Capítulo 2

Problema 1: Decisiones de Ahorro

2.1. Planteamiento del problema.

Supongamos que Ricardo ha ganado el premio mayor de la Lotera Nacional y decide meter su dinero al banco que le ofrece una tasa de interes anual i. Al inicio del año k decide retirar a pesos para sus gastos y planea repetir este proceso N veces, es decir, $k = 0, 1, \dots, N\ 1$. Si x_k denota la cantidad de dinero al inicio del año k, entonces la siguiente ecuacion

$$x_{k+1} = (1+i)\left(x_k - a_k\right)$$

describe como va cambiando la fortuna de Ricardo en función de los retiros que haga. Utility theory, una empresa de consultoria, le recomienda a Ricardo que escoja $a_0, \dots, a_{N-1}$ de tal manera que maximice.

$$\beta^N \left(x_N\right)^{1-\gamma} + \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k \left(a_k\right)^{1-\gamma}.$$

La cantidad final x_N será heredada a sus descendientes. Los parámetros $\beta, \gamma \in (0,1)$ fueron estimados por Utility Theory. Usando el APD encontraos que cada función J_k es de la forma $J_k(x) = A_k \beta^k x^{1-\gamma}$, donde $A_N = 1$ y para $k = N-1, \dots, 0$.

$$A_k = \left[1 + \left[(1+i)\,\beta A_{k+1}\right]^{1/\gamma}\right]^{\gamma}$$

2.2. Planteamiento de la Implementación.

Notemos que en nuestro caso $\mathcal{X}, \mathcal{A}$ son espacios finitos. ya que para $x_0 \in \mathcal{X}$ dado solo tomaremos N acciones. En el problema del ahorro $A(x) = [0, x]$, es decir, solo podemos retirar a lo más lo que tenemos en ese momento. Luego, identificamos que la función a maximizar en este caso es

$$R\left(x_0, \pi\right) = \beta^N \left(x_N\right)^{1-\gamma} + \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k \left(a_k\right)^{1-\gamma}$$

$$\beta^N \left(x_N\right)^{1-\gamma} + \sum_{k=0}^{N-1} \beta^k \left(a_k\right)^{1-\gamma}$$

Considerando J_N como sigue

$$J_N(x) = \beta^N x^{1-\gamma},$$

bajo la hipótesis de que

$$c_k(x, a) = \beta^k a^{1-\gamma}$$

calculamos J_{N-1}.

$$\begin{aligned} J_{N-1}(x) &= \max_{a \in A(x)} \left\{c_{N-1}(x,a) + J_N\left((1+i)(x-a)\right)\right\} \\ &= \max_{a \in A(x)} \left\{\beta^{N-1} a^{1-\gamma} + \beta^N \left((1+i)(x-a)\right)^{1-\gamma}\right\} \end{aligned}$$

Definimos el argumento como una función q.

$$\begin{aligned} q(x,a) &= \beta^{N-1} a^{1-\gamma} + \beta^N \left((1+i)(x-a)\right)^{1-\gamma} \\ &= C_1 a^{1-\gamma} + C_2 \left(x-a\right)^{1-\gamma}, \end{aligned}$$

donde $C_1 = \beta^{N-1}$ y $C_2 = \beta^N(1+i)^{1-\gamma}$. Como q es continua en (x,a). Podemos calcular el máximo mediante el gradiente.

$$\partial_a q = C_1\,(1-\gamma)\,a^{-\gamma} - C_2(1-\gamma)\,(x-a)^{-\gamma}\,.$$

Igualando, $\partial_a q = 0$.

$$\begin{aligned}
C_1 a^{-\gamma} &= C_2\,(x-a)^{-\gamma} \\
\frac{C_1}{C_2} &= \left(\frac{x-a}{a}\right)^{-\gamma} \\
\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} &= \frac{x}{a} - 1 \\
\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} + 1 &= \frac{x}{a} \\
a &= \frac{x}{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} + 1}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$a = h(x) = \frac{x}{\left(\beta(1+i)^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + 1}$$