

Rendu TP2 Image sous-pixellique

Yoann Pradat

October 18, 2018

Exercice 4 1)

```
1 u = double(imread("room.pgm")) / 255;
2 imshow(u);
3
4 lambda=3;
5 v = u(1:lambda:end, 1:lambda:end);
6 w = kron(v, ones(lambda));
7 [ny, nx] = size(u);
8 imshow([u, w(1:ny, 1:nx)]);
```

On charge l'image 512x512 room.pgm et on l'affiche. A coté de cette image on va afficher une autre image de même taille. Cette seconde image est créée à partir de la première en échantillonnant avec un pas de λ . Pour $\lambda = 3$ par exemple, le premier carré de pixels $[1,3] \times [1,3]$ est réduit au pixel [1,1].

Plus généralement, le carré de pixels $[(k-1)\lambda + 1, k\lambda] \times [(l-1)\lambda + 1, l\lambda]$ est réduit au pixel $[(k-1)\lambda + 1, (l-1)\lambda + 1]$ pour $k, l = 1, \dots, \lceil \frac{512}{\lambda} \rceil$.

L'image échantillonnée est enregistrée dans la matrice v , qui est de taille $\lceil \frac{512}{\lambda} \rceil \times \lceil \frac{512}{\lambda} \rceil$. Pour comparer à l'image de base, on fait un zoom de la manière suivante: on recrée le carré de pixels $[(k-1)\lambda + 1, k\lambda] \times [(l-1)\lambda + 1, l\lambda]$ en mettant tous ces pixels à la valeur échantillonnée $[k-1, l-1]$: c'est la matrice w .



Figure 1 – (g.) Image de base. (d.) son échantillonnée zoomée avec pas $\lambda=3$

2) Le phénomène observé est appelé **aliasing**. Il y en a plusieurs manifestations sur cette image:

- en bas à gauche, le motif strié voit ses stries orientées dans une autre direction. Si on modélise les stries par une onde pure, le vecteur directeur \mathbf{k} de cette onde a été aliasé en \mathbf{k}' .
- en haut à gauche, le fil n'est plus continu, on a perte de connexité.
- à droite par exemple, les bords des objets comme le rideau (zone de forte contraste) sont "en escalier" au lieu d'être rectilignes.

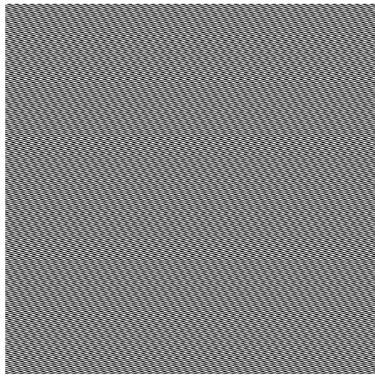
3)

```

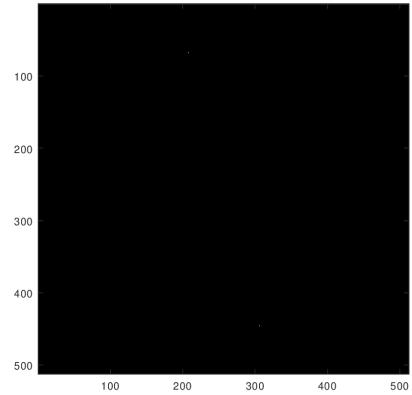
1 f = zeros(512);
2 f(190, 50) = 2;
3 onde = real(ifft2(f));
4 imshow(onde, []);
5
6 onde_ft = abs(fft2(onde));
7 imshow(fftshift(onde_ft), [0, max(max(onde_ft))], 'xdata', 1:512, 'ydata',
     1:512);
8 axis on;

```

On visualise l'onde créée en utilisant imshow et on visualise également sa transformée de Fourier recentrée de telle sorte que la “fréquence 0” soit au centre de l'image.



(a) L'onde pure



(b) Transformée de Fourier discrète recentrée

En explicitant les transformation de Fourier discrètes on a:

$$\forall p, q \in 1, \dots, 512 \quad \text{onde}[p, q] = \Re\left(\frac{2}{512^2} e^{\frac{2i\pi 189(p-1)}{512}} e^{\frac{2i\pi 49(q-1)}{512}}\right) \quad (1)$$

$$\text{ondeft}[p, q] = \left| \sum_{j=0}^{511} \sum_{k=0}^{511} e^{-\frac{2i\pi(p-1)j}{512}} e^{-\frac{2i\pi(q-1)k}{512}} \text{onde}[j, k] \right| \quad (2)$$

On montre aisément qu'il y a exactement 2 points sur le domaine $[1, 512] \times [1, 512]$ pour lesquels ondeft n'est pas nulle, ce sont les points de coordonnées matricielles $[p, q] = [190, 50]$ et $[p, q] = [512-190, 512-50]$ soit en coordonnées d'image non recentrées $[x, y] = [50, 190]$ et $[x, y] = [462, 322]$. Après recentrage par la fonction fftshift les deux points non nuls sur l'image bidimensionnelle b) de la transformée de Fourier de l'onde ont pour coordonnées $[x, y] = [206, 66]$ et $[x, y] = [306, 446]$. En sachant que la fréquence 0 du spectre est au centre de l'image, on obtient que les deux seuls points du spectre où la transformée de Fourier n'est pas nulle sont $[50, -190]$ et $[-50, 190]$.

Echantillonnons l'image de l'onde pure avec un pas de 2. De même qu'à la question 1 on zoome l'image échantillonnée par un procédé très simple et on affiche les deux images côté à côté:

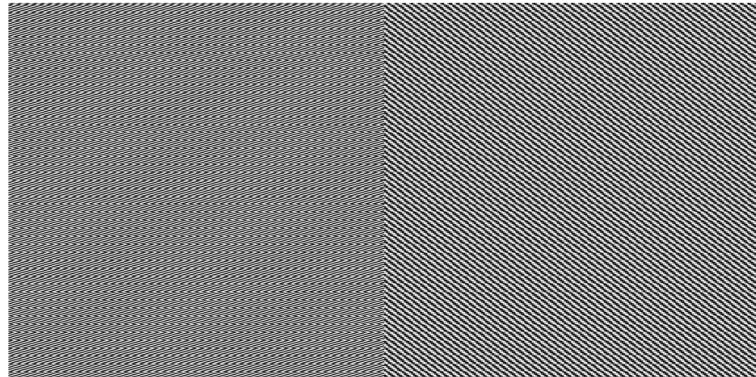


Figure 2 – (g.) Image de base. (d.) son échantillonnée zoomée avec pas $\lambda=2$

On observe l'aliasing par un changement dans le vecteur directeur de l'onde pure reconstruite par échantillonnage.

```

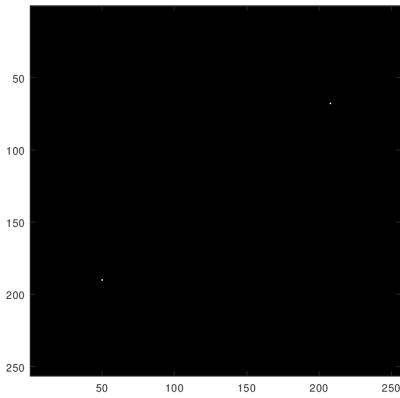
1 % Sous      chantillonnage      facteur 2 onde
2 lambda=2;
3 onde_ech = onde(1:lambda:end, 1:lambda:end);
4 onde_ech_zoom = kron(onde_ech, ones(lambda));
5 [ny, nx] = size(onde);
6
7 % Onde      chantillone      et transfo fourier
8 onde_ech_ft = abs(fft2(onde_ech));
9 imshow(fftshift(onde_ech_ft), [0,max(max(onde_ech_ft))], 'xdata', 1:256,
10 'ydata', 1:256);
axis on;
```

Intéressons-nous désormais à la transformée de Fourier de l'échantillonnée. L'onde échantillonnée est telle que:

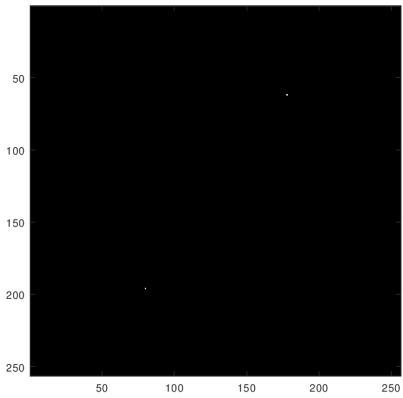
$$\forall p, q \in 1, \dots, 256 \quad \text{onde_ech}[p, q] = \text{onde}[2p - 1, 2q - 1] \quad (3)$$

$$\text{onde_ech}_{ft}[p, q] = \left| \sum_{j=0}^{255} \sum_{k=0}^{255} e^{-\frac{2i\pi(p-1)j}{256}} e^{-\frac{2i\pi(q-1)k}{256}} \Re\left(\frac{2}{512^2} e^{\frac{2i\pi 189(2j)}{512}} e^{\frac{2i\pi 49(2k)}{512}}\right) \right| \quad (4)$$

On montre encore une fois qu'il y a exactement 2 points sur le domaine $[1, 256] \times [1, 256]$ pour lesquels onde_ech_{ft} n'est pas nulle, ce sont les points de coordonnées matricielles $[p, q] = [190, 50]$ et $[p, q] = [68, 208]$ soit en coordonnées d'image non recentrées $[x, y] = [50, 190]$ et $[x, y] = [206, 66]$.



(a) Transformée de Fourier discrète



(b) Transformée de Fourier discrète recentrée

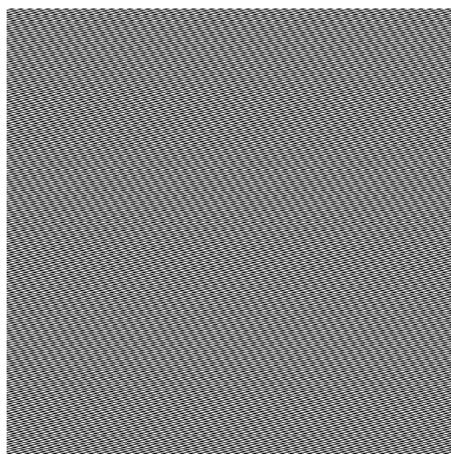
Après recentrage par la fonction *fftshift* les deux points non nuls sur l'image bidimensionnelle de la transformée de Fourier de l'onde échantillonnée ont pour coordonnées $[x,y] = [178, 62]$ (vient de l'opération $[50+128, 190-128]$ effectuée par *fftshift*) et $[x,y]=[78, 194]$. En sachant que la fréquence 0 du spectre est au centre de l'image, on obtient que les deux seuls points du spectre où la transformée de Fourier n'est pas nulle sont $[50, 66]$ et $[-50, -66]$.

Exercice 5 1)

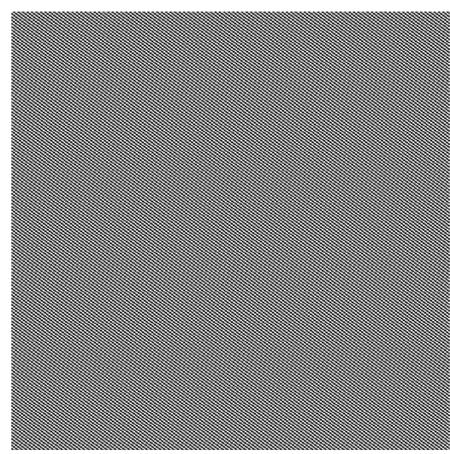
```

1 f = zeros(512);
2 f(190, 50) = 2;
3 onde = real(ifft2(f));
4 onde_car = onde.^2
5 % Onde et son carre
6 imshow(onde, []);
7 imshow(onde_car, []);

```



(a) Image onde pure



(b) Image avec chaque pixel élevé au carré

On sait que $\text{onde}[p, q] = \frac{2}{512^2} \cos\left(\frac{2\pi}{512}(189, 49)(p-1, q-1)^T\right)$ donc :

$$\text{onde}[p, q]^2 = \frac{4}{512^4} \cos^2\left(\frac{2\pi}{512}(189, 49)(p-1, q-1)^T\right) \quad (5)$$

$$= \frac{4}{512^4} \times \frac{1}{2} [\cos\left(\frac{2\pi}{512} 2 \times (189, 49)(p-1, q-1)^T\right) + 1] \quad (6)$$

Entre les deux images, la direction de l'onde pure est totalement modifiée. Ceci s'explique par le calcul ci-dessus: on observe la somme d'une constante et d'une onde pure différente. Cette dernière a un vecteur \mathbf{k} 2 fois plus grand et donc une fréquence 2 fois plus élevée.

```
1 imshow(fftzoom(onde,2), []) ;
```

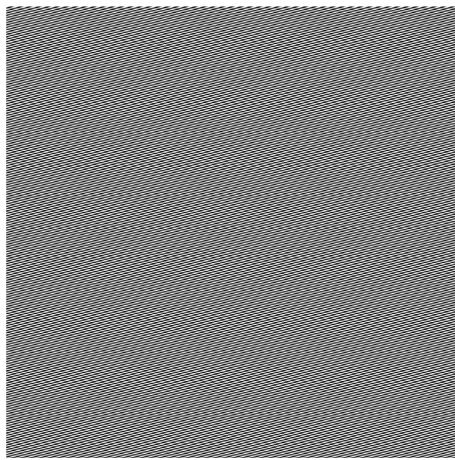


Figure 3 – Image 2 fois plus résolue par zero-padding

Cette fois-ci l'onde sur l'image 2 fois plus résolue a bien conservé l'orientation de l'onde pure qu'elle représentait avant zero-padding. Pour comprendre pourquoi, essayons de comprendre l'effet de fftzoom sur notre onde pure.

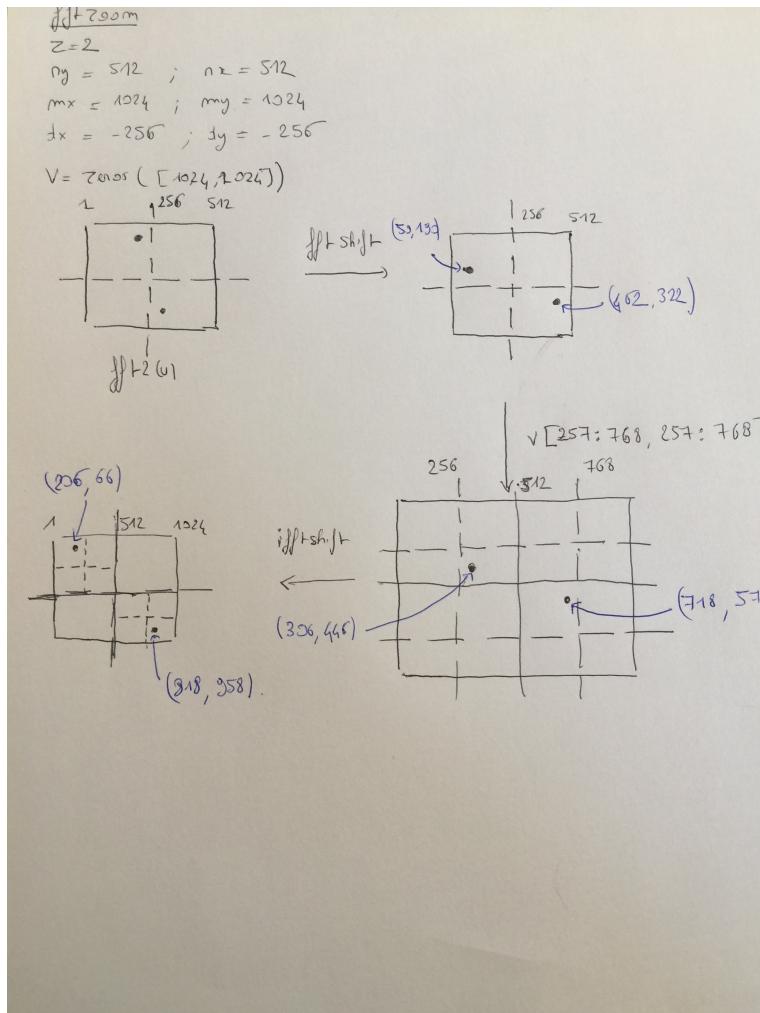


Figure 4 – Schéma explicatif fftzoom

Etant donné le schéma, l'expression de la matrice renvoyée par fftzoom(onde,2) est:

$$\forall p, q \in 1, \dots, 1024 \quad \text{fftzoom}(\text{onde}, 2)[p, q] = \Re \left(\text{cte} \times e^{\frac{2i\pi 66(p-1)}{1024}} e^{\frac{2i\pi 206(q-1)}{1024}} \right) \quad (7)$$

On peut donc recréer directement l'image 2 fois plus résolue par le code suivant:

```

1 g = zeros(1024, 1024);
2 g(66, 206) = 2;
3 onde_fftzoom = real(ifft2(g));
4 imshow(onde_fftzoom, []);

```

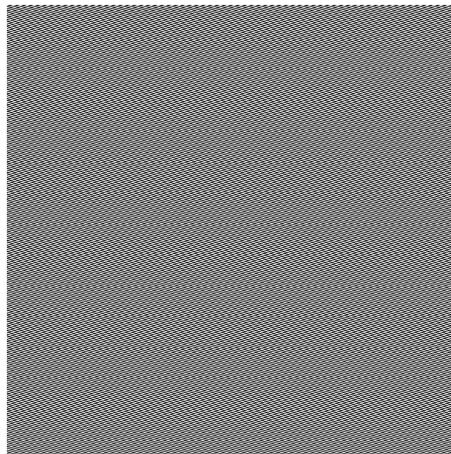


Figure 5 – Image recréée

3) On définit la fonction souhaitée.

```

1 function v = gradn (u)
2 [M,N] = size(u);
3 v = zeros(M-1, N-1);
4 for k=1:(M-1)
5     for l=1:(N-1)
6         v(k, l) = sqrt((u(k+1, l)-u(k, l))^2 + (u(k, l+1)-u(k, l))^2);
7     end
8 end
9 endfunction

```

On l'applique à l'image nimes.pgm et on observe:

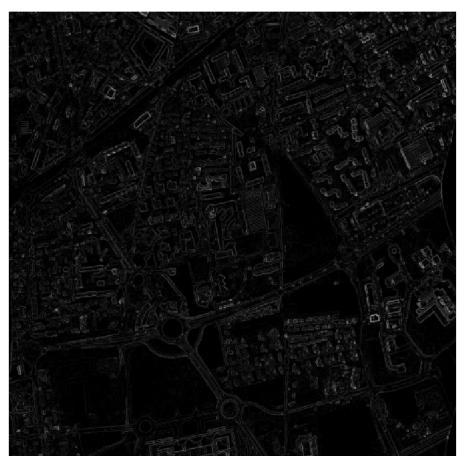
```

1 u = double(imread("nimes.pgm")) / 255;
2 imshow(u);
3 imshow(gradn(u));

```



(a) Image nimes



(b) Image norme gradient nimes