

# **stochacalculus**

David Peña Peralta

2025-01-11

# Table of contents

<b>1 Ecuaciones Diferenciales Estocásticas</b>	<b>3</b>
<b>2 Tarea 1</b>	<b>4</b>
<b>3 Tarea 2</b>	<b>16</b>
<b>4 Tarea 3</b>	<b>19</b>
<b>5 Ejercicio 3.1</b>	<b>20</b>
<b>6 Ejercicio 3.2</b>	<b>22</b>
<b>7 Ejercicio 3.3</b>	<b>24</b>
<b>8 Ejercicio 3.4</b>	<b>25</b>
<b>9 Ejercicio 3.5</b>	<b>26</b>
<b>10 Ejercicio 3.6 (Ley de los grandes números)</b>	<b>27</b>
<b>11 Ejercicio 3.7 (Teorema de Limite Central)</b>	<b>28</b>
<b>12 Ejercicio 3.8</b>	<b>31</b>
<b>13 Tarea 4</b>	<b>33</b>
13.0.1 Demostración . . . . .	33
13.0.2 Por lo tanto, $V$ es un movimiento browniano. . . . .	34
<b>14 Tarea 5</b>	<b>38</b>
<b>15 Tarea 6</b>	<b>46</b>
<b>16 Tarea 7</b>	<b>50</b>
<b>17 Tarea 8</b>	<b>55</b>
<b>18 Tarea 9</b>	<b>60</b>
18.0.1 Muestre que $X_t$ es una martingala local. . . . .	60

18.0.2	Muestre que $E X_t  < \infty$ para cada $t > 0$ . . . . .	60
18.0.3	Muestre que $X_t$ no es una martingala. . . . .	61
<b>19</b>	<b>Tarea 10</b>	<b>63</b>
	<b>References</b>	<b>64</b>

# 1 Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Ahora, vamos

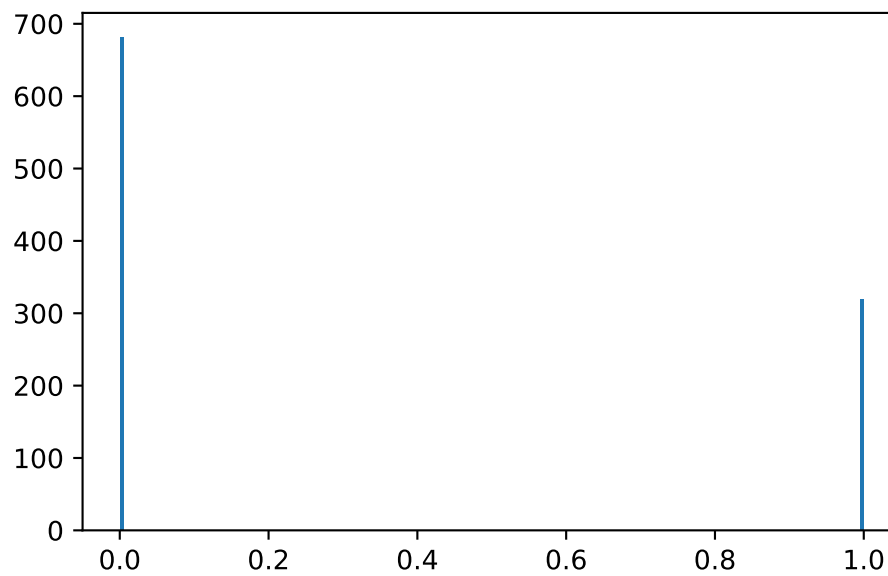
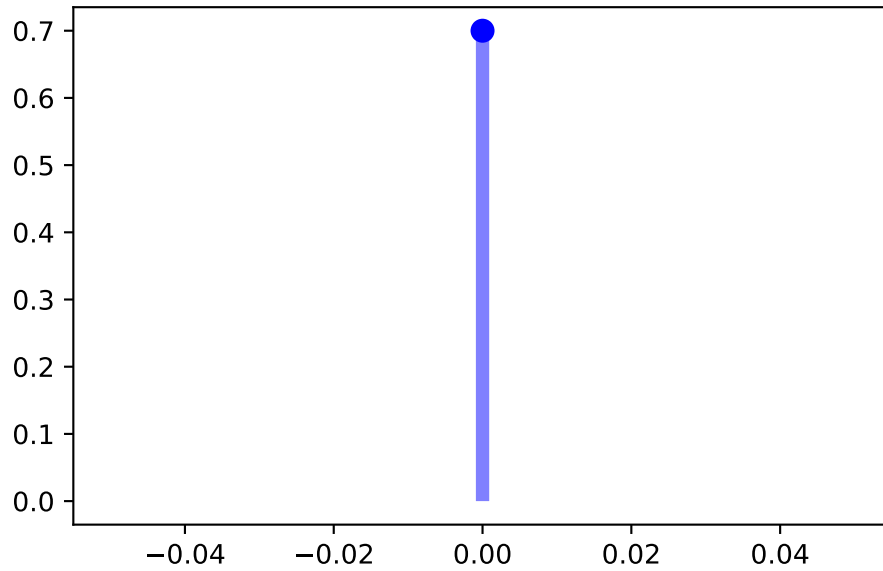
## 2 Tarea 1

Ejecute y explica en pocas palabras la salida del código ex\_001.py

```
from scipy.stats import multivariate_normal
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.stats import norm
import numpy as np
from scipy.stats import bernoulli
import matplotlib.pyplot as plt
fig_01, ax_01 = plt.subplots(1, 1)
fig_02, ax_02 = plt.subplots(1, 1)
p = 0.3
mean, var, skew, kurt = bernoulli.stats(p, moments='mvsk')
print(mean, var, skew, kurt)

x = np.arange(bernoulli.ppf(0.01, p), bernoulli.ppf(0.99, p))
ax_01.plot(x, bernoulli.pmf(x, p), 'bo', ms=8, label='bernoulli pmf')
ax_01.vlines(x, 0, bernoulli.pmf(x, p), colors='b', lw=5, alpha=0.5)
r = bernoulli.rvs(p, size=1000)
ax_02.hist(r, bins=200)
plt.show()
```

0.3 0.21 0.8728715609439694 -1.2380952380952381



El código posee 3 salidas: \* Un vector  $[0.3, 0.21, 0.87, -1.23]$  \* Dos gráficas.

El vector hace referencia a los momentos de la distribución bernoulli con parámetro  $p = 0.3$ .  
 \* mean hace referencia a la media. \* var hace referencia a la varianza. \* skew hace referencia al sesgo. \* kurt hace referencia a la kurtosis.

Finalmente, las dos gráficas: \* La primera hace referencia a la función de probabilidad. Notemos que  $\mathcal{P}[X = 0] = 0.7$ , lo que muestra la gráfica. Notemos que la gráfica va de -0.04 a 0.04, por lo tanto no se iba a mostrar el caso  $X = 1$ .

\* La segunda hace referencia a una simulación: Se generaron una muestra de tamaño  $N$  variables aleatorias con distribución bernoulli. Como la distribución bernoulli tiene media  $Np$ , pretende mostrar que en efecto, habrá de forma aproximada  $Np$  valores igual a 1 y  $N(1 - p)$  valores igual a 0.

Ejecute y explica en pocas palabras la salida del código ex\_002.py

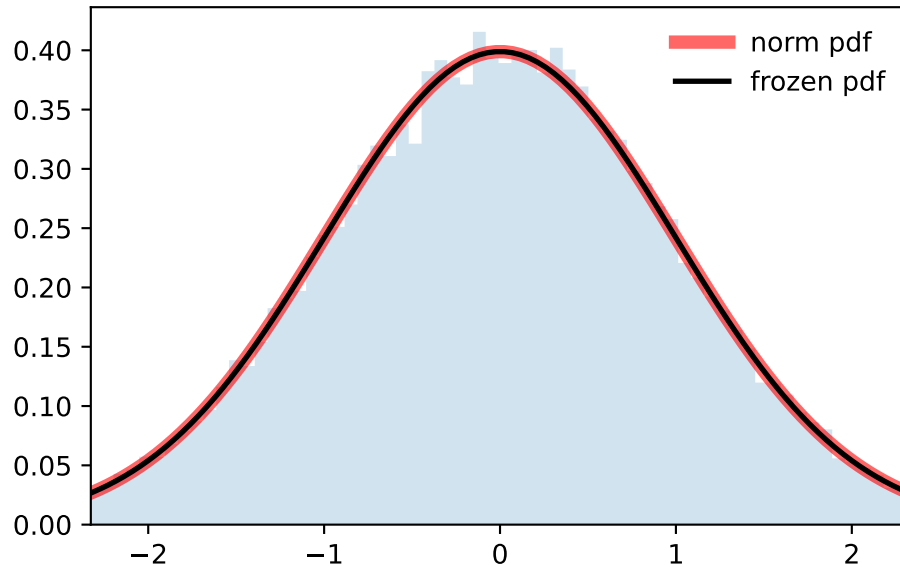
```
fig, ax = plt.subplots(1, 1)
mean, var, skew, kurt = norm.stats(moments='mvsk')

x = np.linspace(norm.ppf(0.01), norm.ppf(0.99), 100)
ax.plot(
    x,
    norm.pdf(x),
    'r-',
    lw=5,
    alpha=0.6,
    label='norm pdf'
)
rv = norm()
ax.plot(x, rv.pdf(x), 'k-', lw=2, label='frozen pdf')
vals = norm.ppf([0.001, 0.5, 0.999])

np.allclose([0.001, 0.5, 0.999], norm.cdf(vals))

r = norm.rvs(size=50000)

ax.hist(r, density=True, bins='auto', histtype='stepfilled', alpha=0.2)
ax.set_xlim([x[0], x[-1]])
ax.legend(loc='best', frameon=False)
plt.show()
```



El código posee una gráfica. Que hace referencia a una simulación de variables aleatorias normales. Notemos que \* El elemento en azul, hace referencia a un histograma que refleja las frecuencias de los valores generados. \* Mientras que la línea roja, muestra la función de densidad de una variable aleatoria estándar.

Ejecute y explica en pocas palabras la salida del código `ex_003.py`

Para cambiar el vector de medias  $\mu$  y la matriz  $\Sigma$  hay que prestar atención en la línea donde aparece la función `multivariate_normal()` que de forma simple posee dos parámetros: \* El vector de medias  $\mu = [0.5, -0.2]$  \* La matriz de covarianza  $\Sigma = [[2.0, 0.3], [0.3, 0.5]]$

```
x = np.linspace(0, 5, 100, endpoint=False)
y = multivariate_normal.pdf(x, mean=2.5, cov=0.5)

fig1 = plt.figure()
ax = fig1.add_subplot(111)
ax.plot(x, y)
# plt.show()

x, y = np.mgrid[-5:5:.1, -5:5:.1]
pos = np.dstack((x, y))
rv = multivariate_normal([0.1, 0.5], [[3.0, 0.3], [0.75, 1.5]])
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x, y, rv.pdf(pos))
```



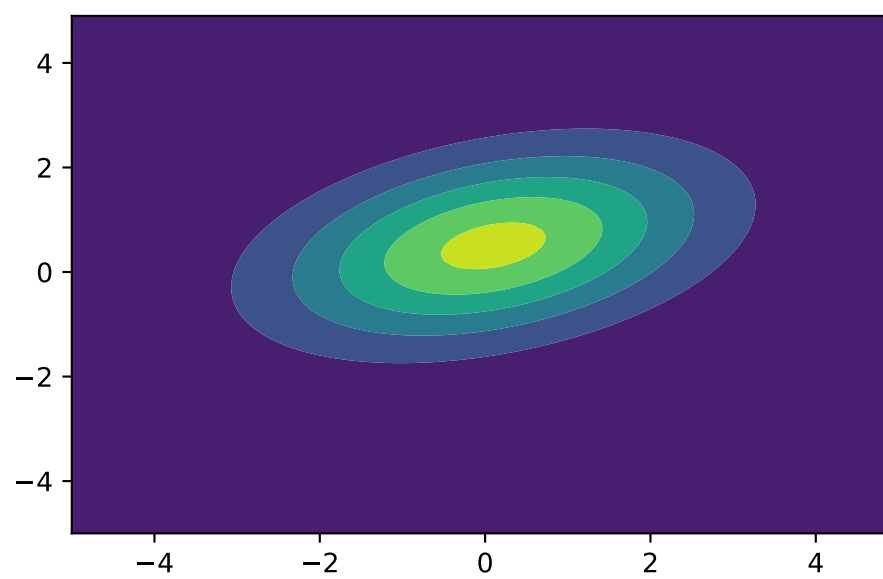
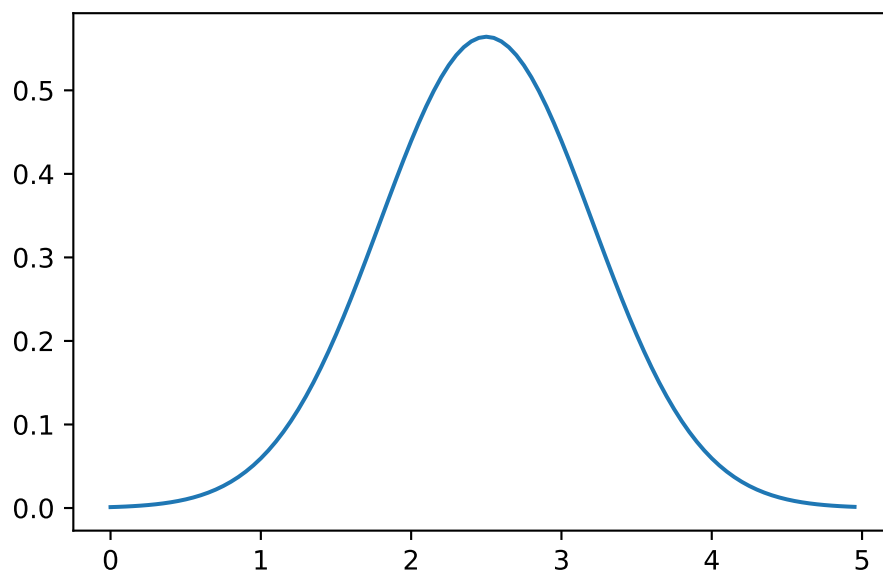
```

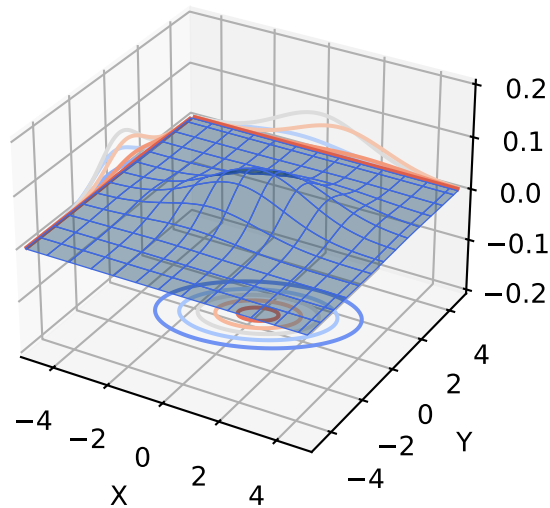
# plt.show()

ax = plt.figure().add_subplot(projection='3d')
ax.plot_surface(
    x,
    y,
    rv.pdf(pos),
    edgecolor='royalblue',
    lw=0.5,
    rstride=8,
    cstride=8,
    alpha=0.4
)
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='z', offset=-.2, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='x', offset=-5, cmap='coolwarm')
ax.contour(x, y, rv.pdf(pos), zdir='y', offset=5, cmap='coolwarm')

ax.set(
    xlim=(-5, 5),
    ylim=(-5, 5),
    zlim=(-0.2, 0.2),
    xlabel='X',
    ylabel='Y',
    zlabel='Z'
)
plt.show()

```





## Generando Normales

```
import numpy as np
from scipy.stats import bernoulli
import matplotlib.pyplot as plt

fig_01, ax_01 = plt.subplots(1, 1)
fig_02, ax_02 = plt.subplots(1, 1)

p = 0.3

x = np.arange(bernoulli.ppf(0.01, p), bernoulli.ppf(0.99, p))
ax_01.plot(x, bernoulli.pmf(x, p), 'bo', ms = 8, label = 'bernoulli pmf')
ax_01.vlines(x, 0, bernoulli.pmf(x, p), colors = 'b', lw = 5, alpha = 0.5)

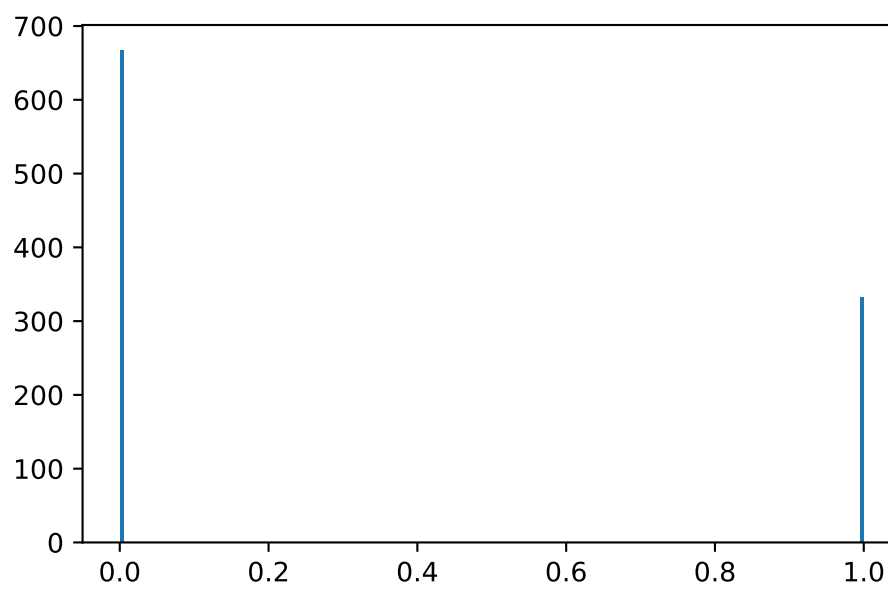
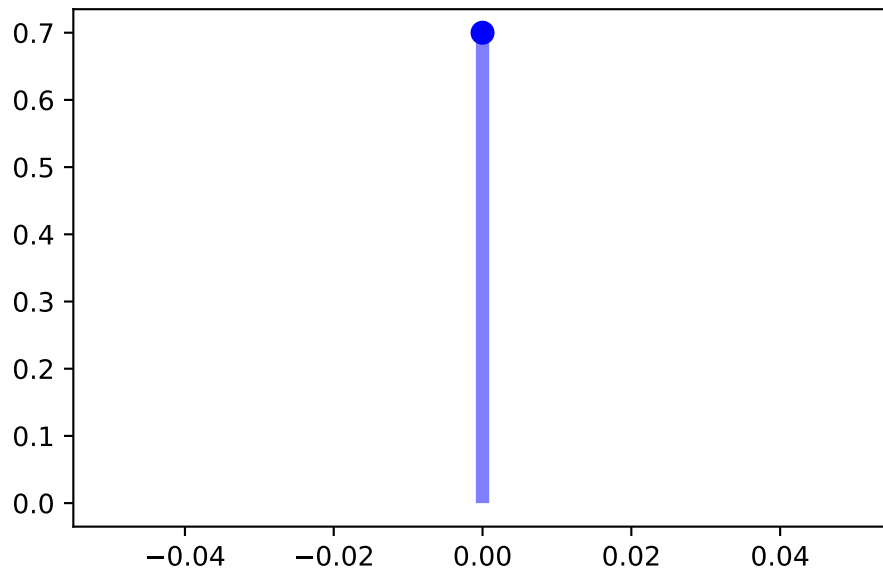
r = bernoulli.rvs(p, size = 1000)
ax_02.hist(r, bins = 200)
```

[illegible]

```

0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.,
0., 332.]),
array([0.    , 0.005, 0.01 , 0.015, 0.02 , 0.025, 0.03 , 0.035, 0.04 ,
0.045, 0.05 , 0.055, 0.06 , 0.065, 0.07 , 0.075, 0.08 , 0.085,
0.09 , 0.095, 0.1  , 0.105, 0.11 , 0.115, 0.12 , 0.125, 0.13 ,
0.135, 0.14 , 0.145, 0.15 , 0.155, 0.16 , 0.165, 0.17 , 0.175,
0.18 , 0.185, 0.19 , 0.195, 0.2  , 0.205, 0.21 , 0.215, 0.22 ,
0.225, 0.23 , 0.235, 0.24 , 0.245, 0.25 , 0.255, 0.26 , 0.265,
0.27 , 0.275, 0.28 , 0.285, 0.29 , 0.295, 0.3  , 0.305, 0.31 ,
0.315, 0.32 , 0.325, 0.33 , 0.335, 0.34 , 0.345, 0.35 , 0.355,
0.36 , 0.365, 0.37 , 0.375, 0.38 , 0.385, 0.39 , 0.395, 0.4  ,
0.405, 0.41 , 0.415, 0.42 , 0.425, 0.43 , 0.435, 0.44 , 0.445,
0.45 , 0.455, 0.46 , 0.465, 0.47 , 0.475, 0.48 , 0.485, 0.49 ,
0.495, 0.5  , 0.505, 0.51 , 0.515, 0.52 , 0.525, 0.53 , 0.535,
0.54 , 0.545, 0.55 , 0.555, 0.56 , 0.565, 0.57 , 0.575, 0.58 ,
0.585, 0.59 , 0.595, 0.6  , 0.605, 0.61 , 0.615, 0.62 , 0.625,
0.63 , 0.635, 0.64 , 0.645, 0.65 , 0.655, 0.66 , 0.665, 0.67 ,
0.675, 0.68 , 0.685, 0.69 , 0.695, 0.7  , 0.705, 0.71 , 0.715,
0.72 , 0.725, 0.73 , 0.735, 0.74 , 0.745, 0.75 , 0.755, 0.76 ,
0.765, 0.77 , 0.775, 0.78 , 0.785, 0.79 , 0.795, 0.8  , 0.805,
0.81 , 0.815, 0.82 , 0.825, 0.83 , 0.835, 0.84 , 0.845, 0.85 ,
0.855, 0.86 , 0.865, 0.87 , 0.875, 0.88 , 0.885, 0.89 , 0.895,
0.9  , 0.905, 0.91 , 0.915, 0.92 , 0.925, 0.93 , 0.935, 0.94 ,
0.945, 0.95 , 0.955, 0.96 , 0.965, 0.97 , 0.975, 0.98 , 0.985,
0.99 , 0.995, 1.   ]),
<BarContainer object of 200 artists>)

```



```
from scipy.stats import norm

fig, ax = plt.subplots(1,1)

x = np.linspace(norm.ppf(0.01),norm.ppf(0.99), 100)
```

```

ax.plot(x, norm.pdf(x), 'r-', lw = 5, alpha = 0.6)

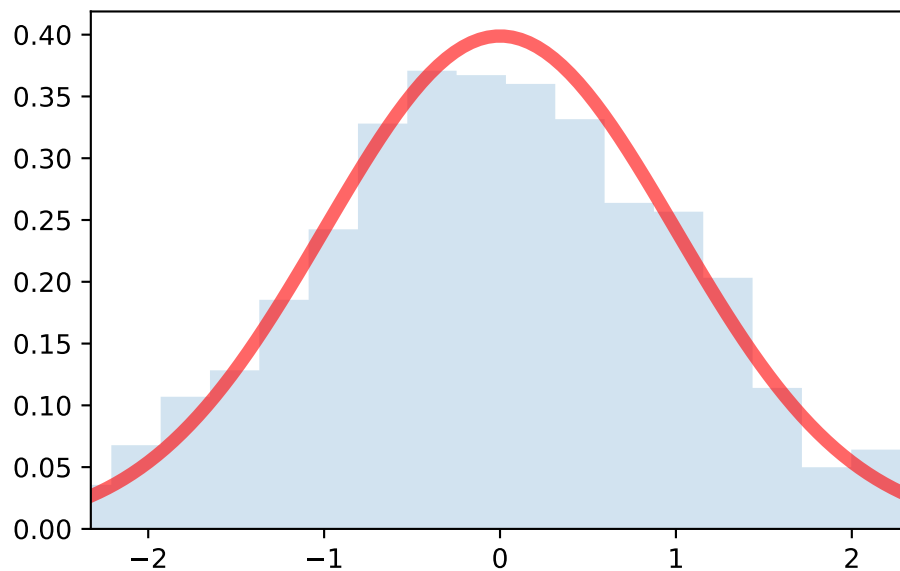
r = norm.rvs(size = 1000)

ax.hist(r, density = True, bins = 'auto', histtype = 'stepfilled', alpha = 0.2)
ax.set_xlim(x[0], x[-1])
ax.legend(loc='best', frameon = False)

```

No artists with labels found to put in legend. Note that artists whose label start with an

<matplotlib.legend.Legend at 0x21006984590>



```

from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from scipy.stats import multivariate_normal

x = np.linspace(0,5,100,endpoint = False)
y = multivariate_normal.pdf(x , mean = 2.5, cov = 0.5)

fig1 = plt.figure()
ax = fig1.add_subplot(111)
ax.plot(x,y)

```

```

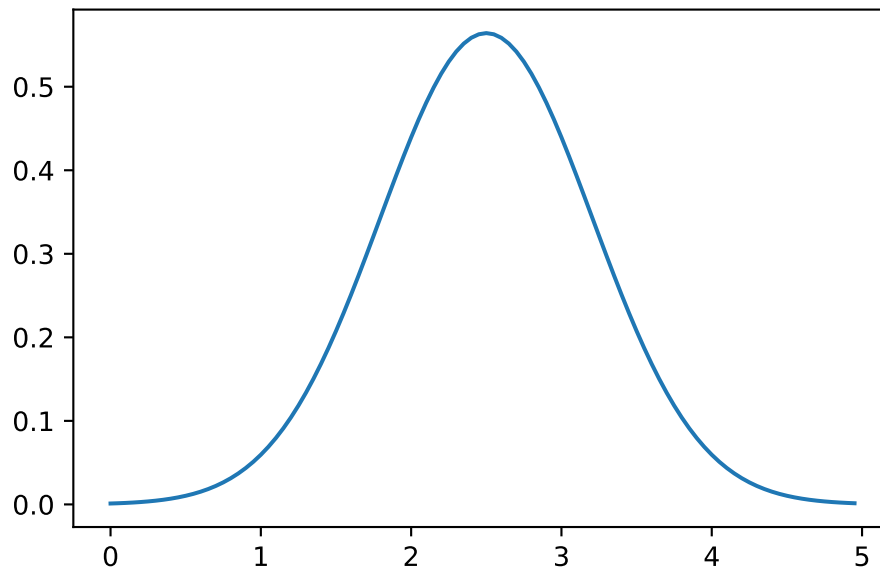
x, y = np.mgrid[-5:5:.1, -5:5:.1]

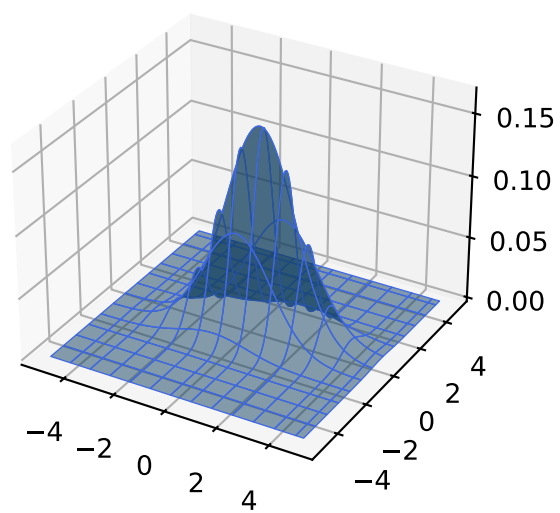
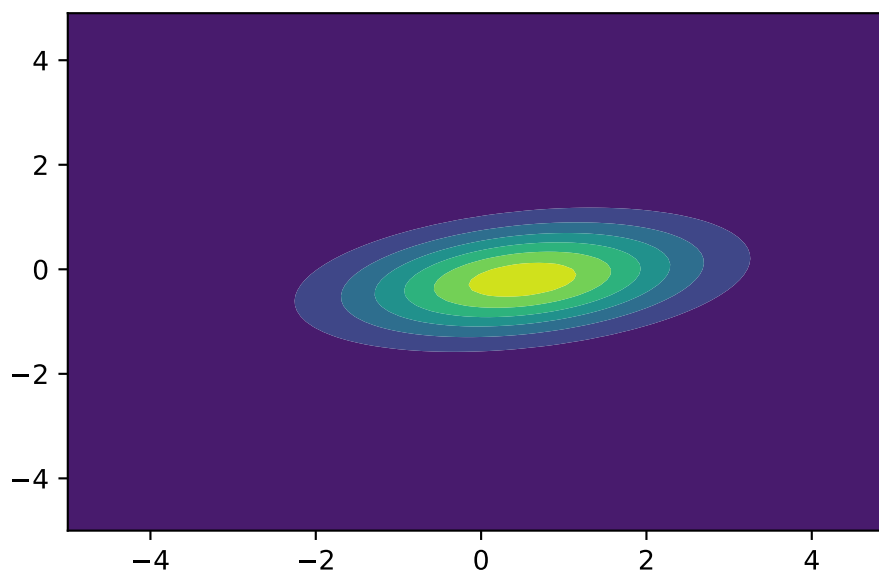
pos = np.dstack((x,y))
rv = multivariate_normal([0.5, -0.2], [[2.0,0.3], [0.3,0.5]])
fig2 = plt.figure()
ax2 = fig2.add_subplot(111)
ax2.contourf(x,y, rv.pdf(pos))

ax = plt.figure().add_subplot(projection = '3d')
ax.plot_surface(x,
                y,
                rv.pdf(pos),
                edgecolor = 'royalblue',
                lw = 0.5,
                rstride = 8,
                cstride = 8,
                alpha = 0.5)

```

<mpl\_toolkits.mplot3d.art3d.Poly3DCollection at 0x21006d0fb90>







### 3 Tarea 2

Sea  $X_i$  v.a.i.i.d tales que

$$\mathcal{P}[X_i = h] = \mathcal{P}[X_i = -h] = \frac{1}{2}, \forall i,$$

entonces definimos  $Y_{n,h}$ .  $\therefore$  Queremos calcular la función característica de  $Y_{n,\delta}$ .

$$E[i\lambda Y_{n,\delta}(t)],$$

Aprovechando que para cada  $X_i$  son v.a.i.i.d. Entonces, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} E[i\lambda Y_{n,\delta}(t)] &= (\cos(\lambda h))^{t/\delta} \\ &= u^t, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} u &= [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \\ \ln(u) &= \frac{1}{\delta} \ln[\cos(\lambda h)] \end{aligned}$$

Entonces, aproximaremos  $\cos(\lambda h)$  con su expansión de Taylor.

$$\cos(\lambda h) \approx 1 - \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!},$$

entonces

$$\begin{aligned} \ln(\cos(\lambda h)) &\approx \ln\left[1 - \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!}\right] \\ &\approx -\frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} u^t &\approx \exp \left[ \frac{t}{\delta} \left( -\frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} \right) \right], \\ &\approx \exp \left[ -\frac{t}{\delta} \left( \frac{\lambda^2 h^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^4}{24} \right) \right], \end{aligned}$$

Calculando el limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E \left[ \exp \left( i\lambda Y_{n,\delta}(t) \right) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left[ -t \left( \left[ \frac{h^2}{\delta} \right] \left( \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4 h^2}{24} \right) \right) \right],$$

si  $h^2/\delta \rightarrow \infty$  Segun la sucesión  $\delta_n \rightarrow 0$  tenemos limites diferentes, por lo tanto, este no existe. Ahora, usando la normalización, retomando las operaciones anteriores,

$$\begin{aligned} E \left[ \exp \left( i\lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2} \right) \right] &= E \left[ \exp \left( i\lambda \sum_{i=0}^n X_i + \frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) \right] \\ &= E \left[ \exp \left( i\lambda \sum_{i=0}^n X_i \right) \right] \exp \left( \frac{th^2\lambda^2}{2\delta} \right) \\ &= \left( [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \exp \left( \frac{h^2\lambda^2}{2\delta} \right) \right)^t, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} v &= [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \exp \left( \frac{h^2\lambda^2}{2} \right) \\ \ln v &= \ln \left[ [\cos(\lambda h)]^{1/\delta} \exp \left( \frac{h^2\lambda^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\delta} \ln [\cos(\lambda h)] + \frac{h^2\lambda^2}{2\delta} \\ &= \frac{1}{\delta} \left( \ln [\cos(\lambda h)] + \frac{h^2\lambda^2}{2} \right) \\ &\approx \frac{1}{\delta} \left( \ln \left[ \underbrace{1 - \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!}}_{x_0} \right] + \frac{h^2\lambda^2}{2} \right) \end{aligned}$$

recordando que

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2},$$

entonces

$$\ln v \approx \frac{1}{\delta} \left( \left[ -\frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} - \frac{\left( -\frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} \right)^2}{2} \right] + \frac{h^2 \lambda^2}{2} \right),$$

bajo la simplificación de que  $o(h^k) \equiv 0, k \geq 4$ , entonces

$$\begin{aligned} \ln v &\approx \frac{1}{\delta} \left( \frac{(\lambda h)^4}{24} - \frac{(\lambda h)^4}{8} \right) \\ &\approx \frac{1}{\delta} \left( \frac{(\lambda h)^4}{24} - \frac{3(\lambda h)^4}{24} \right) \\ v &\approx \exp \left( -\frac{(\lambda h)^4}{12\delta} \right) \end{aligned}$$

por lo tanto, si  $h^4/\delta \rightarrow 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E \left[ \exp \left( i\lambda Y_{n,\delta}(t) + \frac{th^2\lambda^2}{2} \right) \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \exp \left( -\frac{(\lambda h)^4}{12\delta} \right) = 1$$

## 4 Tarea 3

## 5 Ejercicio 3.1

Si  $X \sim N(\mu, \sigma)$  entonces  $\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) \sim N(0, 1)$ .

Calculemos la función característica de la variable  $\frac{X - \mu}{\sigma}$ ,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= E \left[ e^{it \left( \frac{X-\mu}{\sigma} \right)} \right] \\
 &= E \left[ e^{\left( \frac{itX}{\sigma} - \frac{it\mu}{\sigma} \right)} \right] \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} E \left[ e^{\left( \frac{itX}{\sigma} \right)} \right] \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{itx}{\sigma} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2}} dx
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
 \frac{(x - \mu)^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} &= \frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2itx\sigma}{\sigma^2} \\
 &= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} - \frac{2itx\sigma}{\sigma^2} \\
 &= \frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{2x}{\sigma} \left( \frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \\
 &= \left( \frac{x}{\sigma} - \left( \frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \left( \frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right)^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2} \\
 &= \left( \frac{x}{\sigma} - \left( \frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\sigma\mu}{\sigma^2} - \frac{(it\sigma)^2}{\sigma^2} \\
 &= \left( \frac{x}{\sigma} - \left( \frac{\mu + it\sigma}{\sigma} \right) \right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sustituyendo (5.2) en (5.1), resulta

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2 - \frac{2it\mu}{\sigma} + t^2\right]} dx \\
&= e^{-\frac{it\mu}{\sigma}} e^{\frac{it\mu}{\sigma} - \frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2} dx \\
&= e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}-\left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right)\right)^2} dx
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Sea  $u = \frac{x}{\sigma} - \left(\frac{\mu+it\sigma}{\sigma}\right) \Rightarrow du = \frac{1}{\sigma}dx$ , sustituyendo esto en (5.3), resulta

$$\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \tag{5.4}$$

de aquí se sigue que  $u \sim N(0, 1)$ , entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} dx = 1.$$

sustituyendo esto ultimo en (5.4), se tiene,

$$\varphi_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

que es la función característica de una Normal estándar, como las funciones características coinciden se concluye que  $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ .

## 6 Ejercicio 3.2

Si  $Y \sim N(0, 1)$  entonces  $\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$ . Calculemos la función característica de la variable  $\sigma Y + \mu$ ,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\sigma Y + \mu}(t) &= E[e^{it(\sigma Y + \mu)}] \\
 &= E[e^{it\sigma Y + it\mu}] \\
 &= e^{it\mu} E[e^{it\sigma Y}] \\
 &= e^{it\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
 &= e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2yit\sigma)} dy.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
 y^2 - 2yit\sigma &= (y - it\sigma)^2 - (it\sigma)^2 \\
 &= (y - it\sigma)^2 + t^2\sigma^2.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Sustituyendo, (6.2) en (6.1) resulta

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\sigma Y + \mu}(t) &= e^{it\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((y - it\sigma)^2 + t^2\sigma^2)} dy \\
 &= e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - it\sigma)^2} dy
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Tomando  $u = y - it\sigma \Rightarrow du = dy$ , se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - it\sigma)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

entonces  $U \sim N(0, 1)$ , por lo tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y - it\sigma)^2} dy = 1$$

sustituyendo esto ultimo en (6.3), resulta,

$$\varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Sea  $Z$  una variable aleatoria tal que  $Z \sim N(\mu, \sigma)$  sabemos que,

$$\varphi_Z(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

De estas dos ultimas igualdades se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{\sigma Y + \mu}(t).$$

Dado que tienen iguales funciones características se concluye que,

$$\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma)$$



## 7 Ejercicio 3.3

Si  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  además  $X$  y  $Y$  son independientes entonces  $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ . Por definición, se tiene que,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{X+Y}(t) &= E[e^{it(X+Y)}] \\
 &= E[e^{itX}e^{itY}] \text{ por ser independientes, del ejercicio 4} \\
 &= E[e^{itX}]E[e^{itY}] \\
 &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t).
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Por otro lado, sea  $Z$  una variables aleatoria tal que,  $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ , sabemos que la función característica de  $Z$ , esta dada por,

$$\begin{aligned}
 \varphi_Z(t) &= e^{it(\mu_1+\mu_2)-\frac{t^2}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \\
 &= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}+it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\
 &= e^{it\mu_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}}e^{it\mu_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \\
 &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t),
 \end{aligned}$$

entonces, de esta ultima igualdad y de (??) se sigue que,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t).$$

Como las funciones características coinciden se sigue que,  $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .

## 8 Ejercicio 3.4

Si  $X, Y$  son variables normales independientes. Entonces  $E[XY] = E[X] E[Y]$ .

Recrodemos que

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) \, dx dy$$

Como  $X, Y$  son independientes

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Entonces

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) \, dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) \, dx dy \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) \, dy \right] \\ &= E[X] E[Y] \end{aligned}$$

## 9 Ejercicio 3.5

Por Demostrar

$$\mathcal{P}[|X - \mu| \geq \epsilon] \leq \frac{\text{Var}[X]}{\epsilon^2}$$

Por la desigualdad de Chebysev, para  $X$  una variable aleatoria.

$$\mathcal{P}[X \geq \epsilon] \leq \frac{E[X]}{\epsilon}$$

Entonces, sea  $Y = |X - \mu|$ ,  $\mu = E[X]$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[|X - \mu| \geq \epsilon] &= \mathcal{P}[|X - \mu|^2 \geq \epsilon^2] \\ &\leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}[X]}{\epsilon^2} \end{aligned}$$

## 10 Ejercicio 3.6 (Ley de los grandes números)

Por demostrar

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con esperanza finita  $\mu = E[X_j]$  y varianza infinita.  $\sigma^2 = \text{Var}(X_j)$ . Sean  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Entonces para cada  $\epsilon > 0$ .

$$\mathcal{P} \left[ \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \rightarrow 0$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ \frac{S_n}{n} - \mu \right] &= \frac{1}{n^2} \text{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema de Chebysev

$$\mathcal{P} \left[ \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon},$$

notemos que para  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sigma^2}{n\epsilon} \rightarrow 0.$$

Entonces

$$\mathcal{P} \left[ \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \epsilon \right] \rightarrow 0$$

## 11 Ejercicio 3.7 (Teorema de Limite Central)

Sea  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  una secuencia de v.a.i.i.d con media  $a$  y varianza  $b^2$ . Entonces para doo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , con  $\alpha < \beta$ , entonces

$$\mathcal{P} \left( \lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^M X_i - Ma}{\sqrt{Mb}} \leq \beta \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp \left( -\frac{1}{2}x^2 \right) dx$$

Sea

$$Y_M = \frac{\sum_{i=1}^M [X_i - a]}{\sqrt{Mb}},$$

Definamos

$$\overline{S_M} = \sum_{i=1}^M [X_i - a],$$

entonces

$$Y_M = \frac{S_M}{\sqrt{Mb}}$$

demostraremos que la función generadora de momentos  $\varphi_M \rightarrow \varphi$  donde  $\varphi_m = \varphi_{Y_M}$  y  $\varphi$  es función generadora de momentos de la distribución normal estandar.

Ahora,

$$\begin{aligned} \varphi_M(t) &= E \left[ \exp \left( t \frac{S_M}{\sqrt{Mb}} \right) \right] \\ &= \varphi_{SM} \left( \frac{t}{\sqrt{Mb}} \right) \\ X_i \text{ v.a.i.i.d} &\Rightarrow = \left[ \varphi_{(X_1-a)} \left( \frac{t}{\sqrt{Mb}} \right) \right]^M \\ &= \left[ E \left[ \exp \left( \frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right) \right] \right] \end{aligned}$$

Recordando la serie de Taylor

$$\begin{aligned}
\varphi_M(t) &= \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{E \left[ \left( \frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right)^i \right]}{i!} \right]^M \\
&= \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{t}{b\sqrt{M}} \right)^2 E[(X_1 - a)^2] + \epsilon(3) \right]^M \\
&= \left[ 1 + \frac{1}{M} \frac{t^2}{2} + \epsilon(3) \right]^M,
\end{aligned}$$

donde

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E \left[ \left( \frac{t}{b\sqrt{M}} (X_1 - a) \right)^i \right]}{i!},$$

Sea  $s = \frac{t}{b\sqrt{M}}$ , entonces  $s \rightarrow 0, t \rightarrow 0$

$$\epsilon(3) = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E[(X_1 - a)^i] s^i}{i!}$$

Notemos que, si  $\varphi_1$  existe. Entonces

$$\frac{\epsilon(3)}{s^2} = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{E[(X_1 - a)^i] s^{i-2}}{i!} \rightarrow 0, s \rightarrow 0.$$

Además  $s \rightarrow 0$  cuando  $M \rightarrow \infty$ .

$$\Rightarrow \varphi_M(t) = \left[ 1 + \frac{1}{M} \left[ \frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) \right] \right]^M,$$

Entonces  $\epsilon(3) s^{-2} = M\epsilon(3) b^2 t^{-2} \rightarrow 0$ . Como  $b, t$  estan fijas.

$$M\epsilon(3) \rightarrow 0, M \rightarrow \infty,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3) &\rightarrow \frac{t^2}{2}, M \rightarrow \infty \\ \left[1 + \frac{1}{M} \left[\frac{t^2}{2} + M\epsilon(3)\right]\right]^M &\rightarrow \exp(t^2), M \rightarrow \infty \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \varphi_M(t) &= \exp(t^2) = \varphi(t),\end{aligned}$$

la función generadora de momentos de la distribución normal estándar. Por lo tanto

$$F_M(x) \rightarrow F_{N(0,1)}(x)$$

$$\begin{aligned}F_M(b) - F_M(a) &\rightarrow F_N(b) - F_N(a) \\ \mathcal{P} \left( \lim_{M \rightarrow \infty} \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^M X_i - Ma}{\sqrt{Mb}} \leq \beta \right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx\end{aligned}$$

## 12 Ejercicio 3.8

Sea  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  una sucesión de v.a.i.i.d con media  $a$ . Entonces

$$\mathcal{P} \left[ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i = a \right] = 1.$$

Esto es similar a decir que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \stackrel{\text{c.s.}}{=} a$$

Sin pérdida de generalidad, diremos que  $X_i \geq 0, \forall i$ . Definamos

$$Y_n = X_n I_{[|X_n| \leq n]}, Q_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

Por la desigualdad de

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P} \left[ \left| \frac{Q_n - E[Q_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Q_n)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(Y_n^2)}{\epsilon^2 n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2 n^2} \int_0^n x^2 dF \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^n x dF < \infty, \end{aligned}$$

donde  $F$  es la función de distribución de  $X_i$ . Luego

$$E[X_1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x dF = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E[Q_n]}{n}.$$

Entonces, por el Lema de Borel Canteli.  $\mathcal{P} \left[ \limsup \left( \left| \frac{Q_n - E[Q_n]}{n} \right| \geq \epsilon \right) \right] = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{n} = E[X_1], \text{ c.s.}$$



Ahora, calcularemos la siguiente probabilidad

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i \neq Y_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i > n]$$

como  $E[X_i] < \infty$  y  $X_i$  son v.a.i.i.d.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}[X_i > n] \leq E[X_1] < \infty$$

De nuevo, por el Lema de Borel Cantelli.

$$\mathcal{P}[\limsup [X_i \neq Y_i]] = 0, \forall i$$

Entonces

$$\begin{aligned} X_i &= Y_i, \text{ c.s} \\ \Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i &\rightarrow E[X_1] = \mu. \text{ c.s} \end{aligned}$$

## 13 Tarea 4

Sea  $W(t)$  un movimiento Browniano estándar en  $[0, T]$ . Pruebe que para cualquier  $c > 0$  fijo,

$$V(t) = \frac{1}{c} W(c^2 t)$$

es un movimiento Browniano sobre  $[0, T]$ .

### 13.0.1 Demostración

Demostraremos que  $V$  cumple las propiedades del movimiento Browniano.

#### 13.0.1.1 Propiedad 1

Es claro que  $V(0) = \frac{1}{c} W(c^2 0) = 0$ .

#### 13.0.1.2 Propiedad 2 (Incrementos Independientes)

Sean  $s < t < u < v$  tenemos que

$$E[(V(t) - V(s))(V(v) - V(u))] = \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))(W(c^2 v) - W(c^2 u))]$$

Como el browniano tiene incrementos independientes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))(W(c^2 v) - W(c^2 u))] &= \frac{1}{c^2} E[(W(c^2 t) - W(c^2 s))] E[(W(c^2 v) - W(c^2 u))] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces  $V$  tiene incrementos independientes.

### 13.0.1.3 Propiedad 3 (Incrementos estacionarios)

Considere  $s < t$ .

$$V(t) - V(s) = \frac{1}{c} [W(c^2 t) - W(c^2 s)]$$

Por propiedades del movimiento Browniano.

$$\begin{aligned} E[V(t) - V(s)] &= \frac{1}{c} E[W(c^2 t) - W(c^2 s)] = 0 \\ \text{Var}[V(t) - V(s)] &= \frac{1}{c^2} \text{Var}[W(c^2 t) - W(c^2 s)] = \frac{1}{c^2} (c^2 (t - s)) = t - s \end{aligned}$$

Entonces  $V$  tiene incrementos estacionarios.

### 13.0.2 Por lo tanto, $V$ es un movimiento browniano.

Hacer un script para ilustrar la propiedad de escalado del movimiento Browniano para el caso de  $c = \frac{1}{5}$ . Estar seguro que usa el mismo camino browniano discretizado en cada subplot.

El código, se encuentra en `hw4_p2.py`. Pero aquí se muestran los resultados.

```
# Importamos las librerías necesarias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Comenzaremos simulando el movimiento browniano fuerte.

prng = np.random.RandomState(10) # Fijamos la semilla.

t_final = 1 # Extremo derecho del intervalo [0,T]
n_points = 64 # No olvidemos que aquí se incluye el 0 y t.
dt = 1 / (n_points - 1) # Ajuste al delta t

dw = np.sqrt(dt) * prng.standard_normal(n_points - 1) # Calculamos los incrementos.
w = np.concatenate(([0], dw.cumsum()))

time = np.linspace(0, t_final, n_points) # Vector de tiempo.

# plt.plot(time, w)          Graficamos el browniano base.
# plt.show()
```

```

"""
Ahora, comenzamos con el browniano escalado.
"""
c = 0.2 # 1/5

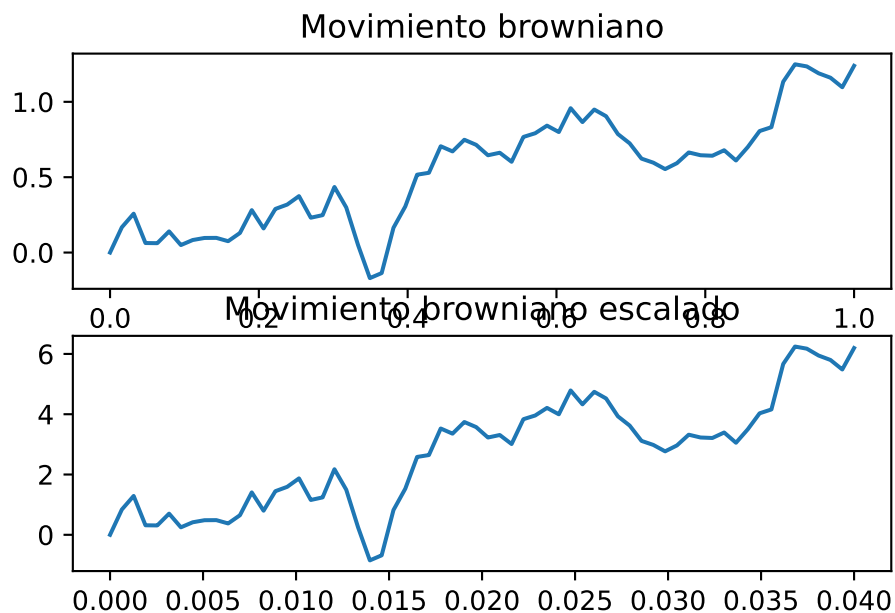
"""
Esto tiene dos interpretaciones.
Sin embargo, para este ejercicio debemos partir de una trayectoria dada, entonces haremos
"""

c_time = c**2 * time # Transformamos el intervalo del tiempo
c_w = c**(-1) * w # Escalamos el browniano.

print("El valor de c es ",c)
fig, cbrown = plt.subplots(2)
cbrown[0].plot(time, w)
cbrown[1].plot(c_time, c_w)
cbrown[0].set_title('Movimiento browniano')
cbrown[1].set_title('Movimiento browniano escalado')
plt.show()

```

El valor de c es 0.2



Modifique el script `half_brownian_refinement.py` encapsulando el código en una función. Esta función deberá recibir el extremo derecho del intervalo  $[0, T]$  y el número de incrementos  $N$  de un camino browniano base. El propósito es calcular los incrementos de relleno de un refinamiento con  $2N$  incrementos.

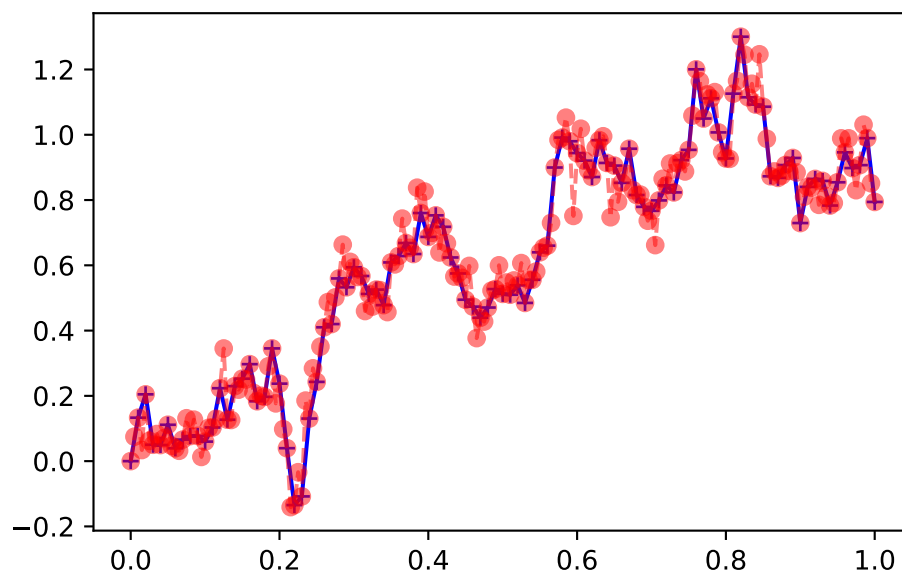
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
prng = np.random.RandomState(10)

def refined_brownian_2n(T,L):
    dt = T / L
    W = np.zeros(L + 1)
    W_refined = np.zeros(2 * L + 1)
    xi = np.sqrt(dt) * prng.normal(size=L)
    xi_half = np.sqrt(0.5 * dt) * prng.normal(size=L)
    W[1:] = xi.cumsum()
    W_ = np.roll(W, -1)
    W_half = 0.5 * (W + W_)
    W_half = np.delete(W_half, -1) + xi_half
    W_refined[1::2] = W_half
    W_refined[2::2] = W[1:]
    t = np.arange(0, T + dt, dt)
    t_half = np.arange(0, T + 0.5 * dt, 0.5 * dt)
    return t, t_half, W, W_refined
```

En un script separado, incluya la función de arriba y grafique una figura con la trayectoria del browniano con 100 incrementos y muestre su refinamiento correspondiente.

```
time, bi_time, w, bi_w = refined_brownian_2n(1,100)

plt.plot(time, w, 'b-+')
plt.plot(
    bi_time,
    bi_w,
    'ro--',
    alpha=0.5
)
plt.show()
```



## 14 Tarea 5

**Exercise 14.1.** Muestre que el movimiento Browniano satisface

$$E \left[ |W(t) - W(s)|^2 \right] = |t - s|$$

Si  $t > s$ .

$$\begin{aligned} E \left[ |W(t) - W(s)|^2 \right] &= E \left[ (W(t) - W(s))^2 \right] \\ &= t - s, \end{aligned}$$

mientras que si  $t \leq s$ .

$$\begin{aligned} E \left[ (W(t) - W(s))^2 \right] &= E \left[ (W(s) - W(t))^2 \right] \\ &= s - t, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$E \left[ |W(t) - W(s)|^2 \right] = |t - s|$$

**Exercise 14.2.** Dado  $W(t_i)$  y  $W(t_{i+1})$ , muestre que la variable aleatoria

$$W\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right) := \frac{1}{2} [W(t_i) + W(t_{i+1})] + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta t} \xi, \xi \sim N(0, 1)$$

es un movimiento Browniano.

**14.0.0.0.1 Es claro que al ser un refinamiento del movimiento browniano.**

$$W(0) = 0$$

**14.0.0.0.2  $C_2$ . Notemos que**

$$W_{i+\frac{i}{2}} - W_i = \frac{1}{2} [W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta t} \xi,$$

Sabemos que la combinación lineal de normales es una normal. Luego, partiendo que  $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ .

$$\begin{aligned} E [W_{i+\frac{i}{2}} - W_i] &= 0, \\ \text{Var} [W_{i+\frac{i}{2}} - W_i] &= \frac{1}{4} \Delta t + \frac{1}{4} \Delta t = \frac{1}{2} \Delta t, \end{aligned}$$

Por lo tanto  $W_{i+\frac{1}{2}} - W_i \sim N\left(0, \frac{\Delta t}{2}\right)$ .

**14.0.0.0.3 Calculamos la esperanza.**

$$E \left[ (W_{i+1} - W_{i+\frac{1}{2}}) (W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}}) \right] = E \left[ \left( \frac{1}{2} [W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right) \frac{1}{2} [W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right]$$

defina  $dW_i = W_{i+1} - W_i$ ,



$$\begin{aligned}
E \left[ (W_{i+1} - W_{i+\frac{1}{2}}) (W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}}) \right] &= E \left[ \left( \frac{1}{2} dW_i + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right) \left( \frac{1}{2} dW_j + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right) \right] \\
&= E \left[ \frac{1}{4} dW_i dW_j + \frac{1}{2} dW_i \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi + \frac{1}{2} dW_j \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi + \left( \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right)^2 \right] \\
dW_i, dW_j \text{ son independientes} &= \left( E \left[ \frac{1}{2} dW_i \right] \right) \left( E \left[ \frac{1}{2} dW_j \right] \right) + E \left[ \frac{1}{2} dW_i \right] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] \\
&\quad + E \left[ \frac{1}{2} dW_j \right] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] + \frac{\Delta t}{4} (E[\xi])^2 \\
&= \left( E \left[ \frac{1}{2} dW_i \right] \right) \left( E \left[ \frac{1}{2} dW_j + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right] \right) + E \left[ \frac{1}{2} dW_j \right] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] + \frac{\Delta t}{4} (E[\xi])^2 \\
&= \left( E \left[ \frac{1}{2} dW_i \right] \right) (E[(W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}})]) + E \left[ \frac{1}{2} dW_j \right] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] + \frac{\Delta t}{4} (E[\xi])^2 \\
&= \left( E \left[ \frac{1}{2} dW_i \right] \right) (E[(W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}})]) + E \left[ \frac{1}{2} dW_j + \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} \xi \right] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] \\
&= \left( E \left[ \frac{1}{2} dW_i \right] \right) (E[(W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}})]) + E[(W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}})] \sqrt{\frac{\Delta t}{4}} E[\xi] \\
&= E[(W_{i+1} - W_{i+\frac{1}{2}})] E[(W_{j+1} - W_{j+\frac{1}{2}})],
\end{aligned}$$

teniendo así, que los incrementos son independientes.

**Exercise 14.3.** Generalice la fórmula del ejercicio anterior para en el caso donde,  $W(t_i), W(t_{i+1})$ , y  $\alpha \in (0, 1)$  el valor

$$W(t_i + \alpha \Delta t),$$

es un movimiento Browniano.

Notemos que

$$t_i + \alpha \Delta t + (1 - \alpha) \Delta t = t_{i+1},$$

entonces vamos a definir

$$\begin{aligned}
W_{i+\alpha} &= W(t_i + \alpha \Delta t) \\
&= (1 - \alpha) W_i + \alpha W_{i+1} + Y,
\end{aligned}$$

donde  $Y$  será una v.a independiente de  $W(t)$ . Entonces

$$\begin{aligned}
W_{i+\alpha} - W_i &= (1 - \alpha) W_i + \alpha W_{i+1} + Y - W_i \\
&= \alpha (W_{i+1} - W_i) + Y \\
&= \alpha (W_{i+1} - W_i) + Y.
\end{aligned}$$

Entonces

$$E[W_{i+\alpha} - W_i] = E[Y],$$

por lo tanto,  $E[Y]$  tiene que ser cero. Luego

$$\text{Var}[W_{i+\alpha} - W_i] = \alpha^2 \Delta t + \text{Var}[Y],$$

notemos que

$$(i + \alpha) \Delta t - i \Delta t = \alpha \Delta t,$$

por lo tanto tendría que cumplirse  $\text{Var}[W_{i+\alpha} - W_i] = \alpha \Delta t$ .

$$\alpha^2 \Delta t + \text{Var}[Y] = \alpha \Delta t,$$

entonces

$$\text{Var}[Y] = \Delta t (\alpha - \alpha^2),$$

como  $Y = \sqrt{\alpha(1-\alpha)}\xi$ ,  $\xi \sim N(0, 1)$ . Como este es un refinamiento del browniano, entonces se cumple C1.

$$W(0) = 0.$$

Conseguimos C2 por construcción y de forma análoga tenemos la independiencia de los incrementos.

$$E[(W_{i+\alpha} - W_i)(W_{j+\alpha} - W_j)] = E[W_{i+\alpha} - W_i] E[W_{j+\alpha} - W_j].$$

**Exercise 14.4.** Suponga que  $X \sim N(0, 1)$ . Sabemos que  $E[X] = 0$  y  $E[X^2] = 1$ . Luego, de la definición, el  $p$ -ésimo momento satisface

$$E[X^p] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Usando la relación, muestre que  $E[X^3] = 0$  y  $E[X^4] = 1$ .

Entonces deduzca el incremento Browniano,

$$\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i),$$

satisface  $E[\Delta W_i^3] = 0$ ,  $E[\Delta W_i^4] = 3(\Delta t)^2$ . Entonces encuentre una expresión para  $E[X^p]$  para un entero positivo  $p$ . Pista: Tu puedes usar el dato que  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$ .

Considere la fórmula.

$$E[X^p] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx.$$

Partiendo la integral,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx}_{I_2}$$

Entonces

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx,$$

hagamos el cambio de variable.  $y = -x$ , tenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^0 -(-y)^p \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) Dy \\ &= \frac{(-1)^p}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^p \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) Dy = I_2 (-1)^p, \end{aligned}$$

entonces

$$E[X^p] = (1 + (-1)^p) I_2,$$

de aqui tenemos, que si  $p$  es impar  $E[X^p] = 0$ , entonces si  $p$  es par

$$E[X^p] = 2I_2,$$

entonces, nos concentraremos en

$$E[X^p] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^p \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) Dx, p = 2k, k \in \mathbb{N}$$

Considere  $y = \frac{x^2}{2}, Dy = xDx$ .

$$E[X^p] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{p-1} \exp(-y) Dy,$$

luego  $\sqrt{2y} = x$ , entonces

$$\begin{aligned} E[X^p] &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (\sqrt{2y})^{p-1} \exp(-y) \mathrm{D}y \\ &= \frac{2(\sqrt{2})^{p-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{\frac{p-1}{2}} \exp(-y) \mathrm{D}y \\ &= \frac{2(\sqrt{2})^{p-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{\frac{p+1}{2}-1} \exp(-y) \mathrm{D}y, \end{aligned}$$

recordando la función Gamma.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-t} \mathrm{D}t,$$

entonces

$$E[X^p] = \begin{cases} 0 & p \text{ impar} \\ \frac{2^{\frac{p+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) & p \text{ par} \end{cases},$$

$$\text{entonces } E[X^4] = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{3}{2}} e^{-x} \mathrm{D}x.$$

Considere

$$\begin{aligned} u &= x^{3/2} \mathrm{D}v = e^{-x} \mathrm{D}x \\ \mathrm{D}u &= \frac{3}{2} x^{1/2} v = -e^{-x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= [-x^{3/2} e^{-x}] + \frac{3}{2} \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} \mathrm{D}x \\ &= \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$E[X^4] = 3$$

Notemos que si  $\Delta W \sim N(0, \sigma^2)$ , entonces

$$Z = \frac{\Delta W}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

En general,

$$E[(\Delta W)^p] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^p \exp\left(-\left(\frac{w}{\sigma}\right)^2\right) Dw,$$

considere  $\sigma u = w$ , entonces

$$\begin{aligned} E[(\Delta W)^p] &= \sigma^p \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^p \exp(-u^2) Dw \right], \\ &= \sigma^p E[Z^p], \end{aligned}$$

entonces para  $p = 4, \sigma^2 = \Delta t$ .

$$E[(\Delta W)^4] = (\Delta t)^2 E[Z^4] = 3(\Delta t)^2$$

**Exercise 14.5.** Suponga que  $X \sim N(0, 1)$ . Muestre que para  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$E[\exp(a + bX)] = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right).$$

Deduzca que

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = \exp\left(\frac{33}{32}t\right)$$

Considere

$$E[\exp(a + bX)] = e^a E[\exp(bX)],$$

notemos que  $bX \sim N(0, b^2)$ , por lo tanto, la función generadora de momentos nos dice que

$$E[\exp(bX)] = M_{bX}(1) = \exp\left(\frac{b^2}{2}\right),$$

por lo tanto

$$E[\exp(a + bX)] = e^a \exp\left(\frac{b^2}{2}\right) = \exp\left(a + \frac{1}{2}b^2\right),$$

ahora, considere

$$E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}W_t\right)\right] = E\left[\exp\left(t + \frac{1}{4}(W_t - W_0)\right)\right],$$

Notemos que  $W_t - W_0 \sim N(0, t)$ , por lo tanto, usando la fórmula anterior

$$\begin{aligned}
E \left[ \exp \left( t + \frac{1}{4} (W_t - W_0) \right) \right] &= \exp \left( t + \frac{1}{4} (\sqrt{t} X) \right), X \sim N(0, 1) \\
&= \exp \left( t + \left( \frac{1}{4} \sqrt{t} \right) X \right) = \exp \left( t + \frac{t}{32} \right) \\
&= \exp \left( \frac{33}{32} t \right)
\end{aligned}$$

## 15 Tarea 6

**Exercise 15.1.** Hacer un script para simular 10000 trayectorias del proceso  $u(t, W_t)$  definido en el Ejercicio. Grafique en una figura, 10 trayectorias y la media de las 10000 trayectorias del proceso  $u(t, W_t)$ .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n
    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)
    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()
        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w

def b_function(t, a, w):
    y = np.exp(t - a * w)
    return y

n_samples = 10000
n_points = 64
t_initial = 0
t_final = 1

mean = np.zeros(n_points)
for i in range(n_samples):
    time, b_w = strong_brownian(t_final, n_points)
    y = b_function(time, 0.25, b_w)
    if i < 10:
```

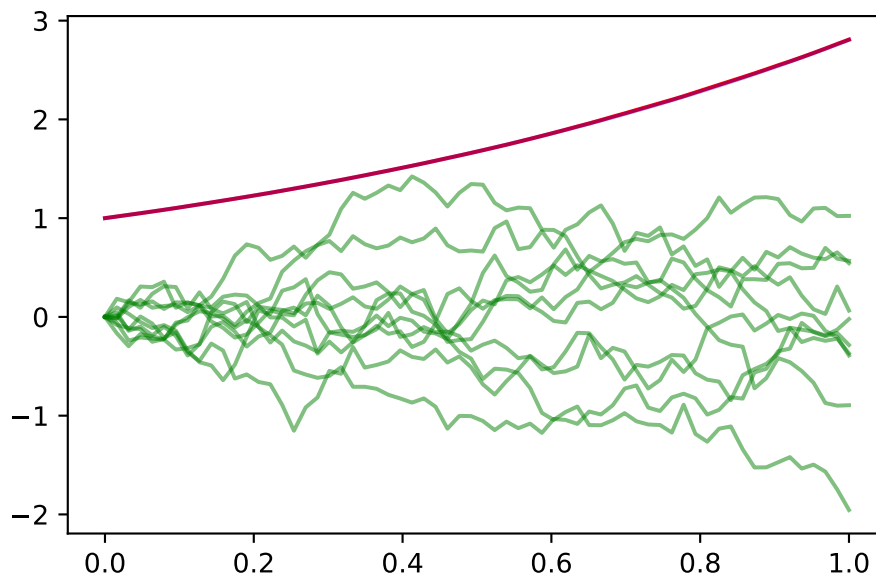
```

plt.plot(time, b_w, 'g-', alpha=0.5)
mean += y

mean = (n_samples)**(-1) * mean
time = np.linspace(0, t_final, n_points)

y = [np.exp(33 / 32 * t) for t in time]
plt.plot(time, mean, 'r-')
plt.plot(time, y, 'b-', alpha=0.3)
plt.show()

```



**Exercise 15.2.** Siguiendo las ideas del refinamiento del camino browniano.  $t_{i+1/2} = t_i + \frac{1}{2}\delta t$ . Hacer un código de Python para el refinamiento del Browniano para  $\alpha \in (0, 1)$  para el refinamiento  $t_{i+} = t_i + t$

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def strong_brownian(t, n):
    dt = t / n
    dw = np.zeros(n)
    w = np.zeros(n)

```



```

    for i in np.arange(1, n):
        dw[i] = np.sqrt(dt)*np.random.standard_normal()
        w[i] = w[i - 1] + dw[i]
    time = np.linspace(0, t, n)
    return time, w

t_final = 1
n_points = 65
delta_t = 1/(n_points - 1)
alpha = 0.7

prng = np.random.RandomState(219)

time, w = strong_brownian(1, n_points) # w_i

y = np.sqrt(delta_t * (alpha - alpha ** 2)) * prng.standard_normal(n_points - 1)

w_ = np.roll(w, -1) # w_{i+1}

w_alpha = alpha * w_ + (1 - alpha) * w
w_alpha = np.delete(w_alpha, -1)
w_alpha += y
w_ref = np.zeros(2 * n_points - 1)

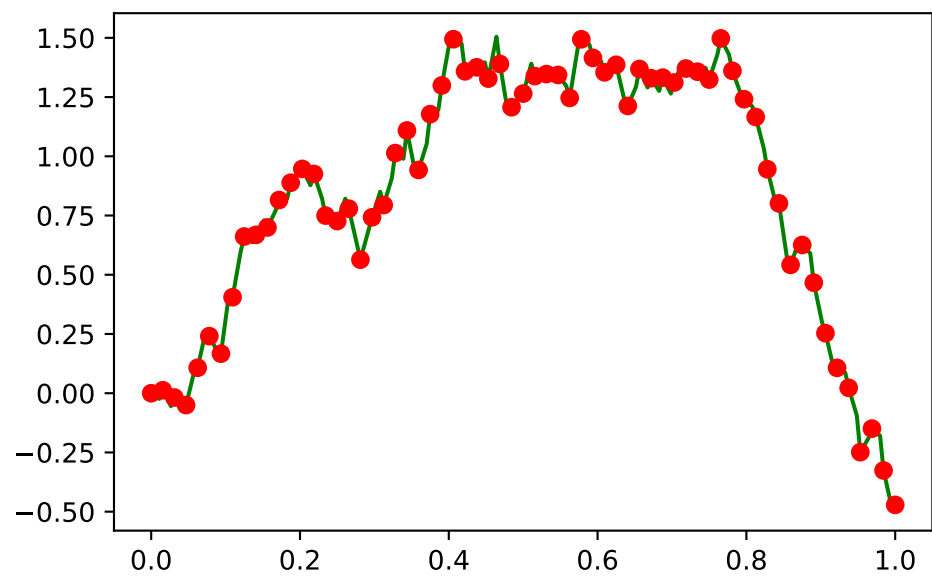
w_ref[0::2] = w
w_ref[1::2] = w_alpha

time_ref = np.zeros(2 * n_points - 1)

for i in range(2 * n_points - 1):
    if i % 2 == 0:
        time_ref[i] = time[int(i / 2)]
    else:
        time_ref[i] = time[int(i / 2)] + alpha * delta_t

plt.plot(time_ref, w_ref, 'g-')
plt.plot(time, w, 'ro')
plt.show()

```



## 16 Tarea 7

Sea  $W(t)$  un Movimiento Browniano y  $Z_i$  una colección de variables aleatorias i.i.d, con distribución  $N(0, \frac{\delta t}{4})$ .

Pruebe que la suma

$$\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)),$$

tiene valor esperado igual a cero y una varianza de  $O(\delta t)$ .

Sin perdida de generalidad supongamos que  $Z_i$  y  $W(t_{i+1}) - W(t_i)$  son variables aleatorias independientes para cada  $i = 1, \dots, L$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] &= \sum_{i=0}^L \mathbb{E} [Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i))] \\ &= \sum_{i=0}^L \mathbb{E}(Z_i) \mathbb{E}(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} Var \left[ \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 \right] + \left( \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

por el Teorema multinomial, resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^L [Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i))]^2 + 2 \sum_{i \neq j}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) Z_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)) \right] \\ &= \sum_{i=0}^L \mathbb{E} [Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i))]^2 + 2 \sum_{i \neq j}^L \mathbb{E} [Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) Z_j (W(t_{j+1}) - W(t_j))] \\ &= \sum_{i=0}^L \mathbb{E} [Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i))]^2 + 2 \sum_{i \neq j}^L \mathbb{E} [Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) Z_j (W(t_{j+1}) - W(t_j))] \end{aligned}$$

observemos que, si  $i < j$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))Z_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))] &= \mathbb{E}\{\mathbb{E} [Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))Z_j(W(t_{j+1}) - W(t_j))|\mathcal{F}_j]\} \\ &= \mathbb{E}[Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))Z_j]\mathbb{E} [(W(t_{j+1}) - W(t_j))|\mathcal{F}_j] \\ &= 0\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [Z_i(W(t_{i+1}) - W(t_i))]^2 &= \mathbb{E}\{\mathbb{E} [Z_i^2(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2|\mathcal{F}_j]\} \\ &= \mathbb{E}\{Z_i^2\mathbb{E} [(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2|\mathcal{F}_j]\} \\ &= \mathbb{E}[Z_i^2](t_{i+1} - t_i) \\ &= \frac{\delta t}{4}(t_{i+1} - t_i)\end{aligned}$$

sustituyendo resulta

$$\begin{aligned}Var \left[ \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] &= \sum_{i=0}^L \frac{\delta t}{4} (t_{i+1} - t_i) \\ &= \frac{\delta t}{4} (t_{L+1} - t_0).\end{aligned}$$

Para un  $L$  suficientemente grande, se tiene que,  $(t_{L+1} - t_0) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ , así

$$Var \left[ \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right] \leq \varepsilon \delta t.$$

Así, la varianza es de orden  $\delta t$ .

2.- La regla del punto medio de la integral de Riemann de una función  $h \in C^2([a, b])$  sobre una partición de  $L$  puntos del intervalo  $[a, b]$  está dada por,

$$\int_a^b h(t)dt = \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L h\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) \delta t.$$

Use la relación

$$W\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) = \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + \underbrace{Z_i}_{i.i.d. \sim N(0, \delta t/4)},$$

y el ejercicio anterior para demostrar que la regla del punto medio de la integral de Riemann implica que

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W(T)^2.$$

Sea  $\Delta_L = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$  una partición del intervalo  $[0, T]$ . De la regla del punto medio para  $h(t) = W(t)$ , resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^T W(t) dW(t) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L W\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L \left[ \frac{1}{2} (W(t_i) + W(t_{i+1})) + Z_i \right] (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L \frac{1}{2} (W(t_{i+1})^2 - W(t_i)^2) + \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (W(T)^2 - W(0)^2) + \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \frac{1}{2} W(T)^2 + \lim_{\delta t \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i))
\end{aligned}$$

Solo falta ver que

$$\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \rightarrow 0 \text{ en } L^2$$

es decir,

$$\lim_{\|\Delta_L\| \rightarrow 0} E \left[ \left( \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 \right] = 0$$

Del ejercicio anterior se tiene que

$$E \left[ \left( \sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 \right] = O(\delta t) \leq \varepsilon \|\Delta_L\|,$$

así, tomando el limite cuando  $\|\Delta_L\| \rightarrow 0$  se tiene que,

$$\sum_{i=0}^L Z_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \rightarrow 0 \text{ en } L^2$$

Usando la aproximación de la suma de Riemann

$$\int_0^T h(t) dW(t) \sim \sum_{i=0}^L h(t_i) (W(t_{i+1}) - W(t_i)),$$

argumente que,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T t dW(t) \right)^2 \right] = \frac{T^3}{3}.$$

Por tanto, enuncie la isometría de Itô y deduzca que esta isometría es válida para el caso  $h(t) = t$ .

Sea  $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$  una partición del intervalo  $[0, T]$ . De la aproximación de la suma de Riemann, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^T t dW(t) &\sim \sum_{i=0}^L t_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ \Rightarrow \left( \int_0^T t dW(t) \right)^2 &\sim \left( \sum_{i=0}^L t_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2, \end{aligned}$$

por el Teorema Multinomial, resulta

$$\left( \sum_{i=0}^L t_i (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right)^2 = \sum_{i=0}^L t_i^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 + 2 \sum_{i \neq j} t_i t_j (W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{j+1}) - W(t_j))$$

entonces sustituyendo esto, resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T t dW(t) \right)^2 \right] &\sim \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^L t_i^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 + 2 \sum_{i \neq j} t_i t_j (W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \right] \\ &= \sum_{i=0}^L t_i^2 \mathbb{E} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 + 2 \sum_{i \neq j} t_i t_j \mathbb{E} [(W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{j+1}) - W(t_j))] \\ &= \sum_{i=0}^L t_i^2 (t_{i+1} - t_i), \end{aligned}$$

observemos que,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L t_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \int_0^T t^2 dt = \frac{T}{3}$$

entonces

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T t dW(t) \right)^2 \right] = \frac{T}{3}.$$

Además, de la isometria de Itô,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T t dW(t) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T t dW(t) \right) \left( \int_0^T t dW(t) \right) \right] \\ &= \int_0^T \mathbb{E}(t^2) dt \\ &= \int_0^T t^2 dt \\ &= \frac{T}{3} \end{aligned}$$

Escriba una función de Python para calcular la integral de It<sup>o</sup> del movimiento Browniano  $W(t)$  sobre  $[0, T]$ . La función tendría la siguiente firma.

## 17 Tarea 8

Use la aproximación de la suma de Riemann la ecuación 6.1. Muestra la propiedad de linealidad de la integral estocástica. Es decir,

$$\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t)) dW_t = \alpha \int_0^T f(t) dW_t + \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

Sea  $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_{L-1}, t_L = T\}$  una partición del intervalo  $[0, T]$ , de la aproximación de la suma de Riemann, resulta

$$\begin{aligned} \int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t)) dW_t &\sim \sum_{i=0}^L (\alpha f(t_i) + \beta g(t_i))(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \sum_{i=0}^L \alpha f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \sum_{i=0}^L \beta g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^L f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \beta \sum_{i=0}^L g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \end{aligned}$$

tomando el limite cuando  $L \rightarrow \infty$ , resulta

$$\alpha \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \alpha \int_0^T f(t) dW_t$$

y

$$\beta \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^L g(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

así,

$$\int_0^T (\alpha f(t) + \beta g(t)) dW_t = \alpha \int_0^T f(t) dW_t + \beta \int_0^T g(t) dW_t$$

Escriba con detalle la demostración del siguiente Teorema, también incluya la demostración del Lema 5.18 del Mao. Teorema: Sea  $f \in \mathcal{M}^2([0, T]; \mathbb{R})$ , sea  $\rho, \tau$  dos tiempos de paro tales



que  $0 \leq \rho \leq \tau \leq T$ . Entonces

$$\mathbb{E} \left( \int_{\rho}^{\tau} f(s) dW_s \mid \mathcal{F}_{\rho} \right) = 0, \quad (17.1)$$

$$\mathbb{E} \left( \left| \int_{\rho}^{\tau} f(s) dW_s \right|^2 \mid \mathcal{F}_{\rho} \right) = \mathbb{E} \left( \int_{\rho}^{\tau} |f(s)|^2 ds \mid \mathcal{F}_{\rho} \right). \quad (17.2)$$

Por el Teorema 5.14 y el teorema de paro de la martingala de Doob,

$$E(I(\tau) | \mathcal{F}_{\rho}) = I(\rho) \quad (17.3)$$

y

$$E(I^2(\tau) - \langle I, I \rangle_{\tau} | \mathcal{F}_{\rho}) = I^2(\rho) - \langle I, I \rangle_{\rho}, \quad (17.4)$$

donde  $\{\langle I, I \rangle_t\}$  es definido por 5.18. Aplicando el Lema 5.18 se ve entonces de 5.22 que

$$\mathbb{E} \left( \int_{\rho}^{\tau} f(s) dB_s \mid \mathcal{F}_{\rho} \right) = \mathbb{E}(I(\tau) - I(\rho) | \mathcal{F}_{\rho}) = 0$$

que es (5.20). Además, por (5.22) y (5.23),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|I(\tau) - I(\rho)|^2 | \mathcal{F}_{\rho}) &= \mathbb{E}(I^2(\tau) | \mathcal{F}_{\rho}) - 2I(\rho)\mathbb{E}(I(\tau) | \mathcal{F}_{\rho}) + I^2(\rho) \\ &= \mathbb{E}(I^2(\tau) | \mathcal{F}_{\rho}) - I^2(\rho) = \mathbb{E}(\langle I, I \rangle_{\tau} - \langle I, I \rangle_{\rho} | \mathcal{F}_{\rho}) = \mathbb{E} \left( \int_{\rho}^{\tau} |f(s)|^2 ds \mid \mathcal{F}_{\rho} \right) \end{aligned}$$

Usando la aproximación de la suma de Riemann ecuación 6.1, la isometría de Itô y la identidad  $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$  pruebe que

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T g(t) dW_t \right) \left( \int_0^T f(t) dW_t \right) \right] = \int_0^T \mathbb{E}[f(t)g(t)] dt.$$

Tomemos  $a = \int_0^T g(t) dW_t$  y  $b = \int_0^T f(t) dW_t$ , entonces usando la identidad  $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$

$$\begin{aligned} 4 \left( \int_0^T g(t) dW_t \right) \left( \int_0^T f(t) dW_t \right) &= \left( \int_0^T g(t) dW_t + \int_0^T f(t) dW_t \right)^2 - \left( \int_0^T g(t) dW_t - \int_0^T f(t) dW_t \right)^2 \\ &= \left( \int_0^T (g(t) + f(t)) dW_t \right)^2 - \left( \int_0^T (g(t) - f(t)) dW_t \right)^2, \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
4\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T g(t) dW_t \right) \left( \int_0^T f(t) dW_t \right) \right] &= \mathbb{E} \left( \int_0^T (g(t) + f(t)) dW_t \right)^2 - \mathbb{E} \left( \int_0^T (g(t) - f(t)) dW_t \right)^2 \\
&= \left( \int_0^T \mathbb{E}(g(t) + f(t))^2 dt \right) - \left( \int_0^T \mathbb{E}(g(t) - f(t))^2 dt \right) \\
&= \left( \int_0^T \mathbb{E}[(g(t) + f(t))^2 - (g(t) - f(t))^2] dt \right) \\
&= 4 \left( \int_0^T \mathbb{E}[g(t)f(t)] dt \right)
\end{aligned}$$

Usando la suma de Riemann ecuación 6.1 y deduzca que,

$$\int_0^T W(t)^2 dW(t) = \frac{1}{3} W(T)^3 - \int_0^T W(t) dt.$$

Observemos que,

$$3W(t_i)^2(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = W(t_{i+1})^3 - (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 - 3(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) + W(t_i)^3,$$

aplicando la ecuación 6.1

$$\begin{aligned}
\int_0^T W(t)^2 dW(t) &\sim \sum_{i=0}^L W(t_i)^2 (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^L [W(t_{i+1})^3 - W(t_i)^3] - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 - \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) \\
&= \frac{1}{3} (W(T)^3 - W(t_0)^3) - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 - \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) \\
&= \frac{1}{3} W(T)^3 - \frac{1}{3} \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 - \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i)
\end{aligned}$$

veamos que  $\frac{1}{3} \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 \rightarrow 0$  en  $L^2$ . Ahora, calcularemos la media de la variación cuadrática. Del Teorema Multinomial

$$\frac{1}{9} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 \right)^2 \right] = \frac{1}{9} \sum_{i=0}^L \mathbb{E} [(W(t_{i+1}) - W(t_i))^6] + \frac{2}{9} \sum_{i=0}^L \mathbb{E} [(W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 (W(t_{j+1}) - W(t_j))^3]$$

además, de la tarea 5,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 (W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \right] &= \mathbb{E} \{ \mathbb{E} \left[ (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 (W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \right] | \mathcal{F}_j \} \\
&= \mathbb{E} \{ (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 \mathbb{E} \left[ (W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \right] | \mathcal{F}_j \} \\
&= \mathbb{E} [(W(t_{i+1}) - W(t_i))^3] \mathbb{E} \left[ (W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \right] \\
&= 0. \text{ de la tarea 5}
\end{aligned}$$

así,

$$\frac{2}{9} \sum_{i=0}^L \mathbb{E} \left[ (W(t_{i+1}) - W(t_i))^3 (W(t_{j+1}) - W(t_j))^3 \right] = 0$$

y también se tiene que  $\mathbb{E} \left[ (W(t_{i+1}) - W(t_i))^6 \right] = 15 (t_{i+1} - t_i)^3$ , así

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9} \sum_{i=0}^L \mathbb{E} \left[ (W(t_{i+1}) - W(t_i))^6 \right] &= \frac{5}{3} \sum_{i=0}^L (t_{i+1} - t_i)^3 \\
&\leq \frac{5}{3} \|\Delta_L\|^2 \sum_{i=0}^L (t_{i+1} - t_i) \\
&\leq \frac{5}{3} \|\Delta_L\|^2 L \rightarrow 0, \|\Delta_L\| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Ahora veamos que

$$\sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) \rightarrow \sum_{i=0}^L W(t_i) (t_{i+1} - t_i) \text{ en } L^2$$

se tiene que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^L (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 W(t_i) - \sum_{i=0}^L W(t_i) (t_{i+1} - t_i) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^L W(t_i) [(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i)] \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^L W(t_i)^2 [(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i)]^2 + \sum_{i=0}^L W(t_i) W(t_j) [(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i)] [(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j)] \right]
\end{aligned}$$

calculemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \{ \mathbb{E} [W(t_i) W(t_j) ((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i)) ((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j)) | \mathcal{F}_j] \} &= \\
\mathbb{E} \{ W(t_i) W(t_j) ((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (t_{i+1} - t_i)) \mathbb{E} [((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j)) | \mathcal{F}_j] \} &= 0
\end{aligned}$$

Verifique que la isometría de Itô ecuación 6.4,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T h(t) dW(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t)^2 dt \right],$$

se tiene cuando  $h(t) := 1$ .

del ejercicio 3, resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T h(t) dW(t) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T 1 dW(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T 1 dW_t \right) \left( \int_0^T 1 dW_t \right) \right] \\ &= \int_0^T \mathbb{E}[1] dt \\ &= \int_0^T dt \\ &= T. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_0^T h(t)^2 dt \right] &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T 1^2 dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T dt \right] \\ &= \mathbb{E}[T] \\ &= T \end{aligned}$$

Así,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T dW(t) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T dt \right]$$

## 18 Tarea 9

Sea  $\tau$  un tiempo de paro. Prueba que  $W(t + \tau) - W(\tau)$  es un movimiento browniano.

Definamos

$$V_\tau(t) = W(t + \tau) - W(\tau),$$

notemos que

$$V_\tau(0) = 0,$$

Luego, considere para  $s \leq t$

$$\begin{aligned} V_\tau(t) - V_\tau(s) &= W(t + \tau) - W(\tau) - [W(s + \tau) - W(\tau)] \\ &= W(t + \tau) - W(s + \tau) \sim N(0, t - s), \end{aligned}$$

esto además nos garantiza la independencia de los incrementos del Browniano.

Sea  $W_1(t), W_2(t)$  movimientos brownianos independientes con punto inicial  $(W_1(0), W_2(0)) \neq (0, 0)$ . Defina  $X_t = \ln(W_1^2(t) + W_2^2(t))$ .

### 18.0.1 Muestre que $X_t$ es una martingala local.

Supongamos que  $X_t$  NO es una martingala local.

### 18.0.2 Muestre que $E|X_t| < \infty$ para cada $t > 0$ .

Considere

$$\begin{aligned} X_t &= \ln(W_1^2(t) + W_2^2(t)), \\ \exp(X_t) &= W_1^2(t) + W_2^2(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\exp(X_t)] &= E[W_1^2(t)] + E[W_2^2(t)] \\ &= 2t, \end{aligned}$$

Como  $X_t \geq 0, \forall t$

$$\begin{aligned} X_t &\leq \exp(X_t) \\ E[X_t] &\leq 2t < \infty, \forall t \end{aligned}$$

### 18.0.3 Muestre que $X_t$ no es una martingala.

Supongamos que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $E[X_t] = c, \forall t$ . Entonces

$$\begin{aligned} E[\ln(W_1^2(t) + W_2^2(t))] &= c \\ \int_0^\infty \ln(W_1^2(t) + W_2^2(t)) d\mathcal{P} &= c, \end{aligned}$$

Como la integral es finita. Entonces

$$X_t \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \text{ c.s}$$

Luego,

$$W_1^2(t) + W_2^2(t) \rightarrow 1, t \rightarrow \infty, \text{ c.s}$$

Sin embargo

$$E[W_1^2(t) + W_2^2(t)] = 2t \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty,$$

entonces llegamos a una contradicci'on. Entonces  $E[X_t]$  no es constante, por lo tanto  $X_t$  no puede ser martingala.

Considere

$$\tau_n = \inf_t \{X_t = n\}$$

Como  $X_t$  es no acotada. Entonces

$$\tau_n(\omega) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \forall n.$$

Ahora probaremos que  $Y_t$  es una martingala. Ahora, considere

$$Y_t = X_{\min\{t, \tau_n\}},$$

es adaptado con respecto a la filtraci'on. Si  $\tau_n > t$  lo tenemos por construcci'on. En caso contrario, para  $n \in \mathbb{N}$ .

$$Y_t = n$$

$$[Y_t = n] \subset [\tau_n < t] \in \mathcal{F}_t,$$

por ser tiempo de paro. Por lo tanto  $Y_t$  es adaptado a la filtración, por lo tanto nos queda probar que es una martingala.

Considere  $s < t$ .

$$\begin{aligned} E[Y_t \mid \mathcal{F}_s] &= E[X_{\min\{t, \tau_n\}} \mid \mathcal{F}_s] \\ &= E[X_t 1_{[t < \tau_n]}(t) \mid \mathcal{F}_s] + E[X_t 1_{[\tau_n \leq t]}(t) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= E[X_s 1_{[s < \tau_n]}(t) \mid \mathcal{F}_s] + E[X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq t]}(t) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= X_s 1_{[s < \tau_n]}(t) + X_{\tau_n} 1_{[\tau_n \leq s]}(s) \\ &= Y_s, \end{aligned}$$

teniendo así que para cada  $n$   $Y_t$  es una martingala.

## 19 Tarea 10



## References