Examen General de Probabilidad

David Peña / Susana Nuñez /

2023-01-09

Table of contents

Examen General de Probabiidad

Libro de Quarto creado como herramienta de estudio para el examen general que será presentado la primera semana de octubre de 2023.

1 Notacion empleada en el libro

2 Examen 2008

2.1 Problema 1

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria. Para todo boreliano $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se define

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{R}[X^{-1}(A)]$$

1. Demuestre que $\mathcal{R}_X$ es una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\}$
2. Demuestre que si $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ es Borel medible, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mathcal{P}_X = \int_{\Omega} (g \circ P) \mathrm{d}P$$

> Caution
>
> Si g es Borel medible, entonces $g^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

2.2 Problema 2

2.3 Problema 3

2.4 Problema 4

2.5 Problema 5

2.6 Problema 6

2.7 Problema 7

2.8 Problema 8

3 Examen 2009

Aqui veremos la solución de los problemas del examen general de 2009.

> **Note**
>
> Todos los espacios y variables aleatorias considerados en este examen se referiran a un espacio de probabilidad.$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

3.1 Problema 1

Demuestre que :

1. Para cualesquiera eventos E y F

$$|\mathcal{P}(E) - \mathcal{P}(F)| \leq \mathcal{P}(E \triangle F)$$

2. Si X y Y son v.a's y $A \in \mathcal{F}$ entonces

$$|\mathcal{P}[X \in A] - \mathcal{P}[Y \in A]| \leq \mathcal{P}[X \neq Y]$$

3.1.1 Solución (1.)

Observemos que $F = (F \cap E) \cup (F \cap E^{\complement})$, donde ambos conjuntos son disjuntos, esto implica que

$$\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(F \cap E) + \mathcal{P}(F \cap E^{\complement}),$$

análogamente para E

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cap F) + \mathcal{P}(E \cap F^{\complement}).$$

Por otro lado

$$\mathcal{P}(E \triangle F) = \mathcal{P}(E \cap F^{\complement} \cup F \cap E^{\complement}),$$

como $E \cap F^{\complement}$ y $F \cap E^{\complement}$ son conjuntos disjuntos entonces

$$\mathcal{P}(E \triangle F) = \mathcal{P}(E \cap F^{\complement}) + \mathcal{P}(F \cap E^{\complement}).$$

Ahora considere

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(F)-\mathcal{P}(E) &= \mathcal{P}\left(F\cap E^{\mathsf{C}}\right)-\mathcal{P}\left(E\cap F^{\mathsf{C}}\right)\\ &\leq \mathcal{P}(E\triangle F),\end{aligned}$$

de forma análoga tenemos que

$$\mathcal{P}(E)-\mathcal{P}(F)\leq \mathcal{P}(E\triangle F).$$

Concluyendo entonces

$$|\mathcal{P}(F)-\mathcal{P}(E)|\leq \mathcal{P}(E\triangle F)$$

3.1.2 Solución (1.2)

3.2 Problema 2

Sean (X_n) una sucesión de v.a's que converge en distribución a X.

1. Demuestre que para todo $\epsilon>0$ existen $\alpha,\beta\in\mathbb{R}, a<\beta$ tal que

$$\mathcal{P}\left[X_n\in[\alpha,\beta]\right]\geq 1-\epsilon, \forall n\in\mathbb{N}$$

2. Sea $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$. Demuestre que si $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en distribución a una v.a Y, entonces

$$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathcal{P}}0$$

3.3 Problema 3

Sea (X_n) una sucesión de v.a's independientes e identicamente distribuidas con distribución uniforme en $(0,1)$. Demuestre que $M_n=\max_{i\leq i\leq n}X_i$ converge en probabilidad cuando $n\to\infty$.

3.4 Problema 4

Suponga que X_n tiene función de densidad $f_n(x)=\frac{n}{\sqrt{x}}\exp\left(-(nx-n-1)^2\right), n=1,2\ldots.$ Demuestre que (X_n) converge en probabilidad a una constante.

3.5 Problema 5

Sea (X_n) una sucesión de v.a's independientes tales que $\mathcal{P}[X_n = 1] = p$ y $\mathcal{P}[X_n = -1] = 1 - p, n = 1, 2, ...,$ con $p \in (0, 1), p \neq 1/2$. Denotemos $S_0 = 0$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n = 1, 2, ...$$

1. Calcular $\mathcal{P}[S_n = 0]$ para $n = 1, 2, ...$
2. Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}[S_n = 0] < \infty$.
3. Calcular $\mathcal{P}[S_n = 0 \text{ i.o}]$

> **Factorial**
>
> Use la formula de Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$

3.6 Problema 6

Tomando (X_n) y (S_n) como en el problema anterior, pero con $p = 1/2$.

1. Verificar que para toda $t \in \mathbb{R}$, $E\left[e^{tX_n}\right] = \cosh(t)$.
2. Deducir que para toda $t \in \mathbb{R}$, $E\left[e^{tX_n}\right] \leq e^{t/2}$

> **Taylor**
>
> Utilice el desarrollo de Taylor de ambos términos de la desigualdad en (1.)

3. Demostrar que para todas $a > 0, n \geq 1$ y $u > 0$ se tiene que

$$\mathcal{P}[S_n > a] \leq \exp\left[n\frac{u^2}{2} - ua\right]$$

4. Demostrar que $\mathcal{P}[S_n > a] \leq e^{-a^2/2n}$ y por lo tanto

$$\mathcal{P}[|S_n| > a] \leq 2\exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$$

5. Sea $c > 1$. Demostrar que, con probabilidad 1, para n suficientemente grande se tiene que $S_n \leq c\sqrt{2n\ln(n)}$

3.7 Problema 7

1. Pruebe que si $X \in L_p$ para algun $p > 0$, entonces

$$\lim_{t \to \infty} t^p \mathcal{P}[|X| > t] = 0$$

2. Pruebe que (1.) implica que $X \in L_p$ para toda $q \in (0, p)$.

Fubini-Tonelli

Use el Teorema de Fubini-Tonelli a $\displaystyle\int_0^\infty t^{q-1} \mathcal{P}[|X| > t] \mathrm{d}t$

3.8 Problema 8

Sean $X, X_1, X_2, ...$ v.a's no negativas tales que $X \in L_1, X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ y $E[X_n] \to E[X]$. Demuestre que $X_n \xrightarrow{L_1} X$

4 Problemas Resnick

En esta parte veremos los problemas planteados del libro Resnick.

References