概率论与数理统计

第20讲

区间估计的概念，正态总体的区间估计

一. 置信区间的定义

设 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是未知参数$\theta$的一个估计量，它是一个随机变量，对于一个样本观察值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，算得一个估计值$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，点估计是取$\theta \approx \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，一般的 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与θ之间存在误差。

我们希望给出这样的结果，有多大的可能参数θ在某一范围内，这个范围一般用区间的形式给出，这种形式的估计称为区间估计。

例如，估计明天的最高温度八成在10-15摄氏度之间，有95%把握认为某人的年龄在25到30岁之间，有98%把握认为某部件正常工作的概率在0.93到0.98之间等等。

和点估计不同，区间估计给出了包含参数真值的范围以及可靠程度。这样的区间称为置信区间。

一. 置信区间的定义

设总体X的分布为$f(x,\theta)$，其中θ为未知参数，$\theta\in\Theta$， Θ 为参数空间，X_1，X_2,…，X_n是来自总体X的一个样本，若对事先给定的一个常数$\alpha(0<\alpha<1)$，存在两个统计量

$$\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(X_1,X_2,\cdots,X_n) \text{ 和 } \hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

对于任意$\theta\in\Theta$, 满足 $P_\theta\{\hat{\theta}_L\le\theta\le\hat{\theta}_U\}\ge 1-\alpha$

则称随机区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。

$\hat{\theta}_L$ 和 $\hat{\theta}_U$ 分别称为置信下限和置信上限，$1-\alpha$称为置信水平。

一. 置信区间的定义

(1)当X连续时，对于给定的α，可以求出置信区间 $[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$ 满足

$$P_\theta\{\hat{\theta}_L\le\theta\le\hat{\theta}_U\}=1-\alpha$$

(2)当X离散时，对于给定的α，常常找不到区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$ 满足

$$P_\theta\{\hat{\theta}_L\le\theta\le\hat{\theta}_U\}=1-\alpha$$

此时，找区间 $[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$ 使得 $P_\theta\{\hat{\theta}_L\le\theta\le\hat{\theta}_U\}$ 至少为$1-\alpha$，且尽可能接近$1-\alpha$。

一. 置信区间的定义

(3)对于样本$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$$[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \cdots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \cdots, X_n)] \longrightarrow \boxed{\text{随机区间}}$$

以$1-\alpha$的概率保证其包含未知参数的真值。

即有：

$$P\{\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le \theta \le \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1-\alpha$$

一. 置信区间的定义

(4)对于样本观测值$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \cdots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \cdots, X_n)] \longrightarrow$ 常数区间

只有两个结果，包含θ和不包含θ。

没有随机变量，自然不能谈概率

此时，不能说：$P\{\hat{\theta}_L(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le \theta \le \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \cdots, x_n)\} = 1-\alpha$

可以理解为：该常数区间包含未知参数真值的可信程度为$1-\alpha$。

一. 置信区间的定义

常数区间 $[\hat{\theta}_L(x_1,x_2,\cdots,x_n),\hat{\theta}_U(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$ 认为是随机区间的 $[\hat{\theta}_L(X_1,X_2,\cdots,X_n),\hat{\theta}_U(X_1,X_2,\cdots,X_n)]$ 的一次实现。

则在重复取样下(各次取样的样本容量均为n)，获得许多不同的实现，根据伯努利大数定律，这些不同的实现中大约有$100(1-\alpha)\%$包含θ的真值，而有$100\alpha\%$不包含θ的真值。

$$P\{\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le \theta \le \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1-\alpha$$

如：取$1-\alpha$=0.95。

若反复抽样100次，样本观测值为 $x_1^i, x_2^i, \cdots, x_n^i, i=1,2,\cdots,100$

对应的常数区间为 $[\hat{\theta}_L(x_1^i, \cdots, x_n^i), \hat{\theta}_U(x_1^i, \cdots, x_n^i)], i=1,2,\cdots,100$

于是在100个常数区间中，包含参数真值的区间大约为95个，不包含真值的区间大约为5个。

对一个具体的区间 $[\hat{\theta}_L(x_1^i, \cdots, x_n^i), \hat{\theta}_U(x_1^i, \cdots, x_n^i)]$ **而言，它可能包含θ, 也可能不包含θ, 包含θ的可信度为95%。**

(5)置信水平是区间估计的可靠性度量，在给定置信水平下，置信区间长度越短，其估计精度越高。而可靠度和精度是相互矛盾的两个方面，可靠度要求越高，置信区间越长，此时精度越低。

理论上通常的原则是保证可靠度下，求精度尽可能高的置信区间。

一般做法是，根据不同类型的问题，先确定一个较大的置信水平$1-\alpha$，使得 $P\{\hat{\theta}_L(x_1,x_2,\cdots,x_n)\le\theta\le\hat{\theta}_U(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}=1-\alpha$

此时 $[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$ 的取法仍然有任意多种，之后再从中选取一个平均长度最短的区间。

二. 置信区间的求法—枢轴量法

第一步： 找一个与待估参数θ有关的统计量$T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$，一般选取参数θ的一个优良的点估计；

第二步： 构造统计量$T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$和参数θ的一个函数$G(T, \theta)$，要求G的分布与待估参数θ无关. 具有这种性质的函数$G(T, \theta)$称为枢轴量；

二. 置信区间的求法—枢轴量法

第三步： 对给定的置信水平 $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$，选取两个常数 a 和 b $(a<b)$，使得

$$P_\theta\left\{a \le G(T,\theta) \le b\right\} = 1-\alpha$$

第四步： 如果不等式 $a \le G(T,\theta) \le b$ 可以等价变形为 $\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U$，即有

$$P_\theta\left\{a \le G(T,\theta) \le b\right\} = P_\theta\{\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U\} = 1-\alpha$$

那么区间 $[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$ 就是参数 θ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

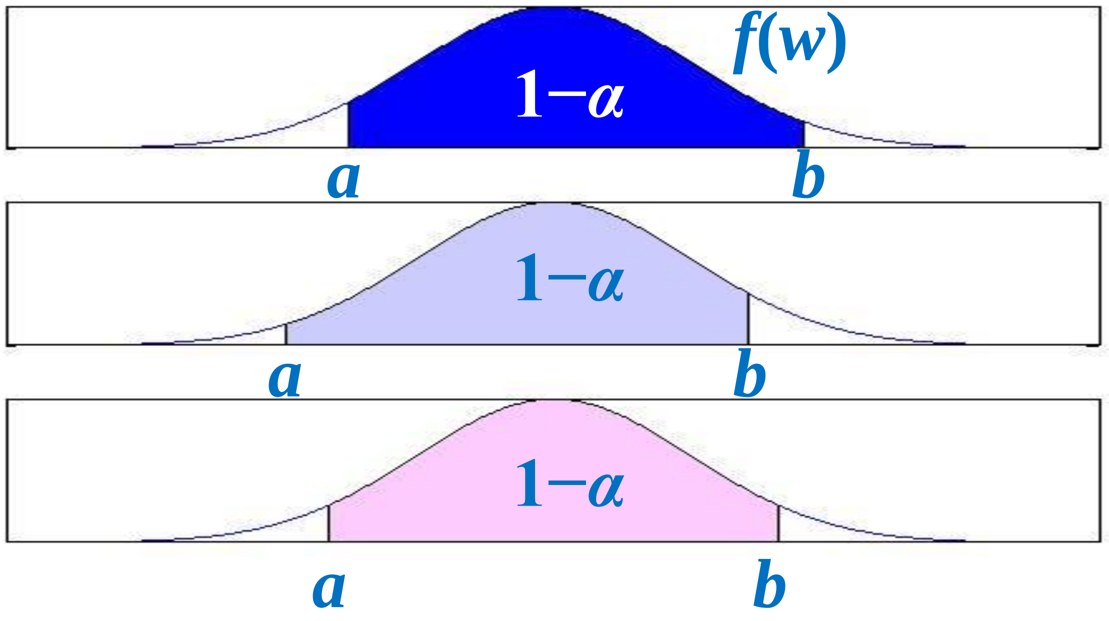
注 意

（1）当$G(T,\ \theta)$是θ的连续严格单调函数时，这两个不等式的等价变形总可以做到。

（2）若被估计量是待估参数θ的函数$g(\theta)$，此时把枢轴量$G(T,\theta)$换为$G(T, g(\theta))$，不等式$a \le G(T,\theta) \le b$变形为$\hat{g}_L(X) \le g(\theta) \le \hat{g}_U(X)$。

（3）两个常数a和b的选择方法

对于任意两个数a和b，只要使得$f(w)$下方的面积为$1-\alpha$，就能确定一个$1-\alpha$的置信区间。

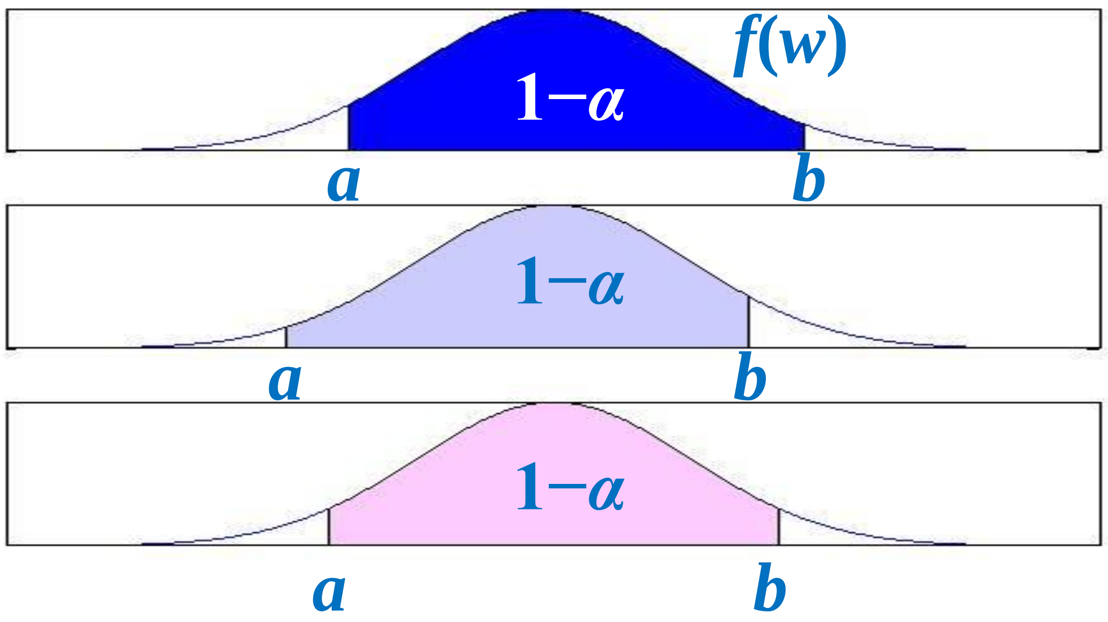


希望置信区间长度尽可能短。

二. 置信区间的求法—枢轴量法

当W的密度函数单峰且对称时，如：$N(0,1)$, t分布等，当$a=-b$时求得的置信区间的长度最短。

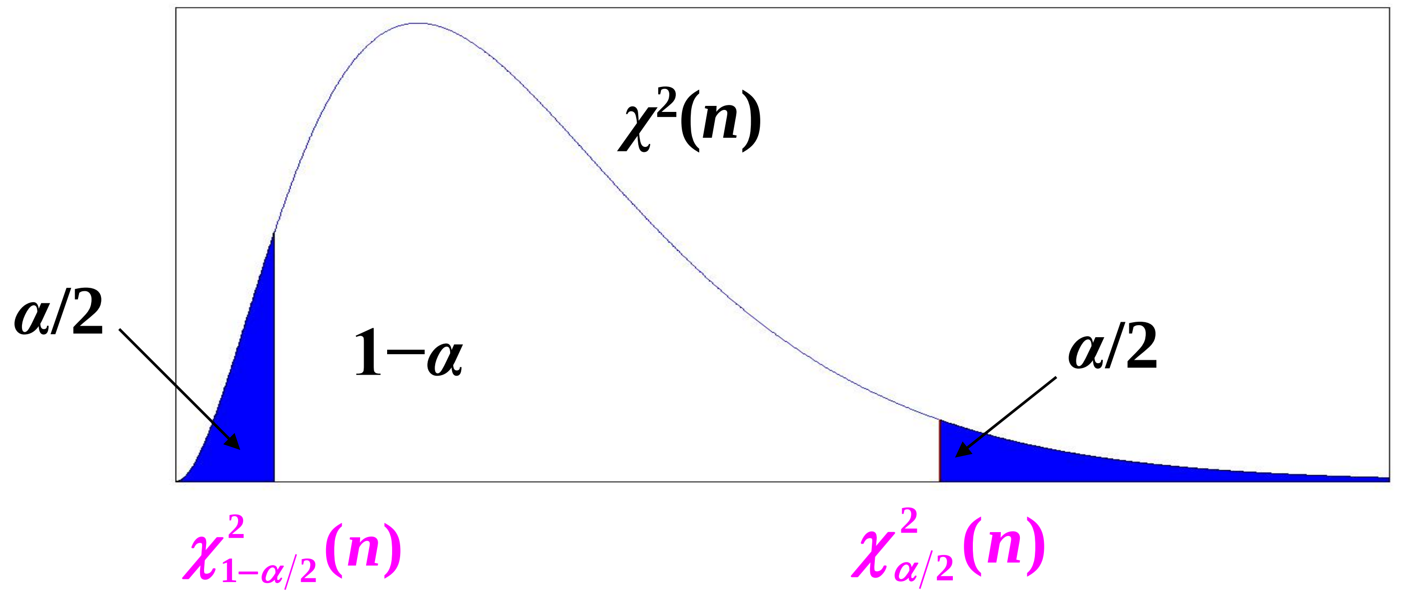
如：$b=z_{\alpha}/2$或 $t_{\alpha/2}(n)$



二. 置信区间的求法—枢轴量法

当W的密度函数不对称时，如χ^2分布，F分布，习惯上仍取对称的分位点来计算未知参数的置信区间。即有$P_\theta\left\{G(T,\theta)\geq b\right\}=\dfrac{\alpha}{2},P_\theta\left\{G(T,\theta)\leq a\right\}=\dfrac{\alpha}{2}$

这是一种习惯做法，此时置信区间长度可以不必为最短。



二. 置信区间的求法—枢轴量法

在一些实际问题中，例如，对于电子元件的寿命，我们关心的是平均寿命的下限。

而在考虑某种药品中杂质含量的均值时，我们关心的是均值的上限，由此给出如下单侧置信区间的概念。

二. 置信区间的求法—枢轴量法

设总体X的分布为$f(x,\theta)$，其中θ为未知参数，$\theta\in\Theta$，Θ为参数空间，$X_1, X_2,\dots, X_n$是来自总体X的一个样本，若对事先给定的一个常数$\alpha(0<\alpha<1)$，对于任意$\theta\in\Theta$，存在统计量$\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 使得 $P_\theta\{\hat{\theta}_L\le\theta\}\ge 1-\alpha$

则称随机区间$[\hat{\theta}_L,\infty)$是θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间。
称$\hat{\theta}_L$为置信水平为$1-\alpha$的为单侧置信下限。

存在统计量 $\hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 使得 $P_\theta\{\theta\le\hat{\theta}_U(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}\ge 1-\alpha$

则称随机区间 $(-\infty,\hat{\theta}_U]$是θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间。
称 $\hat{\theta}_U$ 为置信水平为$1-\alpha$的为单侧置信上限。

三. 单个正态总体均值的区间估计

$X_1, X_2, \ldots, X_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，置信水平$1-\alpha$。

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 样本均值

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 样本方差

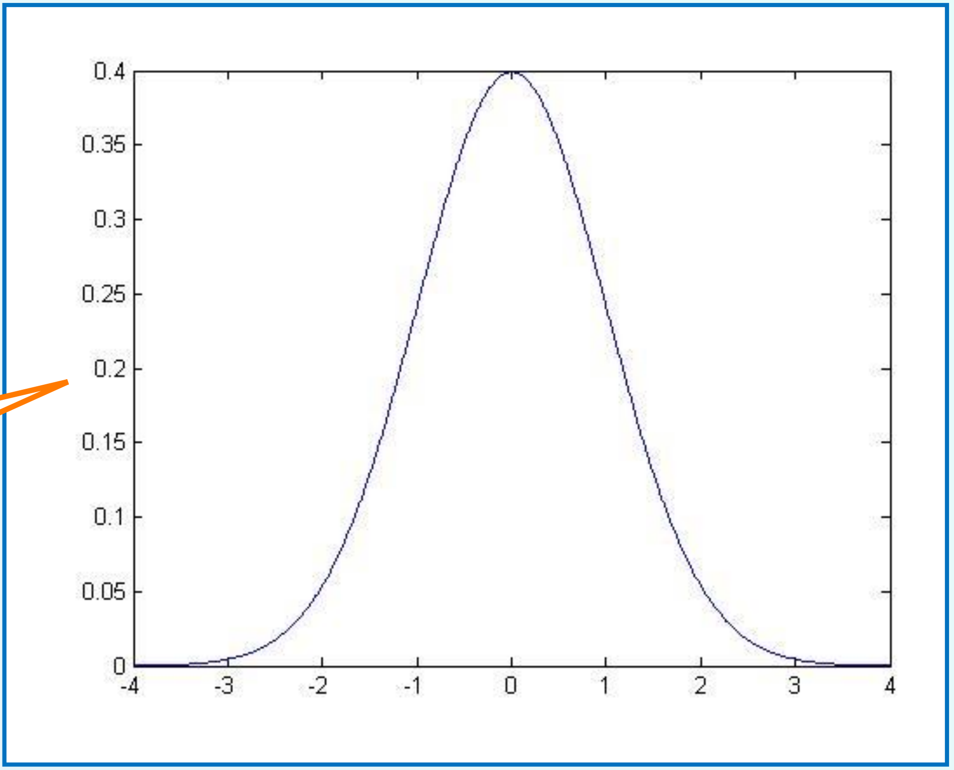
1.方差σ^2已知情形

由于$\bar{X}$是μ的MLE，且是无偏估计，由抽样分布理论知

$$W=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

是枢轴量

单峰对称



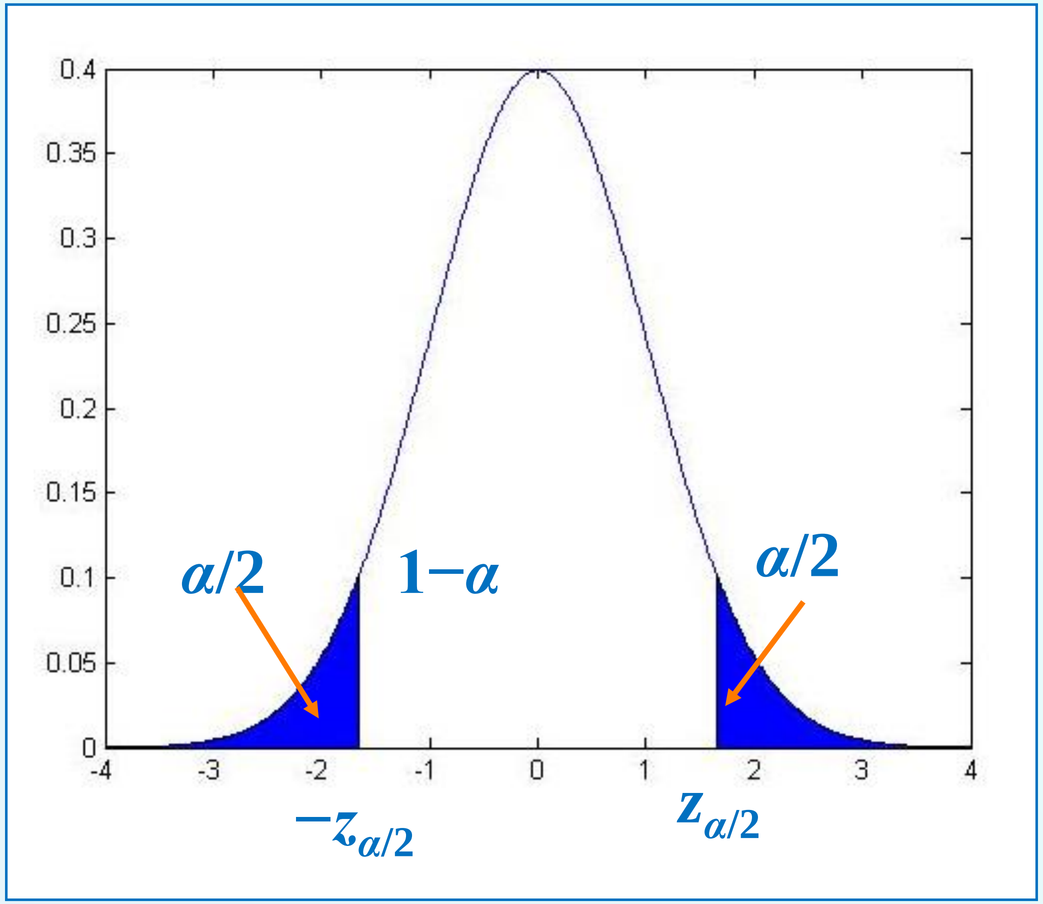
W是样本和待估参数的函数，其分布为$N(0,1)$，完全已知

选择两个常数$b=-a=z_{\alpha/2}$

即 $P\{-z_{\alpha/2} < \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$

等价变形为

$$P\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$$



三. 单个正态总体均值的区间估计

因此，参数μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间为$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$

简记为$\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$　置信区间的长度为$l_n=2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$

说 明

1. l_n越小，置信区间提供的信息越精确；
2. 置信区间的中心是样本均值；
3. 置信水平$1-\alpha$越大，则$z_{\alpha/2}$越大。因此，置信区间长度越长，精度越低；
4. 样本容量n越大，置信区间越短，精度越高；
5. σ越大则l_n越大，精度越低。因为方差越大，随机影响越大，精度越低。

2.方差σ^2未知情形

此时，$W=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ 包含了未知多余参数σ，因此不能作为枢轴量。

想法：用样本标准差S代替总体标准差σ。

由抽样分布理论知：$T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

是枢轴量

枢轴量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

选择两个常数$b=-a=t_{\alpha/2}(n-1)$ 使 $P\{-t_{\alpha/2}(n-1)<T<t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$

即 $P(-t_{\alpha/2}(n-1)<\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1))=1-\alpha$

等价于 $P\{\bar{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)<\mu<\bar{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$

因此，方差σ^2未知情形下均值μ的一个置信水平$1-\alpha$置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1))$$

三. 单个正态总体均值的区间估计

例1. 根据长期经验知道某式枪弹底火壳二台高X(如果读者对具体问题不熟悉，只需理解X是长度指标)服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，现在随机抽取底火壳20个，测得二台高X的结果(单位：mm)为

4.96	4.95	4.92	4.94	4.96	4.94	4.97	4.96	4.97	4.97
5.01	4.97	4.98	5.01	4.97	4.98	4.99	4.98	5.00	5.00

(1) 当$\sigma^2=0.017^2$已知时，求底火壳二台高X的均值μ的置信水平为95%的置信区间。

(2) 当σ^2未知时，求底火壳二台高X的均值μ的置信水平为99%的置信区间。

解：(1) 因为σ^2已知，因此底火壳二台高X的均值μ的置信区间形式为

$$[\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}]$$

查表得 $z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$ 计算得 $\bar{x}=4.9715$ 易知 n=20

代入上式得到μ 的置信区间为[4.968, 4.979]

这就是说，我们有95%的把握断定区间[4.968, 4.979]包含底火壳二台高X的均值EX。

(2) 当σ^2未知时，求底火壳二台高X的均值μ的置信水平为99%的置信区间。

$$[\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)]$$

查表得$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.005}(19)=2.8609$　计算得 $\bar{x}=4.9715, s^2=0.0237^2$

代入上式得到μ 的置信区间为[4.956, 4.987]

四. 单个正态总体方差的区间估计

$X_1, X_2, \ldots, X_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，置信水平$1-\alpha$。

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 样本均值 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 样本方差

1. 均值 μ 未知情形

枢轴量

σ^2的常用点估计为S^2，且是无偏估计。且知：$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

选取两个常数分别为 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 和 $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

所以，有 $P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$

四. 单个正态总体方差的区间估计

等价于 $P\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$

方差σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

标准差σ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为 $\left(\dfrac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \dfrac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$

四. 单个正态总体方差的区间估计

2. 均值 μ 已知

当均值μ已知时 $\quad \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

仍然满足枢轴量的条件，但μ已知没有用到，造成了信息的损失。

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

μ 已知不用$\bar{X}$

因此，有 $\underbrace{\dfrac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}_{\text{枢轴量}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$

四. 单个正态总体方差的区间估计

选取两个常数分别为 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$ 和 $\chi^2_{\alpha/2}(n)$

所以，有 $P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n) < \frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 < \chi^2_{\alpha/2}(n)\} = 1-\alpha$

从而有 $P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\} = 1-\alpha$

方差σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \Big/ \chi^2_{\alpha/2}(n), \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \Big/ \chi^2_{1-\alpha/2}(n)\right)$$

例2. 某自动机床加工某种零件，已知零件长度服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，现在随机抽16个，测得长度的结果(单位：mm)为

12.15	12.12	12.01	12.08	12.09	12.16	12.03	12.01
12.06	12.13	12.07	12.11	12.08	12.01	12.03	12.06

求零件长度X的方差σ^2和标准差σ的置信水平为95%的置信区间。

解：均值μ未知，方差σ^2和标准差σ的置信水平95%的置信区间形式分别为

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right] \qquad \left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right]$$

四. 单个正态总体方差的区间估计

查表得 $\chi^2_{0.025}(15)=27.488$， $\chi^2_{0.975}(15)=6.262$

计算得 $\bar{x}=12.075$， $s^2=0.0494^2$

带入得方差σ^2和标准差σ的置信区间为：[0.00133,0.00585]和[0.0365,0.0765]

五. 两个正态总体均值差的置信区间

设$X_1, X_2, \ldots, X_m$是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$是来自正态总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且两个总体是独立的。

$$\bar{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i \quad \bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i \quad S_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2 \quad S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$$

分别表示两个样本的样本均值和样本方差

易知，它们是相互独立的。 置信水平$1-\alpha$。

五. 两个正态总体均值差的置信区间

1.方差σ_1^2,σ_2^2均已知

由于$\mu_1-\mu_2$点估计为

$$\bar{X}-\bar{Y}$$

由抽样分布理论知

$$U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\sim N(0,1)$$

取U作为枢轴量。

对于置信水平$1-\alpha$，选择分位数为$z_{\alpha/2}$，可得

$$P\{|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}|<z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

五. 两个正态总体均值差的置信区间

$$P\{\left|\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\right|<z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

可将上式等价转化为

$$P\{(\bar{X}-\bar{Y})-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{X}-\bar{Y})+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}})=1-\alpha$$

因此，均值差$\mu_1-\mu_2$的置信水平$1-\alpha$置信区间为

$$((\bar{X}-\bar{Y})-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},(\bar{X}-\bar{Y})+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}})$$

2. 方差$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$,但$\sigma^2$未知情形

由抽样分布理论知：$T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{1/m+1/n}}\sim t(m+n-2)$

其中 $S_\omega^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}, S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}$

取T作为枢轴量。

五. 两个正态总体均值差的置信区间

枢轴量 $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{1/m+1/n}}\sim t(m+n-2)$

根据t分布的性质，取分位数$t_{\alpha/2}(n+m-2)$有

$$P\{|\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{1/m+1/n}}|<t_{\alpha/2}(n+m-2)\}=1-\alpha$$

因此，均值差$\mu_1-\mu_2$的置信水平$1-\alpha$置信区间为

$$((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\alpha/2}(n+m-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}})$$

五. 两个正态总体均值差的置信区间

3. 方差σ_1^2，σ_2^2 未知，但$m=n$

令$Z_i=X_i-Y_i$，$i=1,2,\ldots,n$，则 $Z_i \sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，$i=1,2,\cdots,n$

且$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$独立同分布，故$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$可视为从总体$N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$中抽取的样本，令 $\bar{Z}=\bar{X}-\bar{Y}, S_Z^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2$

则 $\dfrac{\bar{Z}-(\mu_1-\mu_2)}{S_Z/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

类似于单正态总体时，均值的区间估计方法，得$\mu_1-\mu_2$的置信水平$1-\alpha$置信区间为

$$\left[\bar{X}-\bar{Y}-\frac{S_Z}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}-\bar{Y}+\frac{S_Z}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right]$$

六. 两个正态总体方差比的置信区间

设$X_1, X_2, \ldots, X_m$是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$是来自正态总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，且两个总体是独立的。

$$\bar{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i \quad \bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i \quad S_1^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2 \quad S_2^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$$

分别表示两个样本的样本均值和样本方差

易知，它们是相互独立的。

我们分两种情形求 σ_1^2/σ_2^2 置信区间。　置信水平$1-\alpha$。

六. 两个正态总体方差比的置信区间

1. 均值$\mu_1\mu_2$均未知

枢轴量

易知 σ_1^2/σ_2^2 常用点估计为 S_1^2/S_2^2 且有 $F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

根据F分布的性质，取分位数$F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$和$F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$

$$P\{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)\le \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\le F_{\alpha/2}(m-1,n-1)\}=1-\alpha$$

方差比σ_1^2/σ_2^2的置信水平$1-\alpha$置信区间为

$$[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}]$$

2. 均值$\mu_1\mu_2$已知

易知此时σ_1^2和σ_2^2的点估计分别为

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2 \text{ 和 } \hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2$$

可构造枢轴量为

$$G=\frac{\dfrac{m\hat{\sigma}_1^2}{\sigma_1^2}\Big/m}{\dfrac{n\hat{\sigma}_2^2}{\sigma_2^2}\Big/n}=\frac{\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(m,n)$$

六. 两个正态总体方差比的置信区间

根据F分布的性质，取分位数$F_{1-\alpha/2}(m, n)$和$F_{\alpha/2}(m, n)$。

$$P\{F_{1-\alpha/2}(m,n) \le \frac{\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \le F_{\alpha/2}(m,n)\} = 1-\alpha$$

方差比σ_1^2/σ_2^2的置信水平$1-\alpha$置信区间为

$$[\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(m,n)}, \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m,n)}]$$

作业： 13,14,17,19,20

第20讲

谢谢观看