第二章 命题逻辑等值演算

主要内容

- **2.1** 等值式
- **2.2** 析取范式与合取范式
- **2.3** 联结词完备集
- **2.4** 可满足性问题与消解法

2.3 联结词的完备集

- 其他联结词
  - 与非 $\uparrow$
  - 或非 $\downarrow$
  - 不可兼析取 $\bar{\vee}$
- 联结词的完备集
  - n元真值函数
  - 联结词的完备集
  - 最小联结词完备集

与非↑ & 或非↓

定义2.8 设 p, q 为两个命题,

$\neg(p\wedge q)$称作p与q的与非式, 记作$p\uparrow q$,

即 $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$, ↑称为与非联结词

$\neg(p\vee q)$ 称作 p 与 q 的或非式, 记作 $p\downarrow q$,

即 $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$, ↓称为或非联结词

真值表

p	q	$p\uparrow q$	$p\downarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

不可兼析取 $\bar{\vee}$

定义：给定两个命题p和q，复合命题$p\bar{\vee}q$称作p和q的“不可兼析取”.

$p\bar{\vee}q$的真值为1, 当且仅当p和q真值不相同,
否则$p\bar{\vee}q$的真值为0.

真值表

p	q	$p\bar{\vee}q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$p\bar{\vee}q \Leftrightarrow \neg(p\leftrightarrow q)$$

不可兼析取 $\bar{\vee}$

p	q	$p \bar{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$p \bar{\vee} q$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0

小结_八个联结词

- 1. 否定 $\neg$
- 2. 合取 $\wedge$
- 3. 析取 $\vee$
- 4. 蕴涵 $\rightarrow$
- 5. 等价 $\leftrightarrow$
- 6. 不可兼析取 $\bar{\vee}$
- 7. 与非 $\uparrow$
- 8. 或非 $\downarrow$

问题：

除了这八个逻辑联结词之外，是否需要定义其它联结词呢？

n元真值函数

定义2.6 称$F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为n元真值函数.

其中，定义域$\{0,1\}^n=\{00\ldots0,\ 00\ldots1,\ \ldots,\ 11\ldots1\}$，包含 2^n 个长为n的0,1符号串. 值域为$\{0,1\}$.

- n个命题变项共有 2^{2^n} 个n元真值函数.

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

1元真值函数共有4个

2元真值函数

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

2元真值函数共有16个

2元真值函数

		$p\wedge q$ (m_3)	$p\wedge\neg q$ (m_2)	p	$\neg p\wedge q$ (m_1)	q	$\neg(p\leftrightarrow q)$	$p\vee q$
p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
	$\neg p\wedge\neg q$ (m_0)	$p\leftrightarrow q$	$\neg q$	$q\rightarrow p$	$\neg p$	$p\rightarrow q$	$\neg(p\wedge q)$	

公式与真值函数

任何一个含n个命题变项的命题公式A都对应唯一的一个n元真值函数 F , F 恰好为A的真值表.

等值的公式对应的真值函数相同.

例如：$p\rightarrow q, \neg p\vee q$ 都对应 $F_{13}^{(2)}$

p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

联结词完备集

定义2.7 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是联结词完备集

若S是联结词完备集, 则任何命题公式都可由S中的联结词表示

定理2.6 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集

证明 任何$n(n\geq 1)$ 元真值函数都与唯一的一个主析取范式等值，而在主析取范式中仅含联结词$\neg, \wedge, \vee$，所以，$S = \{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集。

联结词完备集

推论 以下都是联结词完备集

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ (2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$ (4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

(5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

证明

(1),(2) 在联结词完备集中加入新的联结词后仍为完备集

(3) $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(4) $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

(5) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$不是联结词完备集, 0（恒取0值的真值函数）不能用它表示;

它的子集$\{\wedge\}, \{\vee\}, \{\rightarrow\}, \{\leftrightarrow\}, \{\wedge, \vee\}, \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$等都不是

联结词完备集

定理2.7 $\{\uparrow\}$与$\{\downarrow\}$为联结词完备集.

证明：因为 $\{\neg, \wedge, \vee\}$为联结词完备集

而

$$\neg p \Leftrightarrow \neg p\wedge\neg p \Leftrightarrow \neg(p\vee p) \Leftrightarrow p\downarrow p$$

$$p\wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q) \Leftrightarrow \neg p\downarrow\neg q \Leftrightarrow (p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)$$

$$p\vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p\vee q) \Leftrightarrow \neg(p\downarrow q) \Leftrightarrow (p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$$

所以，$\{\downarrow\}$为联结词完备集.

对$\{\uparrow\}$类似可证

结论

- 1. 否定 $\neg$
- 2. 合取 $\wedge$
- 3. 析取 $\vee$
- 4. 蕴涵 $\rightarrow$
- 5. 等价 $\leftrightarrow$
- 6. 不可兼析取 $\bar{\vee}$
- 7. 与非 $\uparrow$
- 8. 或非 $\downarrow$

问题：

除了这 8 个逻辑联结词之外，是否需要定义其它联结词呢？

答案： 除常量*T*, *F*以及命题变项本身外，命题联结词共有8个就够了！

思考?

是不是8个逻辑联结词都是必要的？

最小联结词完备集

最小联结词完备集

- S是联结词完备集，从S中任意去掉一个联结词后, 得到一个联结词集合S', 至少有一个公式B, 不等值于仅包含S'中联结词的任一公式, 则称S为最小联结词完备集.

- 试说明$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$和$\{\neg, \rightarrow\}$是最小联结词完备集。

  - ✓ 根据推论已知$\{\neg, \wedge\}$是联结词完备集，下面说明一元联结词$\neg$不能用二元联结词$\wedge$表示。
  - ✓ 如有$\neg p \Leftrightarrow$（$\ldots (p \wedge q) \wedge \ldots \wedge \ldots$）的形式，则对该等值式的右边所出现的变元, 都指派真值1, 则其真值必为1, 而该式的左边的真值为0, 产生矛盾, 说明“$\neg$”不能由“$\wedge$”的复合所替代.
  - ✓ 同理可说明“$\neg$”不能由“$\vee$”和“$\rightarrow$”的复合所替代.所以去掉$\neg$是不可以的，所以$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$和$\{\neg, \rightarrow\}$是最小联结词完备集。

2.3 联结词的完备集（回顾）

- 其他联结词
  - 与非 $\uparrow$
  - 或非 $\downarrow$
  - 不可兼析取 $\overline{\vee}$
- 联结词的完备集
  - n元真值函数
  - 联结词的完备集
  - 最小联结词完备集

主要内容

- **2.1 等值式**
- **2.2 析取范式与合取范式**
- **2.3 联结词完备集**
- **2.4 可满足性问题与消解法**

2.4 可满足性问题与消解法

- 消解文字、消解式（消解结果）
- 消解规则
- 消解序列
- 消解算法

例子：判断公式的可满足性

$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg r)$

$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg r)$

p	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$p \vee (q \wedge \neg r)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

例子：判断公式的可满足性

$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg r) \approx p \vee q$

$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg r)$

p	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$p \vee (q \wedge \neg r)$	$p \vee q$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1

2.4 可满足性问题与消解法

- 命题公式的可满足性问题可以归结为其合取范式的可满足性问题（*原因：任意一个公式可以化成等值的合取范式*）
- 不含任何文字的简单析取式称作空简单析取式, 记作λ
  - 规定λ是不可满足的
- 约定：
  - 简单析取式不同时含某个命题变项和它的否定
  - S:合取范式，C:简单析取式，l:文字，α:赋值
  - 文字l的补l^c: 若$l=p$,则$l^c=\neg p$;若$l=\neg p$,则$l^c=p$.
  - $S\approx S'$: S是可满足的当且仅当S'是可满足的

定义2.9设C_1, C_2 是两个简单析取式，且$C_1=l\vee C_1'$, $C_2=l^c\vee C_2'$, C_1'和C_2'不含l和l^c, 称$C_1'\vee C_2'$为C_1和C_2(以l和l^c为消解文字)的消解式或消解结果, 记作：$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$

- 例如：$\mathrm{Res}(p\vee q\vee r, p\vee\neg r) = p\vee q\vee p = p\vee q$

消解规则

定理2.8 $C_1 \wedge C_2 \approx \mathrm{Res}(C_1,C_2)$

【注意：$C_1 \wedge C_2$与$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$有相同的可满足性, 但不一定等值.】

证 记$C= \mathrm{Res}(C_1,C_2)=C_1' \vee C_2'$, 其中$l$和$l^c$为消解文字,

$C_1=l \vee C_1'$, $C_2=l^c \vee C_2'$, 且C_1'和C_2'不含l和l^c.

① 假设$C_1 \wedge C_2$【$(l \vee C_1') \wedge (l^c \vee C_2')$】是可满足的, α是它的满足赋值,

若$\alpha(l)=1$，则$\alpha(l^c)=0$，所以$\alpha(C_2')=1$

否则 $\alpha(l)=0$，则$\alpha(C_1')=1$

故α满足C【$C_1' \vee C_2'$】.

② 假设C【$C_1' \vee C_2'$】是可满足的, α是它的满足赋值.

要把α扩张到$l(l^c)$上:

若$\alpha(C_1')=1$，则令$\alpha(l^c)=1$

否则$\alpha(C_2')=1$，则令$\alpha(l)=1$

故α满足$C_1 \wedge C_2$【$(l \vee C_1') \wedge (l^c \vee C_2')$】.

消解序列与合取范式的否证

定义2.10 设S是一个合取范式, $C_1,C_2,\ldots,C_n$是一个简单析取式序列. 如果对每一个$i(1\le i\le n)$, C_i是S的一个简单析取式或者是$\mathrm{Res}(C_j,C_k)(1\le j<k<i)$, 则称此序列是由$S$导出$C_n$的消解序列. 当$C_n=\lambda$时, 称此序列是$S$的一个否证.

定理2.9 一个合取范式是不可满足的当且仅当它有否证.

例11 用消解规则证明$S=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q\vee\neg s)\wedge(q\vee s)\wedge\neg q$是不可满足的.

证 $C_1=\neg p\vee q$, $C_2= p\vee q\vee\neg s$, $C_3=\mathrm{Res}(C_1,C_2)=q\vee\neg s$, $C_4=q\vee s$, $C_5=\mathrm{Res}(C_3,C_4)=q$, $C_6=\neg q$, $C_7=\mathrm{Res}(C_5,C_6)=\lambda$, 这是$S$的否证.

消解序列与合取范式的否证

例11 用消解规则证明$S=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q\vee\neg s)\wedge(q\vee s)\wedge\neg q$是不可满足的.

消解序列

1) $\neg p\vee q$ S的简单析取式

2) $p\vee q\vee\neg s$ S的简单析取式

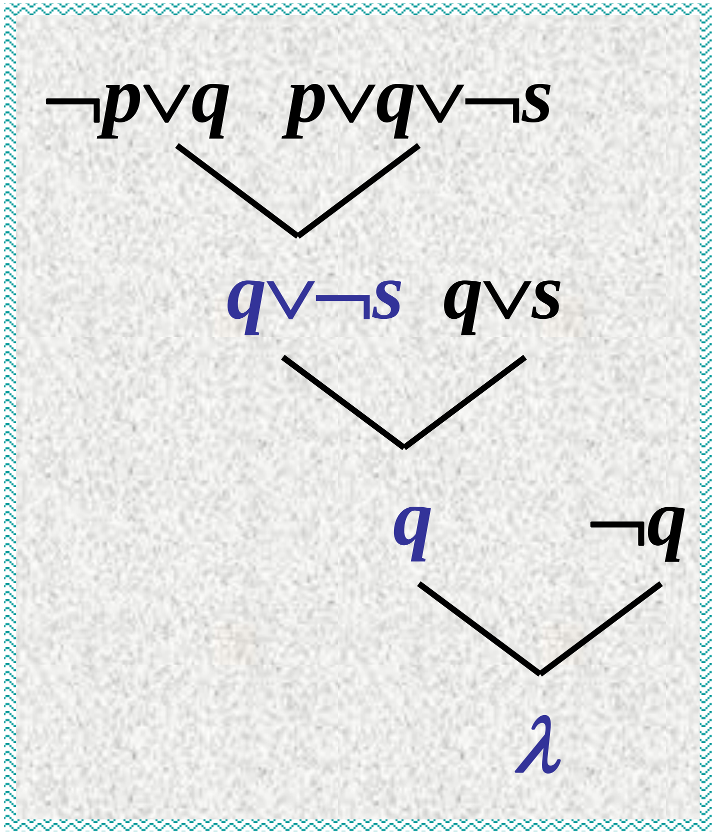
3) $q\vee\neg s$ 1)2)消解

4) $q\vee s$ S的简单析取式

5) q 3)4)消解

6) $\neg q$ S的简单析取式

7) λ 5)6)消解



这是S的一个否证,

从而证明S是不可满足的（矛盾式）.

练习

- 构造公式$A=(p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q)\wedge\neg r$的否证, 从而证明它是矛盾式.

解 消解序列:

① $p\vee q$ A的简单析取式
② $\neg p\vee q$ A的简单析取式
③ q ①,②消解
④ $\neg q\vee r$ A的简单析取式
⑤ $\neg r$ A的简单析取式
⑥ $\neg q$ ④,⑤消解
⑦ λ ③,⑥消解

这是A的一个否证, 从而证明A是矛盾式.

消解算法

消解算法

输入: 合式公式A

输出:

当A是可满足时，

回答“Yes”;

否则，

回答“No”.

1. 求A的合取范式S
2. 令$S_0 \leftarrow \varnothing$, $S_2 \leftarrow \varnothing$, $S_1 \leftarrow S$的所有简单析取式
3. For $C_1 \in S_0$和$C_2 \in S_1$
4. If C_1, C_2可以消解 then
5. 计算$C \leftarrow \mathrm{Res}(C_1, C_2)$
6. If $C = \lambda$ then
7. 输出“No”, 计算结束
8. If $C \notin S_0$且$C \notin S_1$ then
9. $S_2 \leftarrow S_2 \cup \{C\}$
10. For $C_1 \in S_1$, $C_2 \in S_1$且$C_1 \neq C_2$
11. If C_1, C_2可以消解 then
12. 计算$C \leftarrow \mathrm{Res}(C_1, C_2)$
13. If $C = \lambda$ then
14. 输出“No”, 计算结束
15. If $C \notin S_0$且$C \notin S_1$ then
16. $S_2 \leftarrow S_2 \cup \{C\}$
17. If $S_2 = \varnothing$ then
18. 输出“Yes”, 计算结束
19. Else $S_0 \leftarrow S_0 \cup S_1$, $S_1 \leftarrow S_2$, $S_2 \leftarrow \varnothing$, goto 3

消解算法例题

例12 用消解算法判断下述公式是否是可满足的:

1) $(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q)\wedge\neg q$

解:

$S= (\neg p\vee q)\wedge(p\vee q)\wedge\neg q$

循环1 $S_0=\varnothing$, $S_1=\{\neg p\vee q, p\vee q, \neg q\}$, $S_2=\varnothing$

Res$(\neg p\vee q, \neg q)= \neg p$

Res$(p\vee q, \neg q)=p$

Res$(\neg p\vee q, p\vee q)= q$

$S_2=\{p, \neg p, q\}$

消解算法例题

循环2 $S_0=\{\neg p\vee q, p\vee q, \neg q\}, S_1=\{p, \neg p, q\}, S_2=\varnothing$

$\text{Res}(\neg p\vee q, p)=q$

$\text{Res}(p\vee q, \neg p)=q$

$\text{Res}(q, \neg q)=\lambda$

输出“No”，说明S是不可满足的。

消解算法例题

例12 用消解算法判断下述公式是否是可满足的:

2) $p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

解

$S= p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

循环1 $S_0=\varnothing$, $S_1=\{p, p\vee q, p\vee\neg q, q\vee\neg r, q\vee r\}$, $S_2=\varnothing$

$\mathrm{Res}(p\vee q, p\vee\neg q)=p$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q\vee\neg r)=p\vee\neg r$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q\vee r)= p\vee r$

$\mathrm{Res}(q\vee\neg r, q\vee r)=q$

$S_2=\{p\vee r, p\vee\neg r, q\}$

消解算法例题

循环2 $S_0=\{p, p\vee q, p\vee\neg q, q\vee\neg r, q\vee r\}$, $S_1=\{p\vee r, p\vee\neg r, q\}$, $S_2=\varnothing$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q)=p$

$\mathrm{Res}(q\vee\neg r, p\vee r)=p\vee q$

$\mathrm{Res}(q\vee r, p\vee\neg r)=p\vee q$

$\mathrm{Res}(p\vee r, p\vee\neg r)=p$

$S_2=\varnothing$

输出“Yes”，说明S是可满足的。

2.4 可满足性问题与消解法（回顾）

- 消解文字、消解式（消解结果）
- 消解规则
- 消解序列
- 消解算法

第二章 命题逻辑等值演算（回顾）

主要内容

- **2.1 等值式**
- **2.2 析取范式与合取范式**
- **2.3 联结词完备集**
- **2.4 可满足性问题与消解法**

复习：合取范式 > 简单析取式 >文字

合取范式是简单析取式的合取

简单析取式是有限个文字的析取

文字是命题变项及其否的总称