



人工智能

# Artificial Intelligence

主讲：相明

西安交通大学电信学院计算机系

E\_mail: [mxiang@mail.xjtu.edu.cn](mailto:mxiang@mail.xjtu.edu.cn)



# 4.5 模糊推理

## 4.5.1: 模糊理论

### 1. 模糊集

定义4.4 设 $U$ 是论域， $\mu_A$ 是把任意 $u \in U$ 映射为 $[0, 1]$ 上某个值的函数，即

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$$

则：

$\mu_A$ 是定义在 $U$ 上的一个隶属函数。

$A = \{\mu_A(u), u \in U\}$ 称为 $U$ 上的一个模糊集。

$\mu_A(u)$ 称为 $u$ 对模糊集 $A$ 的隶属度。

$\mu_A$ 称为模糊集 $A$ 的隶属函数。

若论域离散且有限，则模糊集A可表示为：

$$A = \{\mu_A(u_1), \mu_A(u_2), \dots, \mu_A(u_n)\}$$

也可写为：

$$A = \mu_A(u_1)/u_1 + \mu_A(u_2)/u_2 + \dots + \mu_A(u_n)/u_n$$

$$A = \sum_{i=1}^n \mu_A(u_i)/u_i, \text{ 或者 } A = \bigcup_{i=1}^n \mu_A(u_i)/u_i$$

或者：

$$A = \{\mu_A(u_1)/u_1, \mu_A(u_2)/u_2, \dots, \mu_A(u_n)/u_n\}$$

$$A = \{(\mu_A(u_1), u_1), (\mu_A(u_2), u_2), \dots, (\mu_A(u_n), u_n)\}$$

隶属度为0的元素可以不写。

例如，在论域 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 上，以下形式都可以用来表示模糊集“大”：

$$\text{大}=\{0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$$

$$\begin{aligned}\text{大}= & 0/0+0.2/1+0.3/2+0.4/3+0.5/4+0.6/5 \\ & +0.7/6+0.8/7+0.9/8+1/9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{大}= & \{0/0, 0.2/1, 0.3/2, 0.4/3, 0.5/4, 0.6/5, \\ & 0.7/6, 0.8/7, 0.9/8, 1/9\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{大}= & \{0.2/1, 0.3/2, 0.4/3, 0.5/4, 0.6/5, \\ & 0.7/6, 0.8/7, 0.9/8, 1/9\}\end{aligned}$$

◆ 无论论域 $U$ 有限还是无限，离散还是连续，扎德用如下记号作为模糊集 $A$ 的一般表示形式：

$$A = \int_{u \in U} \mu_A(u) / u$$

◆  $U$ 上的全体模糊集记为：

$$\mathcal{F}(U) = \{ A | \mu_A : U \rightarrow [0, 1] \}$$

或

$$F(U) = \{ \mu_A | \mu_A : U \rightarrow [0, 1] \}$$

## 2. 模糊集的运算：主要有包含、交、并、补等等。

定义4.5 设 $A, B \in \mathcal{F}(U)$ ，若对任意 $u \in U$ ，都有

$$\mu_B(u) \leq \mu_A(u)$$

成立，则称 $A$ 包含 $B$ ，记为 $B \subseteq A$ 。

定义4.6 设 $A, B \in \mathcal{F}(U)$ ，分别称 $A \cup B$ 和 $A \cap B$ 为 $A$ 与 $B$ 的并集和交集，称 $\neg A$ 为 $A$ 的补集或者余集。它们的隶属函数分别为：

$$A \cup B: \mu_{A \cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} = \mu_A(u) \vee \mu_B(u)$$

$$A \cap B: \mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\} = \mu_A(u) \wedge \mu_B(u)$$

$$\neg A: \mu_{\neg A}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

### 3. 模糊关系

◆ 定义4.7 设 $A_i$ 是 $U_i(i=1,2,\dots,n)$ 上的模糊集，则称

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \int_{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n} (\mu_{A_1}(u_1) \wedge \mu_{A_2}(u_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_n}(u_n)) / (u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的笛卡儿乘积，它是 $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ 上的一个模糊集。

◆ 定义4.8 在 $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ 上一个 $n$ 元模糊关系 $R$ 是指以 $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ 为论域的一个模糊集，记为

$$R = \int_{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n} \mu_R(u_1, u_2, \cdots, u_n) / (u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

◆ 当 $U$ 和 $V$ 都是有限论域时，其模糊关系 $R$ 可用一个矩阵表示。

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

则 $U \times V$ 上的模糊关系可以表示为

$$R = \begin{bmatrix} \mu_R(u_1, v_1) & \mu_R(u_1, v_2) & \cdots & \mu_R(u_1, v_n) \\ \mu_R(u_2, v_1) & \mu_R(u_2, v_2) & \cdots & \mu_R(u_2, v_n) \\ \cdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_R(u_m, v_1) & \mu_R(u_m, v_2) & \cdots & \mu_R(u_m, v_n) \end{bmatrix}$$



例 设 $U=V=\{u_1, u_2, u_3\}$ ,  $R$ 是“信任关系”，则可有

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.8 \\ 0.9 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

定义4.9 设 $R_1$ 与 $R_2$ 分别是 $U \times V$ 与 $V \times W$ 上的两个模糊关系，  
则 $R_1$ 与 $R_2$ 的合成是指 $U \times W$ 上的一个模糊关系，记为

$$R_1 \circ R_2$$

其隶属函数为

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(u, w) = \bigvee \{ \mu_{R_1}(u, v) \wedge \mu_{R_2}(v, w) \}$$

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(u, w) = \bigvee \{ \mu_{R_1}(u, v) \wedge \mu_{R_2}(v, w) : v \in V \}$$

例 设有两个模糊关系

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

则 $R_1$ 与 $R_2$ 的合成是

$$R = R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

合成法则类似与矩阵乘法。

( 0.2 0.4 0.1 )

## 4. 模糊逻辑

◆ 含有模糊概念、模糊数据的语句称为模糊命题。它的一般表示形式为：

$x \quad \text{is} \quad A$

其中， $A$ 是一个模糊概念，用相应的模糊集及隶属函数表示； $x$ 用以指代所论述的对象。  
例如，

张三          is          年轻的

此时 $x$ 为“张三”，“年轻的”即模糊集 $A$ 。

## 5. 模糊匹配:

(1) 模糊产生式规则的一般形式是:

IF E THEN H

其中，E是用模糊命题表示的模糊条件；H是用模糊命题表示的模糊结论；因此模糊产生式规则可具体表示为:

IF x is A THEN y is B

(2) 推理中所用的证据也用模糊命题表示，一般形式为

x is A'

(3) 模糊推理要解决的问题：证据与知识的条件是否匹配：如果匹配，如何利用模糊规则及证据推出结论。

- ◆ 在模糊推理中，知识前提条件中的A与证据中的A'不一定完全相同，因此首先必须考虑匹配问题。例如：

IF    x is 小    THEN    y is 大  
      x is 较小

- ◆ 两个模糊集或模糊概念的相似程度称为匹配度。常用的计算匹配度的方法主要有贴近度、语义距离及相似度等。

### (1) 贴近度

设A与B分别是论域 $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 上的两个模糊集，则它们的贴近度定义为：

$$(A, B) = [A \bullet B + (1 - A \odot B)] / 2$$

其中

$$A \bullet B = \bigvee_U (\mu_A(u_i) \wedge \mu_B(u_i))$$

$$A \odot B = \bigwedge_U (\mu_A(u_i) \vee \mu_B(u_i))$$

## (2) 语义距离

海明距离

$$d(A, B) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n |\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)|$$

$$d(A, B) = \frac{1}{b-a} \int_a^b |\mu_A(u) - \mu_B(u)| du$$

欧几里得距离

$$d(A, B) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i))^2}$$

明可夫斯基距离

$$d(A, B) = \left[ \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n |\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)|^q \right]^{\frac{1}{q}}, \quad q \geq 1$$

切比雪夫距离

$$d(A, B) = \max_{1 \leq i \leq n} |\mu_A(u_i) - \mu_B(u_i)|$$

匹配度为:  $1-d(A,B)$

### (3) 相似度

#### 最大最小法

$$r(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \min\{\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^n \max\{\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)\}}$$

#### 算术平均法

$$r(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \min\{\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)\}}{\frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^n (\mu_A(u_i) + \mu_B(u_i))}$$

#### 几何平均最小法

$$r(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \min\{\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)\}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_A(u_i) \times \mu_B(u_i)}}$$



# 复合条件的模糊匹配

(1) 分别计算出每一个子条件与其证据的匹配度

例如对复合条件

$$E = x_1 \text{ is } A_1 \text{ AND } x_2 \text{ is } A_2 \text{ AND } x_3 \text{ is } A_3$$

及相应证据 $E'$ :

$$x_1 \text{ is } A'_1, x_2 \text{ is } A'_2, x_3 \text{ is } A'_3$$

分别算出 $A_i$ 与 $A'_i$ 的匹配度 $\delta_{\text{match}}(A_i, A'_i), i=1,2,3$ 。

(2) 求出整个前提条件与证据的总匹配度。常用的方法有“取极小”和“相乘”等。

$$\delta_{\text{match}}(E, E') = \min\{\delta_{\text{match}}(A_1, A'_1), \delta_{\text{match}}(A_2, A'_2), \delta_{\text{match}}(A_3, A'_3)\}$$

$$\delta_{\text{match}}(E, E') = \delta_{\text{match}}(A_1, A'_1) \times \delta_{\text{match}}(A_2, A'_2) \times \delta_{\text{match}}(A_3, A'_3)$$

(3) 检查总匹配度是否满足阈值条件，如果满足就可以匹配，否则为不可匹配。

## 6. 模糊推理的基本模式

### (1) 模糊假言推理

知识: IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$

证据:  $x$  is  $A'$

---

结论:  $y$  is  $B'$

对于复合条件有:

知识: IF  $x_1$  is  $A_1$  AND  $x_2$  is  $A_2$  AND...AND  $x_n$  is  $A_n$  THEN  $y$  is  $B$

证据:  $x_1$  is  $A'_1$ ,  $x_2$  is  $A'_2$ , ...,  $x_n$  is  $A'_n$

---

结论:  $y$  is  $B'$

## (2) 模糊拒取式推理

知识: IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$

证据:  $y$  is  $B'$

---

结论:  $x$  is  $A'$

## (3) 模糊推理方法:

我们主要讨论扎德等人的方法。这种方法的基本思想是: 首先由模糊知识

IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$

求出 $A$ 与 $B$ 之间的模糊关系 $R$ ; 然后再通过 $R$ 与相应证据的合成求出模糊结论。

## 4.5.2 简单模糊推理

◆ 知识中只含有简单条件，且不带可信度因子的模糊推理称为简单模糊推理。

◆ 推理方法：对于知识

IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$

首先构造出 $A$ 与 $B$ 之间的模糊关系 $R$ ，然后通过 $R$ 与证据的合成求出结论。

如果已知证据是

$x$  is  $A'$

且 $A$ 与 $A'$ 可以模糊匹配，则通过下述合成运算求取 $B'$ ：

$$B' = A' \circ R$$

如果已知证据是

$y$  is  $B'$

且 $B$ 与 $B'$ 可以模糊匹配，则通过下述合成运算求出 $A'$ ：

$$A' = R \circ B'$$

# 构造模糊关系R的方法

## 1. 扎德方法

- 扎德提出了两种方法：一种称为条件命题的极大极小规则；另一种称为条件命题的算术规则，由它们获得的模糊关系分别记为 $R_m$ 和 $R_a$ 。

设 $A \in \mathfrak{F}(U), B \in \mathfrak{F}(V)$ ，其表示分别为

$$A = \int_U \mu_A(u) / u, B = \int_V \mu_B(v) / v$$

且用 $\times, \cup, \cap, \neg, \oplus$  分别表示模糊集的笛卡儿乘积、并、交、补及有界和运算，则扎德把 $R_m$ 和 $R_a$ 分别定义为：

$$R_m = (A \times B) \cup (\neg A \times V) = \int_{U \times V} (\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)) \vee (1 - \mu_A(u)) / (u, v)$$

$$R_a = (\neg A \times V) \oplus (U \times B) = \int_{U \times V} 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)) / (u, v)$$

IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$

对于模糊假言推理，若已知证据为  
 $x$  is  $A'$

则：

$$B'_m = A' \circ R_m$$

$$B'_a = A' \circ R_a$$

对于模糊拒取式推理，若已知证据为  
 $y$  is  $B'$

则：

$$A'_m = R_m \circ B'$$

$$A'_a = R_a \circ B'$$

例 设  $U=V=\{1,2,3,4,5\}$ ,  $A=1/1+0.5/2$ ,  $B=0.4/3+0.6/4+1/5$   
并设模糊知识及模糊证据分别为:

IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$        $x$  is  $A'$

其中,  $A'$ 的模糊集为:  $A'=1/1+0.4/2+0.2/3$

则由模糊知识可分别得到  $R_m$  与  $R_a$ :

$$R_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# IF x is A THEN y is B

$$B'_m = A' \circ R_m$$

$$= \{1, 0.4, 0.2, 0, 0\} \circ$$

$$= \{0.4, 0.4, 0.4, 0.6, 1\}$$

$$B'_a = A' \circ R_a = \{0.4, 0.4, 0.4, 0.6, 1\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

若已知证据为: y is B', 且  $B' = 0.2/1 + 0.4/2 + 0.6/3 + 0.5/4 + 0.3/5$ , 则:

$$A'_m = R_m \circ B'$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \{0.5, 0.5, 0.6, 0.6, 0.6\}$$

$$A'_a = R_a \circ B' = \{0.5, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6\}$$



## 2. Mamdani方法

IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$

$$R_c = A \times B = \int_{U \times V} \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) / (u, v)$$

对于模糊假言推理,

$$B'_c = A' \circ R_c$$

对于模糊拒取式推理,

$$A'_c = R_c \circ B'$$

### 3. Mizumoto方法

◆ 提出了一组构造模糊关系的方法，分别记为 $R_s, R_g, R_{sg}, R_{gs}, R_{gg}, R_{ss}$ 等等。其定义分别为：

$$R_s = A \times V \underset{s}{\Rightarrow} U \times B = \int_{U \times V} [\mu_A(u) \underset{s}{\longrightarrow} \mu_B(v)] / (u, v)$$

$$\mu_A(u) \underset{s}{\longrightarrow} \mu_B(v) = \begin{cases} 1, \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \\ 0, \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

$$R_g = A \times V \underset{g}{\Rightarrow} U \times B = \int_{U \times V} [\mu_A(u) \underset{g}{\longrightarrow} \mu_B(v)] / (u, v)$$

$$\mu_A(u) \underset{g}{\longrightarrow} \mu_B(v) = \begin{cases} 1, \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \\ \mu_B(v), \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

...

设  $U=V=\{1,2,3,4,5\}$ ,  $A=1/1+0.5/2$ ,  $B=0.4/3+0.6/4+1/5$

模糊知识: IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$

模糊证据:  $x$  is  $A'$

其中,  $A'$  的模糊集为:  $A'=1/1+0.4/2+0.2/3$

$$R_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B'_s = A' \circ R_s = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.4, 1\}$$

$$B'_g = A' \circ R_g = \{0.2, 0.2, 0.4, 0.6, 1\}$$

## 原则1:

证据:  $x$  is A

## 原则2:

证据: x is very A

结论:  $y$  is very B  
 $y$  is B

原则3:

知识: IF  $x$  is A THEN  $y$  is B

证据:  $x$  is more or less A

---

结论:  $y$  is more or less B  
 $y$  is B

原则4:

知识: IF  $x$  is A THEN  $y$  is B

证据:  $x$  is not A

---

结论:  $y$  is unknown  
 $y$  is not B

以上原则是针对模糊假言推理的。

# 各种模糊关系的性能分析(3)

原则5:

知识: IF        x is A THEN y is B

证据:                                y is not B

---

结论:                x is not A

(该结论必须满足)

原则6:

知识: IF        x is A THEN y is B

证据:                                y is not very B

---

结论:                x is not very A

# 各种模糊关系的性能分析(4)

原则7:

知识: IF        x is A THEN y is B

证据:                                y is not more or less B

---

结论:                x is not more or less A

原则8:

知识: IF        x is A THEN y is B

证据:                                y is B

---

结论:                x is unknown  
                         x is A











根据基本概念扩充法，由A可得：

$$\text{very } A = \int_U \mu_A^2(u) / u \\ = \{1, 0.64, 0.36, 0.16, 0.04, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$\text{more or less } A = \int_U \mu_A^{0.5}(u) / u \\ = \{1, 0.89, 0.77, 0.63, 0.45, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$\text{not } A = \int_U 1 - \mu_A(u) / u \\ = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

$$\text{not very } A = \int_U 1 - \mu_A^2(u) / u \\ = \{0, 0.36, 0.64, 0.84, 0.96, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

$$\text{not more or less } A = \int_U 1 - \mu_A^{0.5}(u) / u \\ = \{0, 0.11, 0.23, 0.37, 0.55, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

由B可得:

$$\text{very B} = \int_V \mu_B^2(v) / v \\ = \{0, 0, 0, 0.04, 0.16, 0.36, 0.64, 1, 1, 1\}$$

$$\text{more or less B} = \int_V \mu_B^{0.5}(v) / v \\ = \{0, 0, 0, 0.45, 0.63, 0.77, 0.89, 1, 1, 1\}$$

$$\text{not B} = \int_V 1 - \mu_B(v) / v \\ = \{1, 1, 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0, 0, 0\}$$

$$\text{not very B} = \int_V 1 - \mu_B^2(v) / v \\ = \{1, 1, 1, 0.96, 0.84, 0.64, 0.36, 0, 0, 0\}$$

$$\text{not more or less B} = \int_V 1 - \mu_B^{0.5}(v) / v \\ = \{1, 1, 1, 0.55, 0.37, 0.23, 0.11, 0, 0, 0\}$$

# 各种模糊关系符合推理原则情况一览表

原则	A'	B'	$R_m$	$R_a$	$R_c$	$R_s$	$R_g$	$R_{sg}$	$R_{gg}$	$R_{gs}$	$R_{ss}$	$R_b$	$R_{\Delta}$	$R_{\blacktriangle}$	$R_*$	$R_{\#}$	$R_{\square}$
1	A	B	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×
2	Very A	Very B	×	×	×	✓	×	✓	×	×	✓	×	×	×	×	×	×
	Very A	B	×	×	✓	×	✓	×	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×
3	more or less A	More or less B	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×
	More or less A	B	×	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
4	Not A	Unknown	✓	✓	×	✓	✓	×	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Not A	Not B	×	×	×	×	×	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×
5	Not A	Not B	×	×	×	✓	×	✓	×	×	✓	×	×	×	×	×	×
6	Not very A	Not very B	×	×	×	✓	×	✓	×	×	✓	×	×	×	×	×	×
7	Not more or less A	Not more or less B	×	×	×	✓	×	✓	×	×	✓	×	×	×	×	×	×
8	Unknown	B	×	✓	×	✓	✓	×	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	A	B	×	×	✓	×	×	×	×	✓	✓	×	×	×	×	×	×

## 4.5.3 模糊三段论推理

R1: IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$

R2: IF  $y$  is  $B$  THEN  $z$  is  $C$

---

R3: IF  $x$  is  $A$  THEN  $z$  is  $C$

其中 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 分别是论域 $U$ 、 $V$ 、 $W$ 上的模糊集。

设 $R(A,B)$ 、 $R(B,C)$ 与 $R(A,C)$ 分别是根据上述模糊知识得到的模糊关系，它们分别定义在 $U \times V$ 、 $V \times W$ 、 $U \times W$ 上，如果

$$R(A,B) \circ R(B,C) = R(A,C)$$

则称模糊三段论成立(即模糊关系 $R$ 满足三段论)。

$$B' = A' \circ R(A,B), \quad C' = B' \circ R(B,C) = A' \circ R(A,B) \circ R(B,C) = A' \circ R(A,C)$$

# 满足模糊三段论的模糊关系

◆ 在前面讨论的15种模糊关系中，有一些能满足模糊三段论，有一些不能满足。

设 $U=V=W=\{1,2,3,4,5\}$

$A=1/1+0.6/2+0.2/3$

$B=0.3/3+0.7/4+1/5$

$C=0.09/3+0.49/4+1/5$

对 $R_m$ 由 $R1, R2, R3$ 分别得到:

$$R_m(A,B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_m(B,C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.49 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.49 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_m(A, C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.09 & 0.49 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.49 & 0.6 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_m(A, B) \circ R_m(B, C) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.49 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.49 & 0.6 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

显然,  $R_m(A, B) \circ R_m(B, C) \neq R_m(A, C)$ 。

这说明  $R_m$  不满足模糊三段论。

$$R_g(A, B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_g(B, C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.09 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.49 & 1 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.49 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_g(A, C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.09 & 0.49 & 1 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.49 & 1 \\ 0 & 0 & 0.09 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, R_g(A, B) \circ R_g(B, C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.09 & 0.49 & 1 \\ 0 & 0 & 0.09 & 0.49 & 1 \\ 0 & 0 & 0.09 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

显然,  $R_g(A, B) \circ R_g(B, C) = R_g(A, C)$

这说明  $R_g$  满足模糊三段论。

# 各种模糊关系满足模糊三段论情况

模糊关系	$R_m$	$R_a$	$R_c$	$R_s$	$R_g$	$R_{sg}$	$R_{gg}$	$R_{gs}$	$R_{ss}$	$R_b$	$R_{\triangle}$	$R_{\blacktriangle}$	$R_*$	$R_{\#}$	$R_{\square}$
模糊三段论	×	×	√	√	√	√	√	√	√	×	×	×	×	×	√

表中，“√”表示满足，“×”表示不满足。

## 4.5.4 多维模糊推理

◆ 多维模糊推理是指知识的前提条件是复合条件的一类推理。  
其一般模式为：

知识： IF  $x_1$  is  $A_1$  AND  $x_2$  is  $A_2$  AND...AND  $x_n$  is  $A_n$  THEN  $y$  is  $B$

证据：  $x_1$  is  $A'_1$        $x_2$  is  $A'_2$       ...       $x_n$  is  $A'_n$

---

结论：  $y$  is  $B'$

其中，  $A_i, A'_i \in \mathcal{F}(U_i); B, B' \in \mathcal{F}(V); U_i$  及  $V$  是论域，  $i=1,2,\dots,n$ 。

对于多维模糊推理，目前主要有三种处理方法。

### 1. 扎德方法 ( $U_i=U$ )

该方法的基本思想是：

(1) 求出  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的交集，并记为  $A$ 。

(2) 求出  $A$  与  $B$  之间的模糊关系  $R(A, B)$ ，也可记为  $R(A_1, A_2, \dots, A_n, B)$ 。

(3) 求出证据中  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  的交集，并记为  $A'$ 。

(4) 由  $A'$  与  $R(A, B)$  的合成求出  $B'$ 。（该方法要求  $A_i$  定义在相同的论域）

# 多维模糊推理举例

例 设  $U=V=W=\{1,2,3,4,5\}$

$A_1=\{1,0.6,0,0,0\}$ ,  $A_2=\{0,1,0.5,0,0\}$ ,  $B=\{0,0,1,0.8,0\}$

$A'_1=\{0.8,0.5,0,0,0\}$ ,  $A'_2=\{0,0.9,0.5,0,0\}$

由此可得:

$A_1 \cap A_2 = \{0,0.6,0,0,0\}$ ,  $A'_1 \cap A'_2 = \{0,0.5,0,0,0\}$

$$R_a(A_1, A_2, B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 1 & 1 & 0.4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$B'_a = (A'_1 \cap A'_2) \circ R_a(A_1, A_2, B) = \{0.4, 0.4, 0.5, 0.5, 0.4\}$

## 2. 祖卡莫托(Tsukamoto)方法

知识: IF  $x_1$  is  $A_1$  AND  $x_2$  is  $A_2$  AND...AND  $x_n$  is  $A_n$  THEN  $y$  is  $B$

证据:  $x_1$  is  $A'_1$        $x_2$  is  $A'_2$       ...       $x_n$  is  $A'_n$

---

结论:  $y$  is  $B'$

(1) 首先构造各个子条件与结论之间的模糊关系

$$R(A_i, B), i=1, 2, \dots, n$$

(2) 根据复合条件中的每一个子条件求出相应的 $B'_i$ :

$$B'_i = A'_i \circ R(A_i, B), i=1, 2, \dots, n$$

(3) 对各 $B'_i$ 取交集, 从而得到 $B'$ :

$$B' = B'_1 \cap B'_2 \cap \dots \cap B'_n$$

## 3. 苏更诺(Sugeno)方法

## 4.5.5 多重模糊推理

◆ 所谓多重模糊推理，一般是指知识具有如下表示形式的一种推理：

IF  $x$  is  $A_1$  THEN  $y$  is  $B_1$  ELSE

IF  $x$  is  $A_2$  THEN  $y$  is  $B_2$  ELSE

...

IF  $x$  is  $A_n$  THEN  $y$  is  $B_n$

其中， $A_i \in \mathfrak{F}(U), B_i \in \mathfrak{F}(V), i=1,2,\dots,n$ 。

这里只讨论它的一种简单形式：

IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$  ELSE  $y$  is  $C$

其中  $A \in \mathfrak{F}(U), B, C \in \mathfrak{F}(V)$ 。

知识: IF  $x$  is  $A$  THEN  $y$  is  $B$  ELSE  $y$  is  $C$

证据  $x$  is  $A'$

---

结论:  $y$  is  $D$

其中  $A, A' \in \mathfrak{F}(U)$ ;  $B, C, D \in \mathfrak{F}(V)$ 。

推理方法: 通过  $A$ 、 $B$ 、 $C$  构造  $U \times V$  上的一个模糊关系  $R$ ,  
然后, 通过  $A'$  与  $R$  的合成得到结论  $D$ , 即

$$D = A' \circ R$$



# 多重模糊推理中的模糊关系

$$R'_m = (A \times B) \cup (\neg A \times C)$$

$$= \int_{U \times V} [\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)] \vee [(1 - \mu_A(u)) \wedge \mu_C(v)] / (u, v)$$

$$R'_a = (\neg A \times V \oplus U \times B) \cap (A \times V \oplus U \times C)$$

$$= \int_{U \times V} 1 \wedge [1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)] \wedge [\mu_A(u) + \mu_C(v)] / (u, v)$$


$$\begin{aligned}
 R'_{gg} &= [A \times V \Rightarrow_g U \times B] \cap [\neg A \times V \Rightarrow_g U \times C] \\
 &= \int_{U \times V} [\mu_A(u) \rightarrow_g \mu_B(v)] \wedge [(1 - \mu_A(u)) \rightarrow_g \mu_C(v)] / (u, v)
 \end{aligned}$$

$$\mu_A(u) \rightarrow_g \mu_B(v) = \begin{cases} 1 & \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \\ \mu_B(v) & \mu_A(u) > \mu_B(v) \end{cases}$$

$$D_{gg} = A' \circ R'_{gg} = A' \circ [(A \times V \Rightarrow_g U \times B) \cap (\neg A \times V \Rightarrow_g U \times C)]$$

$$\mu_{D_{gg}}(v) = \bigvee_{u \in U} \left\{ \mu_{A'}(u) \wedge [(\mu_A(u) \rightarrow_g \mu_B(v)) \wedge ((1 - \mu_A(u)) \rightarrow_g \mu_C(v))] \right\}$$

## 4.5.6 带有可信度因子的模糊推理



知识: IF	x is A	THEN	y is B	CF <sub>1</sub>
证据:	x is A'			CF <sub>2</sub>
<hr/>				
结论:			y is B'	CF

结论可信度的计算:

$$CF = \delta_{\text{match}}(A, A') \times CF_1 \times CF_2$$

$$CF = \delta_{\text{match}}(A, A') \times \min\{CF_1, CF_2\}$$

$$CF = \delta_{\text{match}}(A, A') \times \max\{0, CF_1 + CF_2 - 1\}$$

$$CF = \min\{\delta_{\text{match}}(A, A'), CF_1, CF_2\}$$

# 组合证据

知识: IF  $x_1$  is  $A_1$  AND  $x_2$  is  $A_2$  AND...AND  $x_n$  is  $A_n$  THEN  $y$  is  $B$   $CF_0$

证据:  $x_1$  is  $A'_1$   $CF_1$   
 $x_2$  is  $A'_2$   $CF_2$   
...  
 $x_n$  is  $A'_n$   $CF_n$

---

结论:  $y$  is  $B'$   $CF$

组合证据的匹配度:

$$\delta_{\text{match}}(E, E') = \min\{\delta_{\text{match}}(A_1, A'_1), \delta_{\text{match}}(A_2, A'_2), \delta_{\text{match}}(A_3, A'_3)\}$$

$$\delta_{\text{match}}(E, E') = \delta_{\text{match}}(A_1, A'_1) \times \delta_{\text{match}}(A_2, A'_2) \times \delta_{\text{match}}(A_3, A'_3)$$

组合证据的可信度:

$$CF'_1 = CF_1 \wedge CF_2 \wedge \dots \wedge CF_n$$

$$CF'_1 = CF_1 \times CF_2 \times \dots \times CF_n$$

结论的可信度:  $CF = \delta_{\text{match}}(E, E') \times CF_0 \times CF'_1$

# 结论不确定性的合成

◆ 结论不确定性的合成：假设根据两组证据及相关知识分别推出了如下两个结论：

$$y \text{ is } B'_1 \text{ } CF_1$$

$$y \text{ is } B'_2 \text{ } CF_2$$

则可用如下方法得到它们的合成结论和可信度因子：

$$B' = B'_1 \cap B'_2$$

$$CF = CF_1 + CF_2 - CF_1 \times CF_2$$



完

谢谢