
Exercice 14 (existence de l'interpolation spline)

On note $\beta^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction spline d'ordre $n \in \mathbb{N}$ définie par $\beta^0 = 1_{[-1/2,1/2[}$ et la récurrence $\beta^{n+1} = \beta^n * \beta^0$. Montrer que pour n pair, β^n définit bien un noyau d'interpolation indirecte exacte.

Exercice 15 (interpolation spline, cadre périodique)

1) On pose $x_+ = \max(x, 0)$. Calculer $\displaystyle\int_a^b x_+^n \, dx$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_a^b x_+^n \, dx$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2) On note $\beta^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction spline d'ordre $n \in \mathbb{N}$ définie par $\beta^0 = 1_{[-1/2,1/2[}$ et la récurrence $\beta^{n+1} = \beta^n * \beta^0$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta^n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \left(x - k + \frac{n+1}{2} \right)_+^n .$$

3) Soient $u, v, w : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Montrer que si u et v sont N-périodiques et $w \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors les relations

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \qquad u(l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v(k) w(l-k) \tag{1}$$

$$\text{et} \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \qquad \widehat{u}(p) = \widehat{v}(p) \widehat{w}\left(\frac{2\pi p}{N} \right) \tag{2}$$

sont équivalentes.

4) Montrer que pour tout signal N-périodique $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, il existe un unique signal N-périodique $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tel que la fonction $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad U(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \beta^n(x-k)$$

définisse une interpolation exacte de u, et donner la relation liant $\widehat{c}$ et $\widehat{u}$.

5) Soit u un signal N-périodique et u_2 un zoom de u de facteur 2 obtenu par interpolation spline cubique (u_2 est donc un signal $2N$-périodique). Calculer explicitement $\widehat{u_2}$ en fonction de $\widehat{u}$, et tracer le graphe de la fonction qui les relie. Interpréter le résultat par rapport à l'interpolation de Shannon (cf. exercice 13).

Exercice 16 (translation sous-pixellique)

Si la translation d'une image d'un vecteur entier ne pose pas de problème, en revanche la translation sous-pixellique est l'exemple typique d'un processus nécessitant une interpolation de l'image. Comme nous l'avons vu en cours, l'interpolation sinc discrète (interpolation de Shannon avec convention de périodicité) est, pour des raisons axiomatiques, le candidat idéal pour réaliser cette transformation.

Testez sur l'image bouc.pgm la translation de vecteur $(1/2, 1/2)$ à l'aide des commandes

```
u = double(imread('bouc.pgm'));
v = ffttrans(u,0.5,0.5);
```

et comparez le résultat à l'original (on pourra visualiser dans un premier temps l'image des différences $u - v$). N'hésitez pas à zoomer le résultat localement pour bien voir les différences.

A quoi sont dus les artefacts observés sur les bords du cadre de l'image ? Proposez une méthode pour les éviter et démontrez numériquement son efficacité.

Exercice 17 (zoom)

On considère maintenant le problème du zoom, c'est-à-dire de l'agrandissement d'une image par suréchantillonnage. On se propose ici de comparer plusieurs méthodes d'interpolation. Pour chacune des images `crop_*.pgm`, effectuer un zoom de facteur 16 au moyen de la commande

```
v = fzoom(u,16,n);
```

où le paramètre n est choisi dans $\{0, 1, 3, 5, ...\}$ pour une interpolation spline d'ordre n, et $n = -3$ pour l'interpolation bicubique Keys.

Quelle semble être la meilleure méthode pour `crop_bouc.pgm` ? et pour `crop_cameraman.pgm` ? En visualisant les transformées de Fourier des images originales dont sont issues ces imagettes (`bouc.pgm` et `cameraman.pgm`), pouvez-vous expliquer pourquoi la meilleure méthode d'interpolation n'est pas la même dans les deux cas?
