第六章 作业

6-6 6-8 6-14 6-19
6-23 6-28 6-41 6-50

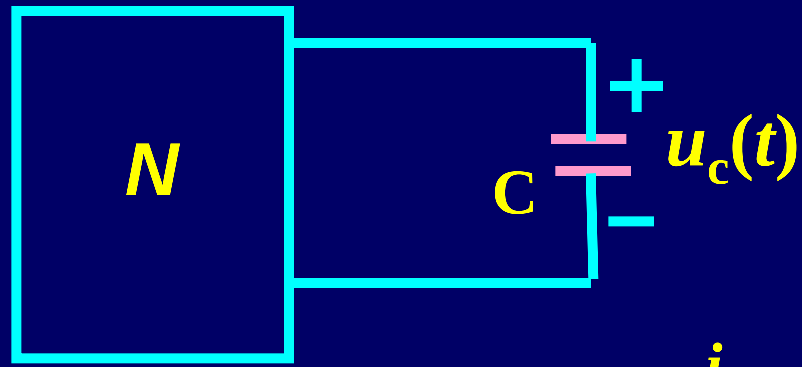
第六章 练习

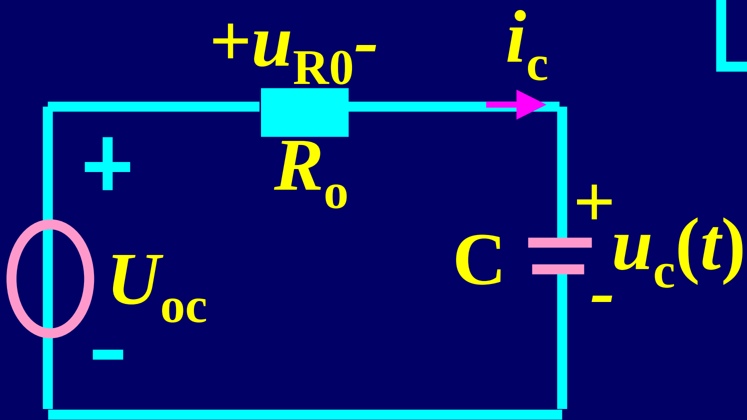
6-9 6-16 6-18 6-21
6-27 6-32 6-39 6-49

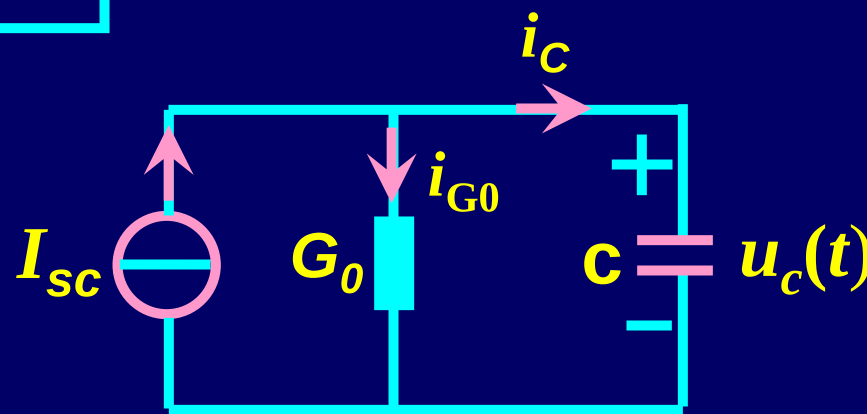
一阶电路 --------含一个独立的动态元件

或者由一解微分方程描述

§6-1 分解方法在动态电路分析中的应用







$$u_{R0}+u_C=U_{OC}$$

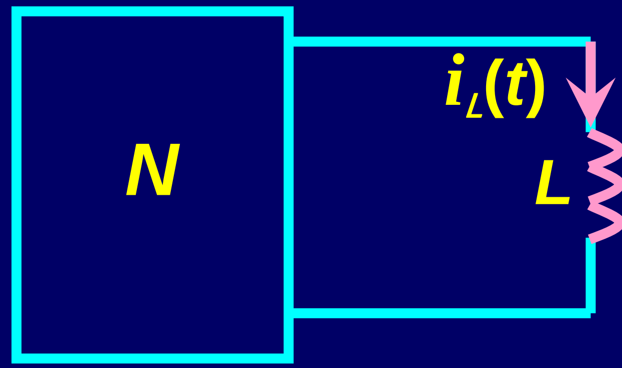
$$i_{G0}+i_C=I_{SC}$$

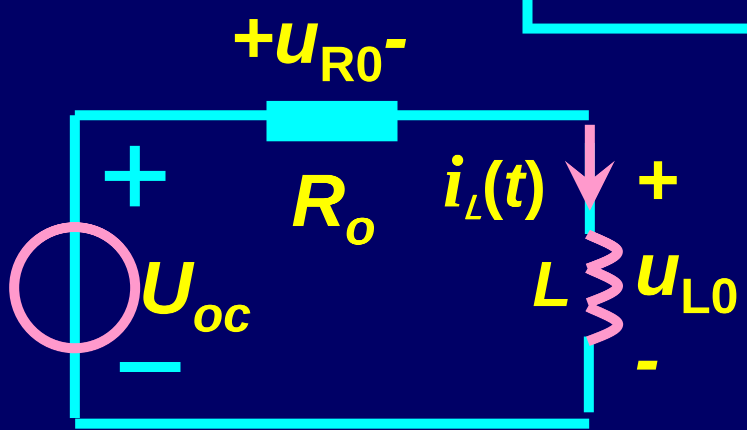
$$R_0C\frac{du_C}{dt}+u_C=U_{OC}$$

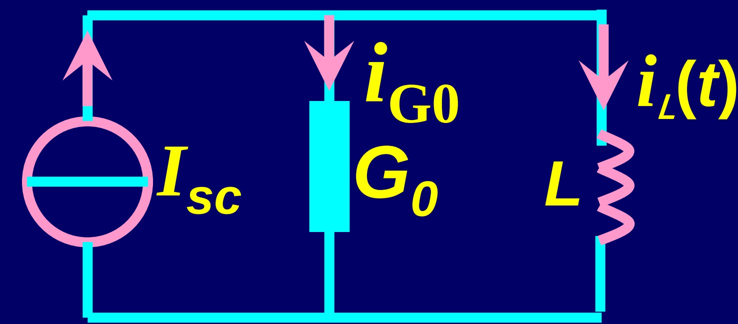
$$G_0u_C+C\frac{du_C}{dt}=I_{SC}$$

$u_C(t_0)$=已知或可求

$u_C(t_0)$=已知或可求







$$u_L+u_{R0}=U_{OC}$$

$$L\frac{di_L}{dt}+R_0 i_L=U_{OC}$$

$i_L(0)=I_0$已知或可求

$$i_{G0}+i_L=I_{SC}$$

$$G_0u_L+i_L=I_{SC}$$

$$G_0L\frac{di_L}{dt}+i_L=I_{SC}$$

$i_L(0)=I_0$已知或可求

一阶微分方程求解（此部分内容自己复习）

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=x(t)$$

$y(t_0)=y_0$　初始条件

（1）直接积分法

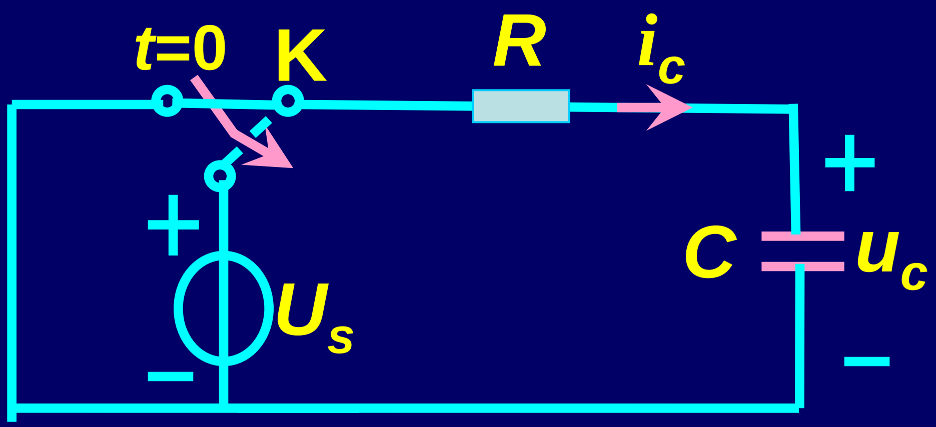
（2）猜试法

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

§6-2 零状态响应 P_{223}

定义：换路后电路的响应仅由电源引起，和电路的初始状态无关。

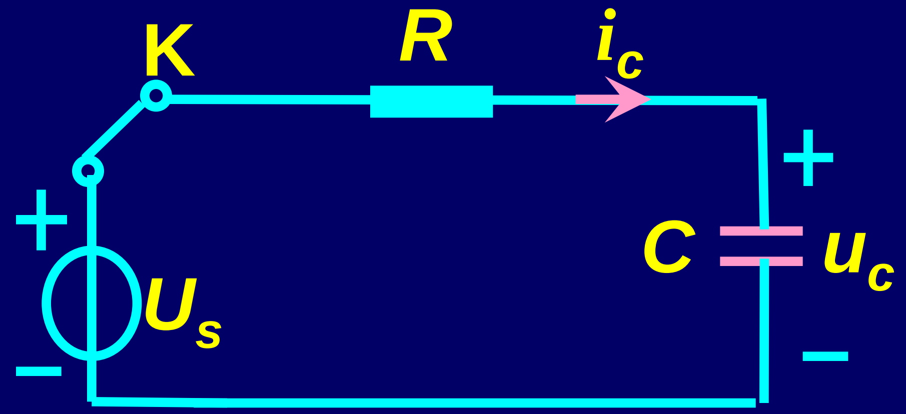
一.RC电路



t=0时，开关*K*动作，动作前电路处于稳态。

求$u_C(t)$、$i_C(t)$ ， $t\geq 0$

数学分析



$t \geq 0$　　$u_C(0)=0$

$$Ri_c+u_C=U_S$$

$$\begin{cases} RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=U_S \\ u_C(0)=0 \end{cases}$$

（线性常系数一阶非齐次方程）

$$u_C(t)=u_{Ch}+u_{Cp}$$

u_{Ch}— 对应齐次方程的通解

u_{Cp}— 非齐次方程的特解

求u_{Ch}

$$RC\frac{du_{Ch}}{dt}+u_{Ch}=0$$

$u_{Ch}(t)=Ke^{st}$ 代入方程：

$$RCSKe^{st}+Ke^{st}=0$$

$$RCS+1=0 \qquad S=-\frac{1}{RC}$$

$$u_{Ch}(t)=Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

求u_{Cp}（特解与激励形式一样）

设u_{Cp}=Q常数，代入原方程：

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S \qquad Q=U_S$$

$$u_C(t)=Ke^{-\frac{1}{RC}t}+U_S$$

利用初始条件求K：

由$u_C(0)=Ke^{-0}+U_S=0$ 得$K=-U_S$

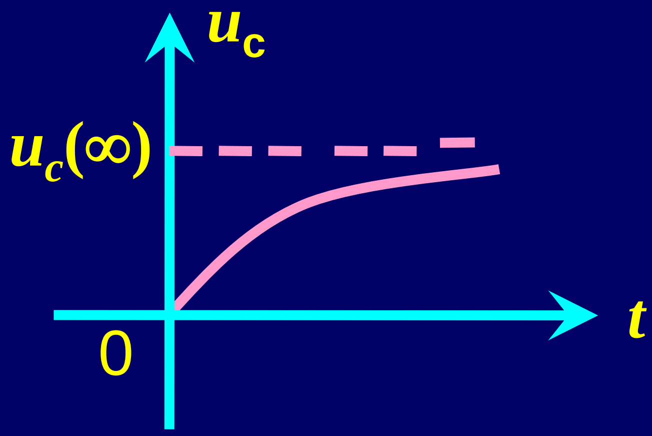
$$u_C(t)=-U_Se^{-\frac{t}{RC}}+U_S,\ t\geq 0$$

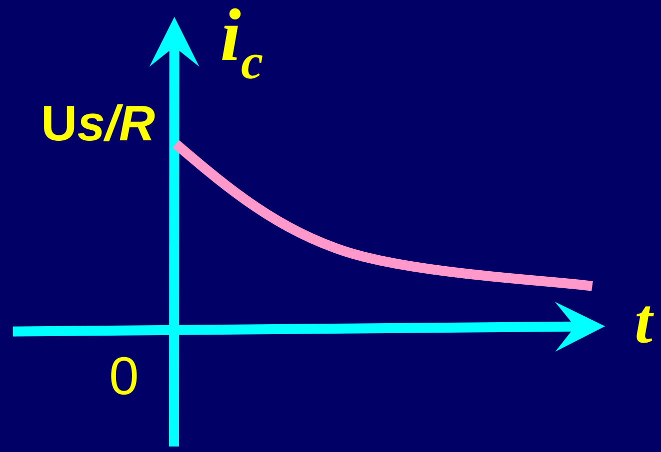
$$u_C(t)=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})=u_C(\infty)(1-e^{-\frac{t}{RC}}),\ t\geq 0$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{1}{RC}t},\ t\geq 0$$

令 $\tau = RC$， $u_C(t) = u_c(\infty)\,(1- e^{-\frac{t}{\tau}})$ ， $t \geq 0$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad ， t \geq 0$$



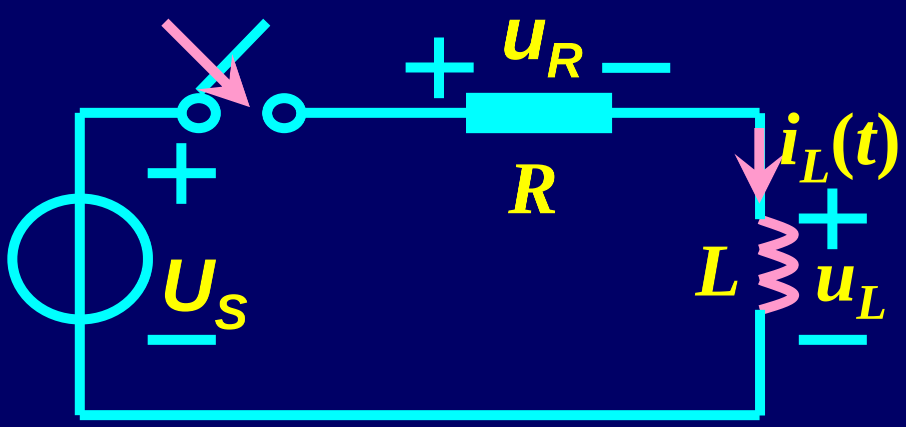


$t=\tau$ 时 $u_C(\tau)=U_S(1-e^{-1})=0.632U_S$

$t=4\tau$ 时 $u_C(4\tau)=U_S(1-e^{-4})\approx U_S$

工程上认为电容电压已达稳态

二. RL电路



t=0时，开关闭合

求i_L(t)，t≥0

已知 $i_L(0)=0$

解：对t≥0 的电路列方程

$$u_L + u_R = U_S$$

$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L = U_S$$

$$i_L(0) = 0$$

$$i_L(t) = i_{Lh}+i_{Lp}$$

（1）求通解

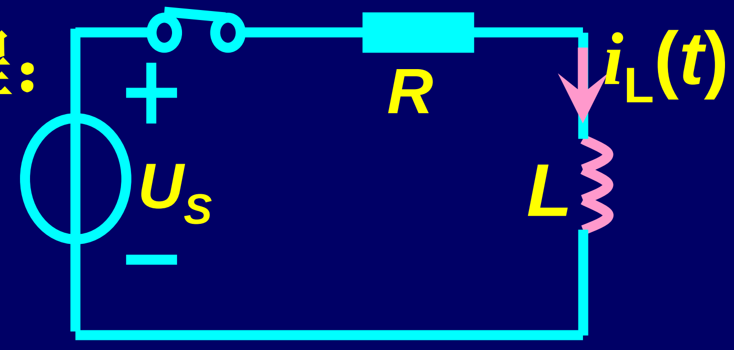
$$i_{Lh}(t) = Ke^{st}$$

$$Ls + R = 0$$

$$s = -\frac{R}{L}$$

$$i_{Lh} = Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

(2）求特解： 设$i_{Lp}=A$，代入原方程：



$t \geq 0$

$$RA=U_S \qquad A=\frac{U_S}{R}$$

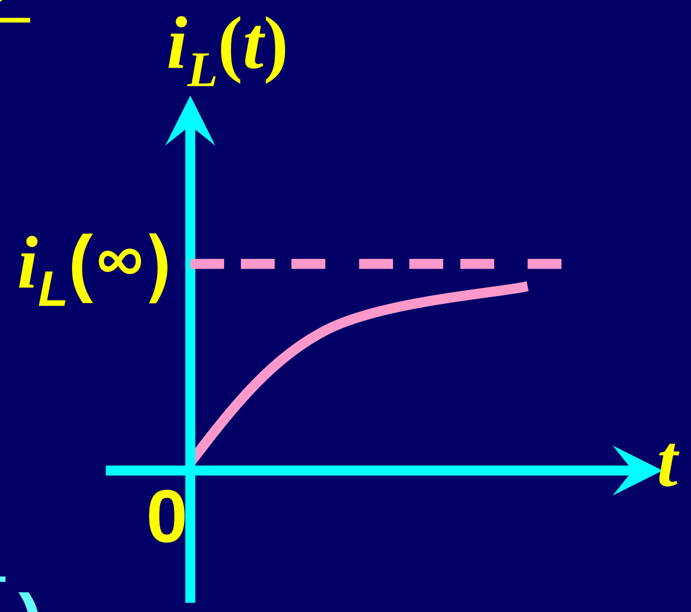
$$i_L(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_S}{R}$$

利用初始条件求K：

$$i_L(0) = Ke^{-0} + \frac{U_S}{R} = 0 \Rightarrow K= -\frac{U_S}{R}$$

$$i_L(t) = -\frac{U_S}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_S}{R}$$

$$i_L(t) = \frac{U_S}{R}(1- e^{-\frac{R}{L}t}) \text{ , } t\geq 0$$



令$\tau = \frac{L}{R}$ $\qquad i_L(t) = \frac{U_S}{R}(1- e^{-\frac{t}{\tau}})$

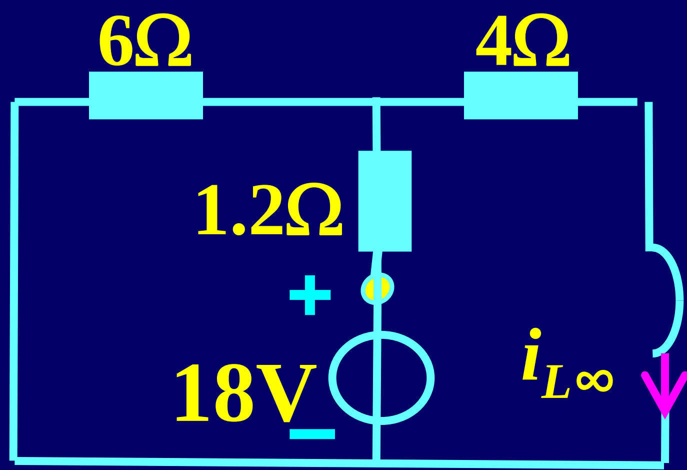
$$= i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ , } t\geq 0$$

例6-3　求图示电路的$i(t)$、$i_L(t)$，$t \geqslant 0$。换路前处于稳态。

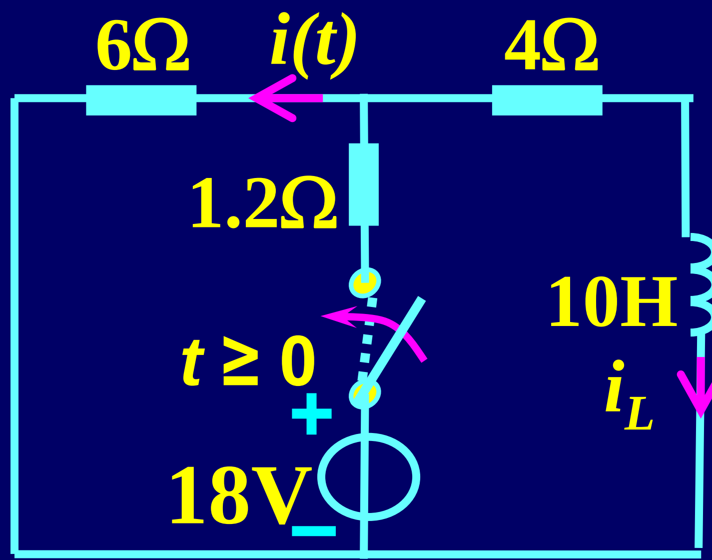
解：零状态响应。

思路：用公式先求$i_L(t)$，$t \ge 0$。然后在$t \ge 0$的电路求$i(t)$

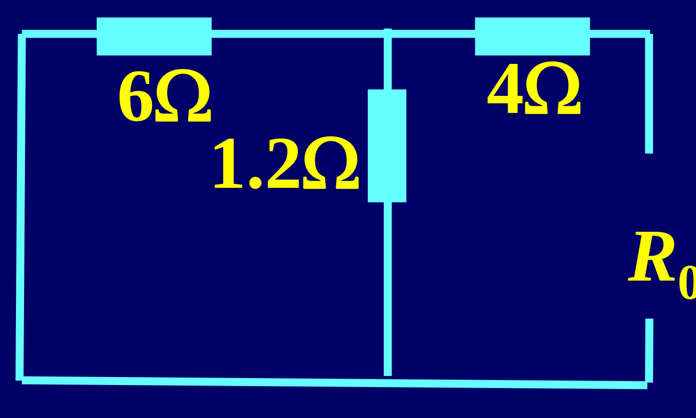
（1）求$i_L(\infty)$



t→∞等效电路



$$i_{L\infty} = \frac{18}{1.2+6//4} \times \frac{6}{6+4} = 3A$$



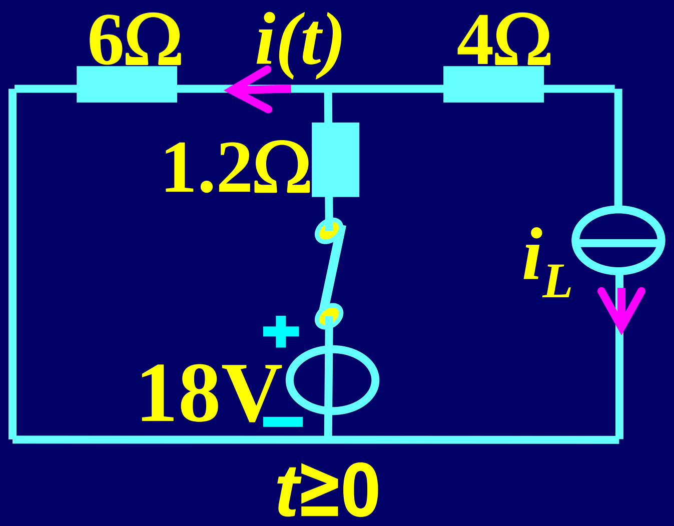
t≥0时 求R_0等效电路

（2）求 τ　$R_0 = 4 + 6//1.2 = 5\ \Omega$

τ =10/5=2S

（3）$i_L(t) = i_L(\infty)(1-e^{-\frac{1}{\tau}t}) = 3(1-e^{-0.5t})$A， $t\geq 0$

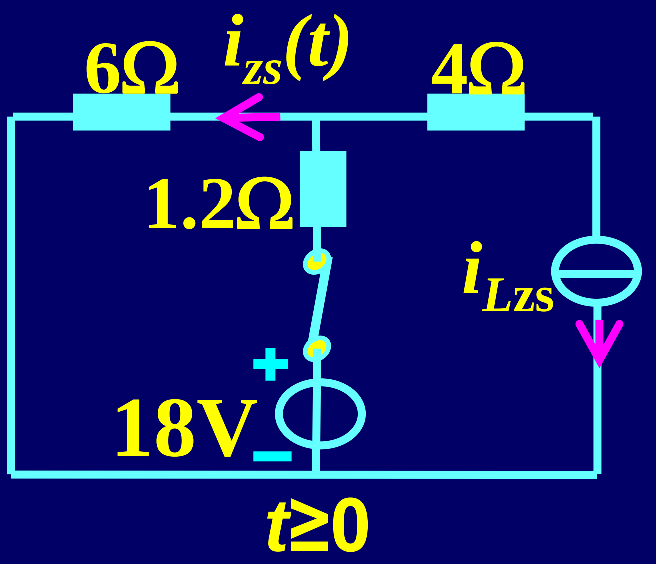
（4）在$t\geq 0$的电路,电感用电流源代替后求$i(t)$



列方程：$1.2[i(t)+i_L]+6\,i(t)-18=0$

$i(t)=2+0.5\,e^{-0.5t}$ A， $t\geq 0$

$i_{Lzs}(t) = 3(1-e^{-0.5t})$A， $t\geq 0$



$i_{zs}(t)=2+0.5e^{-0.5t}$ A， $t\geq 0$

线性电路叠加性：

$i_{zs}(t)=k_1\cdot 18+k_2 i_{Lzs}(t)$

小 结

1. 恒定输入下一阶电路的零状态响应

RC 电路

$$u_C(t) = u_C(\infty)\,(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\ , \ t\geq 0$$

$$\tau = R_0 C$$

*RL*电路

$$i_L(t) = i_L(\infty)\,(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\ , \ t\geq 0$$

$$\tau = \frac{L}{R_0}$$

$t=t_0$时换路的表达式要求独立写出

2. $u_C(t)$、$i_C(t)$的零状态响应由0向稳态值按指数规律上升，τ越小上升越快。

3. 求出$u_C(t)$、$i_L(t)$，根据置换定理，电容用电压值为$u_C(t)$的电压源置换，电感用电流值为$i_L(t)$的电流源置换，在置换后的电路中求其它电压电流。

4. 单电源作用时，一阶电路的零状态响应是输入的线性函数。输入扩大 a 倍，零状态响应也扩大 a 倍，如有多个电源作用，也可用叠加定理求零状态响应。

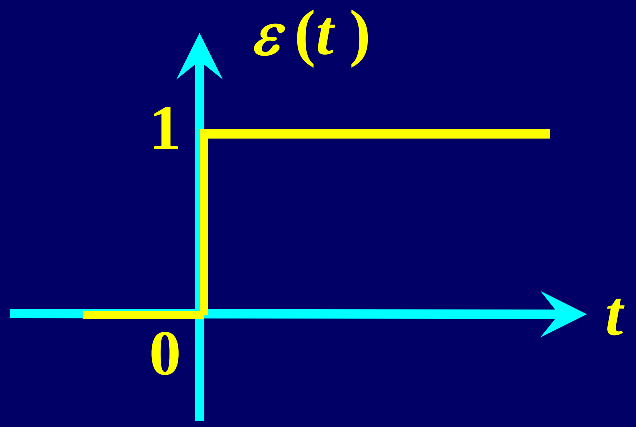
5. 如果是非直流激励或非渐进稳定电路，则需列微分方程求解

§ 6-3 阶跃响应 分段常量信号响应

一. 阶跃函数

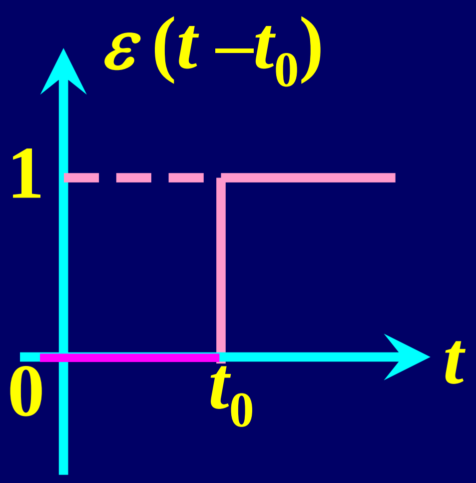
1. 单位阶跃函数

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

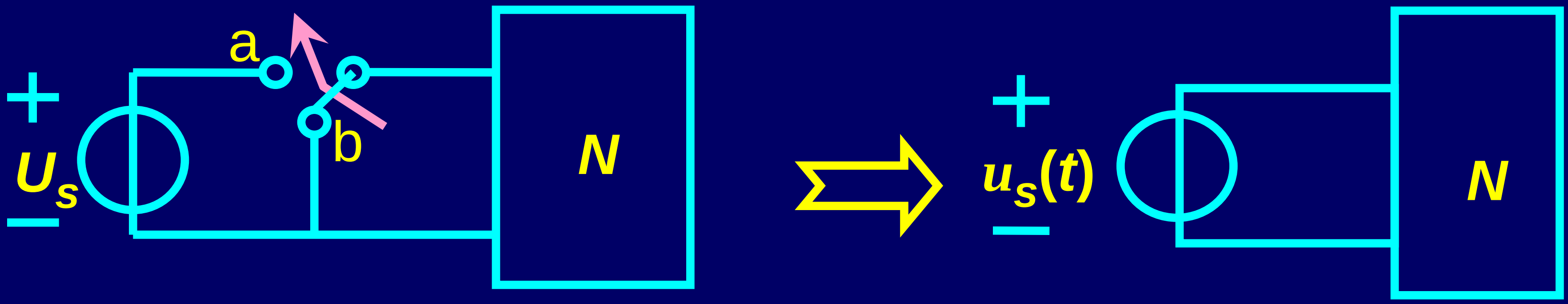


2. 延时单位阶跃函数

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t<t_0\end{cases}$$



二. 用单位阶跃函数表示电源接入



t =0时，开关由$b \rightarrow a$

$$u_S(t) = U_S\varepsilon(t)$$

若电源U_S或I_S在$t = t_0$时接入电路

$$u_S(t) = U_S\varepsilon(t - t_0)$$

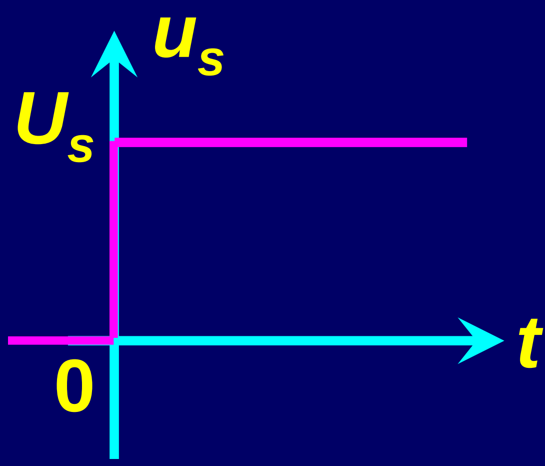
$$i_S(t) = I_S\varepsilon(t - t_0)$$

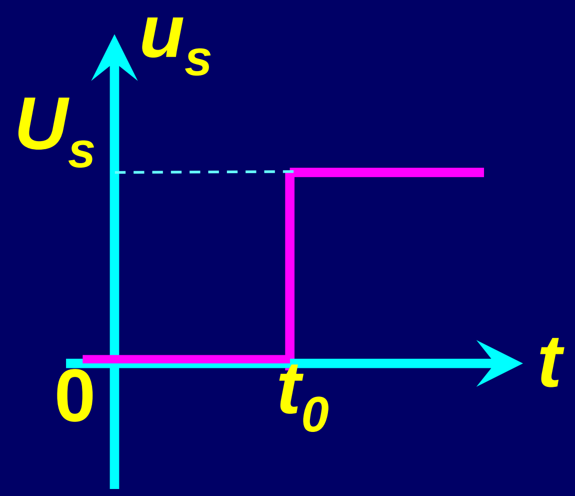
三. 阶跃信号、单位阶跃响应

1. 阶跃信号

$u_S(t) = U_S\varepsilon(t)$　　阶跃信号

$u_S(t) = U_S\varepsilon(t - t_0)$　　延时阶跃信号





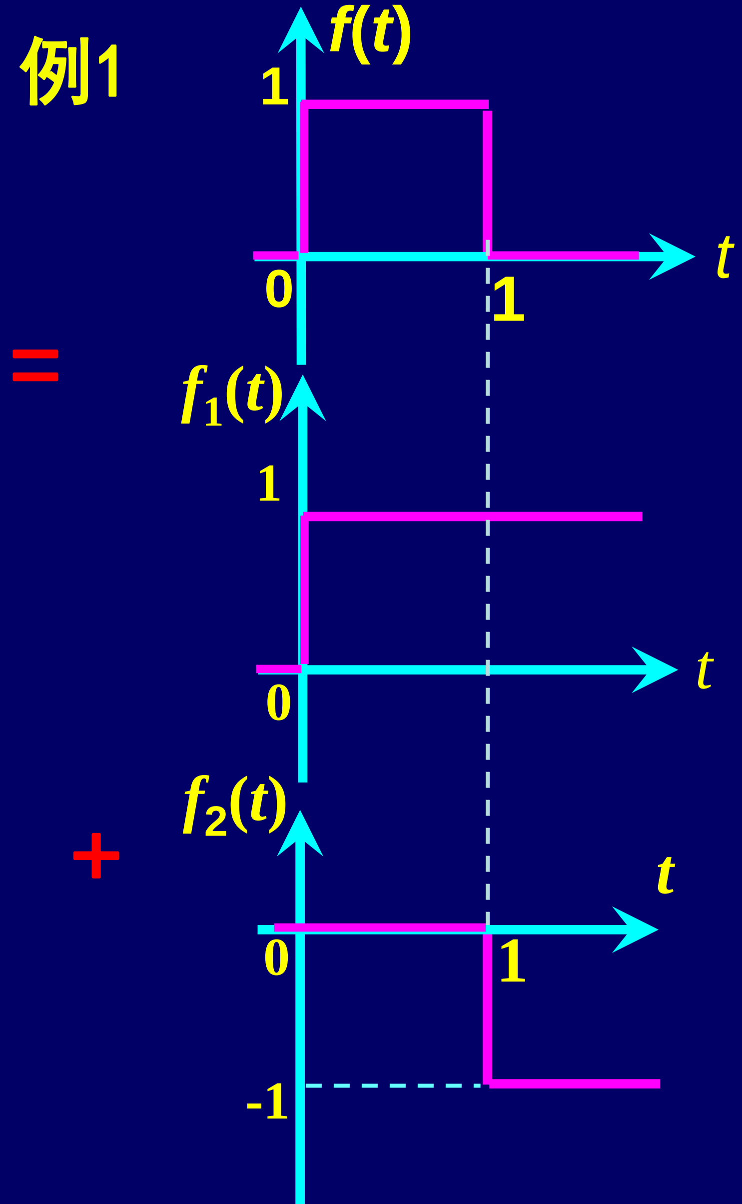
2. 单位阶跃响应

单位阶跃信号作用下的零状态响应称为单位阶跃响应，用 $S(t)$ 表示。延时单位阶跃信号作用下的响应为 $S(t-t_0)$。

四. 分段常量信号作用下一阶电路的求解

分段常量信号的分解表示：若干阶跃信号之和

例1

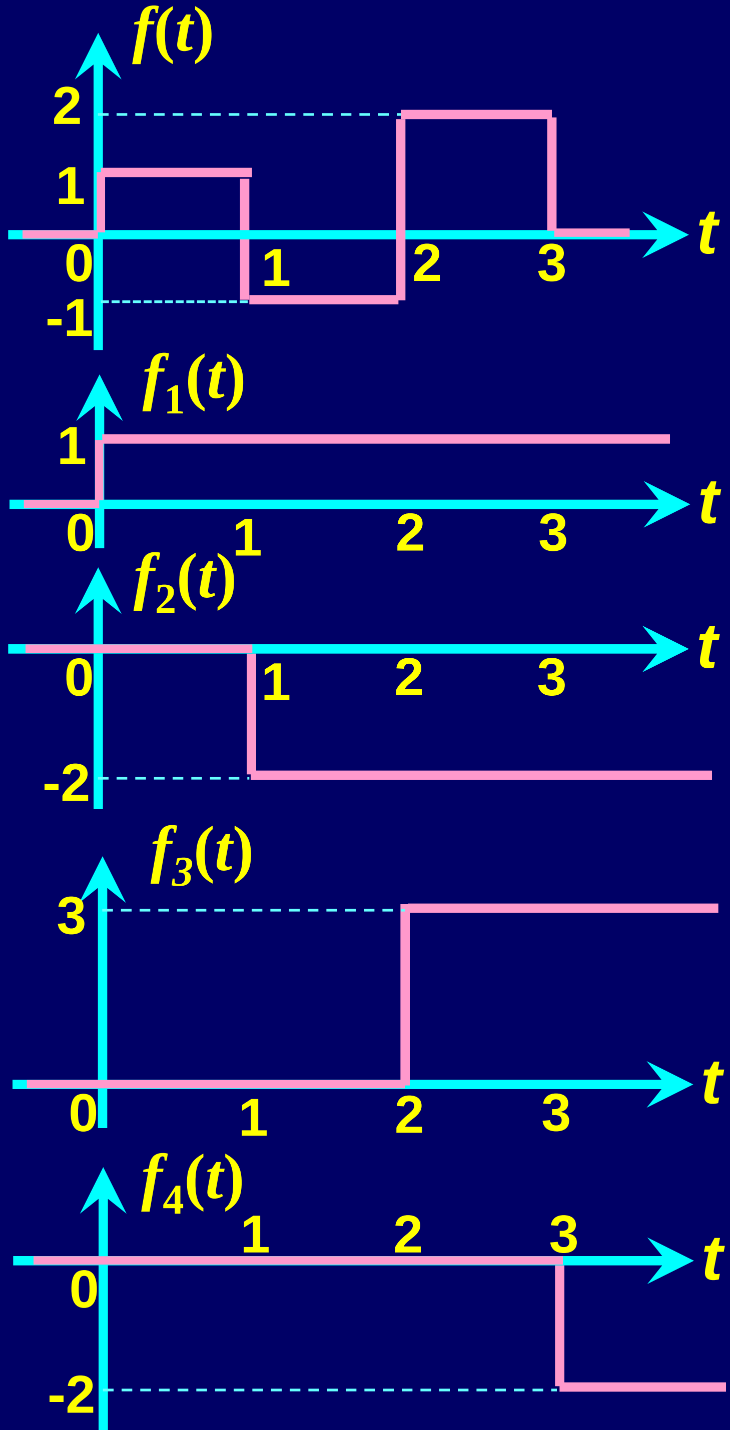


$$f_1(t) = \varepsilon(t)$$

$$f_2(t) = -\varepsilon(t-1)$$

$$f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$$

例2：



$$f(t) = \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1) + 3\varepsilon(t-2) - 2\varepsilon(t-3)$$

$$f_1(t) = \varepsilon(t)$$

$$f_2(t) = -2\varepsilon(t-1)$$

$$f_3(t) = 3\varepsilon(t-2)$$

$$f_4(t) = -2\varepsilon(t-3)$$

分段常量信号作用下一阶电路的两种求解方法：

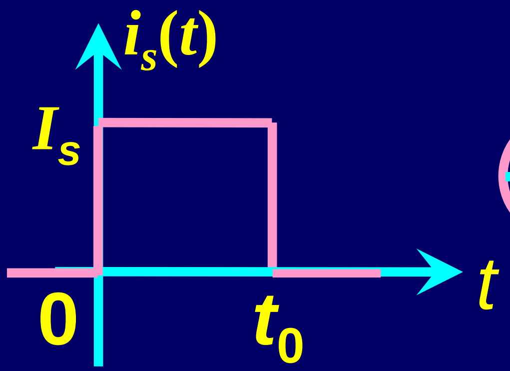
法1. 把分段常量信号分解为若干个阶跃信号之和，各阶跃信号分量单独作用于电路，用叠加的方法求出电路的零状态响应。

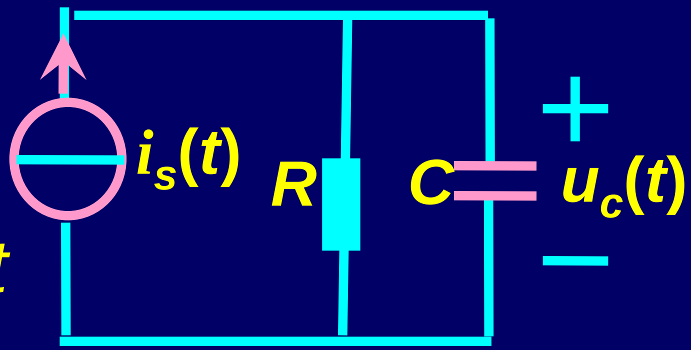
如果初始状态不为零，再加上零输入响应。

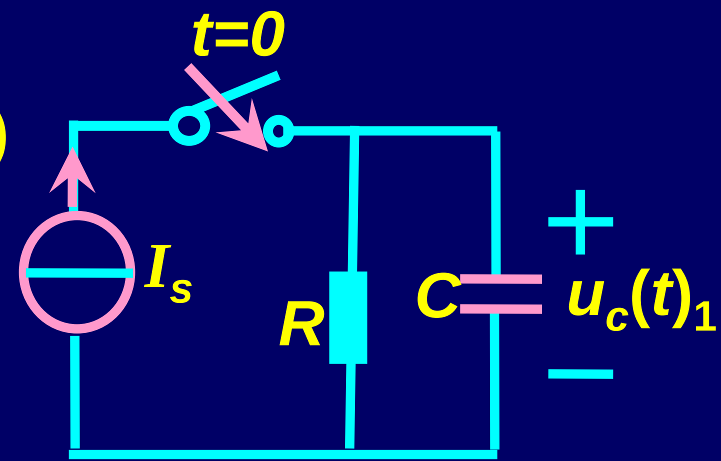
法2. 把分段常量信号作用于电路的时间分为若干个子区间，每一子区间内输入信号为一常量，即按时间分段求解。

求解过程中，注意每一子区间初始值的计算。

例1 已知：$i_S(t)$作用于电路，$u_C(0)=0$ 求$u_C(t)$ $t\geq 0$







$I_S\varepsilon(t)$单独作用

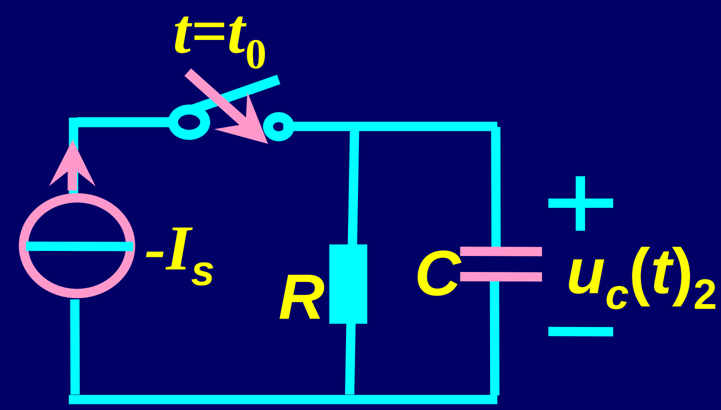
解法1：把$i_S(t)$分解成两项：

$$i_S(t) = I_S\varepsilon(t) - I_S\varepsilon(t - t_0)$$

阶跃信号　延时阶跃信号

$I_S\varepsilon(t)$ 单独作用：

$$u_C(t)_1 = RI_S(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})\varepsilon(t)$$



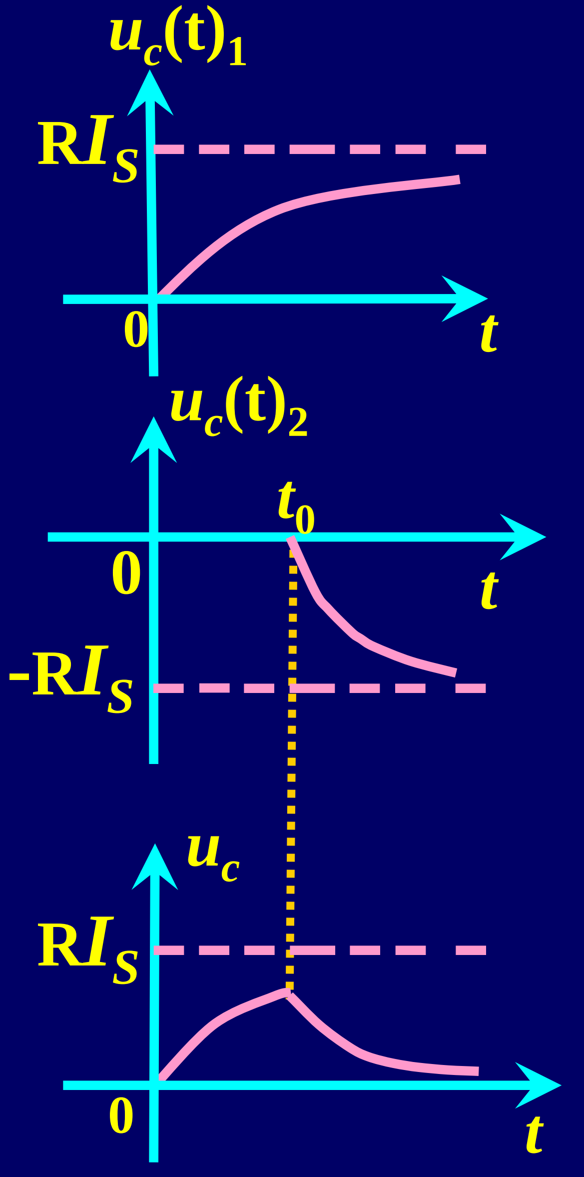
$-I_S\varepsilon(t-t_0)$单独作用

$-I_S\varepsilon(t-t_0)$单独作用：

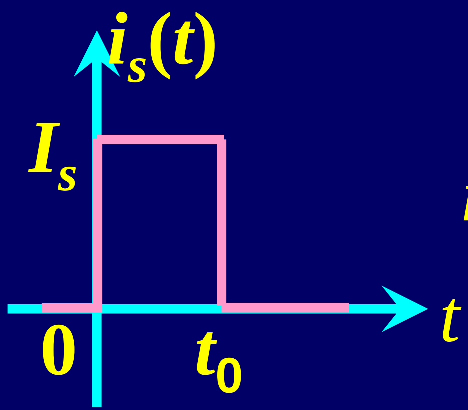
$$u_C(t)_2 = -R\,I_S\,[1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}]\varepsilon(t-t_0)$$

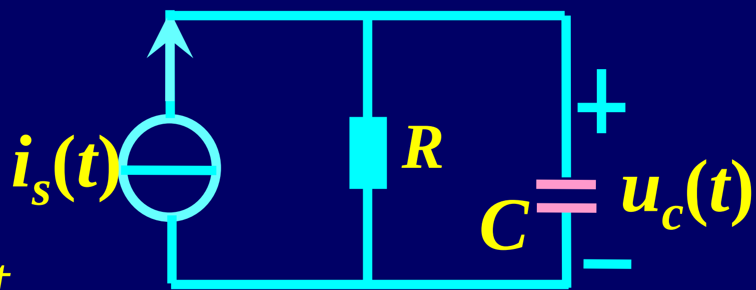
$$u_C(t) = u_C(t)_1 + u_C(t)_2$$

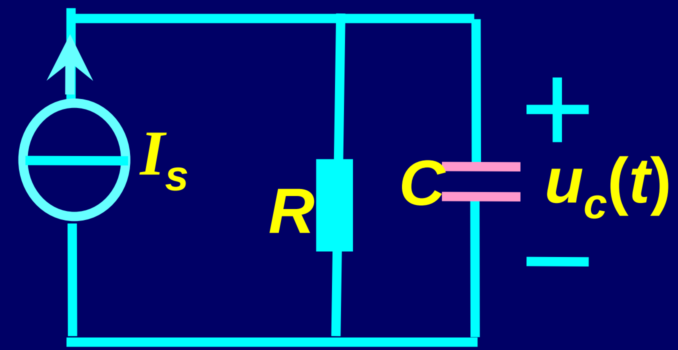
$$= RI_S(1-e^{-\frac{1}{RC}t})\varepsilon(t) - RI_S[1-e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}]\varepsilon(t-t_0)$$



解法2：分段求解





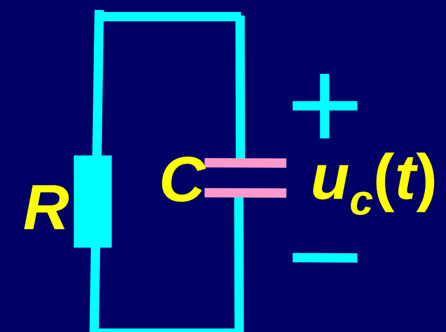


$0 < t < t_0$, $u_C(0)=0$

$0 < t < t_0$　零状态响应

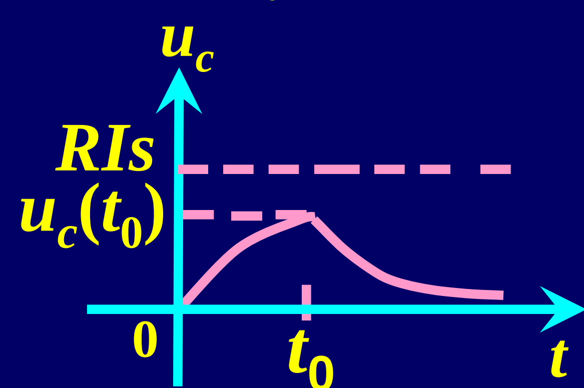
$$u_{CZS}(t) = RI_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\,,\quad 0 < t < t_0$$

$$u_C(t_0) = RI_S(1-e^{-\frac{t_0}{RC}})$$



$t > t_0$:零输入

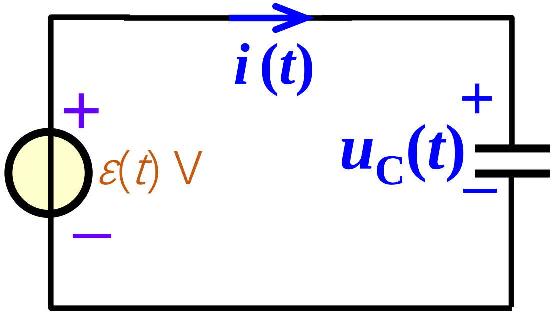
$t > t_0$　零输入响应



$$u_{CZi}(t) = RI_S(1-e^{-\frac{t_0}{RC}})\,e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\,,\ t > t_0$$

§6-3　冲激响应

一、单位冲激函数



电容电压跃变

已知$C=1\text{F}$，$u_C(0_-)=0$

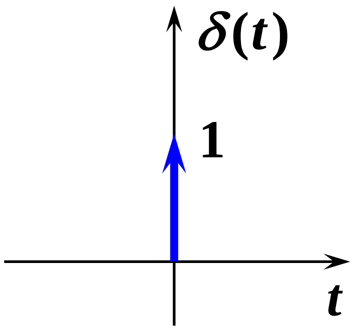
0时刻电容电压跃变为$u_C(0_+)=1\text{V}$，求电流i(t)。

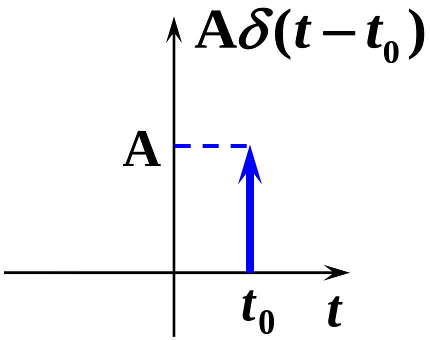
$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\ ?$$

1 单位冲激函数定义

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

单位延时冲激函数 $\delta(t-t_0)$





有向线段的长度代表δ函数的积分值，称为冲激强度。

2 单位冲激函数性质

(1) 当$t\neq 0$时，$\delta(t)=0$

对任意在t=0时连续的函数f(t)，$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$

(3) 取样性质

任意在t=0时连续的函数f(t)，积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t$的讨论：

当t≠0时：

δ(t)=0，f(t)δ(t)=0，积分结果为0

当t=0时：

δ(t)≠0，f(t)δ(t)=f(0)δ(t)

$$\int_{0-}^{0+} f(0)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)\int_{0-}^{0+} \delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$

同样，对任意在$t=t_0$连续的函数f(t):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$$

冲激函数有把一个函数在某时刻的值“筛”出来的性质，称为“筛分”性质，也称取样性质。

二. 单位冲激响应$h(t)$

单位冲激输入作用下的零状态响应称为单位冲激响应，记作$h(t)$。

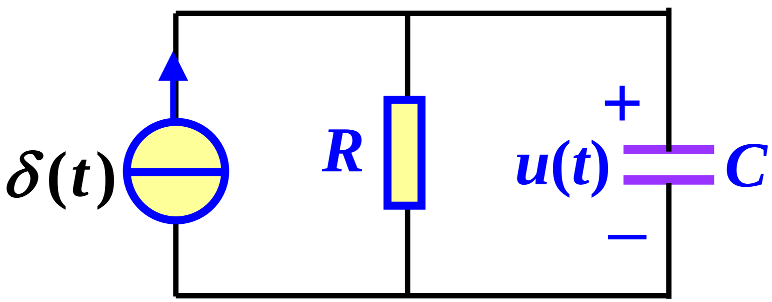
$$\varepsilon(t) \xrightarrow{\text{零状态}} s(t)$$ 单位阶跃响应

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\text{零状态}} h(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$ 单位冲激响应

（线性、时不变电路的性质）

求单位冲激响应（电压或电流）可先求单位阶跃响应，再通过微分求解

例6-8 已知$u(0_)=0$，求电容电压的单位冲激响应$h(t)$。



解法1

电容电压的单位阶跃响应为

$$s(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

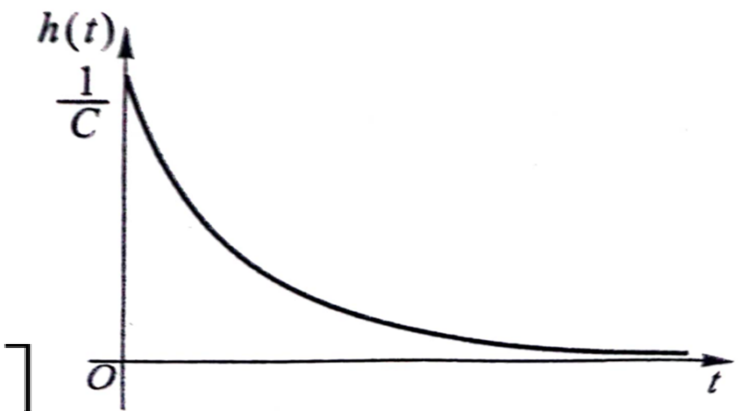
$$h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$=R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\varepsilon(t)-e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\right]$$

$$=R\left[\delta(t)-\delta(t)e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\right]$$

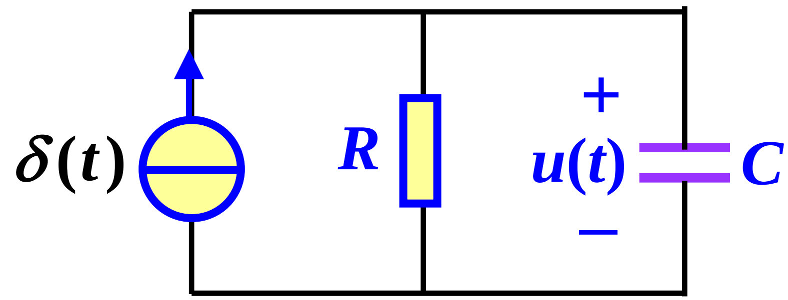
$$=R\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$



在$t=0$时刻，在冲激电流作用下电容电压由0跃变为$\frac{1}{C}$。

解法2 分段求解



- （1）0_- 到 0_+时刻：

利用KCL $C\dfrac{du(t)}{dt}+\dfrac{u(t)}{R}=\delta(t)$

等式两边分别积分

$u(t)$为有限值→电阻电流积分为0

$$\int_{0_-}^{0_+} C\frac{du(t)}{dt}dt+\int_{0_-}^{0_+}\frac{u(t)}{R}dt=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt=1$$

$$\int_{0_-}^{0_+} C\frac{du(t)}{dt}dt=1$$

$$C[u(0_+)-u(0_-)]=1$$

求出$u(0_+)=\dfrac{1}{C}$

- （2）$t>0$:

零输入响应

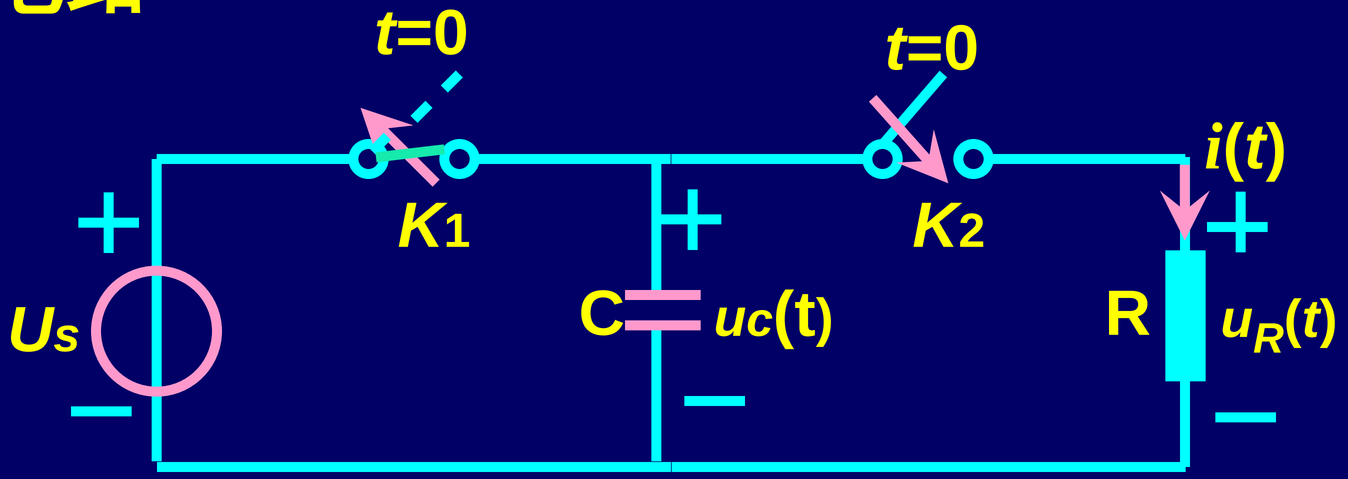
$$h(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)(\mathrm{V})$$

$$u(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}(\mathrm{V})$$

§6-4 零输入响应 P_{239}

定义：电路换路后的响应仅由动态元件的初始储能引起——零输入响应

一. RC电路



t=0时，K_1打开，K_2闭合，换路前电路处于稳态

求$u_C(t)$、 $i(t)$， $t\geq 0$

换路： 电路中电源的接入、断开或元件参数和电路结构的变化都称为换路。

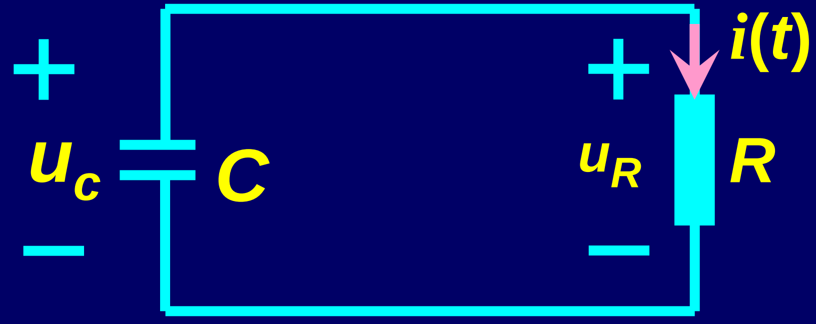
换路定律： $u_c(0_+)=u_c(0_-)$　　$i_L(0_+)=i_L(0_-)$

注意

1. 换路定律只适用于状态变量 u_C 和 i_L；

2. 非状态量 i_C, u_L, i_R 和 u_R 在换路前后**可能发生跃变**

对换路后电路进行数学分析：



$$u_C - u_R = 0$$

$$u_R = Ri \qquad i(t) = -C\frac{du_c}{dt}$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$ （线性常系数一阶齐次）

$$u_C(0) = U_s$$ 初始条件

解的形式： $u_C(t) = Ke^{st}$ 代入原方程

$$RCSKe^{st} + Ke^{st} = 0$$

$$Ke^{st}\,(RCS + 1) = 0$$

$$RCS+1 = 0$$ 特征方程

$$S = -\frac{1}{RC}$$ 特征方程的根（固有频率）

$$u_C(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

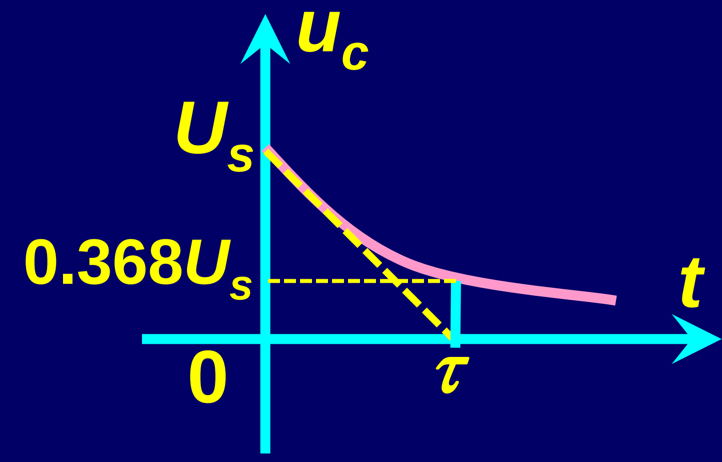
由$u_C(0) = Ke^{-0} = U_s$，得$K = U_s$

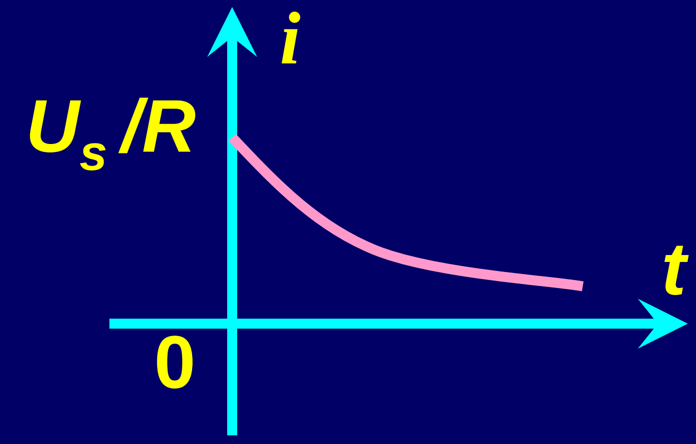
$$u_C(t) = U_s e^{-\frac{t}{RC}}\text{，} \quad t \geq 0$$

$$i(t) = (U_s/R)\, e^{-\frac{t}{RC}}\text{，} \quad t \geq 0$$

令τ =RC 时间常数

s Ω F





$$u_C(t) = U_s e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$

$$i(t) = (U_s/R) e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0$$

讨论：

$t = \tau$，$u_C(\tau) = U_s e^{-1} = 0.368U_s$

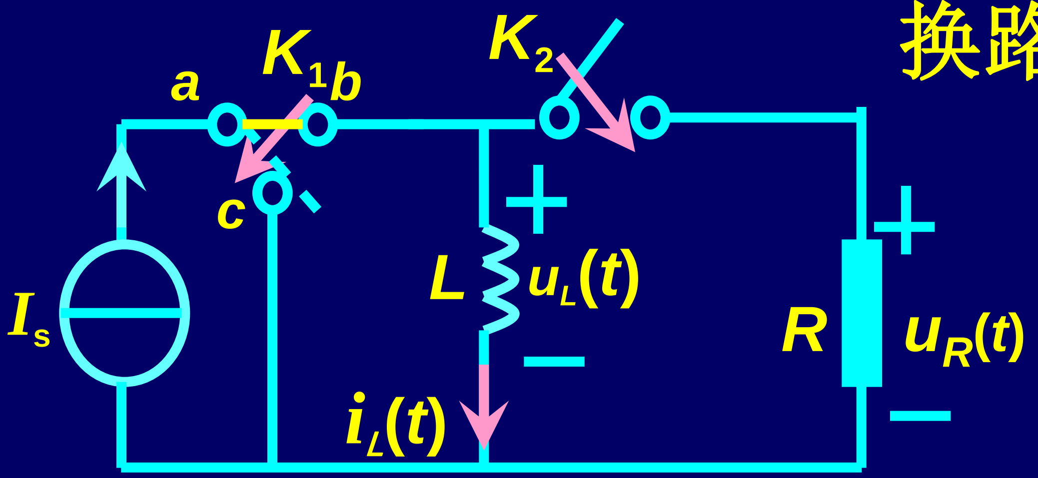
t	u_C/U_s (%)
τ	36.8
2τ	13.5
3τ	4.98
4τ	1.83
5τ	0.674
6τ	0.0912
7τ	0.00454
8τ	3.72×10^{-42}

时间常数 τ 越大，衰减越慢； τ 越小，衰减越快。

从理论上讲，电路只有在 $t\to\infty$ 时才能衰减到0。但在工程上，通常认为 $t\geq4\tau$ 时，电容放电过程基本结束，电路进入稳态。

二. RL电路

t=0时,K_1由b->c, K_2闭合，换路前处于稳态

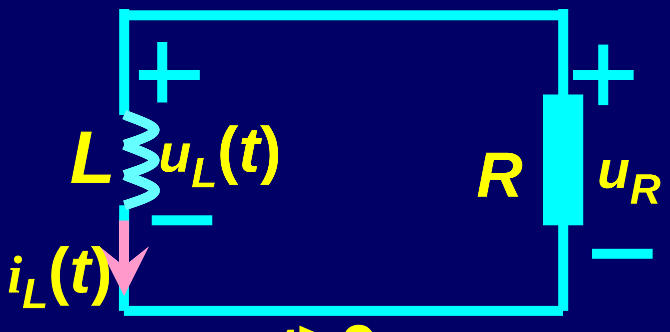


求$i_L(t)$、$u_L(t)$， $t \geq 0$

解：$i_L(0)=I_s$

$u_L - u_R = 0$

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad u_R = -Ri_L$$



$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \qquad i_L(0) = I_s$$

令$i_L(t)=Ke^{st}$，则： $LSKe^{st}+RKe^{st}=0$

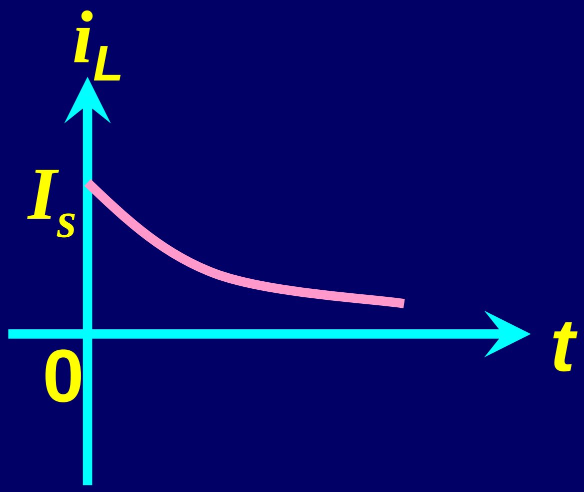
$LS+R=0 \quad S=-\frac{R}{L}$ $\qquad i_L(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}$

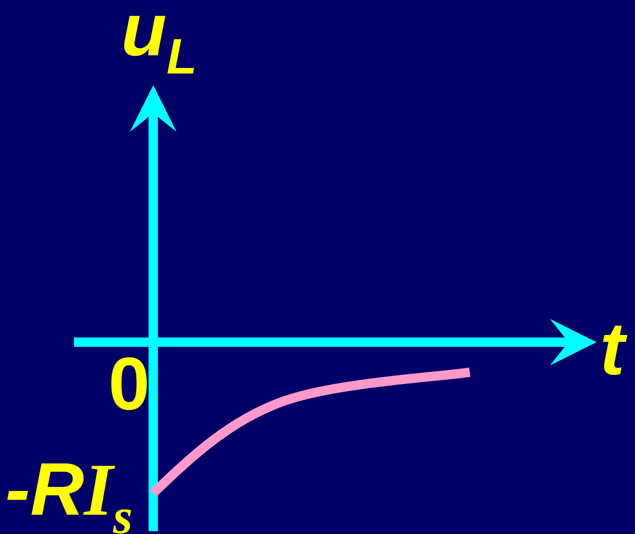
利用初始条件求K： $i_L(0)=Ke^{-0}=I_s \Rightarrow K=I_s$

$$i_L(t)=I_s e^{-\frac{R}{L}t} \quad t\geq 0$$

令$\tau=\frac{L}{R}$ 则: $\quad i_L(t)=I_s e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t\geq 0$

$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=-RI_s e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t\geq 0$$





总结：一阶电路的零输入响应

RC电路：

$$u_C(t)=u_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}}\quad，\ t\geq 0$$

$$\tau=R_0C$$

RL电路：

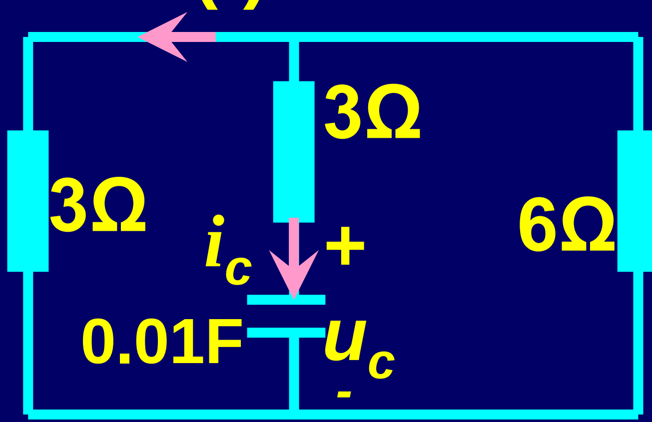
$$i_L(t)=i_L(0)e^{-\frac{t}{\tau}}\quad，\ t\geq 0$$

$$\tau=\frac{L}{R_0}$$

R_0---换路后由动态元件看进去电路的等效电阻

求一阶电路零输入响应$u_c(t)$、$i_L(t)$时，可不列微分方程，直接用结论。

补充1 电路如图，已知$u_c(0)=15V$,求$u_c(t)$, $i(t)$， $t\geq 0$



t≥0

解：零输入响应

$u_C(0)=15V$

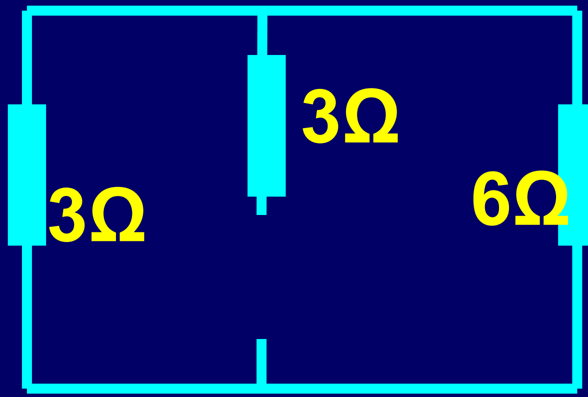
$$R_0=\frac{3\times 6}{3+6}+3=5\Omega$$

$$\tau=R_0C=5\times 0.01=0.05s$$

$$u_C(t)=u_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}}=15e^{-20t}\,V,\ t\geq 0$$

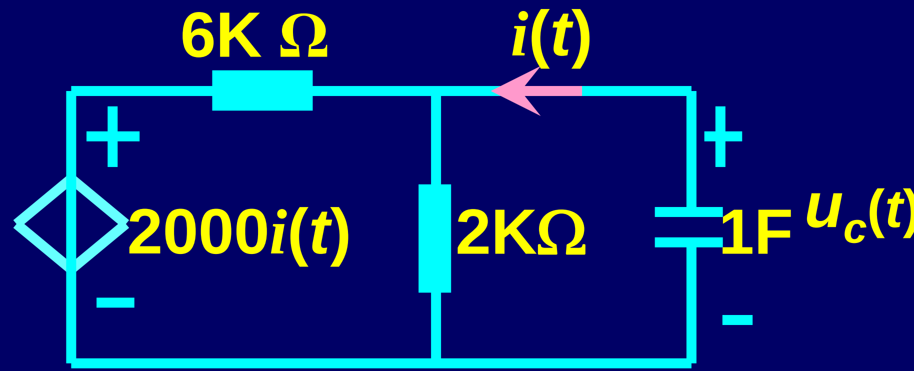
$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=-3e^{-20t}A,\ t\geq 0$$

$$i(t)=-\frac{6}{3+6}(-3e^{-20t})=2e^{-20t}A,\ t\geq 0$$



求R_0

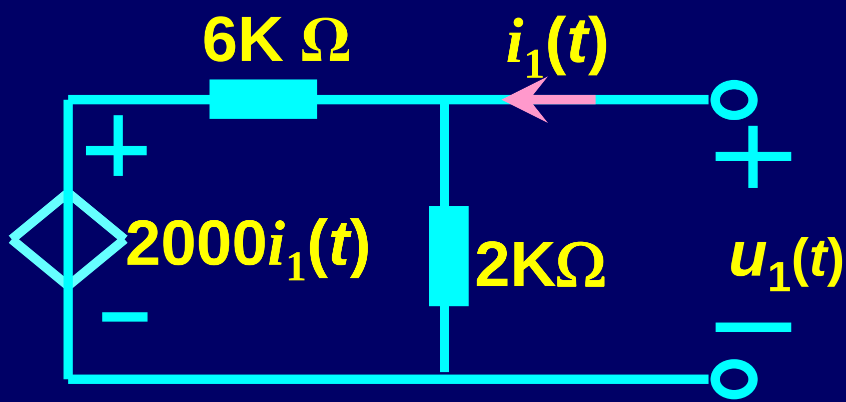
补充2： 求图示电路中$i(t)$, $t\geq0$, 已知$u_c(0)=6V$



解:零输入响应

$$u_C(0)=6V$$

求R_0



由:

$$i_1=\frac{u_1}{2000}+\frac{u_1-2000i_1}{6000}$$

得: $R_0=\dfrac{u_1}{i_1}=2K\Omega$

$$\tau=R_0C=2000s$$

$$u_C(t)=6e^{-\frac{t}{2000}}\ V,\ t\geq0$$

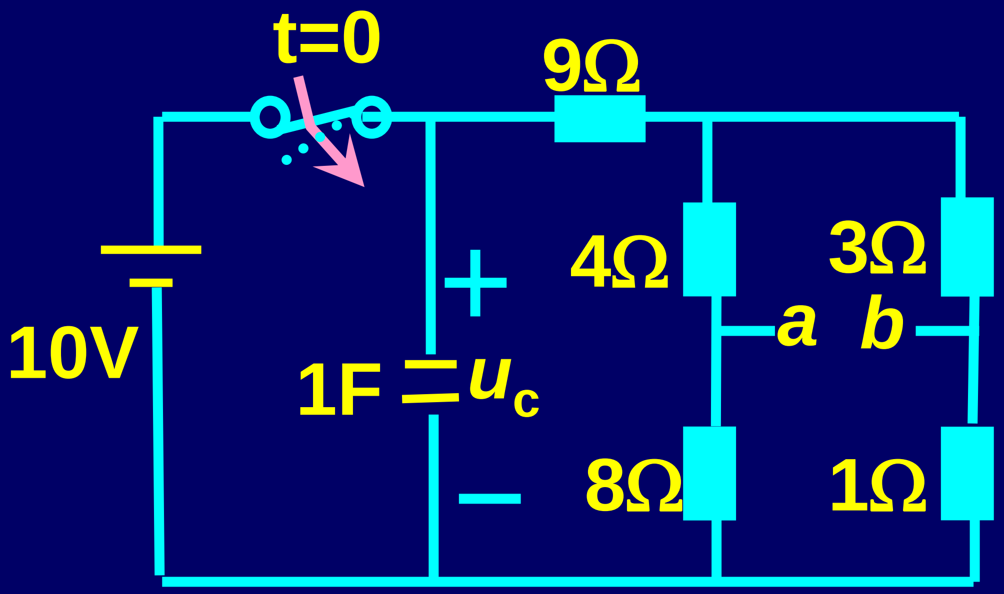
$$i(t)=-C\frac{du_C}{dt}=3e^{-\frac{t}{2000}}\ mA,\ t\geq0$$

例6–10 求$u_{ab}(t)$, t≥0,开关动作前处于稳态.

解:零输入响应

$u_c(t)=u_c(0)e^{-t/\tau}$

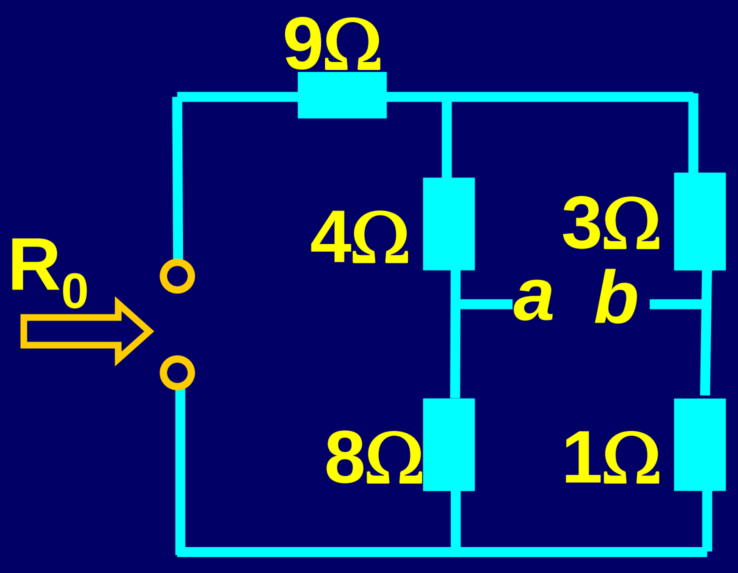
$u_c(0)=10V$



求R_0

$R_0=9+(12//4)=12\Omega$

$\tau=12s$



求R_0的等效电路

$u_c(t)=10e^{-t/12}$ V, $t\geq 0$

其上电流为：

$$i(t)=\frac{10}{12}e^{-t/12}\text{A},\ t\geq 0$$

$$i_1(t)=\frac{5}{24}e^{-t/12}\text{A},\ t\geq 0$$

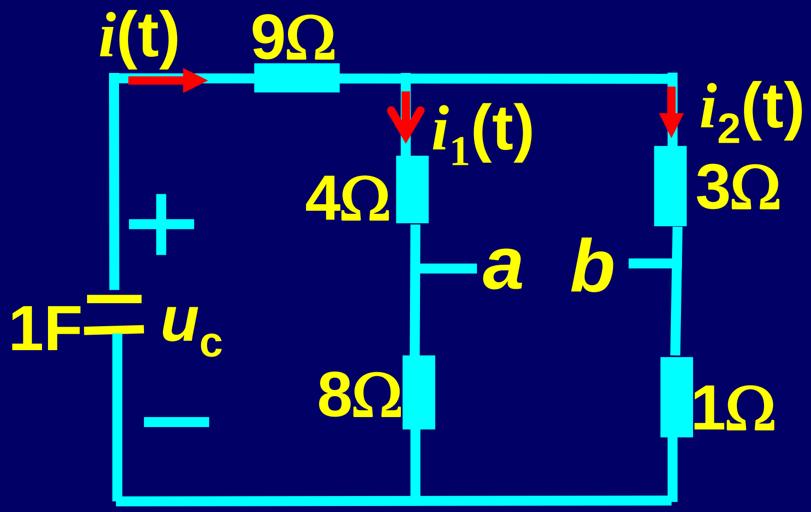
$$i_2(t)=\frac{5}{8}e^{-t/12}\text{A},\ t\geq 0$$

$$u_{ab}(t)=8i_1(t)-i_2(t)=\frac{25}{24}e^{-t/12}\text{V},\ t\geq 0$$

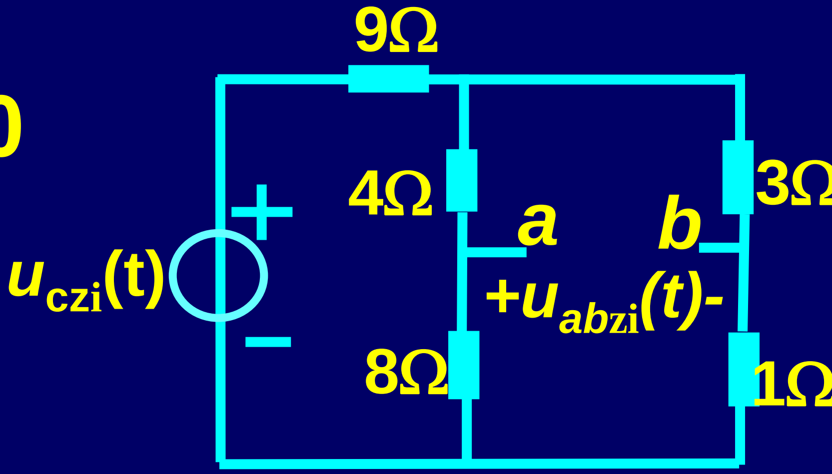
$$u_{czi}(t)=10e^{-t/12}\text{ V},\ t\geq 0$$

$$u_{abzi}(t)=\frac{25}{24}e^{-t/12}\text{V},\ t\geq 0$$

$$u_{abzi}(t)=K\,u_{czi}(t)$$



换路后的电路



换路后的电路

小 结

1. 一阶电路的零输入响应公式

RC电路---t=0时换路：

$$u_C(t)=u_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}}\text{，}\ t\geq 0$$

$$\tau=R_0C$$

RC电路--- $t=t_0$时换路：

$$u_C(t)=u_C(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}},\ t\geq t_0$$

$$\tau=R_0C$$

RL电路----t=0时换路：

$$i_L(t)=i_L(0)e^{-\frac{t}{\tau}}\text{，}\ t\geq 0$$

$$\tau=\frac{L}{R_0}$$

RL电路--- $t=t_0$时换路

$$i_L(t)=i_L(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}},\ t\geq t_0$$

$$\tau=\frac{L}{R_0}$$

2. 一阶电路的零输入响应按指数规律衰减，衰减的快慢由时间常数 τ 决定， τ 越小，衰减越快。

3. 求出$u_C(t)$或$i_L(t)$后，在换路后的电路中，用电压为$u_C(t)$的电压源置换电容，用电流值为$i_L(t)$的电流源置换电感，在置换后的电路中求其它电压电流。

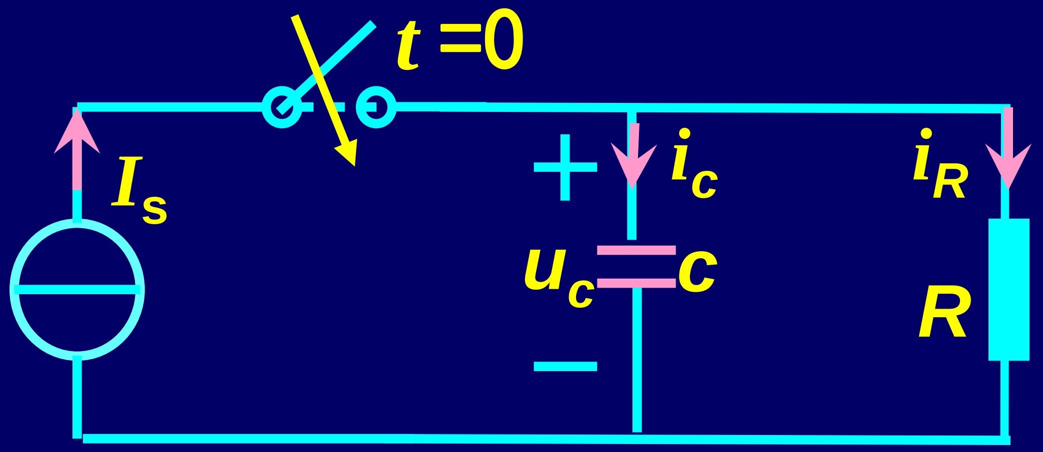
4. 一阶电路的零输入响应代表了电路的固有性质，叫固有响应，$s= -1/\tau$ 叫固有频率。

5. 线性一阶电路的零输入响应是初始状态的线性函数，初始状态增大 a 倍，零输入响应也增大 a 倍。

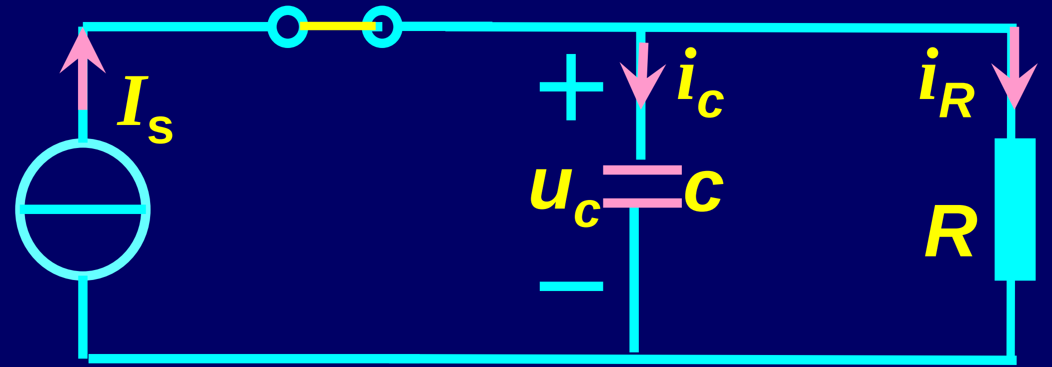
§ 6-5　线性动态电路的叠加定理

图中，$t=0$ 时，开关闭合

已知$u_C(0) = U_O \neq 0$ ，求$u_C(t)$, $t \geq 0$



解：换路后电路列方程



$t \geq 0$

$i_C + i_R = I_S$

$i_C = C\dfrac{du_C}{dt}$ $\quad i_R = \dfrac{u_C}{R}$

$$\begin{cases} C\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{R}u_C = I_s \\ u_C(0) \text{ 已知} \end{cases}$$

可解出$u_{Ch}(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$

可以求出$u_{Cp}(t) = RI_s$

则 $u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + RI_s$

由$u_C(0) = Ke^{-0} + RI_s$

得 $K = u_C(0) - RI_s$

完全响应为：

$$u_C(t) = [u_c(0) - RI_s]e^{-\frac{t}{RC}} + RI_s \quad t\geq 0$$

$$u_C(t) = u_c(0)\, e^{-\frac{t}{RC}} + RI_s(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad t\geq 0$$

分析：　$I_s = 0$时------　零输入

零输入响应：　$u_{Czi}(t) = u_c(0)\, e^{-\frac{t}{RC}}$

$u_c(0)= 0$时-------　零状态

零状态响应：$u_{Czs}(t) = RI_s(1- e^{-\frac{t}{RC}})$

完全响应=零输入响应+零状态响应

$$u_C(t) = \underbrace{(u_c(0) - RI_s)e^{-\frac{1}{RC}t}}_{\text{瞬态响应（固有响应）}} + \underbrace{RI_s}_{\text{稳态响应（强迫响应）}} \quad, \quad t \geq 0$$

$$u_C(t) = [(u_c(0) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + u_c(\infty) \quad, \quad t \geq 0$$

完全响应=瞬态响应+稳态响应

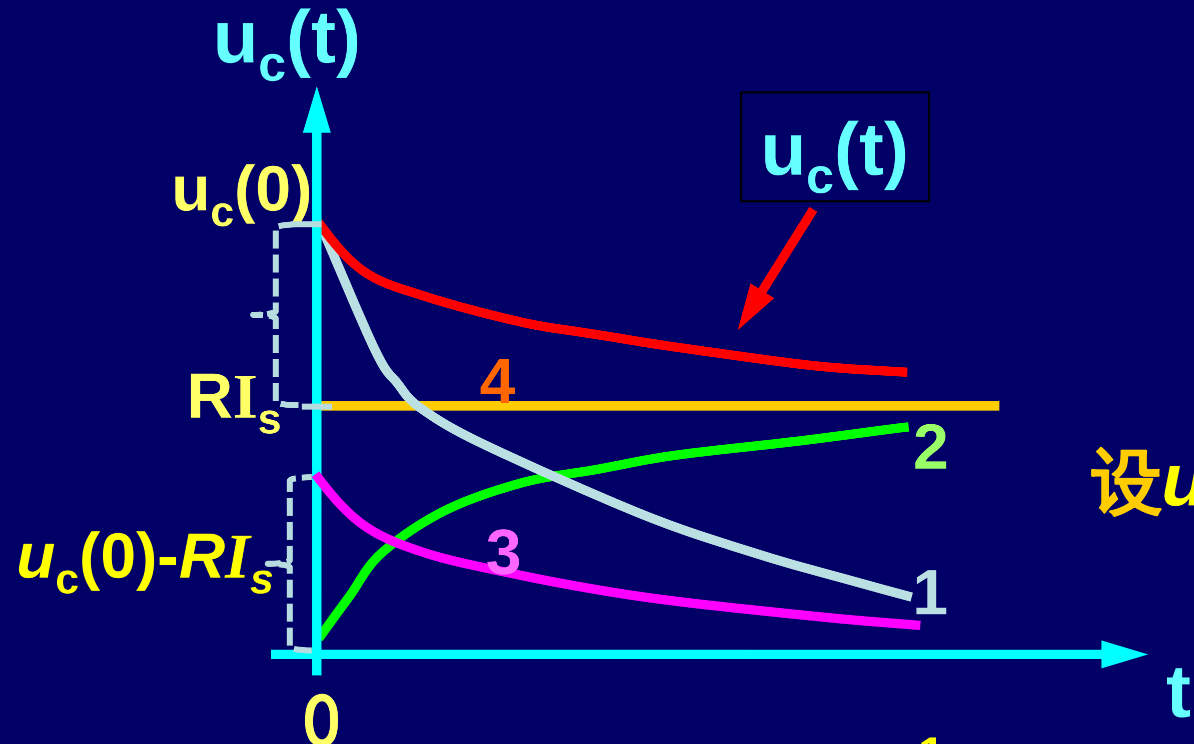
$t < 4\tau$

$$u_C(t) = [(u_c(0) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + u_c(\infty) \quad ，过渡状态$$

$t \geq 4\tau$

$u_C(t) = u_c(\infty)$ 稳定状态

完全响应由过渡状态和稳定状态构成。



设$u_c(0)>RI_s$

曲线1：零输入响应 $= u_c(0)\ e^{-\frac{1}{RC}t}$

曲线2：零状态响应 $= RI_s(1-e^{-\frac{1}{RC}t})$

曲线3：暂态响应$= [\,u_c(0)-RI_s\,]\,e^{-\frac{1}{RC}t}$

曲线4：稳态响应$= RI_s$

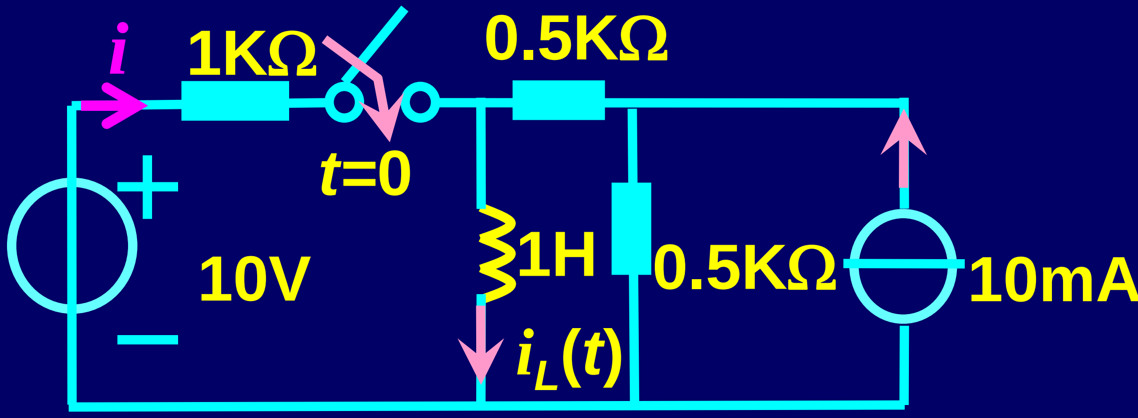
全响应$u_c(t)$=零输入响应1+零状态响应2

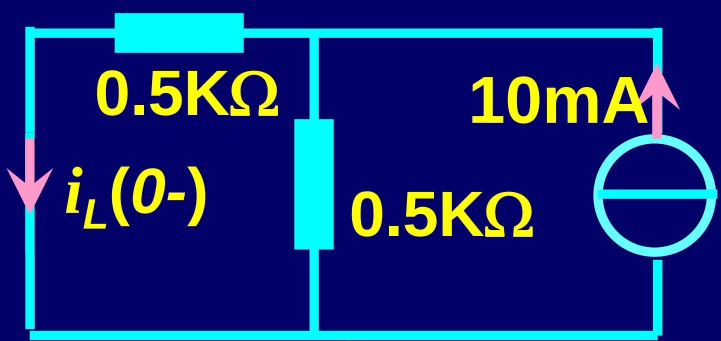
=暂态响应3+稳态响应4

一阶线性动态电路的叠加定理：

完全响应=零输入响应+零状态响应

补充1 求电路中 $t\geq 0$时1KΩ电阻的电流，换路前已稳态.





t=0-

解：先用叠加定理求$i_L(t)$,再求 $i(t)$。

(1)零输入响应

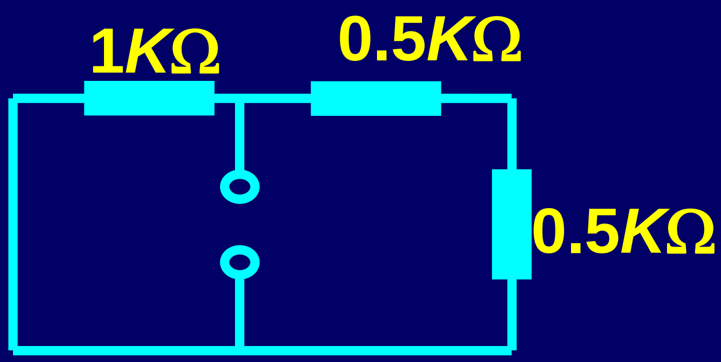
先求$i_L(0-)$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=5\text{mA}$$

(2) 求τ

$$R_0=\frac{10^3\times 10^3}{10^3+10^3}=0.5\text{K}\Omega$$

$$\tau=\frac{L}{R_0}=\frac{1}{500}\ \text{s}$$

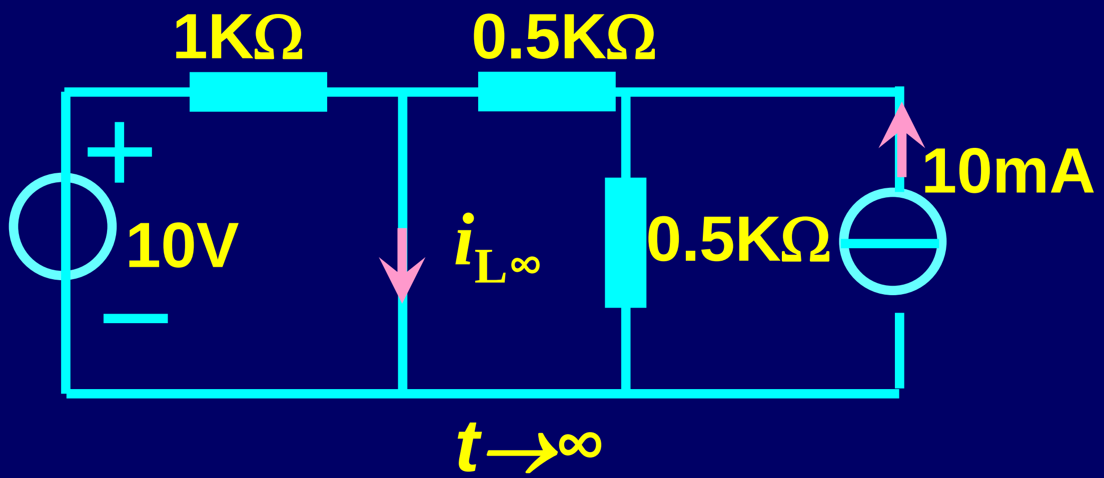


$t\geq 0$时求R_0的等效电路

$i_{Lzi}(t) = 5e^{-500t}$ mA， $t \geq 0$

（3）求零状态响应$i_{Lzs}(t)$

$$i_L(\infty) = \left(\frac{10}{10^3} + \frac{1}{2} \times 10^{-2}\right) = 15\text{mA}$$



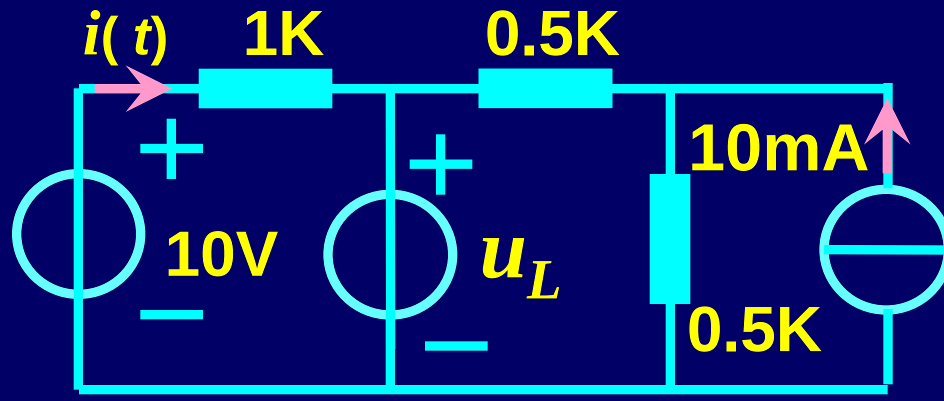
$i_{Lzs}(t) = 15(1 - e^{-500t})$ mA ，$t \geq 0$

$i_L(t) = i_{Lzi}(t) + i_{Lzs}(t) = 5e^{-500t} + 15(1 - e^{-500t})$

$= (15 - 10e^{-500t})$ mA ， $t \geq 0$

（4）求$i(t)$

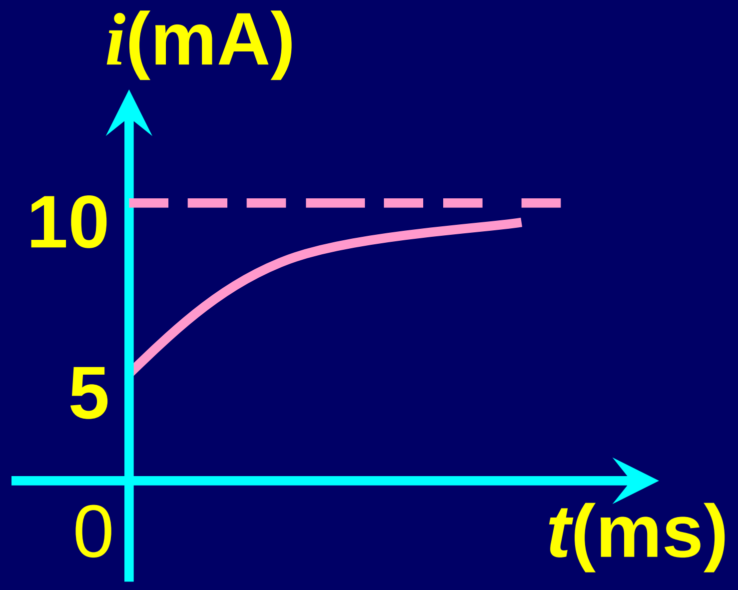
将电感用电压源置换



$t \geq 0$

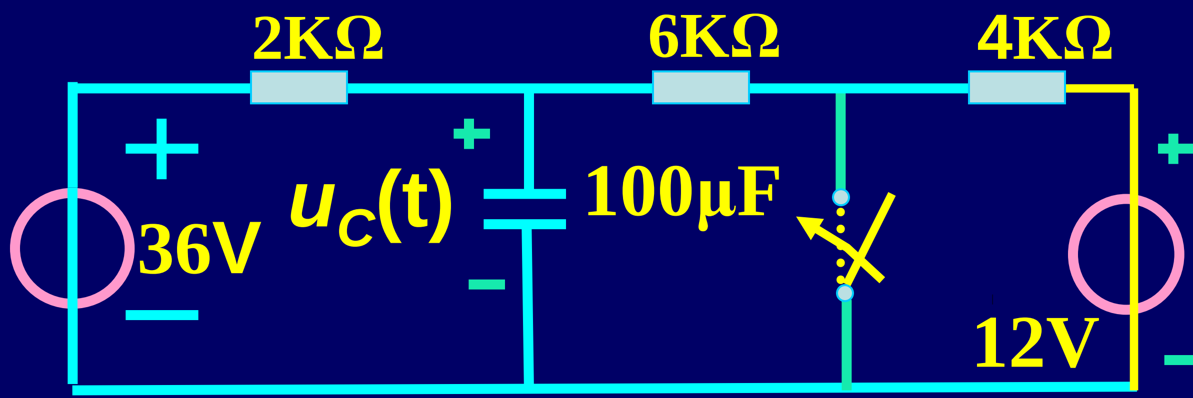
$$i(t) = \frac{10 - u_L}{10^3} = \frac{10 - L\frac{di_L}{dt}}{10^3}$$

$$= \frac{10 - 5e^{-500t}}{10^3}$$



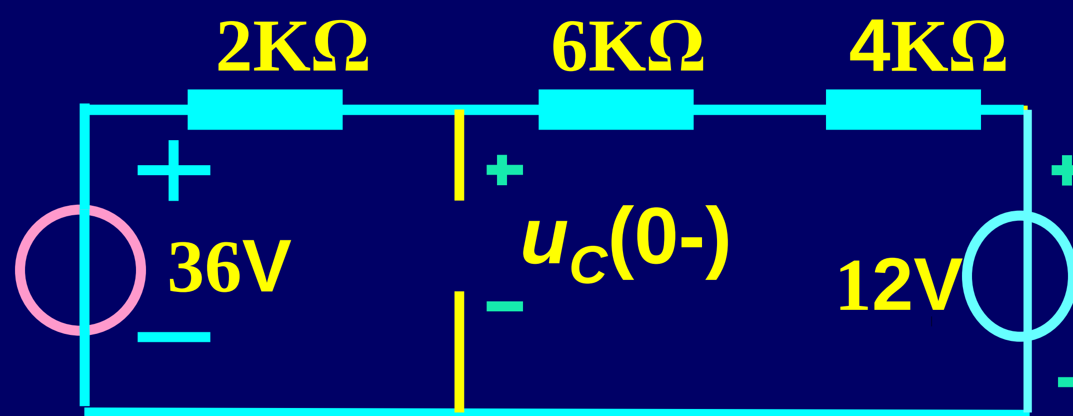
$$= 10 - 5e^{-500t}\ \text{mA} \quad t \geq 0$$

例6-13 开关t=0时闭合，闭合前电路处于稳态。求$u_C(t)$, $t\geq 0$ 。若12V电源改为24V, 再求$u_C(t)$, $t\geq 0$ 。



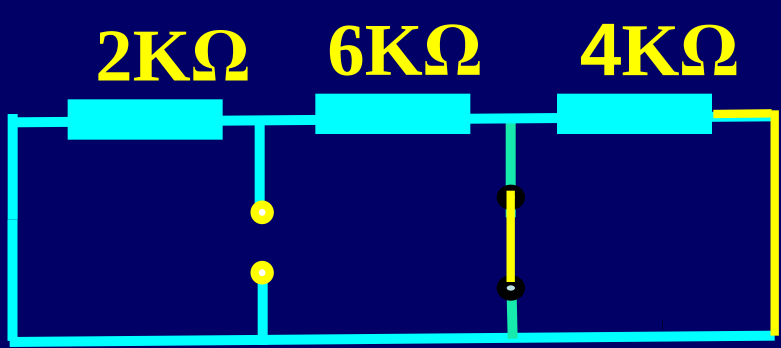
解（1）$u_{Czi}(t)$, $t\geq 0$

$u_C(0-)=30+2=32V$



t=0-等效电路

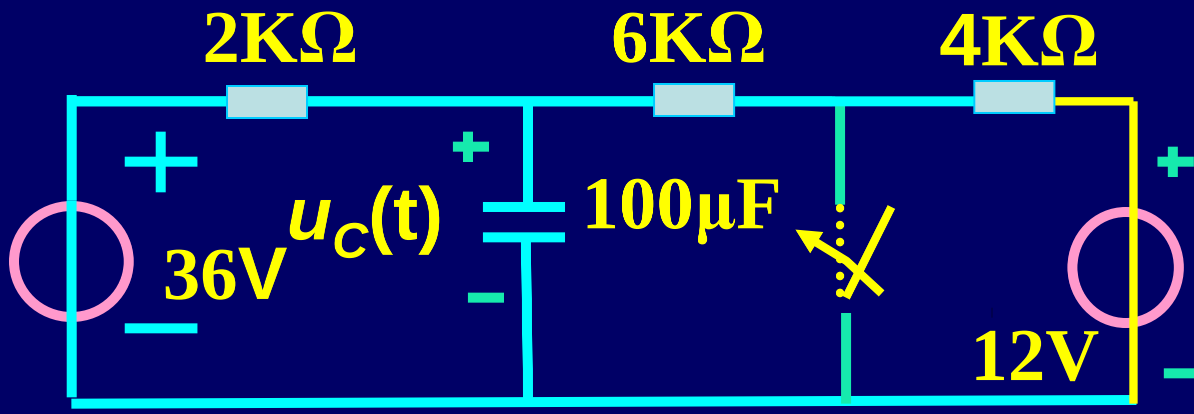
求$t\geq 0$电路的R_0



求R_0的电路

$R_0=6k//2k=1.5K\Omega$

$\tau=R_0C=0.15S$

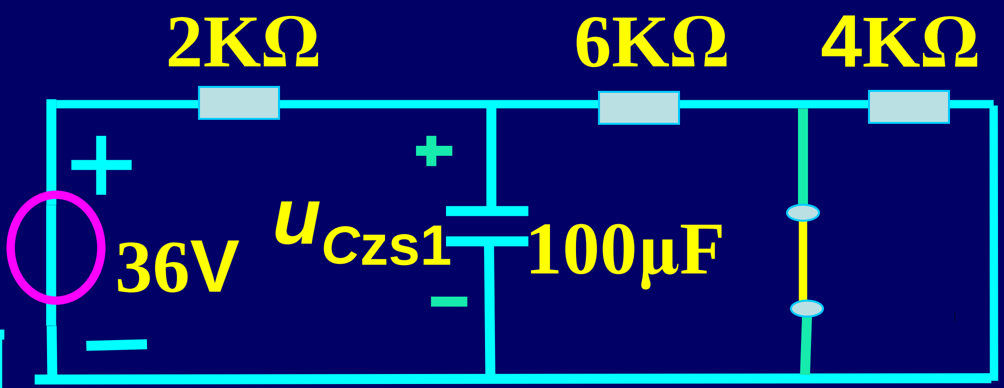


原题图

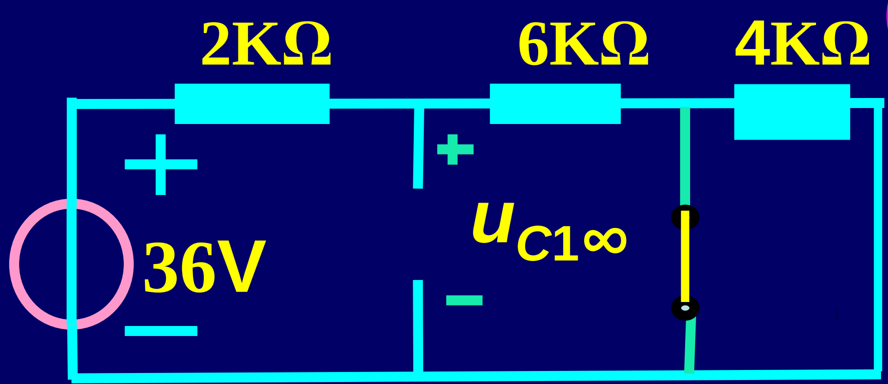
$u_{Czi}(t)=32e^{-t/0.15}V,\ t\geq0$

求两个电源分别作用的零状态响应。

36V电源引起的$u_{Czs1}(t)$



36V单独作用



36V单独作用 t=∞

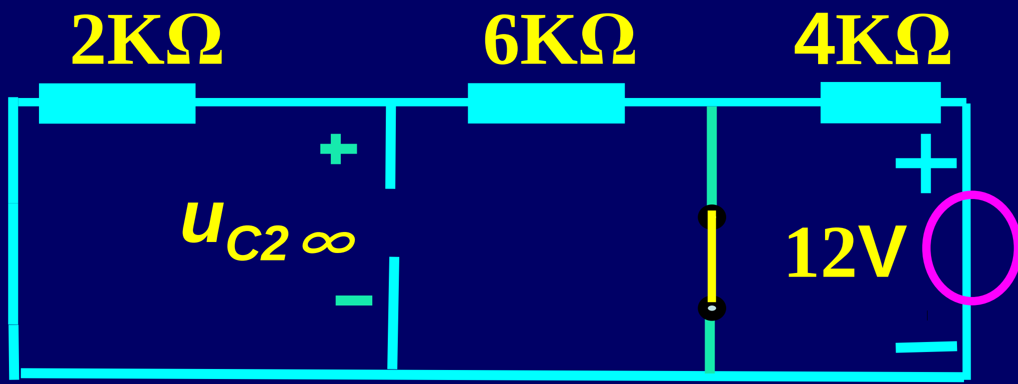
$u_{C1}(\infty)=27V$

$u_{Czs1}(t)=27(1-e^{-t/0.15})V,\ t\geq0$

12V电源引起的$u_{Czs2}(t)$

$u_{C2}(\infty)=0$

$u_{Czs2}(t)=0$



12V单独作用,t→∞

可见：12V电源若改为24V，不会影响零状态响应。

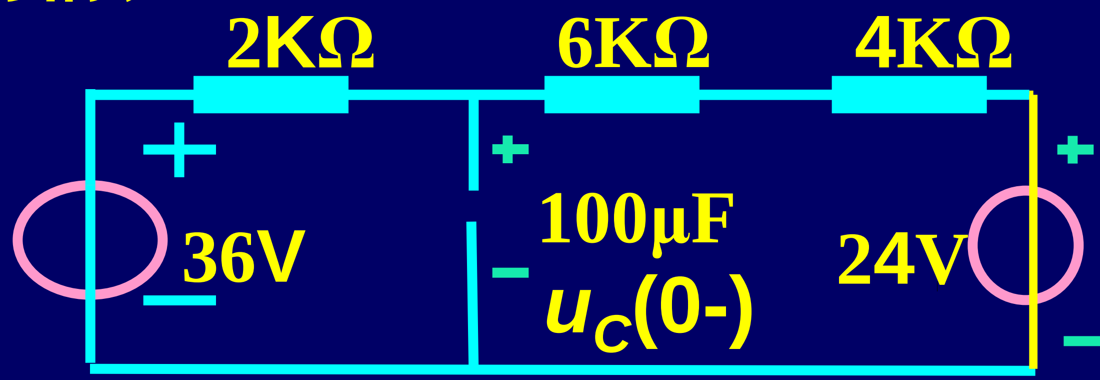
$$u_C(t)=u_{Czi}(t)+u_{Czs1}(t)+u_{Czs2}(t)$$

$$=32e^{-t/0.15}+27(1-e^{-t/0.15})=27+5e^{-t/0.15}\text{V},\ t\geq 0$$

分析12V电源改为24V的情况：

重新求$u_{Czi}(t)$, $t\geq 0$

$u_C(0-)_{新}=34V$



电源变化后t=0-等效电路

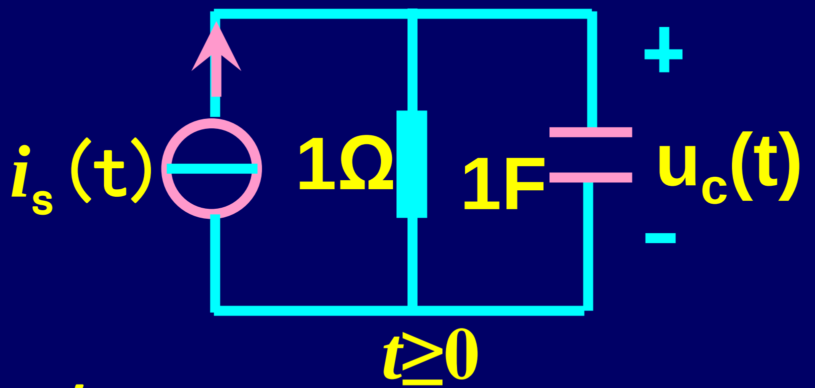
$u_{Czi}(t)_{新}=34e^{-t/0.15}V,\ t\geq 0$

$u_C(t)_{new}=u_{Czi}(t)_{新}+u_{Czs}(t)_{原}$

$= 34e^{-t/0.15}+27(1-e^{-t/0.15})=27+7e^{-t/0.15}V\ ,\ t\geq 0$

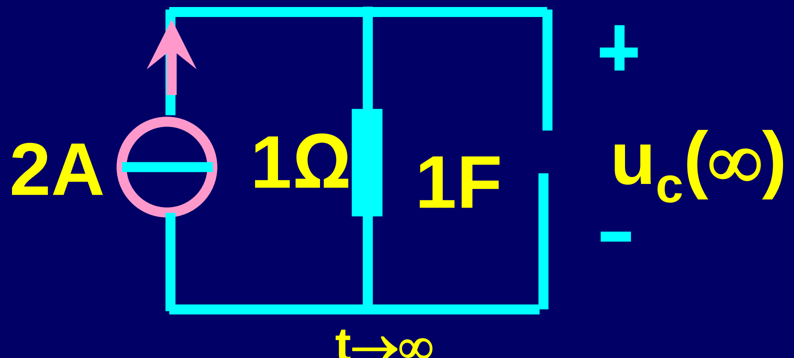
例6-18 图中$i_s(t)$=2A的电流源在$t\geq 0$时作用于电路，$u_c(0)$=1V,求$t\geq 0$时的$u_c(t)$稳态、瞬态和全响应。

解：



$$\text{全响应 } u_C(t) = \underbrace{[(u_c(0) - u_c(\infty))]e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{瞬态响应}} + \underbrace{u_c(\infty)}_{\text{稳态响应}}, \quad t\geq 0$$

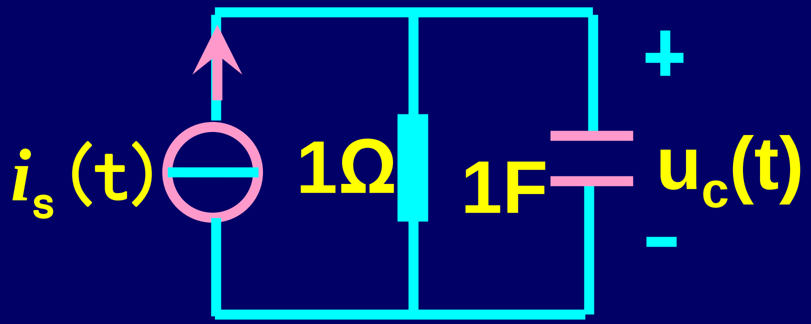
（1）稳态响应



$u_c(\infty)$=2V

（2）瞬态响应

$$u_{C瞬态}(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} = [(u_c(0) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$t \geq 0$

τ=1S

$$u_{C瞬态}(t) = -e^{-t}\ \text{V}$$

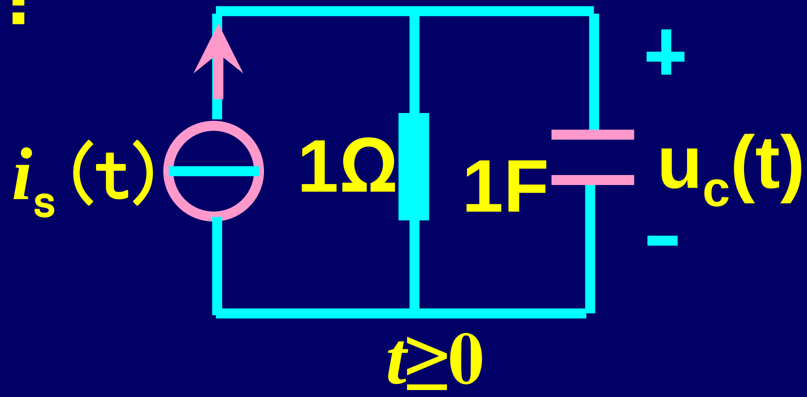
（3）全响应

$$u_C(t) = (2 - e^{-t})\ \text{V},\ t \geq 0$$

求瞬态响应的另一解法：

$u_{Czi}(t) = e^{-t}$

$u_{Czs}(t) = 2（1-e^{-t}）$



全响应$u_C(t)=u_{Czi}(t)+u_{Czs}(t) = （2-e^{-t}）V$

稳态响应 $u_c(\infty)=2V$

瞬态响应=全响应-稳态响应= $-e^{-t}$ V

补充2：(作业题）6-32第二问：求电路的全响应

已知：$u_s(t)=1V$，$i_s(t)=0$时，$u_c(t)=（2e^{-2t}+1/2）V$，$t\geq0$

$u_s(t)=0$，$i_s(t)=1A$时，$u_c(t)=（1/2e^{-2t}+2）V$，$t\geq0$

解：全响应=零输入+零状态

$u_{czi}(t)=u_c(0)e^{-2t}$

$u_c(0)=2.5V$

$u_{czi}(t)=2.5e^{-2t}$

电压源单独作用引起的零状态响应为：

$u_{czs}(t)_1= 2e^{-2t}+1/2-2.5e^{-2t}=(0.5-0.5e^{-2t}）V$，

电流源单独作用引起的零状态响应为：

$u_{czs}(t)_2= 1/2e^{-2t}+2-2.5e^{-2t}=(2-2e^{-2t}）V$，

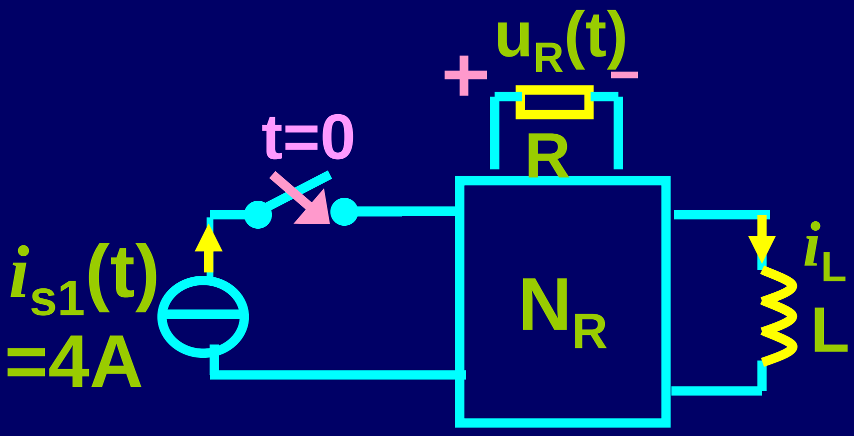
$u_c(t)=u_{czi}(t)+ u_{czs}(t)= 2.5e^{-2t} +0.5-0.5e^{-2t} +2-2e^{-2t}$

$=2.5V$，$t\geq0$　表示电路立即进入稳态，没有瞬态。

补充3（习题6-33）：当电路初始状态为零，$i_S(t)=4$ A时，

$i_L(t)=(2-2e^{-t})$A ,t≥0；$u_R(t)=(2-0.5e^{-t})$V,t≥0

求：当$i_L(0)=2$A，$i_s(t)=2$ A时，$i_L(t)$和$u_R(t)$, t≥0



解：（1）求 $i_L(t)$

$i_{Lzi}(t)=2\,e^{-t}$,t≥0

$i_L(t)=i_{Lzi}(t)+i_{Lzs}(t)$

当电源降为原来的1/2时，电感的零状响应也降为原来的1/2。

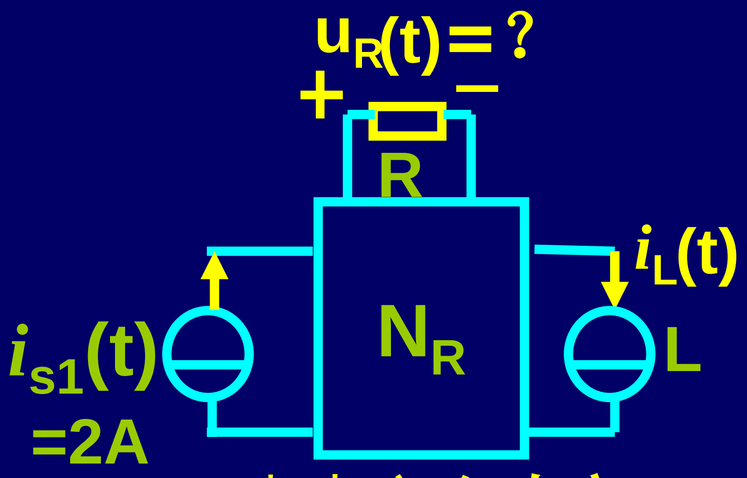
$i_{Lzs}(t)=(2-2e^{-t})/2=1-e^{-t}$ V

$i_L(t)=i_{Lzi}(t)+i_{Lzs}(t)=2e^{-t}+1-e^{-t}=（1+e^{-t}）$ V

（2）求 $u_R(t)$

研究完全响应：

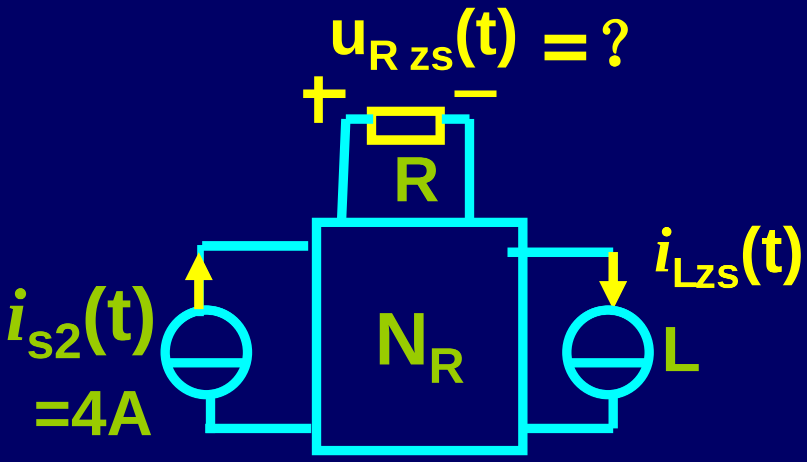
$u_R(t) = K_1 i_L(t) + K_2\, i_{s1}$



考虑完全响应

通过研究零状态响应来确定常数K_1、K_2：

$u_{Rzs}(t) = K_1 i_{Lzs}(t) + K_2 i_s$



只考虑零状态响应

代入已知条件：

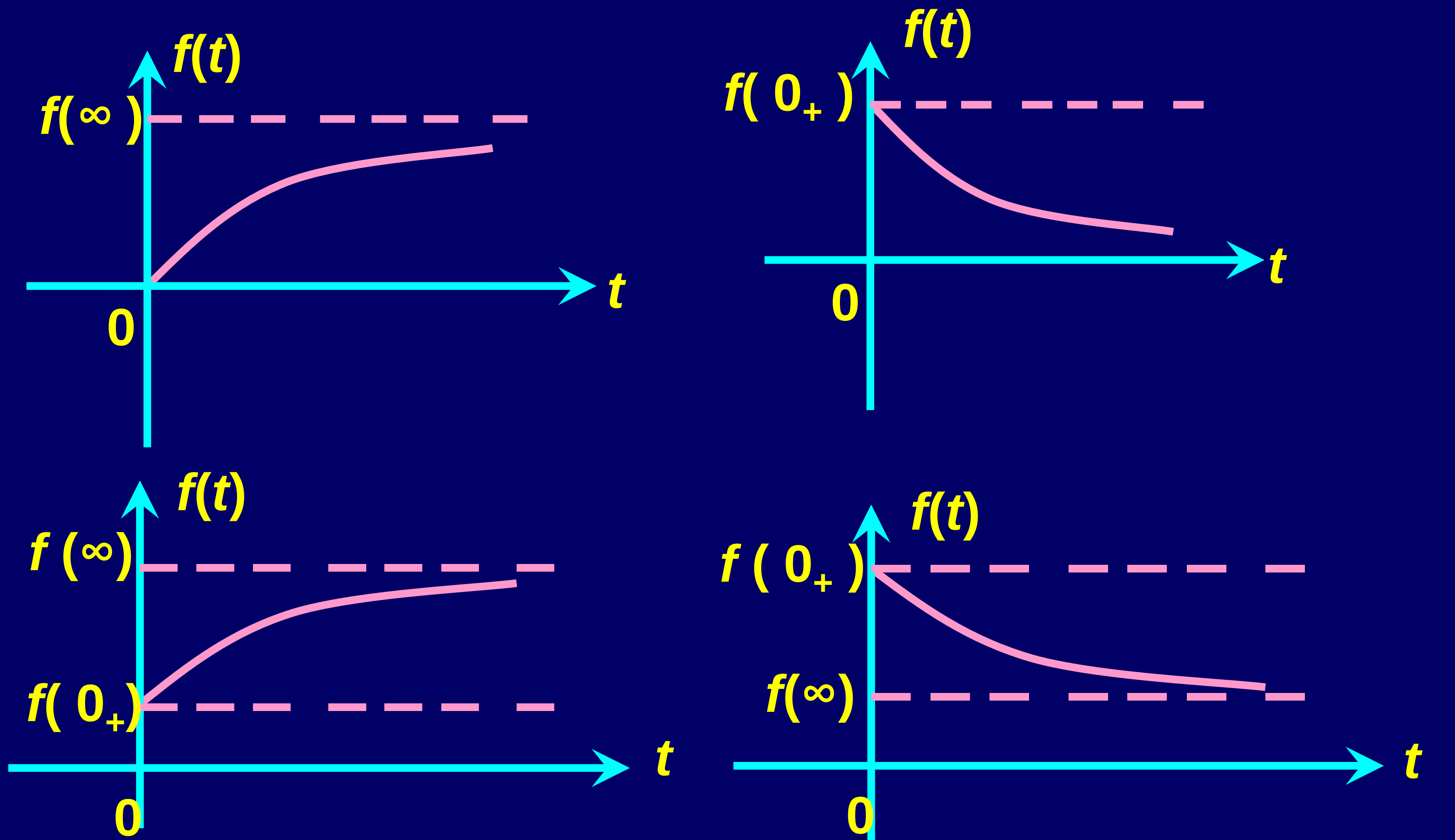
$2 - \frac{1}{2} e^{-t} = K_1(2-2e^{-t}) + K_2 \times 4$

故$K_1 = \frac{1}{4}$　$K_2 = \frac{3}{8}$

$u_R(t) = \frac{1}{4} \times （1+e^{-t}）+ \frac{3}{8} \times 2 = （1+\frac{1}{4}e^{-t}）V，t \geqslant 0$

§6-6 三要素法

直流激励下一阶电路的响应都是按指数规律变化的，具有与$u_c(t)$或$i_L(t)$相同的时间常数。它们的变化无非四种情况。



通式：

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]\, e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad ,t \geq 0$$

三个参数（三要素） $f(0_+)$、$f(\infty)$、τ

对于一阶电路，恒定输入下的响应只要求出这三个要素，就可画出它的波形并写出表示式，这就是三要素法。求状态量和非状态量均适合。

三要素求解步骤：

一. 求初始值 $f(0_+)$

1. 先求 $u_C(0_-)$、$i_L(0_-)$ 电路稳定时：C—开路 L—短路

2. 做 $t=0_+$ 时等效电路

C—用电压值等于 $u_C(0_-)$ 的电压源置换

L—用电流值等于 $i_L(0_-)$ 的电流源置换

3. 在 $t=0_+$ 的等效电路中求各初始值

二. 求稳态值 $f(\infty)$

在 $t\rightarrow\infty$ 的电路中求：

C—开路 L—短路

三. 求时间常数 τ

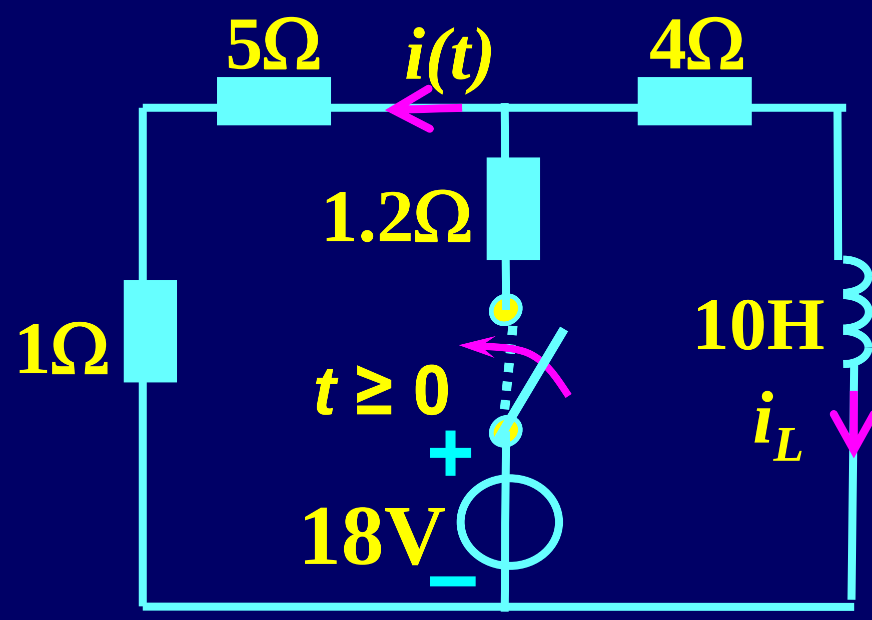
求换路后的电路中动态元件两端看进去戴维南等效电阻：

RC 电路：$\tau=R_0C$

RL 电路：$\tau=L/R_0$

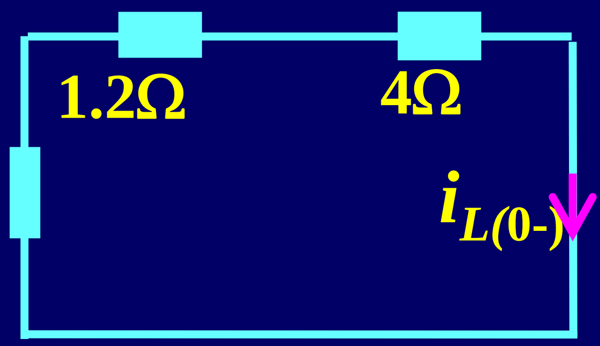
三要素法例题

例6-15 三要素法求图示电路中$t \geq 0$时的$i(t)$。



解：(1)求$i(0+)$：

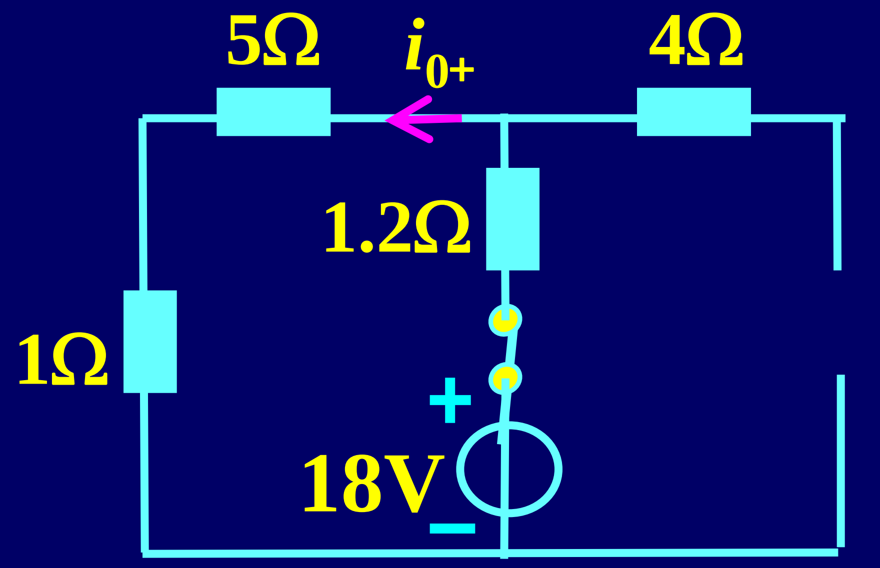
先求$i_L(0-)$



t=0-

$i_L(0_-) = 0$ $\quad$ $i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$

画t=0+等效电路，求$i(0+)$

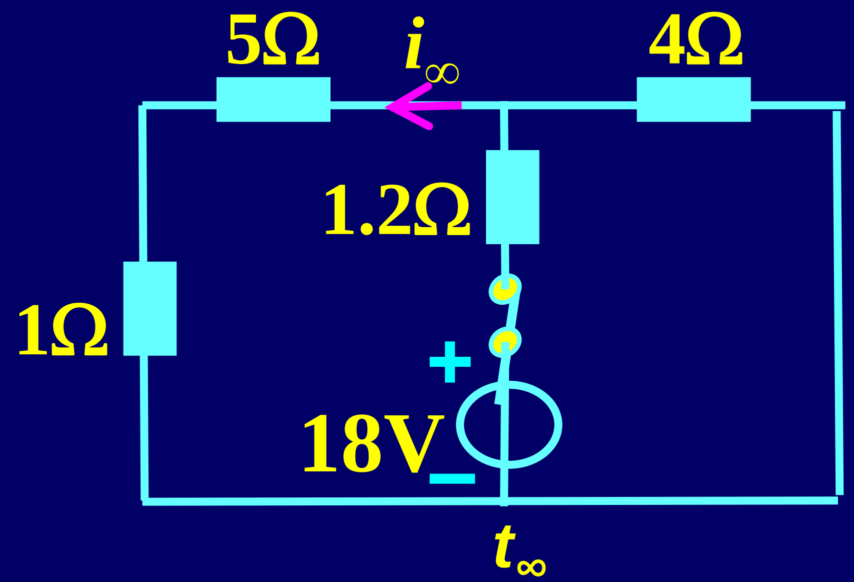


t=0+

$$i(0_+) = \frac{18}{1.2+6} = 2.5\text{A}$$

（2）求i_∞：换路后电路中，电感用短路代替。

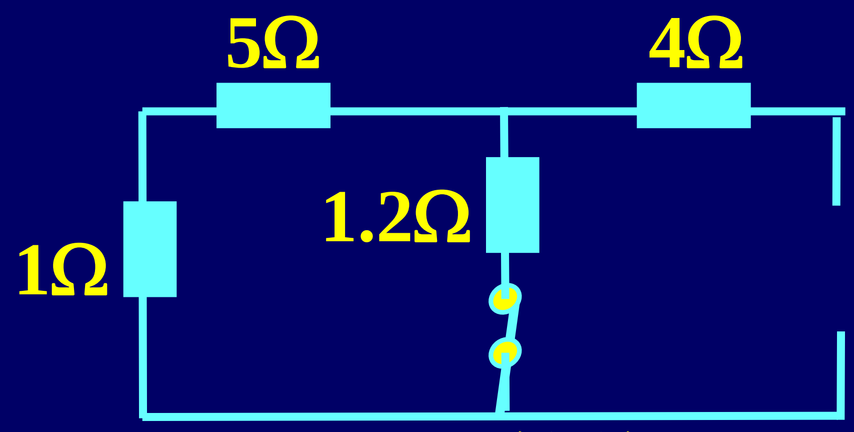
$$i_\infty = \frac{18}{1.2+6//4}\times\frac{4}{10} = 2\text{A}$$



(3) 求τ

$$R_O = 4+1.2//6 = 5\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_0} = 2S$$

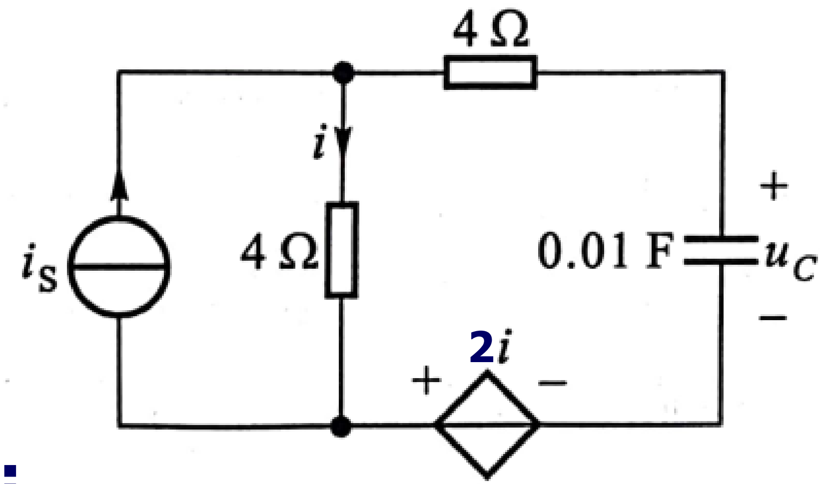


求R_0 的等效电路

$$i(t) = i(\infty) + [i(0_+) - i(\infty)]\,e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

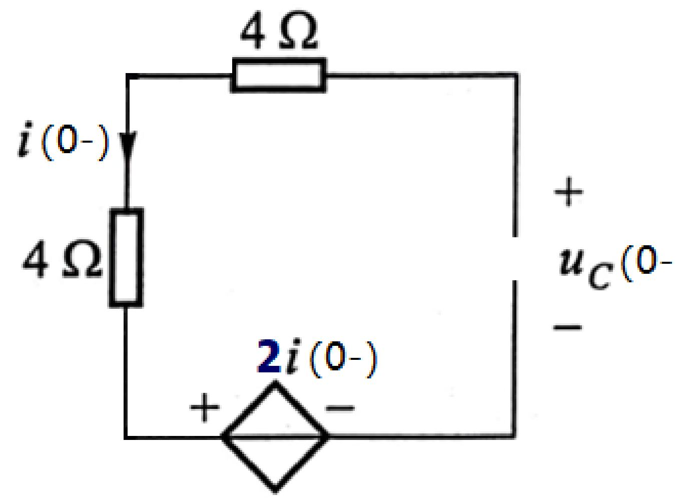
$$= 2 + [2.5-2]e^{-0.5t} = 2+0.5e^{-0.5t}\,\text{A}，\quad t \geq 0$$

例6-17 t≥0时，i_s=2A；t<0时， i_s=0，求 i(t)，t≥0。



解：

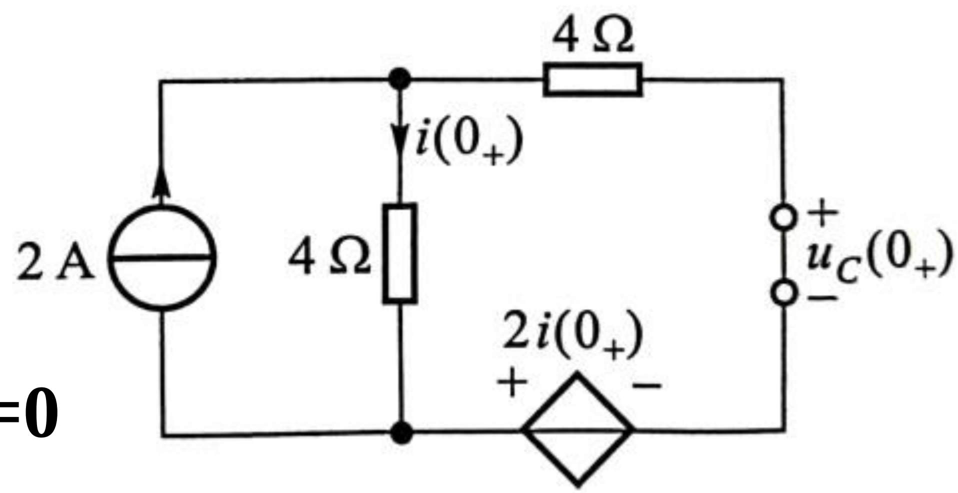
(1) t=0-电路,求u_c(0-)：



t=0-

$u_c(0-)=0$

（2）画t=0+电路,求$i(0+)$：



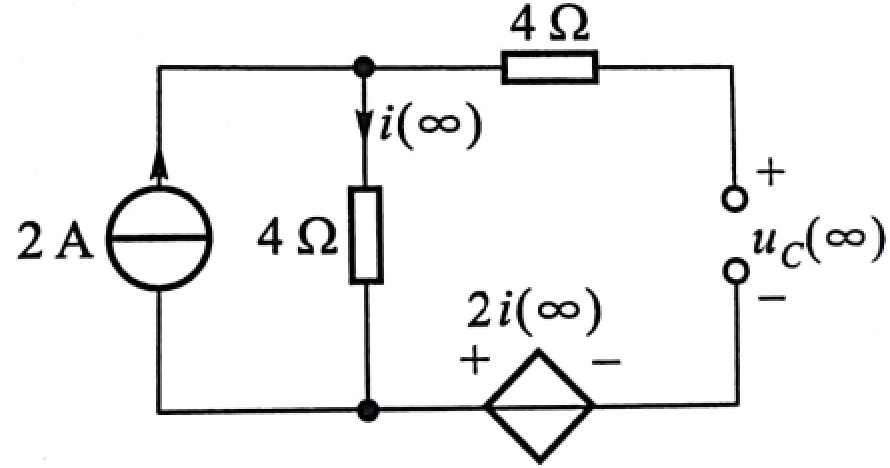
t=0+

$$4i(0_+)+2i(0_+)+4[i(0_+)-2]=0$$

$$i(0_+)=0.8A$$

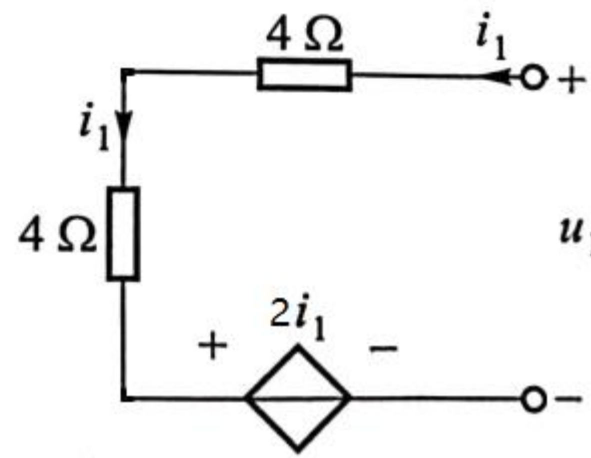
（3）画t→∞电路,求$i(\infty)$：

$i(\infty)=2\text{A}$



t→∞

（4）画t≥0时，用定义法求R_0的等效电路



求R_0

$$u_1=4i_1+4i_1+2i_1=10i_1$$

$$R_0=10\Omega$$

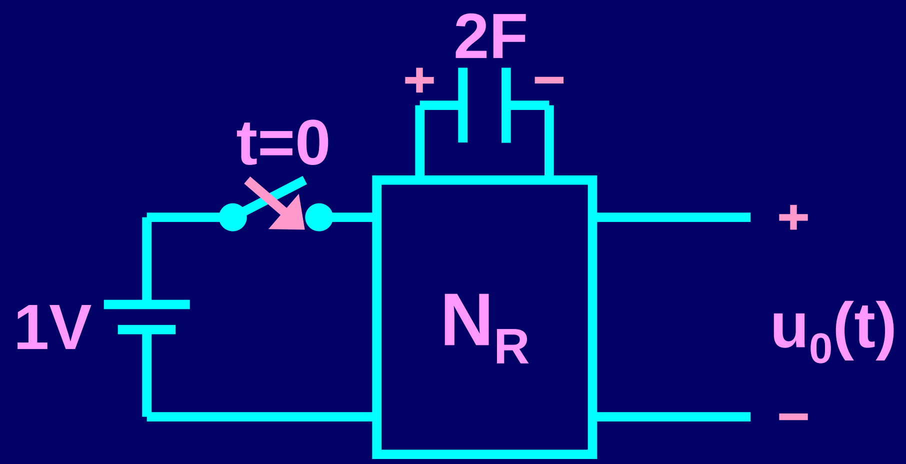
$$\tau=0.01\times10=0.1\text{S}$$

$$i(t)=2+(0.8-2)e^{-10t}=(2-1.2e^{-10t})\ \text{A},\quad t\geq0$$

习题6-42：下图中1V电压源单独作用时，

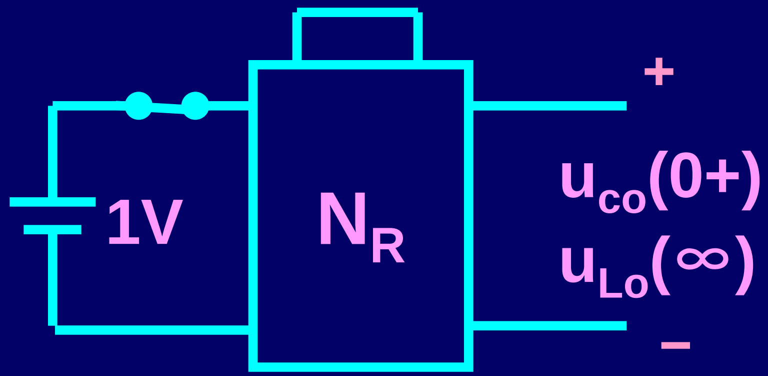
$u_{0zs}(t)=1/2+1/8e^{-0.25t}$，$t\geq 0$，　问C换成2H电感时，

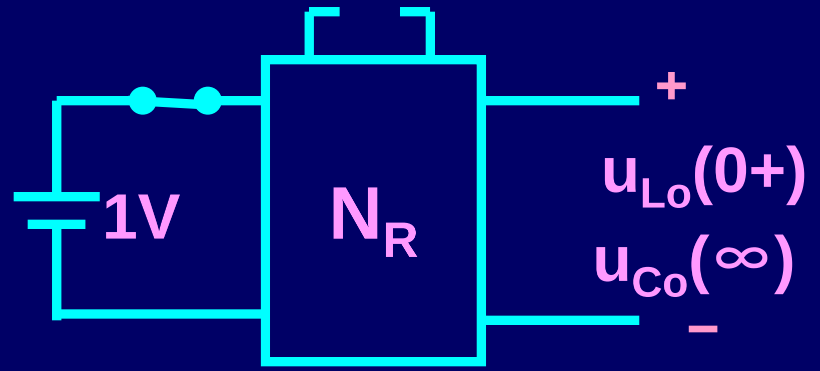
$u_{0zs}(t)=$？ $t\geq 0$.



解：该电路在t=0+时与换成电感的电路在t→∞时等效

该电路在t→∞时与换成电感的电路在t=0+时等效





RC电路在t=0+时的等效电路
RL电路在t→∞时的等效电路

RC电路在t→∞ 时的等效电路
RL电路在t=0+时的等效电路

所以：$u_{co}(0+)=u_{Lo}(\infty)$

$u_{co}(\infty)=u_{Lo}(0+)$

可求出

$u_{Lo}(\infty) = u_{co}(0+)=1/2+1/8=5/8V$

$u_{Lo}(0+)=u_{co}(\infty)=1/2V$

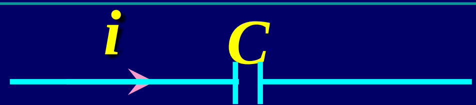
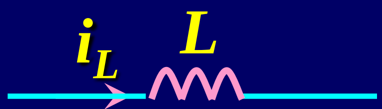
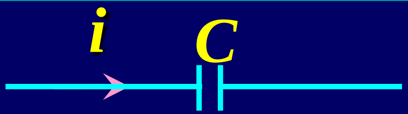
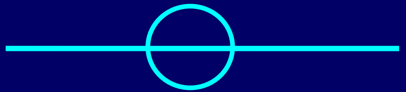
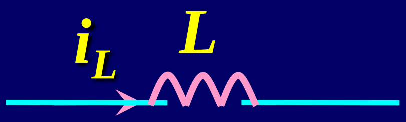
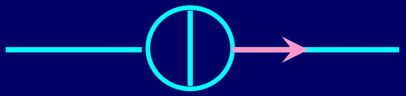
$\tau_c=RC=2R=4s \Rightarrow R=2\Omega$

$\tau_L=L/R=2/R=1s$

三要素法得:$u_{0Lzs}(t)=5/8+(1/2-5/8)\ e^{-t}$

$=5/8-1/8e^{-t}\ v$，$t\geq0$

元件小结

元　　件	$t = 0_+$	$t \to \infty$
 + $u_C(0)=0$ -		
 $i_L(0)=0$		
 + u - $u_C(0)=U_0$	 + U_0 -	
 $i_L(0)=I_0$	 I_0