



UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA U
NOVOM SADU



Dušan Stević

PRIMENA MONTE KARLO SIMULACIJE

DIPLOMSKI RAD

- Osnovne akademske studije -

Novi Sad, 2020.

Sadržaj

| | |
|---|----|
| 1. Uvod..... | 4 |
| 2. Teorijski koncepti primene Monte Karlo simulacije | 5 |
| 2.2. Sistematičan pregled najvažnijih osobina Monte Karlo simulacije | 6 |
| 2.3. Teorijski koncepti primene Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi | 7 |
| 2.4. Teorijski koncepti primene Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive..... | 8 |
| 2.5. Teorijski koncepti primene Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala | 10 |
| 2.6. Input-Output analiza Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi | 12 |
| 2.7. Input-Output analiza Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive..... | 12 |
| 2.8. Input-Output analiza Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala | 12 |
| 3. Korišćene tehnike i tehnologije | 12 |
| 3.1. Python..... | 12 |
| 3.2. Golang..... | 12 |
| 3.3. Pharo | 12 |
| 3.4. Roassal..... | 12 |
| 3.5. Yahoo Finance API..... | 12 |
| 4. Specifikacija i arhitektura sistema | 12 |
| 5. Implementacija sistema..... | 13 |
| 5.1. Implementacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi | 13 |
| 5.2. Implementacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive..... | 13 |
| 5.3. Implementacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala | 13 |
| 6. Vizuelizacija implementiranog sistema | 13 |
| 6.1. Vizuelizacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi | 13 |
| 6.2. Vizuelizacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive..... | 13 |
| 6.3. Vizuelizacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala | 13 |
| 7. Verifikacija rešenja (eksperimenti skaliranja)..... | 13 |
| 7.1. Verifikacija rešenja Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi | 13 |

| | |
|---|----|
| 7.2. Verifikacija rešenja Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive..... | 13 |
| 7.3. Verifikacija rešenja Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala | 13 |
| 8. Zaključak..... | 13 |
| 9. Literatura..... | 13 |

1. Uvod

Monte Karlo simulacija [1] spada u kategoriju probabilističkih aproksimativnih tehnika za simulaciju i predikciju. Fundus Monte Karlo simulacije čini stohastički pristup. Stohastički pristup, za razliku od determinističkog pristupa prilikom ponovnog pokretanja simulacija uvek daje nove rezultate koji se razlikuju od predašnjih rezultata. U slučaju determinističkih algoritama rezultati simulacija su uvek isti. Na ovaj način formira se portfelj rešenja iz kojeg je potrebno izabrati najbolje za posmatrani problem. Stohastički pristup Monte Karlo simulacije ogleda se u činjenici da se za rešavanje problema iz određenog domena koriste pseudo-slučajni brojevi [2]. Pseudo-slučajni brojevi obezbeđuju stohastičnost modela. Monte Karlo simulacija nastoji da modeluje neizvesnost korišćenjem pseudo-slučajnih brojeva. Kao takva Monte Karlo simulacija ima širok dijapazon primene.

Osnovni motiv za pisanje ovog rada ogleda se u nastojanju da se na sistematičan način da pregled primene Monte Karlo simulacije u različitim domenima. Visoka aplikativnost modela omogućuje primenu u najrazličitijim sferama života. Struktura rada je koncipirana tako da prati tri dominantne oblasti primene Monte Karlo simulacije:

1. Izračunavanje aproksimirane vrednosti broja π .
2. Izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive [3].
3. Izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala.

Tema ovog rada je razvoj serijske i paralelne verzije softverskog rešenja koje će omogućiti simulaciju izračunavanje aproksimirane vrednosti broja π , simulaciju izračunavanja aproksimirane vrednosti finansijske aktive i simulaciju izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala. Serijske i paralelne verzije programa ostvarene su u Python [4] i Golang [5] programskim jezicima. Pored razvoja serijske i paralelne verzije programa posebna pažnja je posvećena i vizuelizaciji dobijenih rešenja. Vizuelizacija rešenja zasnovana je na programskom jeziku Pharo [6] uz korišćenje graphic engine-a Roassal [7]. Takođe veoma važnu stavku u radu čine i eksperimenti skaliranja [8]. Kako je reč o radu koji obuhvata paralelno programiranje i računarstvo visokih performansi [9] bilo je potrebno sprovesti detaljne eksperimente kako bi se utvrdio uticaj broja procesnih jedinica i veličine posla na ubrzanje paralelnog programa u odnosu na serijski program. Eksperimenti skaliranja obuhvataju eksperimente jakog [10] i slabog skaliranja [11]. Cilj eksperimenata jakog i slabog skaliranja je da pokažemo kako se ovi algoritmi ponašanja na stvarnom hardveru.

Cilj rada je da se pokaže kako Monte Karlo simulacija može da se primenjuje u različitim oblastima uz upotrebu naprednih tehnika programiranja. Pored razvoja samog programskog rešenja (serijska verzija programa), potrebno je razviti i efikasniju verziju programskog rešenja (paralelna verzija programa) koja će u potpunosti iskoristiti hardverski potencijal mašine na kojoj se pokreće. Benefiti paralelnog pristupa rešavanju problema možemo da posmatramo iz dva ugla:

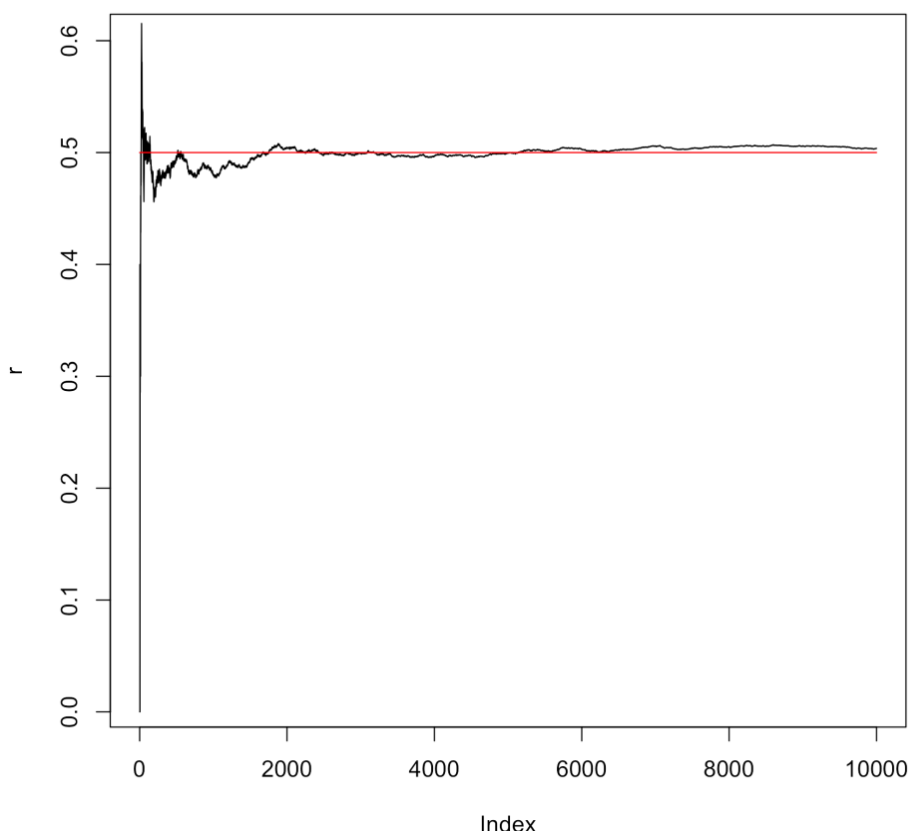
1. Porastom broja simulacija raste kvalitet rešenja. Osnovna motivacija za paralelni pristup je činjenica da kvalitet rešenja raste sa porastom broja simulacija. Porast broja simulacija koje se izvršavaju u paraleli dovode do približnije vrednosti broja π , približnije vrednosti određenog integrala i većeg spektra predikcija kretanja cena finansijske aktive što omogućava donošenje bolje investicione odluke.
2. Brži dolazak do rešenja. Svaka simulacija zahteva određeno vreme izvršavanja. U sistemima u kojima vreme igra ključnu ulogu (berzansko i finansijsko poslovanje) odluke moraju da se donose u veoma kratkom vremenu. Ukoliko bi se koristio samo serijski program donošenje odluka bi jako dugo trajalo, a odluke na berzi moraju da se donesu u deliću sekunde pa je paralelno izvršavanje pogodno iz razloga što za kraće vreme dobijamo kontingent investicionih odluka od kojih treba da izaberemo najbolju.

Ovako implementirano rešenje ima više dimenzija. Prva dimenzija rešenja bi predstavljala oblast primene Monte Karlo simulacije (π , finansijske, integrali). Druga dimenzija rešenja bi predstavljala tehnologija realizacije programskog rešenja (Python, Golang, Pharo). Dok bi treća dimenzija programskog rešenja predstavljala način izvršavanja programskog rešenja (serijsko, paralelno).

U nastavku rada biće analizirani osnovni teorijski koncepti Monte Karlo simulacije, gde će se nastojati da se pored opštih teorijskih konceptata detaljno prikažu teorijski koncepti Monte Karlo simulacije po oblastima primene. Biće opisane korišćene tehnike i tehnologije za implementaciju sistema. Predstaviće se razvojni put softverskog rešenja od specifikacije softverskog rešenja preko implementacije do vizuelizacije i verifikacije istog.

2. Teorijski koncepti primene Monte Karlo simulacije

Monte Karlo simulacija spada u kategoriju probabilističkih aproksimativnih tehnika za simulaciju i predikciju. Nastala je 50-ih godina prošlog veka tokom rada na Menhetn projekatu (engl. The Manhattan Project) [12]. Monte Karlo simulacija se razvila za potrebe simuliranja razornog dejstva hidrogenske bombe. Na razvoju Monte Karlo simulacije radili su čuveni naučnici: Enrico Fermi [13], John von Neumann [14], Nicholas Metropolis [15] i Stanislaw Ulam [16]. Naglu ekspanziju Monte Karlo simulacija doživljava sa ubrzanim razvojem računara. Bolje hardverske performanse savremenih računara doprinele su da se veći broj simulacija može odvijati u paraleli za kraće vreme. Na ovaj način upotrebom Monte Karlo simulacije se dolazi brže do preciznijih rezultata. Monte Karlo simulacija je zasnovana na teoriji velikih brojeva [17] i teoriji slučajnog uzorkovanja [18]. Osnovna ideja koja se krije iza Monte Karlo simulacije je da sa porastom broja simulacija eksperimentalna verovatnoća se približava (konvergira) teorijskoj verovatnoći (npr. kada bacamo novčić ako imamo jako puno pokušaja bacanja onda će odnos pismo glava biti približno 50% : 50%).



Slika 1 Teorija velikih brojeva na primeru bacanja novčića [19]

Na Slika 1 vidimo teoriju velikih brojeva na primeru bacanja novčića. Na x-osi nalazi se broj bacanja novčića, dok se na y-osi nalazi verovatnoća ishoda bacanja novčića. Crna krivudava linija predstavlja eksperimentalnu verovatnoću, a crvena prava linija predstavlja teorijsku verovatnoću. Prilikom bacanja novčića teorijska verovatnoća iznosi 50%, odnosno 0.5. Jednake su šanse prilikom svakog bacanja da padne ili pismo ili glava stoga je teorijska verovatnoća 0.5. Tokom sprovođenja eksperimenta bacanja novčića može se desiti da jedna strana novčića bude učestalija u odnosu na drugu što se ogleda u volatilnoj crnoj liniji. Ako je broj eksperimenta tj. bacanja novčića suviše mali odstupanje eksperimentalne verovatnoće od teorijske verovatnoće je najveće. Kako povećavamo broj bacanja crna linija se uprosečava (postaje sve ravnija i ravnija) tj. eksperimentalna verovatnoća konvergira teorijskoj verovatnoći. Ako je broj bacanja dovoljno velik odstupanje eksperimentalne verovatnoće od teorijske je minimalno. Zakon velikih brojeva obezbeđuje da sa porastom broja simulacija raste kvalitet rešenja odnosno preciznost rešenja. Mali broj simulacija nije dovoljno reprezentativan da bi se mogli doneti neki opši zaključci stoga je potrebno povećati broj simulacija. Broj simulacija ograničen je sa donje strane veličinom reprezentativnog uzorka. Veličina reprezentativnog uzorka varira od slučaja do slučaja i najčešće se utvrđuje na empirijski način. Sa druge strane broj simulacija je ograničen sa gornje strane hardverskim performansama računara na kojem se program izvršava. Jako velik broj simulacija dovešće da predugog izvršavanja programa i preopterećenja celokupnog sistema. Stoga se mora utvrditi balans između nedovoljno reprezentativnog broja simulacija i suviše velikog broja simulacija. Kao potencijalno rešenje ovog

problema uvodi se paralelno programiranje. Paralelno programiranje omogućava da se za isto vreme dobije veći broj simulacija i da se na taj način formira reprezentativna baza simulacija koja nije suviše opterećujuća za celokupni sistem. Paralelnim programiranjem postigla bi se dva veoma važna cilja prilikom sprovođenja simulacija: dafsdafdsadf

1. Veća preciznost rešenja
2. Brži dolazak do rešenja

2.2. Sistematičan pregled najvažnijih osobina Monte Karlo simulacije

Radi boljeg razumevanja sledećih poglavlja u radu potrebno je na sistematičan način dati pregled najvažnijih osobina Monte Karlo simulacije:

1. **Monte Karlo simulacija je aproksimativna tehnika:** Monte Karlo simulacija daje prednost brzini izračunavanja nad preciznošću izračunavanja. Nedovoljna preciznost pojedinačnih simulacija se kompenzuje velikim brojem simulacija koje dovode do porasta preciznosti ukupnog rešenja. Pojedinačne simulacije su brze ali neprecizne zbog toga se sprovodi veći broj simulacija koje obezbeđuju da se uprosečavanjem dobije aproksimativnija vrednost rešenja.
2. **Monte Karlo simulacija je probabilistička tehnika:** Monte Karlo simulacija zasnovana je na teoriji verovatnoće. Sa porastom broja simulacija eksperimentalna verovatnoća konvergira ka teorijskoj verovatnoći.
3. **Monte Karlo simulacija koristi stohastički pristup:** Monte Karlo simulacija koristi pseudo-slučajne brojeve [2] za rešavanje različitih problema. Stohastički pristup nasuprot determinističkom pristupu prilikom svakog ponovnog pokretanja algoritama daje nove rezultate. Generisanje uvek različitih rezultata doprinosi da u bazi simulacija budu disperzovane vrednosti. Disperzovane vrednosti obezbeđuju veću preciznost konačnih rezultata simulacija. Ukoliko bi algoritmi uvek vraćali istu vrednost baza simulacije bi se sastojala od samo jedne vrednosti ponovljene nekoliko puta. Agregirani rezultat simulacije se dobija uprosečavanjem parcijalnih rezultata simulacije. Prilikom uprosečavanja parcijalnih rezultata simulacija agregirani rezultat se ne bi razlikovao od parcijalnih rezultata. Parcijalni i agregirani rezultati bi bili isti čime bi se smanjila sposobnost Monte Karlo modela da oslika neizvesnosti i slučajnost.
4. **Monte Karlo simulacija koristi pseudo-slučajne brojeve:** Monte Karlo simulacija koristi pseudo-slučajne brojeve, a ne slučajne brojeve [20]. U simulacijama se koriste ugrađeni generatori pseudo-slučajnih brojeva. U programskim jezicima koji se koriste za implementaciju simulacija postoje ugrađeni generatori pseudo-slučajnih brojeva. Osnovna razlika između slučajnih i pseudo-slučajnih brojeva je način njihovog generisanja. Slučajni brojevi nastaju korišćenjem nekog fizičkog sredstva (npr. kockice, novčić, rulet, točak sreće, bubanj, itd.). Za slučajne brojeve ne postoji algoritam koji ih generiše, dok kod pseudo-slučajnih brojeva postoji algoritam. Pošto možemo imati uvid u algoritam koji generiše pseudo-slučajne brojeve njihov nastanak nije u potpunosti slučajan pa ih iz tog razloga zovemo pseudo-slučajnim.
5. **Monte Karlo simulacija koristi teoriju velikih brojeva:** Monte Karlo simulacija je zasnovana na teoriji velikih brojeva. U matematičkoj teoriji sa porastom broja simulacija eksperimentalna verovatnoća konvergira teorijskoj verovatnoći pa imamo osnov da broj simulacija povećavamo do beskonačnosti. Međutim u stvarnom svetu, gde postoje hardverska ograničenja, broj simulacija je ograničen hardverskim performansama. Velik broj simulacija dovodi do preopterećenja sistema i predugog vremena izvršavanja te je iz tog razloga potrebno eksperimentalno utvrditi gornju granicu broja simulacija.
6. **Monte Karlo simulacija koristi teoriju slučajnog uzorkovanja:** Monte Karlo simulacija je zasnovana na teoriji slučajnog uzorkovanja. Algoritmi Monte Karlo simulacije zahtevaju formiranje slučajnog uzorka. Za potrebe ovog rada uzorak se formira na slučajan način i obuhvata tačke iz nekog zadatog intervala. Veličina uzorka jednaka je broju simulacija. Uzorak mora da bude reprezentativan i adekvatan [21]. Reprezentativnost uzorka ogleda se u činjenici da tačke u uzorku moraju da budu ravnomerno distribuirane nad čitavim intervalom posmatranja. Ne sme da se dogodi da dođe do nagomilavanja tačaka unutar zadatog intervala. Ukoliko dođe do nagomilavanja tačaka unutar zadatog intervala uzorak neće biti reprezentativan biće pristrasan zato što će forsirati određene tačke iz intervala. Problem pristrasnosti uzorka direktno se povezuje sa lošim performansama generator pseudo-slučajnih brojeva. Pored reprezentativnosti uzorka važna osobina uzorka je i njegova adekvatnost. Adekvatnost uzorka povezana je sa veličinom uzorka. Uzorak je adekvatan ako je dovoljno velik. Veličina uzorka tj. broj simulacija ne sme da bude suviše mali. Ako je broj simulacija suviše mali preciznost rešenja je mala. Potrebno je eksperimentalno utvrditi donju granicu broja simulacija. Monte Karlo simulacija zahteva da uzorak poseduje tri osobine: slučajnost, reprezentativnost i adekvatnost.

7. **Aplikativnost Monte Karlo simulacije:** Monte Karlo simulacija se koristi za rešavanje širokog spektra problema. Numerička matematika, fizička hemija, operaciona istraživanja, veštačka inteligencija, finansije samo su neka od područja primene Monte Karlo simulacije [1]. U ovom radu Monte Karlo simulacija će se koristiti za: izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi, izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive i izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integral.

2.3. Teorijski koncepti primene Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi

Monte Karlo simulacija se koristi za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi. Pođimo od pretpostavke da imamo kvadrat stranice $a = 2$ sa centrom u tački $(0,0)$. Površina kvadrata se računa po sledećoj formuli:

$$P_{\text{kvadrata}} = a^2 = 2^2 = 4$$

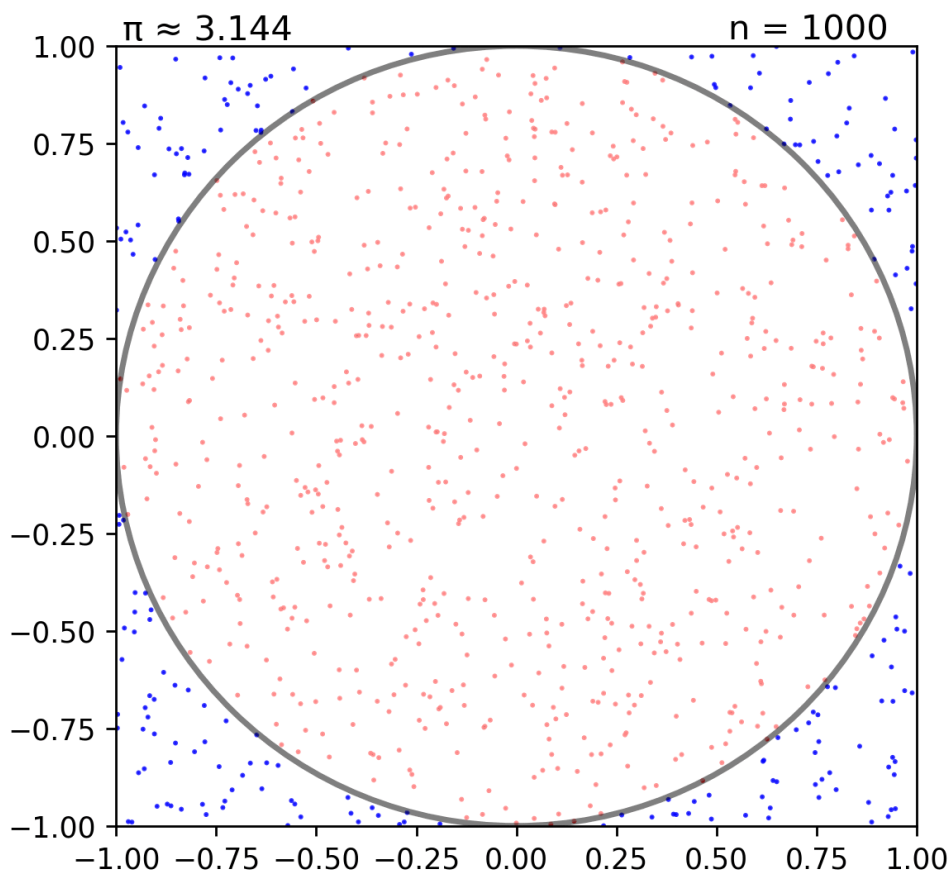
Formula 1 Površina kvadrata

U kvadrat upisujemo krug sa poluprečnikom $r = 1$ i centrom u tački $(0,0)$. Površina kruga se računa po sledećoj formuli:

$$P_{\text{kruga}} = r^2\pi = 1^2\pi = \pi$$

Formula 2 Površina kruga

U kvadrat se upisuje jedinična kružnica. Centar kvadrata se poklapa sa centrom jedinične kružnice i on se nalazi u tački $(0,0)$.



Slika 2 Monte Karlo simulacija za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi

Na Slika 2 vidimo kvadrat u koji je upisana jedinična kružnica. Crvene tačke predstavljaju tačke koje su upale u krug, dok plave tačke predstavljaju tačke koje su izvan površine kruga ali su upale na površinu kvadrata. Zbir crvenih i plavih tačaka jednak je ukupnom broju tačaka tj. ukupnom broju simulacija.

Formula na osnovu koje se utvrđuje da li neka pseudo-slučajno generisana tačka sa koordinatama x i y pripada površini kruga se računa na sledeći način:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

Formula 3 Jednačina kružnice sa centrom u tački $C(p,q)$ i poluprečnikom r

Kako je reč o jediničnoj kružnici sa poluprečnikom $r = 1$ i centrom u tački $(p=0,q=0)$ prethodna formula može da se koriguje:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Formula 4 Jednačina jedinične kružnice

Pomoću jednačine jedinične kružnice izvode se sledeći zaključci:

1. $x^2 + y^2 < 1$, tačka se nalazi unutar jedinične kružnice
2. $x^2 + y^2 = 1$, tačka se nalazi na jediničnoj kružnici
3. $x^2 + y^2 > 1$, tačka se nalazi van jedinične kružnice

Odnos površine kruga i površine kvadrata iznosi:

$$\frac{P_{\text{kruga}}}{P_{\text{kvadrata}}} = \frac{\pi}{4}$$

Formula 5 Odnos površine kruga i površine kvadrata

Ovaj odnos površina približno možemo da dobijemo ako površinu kvadrata "izbombardujemo" pseudo-slučajno generisanim tačkama i onda napravimo odnos tačke koje su upale u krug prema ukupnom broju tačaka.

$$\frac{P_{\text{kruga}}}{P_{\text{kvadrata}}} \approx \frac{\text{broj tačaka u krugu}}{\text{ukupan broj tačaka}} \approx \frac{\text{broj tačaka u krugu}}{\text{ukupan broj simulacija}} \approx \frac{\pi}{4}$$

Formula 6 Odnos broja tačaka u krugu i ukupnog broja tačaka

Množenjem prethodnog odnosa sa 4 dobija se približna vrednost broja π koja je sve tačnija i tačnija kako povećavamo broj simulacija.

$$\pi \approx 4 \frac{\text{broj tačaka u krugu}}{\text{ukupan broj tačaka}} \approx 4 \frac{\text{broj tačaka u krugu}}{\text{ukupan broj simulacija}}$$

Formula 7 Izračunavanje aproksimirane vrednosti broja π

2.4. Teorijski koncepti primene Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive

Monte Karlo simulacija se koristi za izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive [3]. Finansijska aktiva obuhvata: akcije [22], obveznice [23], finansijske derivate [24], kriptovalute [25], itd. Monte Karlo simulacija omogućava da se na osnovu predašnjeg kretanja cene finansijske aktive predvidi buduća cena finansijske aktive. Monte Karlo simulacija se u finansijama koristi kao prediktivna tehnika. Analiza i predviđanje finansijskih vremenskih serija [26] može se vršiti primenom Monte Karlo simulacije. Kako bi racionalni donosioci odluka (engl. Rational decision makers) [27] doneli ispravnu investicionu odluku u pogledu kupovine ili prodaje finansijske aktive neophodno je da izvrše korektnu predikciju cene finansijske aktive. Monte Carlo simulacija može da pomogne u predikciji cene finansijske aktive. Povlačenjem podatke o kretanju cena finansijske aktive sa berze dolazimo do istorijskih podataka. Buduća cena finansijske aktive može da se izračuna preko formule za eksponencijalni rast [28] koja uključuje volatilnost [29] i kontinuelnu stopu prinosa [30]. Volatilnost i kontinuelna stopa prinosa se računaju na osnovu istorijskih podataka.

$$\text{Periodic Daily Return} = \ln\left(\frac{\text{Day's Price}}{\text{Previous Day's Price}}\right)$$

Formula 8 Kontinualna stopa prinosa [31]

Formula za kontinualnu stopu prinosa se koristi kako bi se izračunao dnevni prinos finansijske aktive. Kontinualna stopa prinosa predstavlja signal investitorima koji treba da ukaže da li je isplativo ulagati u neku finansijsku aktivu. Pozitivna kontinualna stopa prinosa signalizira investitorima da ukoliko poseduju finansijsku aktivu u svom investicionom portfoliju da će ostvariti profit. Negativna kontinualna stopa prinosa ukazuje da ukoliko je finansijska aktiva prisutna u portfoliju investitor će ostvariti gubitak. Pored kontinualne stope prinosa na investitora prilikom kupovine ili prodaje finansijske aktive utiče i finansijski rizik koji se modeluje po sledećoj formuli:

$$\text{Drift} = \text{Average Daily Return} - \frac{\text{Variance}}{2}$$

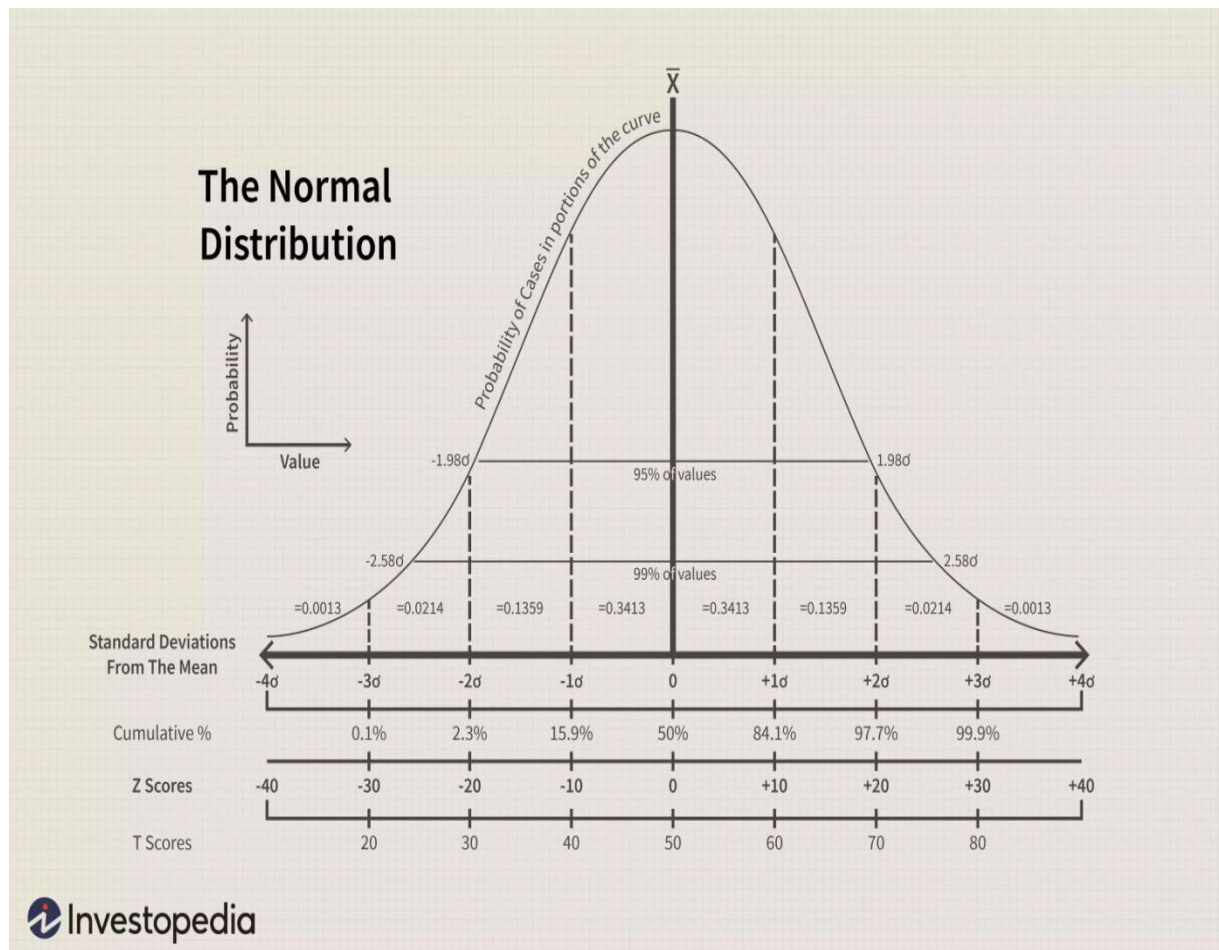
Formula 9 Finansijski drift kao mera rizika [31]

Formula za finansijski drift predstavlja meru rizika koju sa sobom nosi svako investiciono ulaganje. Racionalni investitor mora da napravi balans (engl. Trade-off) između prinosa i rizika. Više rizična finansijska aktiva ispraćena je višim stopama prinosa, dok manje rizična finansijska aktiva donosi niži prinos. Razlog ove zakonitosti leži u činjenici da investitori koji su skloni riziku moraju biti nagrađeni dok riziko-averzni investitori ne mogu da ostvaruju visoke stope prinosa.

$$\text{Random Value} = \sigma \times Z_{\text{score}}(\text{Rand}())$$

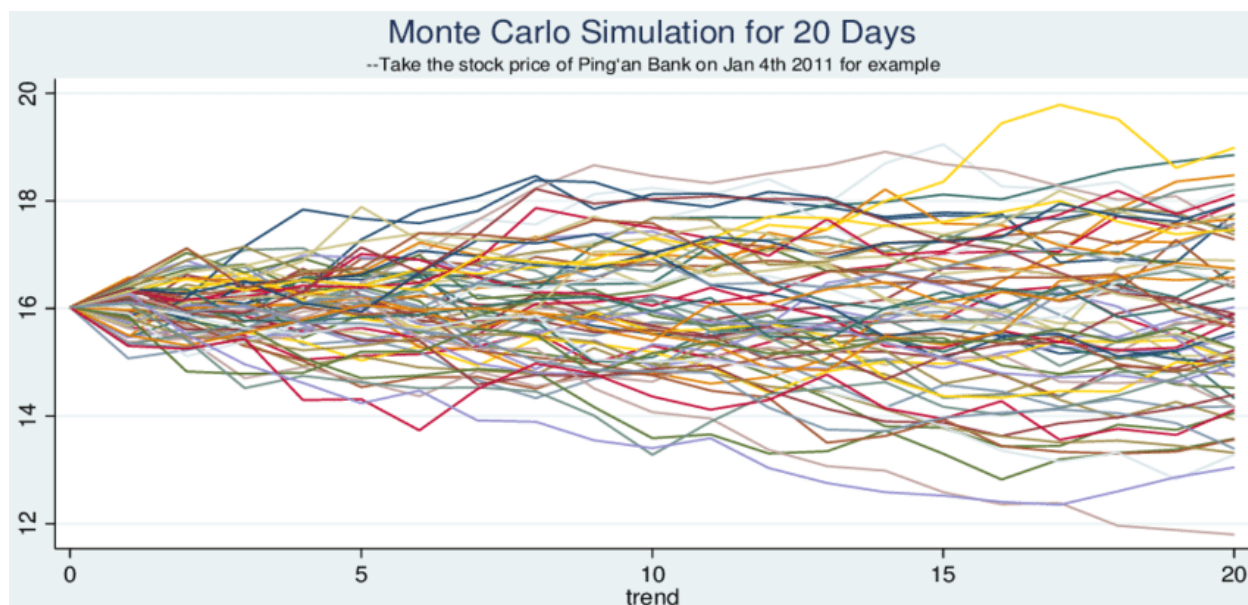
Formula 10 Slučajna vrednost [31]

Prethodnom formulom se modeluje neizvesnost u kretanju vremenskih serija. Tržišne perturbacije i volatilnost finansijskih vremenskih serija predstavljene su formulom za slučajnu vrednost. Standardna devijacija σ nam govori koliko vremenska serija osciluje tj. koliko je vremenska serija volatilna u odnosu na prosek vremenske serije. Standardna devijacija je mera disperzije vremenske serije [32]. Disperzija je pokazatelj raspršenosti vremenske serije. Varijansa predstavlja kvadrat standardne devijacije [33]. Z_{score} govori koliko smo standardnih devijacija udaljeni od proseka [34]. Ova mera je od izuzetne važnosti zato što direktno utiče na odabir one simulacije koja će se koristiti za finansijsko modelovanje. Pomoću Z_{score} mere formiraju se koridori standardnih devijacija. Sa što većim brojem simulacija dobijamo familiju krivih koje formiraju zvonastu (normalnu) distribuciju. Svaka kriva predstavlja jednu simulaciju tj. predikciju buduće cene finansijske aktive. Sa velikim brojem simulacija imamo aparat sa kojim možemo sa određenom verovatnoćom da tvrdimo kako će se cena finansijske aktive kretati u budućnosti.



Slika 3 Normalna distribucija i koridori standardnih devijacija [35]

Na Slika 3 vidimo zvonastu krivu normalne distribucije. Na x-osi se nalaze vrednosti Z_{score} , a na y-osi se nalazi verovatnoća. Simulacije formiraju fen dijagram [36] gde vidimo koja od simulacija je najverovatnija da se desi, a koje su manje verovatne da se dese. Najverovatnije predikcije su one koje se nalaze u koridoru \pm jedna standardna devijacija (σ), dok su manje verovatne predikcije koje se nalaze u koridoru \pm dve standardne devijacije (2σ) i \pm tri standardne devijacije (3σ).



Slika 4 Fen dijagram simulacija kretanja cene finansijske aktive [31]

Fen dijagram simulacija treba da posluži kao sredstvo investitorima da donesu investicionu odluku. Investitori se opredeljuju na osnovu fen dijagrama za najverovatnije kretanje cene finansijske aktive i pomoću tih predikcija formiraju svoje investicione strategije. Fen dijagram obuhvata predikcije koje se generišu na osnovu formule za buduću cenu finansijske aktive.

$$\text{Next Day's Price} = \text{Today's Price} \times e^{(\text{Drift} + \text{Random Value})}$$

Formula 11 Buduća cena finansijske aktive

2.5. Teorijski koncepti primene Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala

Monte Karlo simulacija se koristi za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala. Pođimo od pretpostavke da imamo integrand:

$$f(x) = y = 2x$$

Formula 12 Integrand

Integrand je funkcija čiji određeni integral tražimo na nekom intervalu [37]. Uzmimo da želimo da nađemo određeni integral integranda na zatvorenom intervalu [1,2].

$$\int_a^b f(x) dx = \int_1^2 2x dx$$

Formula 13 Traženi određeni integral

Analitičko rešenje određenog integrala dobijamo primenom pravila za neodređeni i određeni integral [38]. Prilikom analitičkog rešavanja prvo je potrebno naći neodređeni integral koristeći formulu i tablične vrednosti [39]:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 2x dx = x^2 + C$$

Formula 14 Neodređeni integral [38]

Kada smo izračunali neodređeni integral, pristupamo računanju neodređenog integrala u gornjoj i donjoj tački intervala:

$$F(b) = b^2 + C = 2^2 + C = 4 + C$$

Formula 15 Neodređeni integral u gornjoj tački intervala

$$F(a) = a^2 + C = 1^2 + C = 1 + C$$

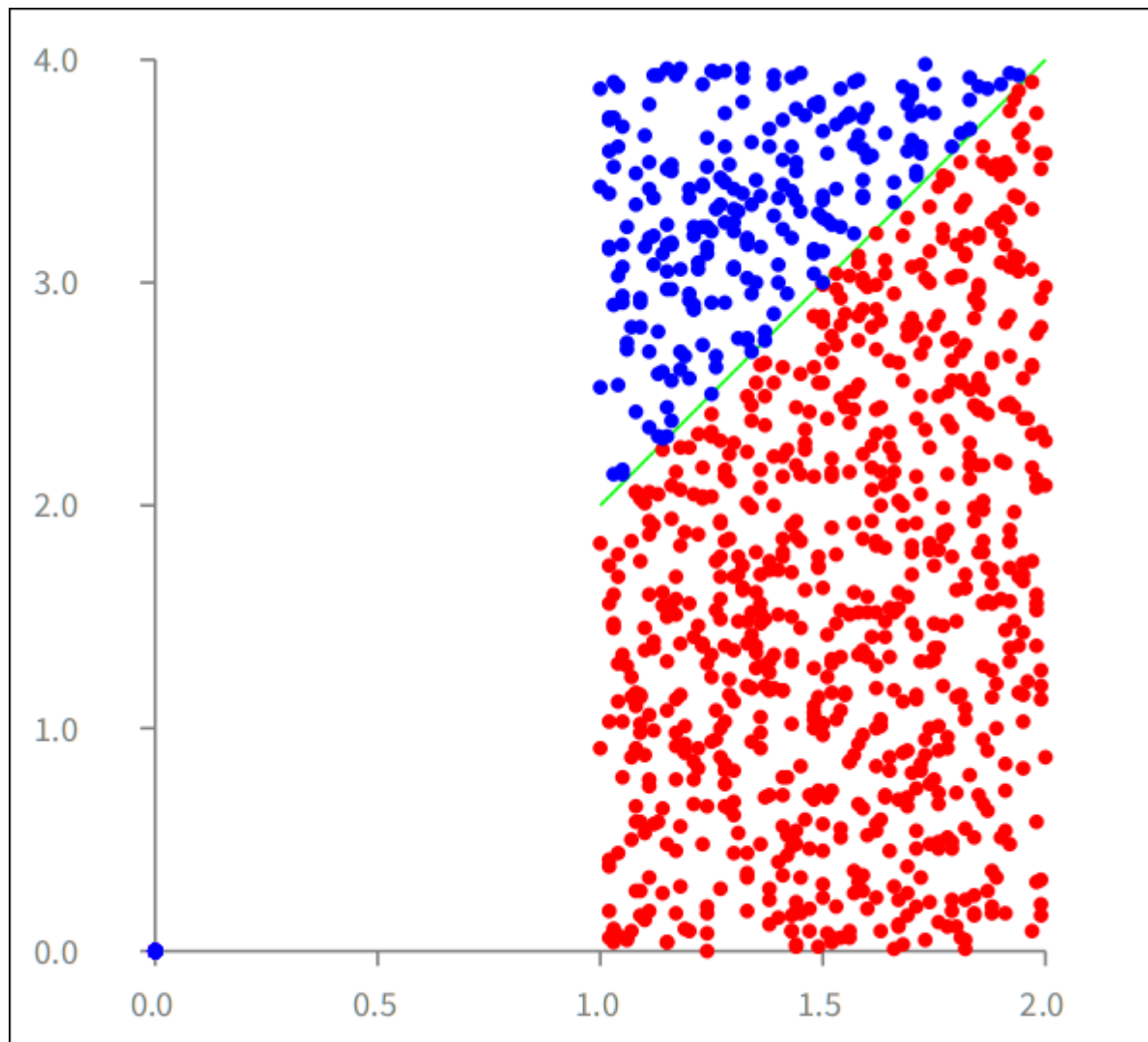
Formula 16 Neodređeni integral u donjoj tački intervala

Određeni integral se računa po formuli:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = 3$$

Formula 17 Analitičko rešenje traženog određenog integrala

Na ovaj način dobijamo precizno analitičko rešenje. Prednost analitičkog rešenja je njegova preciznost, dok je mana dužina trajanja izračunavanja. Monte Karlo simulacija daje prednost brzini izračunavanja nad preciznošću izračunavanja. Monte Karlo simulacija spada u numeričke integracione tehnike. Prednost numeričkog rešenja je brzina izračunavanja dok je mana preciznost. Monte Karlo simulacija je aproksimativna tehnika koja se koristi u situacijama kada preciznost rešenja nije ključna, ali je brzina dolaska do rešenja od izuzetne važnosti. Preduslov primene Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala je da funkcija koju integralimo tj. integrand mora biti nenegativna neprekidna funkcija na traženom intervalu. Nenegativna funkcija je ona funkcija čije vrednosti su nenegativne. Grafik nenegativnih funkcija se nalazi na i/ili iznad x-ose. Neprekidna funkcija je ona funkcija koja nema skokove, prekide ili vertikalne asimptote.



Slika 5 Numeričko rešenje traženog određenog integrala

Na Slika 5 zelenom bojom je predstavljen integrand, crvenom bojom tačke čija je vrednost y koordinate manja od vrednosti funkcije u x koordinati tačke. Plavom bojom su prikazane tačke čija je vrednost y koordinate veća od vrednosti funkcije u x-koordinati tačke. Da bismo izračunali površinu ispod prave na određenom intervalu tj. integral neophodno je da pravu ograničimo po x-osi i po y-osi. Prava je ograničena po x-osi traženim intervalom $[a,b]$ u konkretnom slučaju $[1,2]$. Da bismo ograničili funkciju po y-osi neophodno je da izračunamo maksimum funkcije y_{\max} na posmatranom intervalu. Kada dobijemo maksimum funkcije na posmatranom intervalu tada je prava ograničena po y-osi intervalom koji se kreće od x-ose do maksimuma funkcije odnosno $[0, y_{\max}]$ u konkretnom slučaju $[0,4]$. Sa ograničenjem po x-osi i ograničenjem po y-osi formira se pravougaonik koji omeđava pravu. Površina integrala računa se na osnovu površine omeđavajućeg

pravougaonika i odnosa broja tačaka koje se nalaze ispod prave i ukupnog broja tačaka koje se koriste za simulaciju.

$$\text{Širina}_{\text{pravougaonika}} = b - a = 2 - 1 = 1$$

Formula 18 Širina pravougaonika

$$\text{Dužina}_{\text{pravougaonika}} = y_{\max} - 0 = 4 - 0 = 4$$

Formula 19 Dužina pravougaonika

$$P_{\text{pravougaonika}} = \text{Širina}_{\text{pravougaonika}} \times \text{Dužina}_{\text{pravougaonika}} = 1 \times 4 = 4$$

Formula 20 Površina pravougaonika

Kada imamo površinu pravougaonika potrebno je istu “izbombardovati” pseudo-slučajno generisanim tačkama i prebrojati one koje se nalaze ispod prave. Na osnovu sledeće proporcije dolazimo do formule za numeričko rešenje određenog integrala

fasdfasdfasdfPovećanjem broja simulacija tj. broja tačaka kojima se površina pravougaonika “bombarduje” preciznost rešenja raste. Veći broj simulacija bolje aproksimira vrednost određenog integrala.

2.6.Input-Output analiza Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi

Afsdad

2.7.Input-Output analiza Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive

Afsdad

2.8.Input-Output analiza Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala

Afsdad

3. Korišćene tehnike i tehnologije

Sdafdsfasd

3.1.Python

Safasdfasd

3.2.Golang

Dasfasdafsd

3.3.Pharo

Dasdfasdf

3.4.Roassal

Roassal je graphic engine, napisan u Pharo programskom jeziku [7]. Koristi se za interaktivnu vizuelizaciju podataka. Stiče sa proširivom bazom predefinisanih primera koje korisniku olakšavaju vizuelizaciju podataka.

dafasdfasdf

3.5.Yahoo Finance API

Asdfasdfasdf

4. Specifikacija i arhitektura sistema

Dasfdsafsaddsfasdfasdf ovde pisi o dimenzijama

5. Implementacija sistema

Sdafasdfasdfas

5.1.Implementacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi

Fasdfasdfa

5.2.Implementacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive

Sadfadasfsa

5.3.Implementacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala

Dfsdffdfdfd

6. Vizuelizacija implementiranog sistema

Dfasdfa

6.1.Vizuelizacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi

Dafsdfsd

6.2.Vizuelizacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive

dafsdfasfd

6.3.Vizuelizacija Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala

Asdfasdfa

7. Verifikacija rešenja (eksperimenti skaliranja)

Dasfjldksajf

7.1.Verifikacija rešenja Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti broja Pi

Dfasdfasdf

7.2.Verifikacija rešenja Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti finansijske aktive

Dafdadsa

7.3.Verifikacija rešenja Monte Karlo simulacije za izračunavanje aproksimirane vrednosti određenog integrala

Dafdasfas

8. Zaključak

Asdfasddfa

9. Literatura

[https://en.wikipedia.org/wiki/Monte_Carlo_method, Datum pristupanja 23.07.2020.

1

]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudorandom_number_generator#Potential_problems_2_with_deterministic_generators, Datum pristupanja 15.09.2020.
2
]

[<https://www.investopedia.com/terms/f/financialasset.asp>, Datum pristupanja 3 11.8.2020.
]

[<https://www.python.org>, Datum pristupanja 10.09.2020.
4
]

[<https://golang.org>, Datum pristupanja 17.09.2020.
5
]

[<https://pharo.org>, Datum pristupanja 26.09.2020.
6
]

[<http://agilevisualization.com>, Datum pristupanja 30.07.2020.
7
]

[<https://www.kth.se/blogs/pdc/2018/11/scalability-strong-and-weak-scaling/>, Datum pristupanja 01.09.2020.
8
]

[https://en.wikipedia.org/wiki/High-performance_technical_computing, Datum pristupanja 28.08.2020.
9
]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Amdahl%27s_law, Datum pristupanja 03.09.2020.
1
0
]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Gustafson%27s_law, Datum pristupanja 03.09.2020.
1
1
]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Manhattan_Project, Datum pristupanja 12.09.2020.
1
2
]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi, Datum pristupanja 13.09.2020.
1
3
]

[https://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann, Datum pristupanja 13.09.2020.

1

4

]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Nicholas_Metropolis, Datum pristupanja 13.09.2020.

1

5

]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Stanislaw_Ulam, Datum pristupanja 13.09.2020.

1

6

]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_large_numbers#:~:text=In%20probability%20theory%2C%20the%20law,a%20large%20number%20of%20times.&text=For%20example%2C%20while%20a%20casino,a%20large%20number%20of%20spins., Datum pristupanja 05.09.2020.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Simple_random_sample, Datum pristupanja 16.08.2020.

1

8

]

[<https://confounding.net/2012/03/12/thats-not-how-the-law-of-large-numbers-works/>, Datum pristupanja 09.08.2020.

9

]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Random_number, Datum pristupanja 15.09.2020.

2

0

]

[http://metodologijamentus.weebly.com/uploads/5/1/9/7/51973983/14._uzorkovanje.pdf, Datum pristupanja 10.09.2020.

1

]

[<https://www.investopedia.com/terms/s/stock.asp#:~:text=Bonds-What%20Is%20a%20Stock%3F,stock%20are%20called%20'shares.'>, Datum pristupanja 08.09.2020.

]

[<https://www.investopedia.com/terms/b/bond.asp>, Datum pristupanja 08.09.2020.

2

3

]

[<https://www.investopedia.com/terms/d/derivative.asp>, Datum pristupanja 08.09.2020.

2

4

]

[<https://www.investopedia.com/terms/c/cryptocurrency.asp>, Datum pristupanja
2 08.09.2020.

5

]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Time_series#:~:text=A%20time%20series%20is%20a,sequence%20of%20discrete-time%20data., Datum pristupanja 20.07.2020.

6

]

[<https://www.investopedia.com/terms/r/rational-behavior.asp#:~:text=Rational%20behavior%20refers%20to%20a,or%20utility%20for%20an%20individual.&text=Most%20classical%20economic%20theories%20are,an%20activity%20are%20behaving%20rationally.>, Datum pristupanja 10.09.2020.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_growth, Datum pristupanja 26.08.2020.

2

8

]

[<https://www.investopedia.com/terms/v/volatility.asp>, Datum pristupanja 14.08.2020.

2

9

]

[<https://www.investopedia.com/terms/r/rateofreturn.asp>, Datum pristupanja
3 13.08.2020.

0

]

[<https://www.investopedia.com/terms/m/montecarlosimulation.asp>, Datum pristupanja
3 20.07.2020.

1

]

[https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_deviation, Datum pristupanja 11.08.2020.

3

2

]

[<https://en.wikipedia.org/wiki/Variance>, Datum pristupanja 11.08.2020.

3

3

]

[[https://www.simplypsychology.org/z-table.html#:~:text=A%20z-table%2C%20also%20called,standard%20normal%20distribution%20\(SND\).](https://www.simplypsychology.org/z-table.html#:~:text=A%20z-table%2C%20also%20called,standard%20normal%20distribution%20(SND).), Datum
4 pristupanja 11.08.2020.

]

[<https://www.investopedia.com/terms/b/bell-curve.asp>, Datum pristupanja 11.08.2020.

3

5

]

[[https://en.wikipedia.org/wiki/Fan_chart_\(time_series\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Fan_chart_(time_series))), Datum pristupanja 31.07.2020.

3

6

]

[[https://www.mathsisfun.com/calculus/integration-](https://www.mathsisfun.com/calculus/integration-definite.html#:~:text=A%20Definite%20Integral%20has%20start,Indefinite%20Integral)

3 definite.html#:~:text=A%20Definite%20Integral%20has%20start,Indefinite%20Integral, Datum pristupanja 10.09.2020.

]

[<https://en.wikipedia.org/wiki/Integral>, Datum pristupanja 05.09.2020.

3

8

]

[A. Bergel, D. Cassou, S. Ducasse and J. Laval, Deep into Pharo, Square Bracket Associates, 2013.

9

]

[A. Bergel, Roassal @ Pharo TechTalk, Pharo TechTalk, 2017.

4

0

]

[S. Ducasse, D. Chloupis, N. Hess and D. Zagidulin, Pharo By Example 5, Lulu.com & Square Bracket Associates, 2018.

1

]

[<https://www.mathsisfun.com/calculus/integration-rules.html>, Datum pristupanja 4 12.09.2020.

2

]