций, p-ая степень модуля которых интегрируема по любой ограниченной строго внутренней подобласти Ω' области Ω, $\Omega' \Subset \Omega$, обозначим через $L_{p,loc}(\Omega)$.

Очевидно, что выполняется включение $L_p(\Omega) \subset L_{p,loc}(\Omega)$.

В пространстве $L_{p,loc}(\Omega)$ можно ввести счетную систему полунорм. Пусть K_n — последовательность вложенных друг в друга ограниченных и замкнутых множеств : $K_n \subset K_{n+1}$ таких, что

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Зададим семейство полунорм

$$\|f\|_n = \|f\|_{L_p(K_n)}.$$

Тогда расстояние в $L_{p,\,loc}(\Omega)$ можно определить по формуле:

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_n}{1+\|f-g\|_n}.$$

Пример 4.8. *Пусть* $x \in \mathbb{R}$. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = \frac{1}{(1-|x|)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Она принадлежит пространствам $L_{1,\,loc}$ $(|x| < 1)$, $L_{2,\,loc}$ $(|x| < 1)$ *для любого* α. *В то же время функция принадлежит* L_1 $(|x| < 1)$ *только при* $\alpha < 1$, *и* $f \in L_2$ $(|x| < 1)$ *при* $\alpha < \dfrac{1}{2}$.

Глава 5

Непрерывность отображений

Аналогично понятию непрерывности функций формулируется понятие непрерывности отображений метрических пространств. Сначала сформулируем определение на языке последовательностей.

Определение 5.1. *Пусть (X, ρ), (Y, d)— метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке x_0, если для любой последовательности $x_n \in X$ из того, что $x_n \to x_0$ по метрике ρ, следует, что $f(x_n) \to f(x_0)$ по метрике d при $n \to \infty$.*

Теперь сформулируем определение непрерывности отображений на языке $\varepsilon - \delta$.

Определение 5.2. *Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке x_0, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : \rho(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Задача 5.1. *Докажите эквивалентность двух сформулированных определений.*

Определение 5.3. *Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке пространства X.*

Задача 5.2. *Покажите непрерывность метрики $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ в метрическом пространстве (X, ρ).*

Указание. Рассмотрите в декартовом произведении произведении $X \times X$ одну из эквивалентных метрик

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \left(\rho^2(x_1, y_1) + \rho^2(x_2, y_2)\right)^{1/2},$$
$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho(x_1, y_1) + \rho(x_2, y_2),$$

$$d_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(\rho(x_1, y_1), \rho(x_2, y_2))$$

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X$ и воспользуйтесь неравенством четырехугольника

$$|\rho(x, z) - \rho(y, t)| \leqslant \rho(x, y) + \rho(z, t).$$

Задача 5.3. *Докажите следующие критерии непрерывности: отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U \subset Y$ (замкнутого множества $F \subset Y$) множество $f^{-1}(U)$ открыто в X ($f^{-1}(F)$ замкнуто в X).*

Задача 5.4. *Является ли непрерывным отображение $f : C[0, 1] \to C[0, 1]$, определяемое формулой $f(x(t)) = x^3(t)$?*

Пример 5.1. *На множестве непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций введем интегральную метрику*

$$\rho_1(f, g) = \int\limits_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

Получившееся функциональное пространство обозначим $\mathfrak{R}_1[0, 1]$. Покажем, что отображение

$$f : \mathfrak{R}_1[0, 1] \to \mathfrak{R}_1[0, 1],$$

определяемое соотношением

$$f(x(t)) = x^2(t).$$

не будет непрерывным в этой метрике.

Доказательство. Покажем, что данное отображение не является непрерывным в нуле. Для доказательства достаточно построить последовательность непрерывных функций $x_n(t)$, для которых

$$\rho_1(x_n, 0) = \int\limits_0^1 |x_n(t)| dt \to 0,$$

а

$$\rho_1(x_n^2, 0) = \int\limits_0^1 |x_n(t)|^2 dt \not\to 0,$$

при $n \to \infty$.

В качестве $x_n(t)$ выберем кусочно-линейную функцию

$$x_n(t) = \begin{cases} b_n(1 - t/a_n) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant a_n; \\ 0 & \text{при} \quad a_n \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\rho(x_n, 0) = \frac{a_n b_n}{2}, \quad \rho(x_n^2, 0) = \frac{a_n b_n^2}{3}.$$

Поэтому достаточно выбрать, например, $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \sqrt{n}$. □

Задача 5.5. *Пусть X — множество непрерывно дифференцируемых функций на $[0, 1]$, для которых $x(0) = 0$, с метрикой*

$$\rho(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|.$$

Является ли непрерывным отображение $f : (X, \rho) \to C[0, 1]$, определяемое формулой

$$f(x)(t) = \frac{x(t)}{t}?$$

Задача 5.6. *Являются ли непрерывными следующие отображения пространства $C[0, 1]$ в себя:*

$$\begin{aligned} \text{а)} f(x)(t) &= \int\limits_0^t x(s)ds, \\ \text{б)} f(x)(t) &= x(t^\alpha), \alpha > 0 \\ \text{в)} f(x)(t) &= \int\limits_0^t x^2(s)ds? \end{aligned}$$

Задача 5.7. *Тот же вопрос для пространства* $L_2(0,1)$.

Глава 6

Полнота метрических пространств

6.1 Определение полноты

Определение 6.1. *Последовательность x_n называется фундаментальной, если $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$.*

Из неравенства треугольника следует, что любая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 6.1. *Пусть $X = [0, 1)$, $\rho(x, y) = |x - y|$. Последовательность $x_n = \dfrac{1}{n}$ фундаментальна, но не сходится в данном пространстве.*

Пример 6.2. *Пусть $X = \mathbb{Q}$ (множество рациональных чисел),*

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Тогда последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

фундаментальна, но не сходится в данном пространстве.

Определение 6.2. *Метрическое пространство (X, ρ) называется полным, если каждая фундаментальная последовательность в нем сходится.*

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с обычной метрикой является неполным метрическим пространством. Согласно критерию Коши, $\mathbb{R}^n$ с любой из метрик

$$\rho_p(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

— полное метрическое пространство.

На примере множества непрерывных на отрезке функций покажем, как одно и то же множество можно превратить в полное или неполное метрическое пространство, задавая по-разному метрику.

6.2 Доказательство полноты

Напомним, что $C[a, b]$ — стандартное обозначение пространства непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с максимум-метрикой:

$$\rho(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

Сходимость в $C[a, b]$ последовательности элементов f_n есть равномерная сходимость последовательности функций $f_n(t)$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 6.3. *Докажем, что $C[a, b]$ — полное метрическое пространство.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная в $C[a, b]$ последовательность. Надо доказать, что существует элемент $f \in C[a, b]$ такой, что

$$\rho(f_n, f) \to 0.$$

По определению фундаментальности $\{f_n\}$ в $C[a, b]$:

$$\max_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| \to 0 \qquad n, m \to \infty. \tag{6.1}$$

Наша первая задача — выделить элемент, "подозреваемый"в том, что он является пределом данной последовательности. Для этого применяется уже доказанный факт — полнота $\mathbb{R}$ с обычной метрикой.

Из (6.1) следует более слабое утверждение: для любого фиксированного t

$$|f_n(t) - f_m(t)| \to 0 \qquad n, m \to \infty.$$

То есть при любом фиксированном t $f_n(t)$ — фундаментальная числовая последовательность. Так как вещественная прямая с обычной метрикой — полное метрическое пространство, то для любого фиксированного t существует (поточечный!) предел, обозначим его $f(t)$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t).$$

Осталось доказать два утверждения: 1) f_n сходится к f в метрике $C[a,b]$, то есть равномерно по $t \in [a,b]$; 2) f — элемент $C[a,b]$.

Для доказательства равномерной сходимости в определении фундаментальности последовательности (6.1) фиксируем $n > N$, а m устремим к бесконечности. Тогда приходим к неравенству:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon,$$

которое показывает, что сходимость равномерная.

Теперь докажем, что $f \in C[a,b]$, то есть равномерный предел последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция. Для любого $t_0 \in [a,b]$ оценим модуль разности $f(t)$ и $f(t_0)$, воспользовавшись $\varepsilon/3$-приемом. Выберем n таким, чтобы

$$\max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу непрерывности $f_n(t)$, подберем δ так, чтобы из $|t-t_0| < \delta$ следовало

$$|f_n(t) - f_n(t_0)| < \varepsilon/3.$$

Тогда, если $|t - t_0| < \delta$, то

$$|f(t) - f(t_0)| \leqslant |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(t_0)| + |f_n(t_0) - f(t_0))| < \varepsilon.$$

□

По существу в рассмотренном примере приведено подробное доказательство двух фундаментальных теорем анализа — критерия Коши равномерной сходимости последовательности функций и теоремы Вейерштрасса о непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций.

Задача 6.1. *Сформулируйте короткое доказательство полноты пространства $C[a,b]$, использующее указанные теоремы.*

Задача 6.2. *Докажите полноту пространства $C^1[a,b]$ — непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций с метрикой:*

$$\rho(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t)-g'(t)|.$$

Задача 6.3. *Докажите полноту пространства $C^\infty[0,1]$ с метрикой*

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max\limits_{t\in[a,b]} |f^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}{1+\max\limits_{t\in[a,b]} |f^{(n)}(t)-g^{(n)}(t)|}$$

[14, с. 44]

Пример 6.4. *Докажем полноту пространства ℓ_2.*

Доказательство. Пусть $x^{(n)}$ — фундаментальная в ℓ_2 последовательность. Это означает, что

$$\rho^2(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n,m\to\infty. \tag{6.2}$$

Надо доказать, что последовательность $x^{(n)}$ сходится в ℓ_2, то есть найдется такой элемент $x\in\ell_2$, что

$$\rho^2(x^{(n)}, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{6.3}$$

Так как из (6.2) следует, что для любого фиксированного номера k

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \to 0 \quad \text{при} \quad n,m\to\infty,$$

и пространство $\mathbb{R}$ полно, то для любого k существует покоординатный предел

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k.$$

Осталось показать, что элемент $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ принадлежит пространству ℓ_2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

и последовательность $x^{(n)}$ сходится к x по метрике пространства ℓ_2, то есть выполняется (6.3).

Из (6.2) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для любого фиксированного M выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{M}(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon \quad \text{при} \quad n, m > N.$$

Зафиксировав n, перейдем в конечной сумме к пределу при $m \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{M}(x_k^{(n)} - x_k)^2 \leqslant \varepsilon \quad \forall M.$$

Теперь перейдем к пределу при $M \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - x_k)^2 \leqslant \varepsilon. \tag{6.4}$$

Применим неравенство Минковского:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - x_k)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_k^{(n)}|^2\right)^{1/2}.$$

Так как ряды в правой части неравенства сходятся, то сходится ряд и в левой части, то есть $x \in \ell_2$. А из (7.1) следует, что выполняется (6.3). □

Задача 6.4. *Докажите полноту следующих пространств последовательностей: а) ℓ_∞ [11, с. 31]; б)S.*

6.3 Пример неполного пространства

Пример 6.5. *На множестве непрерывных функций можно ввести также интегральную метрику, например, по правилу:*

$$\rho_1(f, g) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|dt.$$

Покажем, что в этом случае, в отличие от примера 6.3, получится неполное метрическое пространство.

Достаточно привести пример последовательности непрерывных функций, фундаментальной по интегральной метрике ρ_1, которая не сходится по этой метрике к непрерывной функции. Так как любое неполное метрическое пространство можно пополнить, то в более широком пространстве эта фундаментальная последовательность будет сходиться. К чему? К разрывной функции! В качестве такой функции можно взять, например, знак числа sgn. Интуитивно ясно, что приблизить $\mathrm{sgn}(t)$ можно следующей последовательностью кусочно-линейных непрерывных функций:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad -1 \le t \le -1/n; \\ nt & \text{при} \quad -1/n \le t \le 1/n; \\ 1 & \text{при} \quad 1/n \le t \le 1. \end{cases}$$

Легко убедиться в том, что

$$\rho_1(\varphi_n, \varphi_m) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \to 0 \qquad m, n \to \infty,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} |\varphi_n(t) - \mathrm{sgn}(t)| dt = 0.$$

Для любой непрерывной функции f из неравенств

$$0 < \rho_1(f, \mathrm{sgn}) \leqslant \rho_1(f, \varphi_n) + \rho_1(\varphi_n, \mathrm{sgn})$$

следует, что $\rho_1(f, \varphi_n) \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Оказывается, что при пополнении пространства непрерывных функций с интегральной метрикой ρ_1 возникают функции, неинтегрируемые по Риману, и результатом пополнения является лебеговское пространство $L_1(-1, 1)$.

6.4 Теорема о пополнении

Определение 6.3. *Метрическое пространство* (X, ρ) *изометрически изоморфно* (Y, d) *(обозначение* $(X, \rho) \sim (Y, d)$*), если существует отоб-*

ражение $f : X \to Y$ такое, что:

$$1)\ f - \textit{биективно};$$

$$2)\ \rho(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Изометрический изоморфизм – отношение эквивалентности. Все изометрически изоморфные пространства с точки зрения сходимости и полноты можно не различать.

Задача 6.5. *Какое из свойств — инъективность или сюръективность — следует из того, что отображение f осуществляет изометрию?*

Теорема 1 (О пополнении). *Любое неполное метрическое пространство (X, ρ) можно пополнить, то есть существуют полное метрическое пространство (Y, d) и отображение $f : X \to Y$ такие, что:*

$$1)\quad \overline{f(X)} \ = \ Y;$$

$$2)\quad \rho(x_1, x_2) \ = \ d(f(x_1), f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Пример 6.6. *Докажем, что вещественная прямая с метрикой*

$$\rho(x_1, x_2) = |arctg(x_1) - arctg(x_2)| \tag{6.5}$$

является неполным метрическим пространством.

Доказательство. Так как функция $f(x) = arctg(x)$ монотонна, то для $\rho(x_1, x_2)$ (6.5) выполняются аксиомы метрики.

Арктангенс осуществляет взаимно-однозначное отображение вещественной прямой $\mathbb{R}$ на интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Пусть

$$X = \mathbb{R}, \quad Y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Рассмотрим метрические пространства (X, ρ) и (Y, d), где d — стандартная метрика на прямой:

$$d(u, v) = |u - v|.$$

Так как $f : X \to Y$ биективно, и равенство (6.5) можно записать в виде

$$\rho(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)),$$

то вещественная прямая с метрикой ρ изометрически изоморфна интервалу $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ с метрикой d:

$$(\mathbb{R}, \rho) \sim \left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), d\right).$$

Но интервал со стандатрной метрикой является неполным метрическим пространством. Следовательно, вещественная прямая с метрикой ρ также является неполным метрическим пространством.

Чтобы пополнить пространство (Y, d), достаточно включить точки $\dfrac{\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{2}$. В исходном пространстве (X, ρ) этому соответствует добавление к вещественной прямой бесконечно удаленных точек $+\infty$ и $-\infty$. $\square$

Задача 6.6. *Будет ли полным метрическим пространством вещественная прямая с метрикой:*

$$\begin{aligned} &а)\quad \rho(x_1, x_2) \;=\; |e^{x_1} - e^{x_2}|, \\ &б)\quad \rho(x_1, x_2) \;=\; |x_1^3 - x_2^3|? \end{aligned}$$

Если нет, то постройте пополнение по соответствующей метрике.

Задача 6.7. *Постройте пополнение множества целых чисел с метрикой:*

$$\rho(n, m) = |e^{in} - e^{im}|.$$

Задача 6.8. *Укажите метрики, в которых следующие множества вещественной оси являются полными метрическими пространствами: а)* $(0, 1)$*; б)* $(0, \infty)$*; в)* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*; г)* $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \ldots\}$*; д) множество всех рациональных чисел* Q.

6.5 Принцип вложенных шаров и теорема Бэра

Для полных метрических пространств справедливы фундаментальные теоремы: принцип вложенных шаров (обобщение принципа вложенных сегментов), теорема Бэра и принцип сжимающих отображений (теорема Банаха о неподвижной точке). Первые две теоремы формулируются в этом разделе.

Теорема 2 (Принцип вложенных шаров)**.** *Для полноты метрического пространства необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Задача 6.9. *Докажите принцип вложенных шаров.*

Задача 6.10. *Приведите пример метрического пространства, в котором существует последовательность замкнутых вложенных друг в друга, не имеющих общей точки шаров, радиусы которых стремятся к нулю.*

Задача 6.11. *Покажите, что множество* $\mathbb{N}$ *натуральных чисел с метрикой*

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 1+\frac{1}{n+m} & \text{при} \quad n \neq m \\ 0 \quad \text{при} \quad n = m \end{cases} \tag{6.6}$$

— полное метрическое пространство, а шары $[n, 1+1/(2n)]$ *не имеют общей точки.*

Определение 6.4. *Множество называется нигде не плотным, если оно не является плотным ни в одном шаре.*

Задача 6.12. *Покажите, что* $M \subset X$ *нигде не плотно, если* $\overline{M}$ *не содержит внутренних точек.*

Задача 6.13. *Докажите, что график непрерывной функции нигде не плотен в* $\mathbb{R}^2$*. Верно ли это для образа непрерывной кривой?*

Теорема 3 (Теорема Бэра)**.** *Полное метрическое пространство нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.*

Обычно теорема Бэра формулируется как теорема о категории.

Определение 6.5. *Множество* $N \subset X$ *— множество первой категории, если оно является счетным объединением нигде не плотных множеств.*

Определение 6.6. *Множество $M \subset X$ — множество второй категории, если оно не является множеством первой категории.*

Теорема 4 (Вторая формулировка теоремы Бэра)**.** *Полное метрическое пространство X вляется множеством второй категории.*

Используя теорему Бэра, докажите следующие утверждения.

Задача 6.14. *Пусть X — полное метрическое пространство и $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i — замкнутые множества. Докажите, что хотя бы одно из них содержит шар.*

Задача 6.15. *Множество действительных чисел несчетно.*

Задача 6.16. *В полном метрическом пространстве пересечение счетного множества открытых всюду плотных множеств всюду плотно.*

Глава 7

Принцип сжимающих отображений

7.1 Общие сведения

Определение 7.1. *Отображение $f : X \to X$ называется сжимающим, если существует такое число α: $0 < \alpha < 1$, что для любых $x_1, x_2 \in X$ выполняется неравенство:*

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2).$$

Определение 7.2. *Точка a называется неподвижной точкой отображения f, если $f(a) = a$.*

Теорема 5 (Принцип сжимающих отображений)**.** *Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство, $f : X \to X$ – сжимающее отображение пространства X в себя. Тогда существует единственная неподвижная точка x_* отображения f: $f(x_*) = x_*$; для любого элемента $x_0 \in X$ последовательность $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in N$, сходится к неподвижной точке, причем расстояние между n-ым приближением и неподвижной точкой подчиняется оценке:*

$$\rho(x_n, x_*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1). \tag{7.1}$$

Задача 7.1. *Докажите: если отображение f полного метрического пространства (X, ρ) в себя обладает свойством, что*

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \rho(x_1, x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, то неподвижной точки может не быть [15, с. 45].

В приложениях часто применяется утверждение следующего примера.

Пример 7.1. *Пусть A — отображение полного метрического пространства (X, ρ) в себя такое, что его некоторая степень A^n — сжимающее отображение. Тогда отображение A имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Сначала докажем существование неподвижной точки у оператора A. Согласно принципу сжимающих отображений, оператор A^n имеет единственную неподвижную точку: $A^n x = x$. Подействовав на обе части последнего равенства оператором A, приходим к выражению:

$$A(A^n x) = Ax,$$

которое можно переписать в виде:

$$A^n(Ax) = Ax.$$

Следовательно, Ax является неподвижной точкой оператора A^n, и в силу единственности неподвижной точки у оператора A^n, выполняется равенство: $Ax = x$, то есть существует неподвижная точка оператора A.

Теперь докажем единственность неподвижной точки оператора A. Пусть существует $x_1 \neq x$: $Ax_1 = x_1$. Так как любая неподвижная точка оператора A является неподвижной точкой оператора A^n, то, в силу единственности неподвижной точки у оператора A^n: $x_1 = x$. Единственность доказана. $\square$

Задача 7.2. *Пусть B и C — отображения полного метрического пространства (X, ρ) в себя. Докажите: если отображение B — сжимающее, и отображения B и C коммутируют, то уравнение $Cx = x$ имеет решение [15, с. 46].*

Задача 7.3. *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, f — отображение замкнутого шара $\overline{S}_r(x_0)$ в X, для которого существует константа α, $\alpha < 1$ такая, что для $x, y \in \overline{S}_r(x_0)$ выполняется:*

$$1) \quad \rho(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\rho(x, y);$$

$$2) \quad \rho(f(x_0), x_0) \leqslant (1 - \alpha)r.$$

Докажите, что отображение f имеет в шаре $\overline{S}_r(x_0)$ единственную неподвижную точку.

Задача 7.4. *Докажите, что любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.*

7.2 Применение к алгебраическим уравнениям и системам

Пример 7.2. *Пусть функция $y = f(t)$ определена и дифференцируема на всей вещественной оси, и для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство:*

$$|f'(t)| \leqslant \lambda < 1.$$

Докажем, что существует единственное решение уравнения $f(t) = t$.

Доказательство. Вещественная прямая $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ является полным метрическим пространством. Докажем, что в условиях примера $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является сжимающим отображением. По теореме Лагранжа

$$\rho(f(t_1), f(t_2)) = |f(t_1) - f(t_2)| = |f'(\xi)||t_1 - t_2|,$$

где $\xi \in (t_1, t_2)$. Тогда, по условию,

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant \lambda |t_1 - t_2|$$

Так как $\lambda < 1$, то f — сжимающее отображение. По принципу сжимающих отображений, существует единственное решение уравнения $f(t) = t$. □

Задача 7.5. *Пусть функция $y = f(t)$ определена и дифференцируема на всей вещественной оси, и для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство:*

$$|f'(t)| \geqslant \lambda > 1.$$

Докажите, что существует единственное решение уравнения $f(t) = t$.

При исследовании конкретных уравнений, как правило, не задана операторная форма уравнения $x = Ax$ и не задано пространство, в котором рассматривается уравнение. Приведение к указанной операторной форме можно осуществить многими способами, и от этого выбора зависит удачное применение принципа сжимающих отображений. От выбора оператора A зависит, возможно, первоначальный выбор метрического пространства, которое оператор A переводит в себя.

Трудно ожидать, что оператор A сразу окажется сжимающим в этом пространстве. Тогда приходится выбирать его подпространство, инвариантное относительно оператора A, на котором этот оператор — сжимающий.

Проиллюстрируем сказанное на простом примере.

Пример 7.3. *Докажем, что существует непрерывная на* $[0, 1]$ *функция* $x(t)$*, удовлетворяющая уравнению:* $x(t) - e^{-x(t)} = \sin(t)$.

Доказательство. Перепишем уравнение в виде

$$x(t) = e^{-x(t)} + \sin(t). \tag{7.2}$$

Введем оператор $(Ax)(t) = e^{-x(t)} + \sin(t)$ и будем рассматривать его в пространстве $C[0, 1]$.

Оценим

$$\rho(Ax_1, Ax_2) = \max_{t \in [0,1]} |Ax_1(t) - Ax_2(t)|.$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$|Ax_1(t) - Ax_2(t)| = e^{-\xi(t)} |x_1(t) - x_2(t)|,$$

где $\xi(t)$ — некоторая промежуточная точка между $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Отсюда следует, что оператор A не является сжимающим на всем пространстве $C[0, 1]$.

Так как

$$\rho(Ax_1, Ax_2) \leqslant \max_{t \in [0,1]} e^{-\xi(t)} \rho(x_1, x_2),$$

то при любом $\delta > 0$ на множестве

$$X_\delta = \{x(t) \in [0, 1], x(t) \geqslant \delta\}$$

для оператора A выполняется условие сжимаемости. Однако, видно, что X_δ не является инвариантным относительно оператора A множеством.

Попробуем указать замкнутое множество из пространства $C[0,1]$, которое A переводит в себя. Заметим, что при $t \in [0,1]$ выполняется неравенство $\sin(t) \geqslant 0$. Тогда из уравнения (7.2) следует, что $x(t) \geqslant 0$. Из этого неравенства, а также из того, что $\sin(t) \leqslant 1$ вытекает

$$(Ax)(t) = e^{-x(t)} + \sin(t) \leqslant 2. \tag{7.3}$$

Снова обращаясь к (7.2), получаем $x(t) \leqslant 2$. Следовательно,

$$(Ax)(t) = e^{-x(t)} + \sin(t) \geqslant e^{-x(t)} \geqslant e^{-2}. \tag{7.4}$$

Обозначим

$$X = \left\{x(t) \in [0,1], e^{-2} \leqslant x(t) \leqslant 2\right\}.$$

Из (7.2-7.3) следует, что оператор A переводит пространство X в себя. Так как $C[0,1]$ — полное метрическое пространство, X замкнуто, то X является полным метрическим пространством.

Оператор A является сжимающим в X:

$$\rho(Ax_1, Ax_2) \leqslant e^{-e^{-2}} \rho(x_1, x_2).$$

По принципу сжимающих отображений, существует единственное в X решение исходного уравнения. Из построения пространства X следует, что других решений в $C[0,1]$ нет. $\square$

Задача 7.6. *Докажите, что уравнение* $2te^t = 1$ $(t \in \mathbb{R})$ *имеет единственное решение, это решение лежит на интервале* $(0,1)$.

Задача 7.7. *Докажите, что существует непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $x(t)$, *удовлетворяющая уравнению:*

$$x(t) - 0.5\sin(x(t)) + a(t) = 0,$$

где $a(t)$ *– заданная непрерывная функция.*

В следующем примере и задачах рассматривается применение принципа сжимающих отображений к системам линейных алгебраических уравнений.

Пример 7.4. *Пусть* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— линейное отображение с матрицей* $\{a_{ij}\}$ *в метрическом пространстве* $(\mathbb{R}^n, \rho)$, *причем*

$$1) \quad \rho = \rho_\infty, \quad \rho_\infty(x,y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - y_k|, \quad \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1,$$

$$2) \quad \rho = \rho_1, \quad \rho_1(x,y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|, \quad \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| < 1,$$

$$3) \quad \rho = \rho_2, \quad \rho_2(x,y) = \left\{ \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \right\}^{1/2}, \quad \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 < 1.$$

Докажем: A *— сжимающее отображение.*

Доказательство. Для всех рассматриваемых случаев i-ая компонента вектора Ax вычисляется по формуле:

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

В первом случае

$$\rho_\infty(Ax, Ay) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |(Ax)_i - (Ay)_i| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j) \right|.$$

Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей, то

$$\rho_\infty(Ax, Ay) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}||(x_j - y_j)|.$$

Вынесем из-под знака суммы $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j|$:

$$\rho_\infty(Ax, Ay) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j - y_j| = \alpha \rho_\infty(x,y),$$

где

$$\alpha = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1.$$

Следовательно, A — сжимающее отображение в метрике ρ_∞.

Аналогично оценим расстояние между Ax, Ay в метрике ρ_1:

$$\rho_1(Ax, Ay) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j - y_j|.$$

Поменяем местами суммирование:

$$\rho_1(Ax, Ay) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_j - y_j|.$$

Тогда

$$\rho_1(Ax, Ay) \leqslant \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| = \alpha \rho_1(x, y).$$

Так как $\alpha < 1$, то отображение A является сжимающим в метрике ρ_1.

Теперь оценим расстояние между Ax, Ay в евклидовой метрике.

$$\rho_2^2(Ax, Ay) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j) \right)^2.$$

К внутренней сумме применим неравенство Коши-Буняковского:

$$\rho_2^2(Ax, Ay) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 = \alpha^2 \rho_2^2(x, y).$$

Так как по условию $\alpha < 1$, то отображение A является сжимающим в метрике ρ_2.

$\square$

Задача 7.8. *Докажите следующие утверждения: для бесконечной системы линейных алгебраических уравнений*

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

a) если выполнено условие $\sup\limits_j \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$, *то данная система имеет единственное решение* $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$ *для любой последовательности* $b = (b_1, b_2, \ldots) \in \ell_1$;

б) если выполнено условие $\sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$*, то данная система имеет единственное решение* $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_\infty$ *для любой последовательности* $b = (b_1, b_2, \dots) \in \ell_\infty$*;*
в) если выполнено условие $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$*, то система имеет единственное решение* $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$ *для любой последовательности* $b = (b_1, b_2, \dots) \in \ell_2$*.*

Задача 7.9. *Пусть* $\lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots m$ *- собственные значения матрицы* A *и* $\lambda_k \neq 1$*. Докажите, что последовательные приближения*

$$x_n = Ax_{n-1} + y$$

сходятся к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$x - Ax = y$$

при любом начальном приближении тогда и только тогда, когда $|\lambda_k| < 1$*,* $k = 1, 2, \dots m$*.*

7.3 Применение к интегральным и дифференциальным уравнениям

Уравнение вида

$$x(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t) \tag{7.5}$$

называется линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Функции $f(t)$ и $K(t,s)$ предполагаются известными, $x(t)$ — неизвестной, $K(t,s)$ называется ядром интегрального уравнения.

В частном случае, когда $K(t,s) = 0$ при $s > t$, получается интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$x(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t). \tag{7.6}$$

Если $f = 0$, то уравнение называется однородным, если $f \neq 0$ — неоднородным.

Ядро вида

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t)Q_j(s)$$

называется вырожденным. Линейное интегральное уравнение с вырожденным ядром сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

Будем рассматривать интегральные уравнения в пространствах $C[a,b]$ и $L_p(a,b)$.

Пример 7.5. *Рассмотрим линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода:*

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^1 t^2 s x(s) ds + t \tag{7.7}$$

с параметром λ. Решение интегрального уравнения $x(t)$ будем трактовать как неподвижную точку оператора A, действующего по правилу:

$$Ax(t) = \lambda \int\limits_0^1 t^2 s x(s) ds + t. \tag{7.8}$$

Пусть сначала оператор A действует в пространстве $C[0,1]$. Он переводит пространство в себя. Выясним, при каких λ применим принцип сжимающих отображений. С помощью неравенства "модуль интеграла не превосходит интеграла модуля"и теоремы сравнения для интегралов оценим расстояние между Ax и Ay в пространстве $C[0,1]$.

$$\rho(Ax, Ay) = \max_{t\in[0,1]} |\lambda \int\limits_0^1 t^2 s(x(s) - y(s))ds| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[0,1]} |\lambda| \int\limits_0^1 t^2 s|x(s) - y(s)|ds \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \max_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 t^2 s ds \max_{t\in[0,1]} |x(s) - y(s)| = \frac{|\lambda|}{2}\rho(x,y)$$

Итак, константа сжимаемости $\alpha = |\lambda|/2$, следовательно, при $|\lambda| < 2$ применим принцип сжимающих отображений в пространстве $C[0,1]$.

Пусть теперь оператор A действует в пространстве $L_2(0,1)$. Преобразуем выражение квадрата расстояния между Ax и Ay в $L_2(0,1)$:

$$\rho^2(Ax,Ay) = \int_0^1 |\lambda|^2 \left(\int_0^1 t^2 s(x(s)-y(s))ds\right)^2 dt =$$

$$=|\lambda|^2 \int_0^1 t^4 dt \left(\int_0^1 s(x(s)-y(s))ds\right)^2 dt = \frac{|\lambda|^2}{5}\left(\int_0^1 s(x(s)-y(s))ds\right)^2$$

Теперь к интегралу применим неравенство Коши-Буняковского:

$$\rho^2(Ax,Ay) \leqslant \frac{|\lambda|^2}{5}\int_0^1 s^2 ds \rho^2(x,y)$$

После вычисления интеграла и извлечения квадратного корня приходим к следующей оценке:

$$\rho(Ax,Ay) \leqslant \frac{|\lambda|}{\sqrt{15}}\rho(x,y),$$

из которой вытекает, что при $|\lambda| < \sqrt{15}$ к интегральному уравнению (7.7) применим принцип сжимающих отображений в пространстве $L_2(0,1)$.

Найдем точное решение исходного интегрального уравнения с вырожденным ядром. Заметим, что уравнение (7.7) можно переписать в виде:

$$x(t) = \lambda t^2 a + t, \tag{7.9}$$

где через a обозначено выражение:

$$a = \int_0^1 sx(s)ds.$$

Чтобы получить a в левой части уравнения (7.9), умножим его на t и проинтегрируем:

$$a = \lambda a \int_0^1 t^3 dt + \int_0^1 t^2 dt.$$

Вычислив интегралы, находим a:

$$a = \frac{1}{4}\lambda a + \frac{1}{3}, \quad a = \frac{4}{3(4-\lambda)}.$$

Подставив полученное выражение в (7.9), находим решение:

$$x(t) = \frac{4\lambda}{3(4-\lambda)}t^2 + t.$$

Итак, для любого $\lambda \neq 4$ существует единственное решение уравнения (7.7).

Для $\lambda = 0,5$ методом последовательных приближений найдем приближенное решение в пространстве $C[0,1]$ с точностью $0,01$. Итерации находятся по формуле:

$$x_n = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^2 s x_{n-1}(s)ds + t$$

Погрешность оценим по формуле (7.1):

$$\rho(x_n, x_*) \leqslant \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \rho(x_0, x_1) \leqslant 0,01.$$

Выберем в качестве начального приближения $x_0 = 0$. Тогда $x_1 = t$, $\rho(x_0, x_1) = 1$, и для нахождения приближенного решения с заданной точностью достаточно $n = 4$ итераций.

Далее находим последовательно $x_2 = t$, $x_3 = \dfrac{9}{48}t^2 + t$ и $x_4 = \dfrac{73}{384}t^2 + t$. Точное решение имеет вид: $x_* = \dfrac{4}{21}t^2 + t$ и $\rho(x_4, x_*) = \dfrac{4}{21} - \dfrac{73}{384} \approx 0,0004$.

Задача 7.10. *При каких λ применим принцип сжимающих отображений к следующим интегральным уравнениям второго рода:*

$$1) \quad x(t) = \lambda \int\limits_0^1 ts^2 x(s)ds + 1; \qquad 2) \quad x(t) = \lambda \int\limits_0^1 e^{(t-s)}x(s)ds + 1;$$

$$3) \quad x(t) = \lambda \int\limits_0^1 t^2 s^2 x(s)ds + t^3; \qquad 4) \quad x(t) = \lambda \int\limits_0^1 \cos(\pi(t-s))x(s)ds + 1.$$

а) в пространстве $C[0,1]$, б) в пространстве $L_2[0,1]$? При $\lambda = 0,5$ найти методом последовательных приближений решение с точностью до $0,01$ и сравнить его с точным решением.

Теперь сформулируем и докажем утверждения о существовании и единственности решений интегральных уравнений Фредгольма в общем виде.

Пример 7.6. *Докажем: если ядро $K(t,s)$ непрерывно и*

$$\int\limits_a^b |K(t,s)|ds \leqslant d < 1,$$

то интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$x(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t)$$

имеет единственное решение для любой непрерывной функции $f(t)$.

Доказательство. Через A обозначим оператор, действующий по правилу

$$Ax(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t).$$

Тогда интегральное уравнение Фредгольма принимает вид

$$x = Ax,$$

и его решение является неподвижной точкой отображения A.

Будем рассматривать оператор A в полном метрическом пространстве $C[a,b]$. Так как функции $K(t,s)$ и $f(t)$ непрерывны, то оператор A отображает пространство $C[a,b]$ в себя:

$$A : C[a,b] \to C[a,b].$$

Докажем, что он является сжимающим в этом пространстве. Оценим расстояние между Ax, Ay:

$$\rho(Ax,Ay) = \max_{t\in[a,b]} \left| \int\limits_a^b K(t,s)(x(s)-y(s))ds \right| \leqslant \max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)||x(s)-y(s)|ds.$$

Вынесем из-под знака интеграла максимум второго сомножителя

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \max_{s\in[a,b]} |x(s) - y(s)| \max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds.$$

Окончательно,

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds\rho(x,y).$$

Так как по условию

$$\max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds \leqslant d < 1,$$

то A — сжимающее отображение. По принципу сжимающих отображений, существование и единственность решения уравнения доказаны. □

Задача 7.11. *Пусть $K(x,t,s)$ – непрерывная функция трех переменных, удовлетворяющая по x условию Липшица:*

$$|K(x_1,t,s) - K(x_2,t,s)| \leqslant L|x_1 - x_2|.$$

При каких λ нелинейное интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(x(s),t,s)ds + f(t)$$

имеет непрерывное решение на отрезке $[a,b]$ [9, с. 95]?

Задача 7.12. *Докажите: если ядро измеримо и удовлетворяет условию:*

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(t,s)|^2 dtds < 1,$$

то интегральное уравнение Фредгольма второго рода (7.5) имеет единственное решение $x \in L_2(a,b)$ для любой функции $f(t) \in L_2(a,b)$.

Задача 7.13. *Пусть A – интегральный оператор Вольтерра*

$$Ax(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)ds, \tag{7.10}$$

$K(t,s)$ – непрерывно. Доказать: существует число m такое, что A^m является сжимающим отображением в $C[a,b]$, и, значит, для интегрального уравнения Вольтерра второго рода (7.6) справедлива теорема существования и единственности решения [9, с. 96].

Задача 7.14. *В множестве непрерывных на $[a,b]$ функций введем метрику по правилу:*

$$\rho_\beta(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|e^{-\beta t}.$$

Докажите: при достаточно больших β интегральный оператор Вольтерра (7.10) является сжимающим относительно метрики ρ_β.

В следующих задачах рассматривается применение принципа сжимающих отображений для доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Задача 7.15. *Пусть функция f определена и непрерывна в некоторой области $G \subset R^2$, содержащей точку (x_0, y_0), и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y:*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|.$$

Доказать, что на некотором сегменте $|x - x_0| \leqslant d$ существует, и притом только одно, решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши:

$$y'(x) = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

[9, с. 92].

Задача 7.16. *Пусть дана система дифференциальных уравнений*

$$y_i'(x) = f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)), \quad i = 1 \dots n.$$

с начальными условиями $y_i(x_0) = y_{0i}, \quad i = 1 \dots n$, *причем функции* f_i *определены и непрерывны в некоторой области* $G \subset R^{n+1}$, *содержащей точку* $(x_0, y_{01}, \dots y_{0n})$, *и удовлетворяют условию Липшица*

$$|f_i(x, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)})| \leqslant M \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|.$$

Доказать, что на некотором сегменте $|x - x_0| \leqslant d$ *существует, и притом только одно, решение задачи Коши [9, с. 93].*

Глава 8

Линейные нормированные пространства

8.1 Банаховы пространства

Определение 8.1. *Линейное пространство X над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ называется нормированным, если определена функция $\|\cdot\| : X \longmapsto R$, называемая нормой и удовлетворяющая следующим аксиомам:*

$$1. \quad \|x\| \geqslant 0, \quad \text{\textit{причем}} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$2. \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}\text{\textit{(или }}\mathbb{C}\text{\textit{)}};$$

$$3. \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X.$$

Каждое линейное нормированное пространство является метрическим пространством относительно метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Задача 8.1. *Приведите пример метрического пространства, которое*
а) не является линейным;
б) является линейным, но не является нормированным.

Определение 8.2. *Полное линейное нормированное пространство называется банаховым.*

Пример 8.1. $C[a, b]$ *– пространство непрерывных на* $[a, b]$ *функций с максимум-нормой:*

$$\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| \tag{8.1}$$

является банаховым пространством.

Его можно превратить в неполное линейное нормированное пространство либо удалив достаточное число элементов и оставив прежнюю норму, либо определив на всем множестве непрерывных функций норму по-другому.

Например, через $P[a,b]$ обозначим множество многочленов с нормой (8.1). Согласно теореме Вейерштрасса, любую непрерывную на отрезке функцию можно равномерно приблизить многочленами. Следовательно, $P[a,b]$ – неполное пространство.

С другой стороны, ранее было показано, что множество непрерывных функций с интегральной нормой

$$\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(t)|dt$$

является неполным пространством. Обозначим его $\mathfrak{R}_1[a,b]$ (это обозначение, в отличие от $C[a,b]$, не является общепринятым).

Аналогично доказывается неполнота пространства $\mathfrak{R}_2[a,b]$ – множества непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с интегральной нормой

$$\|f\|_2 = \left\{ \int\limits_a^b |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}.$$

8.2 Гильбертовы пространства

Определение 8.3. *Линейное пространство X над полем $\mathbb{C}$ называется предгильбертовым, если определена функция $(\,,\,) : X \times X \longmapsto \mathbb{C}$, называемая скалярным произведением и удовлетворяющая следующим аксиомам:*

1. $(x,x) \geqslant 0, \quad$ *причем* $\quad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z);$
3. $(x,y) = \overline{(y,x)};$

$\forall x,y,z \in X$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$, *черта означает комплексное сопряжение.*

Каждое предгильбертово пространство является линейным нормированным пространством относительно нормы

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Задача 8.2. *Докажите, что во всяком предгильбертовом пространстве выполняется неравенство Коши-Буняковского [11, с. 85], [9, с. 167]:*

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y). \tag{8.2}$$

Задача 8.3. *Каждое предгильбертово пространство является линейным нормированным относительно нормы:*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{8.3}$$

Из (8.2), (8.3) следует, что неравенство Коши-Буняковского можно переписать в виде:

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{8.4}$$

Во всяком предгильбертовом пространстве можно определить не только норму (то есть длину) вектора, но и угол между векторами. Угол φ между векторами x и y находится по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}. \tag{8.5}$$

Из (8.5) следует, что ортогональность векторов естественно определяется через равенство нулю скалярного произведения.

Определение 8.4. *Полное предгильбертово пространство называется гильбертовым.*

Пример 8.2. *Примерами гильбертовых пространств являются пространство последовательностей ℓ_2:*

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, ...) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty, \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \right\},$$

пространство функций $L_2(a, b)$:

$$L_2(a, b) = \left\{ f(t) - \quad \text{измерима} \,\middle|\, \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty, (f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt \right\}.$$

А пространство $\mathfrak{R}_2[a,b]$ — множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций со скалярным произведением

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

— предгильбертово, но не гильбертово пространство.

В следующих утверждениях H — предгильбертово пространство, полнота роли не играет.

Задача 8.4. *1) Сложение в H непрерывно. 2) Умножение на комплексные числа непрерывно.*

Задача 8.5. *Скалярное произведение непрерывно относительно сходимости по норме [11, с. 86].*

Задача 8.6. *В вещественном предгильбертовом пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

Задача 8.7. *Пусть $x_1, x_2, \dots x_n$ - ортогональная система в H, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Доказать, что $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.*

Задача 8.8. *Пусть x_n, y_n принадлежат замкнутому единичному шару $\overline{S}_1(0)$ в H и $(x_n, y_n) \to 1$ при $n \to \infty$. Доказать, что $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Задача 8.9. *Докажите, что во всяком предгильбертовом пространстве выполняется тождество параллелограмма:*

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Задача 8.10. *Докажите, что в любом вещественном нормированном пространстве, в котором выполняется это тождество, можно ввести такое скалярное произведение, что будет справедливо равенство:*

$$\|x\|^2 = (x,x)$$

[9, с. 188].

Пример 8.3. *Докажем: в $C[a,b]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.*

Доказательство. Проведем доказательство для $C\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Укажем такие элементы $x, y \in C\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, для которых не выполняется тождество параллелограмма.

Пусть $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Тогда

$$\|x\| = \max_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\cos(t)| = 1; \quad \|y\| = \max_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\sin(t)| = 1,$$

но

$$\|x-y\| = \max_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\cos(t)-\sin(t)| = 1; \quad \|x+y\| = \max_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} |\cos(t)+\sin(t)| = \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Тождество параллелограмма не выполняется в $C\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, поэтому скалярное произведение, согласованное с нормой данного пространства, ввести нельзя. □

Задача 8.11. *Докажите: в ℓ_p при $p \neq 2$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этих пространств [9, с. 190].*

С помощью тождества параллелограмма можно показать, что пространства $L_p(a,b)$ при $p \neq 2$ не являются гильбертовыми.

Задача 8.12. *Приведите пример неполного линейного нормированного пространства, которое*

а) не является предгильбертовым;

б) является предгильбертовым.

Задача 8.13. *Приведите пример банахова пространства, которое*

а) не является гильбертовым;

б) является гильбертовым.

Рис. 8.1: Метрические пространства

Связь между метрическим, линейными нормированными, банаховыми, предгильбертовыми и гильбертовыми пространствами иллюстрирует Рис.1.

8.3 Эквивалентные нормы

Определение 8.5. *Две нормы* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *называются эквивалентными, если существуют постоянные* $C_1, C_2 > 0$ *такие, что*

$$C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

Задача 8.14. *На* $\mathbb{R}^n$ *все нормы эквивалентны.*

Задача 8.15. *Пусть* X *— линейное нормированное пространство. Докажите, что нормы*

$$\sup(\|x_1\|, \|x_2\|), \quad \|x_1\| + \|x_2\|, \quad \left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right)^{1/2}$$

эквивалентны на $X \times X$.

Докажите следующие утверждения, относящиеся к бесконечномерному случаю:

Задача 8.16. *Пространство непрерывных на* $[a, b]$ *функций не полно по норме*

$$\|x\|_1 = \int\limits_a^b |x(t)|dt.$$

Задача 8.17. *Нормы*

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \quad \textit{и} \quad \|x\|_1 = \int\limits_a^b |x(t)|dt$$

не эквивалентны на множестве непрерывных функций.

8.4 Подпространство

Определение 8.6. *Множество элементов L линейного пространства X над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) называется линейным многообразием, если*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \textit{ (или } \mathbb{C}\textit{)}\ \forall x, y \in X : x, y \in L \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L.$$

Определение 8.7. *Подпространством линейного нормированного пространства X называется подмножество, которое является замкнутым линейным многообразием.*

Докажите следующие утверждения о конечномерных пространствах:

Задача 8.18. $\mathbb{R}^n$ *полно.*

Задача 8.19. *Конечномерное подмножество линейного нормированного пространства, являющееся линейным многообразием, замкнуто (т.е. является подпространством).*

Пример 8.4. *Покажем, что пространство непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $C^1[a,b]$ не замкнуто в $C[a,b]$ и, следовательно, $C^1[a,b]$ не является подпространством $C[a,b]$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно привести пример предельной точки множества $C^1[a,b]$, которая принадлежит $C[a,b]$, но не принадлежит $C^1[a,b]$. То есть доказать существование последовательности элементов пространства $C^1[a,b]$, которая сходится в $C[a,b]$, но предел не принадлежит $C^1[a,b]$.

Возьмем $x_*(t) = \left|t - \dfrac{a+b}{2}\right|$ – элемент пространства $C[a,b]$, который не принадлежит $C^1[a,b]$. По теореме Вейерштрасса, любую непрерывную на отрезке функцию можно равномерно приблизить тригонометрическими многочленами. Следовательно, существует последовательность элементов пространства $C^1[a,b]$, сходящаяся к x_*. Но x_* не принадлежит $C^1[a,b]$. Утверждение доказано. $\square$

Задача 8.20. *Докажите, что множество полиномов с максимум-нормой не является подпространством $C[a,b]$, а множество полиномов ограниченной степени с максимум-нормой является подпространством $C[a,b]$.*

Глава 9

Компактность в метрических пространствах

9.1 Относительная компактность и ограниченность

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

Определение 9.1. *Множество $M \subset X$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.*

Определение 9.2. *Множество $M \subset X$ называется относительно компактным, если из любой последовательности его элементов можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Если предел этой последовательности принадлежит M, то M называется компактным множеством.*

Из определения следует, что компактное множество в метрическом пространстве — это относительно компактное и замкнутое множество.

Пользуясь определением компактности, докажите следующие утверждения.

Задача 9.1. *Замкнутое подмножество компактного метрического пространства компактно.*

Задача 9.2. *Компактное метрическое пространство полно.*

Таким образом, компактное метрическое пространство — это относительно компактное и полное пространство.

При исследовании компактности конечномерный и бесконечномерный случаи существенно отличаются друг от друга.

Пример 9.1. *Пусть* $X = \mathbb{R}^n$ *с любой из метрик* ρ_p

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Из теоремы Больцано-Вейерштрасса следует, что относительная компактность множества в конечномерном случае равносильна ограниченности. Соответственно, компактность — это ограниченность и замкнутость.

В бесконечномерном случае это не так. Из относительной компактности следует ограниченность, обратное неверно.

Задача 9.3. *Докажите, что любое относительно компактное множество является ограниченным.*

Задача 9.4. *Постройте отрицание определения относительной компактности.*

Приведем пример ограниченного множества в бесконечномерном пространстве, которое не является относительно компактным.

Пример 9.2. *Докажем, что замкнутый единичный шар* $\overline{S}_1(0)$ *в пространстве* ℓ_2 *не является относительно компактным множеством.*

Доказательство. По определению,

$$\overline{S}_1(0) = \left\{ x \in \ell_2 \,\middle|\, \rho_2(x, 0) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2} \leqslant 1 \right\}$$

Рассмотрим последовательность базисных векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
e_1 & = & (1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots); \\
e_2 & = & (0, & 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots); \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
e_n & = & (0, & 0, & \ldots, & \underbrace{1}_{n}, & 0, & \ldots); \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Очевидно, что $\{e_n\} \in \overline{S}_1(0)$. Так как при $n \neq m$, $n, m \to \infty$

$$\rho(e_n, e_m) = \sqrt{2} \not\to 0,$$

то из данной последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. $\square$

9.2 Критерий Хаусдорфа

Определение 9.3. *Множество M называется ε-сетью для множества N, если для любого элемента $n \in N$ найдется элемент $m \in M$ такой, что*

$$\rho(m, n) < \varepsilon.$$

Задача 9.5. *Пусть $X = \mathbb{R}^2$ с евклидовой метрикой.При $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ постройте ε-сеть, состоящую из конечного числа элементов, для квадрата*

$$K = \left\{\, x \in \mathbb{R}^2 \,|0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2 \right\}$$

Теорема 6 (Критерий Хаусдорфа)**.** *Для того, чтобы множество M из X было относительно компактным, необходимо, а в случае полноты X и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ у множества M существовала ε-сеть, состоящая из конечного числа элементов.*

Задача 9.6. *Пусть M — компактное множество в полном метрическом пространстве (X, ρ). Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ множество M может быть представлено в виде*

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} F_i,$$

где F_i — замкнутые множества и для $i = 1, 2, \ldots n$ $diam F_i < \varepsilon$ ($diam F_i = \sup\limits_{x,y \in F_i} \rho(x, y)$).

9.3 Гильбертов кирпич

Наша цель — привести пример относительно компактного множества в бесконечномерном случае. Предварительно докажем следующее утверждение.

Пример 9.3. *Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство и известно, что для любого $\varepsilon > 0$ у множества $M \subset X$ существует относительно компактная ε-сеть. Тогда M относительно компактно.*

Доказательство. Пусть N — относительно компактная ε-сеть множества M. Тогда, по определению ε-сети, для любого $m \in M$ найдется $n \in N$ такой, что

$$\rho(m, n) < \varepsilon.$$

Так как, по условию, N — относительно компактное множество, то, согласно критерию Хаусдорфа, у множества N существует ε-сеть L, состоящая из конечного числа элементов. То есть для любого $n \in N$ найдется $\ell \in L$ такой, что

$$\rho(n, \ell) < \varepsilon.$$

По неравенству треугольника, для любого $\varepsilon > 0$ у множества M существует 2ε-сеть L, состоящая из конечного числа элементов:

$$\rho(m, \ell) \leqslant \rho(m, n) + \rho(n, \ell) < 2\varepsilon.$$

Так как, по условию, пространство X полно, то из существования конечной ε-сети следует относительная компактность множества M.

□

Множество K в пространстве ℓ_2

$$K = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2 \,\middle|\, |x_n| \leqslant \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \right\} \tag{9.1}$$

будем называть "гильбертовым кирпичом".

Пример 9.4. *Докажем, что гильбертов кирпич является относительно компактным множеством в пространстве ℓ_2.*

Доказательство. Для доказательства достаточно построить относительно компактную ε-сеть.

Заметим, что K является ограниченным множеством: $K \subset \overline{S}_R(0)$, где

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}.$$

Пусть множество K_N состоит из следующих элементов: N первых координат каждого элемента из K остаются неизменными, остальные полагаются равными нулю

$$K_N = \left\{ y^N \in K \,\middle|\, y^N = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, \ldots, 0, \ldots), x \in K \right\}$$

Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что K_N является ε-сетью для множества K. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для каждого $x \in K$ можно выбрать $y \in K_N$ такой, что

$$\rho(x, y) < \varepsilon.$$

В качестве такого элемента y возьмем элемент y^N, у которого N первых координат совпадают с координатами элемента x. Тогда расстояние между x и y^N выражается формулой:

$$\rho(x, y^N) = \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^2}.$$

Ряд в правой части можно равномерно оценить числовым рядом, который представляет собой остаток сходящегося ряда. Следовательно,

$$\sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \varepsilon.$$

Множество K_N относительно компактно в ℓ_2 как ограниченное множество в $\mathbb{R}^N$. Таким образом, относительно компактная ε-сеть множества K построена и утверждение примера доказано. $\square$

Задача 9.7. *Где в доказательстве использовано условие* $|x_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ *? Можно ли его не учитывать? Что можно потребовать вместо него?*

Задача 9.8. *Предложите другой способ задания гильбертова кирпича (9.1) в пространстве* ℓ_2.

Задача 9.9. *Приведите пример относительно компактного множества в пространстве* ℓ_p *при* $p \neq 2$ *и докажите его относительную компактность.*

Обобщение доказательства относительной компактности гильбертова кирпича приводит к критерию относительной компактности множества в пространстве ℓ_p.

Задача 9.10. *Докажите, что множество* M *элементов* $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$ $(p \geqslant 1)$ *относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и по любому* $\varepsilon > 0$ *найдется* $n \in \mathbb{N}$ *такой, что для любого* $x \in M$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon$$

[11, с. 248].

9.4 Отображения на компактных множествах

Пример 9.5. *Докажем, что при непрерывном отображении образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть (X, ρ) — компактное метрическое пространство. Отображение $f : X \to X$ непрерывно. Докажем, что $f(X)$ — компактное множество.

Рассмотрим произвольную последовательность $y_n \in f(X)$. Тогда $\forall y_n$ найдется $x_n \in X$ такой, что $f(x_n) = y_n$. В силу компактности пространства (X, ρ) найдется подпоследовательность x_{n_k}, сходящаяся к некоторому элементу $x \in X$:

$$\exists x_{n_k} : \rho(x_{n_k}, x) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{9.2}$$

Пусть $y_{n_k} = f(x_{n_k})$. В силу непрерывности отображения f из (9.2) следует, что

$$\rho(f(x_{n_k}), f(x)) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Таким образом, для любой последовательности y_n найдется подпоследовательность y_{n_k} такая, что

$$\rho(y_{n_k}, y) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

причем $y = f(x) \in f(X)$. □

Задача 9.11. *Является ли образ относительно компактного множества при непрерывном отображении относительно компактным?*

Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях на отрезке обобщаются на функции, непрерывные на компактных множествах в метрических пространствах.

Задача 9.12. *Непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, определенная на компактном метрическом пространстве X, ограничена и достигает своего максимума и минимума [11, с. 224].*

Задача 9.13. *Пусть X, Y — метрические пространства, X компактно и $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Докажите, что f равномерно непрерывно.*

На основании теорем Вейерштрасса доказываются следующие утверждения.

Задача 9.14. *Пусть M — компактное множество в полном метрическом пространстве (X, ρ). Докажите, что для любого $x \in X$ найдется такой $y \in M$, что $\rho(x, M) = \rho(x, y)$.*

Задача 9.15. *Для того, чтобы метрическое пространство (X, ρ) было компактным, необходимо и достаточно, чтобы любая непрерывная числовая функция на X была ограничена.*

Теперь рассмотрим непрерывный функционал на пространстве $C[0,1]$. Из результата следующей задачи вытекает, в частности, что замкнутый единичный шар в этом пространстве не является компактным множеством.

Задача 9.16. *Проверьте, что отображение $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$, заданное формулой*

$$f(x) = \int\limits_0^{1/2} x(t)dt - \int\limits_{1/2}^{1} x(t)dt,$$

непрерывно. Покажите, что точная верхняя грань его значений на замкнутом единичном шаре $\overline{S}_1(0)$ равна 1, но эта грань не достигается ни на каком элементе шара.

Пример 9.6. *Пусть (X,ρ) — компактное метрическое пространство и отображение $f : X \to X$ удовлетворяет условию*

$$\rho(f(x_1,x_2)) = \rho(x_1,x_2).$$

Докажем, что уравнение $f(x) = y$ разрешимо при любом $y \in X$.

Коротко утверждение примера формулируется так: компактное метрическое пространство нельзя изометрически отобразить на его часть.

Доказательство. Рассмотрим два способа доказательства.

Первый способ. Доказательство проведем от противного. Предположим, что f осуществляет отображение пространства X на его часть M:

$$f : X \xrightarrow{\text{на}} M, \quad M \subset X.$$

Тогда образ f совпадает с M

$$f(X) = M$$

и найдется точка $x_0 \in X$, $x_0 \notin M$.

Построим последовательность точек $\{x_n\} \in f(X)$ по следующему правилу:

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $x_n \in f(X)$ при $n \geqslant 1$.

Так как $x_1 = f(x_0)$, $x_0 \notin f(X)$ и отображение f осуществляет изометрию, то последовательность $\{x_n\}$ состоит из бесконечного числа элементов.

Так как, по условию, пространство (X, ρ) компактно, а отображение f непрерывно, то $f(X)$ — замкнутое множество. Следовательно, множество $X \backslash f(X)$ — открыто. Поэтому из того, что $x_0 \notin M$ вытекает, что

$$\exists \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(x) \notin f(X).$$

Чтобы прийти к противоречию с данным утверждением, покажем, что в любой сколь угодно малой окрестности точки x_0 найдется элемент последовательности x_n, принадлежащий $f(X)$.

Действительно, с одной стороны, последовательность $\{x_n\}$ состоит из бесконечного числа элементов. С другой стороны, так как пространство (X, ρ) — компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ у X существует конечная ε-сеть.

Воспользуемся принципом ящиков Дирихле: если в m ящиках лежит $m + 1$ предмет, то найдется хотя бы один ящик, в котором лежит более одного предмета.

Тогда, по принципу ящиков Дирихле, найдутся два элемента последовательности $\{x_n\}$, которые попадут в одну ячейку ε-сети:

$$\exists k, \ell : \rho(x_k, x_\ell) < \varepsilon.$$

По построению последовательности $\{x_n\}$, это неравенство можно переписать в виде

$$\exists k, \ell : \rho(f(x_{k-1}), f(x_{\ell-1}) < \varepsilon.$$

В свою очередь, последнее неравенство равносильно следующему

$$\exists k, \ell : \rho(x_{k-1}, x_{\ell-1}) < \varepsilon.$$

Продолжая этот процесс, после конечного числа шагов найдем элемент последовательности $\{x_n\}$, который лежит в ε-окрестности точки x_0

$$\rho(x_0, x_{k-\ell}) < \varepsilon \quad \text{при} \quad k > \ell.$$

Противоречие получено и утверждение примера доказано.

Второй способ. Пусть x — произвольная точка из X. Рассмотрим последовательность $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $\{f^{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ $(n_k < n_{k+1})$ — сходящаяся подпоследовательность. Но тогда

$$\rho(f^{n_k}(x), f^{n_{k+1}}(x)) = \rho(x, f^{n_{k+1}-n_k}(x)) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Отсюда следует, что $x \in f(X)$ ввиду замкнутости $f(X)$. $\square$

Задача 9.17. *Доказать, что если (X, ρ) — компактное метрическое пространство и отображение $f : X \to X$ удовлетворяет условию*

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \rho(x_1, x_2) \quad \textit{при} \quad x_1 \neq x_2,$$

то существует единственная неподвижная точка отображения f. Будет ли отображение f сжимающим?

9.5 Компактность в $C[0,1]$

Определение 9.4. *Множество Φ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций называется равномерно ограниченным, если существует такая константа $R > 0$, что*

$$\forall \varphi \in \Phi \forall t \in [0,1] \quad |\varphi(t)| \leqslant R.$$

Определение 9.5. *Множество $\Phi \subset C[0,1]$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо неравенство*

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$$

как только

$$|t_1 - t_2| < \delta.$$

Теорема 7 (Критерий Арцела)**.** *Множество $\Phi \in C[0,1]$ относительно компактно тогда и только тогда, когда Φ равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.*

Пример 9.7. *Докажем достаточный признак относительной компактности в $C[0,1]$. Множество непрерывно дифференцируемых функций таких, что сами они равномерно ограничены и их первые производные равномерно ограничены, относительно компактно в $C[0,1]$.*

Доказательство. Пусть M

$$M = \left\{ x \in C^1[0,1] \,|\quad |x(t)| \leqslant B, |x'(t)| \leqslant B_1 \right\}$$

— рассматриваемое множество функций. Очевидно, что M равномерно ограничено. Для доказательства равностепенной непрерывности рассмотрим разность $|x(t_1) - x(t_2)|$. По теореме Лагранжа

$$|x(t_1) - x(t_2)| = |x'(\xi)||t_1 - t_2|,$$

где $\xi \in [t_1, t_2]$. Тогда, по условию

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant B_1 |t_1 - t_2|.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \dfrac{\varepsilon}{B_1}$ такое, что из

$$|t_1 - t_2| < \delta$$

следует, что

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

□

Задача 9.18. *Какие из следующих множеств относительно компактны в $C[0,1]$?*

1) $M_1 = \left\{ x \in C[0,1] \,|\quad |x(t)| \leqslant B \right\},$

2) $M_2 = \left\{ x \in C[0,1] \,|\quad |x(t)| \leqslant B, |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2| \right\}$

Задача 9.19. *Пусть M — равномерно ограниченное множество функций в пространстве $C[0,1]$. Докажите, что множество N функций вида*

$$y(t) = \int\limits_0^t x(\tau)d\tau, \quad t \in [0,1],$$

где $x(t) \in M$, относительно компактно.

Задача 9.20. *Докажите, что шар пространства $C^1[0,1]$ является относительно компактным множеством в пространстве $C[0,1]$. Является ли он компактным множеством в $C[0,1]$?*

Задача 9.21. *Постройте отрицание определения равностепенной непрерывности.*

Пример 9.8. *Докажем, что множество $t^n, n = 1, 2, \ldots$ не является относительно компактным в $C[0,1]$.*

Доказательство. Очевидно, что данное множество равномерно ограничено. Докажем, что оно не является равностепенно непрерывным. Пусть $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, δ — любое число, меньшее единицы. Возьмем

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 1 - \delta.$$

Тогда для любого δ найдется номер N такой, что

$$x(t_1) - x(t_2) = 1 - \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^N \geqslant \frac{1}{2}$$

Действительно, достаточно выбрать

$$N \geqslant \left[\frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln(1-\delta)}\right] + 1,$$

что и требовалось доказать. □

Задача 9.22. *Являются ли относительно компактными следующие* *множества в* $C[0,1]$*?*

$$
\begin{array}{lll}
\textit{1)} & (at)^n & n = 1, 2, \ldots; \\
\textit{2)} & \sin(nt) & n = 1, 2, \ldots; \\
\textit{3)} & \sin(t+n) & n = 1, 2, \ldots; \\
\textit{4)} & e^{t+\alpha} & \alpha \in \mathbb{R} \\
\textit{5)} & e^{t-\alpha} & \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0
\end{array}
$$

Задача 9.23. *Используя теорему Арцела, сформулируйте и докажите критерий относительной компактности в пространстве* $C^1[0,1]$.

Глава 10

Топологические пространства

Более широкий класс по сравнению с метрическими пространствами образуют топологические пространства.

Определение 10.1. *Топологическим пространством называется пара* (X, τ) *– множество* X *с введенной на нем топологией* τ*. Топология* τ *есть система подмножеств, обладающих следующими свойствами:*
1) пустое множество и все пространство X *принадлежат* τ*;*
2) объединение любого числа множеств из τ *принадлежит* τ*;*
3) пересечение любого конечного числа множеств из τ *принадлежат* τ*.*

Определение 10.2. *Подмножества, удовлетворяющие указанным трем свойствам, называются открытыми.*

Определение 10.3. *Любое открытое множество, содержащее точку* $x \in X$*, называется окрестностью точки* x*.*

Каждое метрическое пространство (X, ρ) является топологическим пространством. Открытые множества, определяемые обычным образом через расстояние ρ, задают топологию.

Произвольное метрическое пространство (X, ρ) удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа: для любых различных точек $x, y \in X$ существуют множество τ_x, содержащее x и множество τ_y, содержащее y, которые принадлежат системе τ и не пересекаются: $\tau_x \bigcap \tau_y = \emptyset$.

Определение 10.4. *Система открытых множеств* Σ *топологического пространства* (X, τ) *называется базой топологии этого пространства,* *если любое непустое открытое множество пространства X может быть получено как объединение множеств из Σ.*

Определение 10.5. *Топологическое пространство называется пространством со счетной базой, если в нем существует хотя бы одна база, состоящая не более чем из счетного числа элементов.*

Метрическое пространство является пространством со счетной базой тогда и только тогда, когда оно сепарабельно.

Определение 10.6. *Топологическое пространство (X, τ) называется метризуемым, если топология τ в нем может быть задана с помощью какой-нибудь метрики.*

Не всякое топологическое пространство метризуемо.

Пример 10.1. *В теории обобщенных функций важную роль играет пространство $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Оно состоит из бесконечно дифференцируемых на вещественной прямой функций, каждая из которых финитна — обращается в ноль вне некоторого отрезка.*

Множество

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$$

(черта означает замыкание) называется носителем функции φ.

$C_0^\infty(\mathbb{R})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Сходимость в этом пространстве определяется следующим образом.

Определение 10.7. *Последовательность $\varphi_n \to \varphi$ в C_0^∞, если*
1. носители функций $\varphi_n(x)$ "не убегают"на бесконечность:

$$\exists a, b : \operatorname{supp} \varphi_n \subset [a, b] \quad \forall n;$$

2. $\varphi_n(x)$ сходится к $\varphi(x)$ и все производные $\varphi_n(x)$ сходятся к соответствующим производным $\varphi(x)$ равномерно по $x \in [a, b]$:

$$\varphi_n^{(j)}(x) \to \varphi^{(j)}(x) \qquad n \to \infty, j = 0, 1, \dots \forall x \in [a, b].$$

Задача 10.1. *Пусть* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. *Сходятся ли в* $C_0^\infty(\mathbb{R})$ *следующие последовательности:*

$$1)\frac{1}{n}\varphi(x); \quad 2)\frac{1}{n}\varphi(nx); \quad 3)\frac{1}{n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)?$$

Задача 10.2. *Докажите, что пространство* $C_0^\infty(\mathbb{R})$ *не метризуемо [14, с. 161].*

Литература

[1] *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я.В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Выш. школа, 1978. - 208 с.

[2] *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. - 544 с.

[3] *Вайнберг М. М.* Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979. - 128 с.

[4] *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* p-адический анализ и математическая физика.-М.: Физматлит, 1994.-352 с.

[5] *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1984. - 640 с.

[6] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.

[7] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. - 752 с.

[8] *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988. - 400 с.

[9] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. - 624 с.

[10] Функциональный анализ *Под ред. Крейна С. Г.* М.: Наука, 1972. - 544 с.

[11] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. - 520 с.

[12] *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982. - 271 с.

[13] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. - 460 с.

[14] *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. - 448 с.

[15] *Садовничий В. А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986. - 368 с.

[16] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. - 334 с.

[17] *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. - 496 с.

[18] *Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984. - 256 с.

[19] *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970. - 352 с.

[20] *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. М.: Ин. лит-ра, 1948. - 456 с.