第九章
正弦稳态功率和能量

作业

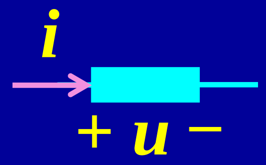
9-2　9-9　9-11　9-16　9-25

练习

9-6　9-8　9-15　9-19　9-26

§9-1 —§9-3 单个元件的功率、贮能

一. 电阻元件



设：$u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi_u)$

$i(t) = I_m\cos(\omega t + \varphi_i)$

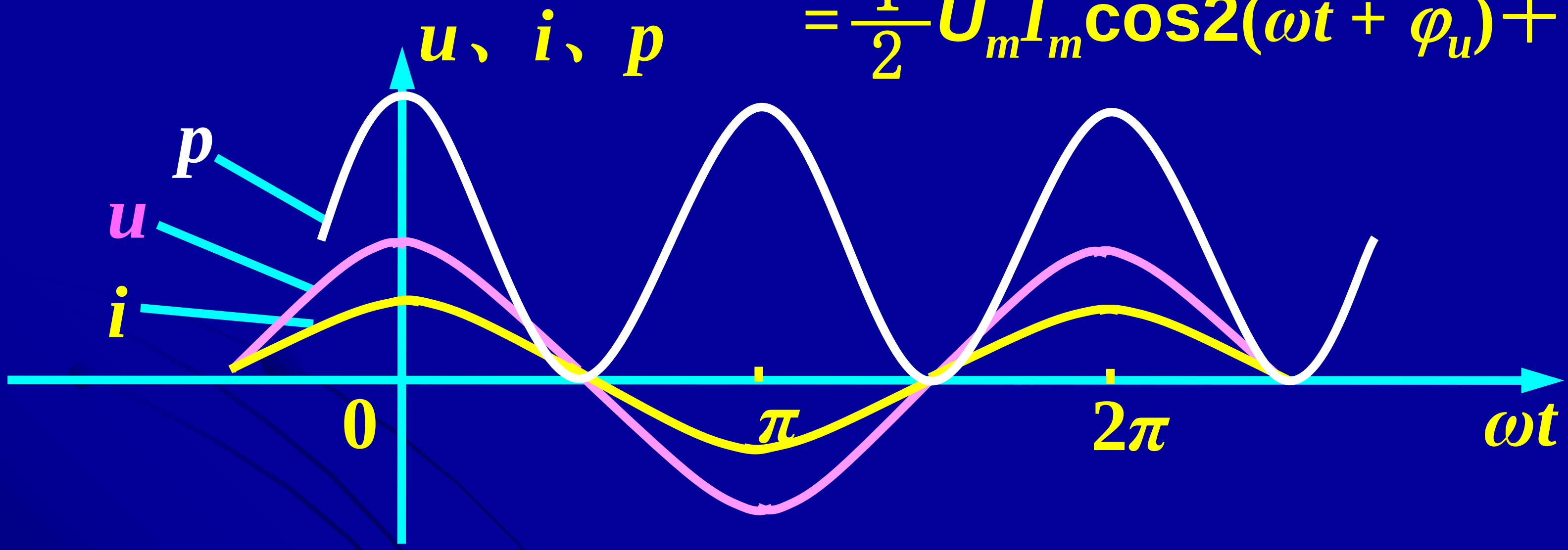
1. 瞬时功率：

$$p_R(t) = ui = U_m\cos(\omega t + \varphi_u)\, I_m\cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$= U_m I_m\cos^2(\omega t + \varphi_u)$$

$$= \frac{1}{2}U_m I_m[\cos 2(\omega t + \varphi_u) + 1]$$

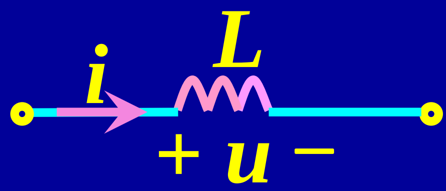
$$= \frac{1}{2}U_m I_m\cos 2(\omega t + \varphi_u) + \frac{1}{2}U_m I_m$$



2. 电阻的平均功率

$$P_R = \frac{1}{T}\int_0^T p_R(t)\,dt = \frac{1}{2}U_m I_m = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}$$

二. 电感元件

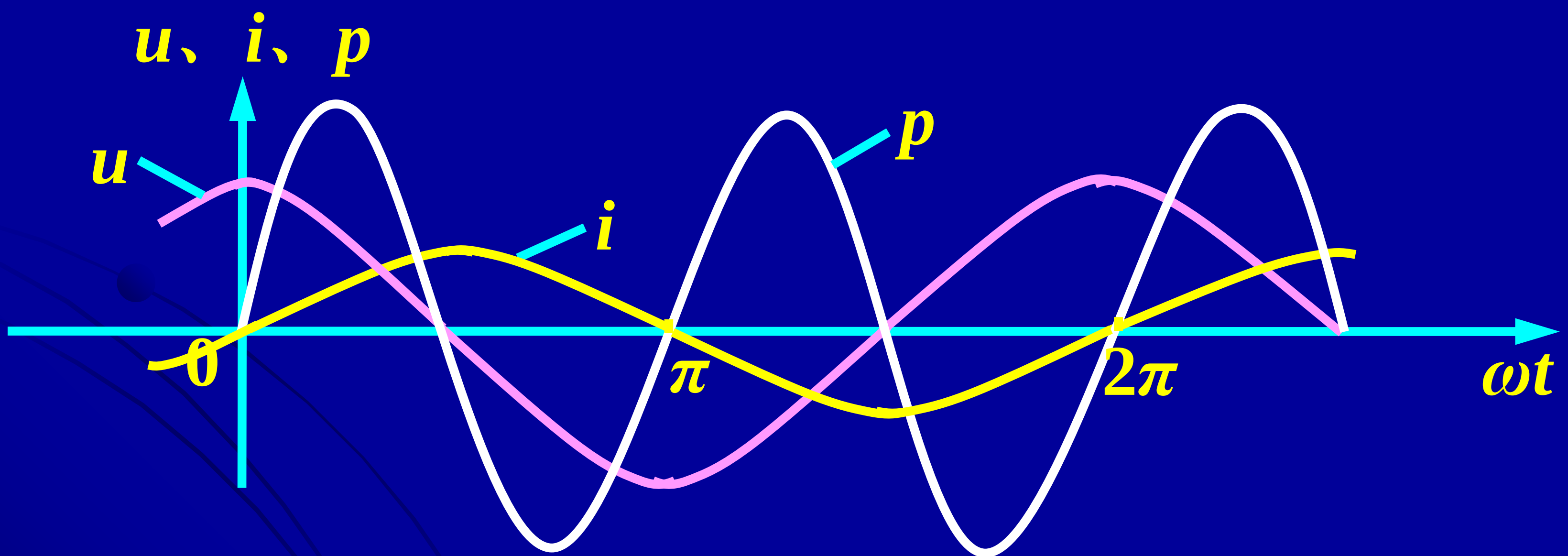


1 瞬时功率

设：$u(t) = U_m \cos\omega t$

$i(t) = I_m \sin\omega t$

$$p(t) = U_m \cos\omega t \, I_m \sin\omega t = \frac{1}{2} U_m I_m \sin 2\omega t$$



A. p 按正弦规律变化，其角频率为电压或电流角频率的两倍。

B. $p > 0$ 吸收功率；$p < 0$ 放出功率

2 平均功率

$$\boxed{P = 0}$$

3 贮能

瞬时贮能：

$$w(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L I_m{}^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{4} L I_m{}^2 (1 - \cos 2\omega t)$$

$$= \frac{1}{4} L I_m{}^2 - \frac{1}{4} L I_m{}^2 \cos 2\omega t$$

平均贮能：

$$\boxed{W_L = \frac{1}{4} L I_m{}^2 = \frac{1}{2} L I^2}$$

4　无功功率 — 瞬时功率的最大值

电抗元件的U、I乘积。

$$\boxed{Q_L = \frac{1}{2} U_m I_m = UI = \omega L I^2 = 2\omega W_L}$$

单位：乏(var)

电感的无功功率表示电源与电感能量交换速率（功率）的最大值，或外电路与电感间能量往返的规模。

三. 电容元件

$$P=0$$

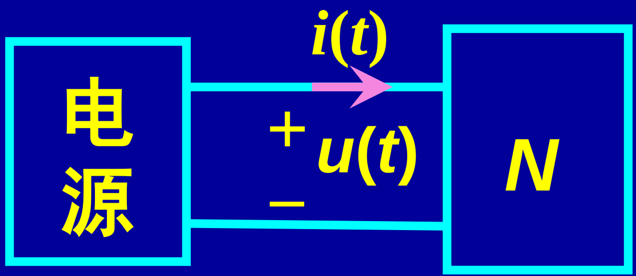
$$W_C=\frac{1}{2}CU^2$$

$$Q_C=-\frac{1}{2}U_mI_m$$

$$=-\ UI$$

$$=-2\omega W_c$$

§9-4　单口网络的平均功率



设 $u(t) = U_m\cos(\omega t+\varphi_u)$

$i(t) = I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$

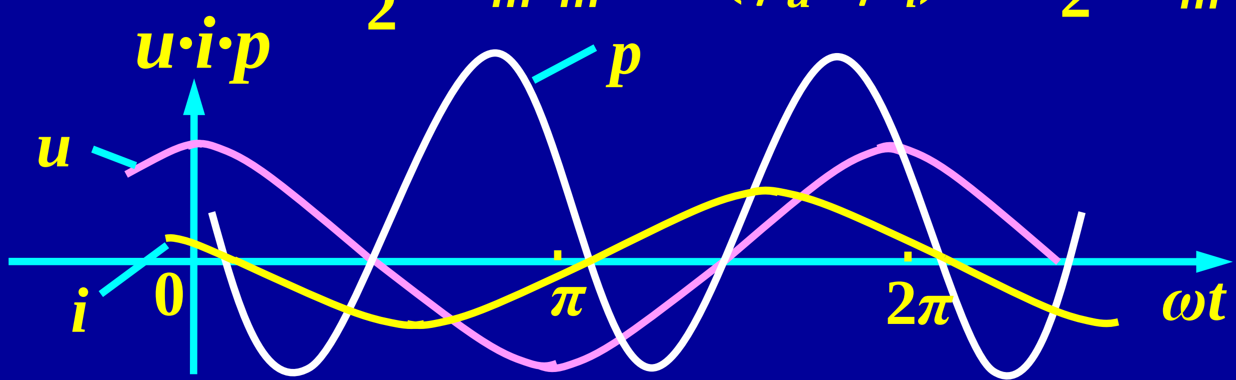
以下公式中u和i均为关联参考方向.
若非关联，加负号。

1. 瞬时功率

$$p_N(t)=U_mI_m\cos(\omega t+\varphi_u)\cos(\omega t+\varphi_i)$$

$$=\frac{1}{2}U_mI_m[\cos(\varphi_u-\varphi_i)+\cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)]$$

$$=\frac{1}{2}U_mI_m\cos(\varphi_u-\varphi_i)+\frac{1}{2}U_mI_m\cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)$$



2. 平均功率(有功功率)

$$P=\frac{1}{2}U_mI_m\cos(\varphi_u-\varphi_i)=UI\cos(\varphi_u-\varphi_i)$$

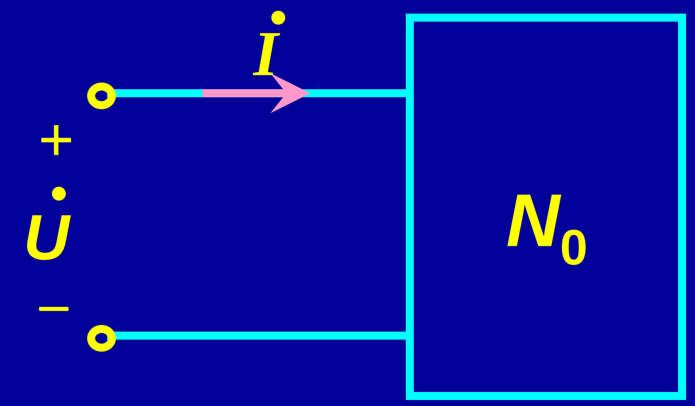
讨论：

（1）如果N不含独立源

$$Z = \dot{U} / \dot{I} = \frac{U}{I}\angle(\varphi_u - \varphi_i) = |Z|\angle\theta_Z$$

$\varphi_u - \varphi_i = \theta_Z$ 阻抗角

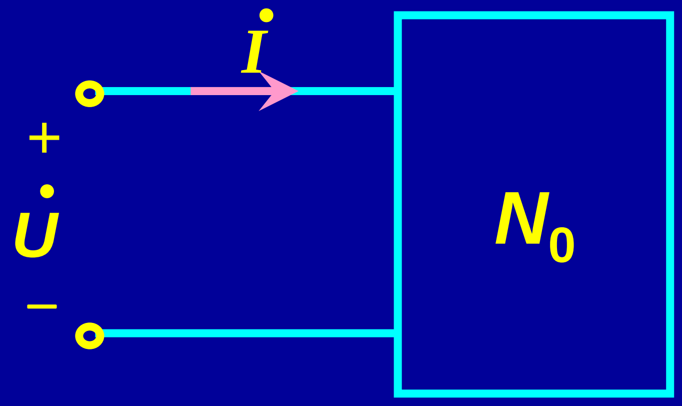
$$P = UI\cos\theta_Z$$



此时若N中不含受控源，$|\theta_Z|$小于90°，P为正

此时若N中含受控源，$|\theta_Z|$可能大于90°，P可正可负。

此外，



$$P=I^2\,\mathrm{Re}\,[Z]$$

$$P=U^2\,\mathrm{Re}\,[Y]$$

$$P=\sum_{K=1}^{n}P_K$$

（2）若N中含独立源， P可正可负，此时$\theta=\varphi_u-\varphi_i$

$$P=UI\cos(\varphi_u-\varphi_i)$$

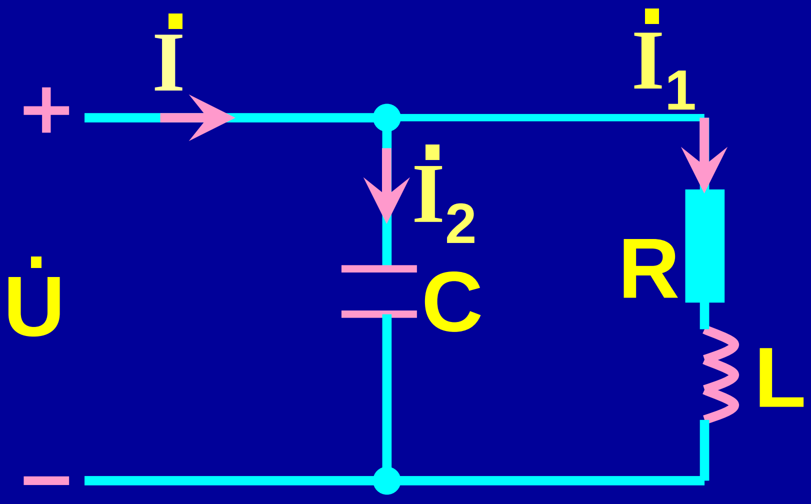
例9-6：已知R=3Ω jωL=j4Ω -j/(ωC)=-j5Ω

$\dot{I}=12.65\angle 18.5^{o}\ A$

$\dot{I}_1=20\angle -53.1^{o}\ A$

$\dot{I}_2=20\angle 90^{o}\ A$

$\dot{U}=100\angle 0^{o}\ V$



求单口网络的功率P

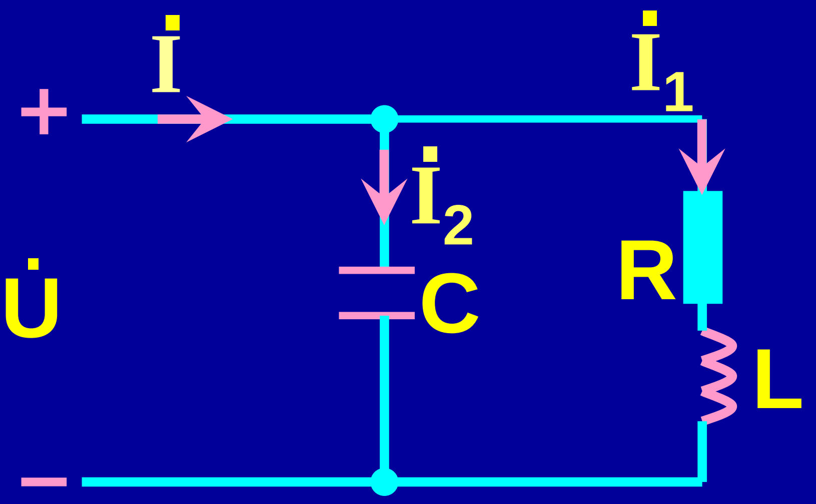
解法四种，见教材P78

法1：$P=100\times 12.65\cos(0-18.5^{\circ})=1200\ W$

法2：$P=P_R=3\times 20^2=1200\ W$

法3：利用R、L支路计算

$P = UI_1 \cos[0-(-53.1^\circ)] = 100 \times 20\ \cos 53.1^\circ = 1200\ \mathrm{W}$



法4：

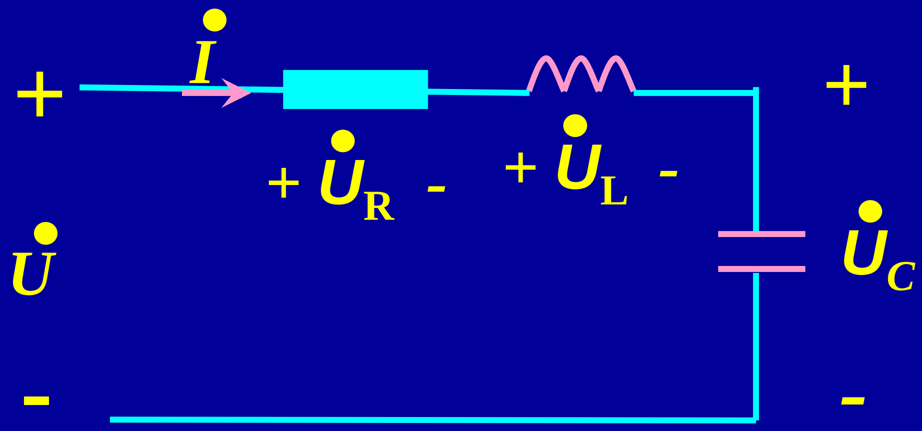
$P = I^2 \mathrm{Re}[Z]$

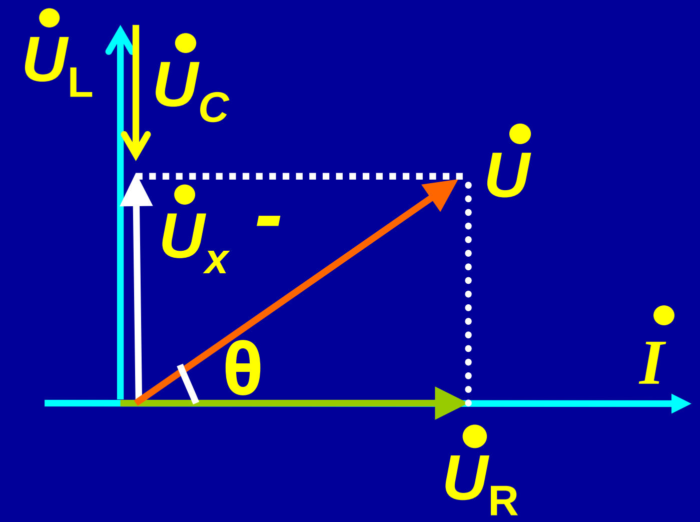
$Z = (3+j4) // (-j5) = (7.5 - j\,2.5)\ \Omega$

$P = 12.65^2 \times 7.5 = 1200\mathrm{W}$

§ 9-5　单口网络的无功功率

以RLC串联电路为例：





1 有功功率： $P= UI\cos\theta$　电阻分量的电压电流有效值乘积

2 无功功率： $Q=UI\sin\theta$　电抗分量的电压电流有效值乘积

$$Q=\sum_{K=1}^{n} Q_K$$ 无功功率守恒

$$=Q_C+Q_L=2\omega(W_L-W_C)$$

内部不含独立源的单口网络，其无功功率还有以下公式

$$Q = I^2 \operatorname{Im}[Z]$$

$$Q = -U^2 \operatorname{Im}[Y]$$

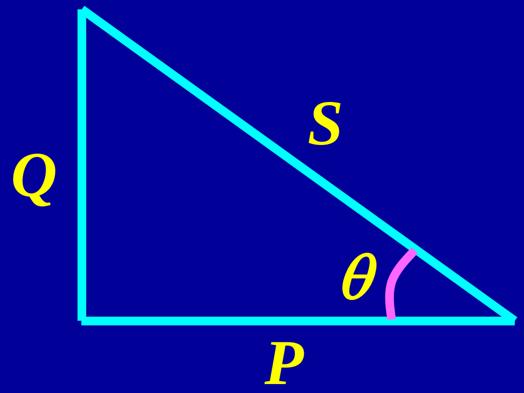
讨论：

（1）若Q>0，则θ>0　　呈感性

若Q<0，则θ<0　　呈容性。

（2）若Q=0，则能量只在C、L间交换，外电路(电源)不参与交换。无功功率反映了外电路参与能量往返的程度。

3 视在功率及功率三角形



$$S = UI$$ 单位V·A

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

$$\cos\theta = \frac{P}{S}$$

4 功率因数

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos\theta$$

$\theta > 0$ 电流滞后电压 “滞后”、感性

$\theta < 0$ 电流超前电压 “超前”、容性

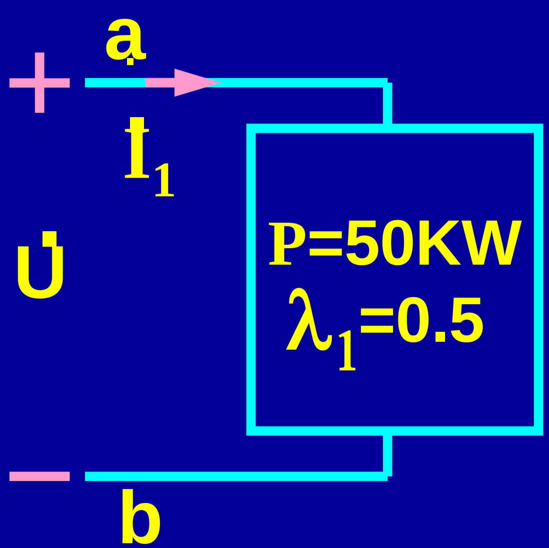
5 有功功率P与无功功率Q的关系

$$Q = P\tan\theta = P\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = P\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$$

例9–10：感应电动机是电感性负载，设有一220V、50HZ、50kW的感应电动机，功率因数为0.5。

（1）求电源供应的电流I_1和Q_1；

（2）为使功率因数为1 ，需并联多大的电容？ 此时电源提供的电流I_2多大？



解：

（1） $P=UI_1\cos\theta_1=UI_1\lambda_1$

$$I_1=\frac{P}{U\lambda_1}=455A$$

$$Q_1=UI_1\sin\theta_1=220\times455\sqrt{1-\cos^2\theta}=86.7KVAr$$

$Q_1\neq0$,电源与负载间存在徒劳往返的能量交换。

（2）

解法1：利用平均功率不变性

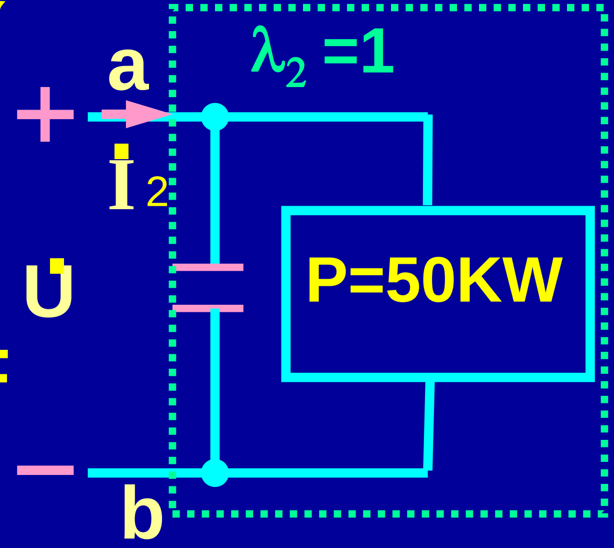
为使λ_2=1，Q_2=0，应并联储能性质相反的元件---电容，使ab向右为一纯电阻，由于电容不消耗功率，故 P不变。

$Q_2=Q_C+Q_1=0$　　而Q_1=原来值不变

$Q_C=-Q_1=-86.7K$

$Q_C=-\omega CU^2$

$$C=-\frac{Q_C}{\omega U^2}=\frac{86.7K}{2\pi\times50\times220^2}=5702\ \mu F$$



此时 λ_2=1，$P=UI_2$=50K未变

$$I_2=\frac{50K}{U}=\frac{50K}{220}\approx227A$$　　电源提供的电流大大降低。

思考题：若功率因数提高到0.9，重新解此题。

解法2: 相量图法

原网络N_1的功率因数角为60 °

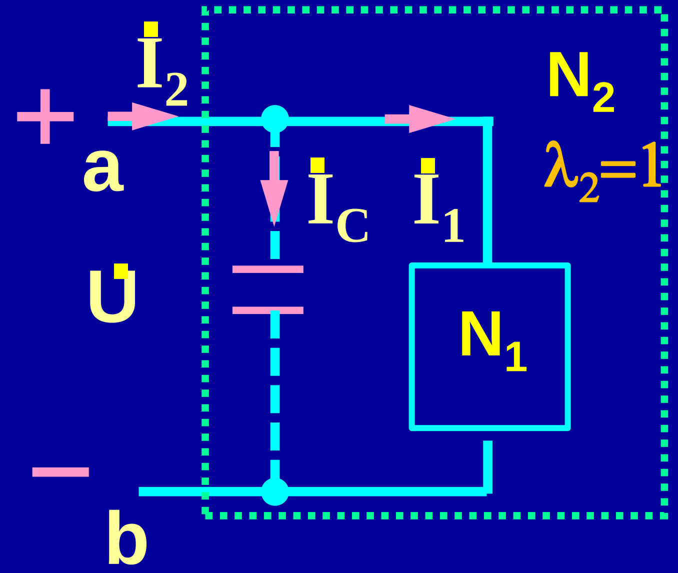
（感性负载）

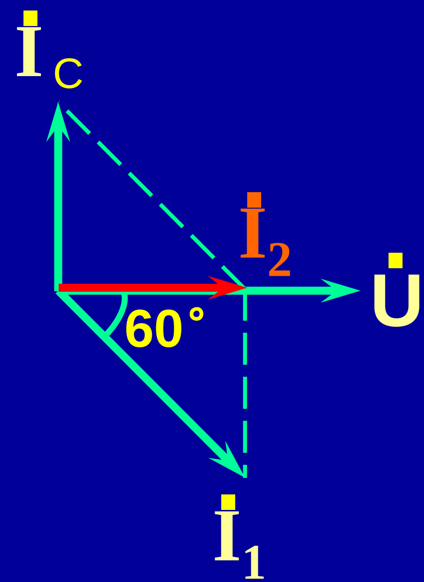
$$I_1 = \frac{P}{U\lambda_1} = 455\text{A}$$

$$I_C = I_1 \sin 60° \approx 394.03\text{A}$$

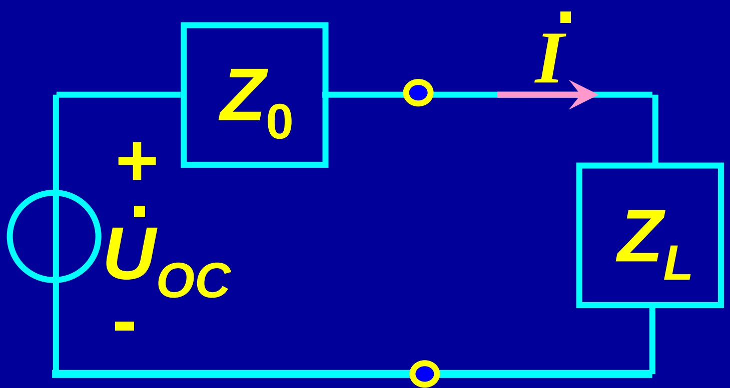
$$C = \frac{I_c}{\omega U} \approx 0.0057\text{F}$$

$$I_2 = I_1 \cos 60° \approx 227\text{A}$$





§9-7 正弦稳态最大功率传递定理



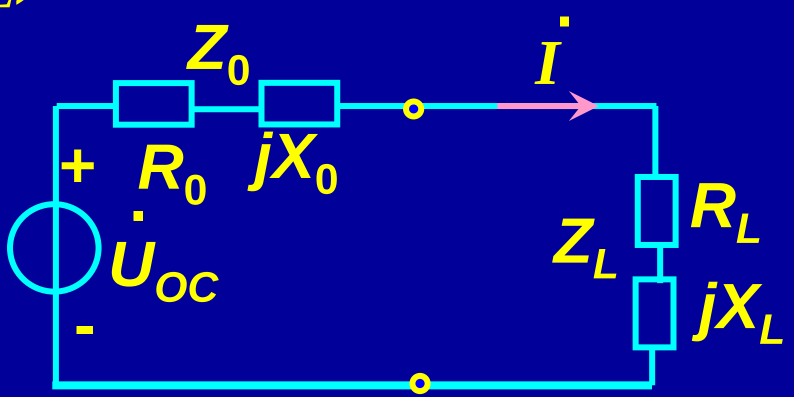
设 $\dot{U}_{OC}$、Z_0不变，Z_L可变

求负载获得最大功率的条件

情况（1） $Z_L = R_L + jX_L$ R_L、X_L都可变

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{OC}}{Z_0 + Z_L} = \frac{\dot{U}_{OC}}{(R_0 + R_L) + j(X_0 + X_L)}$$

$$I = \frac{U_{OC}}{\sqrt{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + X_L)^2}}$$



$$P_L = I^2 R_L = \frac{U_{OC}^2}{(R_0+R_L)^2+(X_0+X_L)^2} R_L$$

当 $X_L = -X_0$时， P_L最大

$$P_L = \frac{U_{OC}^2}{(R_0+R_L)^2} R_L$$

令 $$\frac{dP_L}{dR_L} = U_{OC}^2 \frac{(R_0+R_L)^2 - 2R_L(R_0+R_L)}{(R_0+R_L)^4} = 0$$

得 $R_L = R_0$ $$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{(R_0+R_L)^2} R_L = \frac{U_{OC}^2}{4R_O}$$

负载获得最大功率的条件： $R_L = R_0$, $X_L = -X_0$

共轭匹配：$Z_L = \overset{*}{Z}_0$ $$P_{L\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_O}$$

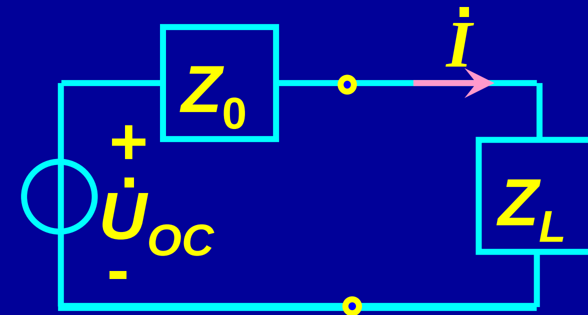
情况(2) 负载阻抗的模可变

用理想变压器使负载获得最大功率时就是属于这种情况。

设负载阻抗Z_L的模为|Z|，幅角为φ，其实部为|Z|cosφ，虚部为|Z|sinφ。

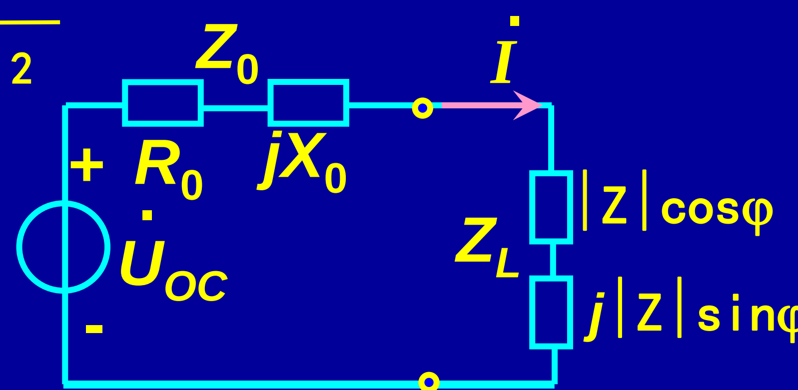
回路中的 $\dot{I}$ 为电压相量 $\dot{U}_{OC}$ 除以$(R_0+|Z|\cos\varphi)+j(X_0+|Z|\sin\varphi)$

$$I=\frac{U_{OC}}{\sqrt{(R_0+|Z|\cos\varphi)^2+(X_0+|Z|\sin\varphi)^2}}$$



负载电阻的功率为：

$$P=\frac{U_{OC}^2|Z|\cos\varphi}{(R_0+|Z|\cos\varphi)^2+(X_0+|Z|\sin\varphi)^2}$$



该式的变量为|Z|，求该式对|Z|的导数，令导数等于0，

得到： $|Z|^2=R_0^2+X_0^2$ $|Z|=\sqrt{R_0^2+X_0^2}$ **模匹配**

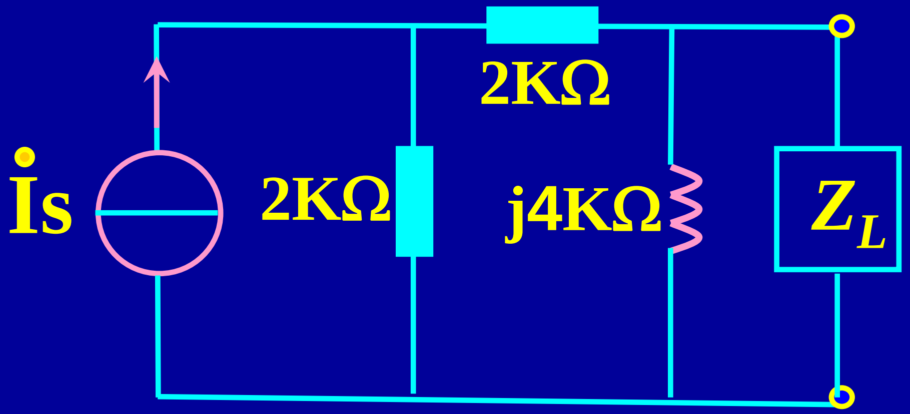
当负载为纯电阻R_L时，负载获得最大功率的条件是：

$$R_L = \sqrt{R_o^2 + X_o^2}$$

补充1：（P95 练习9-13）电路如图，$\dot{I}s=212\angle 0^\circ$ mA

（1）若Z_L为阻抗，Z_L为何值时？获最大功率求最大功率值；

（2）若Z_L为纯电阻，求Z_L获得的最大功率。



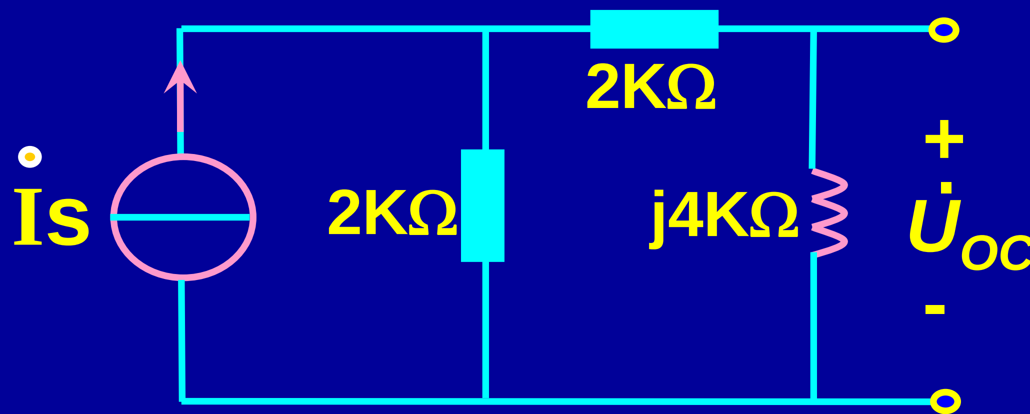
解：

$$(1)\quad Z_0 = \frac{(2+2)\times 10^3 \times j4\times 10^3}{(2+2)\times 10^3 + j4\times 10^3} = \frac{j16\times 10^3}{4+j4}$$

$$= 2 + j2 = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ \ \text{K}\Omega$$

Z_L = （2 − j2） KΩ 时获得最大功率

求开路电压：

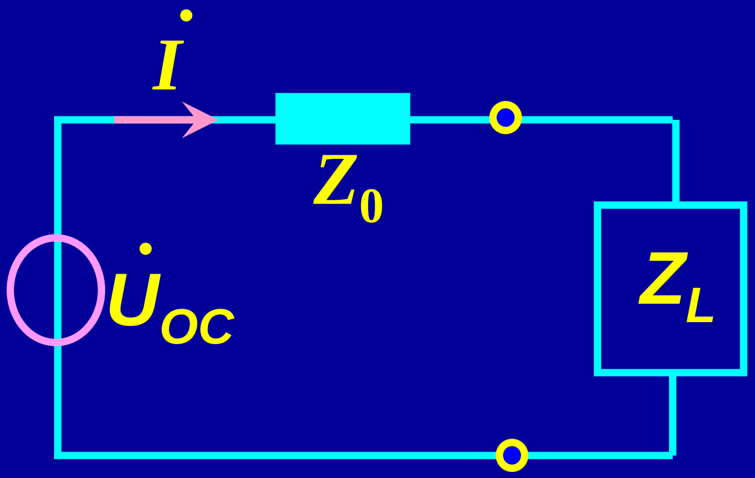


$$\dot{U}_{OC}=\frac{2\times10^3}{2\times10^3+(2\times10^3+j4\times10^3)}\times212\angle0^\circ\times10^{-3}\times j4\times10^3$$

$$=\frac{212\times j4}{2+j2}=212\sqrt{2}\angle45^\circ\mathrm{V}$$

$$P_{\max}=\frac{U_{OC}{}^2}{4\times2\times10^3}=\frac{(212\sqrt{2}\ )^2}{8\times10^3}=11.24\mathrm{W}$$

(2) $Z_L = 2\sqrt{2}\times 10^3 = 2.83\text{K}\Omega$



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{OC}}{(2 + j2 + 2.83)\times 10^3}$$

$$= \frac{212\sqrt{2}\angle 45^\circ}{(4.83 + j2)\times 10^3} = 57.34\angle 22.51^\circ\ \text{mA}$$

$$P_{\max} = I^2 R_L = (57.34 \times 10^{-3})^2 \times 2.83 \times 10^3 = 9.3\text{W}$$