概率论与数理统计

第23讲

单个正态总体均值与方差的假设检验

一. 关于均值的假设检验

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2,\dots, X_n$为来自总体X的样本。显著性水平为α，μ_0为已知的常数。

1. 当σ^2已知时 H_0：$\mu=\mu_0$ H_1：$\mu\neq\mu_0$

从μ的点估计$\bar{X}$出发构造拒绝域

分析：$\bar{X}$为μ的点估计，且为无偏估计、有效估计，所以其值应该与μ比较接近。

因此，当H_0成立时，$\bar{X}$的值应该与μ_0比较接近。

即，因为H_0成立，所以$\bar{X}$的值应该与μ_0比较接近；

所以，当$\bar{X}$的值与μ_0相差较大时，H_0不成立；

或者说，当H_0成立时，$\bar{X}$ 的值与μ_0相差较大是小概率事件；相差多大才算较大，需要一个界限，设为C。

因此，拒绝域为： $W=\{(x_1,\dots,x_n):|\bar{x}-\mu_0|\geq C\}$

按照控制第一类错误的原则，有 $P\{|\bar{X}-\mu_0|\geq C\,|\,H_0\text{成立}\}=\alpha$

等价于 $P\{|\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}|\geq\dfrac{C}{\sigma/\sqrt{n}}\}=\alpha$

根据抽样分布定理，有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

当$H_0:\mu=\mu_0$成立时

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

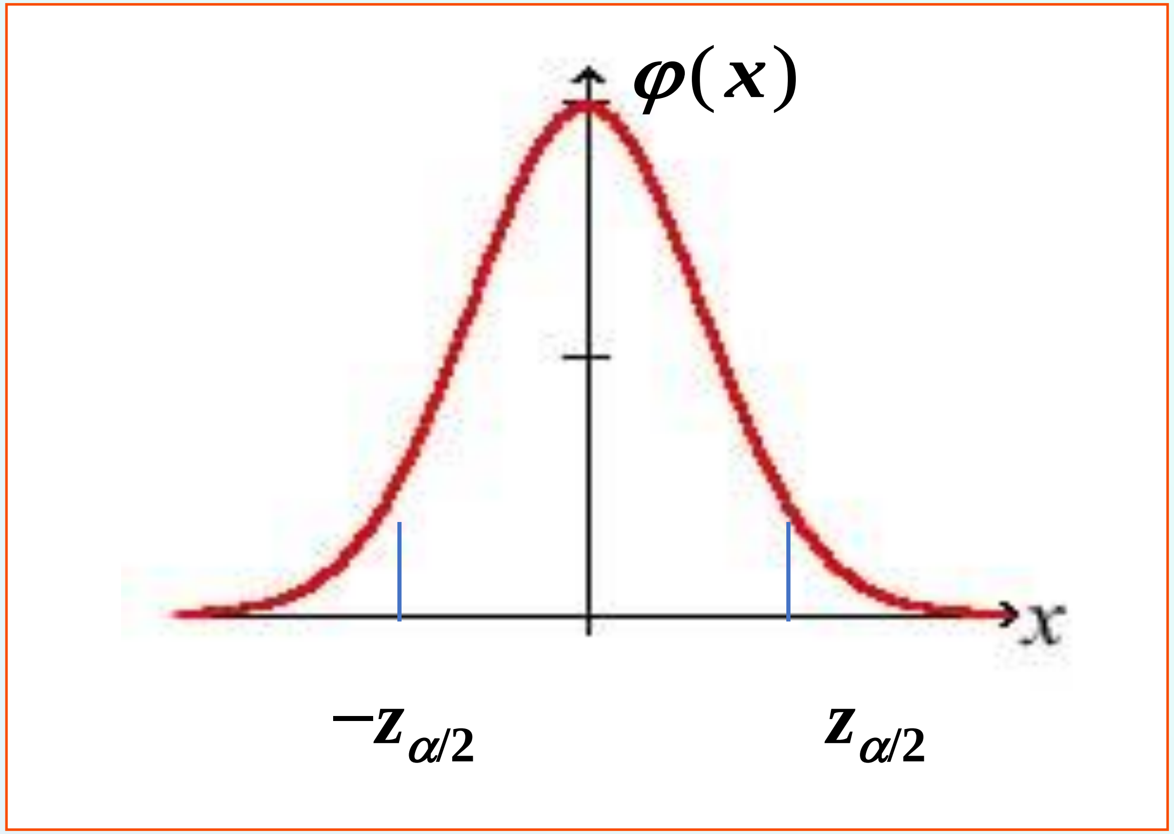
一. 关于均值的假设检验

由此 $\dfrac{C}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \Rightarrow C = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$

拒绝域为

$$W = \{(x_1,\ldots,x_n): |\bar{x}-\mu_0| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\}$$

$$= \{(x_1,\ldots,x_n): \frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_{\alpha/2}\}$$



查表 $z_{\alpha/2}$，计算 $\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}$

若其大于$z_{\alpha/2}$，拒绝原假设；否则，接受原假设。

由于这种检验方法是基于正态分布的方法，所以又称为正态检验法或 Z 检验法。

例1.一台均方差是0.8克的自动包装机在流水线上包装袋装白糖。假定包装机包装的袋装白糖的重量$X\sim N(\mu, \sigma^2)$。按规定袋装白糖重量的均值应为500克。现随机抽取了9袋，测得净重如下(单位:克)：

499.12　499.48　499.25　499.53　500.82　499.11　498.52　500.01　498.87

问包装机包装的袋装白糖是否合格?

分析： 如果白糖重量的均值为500，就符合规定，即白糖是合格的。9袋白糖中有7袋净重少于500克，似乎净重$\mu_0=500$不对。

但是，方差是0.8，也可能是由包装机的随机误差导致了以上的数据。

解：提出假设　H_0：$\mu=\mu_0$　　H_1：$\mu\neq\mu_0$

选取检验统计量 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0成立}{\sim} N(0,1)$　　拒绝域为 $\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq z_{\alpha/2}$

本例中，如果取$\alpha=0.05$. 查表得$z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$

计算得 $\bar{x}=499.41$　$\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\left|\dfrac{499.41-500}{\sqrt{0.8}/\sqrt{9}}\right|=1.98$

即抽样数据落入了拒绝域中，于是拒绝原假设H_0。即认为包装机包装的袋装白糖不符合规定。

在本例中，如果取检验水平 $\alpha=0.04$，则 $z_{\alpha/2}=2.054$，这时 $|z|=1.98<2.054$，说明样本观测值没有落入拒绝域，因此，不能拒绝 H_0。

这说明在不同的检验水平下可以得到不同的检验结果。

这是因为降低犯第一类错误的概率，就会使得拒绝域减小，从而拒绝 H_0 的机会变小，接受 H_0 的机会变大。

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\dots,X_n$为来自总体X的样本。显著性水平为α，μ_0为已知的常数。

2. 当σ^2已知时 $H_0:\ \mu\le\mu_0 \quad H_1:\ \mu>\mu_0$

从μ的点估计$\bar{X}$ 出发构造拒绝域

分析：$\bar{X}$为μ的点估计，且为无偏估计、有效估计，所以其值应该与μ比较接近。

因此，当H_0成立时，$\bar{X}$的值应该比μ_0小一些。

所以，当$\bar{X}$ 的值比μ_0大较多时，H_0不成立。

或者说，当H_0成立时，$\bar{X}$ 的值 $\bar{x}$ 比μ_0大较多是小概率事件。

大多少才算大较多呢，需要一个界限，设为C_1。

因此，拒绝域为

$$W=\{(x_1,\ldots,x_n):\bar{x}-\mu_0\geq C_1\}$$

按照控制第一类错误的原则，有

$$P\{\bar{X}-\mu_0\geq C_1 \mid H_0\}\leq\alpha$$

等价于

$$P\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq C \mid H_0\}\leq\alpha$$

其 中

$$C=\frac{C_1}{\sigma/\sqrt{n}}$$

一. 关于均值的假设检验

$$P\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq C \mid H_0\} \leq \alpha$$

根据抽样分布定理，有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

易知，当H_0成立时

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

一. 关于均值的假设检验

H_0： $\mu \le \mu_0$ H_1： $\mu > \mu_0$ **当H_0成立时**

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

所以

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge C \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge C$$

故

$$\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge C\} \subset \{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge C\}$$

所以有

$$P\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge C \mid H_0\} \le P\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge C \mid H_0\}$$

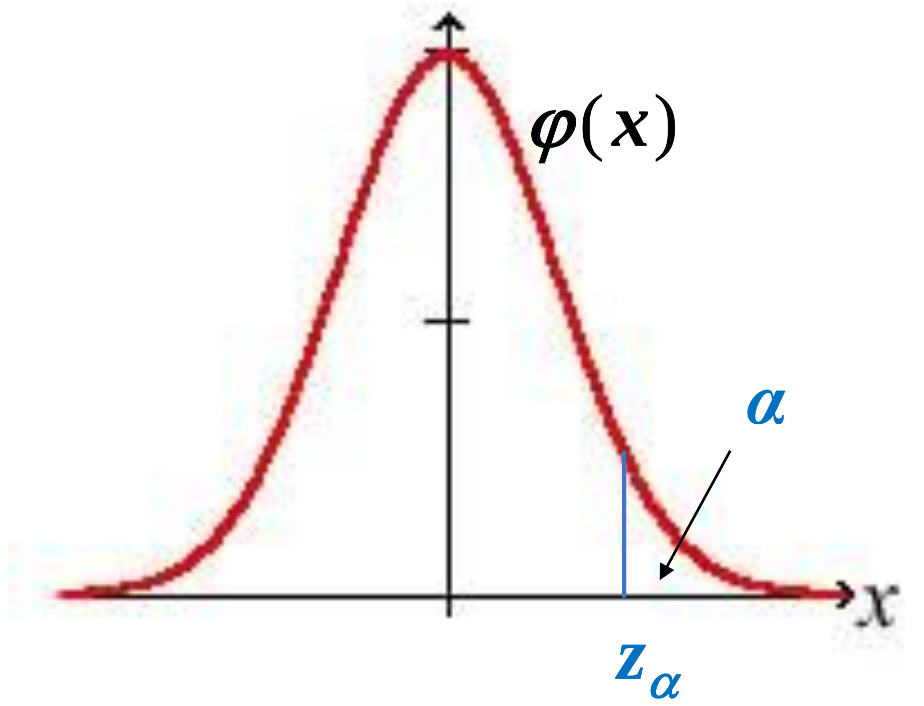
一. 关于均值的假设检验

$$P\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq C \mid H_0\} \leq P\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq C \mid H_0\} \qquad \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

要使 $P\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq C \mid H_0\} \leq \alpha$

只需 $P\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq C \mid H_0\} = \alpha$

所以 $C = z_\alpha$



$$W=\{(x_1,...,x_n):\bar{x}-\mu_0\geq C_1\}\quad C=z_\alpha\quad C=\frac{C_1}{\sigma/\sqrt{n}}$$

即得 $C_1=C\,\sigma/\sqrt{n}$ 所以拒绝域为

$$W=\{(x_1,...,x_n):\bar{x}-\mu_0\geq C_1\}=\{(x_1,...,x_n):\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\geq z_\alpha\}$$

查表得 z_α，计算 $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

若其大于z_α，拒绝原假设。否则，接受原假设。

例2. 某织物强力指标X的均值μ_0=21公斤. 改进工艺后生产一批织物，今从中取30件，测得$\bar{x}$=21.55公斤。假设强力指标服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，且已知σ =1.2公斤，问在显著性水平α =0.01下，新生产织物比过去的织物强力是否有提高?

解:

$$H_0：\mu \le \mu_0 = 21 \qquad H_1：\mu > \mu_0 = 21$$

检验统计量为: $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

拒绝域为: $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge z_\alpha$

拒绝域为 $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq z_\alpha$

查表得，$z_\alpha = z_{0.01} = 2.33$，由样本值计算

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{21.55-21}{1.2/\sqrt{30}} = 2.51 > 2.33$$

表明，样本观测值落入拒绝域，故拒绝原假设H_0。

即，认为新生产织物比过去的织物强力有提高。

3.σ^2已知 $H_0: \mu \geq \mu_0 \quad H_1: \mu < \mu_0$

检验统计量为

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

所以拒绝域为

$$W=\{(x_1,\ldots,x_n): \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha\}$$

例3.设某种元件的寿命服从正态分布$N(\mu, 100^2)$，要求该种元件的平均寿命不得低于1000小时。生产者从一批该种元件中随机抽取25件，测得平均寿命为950小时，在显著性水平α =0.05下，判断这批元件是否合格?

解：提出如下假设

$$H_0：\mu \geq \mu_0 = 1000 \qquad H_1：\mu < \mu_0 = 1000$$

检验统计量为：$\dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$　　拒绝域为：$\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\alpha$

查表得，$z_\alpha = z_{0.05} = -1.645$，由样本值计算

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = \frac{950-1000}{100/\sqrt{25}} = -2.5$$

由于$-2.5 < -1.645$，因此拒绝原假设，在显著性水平$\alpha = 0.05$下，判断这批元件不合格。

一. 关于均值的假设检验

Z 检验法 (σ^2已知)

原假设H_0	备择假设H_1	检验统计量	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\lvert z \rvert \geq z_{\alpha/2}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$z \leq -z_\alpha$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$z \geq z_\alpha$

一. 关于均值的假设检验

实际问题中，方差σ^2已知的情形比较少见，一般只知$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，而其中σ^2未知。当σ^2未知时，对给定的显著性水平α，关于正态总体均值μ的常见假设检验问题仍提出如下三种.

I　H_0: $\mu=\mu_0$　　H_1: $\mu\neq\mu_0$

II　H_0：$\mu\leq\mu_0$　　H_1：$\mu>\mu_0$

III　H_0：$\mu\geq\mu_0$　　H_1：$\mu<\mu_0$

总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$为来自总体X的样本。显著性水平为α.

4. σ^2未知 $H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu\neq\mu_0$

现标准差σ未知，可用样本标准差S代替σ。

于是，利用统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

构造拒绝域 $W=\{|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}|\geq C\}$

当σ^2已知时，检验统计量为

$$(\bar{X}-\mu_0)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

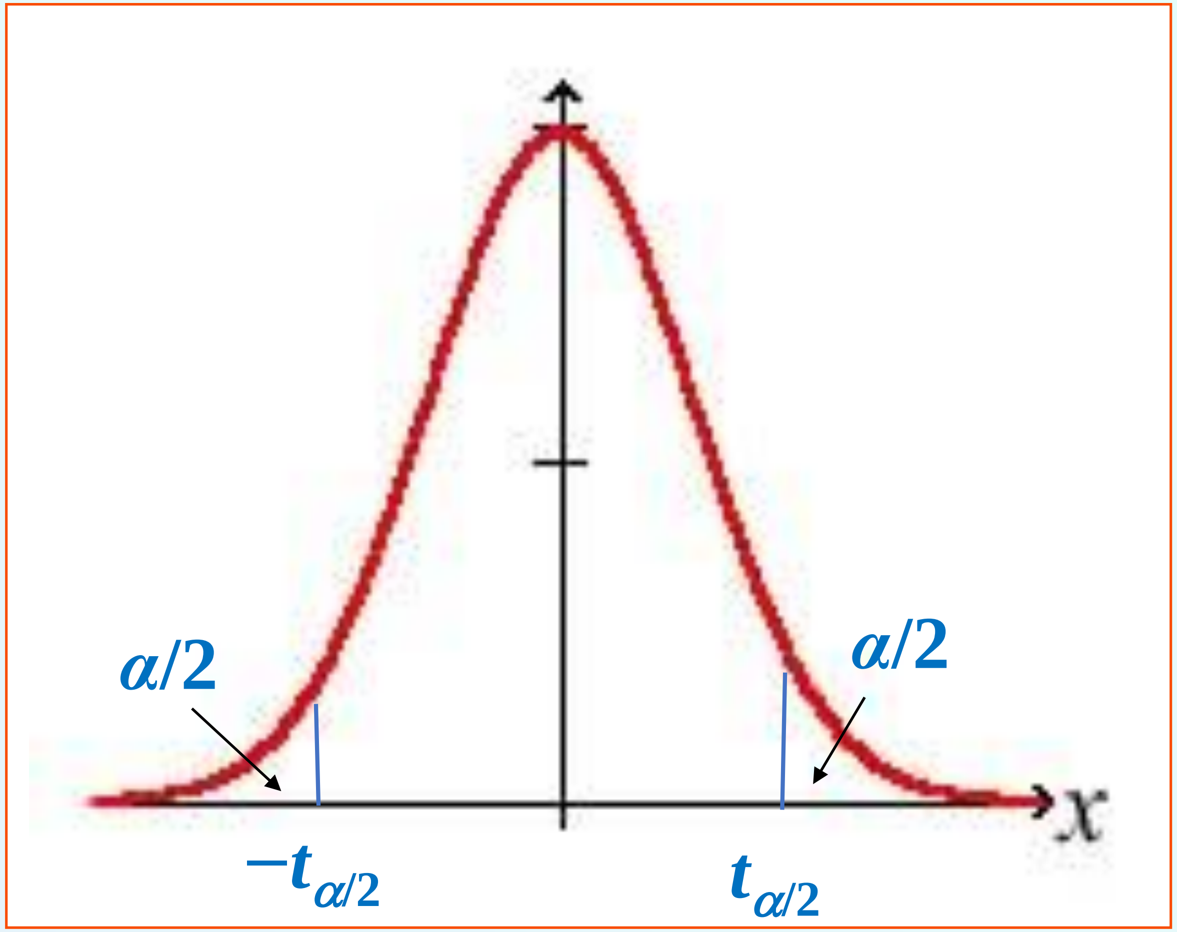
拒绝域为 $W=\{\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}>z_{\alpha/2}\}$

控制第一类错误，即 $P\{|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}| \geq C \mid H_0\text{成立}\} = \alpha$

由抽样分布定理 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

当H_0成立时，$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

由此 $C = t_{\alpha/2}(n-1)$



一. 关于均值的假设检验

所以拒绝域为

$$W=\{\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}\geq t_{\alpha/2}(n-1)\}$$

查表$t_{\alpha/2}(n-1)$，计算

$$\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}$$

若其大于$t_{\alpha/2}(n-1)$, 拒绝原假设；否则，接受原假设。

——由于这种检验方法基于t分布，所以又称为t检验法。

例4. 某工厂生产的一种螺丝钉的长度X服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，σ^2未知，规定其长度的均值是32.5毫米。现从该厂生产的一批产品中抽取6件，得长度数据如下：

32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 31.87, 31.03

问这批产品是否合格？（显著性水平α=0.01)

解：(1) H_0：$\mu=\mu_0=32.5$ H_1：$\mu\neq\mu_0=32.5$

(2) 检验统计量为：$\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{6}}$ (3)拒绝域为 $\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{6}}>t_{\alpha/2}(n-1)$

(4) 查表得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.005}(5)=4.0322$ 计算得 $\left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{6}}\right|=2.9967<4.0322$

(5) 故不能拒绝H_0。认为这批产品是合格的。

类似的方法可给出关于均值(σ^2未知)的单侧检验。

5. H_0： $\mu\le\mu_0$ H_1： $\mu>\mu_0$

6. H_0： $\mu\ge\mu_0$ H_1： $\mu<\mu_0$

一. 关于均值的假设检验

T 检验法 (σ^2未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert t \rvert \geq t_{\alpha/2}(n-1)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$t \leq -t_{\alpha}(n-1)$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$t \geq t_{\alpha}(n-1)$

例5.某厂生产小型马达，其说明书上写着：这种小型马达在正常负载下平均消耗电流不会超过0.8安培。现随机抽取16台马达试验，算得平均消耗电流为0.92安培，消耗电流的标准差为0.32安培。假设马达所消耗的电流服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，σ^2未知，在显著性水平α=0.05下，对下面的假设进行检验。（1）H_0 :平均电流不超过0.8　H_1 : 平均电流超过0.8（2）H_0 :平均电流超过0.8　H_1 : 平均电流不超过0.8

解：(1) 假设$H_0: \mu \le \mu_0 = 0.8$　$H_1: \mu > \mu_0 = 0.8$

检验统计量为 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$　拒绝域为 $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \ge t_\alpha(n-1)$

拒绝域为 $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \ge t_\alpha(n-1)$

查表得

$$t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(15) = 1.753$$

计算得

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{0.92-0.8}{0.32/\sqrt{16}} = 1.5 < 1.753$$

因此不能拒绝原假设。

（2）H_0： $\mu \geq 0.8$ H_1： $\mu < 0.8$

选用统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域为 $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha(n-1)$

查表得 $-t_\alpha(n-1) = -t_{0.05}(15) = -1.753$

计算得 $\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{0.92 - 0.8}{0.32/\sqrt{16}} = 1.5 > -1.753$

因此不能拒绝原假设。

在例5中，对问题的提法不同（把哪个假设作为原假设），统计检验的结果也会不同。

第一种原假设的设置方法是不轻易否定厂方的结论，属于从厂方角度即把平均电流不超过0.8设为原假设，此时厂方说的是真的被拒绝这种错误的概率很小（不超过0.05）；

第二种原假设的设置方法是不轻易相信厂方的结论，属于把厂方的断言反过来设为原假设，属于从消费者的角度即把平均电流超过0.8设为原假设，此时厂方说的是假的而被拒绝的概率很小（不超过0.05）。

一. 关于均值的假设检验

由于假设检验是控制犯第一类错误的概率，因此拒绝原假设H_0的决策是有道理的。

而接受原假设H_0只是因为没有找到矛盾，根据目前的数据没有理由拒绝原假设。

当μ未知时，对给定显著性水平α，关于正态总体方差σ^2的常见假设检验问题有如下三种。

I $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

II $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

III $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

其中σ_0^2为已知常数。

1. μ未知时

$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \quad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

σ^2 的一个点估计为S^2。

分析： S^2为σ^2的无偏、有效估计，所以其观察值s^2应该与σ^2比较接近。

即，s^2/σ^2的值应该应该在1附近摆动。

因此，当H_0成立时，s^2/σ_0^2的值应该在1附近摆动。

或者说，当H_0成立时， s^2/σ_0^2在1附近摆动是概率较大的事件。

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ 当H_0成立时，s^2/σ_0^2的值应该在1附近摆动。

所以，s^2/σ_0^2的值与1相差较大时，H_0不成立；

也可以说，当H_0成立时，s^2/σ_0^2与1相差较大是小概率事件。

s^2/σ_0^2过分小于1或过分大于1都是相差较大。

因此，需要两个界限C_1和C_2。

因此，拒绝域为：

$$W = \{\frac{s^2}{\sigma_0^2} < C_1 \ \ or \ \ \frac{s^2}{\sigma_0^2} > C_2\}$$

二. 关于方差的假设检验

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \quad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2 \qquad W=\{\frac{s^2}{\sigma_0^2}<C_1 \;\; or \;\; \frac{s^2}{\sigma_0^2}>C_2\}$$

控制犯第一类错误的概率的原则，得

$$P\{\frac{S^2}{\sigma_0^2}<C_1\cup\frac{S^2}{\sigma_0^2}>C_2\}=P\{\frac{S^2}{\sigma_0^2}<C_1\mid H_0\}+P\{\frac{S^2}{\sigma_0^2}>C_2\mid H_0\}=\alpha$$

由抽样分布定理得

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

所以当H_0成立时

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$$

二. 关于方差的假设检验

$$P\{\frac{S^2}{\sigma_0^2} < C_1 \mid H_0\} + P\{\frac{S^2}{\sigma_0^2} > C_2 \mid H_0\} = \alpha \qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

为了计算方便，令

$$P\{\frac{S^2}{\sigma_0^2} < C_1 \mid H_0\} = \frac{\alpha}{2} \qquad P\{\frac{S^2}{\sigma_0^2} > C_2 \mid H_0\} = \frac{\alpha}{2}$$

等价于

$$P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < (n-1)C_1\} = \frac{\alpha}{2} \qquad P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > (n-1)C_2\} = \frac{\alpha}{2}$$

二. 关于方差的假设检验

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) \quad P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < (n-1)C_1\} = \frac{\alpha}{2} \quad P\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > (n-1)C_2\} = \frac{\alpha}{2}$$

因此有

$$(n-1)C_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \Rightarrow C_1 = \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1}$$

$$(n-1)C_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \Rightarrow C_2 = \frac{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}{n-1}$$

所以，拒绝域为

$$W = \{\frac{S^2}{\sigma_0^2} < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}}{n-1} \text{ 或 } \frac{S^2}{\sigma_0^2} > \frac{\chi^2_{\alpha/2}}{n-1}\}$$

等价地，该拒绝域可写为

$$W = \{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}$$

上述检验都是用χ^2 分布完成的, 所以又称为χ^2检验法。

2. 关于方差的假设检验 $H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

3. 关于方差的假设检验 $H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

二. 关于方差的假设检验

χ^2 检验法 (μ 未知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2<\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2>\chi^2_{\alpha}(n-1)$

例6. 某纺织车间生产的细纱支数服从正态分布，规定标准差是1.2. 从某日生产的细纱中随机抽取16根，测量其支数，得其标准差为2.1. 给定显著性水平α=0.05，问细纱的均匀度是否符合规定?

解：提出假设 $H_0: \sigma^2 = 1.2^2 \quad H_1: \sigma^2 \neq 1.2^2$

检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{1.2^2}$

拒绝域为 $W = \left\{ \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \text{或} \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \right\}$

查表得 $\chi^2_{0.025}(15)=27.488,\chi^2_{1-0.025}(15)=6.262$

经计算得 $$\boxed{\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{15\times 2.1^2}{1.2^2}=45.94}$$

由于45.94>27.488，因此在显著性水平α=0.05下拒绝原假设，认为细纱的均匀度不符合规定。

例7. 某种零件的长度服从正态分布，按规定其方差不得超过0.016.现从一批零件中随机抽取25件测量其长度，得样本方差为0.025.问能否由此判断这批零件合格?(取显著性水平α=0.01，α=0.05)

解：提出假设 $H_0:\sigma^2 \le \sigma_0^2 = 0.016 \quad H_1:\sigma^2 > \sigma_0^2 = 0.016$

检验统计量 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

拒绝域为 $W = \left\{ \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \ge \chi_\alpha^2(n-1) \right\}$

查表得 $\chi^2_{0.01}(24) = 42.98$

经计算得

$$\boxed{\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{24 \times 0.025}{0.016} = 37.5}$$

由于37.5<42.98，因此在显著性水平α=0.01下不能拒绝原假设，可以认为这批零件合格.

当α=0.05时，查表得 $\chi^2_{0.05}(24)=36.415$　拒绝域 $W=\left\{\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq 36.415\right\}$

由于37.5>36.415，因此在显著性水平α=0.05下拒绝原假设，认为这批零件不合格。

例7说明：对原假设作出的判断，在不同的显著性水平下可以得到不同的检验结果。这是因为降低犯第一类错误的概率，就会使得拒绝域减小，从而拒绝H_0的机会变小，接受H_0的机会变大。

因此对原假设H_0所作的判断，与所取显著性水平α的大小有关，α越小越不容易拒绝原假设H_0。

二. 关于方差的假设检验

当 μ 未知时，检验统计量为

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}$$

当$\mu=\mu_0$已知时,自然用μ_0替换$\bar{X}$得检验统计量

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}$$

该统计量服从$\chi^2(n)$分布，在$\mu=\mu_0$已知下关于方差的假设检验见表。

χ^2 检验法 (μ 已知)

原假设 H_0	备择假设 H_1	检验统计量	拒绝域
$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n)$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$
$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2<\chi^2_{1-\alpha}(n)$
$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2>\chi^2_{\alpha}(n)$

作业：1,2,8,11

第23讲

谢谢观看