

Rendu TP5 Imagerie sous-pixelique

Yoann Pradat

November 22, 2018

Exercice 13 1. $u : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est un signal. La translation de facteur $\frac{1}{2}$ par interpolation linéaire est

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad v[k] = \frac{1}{2}(u[k-1] + u[k]) \quad (1)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{v}(\xi) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u[k-1] e^{-ik\xi} + \hat{u}(\xi) \right) \\ &= \frac{1}{2} \hat{u}(\xi) (e^{-i\xi} + 1) \\ &= \hat{u}(\xi) e^{-\frac{i\xi}{2}} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

Regardons désormais le lien entre transformée de Fourier de l'interpolée de Shannon et transformée de Fourier de u . L'interpolée de Shannon est

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad U(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u[k] \text{sinc}(x - k) \quad (2)$$

Interpoler revient à restreindre la transformée de Fourier de u à $[-\pi, \pi]$ et \hat{u} et \hat{U} coïncident sur $[-\pi, \pi]$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

Alors $U(k - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{u}(\xi) e^{-i\frac{\xi}{2}} e^{ik\xi} d\xi$ mais aussi $w[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{w}(\xi) e^{ik\xi} d\xi$ et évidemment $w[k] = U(k - \frac{1}{2})$. Par unicité de la transformée de Fourier on en déduit $\hat{w}(\xi) = \hat{u}(\xi) e^{-\frac{i\xi}{2}}$.

On en déduit finalement le lien souhaité $\boxed{\hat{v}(\xi) = \hat{w}(\xi) \cos(\frac{\xi}{2})}$.

2. L'interpolation linéaire entre $u[k]$ et $u[k+1]$ est $v(x) = (k+1-x)u[k] + (x-k)u[k+1]$. Pour obtenir un zoom de facteur 2 il suffit d'intercaler un nouveau pixel entre chaque paire de pixels par interpolation linéaire de sorte que le signal zoomé v est donné par

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} v[2k] &= u[k] \\ v[2k+1] &= \frac{1}{2}(u[k] + u[k+1]) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \hat{v}(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} v[k] e^{-ik\xi} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} v[2k] e^{-i2k\xi} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} v[2k+1] e^{-i(2k+1)\xi} \\
&= \hat{u}(2\xi) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u[k] e^{-2ik\xi} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} u[k+1] e^{-2ik\xi} \right) \\
&= \hat{u}(2\xi) + \frac{\hat{u}(2\xi)}{2} e^{-i\xi} (1 + e^{2i\xi}) \\
&= \hat{u}(2\xi) (1 + \cos(\xi))
\end{aligned}$$

On regarde désormais le zoom de facteur 2 obtenu par interpolation de Shannon w . En reprenant l'expression dans la question 1. de l'interpolée de Shannon U en fonction de \hat{u} on a

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{Z} \quad w[k] &= U\left(\frac{k}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{u}(\xi) e^{i\frac{k}{2}\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\hat{u}(2\xi) e^{ik\xi} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{w}(\xi) e^{ik\xi} d\xi
\end{aligned}$$

A nouveau par unicité de la transformée de Fourier on obtient

$$\forall \xi \in [-\pi, \pi] \quad \hat{w}(\xi) = \begin{cases} 2\hat{u}(2\xi) & \text{si } \xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et \hat{w} est étendue sur \mathbb{R} par 2π -périodisation. Ainsi,

$$\boxed{\forall \xi \in [-\pi, \pi] \quad \hat{v}(\xi) = \begin{cases} \hat{w}(\xi) \cos^2(\frac{\xi}{2}) & \text{si } \xi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \hat{w}(\xi - \pi) \cos^2(\frac{\xi}{2}) & \text{si } \xi \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \\ \hat{w}(\xi + \pi) \cos^2(\frac{\xi}{2}) & \text{si } \xi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\end{cases}}$$

Cette formule est valable sur \mathbb{R} tout entier par 2π -périodisation.

3. Désormais le signal est $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas l'interpolation de Shannon de u est

$$U(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{|p| \leq \frac{M}{2}, |q| \leq \frac{N}{2}} \epsilon_M(p) \epsilon_N(q) \hat{u}[p, q] e^{\frac{2i\pi px}{M} + \frac{2i\pi qy}{N}} \quad (3)$$

Le zoom de facteur 2 est obtenu par la transformation $U(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ d'où

$$w(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{|p| \leq \frac{M}{2}, |q| \leq \frac{N}{2}} \epsilon_M(p) \epsilon_N(q) \hat{u}[p, q] e^{\frac{2i\pi px}{2M} + \frac{2i\pi qy}{2N}}$$

On peut également former l'interpolée de Shannon de l'image zoomée

$$w(x, y) = \frac{1}{4MN} \sum_{|p| \leq M, |q| \leq N} \epsilon_{2M}(p) \epsilon_{2N}(q) \hat{w}[p, q] e^{\frac{2i\pi px}{2M} + \frac{2i\pi qy}{2N}}$$

Cela nous permet de relier les transformées de Fourier de u et w par

$$\boxed{\forall p, q \text{ with } |p| \leq M, |q| \leq N \quad \hat{w}[p, q] = \begin{cases} 4\epsilon_M(p)\epsilon_N(q)\hat{u}[p, q] & \text{si } |p| \leq \frac{M}{2}, |q| \leq \frac{N}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

puis on étend à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par (M, N) périodicité.

L'interpolation bilinéaire dans $[u[k, l], u[k+1, l]] \times [u[k, l], u[k, l+1]]$ est $v(x, l) = (k+1-x)u[k, l] + (x-k)u[k+1, l]$ puis $v(x, y) = v(x, l)(l+1-y) + v(x, l+1)(y-l)$ c'est-à-dire

$$v(x, y) = (k+1-x)(l+1-y)u[k, l] + (x-k)(l+1-y)u[k+1, l] + (k+1-x)(y-l)u[k, l+1] + (x-k)(y-l)u[k+1, l+1]$$

Pour obtenir un zoom de facteur 2 il suffit d'intercaler un nouveau pixel dans chaque carré de pixels par interpolation bilinéaire de sorte que le signal zoomé v est donné par

$$\forall k, l \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket \times \llbracket 0, \dots, N-1 \rrbracket \quad \begin{cases} v[2k, 2l] & = u[k, l] \\ v[2k+1, 2l] & = \frac{1}{2}(u[k, l] + u[k+1, l]) \\ v[2k, 2l+1] & = \frac{1}{2}(u[k, l] + u[k, l+1]) \\ v[2k+1, 2l+1] & = \frac{1}{4}(u[k, l] + u[k+1, l] + u[k, l+1] + u[k+1, l+1]) \end{cases}$$

On en déduit la transformée de Fourier du signal zoomé v

$$\begin{aligned} \forall p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \hat{v}[p, q] &= \frac{1}{4MN} \sum_{k=0}^{2M-1} \sum_{l=0}^{2N-1} v[k, l] e^{-\frac{2i\pi pk}{2M} - \frac{2i\pi ql}{2N}} \\ &= \frac{1}{4}\hat{u}[p, q] + \frac{1}{8}\hat{u}[p, q](e^{-\frac{i\pi q}{N}} + e^{\frac{i\pi q}{N}} + e^{-\frac{i\pi p}{M}} + e^{\frac{i\pi p}{M}}) \\ &\quad + \frac{1}{16}\hat{u}[p, q](e^{-\frac{i\pi p}{M}}e^{-\frac{i\pi q}{N}} + e^{-\frac{i\pi p}{M}}e^{\frac{i\pi q}{N}} + e^{\frac{i\pi p}{M}}e^{-\frac{i\pi q}{N}} + e^{\frac{i\pi p}{M}}e^{\frac{i\pi q}{N}}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \hat{v}[p, q] = \frac{1}{4}\hat{u}[p, q] \left(1 + \cos\left(\frac{\pi p}{M}\right) + \cos\left(\frac{\pi q}{N}\right) + \cos\left(\frac{\pi p}{M}\right)\cos\left(\frac{\pi q}{N}\right) \right)}$$

On peut maintenant faire le lien entre \hat{w} et \hat{v} mais c'est assez fastidieux à écrire.

Exercice 3 1. On note α l'angle (en radians) sous lequel Saturne est vue par le télescope. On note f la focale du télescope et x le diamètre de l'image de Saturne sur le plan focal image. Clairement $x = f \tan(\alpha)$. A l'échantillonnage critique correspondant à la limite spectrale de la diffraction les pixels sont de taille exactement δ_c avec $\delta_c = \frac{\lambda f}{2D}$ où λ est la longueur d'onde des rayons dont on forme l'image. Pour l'application numérique on prend pour λ le centre du spectre visible soit 6×10^{-7} m.

Le nombre recherché est le diamètre x de l'image sur la taille d'un pixel δ_c soit

$$\begin{aligned} N &= \frac{\tan(\alpha)f}{\frac{\lambda f}{2D}} \\ &= \frac{2D \tan(\alpha)}{\lambda} \\ &\approx 30 \text{ pixels} \end{aligned}$$

2. Cette fois l'objet observé est un pixel, le plan focal est la rétine et la lentille est la pupille de l'œil. On note toujours α l'angle sous lequel le pixel est vu, d la distance du pixel à l'œil, x la taille de l'image du pixel formée sur la rétine, f la focale de la pupille et c la taille d'un pixel. Alors

$$\tan(\alpha) = \frac{c}{d} = \frac{x}{f}$$

On ne distingue plus les pixels à partir du moment où les taches de diffractions de deux pixels contigus ne sont plus discernables sur notre rétine. D'après le TP1 cela se produit lorsque les centres de ces deux taches de diffraction sont distants d'environ 77% du rayon d'Airy $r_a = 1.22 \frac{\lambda f}{D}$. On a donc à la distance critique

$$x = 0.77 \times 1.22 \frac{\lambda f}{D} \implies d = \frac{0.77 \times 1.22 D c}{\lambda}$$

Application numérique: $D = 0.005$ m, $c = \frac{0.5}{1080}$ d'où $d \approx 3.6$ m

3. On a vu en cours que la diffraction crée des images à bande limitée avec coupure critique $\frac{\pi}{\delta_c}$. Échantillonner avec un pas de $\delta_c = \frac{\lambda f}{2D}$ est donc le pas critique pour un bon échantillonnage (pas d'aliasing) alors qu'un pas $\delta < \delta_c$ produit un sur-échantillonnage et inversement $\delta > \delta_c$ un sous-échantillonnage par rapport aux effets de la diffraction. On note c la taille d'un pixel (longueur d'un côté du carré). Pour un appareil 24 mm \times 36 mm avec 30 Mpixels la taille c est donnée par $c = \sqrt{\frac{0.026 \times 0.036}{30 \times 10^6}} = 5.6 \mu\text{m}$.

Prenons les hautes fréquences du spectre visible i.e $\lambda = 0.4 \mu\text{m}$. Alors on est en sur-échantillonnage tant que $\frac{\lambda f}{2D} > c$ i.e $\frac{f}{D} > \frac{2c}{\lambda} = 28$.

Pour les basses fréquences du spectre visible i.e $\lambda = 0.8 \mu\text{m}$, on est en sur-échantillonnage tant que $\frac{f}{D} > \frac{2c}{\lambda} = 14$.

Exercice 16 On applique une translation sous-pixelique de vecteur $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ à l'image "bouc.pgm" et on forme la différence entre l'image et sa translatée pour obtenir

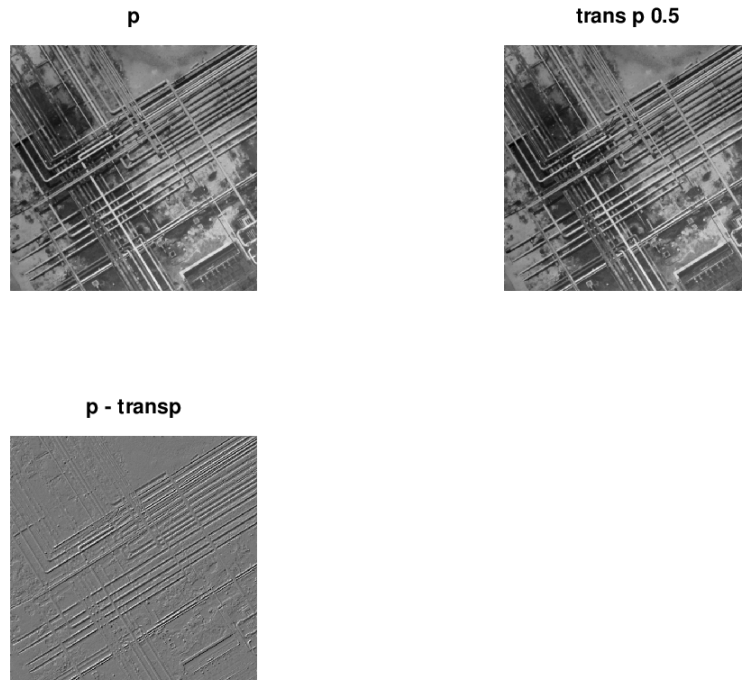


Figure 1 – Translatée d'un demi-pixel

Le résultat est celui escompté mais on observe toutefois l'apparition de discontinuités dans les bords gauche et haut de l'image tradatée. Accentuons la translation à $(50.5, 50.5)$ pixels pour bien observer ce qui se passe.

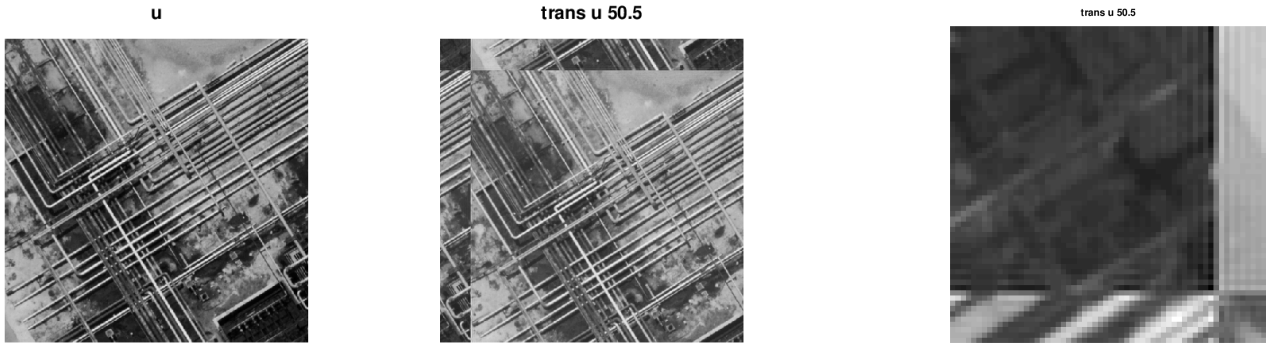


Figure 2 – Translatée de 50.5 pixels et zoom sur ringing

On voit clairement dans le cadran droit supérieur sur l'image zoomée un effet de **ringing** à la jonction entre l'image originale et la translation.

On peut envisager une décomposition périodique + “smooth” et ne tradater que la partie périodique par exemple: cela correspond à l'image de droite sur la figure 3.

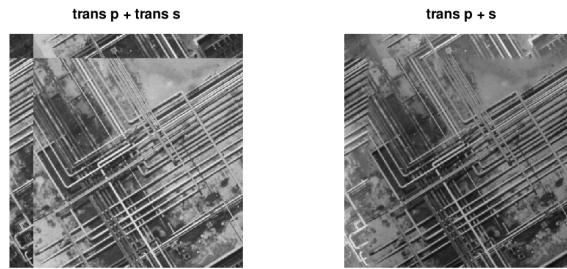


Figure 3 – Translatée de 50.5 pixels et décomposition $p+s$

Il n'y a plus d'effets de ringing mais les niveaux de gris sont complètement faux comparés à ceux de l'image originale. Il faut donc tradater la partie smooth aussi. Toutefois tradater les la partie périodique et la partie smooth du même vecteur $(50.5, 50.5)$ fait la même chose que tradater u et donc produit du ringing. On peut envisager plutôt de tradater s non pas de $(50.5, 50.5)$ mais de $(50, 50)$ et observe ce qui se passe. Cela correspond à la figure 4 ci-dessous. Avec une translation de la partie “smooth” du vecteur d'entiers le plus proche le ringing a complètement disparu !

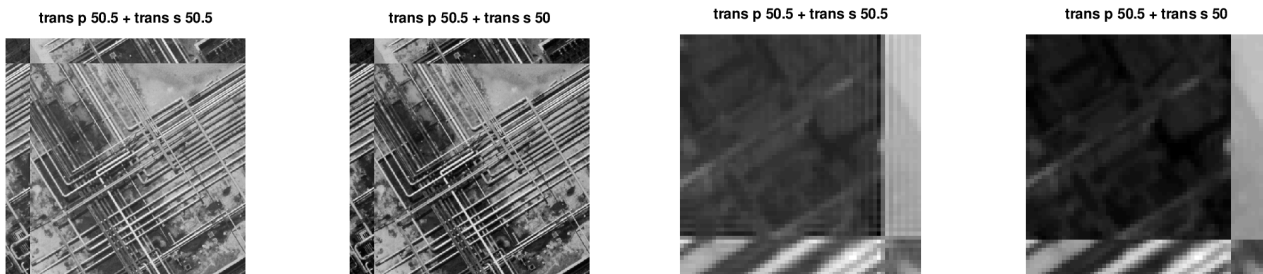


Figure 4 – (g) Translatée de 50.5 p et s , tradatée de 50.5 p et de 50 s (d) idem mais zoom