Modelación de Problemas y paso a Código.

Capítulo 1

Introducción

La programación se ha vuelto una herramienta fundamental al momento de abordar problemas, en nuestro caso, de optimización pesados. Esto por la dificultad de encontrar soluciónes análiticas. Sin embargo, gran parte de la resolución del problema, una vez se garantiza la solución de su existencia, es la construcción del método numérico.

1.1. Notación.

En el momento de la resolución de los problemas vamos a definir algunos elementos. Notemos que cada problema de control óptimo P puede verse como una tetrada

$$P = (f, \mathcal{X}, \mathcal{A}, C),$$

donde f es la dinámica del problema, $\mathcal{X}$ el espacio de estados, $\mathcal{A}$ es el conjunto de acciones asociadas a P y C es la función de costo o recompensa según lo requiera P. Con lo anterior podemos definir $A(x)$ como el conjunto de acciones admisibles

$$A(x) \subset \mathcal{A}, x \in \mathcal{X}.$$

Para los problemas que abarcaremos nuestrá dinámica f va a ser de tal forma que

$$x_{k+1} = f(x_k, a_k).$$

Además, definiremos una situación como la colección

$$\mathcal{S}(x_0, \pi) = \{(x_k, a_k)\}_{k=0}^{\infty},$$

donde $\pi = (a_0, \ldots)$ y $x_{k+1} = f(x_k, a_k)$. Importante mencionar que π puede ser finita, lo que haría a $\mathcal{S}$ finita. Motivado por lo anterior denotaremos el costo total por

$$C(x_0, \pi) = \sum_{k=0}^{\infty} c(x_k, a_k)$$

recordando que si π es finita.

$$C(x_0, \pi) = c_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} c(x_k, a_k).$$

1.2. Metodos a implementar.

Dentro de los problemas considerados, trabajaremos dos metodologías similares. El algoritmo de programación dinámica, que de forma resumida, consiste en defnir funciones J_k tales que

$$\begin{aligned} J_N(x) &= c_N(x) \\ J_{k+1}(x) &= \min_{a \in A(x)} \{c(x, a) + J_k(f(x, a))\}, \end{aligned}$$

entonces la política óptima esta dada por una colección de funciones h_k, donde

$$h_k(x) = \arg \min_{a \in A(x)} \{c(x, a) + J_k(f(x, a))\}.$$

Sin embargo, está solo funciona cuando las politicas son finitas. Para el caso infinito (horizonte infinito), en particular el caso descontado, es decir,

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k c(x_k, a_k), 0 < \beta < 1$$

tenemos el algoritmo dado por las ecuación de Bellman, que en forma resumida, trata de construir unas funciones w_k donde w_0 es continua y acotada y

$$w_{k+1}(x) = \min_{a \in A(x)} \{c(x, a) + \beta w_k(f(x, a))\},$$

y para cada etapa k, se calculan las funciónes h_k

$$h_k(x) = \arg \min_{a \in A(x)} \{c(x,a) + \beta v(f(x,a))\}, v = w_{k+1}.$$

Esto nos da politicas óptimas infinitas

$$\pi^*(\mathbf{x}) = \{h_k(x)\}_{x \in \mathbf{x}}$$

donde x_0 fue dado y $x_{k+1} = f(x_k, h_k(x_k))$. Entonces cortaremos la pólitica cuando $\|w_{k+1} - w_k\| < \epsilon$, donde ϵ es un criterio de paro.

Capítulo 2

Problema 1: Decisiones de Ahorro

2.1. Planteamiento del problema.

Supongamos que Ricardo ha ganado el premio mayor de la Lotera Nacional y decide meter su dinero al banco que le ofrece una tasa de interes anual i. Al inicio del año k decide retirar a pesos para sus gastos y planea repetir este proceso N veces, es decir, $k = 0, 1, \dots, N$ 1. Si x_k denota la cantidad de dinero al inicio del año k, entonces la siguiente ecuacion

$$x_{k+1} = (1+i)(x_k - a_k)$$

describe como va cambiando la fortuna de Ricardo en función de los retiros que haga. Utility theory, una empresa de consultoria, le recomienda a Ricardo que escoja $a_0, \dots, a_{N-1}$ de tal manera que maximice.

$$\beta^N (x_N)^{1-\gamma} + \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k (a_k)^{1-\gamma}.$$

La cantidad final x_N será heredada a sus descendientes. Los parámetros $\beta, \gamma \in (0,1)$ fueron estimados por Utility Theory. Usando el APD encontraos que cada función J_k es de la forma $J_k(x) = A_k \beta^k x^{1-\gamma}$, donde $A_N = 1$ y para $k = N-1, \dots, 0$.

$$A_k = \left[1 + \left[(1+i)\beta A_{k+1}\right]^{1/\gamma}\right]^{\gamma}$$

2.2. Planteamiento de la Implementación.

Notemos que en nuestro caso $\mathcal{X}, \mathcal{A}$ son espacios finitos. ya que para $x_0 \in \mathcal{X}$ dado solo tomaremos N acciones. En el problema del ahorro $A(x) = [0, x]$, es decir, solo podemos retirar a lo más lo que tenemos en ese momento. Luego, identificamos que la función a maximizar en este caso es

$$R(x_0, \pi) = \beta^N (x_N)^{1-\gamma} + \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k (a_k)^{1-\gamma}$$

$$\beta^N (x_N)^{1-\gamma} + \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k (a_k)^{1-\gamma}$$

Considerando J_N como sigue

$$J_N(x) = \beta^N x^{1-\gamma} K_N,$$

con $K_N = 1$ bajo la hipótesis de que

$$c_k(x,a) = \beta^k a^{1-\gamma}$$

calculamos J_{N-1}.

$$\begin{aligned} J_{N-1}(x) &= \max_{a \in A(x)} \{c_{N-1}(x,a) + J_N((1+i)(x-a))\} \\ &= \max_{a \in A(x)} \left\{\beta^{N-1} a^{1-\gamma} + \beta^N ((1+i)(x-a))^{1-\gamma}\right\} \end{aligned}$$

Definimos el argumento como una función q.

$$\begin{aligned} q(x,a) &= \beta^{N-1} a^{1-\gamma} + \beta^N ((1+i)(x-a))^{1-\gamma} \\ &= C_1 a^{1-\gamma} + C_2 (x-a)^{1-\gamma}, \end{aligned}$$

donde $C_1 = \beta^{N-1}$ y $C_2 = \beta^N (1+i)^{1-\gamma} K_N$. Como q es continua en (x, a). Podemos calcular el máximo mediante el gradiente.

$$\partial_a q = C_1 \left(1-\gamma\right) a^{-\gamma} - C_2 (1-\gamma) \left(x-a\right)^{-\gamma}.$$

Igualando, $\partial_a q = 0$.

$$\begin{aligned}
C_1 a^{-\gamma} &= C_2 \left(x-a\right)^{-\gamma} \\
\frac{C_1}{C_2} &= \left(\frac{x-a}{a}\right)^{-\gamma} \\
\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} &= \frac{x}{a} - 1 \\
\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} + 1 &= \frac{x}{a} \\
a &= \frac{x}{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} + 1}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$a = h(x) = \frac{x}{(\beta(1+i)^{1-\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} + 1}$$

Definiendo $\eta = \left(\beta(1+i)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + 1$, $\eta - 1 = \left(\beta(1+i)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$
entonces

$$h(x) = \frac{x}{\eta},$$

$$\begin{aligned}
J_{N-1}(x) &= \beta^{N-1} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{1-\gamma} + \beta^N \left((1+i)\left(x - \frac{x}{\eta}\right)\right)^{1-\gamma} \\
&= \beta^{N-1} x^{1-\gamma} \left(\eta^{\gamma-1} + \beta \left(1+i\right)^{1-\gamma} \left(\frac{\eta-1}{\eta}\right)^{1-\gamma}\right) \\
&= \beta^{N-1} x^{1-\gamma} \eta^{\gamma-1} \left(1 + \beta \left(1+i\right)^{1-\gamma} \left(\eta-1\right)^{1-\gamma}\right) \\
&= \beta^{N-1} x^{1-\gamma} \eta^{\gamma-1} \left(1 + \beta \left(1+i\right)^{1-\gamma} \left(\eta-1\right)^{1-\gamma}\right) \\
&= \beta^{N-1} x^{1-\gamma} \eta^{\gamma-1} \left(1 + \beta \left(1+i\right)^{1-\gamma} \left(\left(\beta(1+i)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{1-\gamma}\right) \\
&= \beta^{N-1} x^{1-\gamma} \eta^{\gamma-1} \left(1 + \beta \left(1+i\right)^{1-\gamma} \left(\beta(1+i)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}\right) \\
&= \beta^{N-1} x^{1-\gamma} \eta^{\gamma-1} \left(1 + \beta^{\frac{1}{\gamma}} \left(1+i\right)^{(1-\gamma)\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)+1-\gamma}\right) \\
&= \beta^{N-1} x^{1-\gamma} \eta^{\gamma-1} \left(1 + \beta^{\frac{1}{\gamma}} \left(1+i\right)^{\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)}\right) \\
&= \beta^{N-1} x^{1-\gamma} \eta^{\gamma},
\end{aligned}$$

Entonces

$$K_{N-1} = \eta^{\gamma}, h_{k-1}\left(x\right) = \frac{x}{\left(K_{N-1}\right)^{1/\gamma}}$$

Ahora calculamos J_{N-2}

$$\begin{aligned}
J_{N-2}\left(x\right) &= \max_{a \in A(x)} \left\{\beta^{N-2} a^{1-\gamma} + \beta^{N-1} \left[(1+i)\left(x-a\right)\right]^{1-\gamma} \eta^{\gamma}\right\} \\
&= \max_{a \in A(x)} \left\{q\left(x,a\right)\right\},
\end{aligned}$$

donde

$$q\left(x,a\right) = C_1 a^{1-\gamma} + C_2 \left(x-a\right)^{1-\gamma},$$

con $C_1 = \beta^{N-2}$ y $C_2 = \beta^{N-1}(1+i)^{1-\gamma} K_{N-1}$. Obteniendo, por recursividad

$$\begin{aligned} h_{N-2} &= \frac{x}{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} + 1} \\ &= \frac{x}{\left(\frac{1}{\beta(1+i)^{1-\gamma} K_{N-1}}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} + 1} \\ &= \frac{x}{\left(\beta(1+i)^{1-\gamma} K_{N-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + 1} \end{aligned}$$

Entonces, sea

$$\eta' = \left(\beta(1+i)^{1-\gamma} K_{N-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + 1.$$

Repitiendo, el caso anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} J_{N-2}(x) &= \beta^{N-2} x^{1-\gamma} \eta_{,}^{\gamma-1} \left(1 + K_{N-1}\beta(1+i)^{1-\gamma}\left(\left(\beta(1+i)^{1-\gamma}K_{N-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{1-\gamma}\right) \\ &= \beta^{N-2} x^{1-\gamma} \eta_{,}^{\gamma-1} \left(1 + K_{N-1}\beta(1+i)^{1-\gamma}\left(\left(\beta(1+i)^{1-\gamma}K_{N-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{1-\gamma}\right) \\ &= \beta^{N-2} x^{1-\gamma} \eta_{,}^{\gamma-1} \left(1 + K_{N-1}\beta(1+i)^{1-\gamma}\left(\beta(1+i)^{1-\gamma}K_{N-1}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}\right) \\ &= \beta^{N-2} x^{1-\gamma} \eta_{,}^{\gamma-1} \left(1 + K_{N-1}\beta(1+i)^{1-\gamma}(1+i)^{(1-\gamma)\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} K_{N-1}^{\frac{1}{\gamma}-1}\right) \\ &= \beta^{N-2} x^{1-\gamma} \eta_{,}^{\gamma-1} \left(1 + K_{N-1}\beta^{1/\gamma}(1+i)^{\frac{1}{\gamma}-1} K_{N-1}^{\frac{1}{\gamma}-1}\right) \\ &= \beta^{N-2} x^{1-\gamma} \eta_{,}^{\gamma-1} \left(1 + \beta^{1/\gamma}(1+i)^{\frac{1}{\gamma}-1} K_{N-1}^{\frac{1}{\gamma}}\right) \\ &= \beta^{N-2} x^{1-\gamma} \eta'^{\gamma}, \end{aligned}$$

entonces

$$K_{N-2} = \eta'^{\gamma},$$

y

$$h_{N-2} = \frac{x}{K_{N-2}^{1/\gamma}}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$K_n = \left(\beta(1+i)^{1-\gamma} K_{n+1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + 1, n = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

con $K_N = 1$. Obteniendo así

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \beta^n x^{1-\gamma} K_n \\ h_n(x) &= \frac{x}{K_n^{1/\gamma}} \end{aligned}$$

Capítulo 3

El problma del lago <de Dechert y O'Donnell.

En terminos economicos, los lagos son de vital importancia en una comunidad agrcola. En parte, proveen de agua, peces, zonas recreativas y aumentan la plusvala de complejos residenciales. Por otro lado, son parte medular de la actividad agrcola pues sirven como vertedero de desechos.

Los desechos agrcolas son ricos en fosforo: nutriente principal para hierbas y algas marinas. En consecuencia, arrojar cantidades signicativas de fosforo crea condiciones favorables para el crecimiento y reproduccion de algas. Las algas consumen oxgeno y secretan toxinas, por ello, su sobrepoblacion afecta el desarrollo de peces, haciendo el lago inseguro para usarlo como zona recreativa y al mismo tiempo, deteriora la plusvala de zonas residenciales. En resumen, la descarga de fosforo en un lago, afecta su benecio economico.

En contraste, de forma indirecta, dichas descargas forman parte de la actividad agropecuaria y por consiguiente tambien se relacionan con la utilidad economica. Dechert y O'Donnell plantean un problema de optimizacion estocastica, para calcular la cantidad de fosforo optima a descargar en un lago, que maximice la utilidad generada por la actividad agrcola. En esta seccion se considera la version determinista. Sea x_k el nivel de fosforo en la etapa k del lago y a la correspondiente descarga de fosforo. Empleando una funcion de utilidad usada por ecologistas, Dechert y O'Donell proponen el siguiente problema de optimización descontado

$$\max \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left(\log\left(a_k + \mathrm{eps}\right) - \kappa x_k^2 \right),$$

sujeto a

$$x_{k+1} = b x_k + \frac{x_k^q}{1 + x_k^q} + a,$$

donde el parámetro b representa la fracción de fósforo que queda en el lago de un tiempo k hasta un tiempo $k+1$, el parámetro q está asociado a un punto.

3.1. Planteamiento Pre-Implementación

En este tipo de problemas, lo primero es definir la función de costo, en el caso del lago tenemos que