

Algoritmos e Estrutura de Dados III

Primeiro Trabalho Prático - Hipercampos

Pablo Cecilio Oliveira
Alexander Cristian

1 Introdução

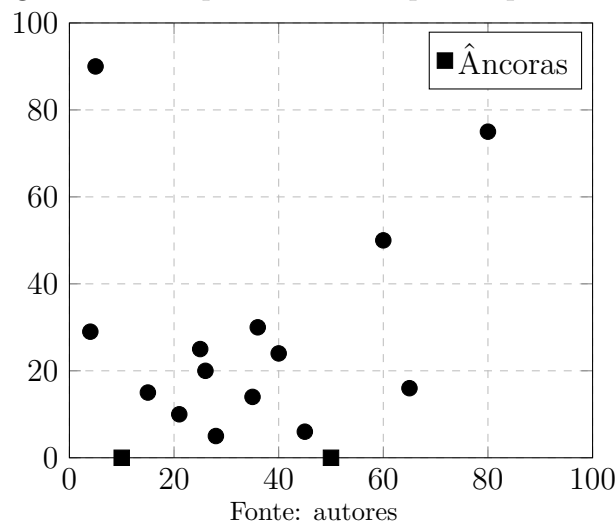
Na Ciência da Computação, o estudo de algoritmos para resolução de problemas geométricos é conhecido como Geometria Computacional. De forma geral, o objetivo deste ramo é resolver de maneira eficiente utilizando o menor número possível de operações sobre os elementos geométricos elementares.[6]

Dentre os problemas geométricos, temos um conhecido como "Hipercampos", o qual pode ser visto como desafio em maratonas de programação[2]. Neste trabalho, é apresentado a solução para esse problema por meio de um algoritmo contido em um programa desenvolvido na linguagem em C.

1.1 Hipercampos, especificação do problema

No problema de Hipercampos, um plano cartesiano em \mathbb{R}^2 possui duas "âncoras", dois pontos A e B , onde o eixo Y das duas âncoras são iguais a zero, ou seja $A = (X_A, 0)$ e $B = (X_B, 0)$. Os valores do eixo X das âncoras variam de X_A até X_B , formando assim um segmento de reta horizontal, tal que $0 < X_A < X_B \leq 10^4$. (Fig. 1)

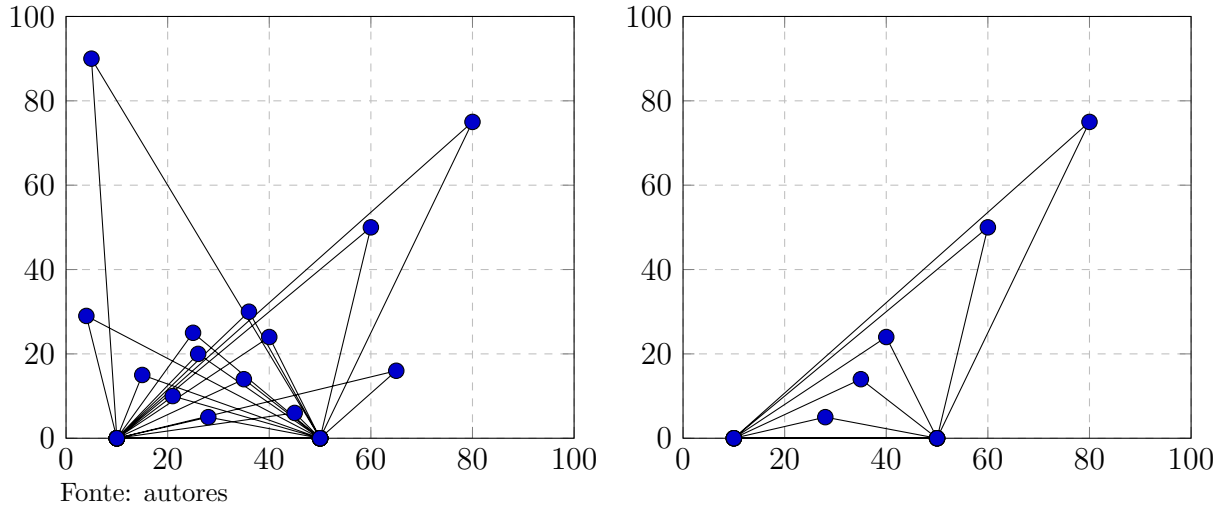
Figura 1: Exemplo de entrada para o problema.



Ao plano cartesiano também somam-se um conjunto P de N pontos (X_i, Y_i) , sendo que $N(1 \leq N \leq 100)$. Os pontos do conjunto P podem ter suas coordenadas variando entre 0 até 10^4 , ou seja, $0 < X_i, Y_i \leq 10^4$.

O objetivo do problema de Hipercampos é ligar os pontos contidos em P às âncoras X_A e X_B , formando assim o máximo número de triângulos sem que esses se interceptem (Fig. 2). E para esse proposito é apresentado um algoritmo contido no programa apresentado neste trabalho.

Figura 2: Hipercampos, solucionando.



1.2 Visão geral sobre o funcionamento do programa

O programa desenvolvido recebe por parâmetro a entrada de um arquivo contendo em sua primeira linha um número N de pontos no plano \mathbb{R}^2 e as coordenadas do eixo X das âncoras A e B , respectivamente. As linhas subsequentes a primeira correspondem às coordenadas dos N pontos do conjunto P a ser solucionado.

O algoritmo então processa esses dados retornando uma solução que pode ser verificada por meio de dois arquivos também gerados por um parâmetro: um contendo o número de triângulos possíveis e o outro em forma de uma imagem renderizada como "gráfico vetorial escalável" (Scalable Vector Graphics, ou ".svg")¹. Um terceiro arquivo em ".svg" é gerado contendo a entrada original dos dados para referência.

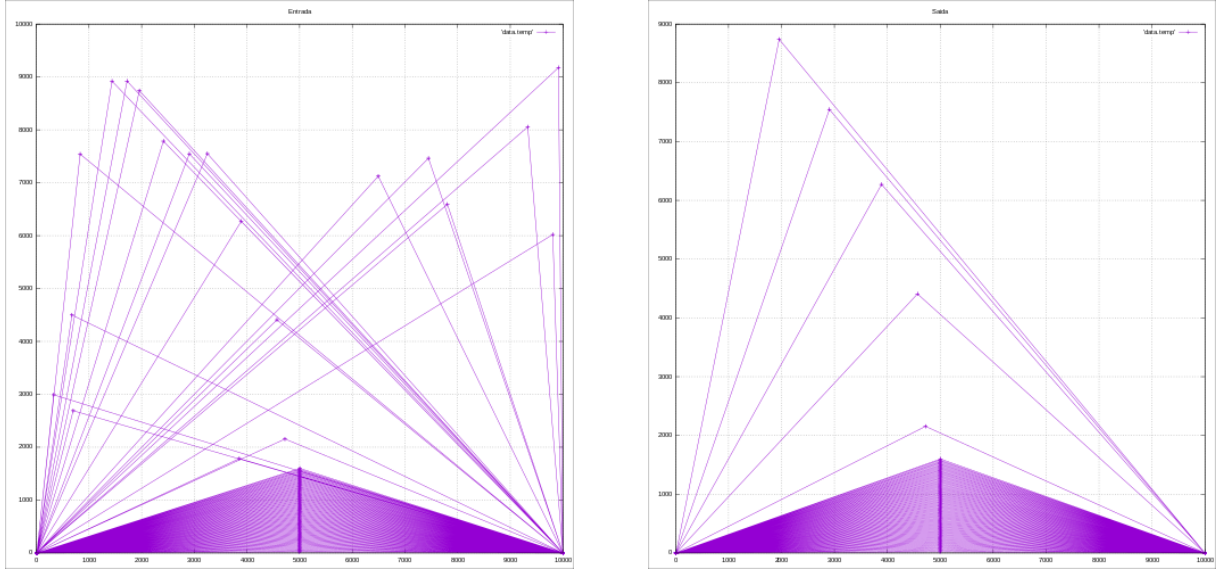
O programa é executado no prompt de comando e recebe as passagens de parâmetro dos arquivos de entrada e saída:

```
$ ./hcamp -i [input] -o [output]
```

A entrada e solução renderizada pode ser vista no exemplo da Figura 3.

¹Trata-se de uma linguagem XML para descrever de forma vetorial desenhos e gráficos bidimensionais.

Figura 3: Entrada e saída renderizadas.



Fonte: via gnuplot com dados de entrada obtidos em uDebug.[5]

2 Implementação

Inicialmente os dados contidos no arquivo de entrada são verificados e transferidos para uma lista simplesmente encadeada, esta limitada ao tamanho da memória principal disponível.

Após os dados estarem disponíveis na memória, a função que contém um algoritmo recursivo determina entre todos os pontos do plano, qual possui o maior número de coordenadas dentro da área formada pelo ponto testado e suas duas âncoras. Este teste a princípio tem como premissa o argumento em que o ponto com o maior número de coordenadas em sua área será aquele que terá o maior número de possibilidades de formações triangulares subsequentes.

O teste recursivo então se repete sucessivamente para cada ponto interno em relação ao ponto inicialmente encontrado como sendo o de maior número de coordenadas (pontos X_i, Y_i), determinando o maior conjunto de elementos em relação ao conjunto anteriormente encontrado. O processo finaliza quando não existem mais coordenadas a serem encontradas.

A função que determina se uma coordenada está ou não dentro de uma área formada pelo ponto e suas âncoras é derivada do método do produto vetorial entre duas retas.[3] Este consiste em calcular a orientação do segmento de reta formado entre as âncoras e o ponto a ser testado, em relação a orientação do segmento de reta formado com um ponto determinado como aquele a formar o triângulo.

A equação que determina essa orientação é dada por:

$$(y_2 - y_1) * (x_3 - x_2) - (y_3 - y_2) * (x_2 - x_1)$$

Como o eixo Y das âncoras são iguais a zero, a equação pode ser simplificada como:

$$y2 * (x3 - x2) - (y3 - y2) * (x2 - x1)$$

Snippet do código em C com o teste de orientação:

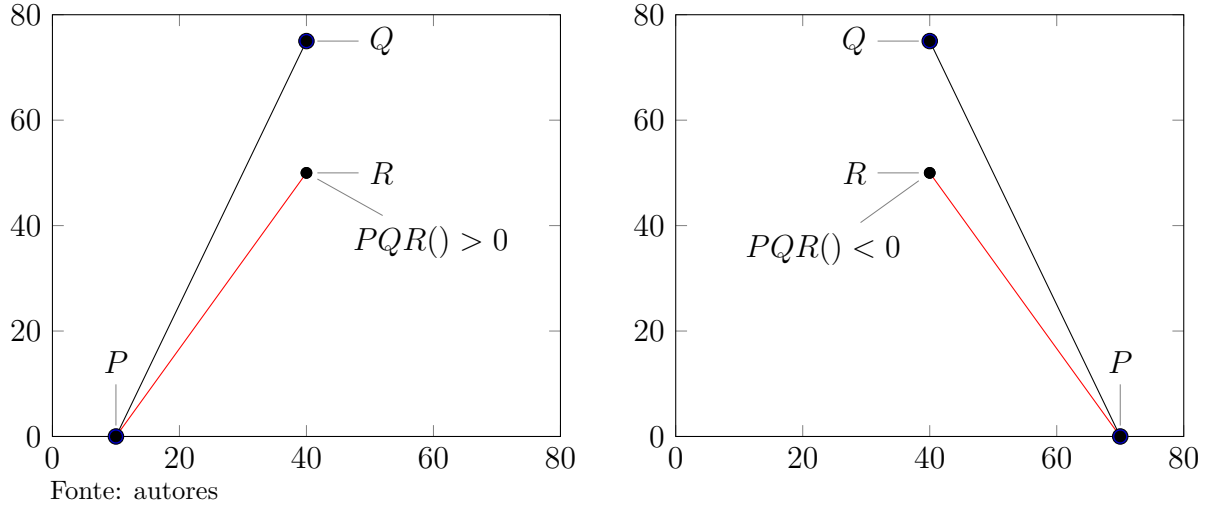
```
PaQR = Q->p.y*(R->p.x-Q->p.x)-(Q->p.x-P->Xa)*(R->p.y-Q->p.y);
PbQR = Q->p.y*(R->p.x-Q->p.x)-(Q->p.x-P->Xb)*(R->p.y-Q->p.y);
if (!PaQR || !PbQR) return 0; // colinear
PaQR = (PaQR > 0)? 1 : 2; // clock wise 1, counter clock 2
PbQR = (PbQR > 0)? 1 : 2; // clock wise 1, counter clock 2
if (PaQR == 1 && PbQR == 2) return 1; // inside
```

Aplicando a equação entre os segmento de reta \overline{PQ} , sendo P a âncora e Q o ponto que forma o triângulo), com \overline{PR} (R , ponto sendo testado), resulta no valor que determina a orientação da reta \overline{PR} em relação a \overline{PQ} . No caso do resultado for maior que zero, a reta \overline{PR} está no sentido horário a reta \overline{PQ} , caso seja menor do que zero, está em sentido anti-horário a \overline{PQ} .

A relação entre os segmentos de reta \overline{PQ} e \overline{PR} com as coordenadas respectivas às âncoras em P , resultam que se um ponto estiver no sentido horário à $\overline{PQ_A}$ e anti-horário à $\overline{PQ_B}$, este está dentro da área do triângulo formado entre as duas âncoras e o ponto Q .

A Figura 5 demonstra esse o conceito.

Figura 4: Determinando o ponto interno ao triângulo



É por meio do método de força bruta com o teste recursivo entre todos os pontos que são encontrados os triângulos que possuem sempre o maior numero de coordenadas em sua área. Resultando desse numero de triângulos encontrados o valor para a solução.

A Tabela 1 contém a lista das principais funções utilizadas no programa, uma descrição sucinta de suas finalidades e sua complexidade por tempo.

Tabela 1: Funções do programa

Funções	Finalidade	Complexidade*
<i>debug()</i>	Função que verifica a condição para retorno de possíveis bugs no programa.	$O(1)$
<i>create()</i>	Inicializa a Lista encadeada.	$O(1)$
<i>insere()</i>	Insere os dados em uma lista encadeada.	$O(1)$
<i>printCJT()</i>	Imprime uma Lista encadeada.	$O(n)$
<i>sizeCJT()</i>	Retorna o tamanho da lista encadeada.	$O(n)$
<i>dump()</i>	Libera a memória alocada pela lista.	$O(n)$
<i>isEmpty()</i>	Verifica se uma lista encadeada está vazia.	$O(1)$
<i>openFILE()</i>	Abre o arquivo solicitado e transfere os dados para uma lista encadeada.	$O(n)$
<i>saveFILE()</i>	Salva a solução do problema em um arquivo.	$O(1)$
<i>chkFILE()</i>	Verifica por possíveis erros de entrada em um arquivo.	$O(1)$
<i>showerro()</i>	Retorna possíveis erros no arquivo de entrada.	$O(1)$
<i>ask()</i>	Solicita a confirmação do usuário caso erros de entrada sejam encontrados.	$O(1)$
<i>cpyCJT()</i>	Copia os dados de uma lista encadeada para outra lista encadeada.	$O(1)$
<i>PQR()</i>	Algoritmo de orientação do ponto em relação a reta da ancora.	$O(1)$
<i>findMAX()</i>	Função recursiva que determina o maior conjunto de pontos que se encontram dentro do triângulo formado pelas ancoras e um ponto (x, y) .	$O(n)$
<i>soluciona()</i> <i>solucao()</i>	Funções de chamada e retorno para a execução do algoritmo	$O(1)$
<i>plotGraph()</i>	PIPE para o gnuplot com a finalidade de renderizar os arquivos .svg contendo respectivamente, a entrada e saída da solução do problema.	$O(n)$

Fonte: autores

3 Análise de Complexidade

```
do {
    R = CJT->head;
    while (R != NULL) {
        if (PQR(CJT,Q,R)) {
            dots++;
            insere(R->p,AUX);
        }
        R = R->next;
    }
    if (dots >= moredots) {
        moredots = dots;
        win = Q;
        dump(MAX,0);
        cpyCJT(AUX,MAX);
    }
    dots = 0;
    dump(AUX,0);
    Q = Q->next;
} while (Q != NULL);

if (win) insere(win->p,plot);
dump(CJT,0);
cpyCJT(MAX,CJT);
dump(MAX,1);
dump(AUX,1);
CJT->total++;
return findMAX(CJT,plot);
```

$$f(n) = 11 + (n + 1) * \frac{n}{n - 1} + \frac{n}{2} * \frac{1}{2n} + n + \frac{n}{2} + 4n$$

$$f(n) = 11 + \frac{n^2 + n}{n - 1} + \frac{n}{4n} + \frac{n}{2} + 5n$$

$$f(n) = \frac{26n^2 + 27n - 45}{4(n - 1)}$$

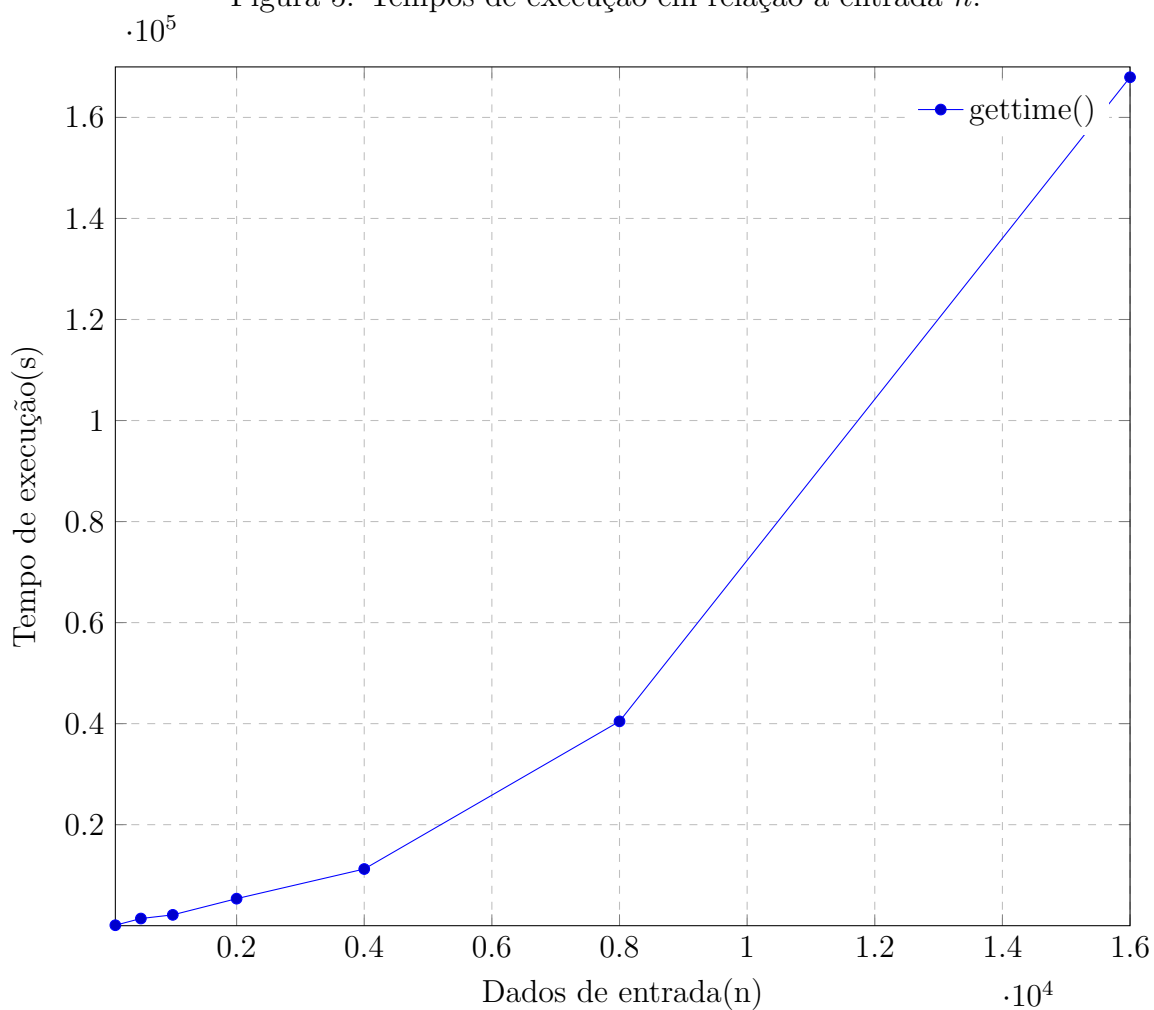
$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Tabela 2: Tempos de execução em relação a entrada n

n	$gettime()$	$ru_utime()$	$ru_stime()$
100	91751 ms	9847 ms	0
500	1418852 ms	154276 ms	3435 ms
1000	2144396 ms	559727 ms	3290 ms
2000	5350661 ms	2s 246933 ms	3324 ms
4000	11219083 ms	9s 167495 ms	3333 ms
8000	40450777 ms	38s 906846 ms	3324 ms
16000	167955974 ms	166s 90082 ms	6662 ms

Fonte: autores

Figura 5: Tempos de execução em relação a entrada n .



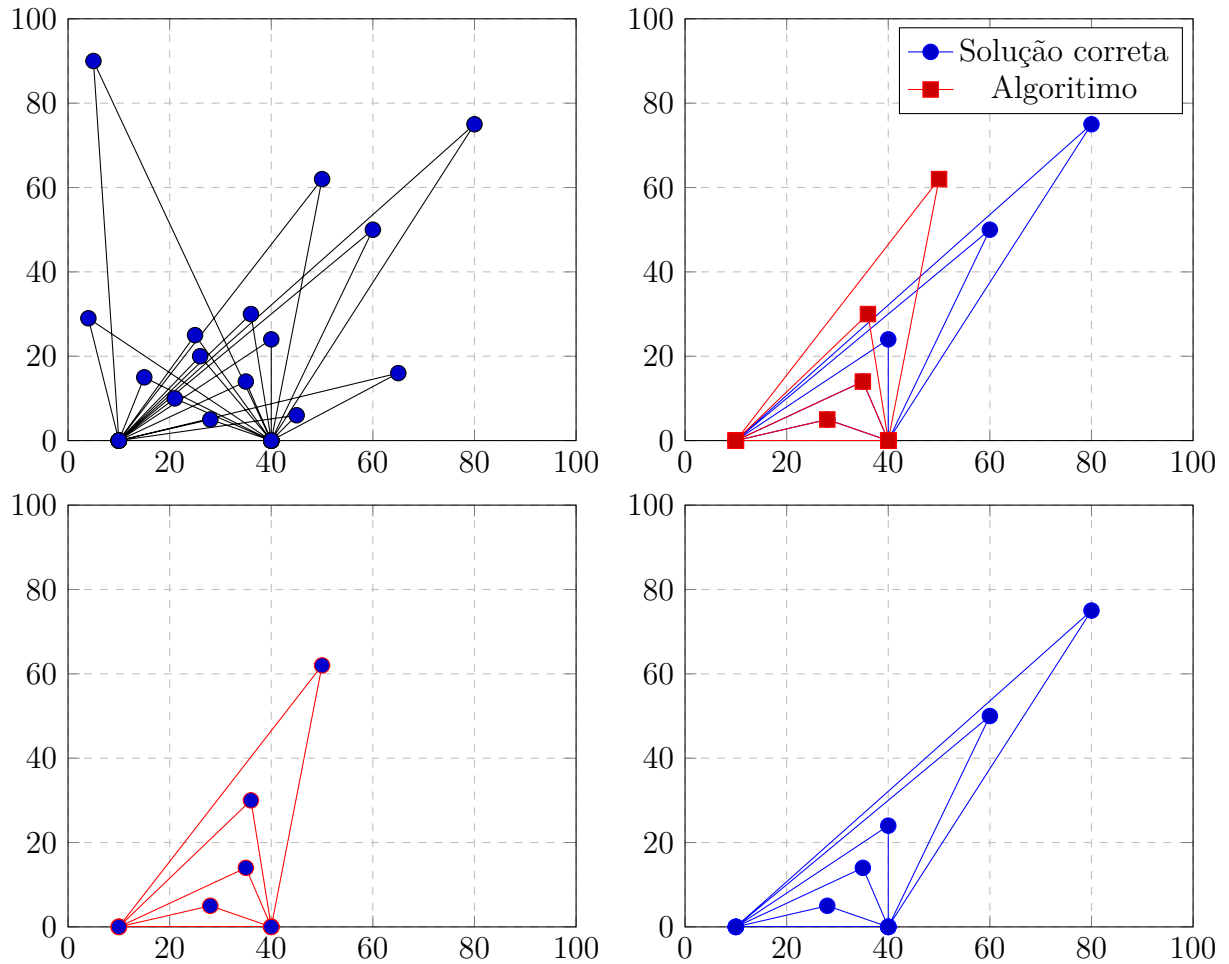
Fonte: autores

4 Considerações finais

Durante o desenvolvimento vários métodos foram testados com o objetivo de encontrar a maneira mais eficiente de encontrar a solução para o problema de Hipercampos. Foram considerados LCS², coordenadas baricênticas³ e outros métodos envolvendo o cálculo da área formada pelos triângulos. Porém, não foi possível neste trabalho chegar a um resultado satisfatório quanto a aplicação desses métodos ao problema.

O uso de um algoritmo recursivo de força bruta foi o que mais se aproximou de um resultado preciso, mas mesmo esse método falhou em testes mais elaborados. A premissa de que o triângulo que contém com o maior número de coordenadas em sua área será aquele que terá o maior número de possibilidades de formações triangulares subsequentes, é incompleta, pois não considera a área dos triângulos formados. Esse erro pode ser verificado visualmente pela Figura 6.

Figura 6: Falha no algoritmo.



²Longest common subsequence ou máxima subsequência crescente consiste em encontrar um subseqüência de números, dada um seqüência, na qual seus elementos estão ordenados do menor para o maior, e a seqüência é a mais longa possível.

³As Coordenadas Baricênticas definem uma forma de representação de um ponto no espaço em função de outros pontos.

O algoritmo sempre escolhe o triângulo com o maior número de coordenadas em sua área, não considerando que essas possam ser eliminadas em teste subsequentes. Quanto maior a área do triângulo testado, maior será a possibilidade de erros. E embora o programa cumpra a função de determinar um número de triângulos que não se interceptam, esse não é preciso quanto ao valor máximo que pode ser obtido.

Uma solução alternativa envolvendo o conceito de "dividir para conquistar" seria utilizar como entradas para um algoritmo, duas árvores binárias, cada uma delas conteria como raiz uma das âncoras e como filhos as coordenadas do arquivo de entrada. O algoritmo então testaria colisões, verificando se a reta formada a partir de um ponto até às âncoras é concorrente à alguma das retas encontradas em uma das duas árvores binárias. Porém não se chegou a um algoritmo eficaz que pudesse decidir entre um número de colisões iguais.

O histórico do desenvolvimento desse trabalho se encontra online em:
<https://github.com/Durfan/ufsj-aeds3-tp1>.

Referências

- [1] et al. Elin, Kisielewicz. How to determine if a point is in a 2d triangle?
<https://stackoverflow.com/questions/2049582/how-to-determine-if-a-point-is-in-a-2d-triangle>. [Acesso em: 23-Agosto-2018].
- [2] URI Online Judge. Hipercampo.
<https://www.urionlinejudge.com.br/judge/en/problems/view/2665>. [Acesso em: 3-Setembro-2018].
- [3] Cédric Jules. Accurate point in triangle test. <http://totologic.blogspot.com/2014/01/accurate-point-in-triangle-test.html>. [Acesso em: 23-Agosto-2018].
- [4] Patrick Prosser. Geometric algorithms.
<http://www.dcs.gla.ac.uk/~pat/52233/slides/Geometry1x1.pdf>. [Acesso em: 23-Agosto-2018].
- [5] Vitor Vitela. Hipercampo. <https://www.udebug.com/URI/2665>. [Acesso em: 3-Setembro-2018].
- [6] Wikipedia contributors. Computational geometry — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Computational_geometry&oldid=841504892, 2018. [Acesso em: 3-Setembro-2018].