

stochacalculus

David Peña Peralta

2025-01-11

Table of contents

1 Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	3
2 Tarea 1	4
3 Tarea 2	16
4 Tarea 3	19
5 Ejercicio 3.1	20
6 Ejercicio 3.2	22
7 Ejercicio 3.3	24
8 Ejercicio 3.4	25
9 Ejercicio 3.5	26
10 Ejercicio 3.6 (Ley de los grandes números)	27
11 Ejercicio 3.7 (Teorema de Limite Central)	28
12 Ejercicio 3.8	31
13 Tarea 4	33
13.0.1 Demostración	33
13.0.2 Por lo tanto, V es un movimiento browniano.	34
14 Tarea 5	38
15 Tarea 6	46
18 Muestre que X_t es una martingala local.	52
18.0.1 Muestre que $E X_t < \infty$ para cada $t > 0$	52
18.0.2 Muestre que X_t no es una martingala.	53
References	56

1 Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Ahora, vamos

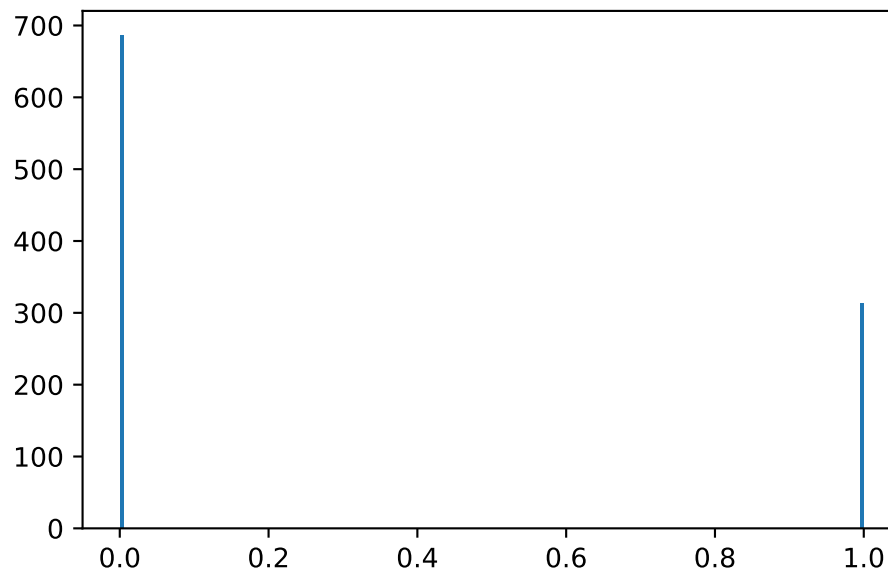
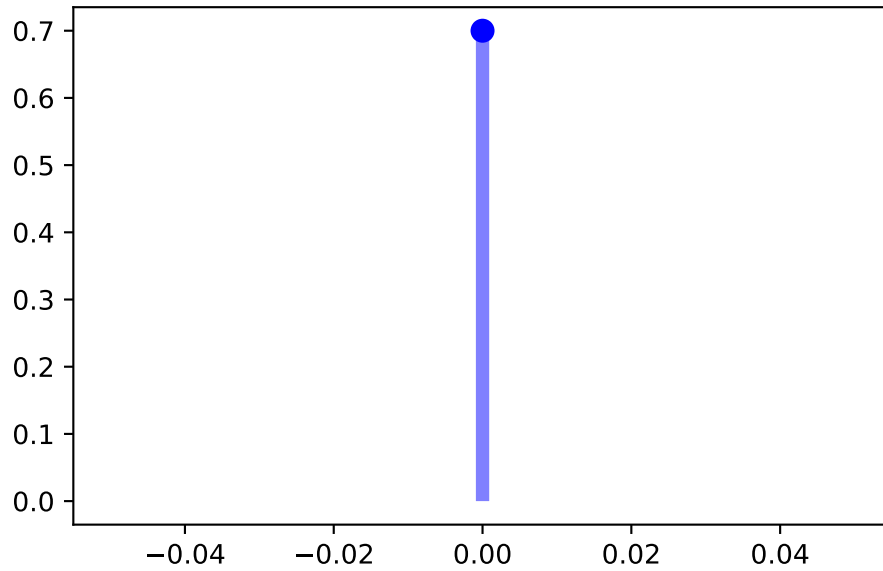
2 Tarea 1

Ejecute y explica en pocas palabras la salida del código ex_001.py

```
from scipy.stats import multivariate_normal
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.stats import norm
import numpy as np
from scipy.stats import bernoulli
import matplotlib.pyplot as plt
fig_01, ax_01 = plt.subplots(1, 1)
fig_02, ax_02 = plt.subplots(1, 1)
p = 0.3
mean, var, skew, kurt = bernoulli.stats(p, moments='mvsk')
print(mean, var, skew, kurt)

x = np.arange(bernoulli.ppf(0.01, p), bernoulli.ppf(0.99, p))
ax_01.plot(x, bernoulli.pmf(x, p), 'bo', ms=8, label='bernoulli pmf')
ax_01.vlines(x, 0, bernoulli.pmf(x, p), colors='b', lw=5, alpha=0.5)
r = bernoulli.rvs(p, size=1000)
ax_02.hist(r, bins=200)
plt.show()
```

0.3 0.21 0.8728715609439694 -1.2380952380952381



El código posee 3 salidas: * Un vector $[0.3, 0.21, 0.87, -1.23]$ * Dos gráficas.

El vector hace referencia a los momentos de la distribución bernoulli con parámetro $p = 0.3$.
 * mean hace referencia a la media. * var hace referencia a la varianza. * skew hace referencia al sesgo. * kurt hace referencia a la kurtosis.

Finalmente, las dos gráficas: * La primera hace referencia a la función de probabilidad. Notemos que $\mathcal{P}[X = 0] = 0.7$, lo que muestra la gráfica. Notemos que la gráfica va de -0.04 a 0.04, por lo tanto no se iba a mostrar el caso $X = 1$.

* La segunda hace referencia a una simulación: Se generaron una muestra de tamaño N variables aleatorias con distribución bernoulli. Como la distribución bernoulli tiene media Np , pretende mostrar que en efecto, habrá de forma aproximada Np valores igual a 1 y $N(1 - p)$ valores igual a 0.

Ejecute y explica en pocas palabras la salida del código ex_002.py

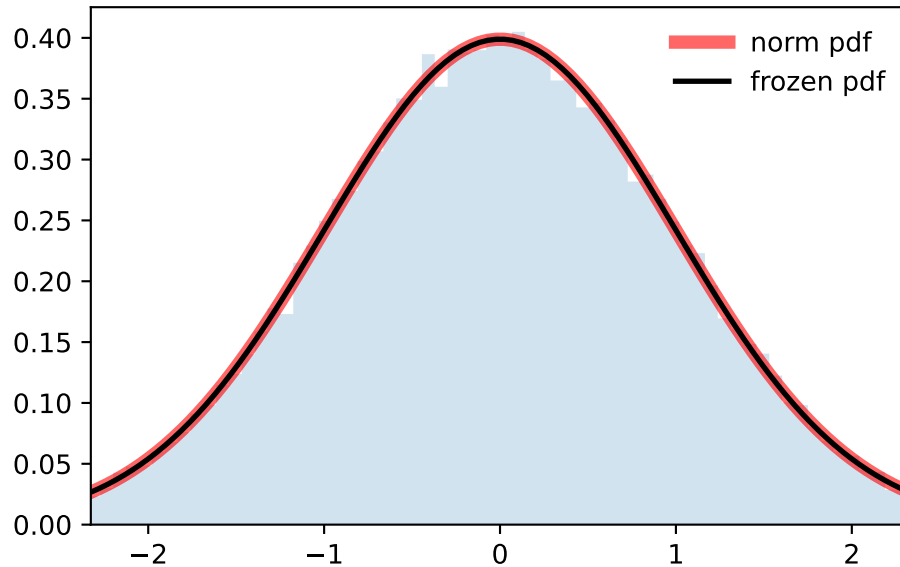
```
fig, ax = plt.subplots(1, 1)
mean, var, skew, kurt = norm.stats(moments='mvsk')

x = np.linspace(norm.ppf(0.01), norm.ppf(0.99), 100)
ax.plot(
    x,
    norm.pdf(x),
    'r-',
    lw=5,
    alpha=0.6,
    label='norm pdf'
)
rv = norm()
ax.plot(x, rv.pdf(x), 'k-', lw=2, label='frozen pdf')
vals = norm.ppf([0.001, 0.5, 0.999])

np.allclose([0.001, 0.5, 0.999], norm.cdf(vals))

r = norm.rvs(size=50000)

ax.hist(r, density=True, bins='auto', histtype='stepfilled', alpha=0.2)
ax.set_xlim([x[0], x[-1]])
ax.legend(loc='best', frameon=False)
plt.show()
```



El código posee una gráfica. Que hace referencia a una simulación de variables aleatorias normales. Notemos que * El elemento en azul, hace referencia a un histograma que refleja las frecuencias de los valores generados. * Mientras que la línea roja, muestra la función de densidad de una variable aleatoria estándar.

Ejecute y explica en pocas palabras la salida del código `ex_003.py`

Para cambiar el vector de medias μ y la matriz Σ hay que prestar atención en la línea donde aparece la función `multivariate_normal()` que de forma simple posee dos parámetros: * El vector de medias $\mu = [0.5, -0.2]$ * La matriz de covarianza $\Sigma = [[2.0, 0.3], [0.3, 0.5]]$

```
x = np.linspace(0, 5, 100, endpoint=False)
y = multivariate_normal.pdf(x, mean=2.5, cov=0.5)

fig1 = plt.figure()
ax = fig1.add_subplot(111)
ax.plot(x, y)
# plt.show()

x, y = np.mgrid[-5:5:.1, -5:5:.1]
pos = np.dstack((x, y))
rv = multivariate_normal([0.1, 0.5], [[3.0, 0.3], [0.75, 1.5]])
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x, y, rv.pdf(pos))
```

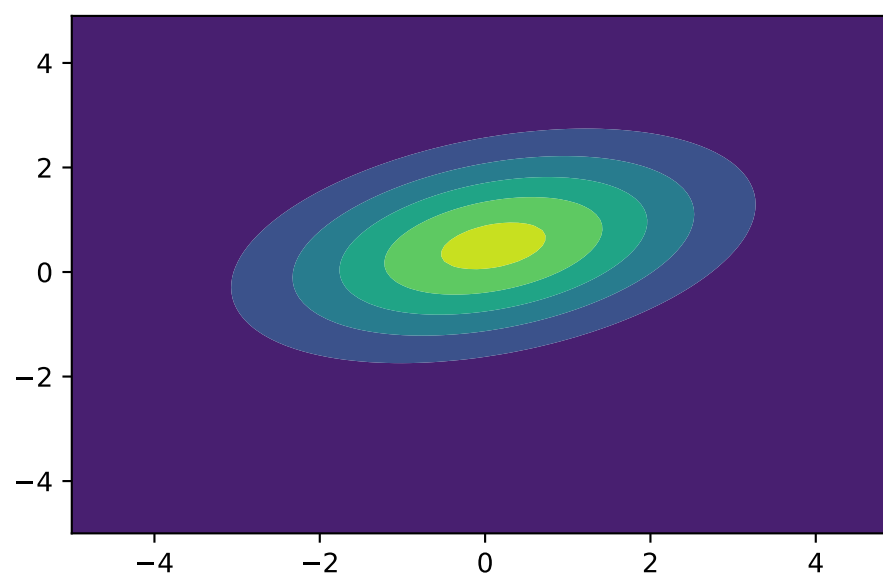
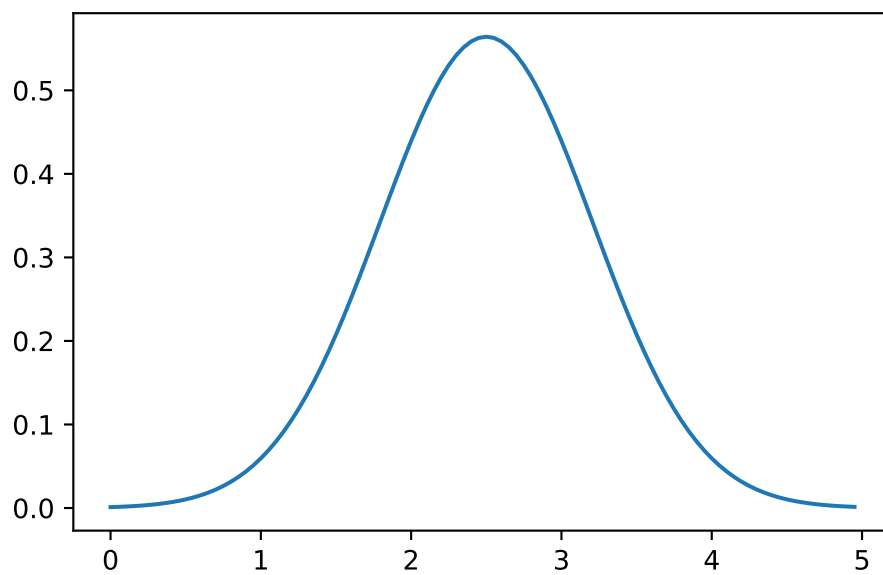
```

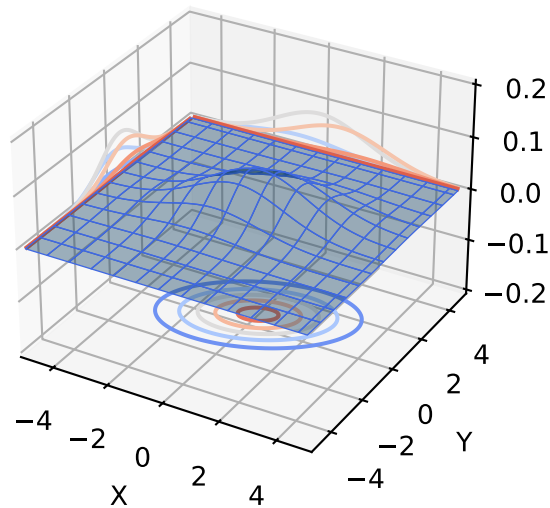
# plt.show()

ax = plt.figure().add_subplot(projection='3d')
ax.plot_surface(
    x,
    y,
    rv.pdf(pos),
    edgecolor='royalblue',
    lw=0.5,
    rstride=8,
    cstride=8,
    alpha=0.4
)
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='z', offset=-.2, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='x', offset=-5, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='y', offset=5, cmap='coolwarm')

ax.set(
    xlim=(-5, 5),
    ylim=(-5, 5),
    zlim=(-0.2, 0.2),
    xlabel='X',
    ylabel='Y',
    zlabel='Z'
)
plt.show()

```



Generando Normales

```
import numpy as np
from scipy.stats import bernoulli
import matplotlib.pyplot as plt

fig_01, ax_01 = plt.subplots(1, 1)
fig_02, ax_02 = plt.subplots(1, 1)

p = 0.3

x = np.arange(bernoulli.ppf(0.01, p), bernoulli.ppf(0.99, p))
ax_01.plot(x, bernoulli.pmf(x, p), 'bo', ms = 8, label = 'bernoulli pmf')
ax_01.vlines(x, 0, bernoulli.pmf(x, p), colors = 'b', lw = 5, alpha = 0.5)

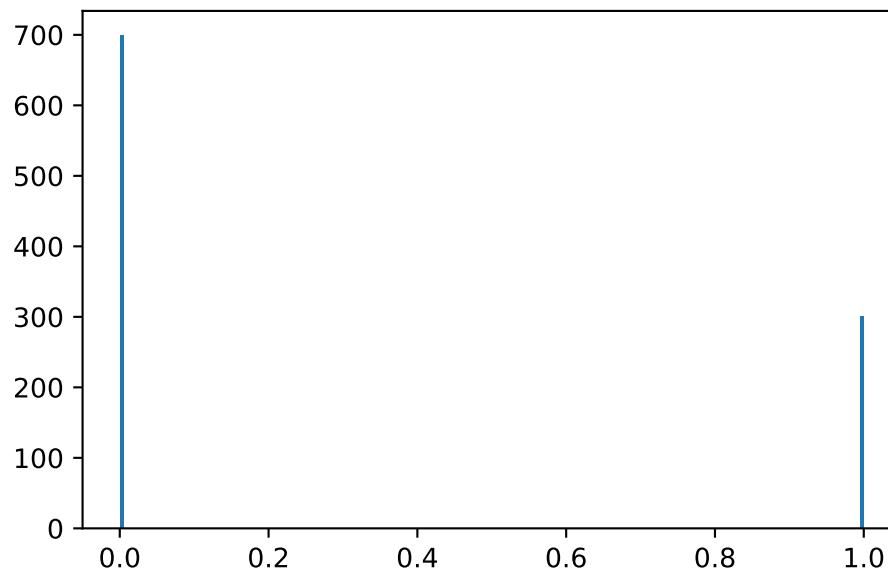
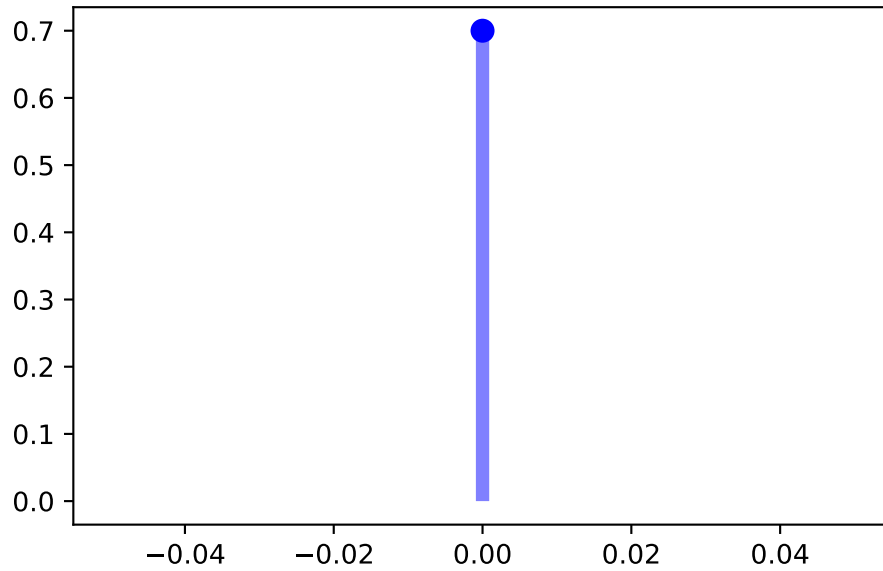
r = bernoulli.rvs(p, size = 1000)
ax_02.hist(r, bins = 200)
```

```
(array([699., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
        0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
        0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
        0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
        0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
        0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
```

```

0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 301.]),
array([0.    , 0.005, 0.01 , 0.015, 0.02 , 0.025, 0.03 , 0.035, 0.04 ,
0.045, 0.05 , 0.055, 0.06 , 0.065, 0.07 , 0.075, 0.08 , 0.085,
0.09 , 0.095, 0.1  , 0.105, 0.11 , 0.115, 0.12 , 0.125, 0.13 ,
0.135, 0.14 , 0.145, 0.15 , 0.155, 0.16 , 0.165, 0.17 , 0.175,
0.18 , 0.185, 0.19 , 0.195, 0.2  , 0.205, 0.21 , 0.215, 0.22 ,
0.225, 0.23 , 0.235, 0.24 , 0.245, 0.25 , 0.255, 0.26 , 0.265,
0.27 , 0.275, 0.28 , 0.285, 0.29 , 0.295, 0.3  , 0.305, 0.31 ,
0.315, 0.32 , 0.325, 0.33 , 0.335, 0.34 , 0.345, 0.35 , 0.355,
0.36 , 0.365, 0.37 , 0.375, 0.38 , 0.385, 0.39 , 0.395, 0.4  ,
0.405, 0.41 , 0.415, 0.42 , 0.425, 0.43 , 0.435, 0.44 , 0.445,
0.45 , 0.455, 0.46 , 0.465, 0.47 , 0.475, 0.48 , 0.485, 0.49 ,
0.495, 0.5  , 0.505, 0.51 , 0.515, 0.52 , 0.525, 0.53 , 0.535,
0.54 , 0.545, 0.55 , 0.555, 0.56 , 0.565, 0.57 , 0.575, 0.58 ,
0.585, 0.59 , 0.595, 0.6  , 0.605, 0.61 , 0.615, 0.62 , 0.625,
0.63 , 0.635, 0.64 , 0.645, 0.65 , 0.655, 0.66 , 0.665, 0.67 ,
0.675, 0.68 , 0.685, 0.69 , 0.695, 0.7  , 0.705, 0.71 , 0.715,
0.72 , 0.725, 0.73 , 0.735, 0.74 , 0.745, 0.75 , 0.755, 0.76 ,
0.765, 0.77 , 0.775, 0.78 , 0.785, 0.79 , 0.795, 0.8  , 0.805,
0.81 , 0.815, 0.82 , 0.825, 0.83 , 0.835, 0.84 , 0.845, 0.85 ,
0.855, 0.86 , 0.865, 0.87 , 0.875, 0.88 , 0.885, 0.89 , 0.895,
0.9  , 0.905, 0.91 , 0.915, 0.92 , 0.925, 0.93 , 0.935, 0.94 ,
0.945, 0.95 , 0.955, 0.96 , 0.965, 0.97 , 0.975, 0.98 , 0.985,
0.99 , 0.995, 1.    ]),
<BarContainer object of 200 artists>)

```



```
from scipy.stats import norm

fig, ax = plt.subplots(1,1)

x = np.linspace(norm.ppf(0.01),norm.ppf(0.99), 100)
```

```

ax.plot(x, norm.pdf(x), 'r-', lw = 5, alpha = 0.6)

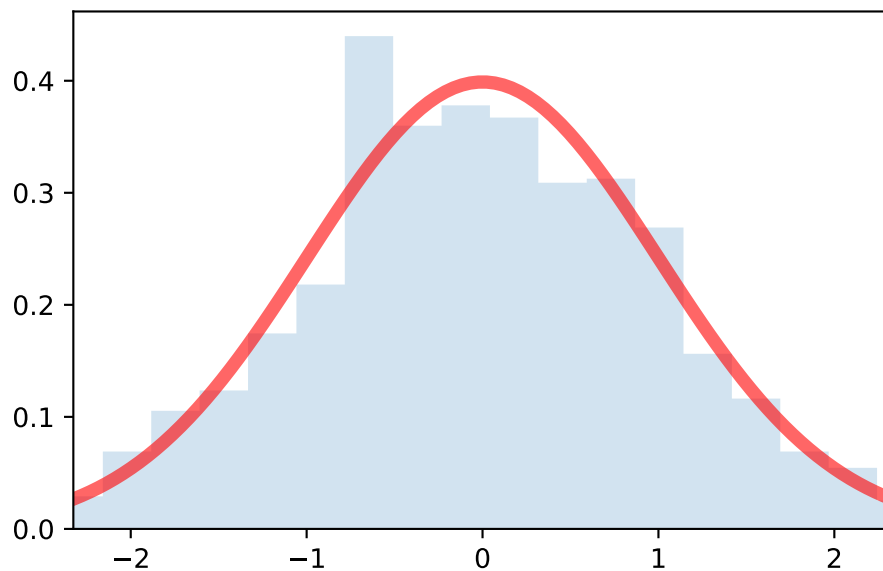
r = norm.rvs(size = 1000)

ax.hist(r, density = True, bins = 'auto', histtype = 'stepfilled', alpha = 0.2)
ax.set_xlim(x[0], x[-1])
ax.legend(loc='best', frameon = False)

```

No artists with labels found to put in legend. Note that artists whose label start with an

<matplotlib.legend.Legend at 0x1926cc63fd0>



```

from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.stats import multivariate_normal

x = np.linspace(0,5,100,endpoint = False)
y = multivariate_normal.pdf(x , mean = 2.5, cov = 0.5)

fig1 = plt.figure()
ax = fig1.add_subplot(111)
ax.plot(x,y)

```

```

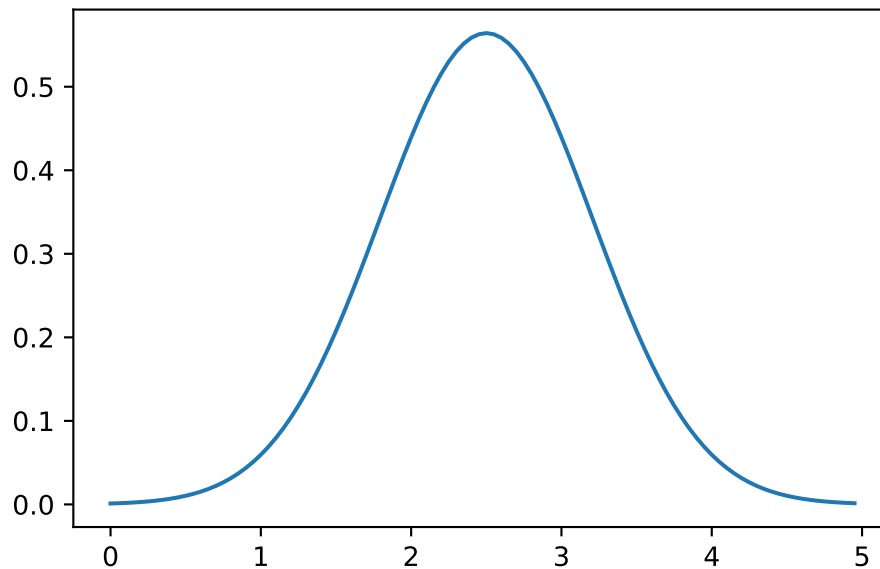
x, y = np.mgrid[-5:5:.1, -5:5:.1]

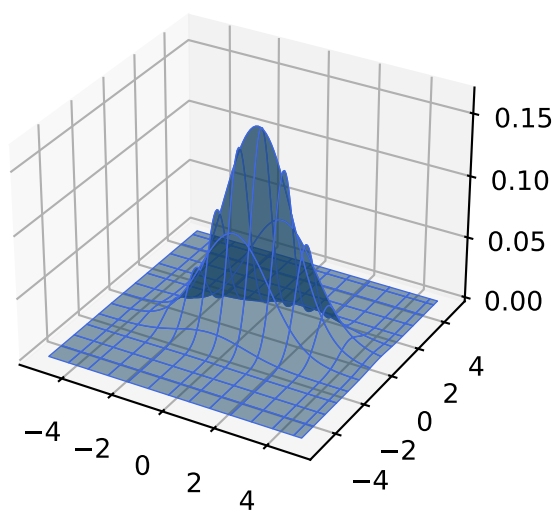
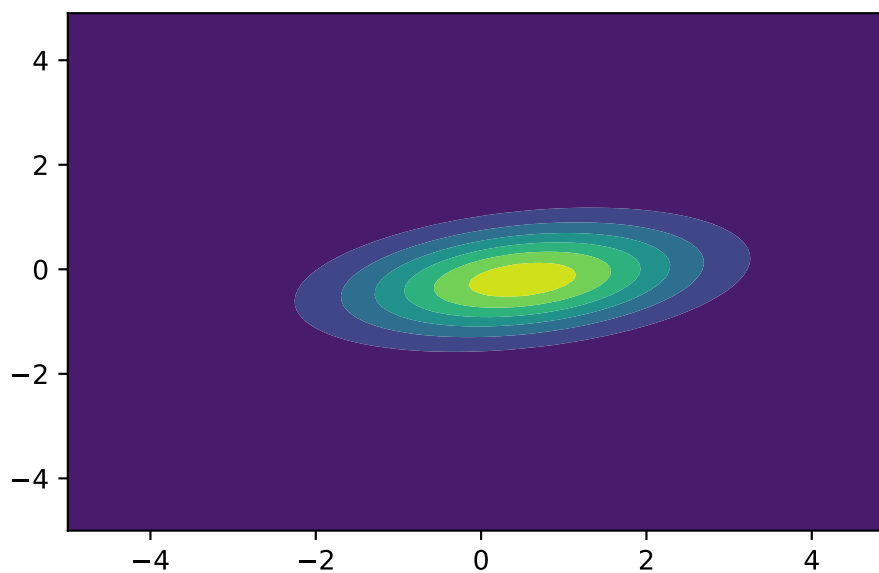
pos = np.dstack((x,y))
rv = multivariate_normal([0.5, -0.2], [[2.0,0.3], [0.3,0.5]])
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x,y, rv.pdf(pos))

ax = plt.figure().add_subplot(projection = '3d')
ax.plot_surface(x,
                y,
                rv.pdf(pos),
                edgecolor = 'royalblue',
                lw = 0.5,
                rstride = 8,
                cstride = 8,
                alpha = 0.5)

```

<mpl_toolkits.mplot3d.art3d.Poly3DCollection at 0x1926cdb6f10>





3 Tarea 2

Sea X_i v.a.i.i.d tales que

$$\mathcal{P}[X_i = h] = \mathcal{P}[X_i = -h] = \frac{1}{2}, \forall i,$$

entonces definimos $Y_{n,h}$. \therefore Queremos calcular la función característica de $Y_{n,\delta}$.

$$E[i\lambda Y_{n,\delta}(t)],$$

Aprovechando que para cada X_i son v.a.i.i.d. Entonces, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} E[i\lambda Y_{n,\delta}(t)] &= (\cos(\lambda h))^{t/\delta} \\ &= u^t, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} u &= [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \\ \ln(u) &= \frac{1}{\delta} \ln[\cos(\lambda h)] \end{aligned}$$

Entonces, aproximaremos $\cos(\lambda h)$ con su expansión de Taylor.

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!},$$

entonces

$$\begin{aligned} \ln(\cos(\lambda h)) &\approx \ln\left[1 - \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!}\right] \\ &\approx -\frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u^t &\approx \exp \left[\frac{t}{\delta} \left(-\frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} \right) \right], \\ &\approx \exp \left[-\frac{t}{\delta} \left(\frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{24} \right) \right], \end{aligned}$$

Calculando el limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E \left[\exp \left(i\lambda Y_{n,\delta}(t) \right) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left[-t \left(\left[\frac{h^2}{\delta} \right] \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^2}{24} \right) \right) \right],$$

si $h^2/\delta \rightarrow \infty$ Segun la sucesión $\delta_n \rightarrow 0$ tenemos limites diferentes, por lo tanto, este no existe. Ahora, usando la normalización, retomando las operaciones anteriores,

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left(i\lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2} \right) \right] &= E \left[\exp \left(i\lambda \sum_{i=0}^n X_i + \frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) \right] \\ &= E \left[\exp \left(i\lambda \sum_{i=0}^n X_i \right) \right] \exp \left(\frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) \\ &= \left([\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \exp \left(\frac{h^2\lambda^2}{2\delta} \right) \right)^t, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} v &= [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \exp \left(\frac{h^2\lambda^2}{2} \right) \\ \ln v &= \ln \left[[\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \exp \left(\frac{h^2\lambda^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\delta} \ln [\cos(\lambda h)] + \frac{h^2\lambda^2}{2\delta} \\ &= \frac{1}{\delta} \left(\ln [\cos(\lambda h)] + \frac{h^2\lambda^2}{2} \right) \\ &\approx \frac{1}{\delta} \left(\ln \left[1 - \underbrace{\frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!}}_{x_0} \right] + \frac{h^2\lambda^2}{2} \right) \end{aligned}$$

recordando que

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2},$$

entonces

$$\ln v \approx \frac{1}{\delta} \left(\left[-\frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} - \frac{\left(-\frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} \right)^2}{2} \right] + \frac{h^2 \lambda^2}{2} \right),$$

bajo la simplificación de que $o(h^k) \equiv 0, k \geq 4$, entonces

$$\begin{aligned} \ln v &\approx \frac{1}{\delta} \left(\frac{(\lambda h)^4}{24} - \frac{(\lambda h)^4}{8} \right) \\ &\approx \frac{1}{\delta} \left(\frac{(\lambda h)^4}{24} - \frac{3(\lambda h)^4}{24} \right) \\ v &\approx \exp \left(-\frac{(\lambda h)^4}{12\delta} \right) \end{aligned}$$

por lo tanto, si $h^4/\delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E \left[\exp \left(i\lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2} \right) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left(-\frac{(\lambda h)^4}{12\delta} \right) = 1$$

4 Tarea 3

5 Ejercicio 3.1

Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ entonces $\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) \sim N(0, 1)$.

Calculemos la función característica de la variable $\frac{X - \mu}{\sigma}$,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= E \left[e^{it \left(\frac{X-\mu}{\sigma} \right)} \right] \\
 &= E \left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma} - \frac{it\mu}{\sigma} \right)} \right] \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} E \left[e^{\left(\frac{itX}{\sigma} \right)} \right] \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2}} dx
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
 \frac{(x - \mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} &= \frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} \\
 &= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{2itx\sigma}{\sigma^2} \\
 &= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x}{\sigma} \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \\
 &= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right)^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \\
 &= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\sigma\mu}{\sigma^2} - \frac{(it\sigma)^2}{\sigma^2} \\
 &= \left(\frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sustituyendo (5.2) en (5.1), resulta

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2-\frac{2it\mu}{\sigma}+t^2\right]} dx \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} e^{\frac{it\mu}{\sigma}-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2} dx \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2} dx
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Sea $u = \frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right) \Rightarrow du = \frac{1}{\sigma}dx$, sustituyendo esto en (5.3), resulta

$$\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \tag{5.4}$$

de aquí se sigue que $u \sim N(0, 1)$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} dx = 1.$$

sustituyendo esto ultimo en (5.4), se tiene,

$$\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

que es la función característica de una Normal estándar, como las funciones características coinciden se concluye que $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

6 Ejercicio 3.2

Si $Y \sim N(0, 1)$ entonces $\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$. Calculemos la función característica de la variable $\sigma Y + \mu$,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\sigma Y + \mu}(t) &= E[e^{it(\sigma Y + \mu)}] \\
 &= E[e^{it\sigma Y + it\mu}] \\
 &= e^{it\mu} E[e^{it\sigma Y}] \\
 &= e^{it\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
 &= e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2yit\sigma)} dy.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
 y^2 - 2yit\sigma &= (y - it\sigma)^2 - (it\sigma)^2 \\
 &= (y - it\sigma)^2 + t^2\sigma^2.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Sustituyendo, (6.2) en (6.1) resulta

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\sigma Y + \mu}(t) &= e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((y - it\sigma)^2 + t^2\sigma^2)} dy \\
 &= e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - it\sigma)^2} dy
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Tomando $u = y - it\sigma \Rightarrow du = dy$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - it\sigma)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

entonces $U \sim N(0, 1)$, por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - it\sigma)^2} dy = 1$$

sustituyendo esto ultimo en (6.3), resulta,

$$\varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim N(\mu, \sigma)$ sabemos que,

$$\varphi_Z(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

De estas dos ultimas igualdades se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{\sigma Y + \mu}(t).$$

Dado que tienen iguales funciones características se concluye que,

$$\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$$

7 Ejercicio 3.3

Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ además X y Y son independientes entonces $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Por definición, se tiene que,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{X+Y}(t) &= E[e^{it(X+Y)}] \\
 &= E[e^{itX}e^{itY}] \text{ por ser independientes, del ejercicio 4} \\
 &= E[e^{itX}]E[e^{itY}] \\
 &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t).
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Por otro lado, sea Z una variables aleatoria tal que, $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, sabemos que la función característica de Z , esta dada por,

$$\begin{aligned}
 \varphi_Z(t) &= e^{it(\mu_1+\mu_2)-\frac{t^2}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \\
 &= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}+it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\
 &= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}}e^{it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\
 &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t),
 \end{aligned}$$

entonces, de esta ultima igualdad y de (??) se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t).$$

Como las funciones características coinciden se sigue que, $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

8 Ejercicio 3.4

Si X, Y son variables normales independientes. Entonces $E[XY] = E[X] E[Y]$.

Recrodemos que

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) \, dx dy$$

Como X, Y son independientes

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Entonces

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) \, dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) \, dx dy \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) \, dy \right] \\ &= E[X] E[Y] \end{aligned}$$

9 Ejercicio 3.5

Por Demostrar

$$\mathcal{P}[|X - \mu| \geq \epsilon] \leq \frac{\text{Var}[X]}{\epsilon^2}$$

Por la desigualdad de Chebysev, para X una variable aleatoria.

$$\mathcal{P}[X \geq \epsilon] \leq \frac{E[X]}{\epsilon}$$

Entonces, sea $Y = |X - \mu|$, $\mu = E[X]$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[|X - \mu| \geq \epsilon] &= \mathcal{P}[|X - \mu|^2 \geq \epsilon^2] \\ &\leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}[X]}{\epsilon^2}\end{aligned}$$

10 Ejercicio 3.6 (Ley de los grandes números)

Por demostrar

Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes con esperanza finita $\mu = E[X_j]$ y varianza finita. $\sigma^2 = \text{Var}(X_j)$. Sean $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Entonces para cada $\epsilon > 0$.

$$\mathcal{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \rightarrow 0$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\frac{S_n}{n} - \mu \right] &= \frac{1}{n^2} \text{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema de Chebysev

$$\mathcal{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon},$$

notemos que para $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma^2}{n\epsilon} \rightarrow 0.$$

Entonces

$$\mathcal{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \rightarrow 0$$

11 Ejercicio 3.7 (Teorema de Limite Central)

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una secuencia de v.a.i.i.d con media a y varianza b^2 . Entonces para doo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha < \beta$, entonces

$$\mathcal{P} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^M X_i - Ma}{\sqrt{Mb}} \leq \beta \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) dx$$

Sea

$$Y_M = \frac{\sum_{i=1}^M [X_i - a]}{\sqrt{Mb}},$$

Definamos

$$\overline{S_M} = \sum_{i=1}^M [X_i - a],$$

entonces

$$Y_M = \frac{S_M}{\sqrt{Mb}}$$

demostraremos que la función generadora de momentos $\varphi_M \rightarrow \varphi$ donde $\varphi_m = \varphi_{Y_M}$ y φ es función generadora de momentos de la distribución normal estandar.

Ahora,

$$\begin{aligned} \varphi_M(t) &= E \left[\exp \left(t \frac{S_M}{\sqrt{Mb}} \right) \right] \\ &= \varphi_{SM} \left(\frac{t}{\sqrt{Mb}} \right) \\ X_i \text{ v.a.i.i.d} &\Rightarrow = \left[\varphi_{(X_1-a)} \left(\frac{t}{\sqrt{Mb}} \right) \right]^M \\ &= \left[E \left[\exp \left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right) \right] \right] \end{aligned}$$

Recordando la serie de Taylor

$$\begin{aligned}
 \varphi_M(t) &= \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{E \left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right)^i \right]}{i!} \right]^M \\
 &= \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{b\sqrt{M}} \right)^2 E[(X_1 - a)^2] + \epsilon(3) \right]^M \\
 &= \left[1 + \frac{1}{M} \frac{t^2}{2} + \epsilon(3) \right]^M,
 \end{aligned}$$

donde

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E \left[\left(\frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right)^i \right]}{i!},$$

Sea $s = \frac{t}{b\sqrt{M}}$, entonces $s \rightarrow 0, t \rightarrow 0$

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E[(X_1 - a)^i] s^i}{i!}$$

Notemos que, si φ_1 existe. Entonces

$$\frac{\epsilon(3)}{s^2} = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E[(X_1 - a)^i] s^{i-2}}{i!} \rightarrow 0, s \rightarrow 0.$$

Además $s \rightarrow 0$ cuando $M \rightarrow \infty$.

$$\Rightarrow \varphi_M(t) = \left[1 + \frac{1}{M} \left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \right] \right]^M,$$

Entonces $\epsilon(3) s^{-2} = M\epsilon(3) b^2 t^{-2} \rightarrow 0$. Como b, t estan fijas.

$$M\epsilon(3) \rightarrow 0, M \rightarrow \infty,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) &\rightarrow \frac{t^2}{2}, M \rightarrow \infty \\ \left[1 + \frac{1}{M} \left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3)\right]\right]^M &\rightarrow \exp(t^2), M \rightarrow \infty \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \varphi_M(t) &= \exp(t^2) = \varphi(t),\end{aligned}$$

la función generadora de momentos de la distribución normal estándar. Por lo tanto

$$F_M(x) \rightarrow F_{N(0,1)}(x)$$

$$\begin{aligned}F_M(b) - F_M(a) &\rightarrow F_N(b) - F_N(a) \\ \mathcal{P} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^M X_i - Ma}{\sqrt{Mb}} \leq \beta \right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx\end{aligned}$$

12 Ejercicio 3.8

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de v.a.i.i.d con media a . Entonces

$$\mathcal{P} \left[\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i = a \right] = 1.$$

Esto es similar a decir que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \stackrel{\text{c.s.}}{=} a$$

Sin pérdida de generalidad, diremos que $X_i \geq 0, \forall i$. Definamos

$$Y_n = X_n I_{[|X_n| \leq n]}, Q_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

Por la desigualdad de

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P} \left[\left| \frac{Q_n - E[Q_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Q_n)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(Y_n^2)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \int_0^n x^2 dF \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^n x dF < \infty, \end{aligned}$$

donde F es la función de distribución de X_i . Luego

$$E[X_1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x dF = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[Q_n]}{n}.$$

Entonces, por el Lema de Borel Canteli. $\mathcal{P} \left[\limsup \left(\left| \frac{Q_n - E[Q_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right) \right] = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{n} = E[X_1], \text{ c.s.}$$

Ahora, calcularemos la siguiente probabilidad

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i \neq Y_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i > n]$$

como $E[X_i] < \infty$ y X_i son v.a.i.i.d.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i > n] \leq E[X_1] < \infty$$

De nuevo, por el Lema de Borel Cantelli.

$$\mathcal{P}[\limsup [X_i \neq Y_i]] = 0, \forall i$$

Entonces

$$\begin{aligned} X_i &= Y_i, \text{ c.s} \\ \Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i &\rightarrow E[X_1] = \mu. \text{ c.s} \end{aligned}$$

13 Tarea 4

Sea $W(t)$ un movimiento Browniano estándar en $[0, T]$. Pruebe que para cualquier $c > 0$ fijo,

$$V(t) = \frac{1}{c} W(c^2 t)$$

es un movimiento Browniano sobre $[0, T]$.

13.0.1 Demostración

Demostraremos que V cumple las propiedades del movimiento Browniano.

13.0.1.1 Propiedad 1

Es claro que $V(0) = \frac{1}{c} W(c^2 0) = 0$.

13.0.1.2 Propiedad 2 (Incrementos Independientes)

Sean $s < t < u < v$ tenemos que

$$E[(V(t) - V(s))(V(v) - V(u))] = \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))(W(c^2 v) - W(c^2 u))]$$

Como el browniano tiene incrementos independientes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))(W(c^2 v) - W(c^2 u))] &= \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))] E[(W(c^2 v) - W(c^2 u))] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces V tiene incrementos independientes.

13.0.1.3 Propiedad 3 (Incrementos estacionarios)

Considere $s < t$.

$$V(t) - V(s) = \frac{1}{c} [W(c^2 t) - W(c^2 s)]$$

Por propiedades del movimiento Browniano.

$$\begin{aligned} E[V(t) - V(s)] &= \frac{1}{c} E[W(c^2 t) - W(c^2 s)] = 0 \\ \text{Var}[V(t) - V(s)] &= \frac{1}{c^2} \text{Var}[W(c^2 t) - W(c^2 s)] = \frac{1}{c^2} (c^2 (t - s)) = t - s \end{aligned}$$

Entonces V tiene incrementos estacionarios.

13.0.2 Por lo tanto, V es un movimiento browniano.

Hacer un script para ilustrar la propiedad de escalado del movimiento Browniano para el caso de $c = \frac{1}{5}$. Estar seguro que usa el mismo camino browniano discretizado en cada subplot.

El código, se encuentra en `hw4_p2.py`. Pero aquí se muestran los resultados.

```
# Importamos las librerías necesarias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Comenzaremos simulando el movimiento browniano fuerte.

prng = np.random.RandomState(10) # Fijamos la semilla.

t_final = 1 # Extremo derecho del intervalo [0,T]
n_points = 64 # No olvidemos que aquí se incluye el 0 y t.
dt = 1 / (n_points - 1) # Ajuste al delta t

dw = np.sqrt(dt) * prng.standard_normal(n_points - 1) # Calculamos los incrementos.
w = np.concatenate(([0], dw.cumsum()))

time = np.linspace(0, t_final, n_points) # Vector de tiempo.

# plt.plot(time, w)          Graficamos el browniano base.
# plt.show()
```

```

"""
Ahora, comenzamos con el browniano escalado.
"""
c = 0.2 # 1/5

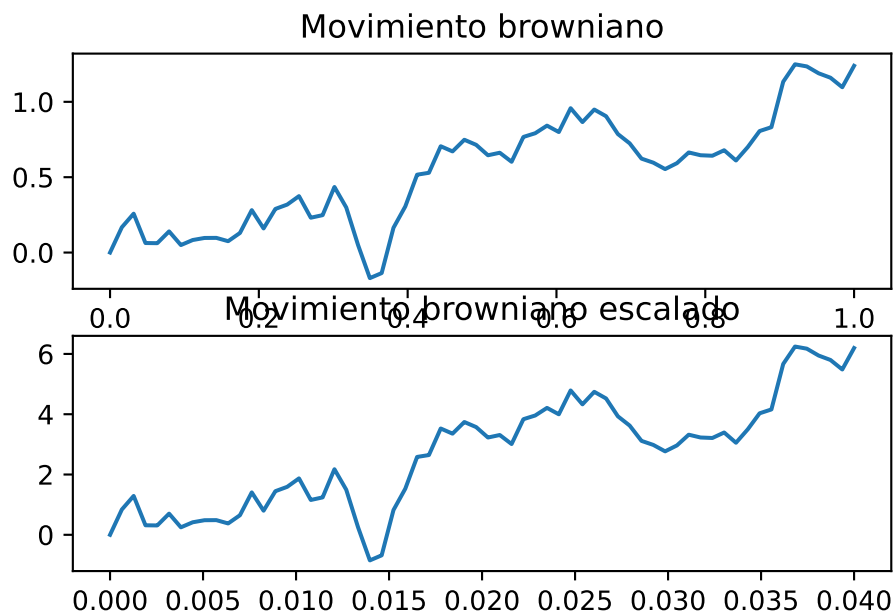
"""
Esto tiene dos interpretaciones.
Sin embargo, para este ejercicio debemos partir de una trayectoria dada, entonces haremos
"""

c_time = c**2 * time # Transformamos el intervalo del tiempo
c_w = c**(-1) * w # Escalamos el browniano.

print("El valor de c es ",c)
fig, cbrown = plt.subplots(2)
cbrown[0].plot(time, w)
cbrown[1].plot(c_time, c_w)
cbrown[0].set_title('Movimiento browniano')
cbrown[1].set_title('Movimiento browniano escalado')
plt.show()

```

El valor de c es 0.2



Modifique el script `half_brownian_refinement.py` encapsulando el código en una función. Esta función deberá recibir el extremo derecho del intervalo $[0, T]$ y el número de incrementos N de un camino browniano base. El propósito es calcular los incrementos de relleno de un refinamiento con $2N$ incrementos.

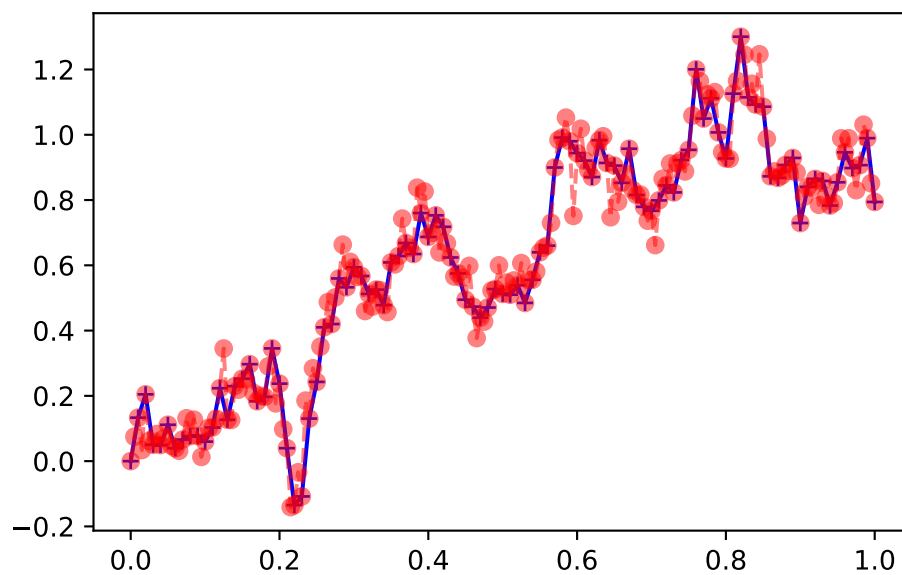
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(10)

def refined_brownian_2n(T,L):
    dt = T / L
    W = np.zeros(L + 1)
    W_refined = np.zeros(2 * L + 1)
    xi = np.sqrt(dt) * prng.normal(size=L)
    xi_half = np.sqrt(0.5 * dt) * prng.normal(size=L)
    W[1:] = xi.cumsum()
    W_ = np.roll(W, -1)
    W_half = 0.5 * (W + W_)
    W_half = np.delete(W_half, -1) + xi_half
    W_refined[1::2] = W_half
    W_refined[2::2] = W[1:]
    t = np.arange(0, T + dt, dt)
    t_half = np.arange(0, T + 0.5 * dt, 0.5 * dt)
    return t, t_half, W, W_refined
```

En un script separado, incluya la función de arriba y grafique una figura con la trayectoria del browniano con 100 incrementos y muestre su refinamiento correspondiente.

```
time, bi_time, w, bi_w = refined_brownian_2n(1,100)

plt.plot(time, w, 'b-+')
plt.plot(
    bi_time,
    bi_w,
    'ro--',
    alpha=0.5
)
plt.show()
```



14 Tarea 5

Exercise 14.1. Muestre que el movimiento Browniano satisface

$$E \left[|W(t) - W(s)|^2 \right] = |t - s|$$

Si $t > s$.

$$\begin{aligned} E \left[|W(t) - W(s)|^2 \right] &= E \left[(W(t) - W(s))^2 \right] \\ &= t - s, \end{aligned}$$

mientras que si $t \leq s$.

$$\begin{aligned} E \left[(W(t) - W(s))^2 \right] &= E \left[(W(s) - W(t))^2 \right] \\ &= s - t, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E \left[|W(t) - W(s)|^2 \right] = |t - s|$$

Exercise 14.2. Dado $W(t_i)$ y $W(t_{i+1})$, muestre que la variable aleatoria

$$W\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right) := \frac{1}{2} [W(t_i) + W(t_{i+1})] + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta t} \xi, \xi \sim N(0, 1)$$

es un movimiento Browniano.

14.0.0.0.1 Es claro que al ser un refinamiento del movimiento browniano.

$$W(0) = 0$$

14.0.0.0.2 C_2 . Notemos que

$$W_{i+\frac{i}{2}} - W_i = \frac{1}{2} [W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta t} \xi,$$

Sabemos que la combinación lineal de normales es una normal. Luego, partiendo que $t_{i+1} - t_i = \Delta t$.

$$\begin{aligned} E [W_{i+\frac{i}{2}} - W_i] &= 0, \\ \text{Var} [W_{i+\frac{i}{2}} - W_i] &= \frac{1}{4} \Delta t + \frac{1}{4} \Delta t = \frac{1}{2} \Delta t, \end{aligned}$$

Por lo tanto $W_{i+\frac{1}{2}} - W_i \sim N\left(0, \frac{\Delta t}{2}\right)$.

14.0.0.0.3 Calculamos la esperanza.

$$E \left[(W_{i+1} - W_{i+\frac{1}{2}}) (W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}}) \right] = E \left[\left(\frac{1}{2} [W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right) \frac{1}{2} [W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right]$$

defina $dW_i = W_{i+1} - W_i$,

$$\begin{aligned}
E \left[(W_{i+1} - W_{i+\frac{1}{2}}) (W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}}) \right] &= E \left[\left(\frac{1}{2} dW_i + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right) \left(\frac{1}{2} dW_j + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right) \right] \\
&= E \left[\frac{1}{4} dW_i dW_j + \frac{1}{2} dW_i \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi + \frac{1}{2} dW_j \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi + \left(\sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right)^2 \right] \\
dW_i, dW_j \text{ son independientes} &= \left(E \left[\frac{1}{2} dW_i \right] \right) \left(E \left[\frac{1}{2} dW_j \right] \right) + E \left[\frac{1}{2} dW_i \right] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] \\
&\quad + E \left[\frac{1}{2} dW_j \right] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] + \frac{\Delta t}{4} (E[\xi])^2 \\
&= \left(E \left[\frac{1}{2} dW_i \right] \right) \left(E \left[\frac{1}{2} dW_j + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right] \right) + E \left[\frac{1}{2} dW_j \right] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] + \frac{\Delta t}{4} (E[\xi])^2 \\
&= \left(E \left[\frac{1}{2} dW_i \right] \right) (E[(W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}})]) + E \left[\frac{1}{2} dW_j \right] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] + \frac{\Delta t}{4} (E[\xi])^2 \\
&= \left(E \left[\frac{1}{2} dW_i \right] \right) (E[(W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}})]) + E \left[\frac{1}{2} dW_j + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] \\
&= \left(E \left[\frac{1}{2} dW_i \right] \right) (E[(W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}})]) + E[(W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}})] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] \\
&= E[(W_{i+1} - W_{i+\frac{1}{2}})] E[(W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}})],
\end{aligned}$$

teniendo así, que los incrementos son independientes.

Exercise 14.3. Generalice la fórmula del ejercicio anterior para en el caso donde, $W(t_i), W(t_{i+1})$, y $\alpha \in (0, 1)$ el valor

$$W(t_i + \alpha \Delta t),$$

es un movimiento Browniano.

Notemos que

$$t_i + \alpha \Delta t + (1 - \alpha) \Delta t = t_{i+1},$$

entonces vamos a definir

$$\begin{aligned}
W_{i+\alpha} &= W(t_i + \alpha \Delta t) \\
&= (1 - \alpha) W_i + \alpha W_{i+1} + Y,
\end{aligned}$$

donde Y será una v.a independiente de $W(t)$. Entonces

$$\begin{aligned}
W_{i+\alpha} - W_i &= (1 - \alpha) W_i + \alpha W_{i+1} + Y - W_i \\
&= \alpha (W_{i+1} - W_i) + Y \\
&= \alpha (W_{i+1} - W_i) + Y.
\end{aligned}$$

Entonces

$$E[W_{i+\alpha} - W_i] = E[Y],$$

por lo tanto, $E[Y]$ tiene que ser cero. Luego

$$\text{Var}[W_{i+\alpha} - W_i] = \alpha^2 \Delta t + \text{Var}[Y],$$

notemos que

$$(i + \alpha) \Delta t - i \Delta t = \alpha \Delta t,$$

por lo tanto tendría que cumplirse $\text{Var}[W_{i+\alpha} - W_i] = \alpha \Delta t$.

$$\alpha^2 \Delta t + \text{Var}[Y] = \alpha \Delta t,$$

entonces

$$\text{Var}[Y] = \Delta t (\alpha - \alpha^2),$$

como $Y = \sqrt{\alpha(1-\alpha)}\xi$, $\xi \sim N(0, 1)$. Como este es un refinamiento del browniano, entonces se cumple C1.

$$W(0) = 0.$$

Conseguimos C2 por construcción y de forma análoga tenemos la independiencia de los incrementos.

$$E[(W_{i+\alpha} - W_i)(W_{j+\alpha} - W_j)] = E[W_{i+\alpha} - W_i] E[W_{j+\alpha} - W_j].$$

Exercise 14.4. Suponga que $X \sim N(0, 1)$. Sabemos que $E[X] = 0$ y $E[X^2] = 1$. Luego, de la definición, el p -ésimo momento satisface

$$E[X^p] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Usando la relación, muestre que $E[X^3] = 0$ y $E[X^4] = 3$.

Entonces deduzca el incremento Browniano,

$$\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i),$$

satisface $E[\Delta W_i^3] = 0$, $E[\Delta W_i^4] = 3(\Delta t)^2$. Entonces encuentre una expresión para $E[X^p]$ para un entero positivo p . Pista: Tu puedes usar el dato que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$.

Considere la fórmula.

$$E[X^p] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx.$$

Partiendo la integral,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx}_{I_2}$$

Entonces

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx,$$

hagamos el cambio de variable. $y = -x$, tenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^0 -(-y)^p \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) Dy \\ &= \frac{(-1)^p}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^p \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) Dy = I_2 (-1)^p, \end{aligned}$$

entonces

$$E[X^p] = (1 + (-1)^p) I_2,$$

de aqui tenemos, que si p es impar $E[X^p] = 0$, entonces si p es par

$$E[X^p] = 2I_2,$$

entonces, nos concentraremos en

$$E[X^p] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx, p = 2k, k \in \mathbb{N}$$

Considere $y = \frac{x^2}{2}, Dy = xDx$.

$$E[X^p] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{p-1} \exp(-y) Dy,$$

luego $\sqrt{2y} = x$, entonces

$$\begin{aligned} E[X^p] &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (\sqrt{2y})^{p-1} \exp(-y) \mathrm{D}y \\ &= \frac{2(\sqrt{2})^{p-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{\frac{p-1}{2}} \exp(-y) \mathrm{D}y \\ &= \frac{2(\sqrt{2})^{p-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{\frac{p+1}{2}-1} \exp(-y) \mathrm{D}y, \end{aligned}$$

recordando la función Gamma.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-t} \mathrm{D}t,$$

entonces

$$E[X^p] = \begin{cases} 0 & p \text{ impar} \\ \frac{2^{\frac{p+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) & p \text{ par} \end{cases},$$

$$\text{entonces } E[X^4] = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} e^{-x} \mathrm{D}x.$$

Considere

$$\begin{aligned} u &= x^{3/2} \mathrm{D}v = e^{-x} \mathrm{D}x \\ \mathrm{D}u &= \frac{3}{2} x^{1/2} v = -e^{-x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= [-x^{3/2} e^{-x}] + \frac{3}{2} \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} \mathrm{D}x \\ &= \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$E[X^4] = 3$$

Notemos que si $\Delta W \sim N(0, \sigma^2)$, entonces

$$Z = \frac{\Delta W}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

En general,

$$E[(\Delta W)^p] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^p \exp\left(-\left(\frac{w}{\sigma}\right)^2\right) Dw,$$

considere $\sigma u = w$, entonces

$$\begin{aligned} E[(\Delta W)^p] &= \sigma^p \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^p \exp(-u^2) Dw \right], \\ &= \sigma^p E[Z^p], \end{aligned}$$

entonces para $p = 4, \sigma^2 = \Delta t$.

$$E[(\Delta W)^4] = (\Delta t)^2 E[Z^4] = 3(\Delta t)^2$$

Exercise 14.5. Suponga que $X \sim N(0, 1)$. Muestre que para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$E[\exp(a + bX)] = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right).$$

Deduzca que

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = \exp\left(\frac{33}{32}t\right)$$

Considere

$$E[\exp(a + bX)] = e^a E[\exp(bX)],$$

notemos que $bX \sim N(0, b^2)$, por lo tanto, la función generadora de momentos nos dice que

$$E[\exp(bX)] = M_{bX}(1) = \exp\left(\frac{b^2}{2}\right),$$

por lo tanto

$$E[\exp(a + bX)] = e^a \exp\left(\frac{b^2}{2}\right) = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right),$$

ahora, considere

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}(W_t - W_0)\right)\right],$$

Notemos que $W_t - W_0 \sim N(0, t)$, por lo tanto, usando la fórmula anterior

$$\begin{aligned}
E \left[\exp \left(t + \frac{1}{4} (W_t - W_0) \right) \right] &= \exp \left(t + \frac{1}{4} (\sqrt{t} X) \right), X \sim N(0, 1) \\
&= \exp \left(t + \left(\frac{1}{4} \sqrt{t} \right) X \right) = \exp \left(t + \frac{t}{32} \right) \\
&= \exp \left(\frac{33}{32} t \right)
\end{aligned}$$

15 Tarea 6

Exercise 15.1. Hacer un script para simular 10000 trayectorias del proceso $u(t, W_t)$ definido en el Ejercicio. Grafique en una figura, 10 trayectorias y la media de las 10000 trayectorias del proceso $u(t, W_t)$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n
    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)
    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()
        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w

def b_function(t, a, w):
    y = np.exp(t - a * w)
    return y

n_samples = 10000
n_points = 64
t_initial = 0
t_final = 1

mean = np.zeros(n_points)
for i in range(n_samples):
    time, b_w = strong_brownian(t_final, n_points)
    y = b_function(time, 0.25, b_w)
    if i < 10:
```

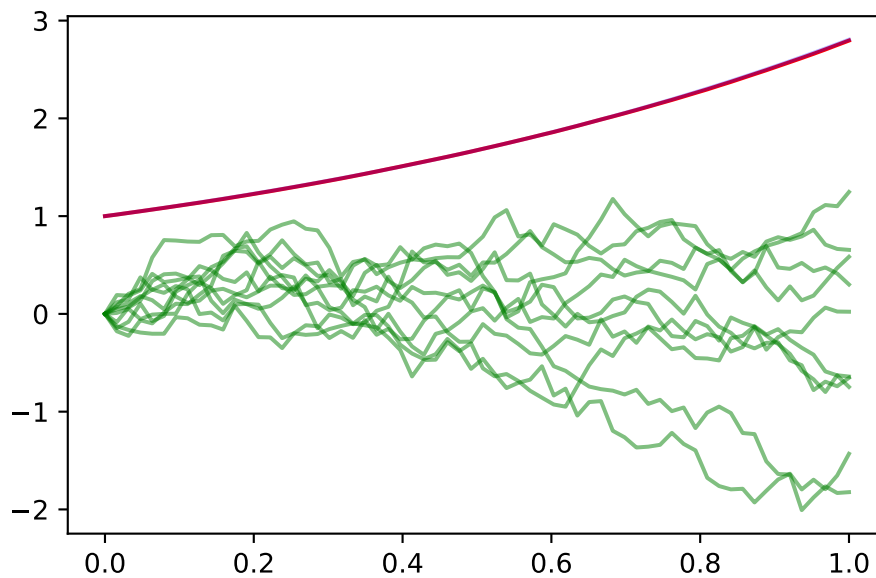
```

plt.plot(time, b_w, 'g-', alpha=0.5)
mean += y

mean = (n_samples)**(-1) * mean
time = np.linspace(0, t_final, n_points)

y = [np.exp(33 / 32 * t) for t in time]
plt.plot(time, mean, 'r-')
plt.plot(time, y, 'b-', alpha=0.3)
plt.show()

```



Exercise 15.2. Siguiendo las ideas del refinamiento del camino browniano. $t_{i+1/2} = t_i + \frac{1}{2}\delta t$. Hacer un código de Python para el refinamiento del Browniano para $\alpha \in (0, 1)$ para el refinamiento $t_{i+1} = t_i + \delta t$

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n
    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)

```

```

    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()
        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w

t_final = 1
n_points = 65
delta_t = 1/(n_points - 1)
alpha = 0.7

prng = np.random.RandomState(219)

time, w = strong_brownian(1, n_points) # w_i

y = np.sqrt(delta_t * (alpha - alpha ** 2)) * prng.standard_normal(n_points - 1)

w_ = np.roll(w, -1) # w_{i+1}

w_alpha = alpha * w_ + (1 - alpha) * w
w_alpha = np.delete(w_alpha, -1)
w_alpha += y
w_ref = np.zeros(2 * n_points - 1)

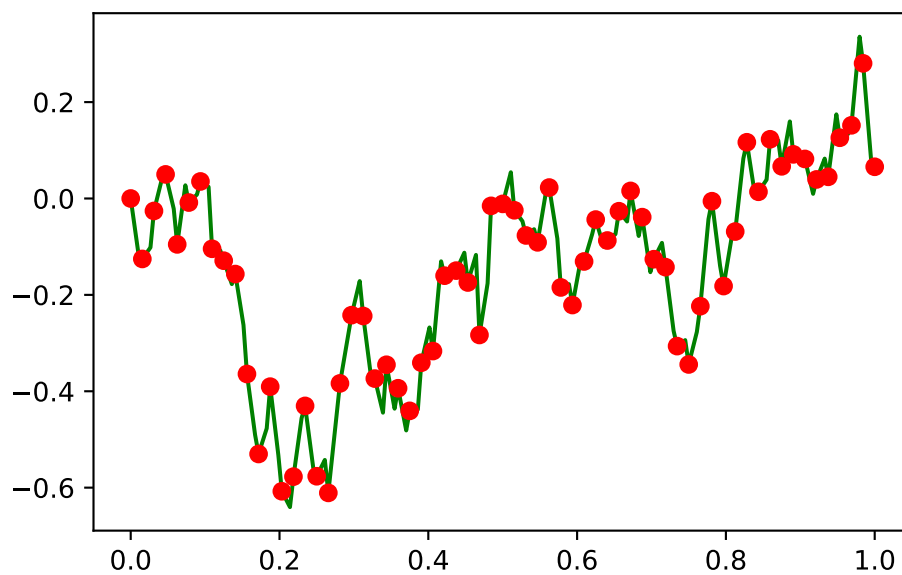
w_ref[0::2] = w
w_ref[1::2] = w_alpha

time_ref = np.zeros(2 * n_points - 1)

for i in range(2 * n_points - 1):
    if i % 2 == 0:
        time_ref[i] = time[int(i / 2)]
    else:
        time_ref[i] = time[int(i / 2)] + alpha * delta_t

plt.plot(time_ref, w_ref, 'g-')
plt.plot(time, w, 'ro')
plt.show()

```

16

17

18 Muestre que X_t es una martingala local.

Sea τ un tiempo de paro. Pruebe que $W(t + \tau) - W(\tau)$ es un movimiento browniano.

Definamos

$$V_\tau(t) = W(t + \tau) - W(\tau),$$

notemos que

$$V_\tau(0) = 0,$$

Luego, considere para $s \leq t$

$$\begin{aligned} V_\tau(t) - V_\tau(s) &= W(t + \tau) - W(\tau) - [W(s + \tau) - W(\tau)] \\ &= W(t + \tau) - W(s + \tau) \sim N(0, t - s), \end{aligned}$$

esto además nos garantiza la independencia de los incrementos del Browniano.

Sea $W_1(t), W_2(t)$ movimientos brownianos independientes con punto inicial $(W_1(0), W_2(0)) \neq (0, 0)$. Defina $X_t = \ln(W_1^2(t) + W_2^2(t))$.

Supongamos que X_t NO es una martingala local.

18.0.1 Muestre que $E|X_t| < \infty$ para cada $t > 0$.

Considere

$$\begin{aligned} X_t &= \ln(W_1^2(t) + W_2^2(t)), \\ \exp(X_t) &= W_1^2(t) + W_2^2(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\exp(X_t)] &= E[W_1^2(t)] + E[W_2^2(t)] \\ &= 2t, \end{aligned}$$

Como $X_t \geq 0, \forall t$

$$\begin{aligned} X_t &\leq \exp(X_t) \\ E[X_t] &\leq 2t < \infty, \forall t \end{aligned}$$

18.0.2 Muestre que X_t no es una martingala.

Supongamos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $E[X_t] = c, \forall t$. Entonces

$$\begin{aligned} E[\ln(W_1^2(t) + W_2^2(t))] &= c \\ \int_0^\infty \ln(W_1^2(t) + W_2^2(t)) d\mathcal{P} &= c, \end{aligned}$$

Como la integral es finita. Entonces

$$X_t \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \text{ c.s.}$$

Luego,

$$W_1^2(t) + W_2^2(t) \rightarrow 1, t \rightarrow \infty, \text{ c.s.}$$

Sin embargo

$$E[W_1^2(t) + W_2^2(t)] = 2t \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty,$$

entonces llegamos a una contradicción. Entonces $E[X_t]$ no es constante, por lo tanto X_t no puede ser martingala.

Considere

$$\tau_n = \inf_t \{X_t = n\}$$

Como X_t es no acotada. Entonces

$$\tau_n(\omega) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \forall \omega.$$

Ahora probaremos que Y_t es una martingala. Ahora, considere

$$Y_t = X_{\min\{t, \tau_n\}},$$

es adaptado con respecto a la filtración. Si $\tau_n > t$ lo tenemos por construcción. En caso contrario, para $n \in \mathbb{N}$.

$$Y_t = n$$

$$[Y_t = n] \subset [\tau_n < t] \in \mathcal{F}_t,$$

por ser tiempo de paro. Por lo tanto Y_t es adaptado a la filtración, por lo tanto nos queda probar que es una martingala.

Considere $s < t$.

$$\begin{aligned}
E[Y_t \mid \mathcal{F}_s] &= E[X_{\min\{t, \tau_n\}} \mid \mathcal{F}_s] \\
&= E[X_t 1_{[t < \tau_n]}(t) \mid \mathcal{F}_s] + E[X_t 1_{[\tau_n \leq t]}(t) \mid \mathcal{F}_s] \\
&= E[X_s 1_{[s < \tau_n]}(t) \mid \mathcal{F}_s] + E[X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq t]}(t) \mid \mathcal{F}_s] \\
&= X_s 1_{[s < \tau_n]}(t) + X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq s]}(s) \\
&= Y_s,
\end{aligned}$$

teniendo así que para cada n Y_t es una martingala.

19

References