Rendu TP1 Image sous-pixellique

Yoann Pradat

October 22, 2018

Exercice 1 1) On définit d'abord une fonction permettant de calculer la tâche de diffraction d'une source ponctuelle à travers une ouverture circulaire. La constante définie en cours sera simplement notée C et sera prise égale à 1 dans les applications.

```
    function [y] = k_diffraction (r, C)
        jr = besselj(1, r);
        y = C * (2 .* jr ./ r) .** 2;
    endfunction
```

On visualise le profil du noyau de diffraction en exécutant:

```
lr = linspace(0.01, 10, 100);
lf = arrayfun(@(r) k_diffraction(r, 1), lr);
plot(lr, min(0.1, lf));
```

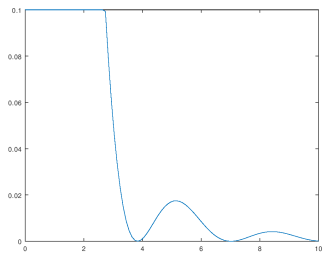
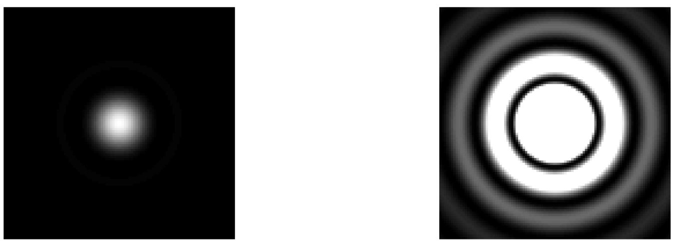


Figure 1 – Profil de diffraction tronqué

2)

```
[x, y] = meshgrid(linspace(-10, 10, 100), linspace(-10, 10, 100));
r = sqrt(x .^ 2 + y .^ 2);
C = 1;
imshow(arrayfun(@(er) k_diffraction(er, C), r));
imshow(arrayfun(@(er) k_diffraction(er, C), r), [0,0.01]);
```



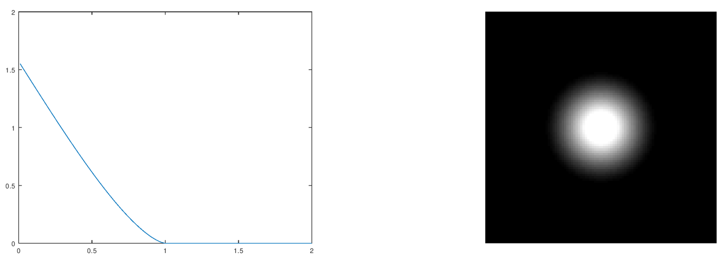
(a) Tache non saturée

(b) Tache saturée

3) On visualise désormais le profil radial et l'image bidimensionnelle de la FTM.

```
function retval = ftm (x)
    rho=abs(x);
    if (rho >= 1)
        retval = 0;
    else
        retval=acos(rho)-rho*sqrt(1-rho^2);
endfunction
```

```
%Profil radial
lr = linspace(0.01, 2, 100);
lf = arrayfun(@(r) ftm(r), lr);
plot(lr,lf);
%Image bidimensionnelle
[x, y] = meshgrid(linspace(-2, 2, 100), linspace(-2, 2, 100));
r = sqrt(x .^ 2 + y .^ 2);
imshow(arrayfun(@(er) ftm(er), r));
```



(a) Profil radial (b) Image 2D

```
[x, y] = meshgrid(linspace(-100, 100, 400), linspace(-100, 100, 400));
r = sqrt(x .^ 2 + y .^ 2);
coor = arrayfun(@(er) k_diffraction(er, 1), r);
v = fftshift(abs(fft2(coor)));
imshow(v, [0,max(max(v))]);
```

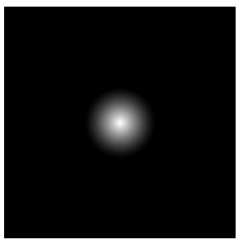
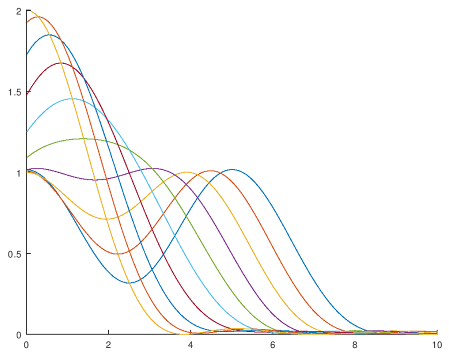
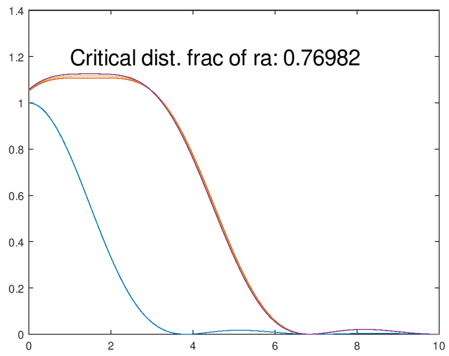


Figure 2 – FTM calculé par transformée de Fourier discrète à 2D

4) Comme on peut le voir sur la figure de gauche ci-dessous, les profils superposés présentent deux maxima puis un seul à mesure que la distance entre les tâches diminue. Etant donné ce graphe, on peut localiser à peu près la distance critique. On trouve $\boxed{\text{critical distance} \approx 0.76982 r_a}$.



(a) Approximate localisation



(b) Exact localisation

```
n_pts = 100;
n_pts_search = 100;
lr = linspace(0.01, 10, n_pts);

% We localised optimal distance in [1,3]
d_search=linspace(3,1, n_pts_search);
i=0;
n_zeros_x = 4;

% First point spread function
K1 = k_diffraction(lr,1);
[minval, argmin] = min(K1(1:n_pts/2));
ra = lr(argmin);

fprintf("Rayon d'airy:%f\n", ra);
plot(lr, K1)

while n_zeros_x>=2
    i=i+1;
    d=d_search(i);
    rd=abs(lr-d);
    K2=k_diffraction(rd,1);

    % Sum PFS distant from d
    K=K1+K2;
    diff_K = diff(K);

    % Count number of zero crossings in the range 0 to d
    % If this is higher than 1, there are at least 2 extrema

    [minval, argmin] = min(abs(lr-d));
    f_idx = 1;
    l_idx = argmin-1;
    n_zeros_x = count_zeros(diff_K(f_idx:l_idx));
    hold on
    plot(lr,K)
end
fprintf("Critical distance as fraction of ra: %f\n", d/ra)
```

5) En reprenant les calculs vus en cours on a pour une pupille s'étandant sur le domaine $\{x|\epsilon\frac{D}{2} \leq \|x\| \leq \frac{D}{2}\}$

$$\begin{aligned}
K_{diffraction}(x) &= \frac{1}{2f^2}\left|\int_{\epsilon\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\pi J_0(\frac{2\pi|x|r}{\lambda f})rdr\right|^2 \\
&= \frac{\pi^2 D^4}{8f^2R^4}\big(RJ_1(R) - (\epsilon R)J_1(\epsilon R)\big)^2 \\
&= C\Big(\frac{2J_1(R)}{R}\Big)^2 + C\Big(\frac{2\epsilon J_1(\epsilon R)}{R}\Big)^2 - 8C\frac{J_1(R)\epsilon J_1(\epsilon R)}{R^2}
\end{aligned}$$

6) On définit une fonction pour calculer le noyau de diffraction associé à une pupille de télescope.

```
function [y] = k_diffraction_telesc (r, C, ep)
    jr = besselj(1, r);
    jr_ep = besselj(1,ep .* r);
    y = C * (2 .* jr ./ r) .** 2 -  C * (2 * ep .* jr_ep ./ r) .** 2 - 8*C*(
        ep.* jr .* jr_ep) ./ r^2;
endfunction
```

On réexecute la transformation de Fourier discrète avec cette nouvelle fonction pour visualiser la FTM.

```
[x, y] = meshgrid(linspace(-100, 100, 400), linspace(-100, 100, 400));
r = sqrt(x .^ 2 + y .^ 2);
coor = arrayfun(@(er) k_diffraction_telesc(er, 1, 1/4), r);
v = fftshift(abs(fft2(coor)));
imshow(v, [0,max(max(v))]);
```

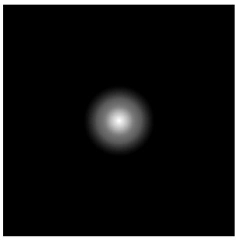


Figure 3 – FTM télescope calculée par transformée de Fourier discrète à 2D

On observe la même FTM que pour une pupille de même diamètre sans occlusion. On en déduit que la lunette et le télescope ont la même résolution.

Exercice 2 1) g étant mesurable à support compact, elle est dans $L^1(\mathbf{R}^2)$. Définissons $\tilde{g}$ la fonction $\tilde{g} : x \to g(-x)$. Alors $\tilde{g}$ est aussi dans L^1 et:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \tilde{g} \star g \\
\text{d'où} \quad \hat{\Gamma}(\xi) &= \widehat{\tilde{g} \star g}(\xi) \\
&= \hat{\tilde{g}}(\xi) \times \hat{g}(\xi) \\
&= \int_{\mathbf{R}^2} g(x)e^{+i<x,\xi>}dx \times \int_{\mathbf{R}^2} g(x)e^{-i<x,\xi>}dx \\
&= |\hat{g}(\xi)|^2
\end{aligned}$$

En effet, dans l'avant dernière ligne les intégrales sont conjuguées l'une de l'autre et la seconde est la transformée de Fourier de g.