PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DEL COSTO DESCONTADO. ESTABILIDAD CON RESPECTO A MÉTRICAS DÉBILES

Resumen. Encontramos desigualdades para estimar la estabilidad (robustez) de un problema de optimización del costo descontado para procesos de control de Markov a tiempo discreto sobre un espacio de etapas de Borel. El costo de una etapa se permite ser no acotado. A diferencia de los resultados conocidos en esta área consideraremos una pertubación de las probabilidades de transición medidas por la métrica Kantorovich, cercanamente relacionado con la convergencia débil. Los resultados obtenidos hacen posible estimar la tasa de desaparición del indice de estabilidad cuando la aproximación se hace a través de medidas empiricas.

1. Motivación y establecimiento del problema

Consideremos un problema de control estándar para un proceso de Markov a tiempo discreto (Veasé, por ejemplo, Dynkin and Yushkevich 1997; Hernández-Lerma and Lasserre 1999). El costo total descontado es usado como criterio de optimización.

Suponga, además, que el proceso de control esta dado por las ecuaciones

$$x_t = F\left(x_{t-1}, a_t, \xi_t\right), t = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

donde F es una función medible dada.

$$x_{t-1}, x_t \in X, a_t \in A\left(x_{t-1}\right) \subset A, t \geq 1,$$

y $\xi_1, \xi_2, \ldots$ es una sucesión de vectores aleatorios i.i.d que toman valores en el espacio de Borel S. Denotamos ξ como el vector aleatorio genérico para $\xi_1, \xi_2, \ldots$ El espacio de etapas X y el espacio de acciones A son espacios de Borel, y también para cada estado $x \in X$ el conjunto de acciones admisible $A(x)$ se asume compacto, mientras $\mathbb{K} := \{(x, a) : x \in X, a \in A(x)\}$ es medible en $X \times A$.

El costo por etapa $c(x, a), (x, a) \in \mathbb{K}$ se asume medible. Sea $x \in X$ un estado inicial dado del proceso y π una politica de control seleccionada (Vea, Dynkin and Yushkevich 1997; Hernández-Lerma and Lasserre 1999 para las definiciones). Sea $\alpha \in (0, 1)$ un factor de descuento y E_x^π denota el operador esperanza correspondiente a una probabilidad sobre las trayectorias del proceso cuando usamos la política π con el estado inicial x. El costo total descontado es definido como siempre:

$$V(x, \pi) := E_x^\pi \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{t-1} c\left(x_{t-1}, a_t\right). \tag{1.2}$$

Luego vamos a imponer condiciones para garantizar la finitud del valor de la función:

$$V_*(x) := \inf_{\pi \in \sqcap} V(x, \pi) \quad x \in X, \tag{1.3}$$

y la existencia de una política óptima π_* tal que

$$V\left(x, \pi_*\right) = V_*(x) \text{ for all } x \in X. \tag{1.4}$$

Aquí y luego $\sqcap$ denota la clase de todas las politicas de control.

Para declarar el problema de estabilidad (o robustez) estamos interesafdos en, asumamos que la distribución D_ξ del vector aleatorio ξ es desconocido por el controlador, pero él/ella tiene alguna aproximación $D_{\widetilde{\xi}}$ para D_ξ disponible. Aquí $\widetilde{\xi}$ es un vector aleatorio genérico para una sucesión de vectores aleatorios $\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2, \ldots$ i.i.d con distribución común $D_{\widetilde{\xi}}$. Esta situación es común en las aplicaciones.

Todo esto significa que en lugar del proceso x_t en (1.1) el controlador trata con la aproximación $\widetilde{x}_t$ dada por la siguiente ecuación:

$$\widetilde{x}_t = F\left(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{a}_t, \widetilde{\xi}_t\right),\ t = 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

Asuamos que la única diferencia entre los dos modelos de control mostrados arriba (originados en (1.1) y en (1.5)) radica en la diferente distribuciones de ξ y $\widetilde{\xi}$, donde lo último esta a mano. De este modo en lugar de la inaccesible política óptima π_* (satisfaciendo (1.4)) uno puede intentar usar la polítca óptima $\widetilde{\pi}_*$ para (1.5) como una aproximación para π_*. La política $\widetilde{\pi}_*$ (probando si existe) satisface las siguientes igualdades.

$$\widetilde{V}\left(x, \widetilde{\pi}_*\right) = \widetilde{V}_*\left(x\right) \coloneqq \inf_{\pi \in \sqcap} \widetilde{V}\left(x, \pi\right),\ x \in X, \tag{1.6}$$

donde

$$\widetilde{V}\left(x, \pi\right) \coloneqq E_x^{\pi} \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t-1} c\left(\widetilde{x}_{t-1}, \widetilde{a}_t\right). \tag{1.7}$$

La calidad de tal aproximación es medida por el costo adicional en exceso de V_* en (1.3) es decir, por la cantidad

$$\Delta\left(x\right) \coloneqq V\left(x, \widetilde{\pi}_*\right) - V\left(x, \pi\right) \geq 0, \tag{1.8}$$

esto lo llamaremos indice de estabilidad (vea Gordienko y Salem 1998, Gordienko y Yushkevich 2003).

Como en Gordienko y Salem (1998), Gordienko y Yushkevich 2003 el problema de estimación de la estabilidad se declara como la búsqueda por límites del siguiente tipo para cual nosnotros nos referiremos como desigualdades de estabilidad

$$\Delta\left(x\right) \leq C\left(x\right) \psi\left[\mu\left(D_{\xi}, D_{\widetilde{\xi}}\right)\right],\ x \in X, \tag{1.9}$$

donde $\psi\left(s\right) \to 0$ como $s \to 0$, y μ es una métrica en el espacio de medidas de probabilidad. A pesar de que D_{ξ} se supone desconocida, limites superiores para $\mu\left(D_{\xi}, D_{\widetilde{\xi}}\right)$ a veces pueden ser encontradas. Esto es, por ejemplo, el caso cuando $D_{\widetilde{\xi}} = \widehat{D}\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)$ es la distribución empírica y μ es una adecuada métrica "débil" (es decir, relacioada con la convergencia débil de medidas).

Los resultados en los articulos (Gordienko y Salem 1998,2000; Gordienko y Yushkevich 2003; Montes-de-Oca y Salem-Silva 2005; Montes-de-Oca et al. 2003) proporcionan desigualdades como en (1.9) para $\psi\left(s\right) = s^{\gamma}\ \left(0 < \gamma \leq 1\right)$ con las llamdas "métricas fuertes" tales como

- La métrica de la variación total.
$$\mu\left(D_{\xi}, D_{\widetilde{\xi}}\right) \coloneqq \sup\left\{\left|E\left[\varphi\left(\xi\right) - \varphi\left(\widetilde{\xi}\right)\right]\right| : \|\varphi\|_{\infty} \leq 1\right\}$$
- La métrica de la variación total w-ponderada.
$$\mu_w\left(D_{\xi}, D_{\widetilde{\xi}}\right) \coloneqq \sup\left\{\left|E\left[\varphi\left(\xi\right) - \varphi\left(\widetilde{\xi}\right)\right]\right| : \sup_{s \in S} \frac{\left|\varphi\left(s\right)\right|}{w\left(s\right)} \leq 1\right\}$$

Para resultados relacionados, vea también (Van Dijk 1988; Van Dijk and Sladky 1999). Desafortunadamente los resutados mencionados son inutiles, por ejemplo, cuando usamos la métrica empírica $\widehat{D}\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)$ como la aproximación conocida de D_{ξ}. El objetivo de esté artículo es presentar un conjunto de condiciones sobre los modelos de control bajo consideración que permita probar (1.9) para $\psi\left(s\right) = s$ y cierta metríca de probabilidad débil μ. Por ejemplo, El teorema (2) en la siguiente sección asegura que bajo condiciones apropiadas

$$\Delta\left(x\right) \leq K\left(x\right) \ell\left(D_{\xi}, D_{\widetilde{\xi}}\right),\ x \in X, \tag{1.10}$$

donde

$$\ell\left(D_{\xi}, D_{\widetilde{\xi}}\right) \coloneqq \sup\left\{\left|E\left[\varphi\left(\xi\right) - \varphi\left(\widetilde{\xi}\right)\right]\right| : \varphi \text{ tal que } \left|\varphi\left(s\right) - \varphi\left(s'\right)\right| \leq r\left(s, s'\right),\ s, s' \in S\right\}, \tag{1.11}$$

y r es la métrica en el espacio S.

Esta distancia es conocida como la métrica de Kantorovich. Una sucesión $\ell-$convergente de vectores aleatorios converge débilmente. Esto es bien conocido (vea, por ejemplo Rachev and Rüschendorf 1998) en el caso $S=\mathbb{R}^k$ que $\ell\left(D_\xi, D_{\widetilde{\xi}}\right)\to 0$ si y solo si $\xi_n\Rightarrow\xi$ y $E\left|\xi_n\right|\to E\left|\xi\right|$.

Cuando la métrica empírica $\widehat{D}\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\right)$ son usadas para aproximar la distribución D_ξ sobre $\left(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^k\right)\right)$ vamos a probar que

$$E\Delta\left(x\right)\leq\widetilde{K}\left(x\right)n^{-\delta(k)}\ln n,\ \ n=2,3,\ldots,x\in X \tag{1.12}$$

proporcionando que $Ee^{\gamma|\xi|}<\infty$ para álgun $\gamma>0$. En (1.12) el exponente $\delta\left(k\right)$ se comporta como $1/k$. vale la pena mencionar que existen ejemplos de procesos de control de Markov (vea Gordienko y Salem 1998) con costo total descontado inestable finito con respecto a este criterio. Para tales procesos desigualdades como (1.10) y (1.12) son imposibles.

En la tercera sección de esté artículo daremos dos ejemplos de procesos de control de Markov para cuales las estimaciones (1.10) y (1.12) son válidas. Uno de ellos es un modelo de inventario o un modelo de cola con tasa de servicio controlada por el sistema. El otro es el modelo de optimización de cartera en tiempo discreto. (Korn and Korn 2001)

2. Suposiciones y resultados

Recordemos, X como el espacio de etapas, el espacio de acciones A y el espacio de ruido S (El espacio donde las perturbaciones aleatorias ξ_n toman valores) son todos los subconjuntos de sus espacios métricos respectivos, ellos mismos son espacios métricos con sus correspondientes métricas: $\left(X,\rho\right),\left(A,d\right),\left(S,r\right)$.

La distancia de Hausdorff entre subconjuntos compactos B,C de A esta dado por la expresión

$$h\left(B,C\right)\coloneqq\max_{x\in B}\left\{\sup_{x\in B}d\left(x,C\right),\sup_{y\in C}d\left(y,B\right)\right\}.$$

El primer conjunto de suposiciones técnicas es prestada de Hernández-Lerna y Lasserre (1999) y es necesarian para asegurar la existencia de minimizadores en las ecuaciones de optimalidad correspondientes.

Observación 1. .

1. El conjutno $A\left(x\right)$ es compacto para cada $x\in X$ y el mapeo de valores establecidos $x\mapsto A\left(x\right)$ es semicontinua superior con respecto a la métrica de Haussdorf.

2. La función de costo $c:\mathbb{K}\to\mathbb{R}$ es semicontinua inferior.

3. Para cada función continua acotada $u:X\to\mathbb{R}$ las funciones

$$u'\left(x,a\right)\coloneqq Eu\left[F\left(x,a,\xi\right)\right],$$

y

$$u''\left(x,a\right)\coloneqq Eu\left[F\left(x,a,\xi\right)\right]$$

son continuas en $\mathbb{K}$.

El segundo conjunto de condiciones es usado para proporcionar la existencia de las soluciones para la ecuación de optimalidad y para asegurar algunas propiedades útiles de esa solución. (Vea Gordienko and Salem 1998; Hernández Lerma and Lasserre 1999 y la demostración del Teorema 1 en la sección 4)

Observación 2. *Existe una función $W:X\to[1,\infty)$ tal que*

1.

$$\left|c\left(x,a\right)\right|\leq W\left(x\right),\ \ \textit{para cada}\ \ \left(x,a\right)\in\mathbb{K} \tag{2.1}$$

2. Exise una constante $\beta\in\left(\alpha,1\right)$ tal que

$$EW\left[F\left(x,a,\xi\right)\right]\leq\frac{\beta}{\alpha}W\left(x\right), \tag{2.2}$$

$$EW\left[F\left(x,a,\widetilde{\xi}\right)\right]\leq\frac{\beta}{\alpha}W\left(x\right), \tag{2.3}$$

para cada $(x,a)\in\mathbb{K}$.

3. Las funciones

$$w'(x,a) := EW\left[F(x,a,\xi)\right]$$

y

$$w''(x,a) := EW\left[F\left(x,a,\widetilde{\xi}\right)\right]$$

son continuas en $\mathbb{K}$.

Observación 1. *Es conocido (vea Hernández-Lerna y Lasserre 1999; Van Nunen and Wessels 1978) que las siguientes condiciones sonn suficientes para (2.1)-(2.3).*

Existe uan función continua $W_1 : X \to [1,\infty)$ *y constantes* $\gamma, \overline{c}$ *y* b *tales que*

- $\alpha\gamma < 1$
- .

$$|c(x,a)| \le \overline{c}W_1(x),\ (x,a)\in\mathbb{K} \tag{2.4}$$

- .

$$EW_1\left[F(x,a,\xi)\right] \le \gamma W_1(x) + b \tag{2.5}$$

- .

$$EW_1\left[F\left(x,a,\widetilde{\xi}\right)\right] \le \gamma W_1(x) + b.\ (x,a)\in\mathbb{K} \tag{2.6}$$

Denotaremos por B_w el espacio de Banach de todas las funciones medibles $u : X \to \mathbb{R}$ para las cuales

$$\|u\|_w = \sup_{x\in X}\frac{|u(x)|}{W(x)}$$

es finita.

De Hernández-Lerma y Lasserre (1999), p. 47, Teorema 8.3.6, sigue que bajo las suposiciones (1) y (2) para ambos procesos de control (1.1) y (1.5) existe su política estacionaria óptima respectiva.

$$\pi_* = \{f_*, f_*, \ldots\}, a_t = f_*(x_{t-1}), t\ge 1;$$
$$\widetilde{\pi}_* = \left\{\widetilde{f}_*, \widetilde{f}_*, \ldots\right\}, a_t = \widetilde{f}_*(\widetilde{x}_{t-1}), t\ge 1;$$

con su valores de función $V_*(x) = V(x,\pi_*)\in B_w$ y $\widetilde{V_*}(x) = \tilde{V}(x,\widetilde{\pi}_*)\in B_w$ semicontinua inferior correspondiente, y sus esperanzas $EV_*\left[F(x,a,\xi)\right], EV_*\left[F\left(x,a,\widetilde{\xi}\right)\right]$ existe para toda $(x,a)\in\mathbb{K}$. Denotamos por M al conjunto de todas las distribuciones de ξ y $\widetilde{\xi}$ para la cual las esperanzas de arriba existen para toda $(x,a)\in\mathbb{K}$. Definiremos la siguiente pseudo-métrica μ en M.

$$\mu\left(D_\xi, D_{\widetilde{\xi}}\right) := \sup\left\{\left|EV_*\left[F(x,a,\xi)\right] - EV_*\left[F\left(x,a,\widetilde{\xi}\right)\right]\right| : (x,a)\in\mathbb{K}\right\} \tag{2.7}$$

Esta pseudo-métrica toma valores en $[0,\infty]$. También $\mu\left(D_\xi, D_{\widetilde{\xi}}\right)$ podría ser cero para distribuciones no idénticas $D_\xi, D_{\widetilde{\xi}}$.

Teorema 1. *Bajo las suposiciones (1) y (2) tenemos:*

$$\Delta(x) \le 2\alpha\left[(1-\alpha)^{-1} + \alpha(1-\beta)^{-2}W(x)\right]\mu\left(D_\xi, D_{\widetilde{\xi}}\right), x\in X. \tag{2.8}$$

Demostración. Simplificando la notación de sección (2) sea $\pi = \{f,f,\ldots\}, \widetilde{\pi} = \left\{\widetilde{f},\widetilde{f},\ldots\right\}$ las políticas estacionarias óptimas para los procesos (1.1) y (1.5), respectivamente, y $V_*, \widetilde{V}_*$ sean las funciones de valor correspondientes. (Vea (1.3) y (1.6)).

Entonces (vea Hernández-Lerma y Lasserre 1999, Cap. 8) $V_*, \widetilde{V}_*$ y $f, \widetilde{f}$ satisfacen las siguientes ecuaciones de optimalidad. (Además, V_* y $\widetilde{V}_*$ son las únicas soluciones para estas ecuaciones)

$$\begin{aligned} V_*(x) &= \inf_{a\in A(x)} \{c(x,a) + \alpha E V_*[F(x,a,\xi)]\} \\ &= \inf_{a\in A(x)} \{c(x,f(x)) + \alpha E V_*[F(x,f(x),\xi)]\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_*(x) &= \inf_{a\in A(x)} \left\{c(x,a) + \alpha E \widetilde{V}_*\left[F\left(x,a,\widetilde{\xi}\right)\right]\right\} \\ &= \inf_{a\in A(x)} \left\{c\left(x,\widetilde{f}(x)\right) + \alpha E \widetilde{V}_*\left[F\left(x,\widetilde{f}(x),\widetilde{\xi}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para $(x,a)\in\mathbb{K}$ definimos

$$\begin{aligned} H(x,a) &\coloneqq c(x,a) + \alpha E V_*[F(x,a,\xi)] \\ \widetilde{H}(x,a) &\coloneqq c(x,a) + \alpha E \widetilde{V}_*\left[F\left(x,a,\widetilde{\xi}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.11}$$

y sea $\Gamma_t = \{x,a_1,x_1,a_2,\ldots,x_{t-1},a_t\}, (t\geq 1)$ la parte de una trayectoria del proceso (1.1) bajo la política de control $\widetilde{\pi} = \left\{\widetilde{f},\widetilde{f},\ldots\right\}$, por la propiedad de Markov del proceso.

$$\begin{aligned} \zeta_t &\coloneqq E^{\widetilde{\pi}}\left[\alpha V_*(x_t) \mid \Gamma_t\right] \\ &= H(x_{t-1},a_t) - c(x_{t-1},a_t) - \inf_{a\in A(x_{t-1})} H(x_{t-1},a) + \inf_{a\in A(x_{t-1})} H(x_{t-1},a). \end{aligned}$$

En vista de (2.9) y (2.11) obtenemos:

$$\begin{aligned} \zeta_t &= H(x_{t-1},a_t) - \inf_{a\in A(x_{t-1})} H(x_{t-1},a) - c(x_{t-1},a_t) + V_*(x_{t-1}) \\ &= \Lambda_t - c(x_{t-1},a_t) + V_*(x_{t-1}), \end{aligned}$$

donde

$$\Lambda_t \coloneqq H(x_{t-1},a_t) - \inf_{a\in A(x_{t-1})} H(x_{t-1},a). \tag{2.12}$$

De este modo

$$\begin{aligned} E_x^{\widetilde{\pi}} \alpha V_*(x_t) &= E_x^{\widetilde{\pi}} \zeta_t \\ &= E_x^{\widetilde{\pi}} \Lambda_t - E_x^{\widetilde{\pi}} c(x_{t-1},a_t) + E_x^{\widetilde{\pi}} V_*(x_{t-1}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Sumando (2.13) con los pesos α^{t-1}.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^{t-1} E_x^{\widetilde{\pi}} c(x_{t-1},a_t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{t-1}\left[E_x^{\widetilde{\pi}} V_*(x_{t-1}) - E_x^{\widetilde{\pi}} \alpha V_*(x_t)\right] + \sum_{i=1}^{n} \alpha^{t-1} E_x^{\widetilde{\pi}} \Lambda_t,$$

o

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^{t-1} E_x^{\widetilde{\pi}} c(x_{t-1},a_t) - V_*(x) = -\alpha^n E_x^{\widetilde{\pi}} V_*(x_{t-1}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha^{t-1} E_x^{\widetilde{\pi}} \Lambda_t. \tag{2.14}$$

Desde $V^* \in B_w$ de la suposición (2) se sigue (vea Hernández-Lerma y Lasserre 1999, p. 52) que $\lim_{n\to\infty} \alpha^n E_x^{\widetilde{\pi}} V_*(x_n) = 0$

Por lo tanto, pasando el límite con $n\to\infty$ en (2.14) obtenemos (vea (1.8))

$$\Delta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{t-1} E_x^{\widetilde{\pi}} c(x_{t-1},a_t) - V_*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{t-1} E_x^{\widetilde{\pi}} \Lambda_t \tag{2.15}$$

Por la definición de Λ_t en (2.12) y por (2.10) obtenemos lo siguiente

$$\Lambda_t = H(x_{t-1},a_t) - \widetilde{H}(x_{t-1},a_t) + \inf_{a\in A(x_{t-1})} \widetilde{H}(x_{t-1},a) - \inf_{a\in A(x_{t-1})} H(x_{t-1},a),$$

De este modo,

$$\begin{aligned}|\Lambda_t| &\leq 2 \sup_{a\in A(x_{t-1})} \left| H\left(x_{t-1},a\right) - \widetilde{H}\left(x_{t-1},a\right)\right| \\ &\leq 2\alpha \sup_{a\in A(x_{t-1})} \left| EV_*\left[F\left(x_{t-1},a,\xi\right)\right] - E\widetilde{V}_*\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right]\right|,\end{aligned} \tag{2.16}$$

donde la esperanza del último término es tomada con respecto a los vectores aleatorios $\xi, \widetilde{\xi}$ con x_{t-1} fijo. De la última desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned}|\Lambda_t| \leq{}& 2\alpha \sup_{a\in A(x_{t-1})} \left| EV_*\left[F\left(x_{t-1},a,\xi\right)\right] - EV_*\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right]\right| \\ &+ 2\alpha \sup_{a\in A(x_{t-1})} \left| EV_*\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right] - E\widetilde{V}_*\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right]\right|\end{aligned} \tag{2.17}$$

En vista de (2.7) el primer sumando del lado derecho de (2.17) esta acotado por $2\alpha\mu$, donde denotamos $\mu := \mu\left(D_\xi, D_{\widetilde{\xi}}\right)$. El segundo sumando es menor que

$$\begin{aligned}&2\alpha \sup_{a\in A(x_{t-1})} E\left[\frac{W\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right]}{W\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right]}\left|V_*\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right] - \widetilde{V}_*\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right]\right|\right] \\ &\leq 2\alpha \|V_* - \widetilde{V}_*\|_w \sup_{a\in A(x_{t-1})} EW\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.18}$$

Necesitamos acotar el promedio del último factor de (2.18). Usando la notación $E_{\widetilde{\xi}}$ en lugar de E y la desigualdad (2.3) obtenemos para cada x_{t-1}

$$\begin{aligned}EW\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right] \equiv E_{\widetilde{\xi}}W\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right] &\leq \frac{\beta}{\alpha}E_x^{\widetilde{\pi}}W\left(x_{t-1}\right) \\ &= \frac{\beta}{\alpha}E_x^{\widetilde{\pi}}W\left[F\left(x_{t-2},a_{t-1},\xi_{t-1}\right)\right] \\ &= \frac{\beta}{\alpha}E_x^{\widetilde{\pi}}\left\{E_x^{\widetilde{\pi}}W\left[F\left(x_{t-2},a_{t-1},\xi_{t-1}\right)\right] \mid \Gamma_{t-1}\right\} \\ &\leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 E_x^{\widetilde{\pi}}\left\{W\left(x_{t-2}\right) \mid \Gamma_{t-1}\right\} \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 E_x^{\widetilde{\pi}}\left\{W\left(x_{t-3},a_{t-2},\xi_{t-2}\right) \mid \Gamma_{t-1}\right\} \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 E_x^{\widetilde{\pi}}W\left(x_{t-3},a_{t-2},\xi_{t-2}\right).\end{aligned}$$

Procediendo de forma inductiva obtenemos las desigualdades

$$E_x^{\widetilde{\pi}} \sup_{a\in A(x_{t-1})} E_{\widetilde{\xi}}W\left[F\left(x_{t-1},a,\widetilde{\xi}\right)\right] \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{t-1} W\left(x\right),\ t=1,2,\ldots \tag{2.19}$$

En Gordienko y Salem (1998), Hernández-Lerma and Lasserre (1999) fue probaod que los siguientes operadores.

$$Tu\left(x\right) := \inf_{a\in A(x)}\left\{c\left(x,a\right) + aEu\left[F\left(x,a,\xi\right)\right]\right\}$$
$$\widetilde{T}u\left(x\right) := \inf_{a\in A(x)}\left\{c\left(x,a\right) + aEu\left[F\left(x,a,\widetilde{\xi}\right)\right]\right\},$$

son contractivas en B_w con módulo β. Como V_* y $\widetilde{V}_*$ son puntos fijos para esos operadores obtenemos

$$\|V_* - \widetilde{V}_*\|_w = \|TV_* - \widetilde{T}V_*\|_w + \|\widetilde{T}V_* - \widetilde{T}\widetilde{V}_*\|_w,$$

esto implica que

$$\begin{aligned}\|V_* - \widetilde{V}_*\|_w &\leq \frac{1}{1-\beta}\|TV_* - \widetilde{T}V_*\|_w \\ &\leq \frac{\alpha}{1-\beta}\sup_{x\in X} W^{-1}(x) \\ &\sup_{a\in A(x)}\left|EV_*\left[F(x,a,\xi)\right] - EV_*\left[F\left(x,a,\widetilde{\xi}\right)\right]\right| \leq \frac{\alpha}{1-\beta}\mu\end{aligned} \tag{2.20}$$

Combinando las desigualdades 2.17-2.20 obtenemos

$$E_x^{\widetilde{\pi}}\left|\Lambda_t\right| \leq 2\alpha\left[1+\frac{\alpha}{1-\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{t-1}W(x)\right]\mu$$

y finalmente en vista de 2.15 recibimos la desigualdad 2.8. □

Nuestro siguiente paso is acotar la pseudo-métrica μ por un métrica de probabilidad débil relevante.

Observación 3. *Existe una constante L_0 y una función medible $L_1 : S \to [0,\infty)$ tal que:*

1. $|c(x,a) - c(y,a)| \leq L\rho(x,y)$ *for all* $(x,a),(y,a) \in \mathbb{K}$.
2. $\rho\left[F(x,a,\xi), F(y,a,\xi)\right] \leq L_1(\xi)\rho(x,y)$ *for all* $(x,a),(y,a)\in\mathbb{K}$ *y* $L_1 \coloneqq EL_1(\xi) \leq 1$.
3. *A es compacto y $A(x) = A$ para todo $x \in X$.*

Teorema 2. *Bajo las suposiciones $1-3$ obtenemos*

$$\Delta(x) \leq 2\alpha\frac{L_0}{1-\alpha L_1}\left[\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\alpha}{(1-\beta)^2}W(x)\right]\ell\left(D_\xi, D_{\widetilde{\xi}}\right),\ x\in X. \tag{2.21}$$

Demostración. En vista de la definición (2.3) de la métrica de Kantorovich ℓ y la definición (2.7) de la métrica μ, la desigualdad (2) seguiría de (2.8) si estableemos que para cada $(x,a)\in\mathbb{K}$ la función

$$\varphi(\cdot) \coloneqq V_*\left[F(x,a,\cdot)\right] : S \to \mathbb{R},$$

satisface la condición de Lipschitz con constante $\dfrac{L_0}{1+\alpha L_1}$ (vea (3) para la definción de L_0 y L_1).

Sea $V_0 \coloneqq 0$ y para cada $n = 1,2,\ldots$

$$V_n(x) \coloneqq \inf_{a\in A}\left\{c(x,a) + \alpha EV_{n-1}\left[F(x,a,\xi)\right]\right\},\ x\in X$$

Como esta mostrado en Hernández-Lerma y Lasserre (1999), p. 47 para cada $x\in X$ $V_n(x)\to V_*(x)$ cuando $n\to\infty$. Por la suposición (3), punto 1 y 3 obtenemos que $V_1 \in Lip(L_0)$ (Es decir, satisface la condición de Lipschitz con la constante L_0). Aplicando la suposición 3 punto 2 obtenemos

$$\begin{aligned}|V_2(x) - V_2(y)| &\leq \sup_{a\in A}\left\{|c(x,a)-c(y,a)| + \alpha\left|EV_1\left[F(x,a,\xi)\right] - EV_1\left[F(y,a,\xi)\right]\right|\right\} \\ &\leq L_0\rho(x,y) + \alpha\sup_{a\in A} EL_0\rho\left[F(x,a,\xi),F(y,a,\xi)\right] \\ &\leq L_0(1+\alpha L_1)\rho(x,y),\ x,y\in X\end{aligned}$$

Por indución establecemos que $V_n \in Lip\left(\dfrac{L_0}{1-\alpha L_1}\right), n = 1,2,\ldots$ y de este modo

$$V_* \in Lip\left(\frac{L_0}{1-\alpha L_1}\right)$$

□

Observación 2. *Para $S = \mathbb{R}$.*

$$\ell\left(D_\xi, D_{\widetilde{\xi}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left|F_\xi(x) - F_{\widetilde{\xi}}(x)\right|\mathrm{d}x,$$

donde $F_\xi, F_{\widetilde{\xi}}$ son las funciones de distribución correspondientes (vea Rachev y Rüschendorf 1998).

Consideremos la aproximación de $D_{\widetilde{\xi}}$ *por medidas empíricas. Sea* $n \geq 1$ *fijo,* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *vectores aleatorios i.i.d con distribución* D_ξ *y*

$$\widehat{D}_n = \widehat{D}\left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right) \coloneqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{\xi_i},$$

sea la medida empírica (esto es una medida aleatoria en $(S, \mathcal{B}(S))$*). Denotamos por* $\widetilde{\xi}^{(n)}$ *un vector aleatorio con distribución* $\widehat{D}_n$ *y sea* $\widetilde{\xi}_t^{(n)}, t = 1, 2, \ldots$ *copias independientes de* $\widetilde{\xi}^{(n)}$*.*

Supongamos que $\widetilde{\xi}^{(n)} \equiv \widetilde{\xi}_t, t = 1, 2, \ldots$ *en el proceso de aproximación (1.5). Entonces el indice de estabilidad (1.8) es aleatorio. Para evitar problemas de medibilidad la esperanza tomada en (2.22) y (2.23) a continuación puede tratarse como una integral externa como se define en Van Der Vaart y Wellner (1996).*

Corolario 1.

$$E\Delta\left(x\right) \leq K\left(x\right) n^{-\delta(\epsilon, k)} \ln n,\ \ n = 2, 3, \ldots, x \in X \tag{2.22}$$

Proposición 1. *s*

$$E \sup_{\varphi \in Lip} \left| E\varphi\left(\xi\right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\xi_i\right) \right| \leq M n^{-\delta(\epsilon, k)} \ln\left(n\right),\ \ n = 2, 3, \ldots, \tag{2.23}$$