
Exercice 11 (décomposition periodic+smooth)

La périodisation forcée constatée à l'exercice 8 a une incidence forte sur la transformée de Fourier discrète calculée. En effet, les "discontinuités" de l'image au bord du domaine produisent des hautes fréquences parasites dans les directions horizontales et verticales, ce qui se manifeste dans le domaine de Fourier par l'apparition d'une "croix", c'est-à-dire de coefficients forts le long des 2 axes du repère. Pour remédier à ce problème, on peut appliquer la "décomposition $p+s$" à l'image initiale u, c'est-à-dire calculer deux images p (composante périodique de u) et s (composante lisse) telles que $u = p + s$.

1) Expliquez ligne à ligne le code de la fonction `perdecomp` donné ci-dessous :

```
function [p,s] = perdecomp(u)
  [ny,nx] = size(u);
  u = double(u);
  X = 1:nx; Y = 1:ny;
  v = zeros(ny,nx);
  v(1,X)  = u(1,X)-u(ny,X);
  v(ny,X) = -v(1,X);
  v(Y,1 ) = v(Y,1 )+u(Y,1)-u(Y,nx);
  v(Y,nx) = v(Y,nx)-u(Y,1)+u(Y,nx);
  fx = repmat(cos(2.*pi*(X -1)/nx),ny,1);
  fy = repmat(cos(2.*pi*(Y'-1)/ny),1,nx);
  fx(1,1)=0.;
  s = real(ifft2(fft2(v)*0.5./(2.-fx-fy)));
  p = u-s;
```

2) Appliquez ensuite cette fonction à l'image `u` de votre choix par

```
[p,s] = perdecomp(u);
```

puis visualisez les deux composantes `p` et `s` au moyen de la commande `imshow(...,[ ])`. Pourquoi faut-il ajouter le `[ ]` dans `imshow` ?

Vérifiez que la décomposition est bien consistante, c'est-à-dire que l'on retrouve bien l'image initiale en additionnant pixel à pixel les images `p` et `s`. Observez les différences entre l'image initiale (`u`) et sa composante périodique (`p`). Nous pouvons également fabriquer des versions périodisées pour visualiser les transitions des images `u`, `p` et `s` au bord du domaine :

```
figure();imshow(kron(ones(2,2),u),[ ]);
figure();imshow(kron(ones(2,2),p),[ ]);
figure();imshow(kron(ones(2,2),s),[ ]);
```

Visualisez enfin le (log-)module et la phase de la transformée de Fourier des images `u`, `p`, `s`, ainsi que de la symétrisée de l'image `u` (obtenue à l'aide de la fonction `fsym2(u)`).

Quelles différences observe-t-on entre l'image initiale (`u`) et sa composante périodique (`p`), dans le domaine initial et dans le domaine de Fourier ? Quelles observations suggèrent que les artefacts dus à la périodisation forcée sont bien atténués ? Pourquoi ce traitement est-il plus intéressant que la symétrisation ?

Exercice 12 (propriétés de la décomposition periodic+smooth)

Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une image discrète (même notations qu'en cours). On définit

$$\partial\Omega = \{\mathbf{x} \in \Omega, W(\mathbf{x}) \neq \emptyset\} \quad \text{et} \quad \mathring{\Omega} = \{\mathbf{x} \in \Omega, W(\mathbf{x}) = \emptyset\}.$$

Montrer les propriétés suivantes:

1. $u - \mathrm{per}(u)$ ne dépend que de la restriction de u à $\partial\Omega$
2. $u - \mathrm{per}(u)$ est harmonique (i.e. de laplacien nul) sur $\mathring{\Omega}$
3. per est une bijection linéaire de $\mathbb{R}^{\Omega}$
4. toutes les valeurs propres de per sont réelles et dans l'intervalle $]0, 1]$
5. l'ensemble des points fixes de per est

$$\mathcal{P} = \{u : \Omega \to \mathbb{R},\ \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \forall \mathbf{y} \in W(\mathbf{x}), u(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x})\}.$$

6. per est diagonalisable *(Indication: on rappelle le théorème classique suivant: Si A est une matrice symétrique positive et B une matrice symétrique définie positive de même taille, alors il existe une base orthogonale pour A et orthonormée pour B. Matriciellement, cela revient à dire qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^T AP$ est diagonale et $P^T BP = I$)*
7. l'itération de per définit un opérateur per^{∞} qui est une projection sur $\mathcal{P}$.

Exercice 13 (interprétation spectrale de l'interpolation (bi)linéaire)

1) Soit $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ un signal discret, et v son translaté de $1/2$ par interpolation linéaire. Exprimer $\hat{v}$ en fonction de $\hat{u}$, puis de $\hat{w}$, où w est le translaté de u obtenu par interpolation de Shannon.

2) Soit $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ un signal discret, et v le signal obtenu au moyen d'un zoom de facteur 2 par interpolation linéaire. Exprimer $\hat{v}$ en fonction de $\hat{u}$, et la comparer à $\hat{w}$, où w est le zoom de u obtenu par interpolation de Shannon.

3) Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une image discrète ($\Omega = \{0, ..., M-1\} \times \{0, ..., N-1\}$), et v l'image obtenue moyen d'un zoom de facteur 2 par interpolation bilinéaire (avec condition de bord périodique). Exprimer la transformée de Fourier discrète de v ($\hat{v}$) en fonction de celle de u, et la comparer à celle de w, le zoom de u obtenu par interpolation de Shannon.
