Виды статистических распределений

Распределение вероятностей

Распределение вероятностей – одно из центральных понятий теории вероятностей и математической статистики. Определение распределения вероятностей равносильно заданию вероятностей всех случайных событий, описывающих некоторое случайное явление. Распределения вероятностей какой-либо случайной величины X, возможные значения которой образуют конечную или бесконечную последовательность x_1, x_2, …, x_n, … , задается указанием этих значений и соответствующих им вероятностей $P\{X=x_n\}$: p_1, p_2, …, p_n, … (p_n должны быть положительны и в сумме давать единицу).

Так, например, для числа очков, выпадающих на верхней грани при подбрасывании игральной кости распределение вероятностей задается таблицей:

	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Распределения вероятностей указанного типа называются дискретными. Во многих случаях задание распределения вероятностей указанием возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей невозможно. Например, если случайная величина принимает любые значения из отрезка $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, то распределение вероятностей задается указанием того, что случайная величина примет значение из любого заданного интервала, принадлежащего отрезку $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, так как вероятность каждого отдельного значения может быть равна нулю. Если существует такая функция p(x), что вероятность попадания X в любой интервал (a, b) на прямой равна

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b p(x)\,dx, \text{ причем } p(x) \geq 0 \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1,$$

то распределение вероятностей величины X называют абсолютно непрерывным, а функция p(x) носит название **плотности вероятности**.

Функция распределения

Но распределение вероятностей не исчерпываются дискретным и непрерывным типами: они могут быть и более сложной природы. Описание распределения вероятностей любого типа, может быть, например, достигнуто при помощи **функции распределения**, которая для любой случайной величины X при каждом действительном x определяется формулой $F(x)=P\{X<x\}$ и обладает следующими свойствами:

1) $F(x_1) \le F(x_2)$ (при $x_1 < x_2$);

2) $F(x)$ непрерывна слева при каждом x;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Вероятность того, что X примет значение из некоторого полуинтервала [a,b) на прямой, равна $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$. Функция распределения однозначно задает распределение вероятностей случайной величины.

Часто полное описание распределения вероятностей (например, при помощи плотности или функции распределения) заменяют заданием небольшого числа числовых характеристик, которые указывают, как правило, наиболее типичные (в том или ином отношении) значения случайной величины и степень рассеяния значений случайной величины около некоторого типичного значения. Из этих характеристик наиболее употребительны математическое ожидание (среднее значение) и дисперсия.

Математическое ожидание

Математическое ожидание, **среднее значение**,– одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной величины. Для случайной величины X, принимающей последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ с вероятностями, соответственно равными $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$, математическое ожидание определяется формулой

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

при условии, что ряд сходится абсолютно; для случайной величины X с непрерывным распределением, имеющим плотность вероятности p(x),

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx,$$

если интеграл сходится абсолютно.

Математическое ожидание характеризует расположение значений случайной величины. Полностью эта роль математического ожидания разъясняется **законом больших чисел**. При сложении случайных величин их математические ожидания складываются, при умножении независимых случайных величин их математические ожидания перемножаются.

Дисперсия

Дисперсия (от лат. dispersio – рассеяние) – одна из характеристик распределения вероятностей случайной величины, наиболее употребительная мера рассеяния ее значений. Дисперсия DX случайной величины X определяется как математическое ожидание $E(X-m)^2$ квадрата отклонения X от ее математического ожидания m=EX. Для случайной величины X с дискретным распределением $p_k=P\{X=x_k\}$. Дисперсия определяется формулой

$$DX = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - m)^2 p_k$$

при условии, что ряд сходится, а для случайной величины X с непрерывным распределение, имеющим плотность вероятности p(x), – формулой

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 p(x) dx,$$

если этот интеграл сходится.

В теории вероятностей большое значение имеет теорема: дисперсия суммы независимых величин равна сумме дисперсий этих величин. Это свойство выделяет дисперсию среди других характеристик рассеяния. В математической статистике важную роль для характеристики качества статистических оценок играет их дисперсия.

Дискретные распределения

Дискретное распределение – распределение вероятностей, сосредоточенное на конечном или счетном множестве точек выборочного пространстве Ω. **Выборочным пространством** называется множество всех элементарных событий, связанных с некоторым экспериментом, причем любой неразложимый исход эксперимента представляется одной и только одной точкой выборочного пространства. Пусть ω_1, ω_2, … – выборочные точки и

$$p_i = p(\omega_i), \quad i = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

числа, удовлетворяющие условиям

$$p_i \geq 0, \qquad \sum_i p_i = 1 \qquad (2)$$

Соотношения (1) и (2) полностью определяют дискретное распределение в пространстве Ω, так как вероятностная мера любого множества $A \subset \Omega$ определяется равенством

$$P(A) = \sum_{\{i:\omega_i \in A\}} p_i$$

В соответствии с этим распределение случайной величины $X(\omega)$ называют дискретным, если с вероятностью 1 она принимает конечное или счетное число различных значений x_i с вероятностями $p_i=P\{\omega{:}X(\omega)=x_i\}$. Для дискретного распределения на прямой функция распределения

$$F(x)=\sum_{\{i:x_i<x\}} p_i$$

имеет скачки в точках x_i, равные $p_i=F(x_i+0)-F(x_i)$, и постоянна в интервалах $[x_i, x_{i+1})$.

Наиболее распространены следующие дискретные распределения:

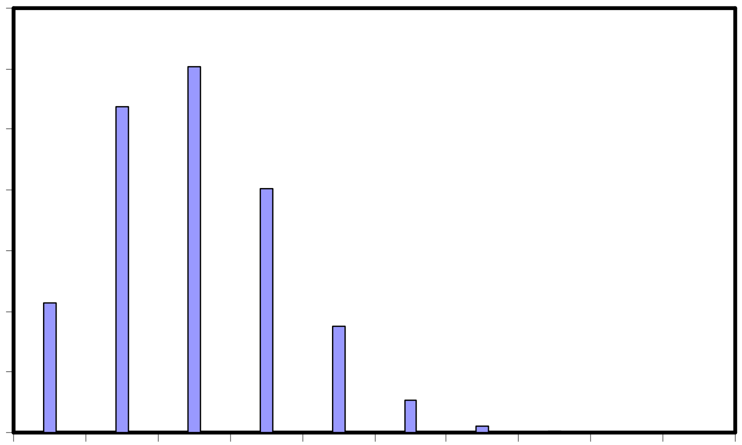
- биномиальное распределение
- геометрическое распределение
- распределение Паскаля
- распределение Пуассона

Биномиальное распределение

Биномиальное распределение, распределение Бернулли,– распределение вероятностей случайной величины X с целочисленными значениями m=0, 1, … , n, заданное формулой

$$p_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m},$$

где $n \geq 1$ и $0 \leq p \leq 1$ – параметры, а C_n^m – биномиальный коэффициент.



p=0.2

n=10

Биномиальное распределение – одно из основных распределений вероятностей, связанных с последовательностью независимых испытаний; это – распределение вероятностей числа наступлений некоторого события («удачи») в n повторных независимых испытаниях, если при каждом испытании вероятность наступления этого события равна p. В соответствии с этим каждую случайную величину X, имеющую биномиальное распределение с параметрами n и p, можно представить в виде суммы n независимых величин, имеющих биномиальное распределение с параметрами n=1 и p. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X с биномиальным распределением равны EX=np и DX=np(1-p).

На практике для вычисления вероятностей при небольших n пользуются таблицами биномиального распределения, а при больших n приближенными формулами, основанными на предельных теоремах.

Пример

Некая работа сопряжена с десятью поездками на автомобиле между двумя городами. Выполнив все 10 поездок, работник может отдыхать остаток дня, что является достаточным стимулом для превышения скорости. Опыт показывает, вероятность получения штрафа за превышение скорости в каждой поездке туда и обратно равна 40%.

a) Какова вероятность того, что рабочий день закончится без получения штрафа?
b) Если штраф равен 80 долларам, то каково среднее значение дневного штрафа?

Вероятность быть оштрафованным в одной поездке равна p = 0.4. Следовательно, вероятность того, что рабочий день закончится без штрафа, равна $P\{x = 0\} = C_{10}^{0}(0.4)^{0}(0.6)^{10} = 0.006047$.

То есть, шанс закончить рабочий день без штрафа меньше одного процента.

Средний дневной штраф равен 80E{x} = 80(np) = 80*10*0.4 = 320 (долларов).

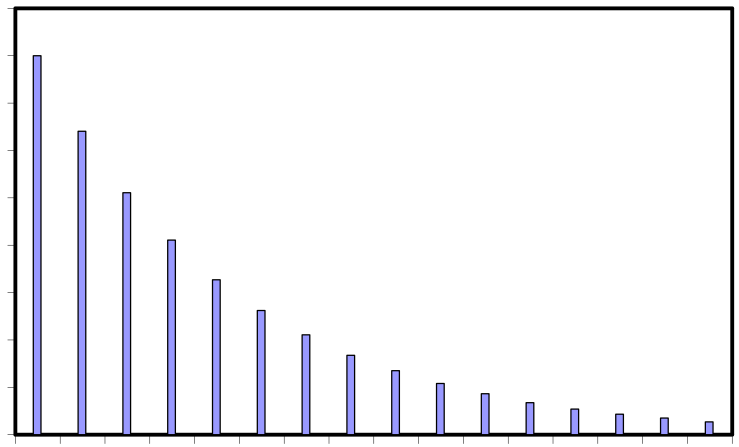
Геометрическое распределение

Геометрическое распределение – распределение случайной величины X с целочисленными неотрицательными значениями, заданное формулой

$$P\{X=m\}=p_m=p(1-p)^m,\quad m=0,1,2,\ldots,$$

где $0<p<1$ – параметр. Вероятности p_m образуют геометрическую прогрессию (отсюда название – “геометрическое распределение”). Математическое ожидание и дисперсия геометрического распределения равны

$$\mathrm{E}X=\frac{1-p}{p}\quad \text{и}\quad \mathrm{D}X=\frac{1-p}{p^2}.$$



p=0.2

Обычно геометрическое распределение возникает в схеме испытаний Бернулли, по имени математика Я.Бернулли (Jacob Bernoulli, 1654-1705), и интерпретируется как распределение времени ожидания до первого успеха (**испытания Бернулли** – независимые испытания с двумя случайными исходами, вероятности которых не изменяются от испытания к испытанию). Точнее, если число испытаний Бернулли заранее не ограничено и p – вероятность успеха, то случайная величина X – число испытаний, предшествующих наступлению первого успеха,– имеет геометрическое распределение. Если X_1, …, X_n – независимые случайные величины, имеющие одинаковое геометрическое распределение с параметром p, то сумма имеет распределение Паскаля.

Геометрическое распределение является единственным дискретным распределением, обладающим свойством «отсутствия последействия»: состояние некоторой системы в настоящий момент времени t_0 однозначно определяет распределение вероятностей будущего развития процесса при $t>t_0$, и информация о прошлом поведении процесса не влияет на это распределение.

Распределение Паскаля

Распределение Паскаля – распределение вероятностей случайной величины X, целочисленными неотрицательными значениями k, заданными формулой

$$P\{X = k\} = C_{r+k-1}^{r-1} p^r (1 - p)^k,$$

где r>0 – целое и 0<p<1 – параметры. Математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$\mathsf{E}X = r\frac{1-p}{p} \qquad \mathsf{D}X = r\frac{1-p}{p^2}$$

Распределение Паскаля с параметрами r и p возникает в схеме испытаний Бернулли с вероятностью успеха p; при r = 1 совпадает с геометрическим распределением с параметром p; при r > 1 совпадает с распределением суммы независимых случайных величин, имеющих геометрическое распределение с параметром p.

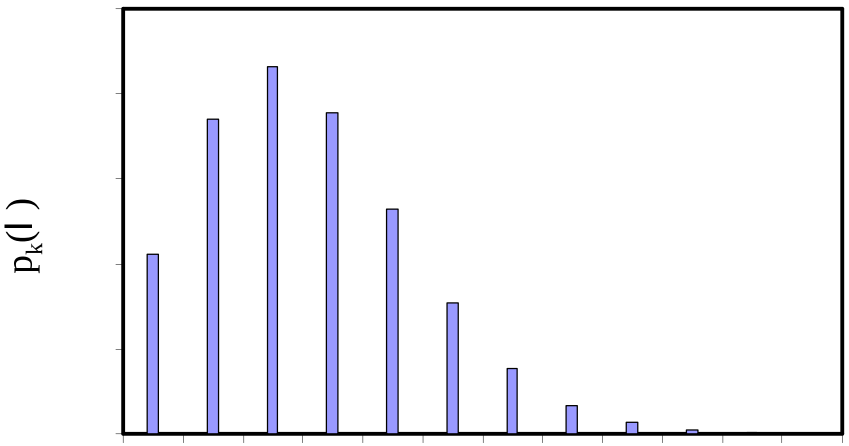
Свое название данное распределение получило по имени французского математика, физика и философа Блеза Паскаля (Blaise Pascal, 1623-1662).

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона – распределение вероятностей случайной величины X с целыми неотрицательными значениями, k=0, 1, 2, …, заданное формулой

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda > 0$ – параметр.



$\lambda = 3.5$

Математическое ожидание и дисперсия равны $\mathsf{E}X = \mathsf{D}X = \lambda$

При условии $p \to 0$, $n \to \infty$, $np \to \lambda = const$ закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона. Так как при этом вероятность p события A в каждом испытании мала, то закон распределения Пуассона часто называют *законом редких явлений*.

Наряду с "предельным" случаем биномиального распределения закон Пуассона может возникнуть и в ряде других случаев. Так для простейшего потока событий число событий, попадающих на произвольный отрезок времени, есть случайная величина, имеющая пуассоновское распределение. Также по закону Пуассона распределены, например, число рождения четверней, число сбоев на автоматической линии, число отказов сложной системы в "нормальном режиме", число "требований на обслуживание", поступивших в единицу времени в системах массового обслуживания, и др.

Если независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют распределение Пуассона параметрами λ_1 и λ_2, то их сумма X_1+X_2 имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

В теоретико-вероятностных моделях распределение Пуассона используется и как аппроксимирующее, и как точное распределение. Например, если при n независимых испытаниях события $A_1, \ldots, A_n$ осуществляются с одной и той же малой вероятностью p, то вероятность одновременного осуществления каких-либо k событий (из общего числа n) приближённо выражается функцией $P_k(np)$. В частности, такая модель хорошо описывает процесс радиоактивного распада и многие другие физические явления. Распределение Пуассона также применяется в теории случайных процессов.

В качестве оценки неизвестного параметра X по наблюдённым значениям независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ используется их среднее арифметическое $\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$, поскольку эта оценка лишена систематической ошибки и её квадратичное отклонение минимально.

Свое название распределение Пуассона получило по имени С.Пуассона (Poisson Simeon Denis, 1781-1840).

Пример

Заказы на ремонт небольших электродвигателей поступают в мастерскую случайным образом, примерно по 10 заказов в день. Какова вероятность того, что на протяжении одного часа не поступит ни одного заказа, если мастерская открыта 8 часов в день?

Среднее количество заказов, которые ежедневно поступают в мастерскую, равно $\lambda=10$. Для вычисления вероятности того, что на протяжении одного часа не поступит ни одного заказа, необходимо подсчитать скорость поступления заказов, то есть $\lambda_{\text{час}}=10/8=1.25$ заказа/час.

$$P\{\text{нет заказов за один час}\} = \frac{(\lambda_{час})^0 e^{-\lambda_{час}}}{0!} = \frac{1.25^0 e^{-1.25}}{1} = 0.2865$$

.:

Непрерывные распределения

Непрерывное распределение – распределение вероятностей случайной величины X , функция распределения F(x) которой непрерывна. Вместе с дискретными распределением непрерывное распределение образует основные типы распределений. Любое распределение вероятностей есть смесь дискретного распределения и непрерывного распределения.

Например, пусть функция F(x) – некоторая функция распределения, тогда $F(x)=pF_1(x)+(1-p)F_2(x)$, где 0£p £1, а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – функции распределения, отвечающие соответственно дискретному и непрерывному типу.

Среди непрерывных распределений особенно важны **абсолютно непрерывные распределения**.

К абсолютно непрерывным распределениям относят распределения, для которых функция распределения F(x) имеет представление

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\,du$$

где $p(x) \geq 0$, плотность вероятности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$

Наиболее важны следующие непрерывные распределения:

- нормальное распределение
- показательное распределение
- равномерное распределение

Нормальное распределение

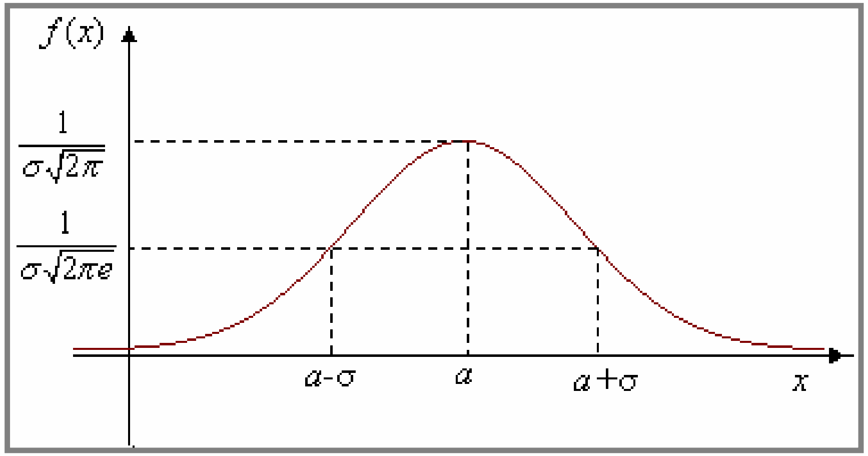
Нормальное распределение – одно из важнейших распределений вероятностей. Термин «нормальное распределение» применяют как по отношению к распределениям вероятностей случайных величин, так и по отношению к совместным распределениям вероятностей нескольких случайных величин (то есть к распределениям конечномерных случайных векторов). Общее определение нормального распределения сводится к одномерному случаю.

Распределение вероятностей случайной величины X называют нормальным, если оно имеет плотность вероятности

$$p(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение зависит от двух параметров a и $\sigma>0$. При этом математическое ожидание X равно a, дисперсия X равна σ^2.

Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами *a=0* и $\sigma=1$ называется *стандартным* или *нормированным*, а соответствующая нормальная кривая – *стандартной* или *нормированной*.



Кривая, нормального распределения симметрична относительно ординаты, проходящей через точку x=a, и имеет в этой точке единственный максимум $\frac{1}{\sqrt{2ps}}$. С уменьшением s кривая нормального распределения становится все более островершинной. Изменение a при постоянном s не меняет форму кривой, а вызывает лишь ее смещение по оси абсцисс. Площадь, заключённая под кривой нормального распределения, всегда равна единице.

Во многих практических вопросах при рассмотрении нормального пренебрегают возможностью отклонений от a, превышающих 3σ, – «правило трёх сигма». Другими словами, если случайная величина *X* имеет нормальный закон распределения с параметрами *a* и σ, то практически достоверно, что её значения заключены в интервале $(a-3\sigma; a+3\sigma)$.

Сумма независимых случайных величин X_1, X_2, . . ., X_n, имеющих нормальное распределение с параметрами $EX_i = a_i,\ DX = \sigma_i^2,\ i = 1, \ldots, n$ подчиняется нормальному распределению с параметрами $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$.

Нормальное распределение встречается в большом числе приложений. Теоретическое обоснование исключительной роли нормального распределения дают предельные теоремы теории вероятностей (теоремы Лапласа и Ляпунова). Качественно соответствующий результат может быть объяснён следующим образом: нормальное распределение служит хорошим приближением каждый раз, когда рассматриваемая случайная величина представляет собой сумму большого числа независимых случайных величин, максимальная из которых мала по сравнению со всей суммой.

Нормальное распределение может появляться также как точное решение некоторых задач (в рамках принятой математической модели явления). Так обстоит дело в теории случайных процессов (в одной из основных моделей броуновского движения).

Классические примеры возникновения нормального распределения как точного принадлежат К. Гауссу (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) (закон распределения ошибок наблюдения) и Дж. Максвеллу (James Clerk Maxwell, 1831-1879) (закон распределения скоростей молекул).

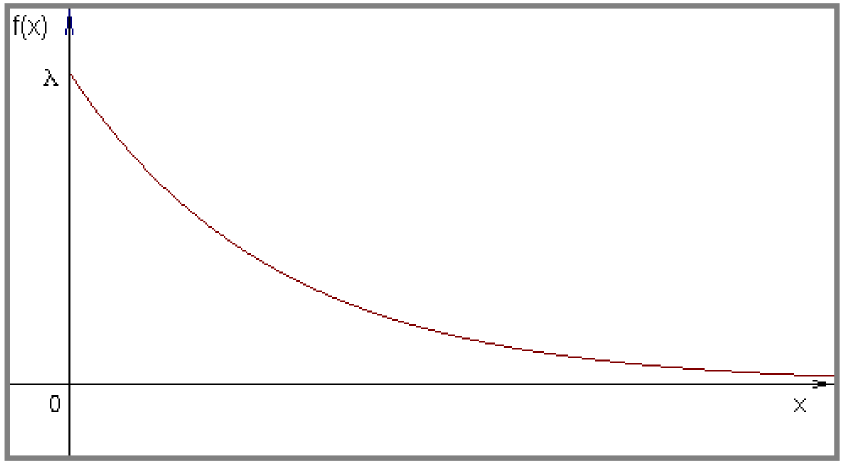
Сам же термин «нормальное распределение» принадлежит Карлу(Чарльзу) Пирсону [Pearson Karl(Charles), 1857-1936].

Показательное распределение

Показательное распределение – распределение вероятностей случайной величины X, заданное плотностью вероятности

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, \\ 0, \quad x < 0, \end{cases}$$

зависящей от параметра $\lambda > 0$. Вероятность того, что случайная величина X, имеющая показательное распределение, примет значение, превосходящее некоторое число x, будет при этом равна $e^{-\lambda x}$. Математическое ожидание и дисперсия равны соответственно $EX = 1/\lambda$ и $DX = 1/\lambda^2$.



Показательное распределение является единственным непрерывным распределением вероятностей, обладающим тем свойством, что для любых чисел x_1 и x_2 выполняется равенство

$$P\{X > x_1 + x_2\} = P\{X > x_1\}P\{X > x_2\}$$

(так называемое свойство «отсутствия последействия»).

Показательный закон распределения играет большую роль в теории массового обслуживания и теории надёжности. Так, например, интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке событий имеет показательное распределение с параметром l, являющимся интенсивностью потока.

Пример

Автомобили прибывают на заправочную станцию случайно, в среднем каждые две минуты. Вычислите вероятность того, что интервал между последовательными прибытиями автомобилей не превысит одной минуты.

Искомая вероятность здесь имеет вид $P\{x \le A\}$, здесь $A=1$ минута. Вычисление требуемой вероятности эквивалентно вычислению значении функции распределения случайной величины x.

$$P\{x \le A\} = \int_0^A \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^A = 1 - e^{-\lambda x}$$

Скорость прибытия автомобилей $\lambda=1/2$ прибытия в минуту.

Следовательно,

$$P\{x \le 1\} = 1 - e^{-1/2} = 0.39$$

Равномерное распределение

Равномерное распределение, *прямоугольное распределение*,– распределение вероятностей случайной величины X, заданное плотностью

$$p(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ при } x \in [a,b], \\ 0 \text{ в ином случае.} \end{cases}$$

Понятие равномерное распределение на [a, b] соответствует представлению о выборе точки из отрезка [a, b] «наудачу». Математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$\mathsf{E}X = \frac{b+a}{2} \qquad \mathsf{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Если X_1 и X_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке [0, 1], то их сумма X_1+X_2 подчиняется так называемому «треугольному распределению» на отрезке [0, 2]. Если X_1, X_2, … , X_n независимы и имеют равномерное распределение на отрезке [0, 1], то распределение их суммы $X_1+X_2+\ldots+X_n$ нормированной математическим ожиданием n/2 и средним квадратичным отклонением n/12, с ростом n быстро сближается с нормальным распределением с параметрами 0 и 1 (при приближении n=3 приближение удовлетворяет для практическим целям.)

Некоторые парадоксы теории вероятностей

Парадокс де Мере

При четырех бросаниях одной игральной кости вероятность того, что по крайней мере один раз выпадет 1, больше 1/2. В то же время при 24 бросаниях двух костей вероятность выпадения двух 1 одновременно (по крайней мере однажды) меньше 1/2. Это кажется удивительным, так как шансы получить одну 1 в шесть раз больше, чем шансы выпадения двух 1, а 24 как раз в 6 раз больше 4.

Объяснение парадокса

Если правильную игральную кость бросают k раз, то число возможных (и равновероятных) исходов равно 6^k. В 5^k случаях из этих 6^k кость не ляжет на шестерку, и, следовательно, вероятность выпадения по крайней мере один раз 1 при k бросаниях равна $(6^k - 5^k)/6^k = 1 - (5/6)^k$, что больше 1/2, если $k = 4$. С другой стороны, величина $1 - (35/36)^k$, которая получается аналогично, все еще меньше 1/2 для $k = 24$ и превосходит 1/2, начиная с $k=25$. Так что «критическое значение» для одной кости равно 4, а для пары костей равно 25.

Парадокс раздела ставки

Два игрока играют в безобидную игру (то есть шансы победить у обоих одинаковы), и они договорились, что тот, кто первым выиграет 6 партий, получит весь приз. Предположим, что на самом деле игра остановилась до того, как один из них выиграл приз (например, первый игрок выиграл 5 партий, а второй – 3). Как справедливо следует разделить приз? Хотя в действительности эта проблема не является парадоксом, безуспешные попытки некоторых величайших ученых решить ее, а также неверные противоречивые ответы создали легенду о парадоксе. Согласно одному ответу, приз следовало разделить пропорционально выигранным партиям, т. е. 5:3". Тарталья предложил делить в отношении 2:1. (Наиболее вероятно, что он рассуждал следующим образом: так как первый игрок выиграл на две партии больше, что составляет третью часть от необходимых для победы 6 партий, то первый игрок должен получить одну треть от приза, а оставшуюся часть следует разделить пополам.). На самом деле справедливым является раздел в отношении 7: 1, что сильно отличается от предыдущих результатов.

Объяснение парадокса

И Паскаль, и Ферма рассматривали эту проблему как задачу о вероятностях. Так что справедливым будет раздел, пропорциональный шансам первого игрока выиграть приз. Покажем, что в случае, когда первому игроку осталось выиграть только одну партию, а второму игроку для победы требуется выиграть три, справедливое отношение равно 7:1. Следуя идее Ферма, продолжим игру тремя фиктивными партиями, даже если некоторые из них окажутся лишними (т. е. когда один из игроков) уже выиграл приз). Такое продолжение делает все $2^3 = 8$ возможных исходов равновероятными. Поскольку только при одном исходе второй игрок получает приз (то есть когда он выигрывает все три партии), а в остальных случаях побеждает первый игрок, справедливым является отношение 7: 1.

Парадокс дня рождения

Парадокс дня рождения связан с таким вопросом: сколько человек должно быть в комнате, чтобы с большей вероятностей среди них оказались двое, родившихся в один день? Парадокс состоит в том, что ответ значительно меньше числа дней в году.

Объяснение парадокса

Для каждой пары людей (i, j), находящихся в комнате, рассмотрим случайную величину X_{ij}:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ и } j \text{ родились в один день,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вероятность того, что дни рождения двух данных людей совпадают, равна 1/n, поэтому по определению математического ожидания

$$\mathrm{M}[X_{ij}] = 1 \cdot (1/n) + 0 \cdot (1 - 1/n) = 1/n \qquad \text{при } i \neq j$$

Сумма всех X_{ij} по всем парам $1 \le i<j \le k$ имеет математическое ожидание, равное сумме математических ожиданий для каждой пары; всего пар $C_k^2 = k(k-1)/2$, так что эта сумма равна k(k-l)/2n. Поэтому нужно примерно $\sqrt{2n}$ человек, чтобы математическое ожидание числа пар людей с совпадающими днями рождения сравнялось с 1.

Например, при n = 365 и k = 28 ожидаемое число пар людей, родившихся в один день, равно $(28 \cdot 27)/(2 \cdot 365) \approx 1.036$.

Парадокс игры в кости

Правильная игральная кость при бросании с равными шансами падает на любую из граней 1, 2, 3, 4, 5 или 6. В случае бросания двух костей сумма выпавших чисел заключена между 2 и 12. Как 9, так и 10 из чисел 1,2, ..., 6 можно получить двумя разными способами: $9 = 3 + 6 = 4 + 5$ и $10 = 4 + 6 = 5 + 5$. В задаче с тремя костями и 9, и 10 получаются шестью способами. Почему тогда 9 появляется чаще, когда бросают две кости, а 10, когда бросают три?

Объяснение парадокса

В случае двух костей 9 и 10 могут получаться следующим образом: $9 = 3 + 6 = 6 + 3 = 4 + 5 = 5 + 4$ и $10 = 4 + 6 = 6 + 4 = 5 + 5$. Это означает, что в задаче с двумя костями 9 можно «выбросить» четырьмя способами, а 10 - лишь тремя. Следовательно, шансы получить 9 предпочтительней. (Поскольку две кости дают $6*6 = 36$ различных равновозможных пар чисел, шансы получить 9 равны 4/36, а для 10 - лишь 3/36.) В случае трех костей ситуация меняется на противоположную: 9 можно «выбросить» 25 способами, а 10 - уже 26 способами. Так что 10 более вероятно, чем 9.