北京理工大学 2022-2023 学年第一学期

2021 级概率与数理统计答题纸

序号 102　姓名 咸易林　学号 1120217812　班级 07152102

（本答题纸共 8 页，请将每道题的答案写在指定的位置）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	核分
得分										
签名										

一、

得分	

解：1. 由 $P(AB)=0 \Rightarrow P(ABC)=0$.

$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1-P(A\cup B\cup C) = 1-(P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC))$

$= 1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}) = \frac{13}{30}$

~~2. (1) 能回答正确的概率~~

~~$P_1 = 1-(1-0.6)\times(1-0.5)\times(1-0.4) = 0.88$~~

~~(2) 由甲回答出来，由贝叶斯公式可得~~

~~$P_2 = \frac{0.6}{0.88} = \frac{15}{22}$~~

2. (1) 令甲回答出来为 A_1，乙回答出为 A_2，丙回答出为 A_3，团队答对为 B.

则 $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) + P(B|A_3)\cdot P(A_3)$

即 $P(B) = \frac{1}{3}\times0.6+\frac{1}{3}\times0.5+\frac{1}{3}\times0.4 = 0.5$

(2) 由贝叶斯公式

$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B)}$。

即 $P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{3}\times0.6}{0.5} = 0.4$

102 成易林 1120212812 07152102

102 成易林 1120212812 07152102.

二、

得分	

解：1. (1) 由题可得 X为离散型变量

$P\{X=-1\} = 0.3-0 = 0.3$

$P\{X=1\} = 0.5-0.3 = 0.2$

$P\{X=4\} = 1-0.5 = 0.5$

即X的分布律为

X	-1	1	4
P	0.3	0.2	0.5

(2) 由(1)可得

$P\{X>-1 \mid X\neq 1\} = \frac{P\{X>-1 \cap X\neq 1\}}{P\{X\neq 1\}} = \frac{P\{X=4\}}{P\{X=-1\} \cup P\{X=4\}} = \frac{0.5}{0.3+0.5} = \frac{5}{8}$

2. (1) X服从参数为1的指数分布

对指数分布有

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

则代入 λ=1 得

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0. \end{cases}$$

(2) $F_Y(y) = P\{Y\le y\} = P\{(X-1)^2 \le y\}$.

对 $(X-1)^2\le y \Rightarrow 1-\sqrt{y} \le X \le 1+\sqrt{y}$.

则 $F_Y(y) = P\{1-\sqrt{y}\le X\le 1+\sqrt{y}\}$.

1° $1-\sqrt{y}<0 \Rightarrow y>1$时.

$F_Y(y) = \int_0^{\sqrt{y}+1} e^{-x}dx = 1-e^{-\sqrt{y}-1}$

2° $1-\sqrt{y}\ge 0 \Rightarrow y\in[0,1]$时.

$F_Y(y) = \int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} e^{-x}dx = e^{\sqrt{y}-1}-e^{-1-\sqrt{y}}$

$$\text{则 } F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ e^{\sqrt{y}-1}-e^{-1-\sqrt{y}} & y\in[0,1] \\ 1-e^{-1-\sqrt{y}} & y>1. \end{cases}$$

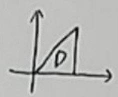
$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 0 & y<0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{\sqrt{y}-1} - \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-1-\sqrt{y}} & y\in[0,1] \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{-1-\sqrt{y}} & y>1. \end{cases}$$

102 成易林 1120212812 07152102.

三、

得分	

解：1. 不一定成立，如图



有区域D，~~D={(x,y)|x∈[0,2]}~~ 由 $y\geq 0$，$x\leq 2$ $y=x$ 围成，

则(X,Y)满足均匀分布 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \cancel{x\in[0,2]\ y\in[}\ (x,y)\in D\\ 0 & 其他.\end{cases}$

对Y：$f_Y(y)=\int_y^2 \frac{1}{2}dx = 1-\frac{1}{2}y$

对X：$f_X(x)=\int_0^x \frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}x$

不是均匀分布.

2. (1) 有 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=1$

则有 $\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}c(x+y)e^{-(x+y)}dy=1$

$\Rightarrow 2c=1$

即 $c=\frac{1}{2}$

(2) 由 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

则 $f_X(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dy$

$=\frac{1}{2}xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x}\quad x>0$

由 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

则 $f_X(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dx$

$=\frac{1}{2}ye^{-y}+\frac{1}{2}e^{-y}\quad y>0.$

综上 $f_X(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \frac{1}{2}xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x} & x>0\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}0 & y\leq 0\\ \frac{1}{2}ye^{-y}+\frac{1}{2}e^{-y} & y>0.\end{cases}$

(3) $x>0$，$y>0$ 时 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)e^{-x-y}$

$f_X(x)=\frac{1}{2}xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x}$

$f_Y(y)=\frac{1}{2}ye^{-y}+\frac{1}{2}e^{-y}.$

则 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$\Rightarrow$ X,Y 不独立.

(4) $F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{X+Y\leq z\}.$

$P\{X+Y\leq z\}=\int_0^z dx\int_0^{z-x}\frac{1}{2}(x+y)e^{-x-y}dy$

$=1-ze^{-z}-e^{-z}-\frac{1}{2}z^2e^{-z}\quad z>0$

即 $F_Z(z)=1-ze^{-z}-e^{-z}-\frac{1}{2}z^2e^{-z}\quad z>0$

$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2}z^2e^{-z}\quad z>0.$

综上 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2e^{-z} & z>0\\ 0 & z\leq 0.\end{cases}$

102 成易林 1120212812 07152102.

四、

得分	

解：1. 设进货为 n.

~~利润 $S=10x-(n-x)\cdot 4$~~

~~由 X 满足 $U(10000, 20000)$~~

~~可得 $E(X)=\frac{10000+20000}{2}=15000$~~

~~则 $E(S)=14\cdot 15000-4n$~~

~~$=210000-4n$~~

~~可得 $E(S)$ 随 n 增大而减小.~~

~~即 $n=10000$ 时平均利润最大.~~

利润 $S=\begin{cases}10x-(n-x)\cdot 4 & n>x\\ 10n & n\le x\end{cases}$

则 $E(S)=\int_{10000}^{n}\cdot\frac{1}{10000}[10x-(n-x)\cdot 4]dx+\int_{n}^{10000}\cdot\frac{1}{10000}\cdot 10n\,dx$

$=\frac{7}{10000}n^2+24n-10000$

$\frac{dE(S)}{dn}=\frac{7}{5000}n+24=0\Rightarrow\frac{120000}{7}=n$

$\therefore n=\frac{120000}{7}$ 时利润最大.

2(1) X、Y 边缘密度函数

$f_X(x)=\int_0^x 8xy\,dy=4x^3 \quad 0<x<1$

$f_Y(y)=\int_y^1 8xy\,dy=4y-4y^3 \quad 0<y<1.$

则 $E(X)=\int_0^1 x\cdot f_X(x)\,dx=\int_0^1 4x^4\,dx=\frac{4}{5}$

$E(Y)=\int_0^1 y f_Y(y)\,dy=\int_0^1 4y^2-4y^4\,dy=\frac{8}{15}$

$E(X^2)=\int_0^1 x^2 f_X(x)\,dx=\int_0^1 4x^5\,dx=\frac{2}{3}$

$E(Y^2)=\int_0^1 y^2 f_Y(y)\,dy=\int_0^1 4y^3-4y^5\,dy=\frac{1}{3}$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2}{3}-\frac{16}{25}=\frac{2}{75}$

$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=\frac{1}{3}-\frac{64}{225}=\frac{11}{225}$

(2) $E(XY)=\cancel{\int_0^1 dx\int_0^x 8x^2y\,d}$

$\int_0^1 dx\int_0^x xyf(x,y)\,dy$

$=\int_0^1 dx\int_0^x 8x^2y^2\,dy$

$=\frac{4}{9}$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

$=\frac{4}{9}-\frac{4}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{225}$

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{4}{225}}{\sqrt{\frac{2}{75}}\sqrt{\frac{11}{225}}}$

$=\cancel{\frac{2}{33}\sqrt{66}}\ \frac{2\sqrt{66}}{33}$

102 成易林 1120212812 07152102

八、

得分	

102 成易林 1120212812 07152102.

五、

得分	

解：1. 泊松分布有 $E(X)=\lambda$ $D(X)=\lambda$.

则 $\alpha=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\frac{1}{n}\cdot nE(X^2)$

有 $E(X^2)=E^2(X)+D(X)$ 代入 $\lambda=5$ 得.

$\alpha=\frac{1}{n}\times n\times(5^2+5)=30$.

2. 15小时 = 900分钟 20小时 = 1200分钟

则有要求 $P\{900\le\sum_{i=1}^{100}X_i\le 1200\}$.

指数分布有 $E(X)=\frac{1}{\lambda}$ $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$ $\because \frac{1}{\lambda}=10$ 则 $D(X)=100$
由中心极限定理有.

$$P\{900\le\sum_{i=1}^{100}X_i\le 1200\}=P\{\frac{900-10\times100}{\sqrt{100}}\le\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-10\times100}{\sqrt{100}}\le\frac{1200-10\times100}{\sqrt{100}}\}.$$

$$=P\{-1\le\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-10\times100}{\sqrt{100}}\le 2\}.$$

$$=\Phi(2)-(1-\Phi(1))$$

$$=0.9773+0.8413-1=0.8186$$

102 戚易林 41202l2812 07152102

102 戚易林 1120212812 07152102.

六、

得分	

解：1. 由 $\chi^2(n-1) \sim \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

可得 $D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$

则 $D(S^2) = 2(n-1) \cdot \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}$

$= \frac{2\sigma^4}{n-1}$

2. $X_1+X_2 \sim N(0,2)$

则 $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1+X_2) \sim N(0,1)$

$X_3+X_4+X_5 \sim N(0,3)$

$\frac{1}{\sqrt{3}}(X_3+X_4+X_5) \sim N(0,1)$

$\frac{1}{3}(X_3+X_4+X_5)^2 \sim \chi^2(1)$

有 $t(1) \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1+X_2)}{\sqrt{\frac{1}{3}(X_3+X_4+X_5)^2}}$

则 $c = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{3} = \cancel{\frac{\sqrt{6}}{2}} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

自由度 $n=1$.

102 成易林 1120212812 07152102

七、

得分	

解：(1) 矩估计 $\mu_1 = E(X) = \int_0^1 \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}} dx = \frac{\frac{1}{\theta}}{\frac{1}{\theta}+1} = \frac{1}{1+\theta}$

$\mu_1 = \overline{X}$ 则 $\frac{1}{1+\theta} = \overline{X}$

$\Rightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{1-\overline{X}}{\overline{X}}$

(2) $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} x_i^{\frac{1}{\theta}-1} = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{\theta}-1}$

$\ln L(\theta) = -n\ln\theta + (\frac{1}{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

由 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$

$\Rightarrow -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$

则 $\hat{\theta}_2 = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$

(3) 是无偏估计，理由如下

$E(\ln X) = \int_0^1 \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} \ln x \, dx$

$= -\theta$

则 $E(\sum_{i=1}^{n}\ln X_i) = -n\theta$

则 $E(\hat{\theta}_2) = -\frac{-n\theta}{n} = \theta$

$\therefore \hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计.

102 成易林 9120212812 07152102

八、

得分	

解: 1. 第二类错误, 即

$P\{\bar{x}<2.6 \mid \mu=3\}$.

$=P\{\frac{\bar{x}-3}{1/\sqrt{n}} < \frac{2.6-3}{1/\sqrt{n}}\}$

$=P\{\frac{\bar{x}-3}{1/\sqrt{n}} < -0.4\sqrt{n}\}$.

若 $\beta \le 0.01$

则 $P\{\frac{\bar{x}-3}{1/\sqrt{n}} < -0.4\sqrt{n}\} \le 0.01$

$\because \Phi(-2.33) = 0.01$

$\Rightarrow -0.4\sqrt{n} \le -2.33$

$\Rightarrow n \ge 33.4$

又n为整数,

则 $n \ge 34$

最小n为34.

2. 令 $H_0: \mu=100$ $H_1: \mu \ne 100$.

检验统计量 $t(8) \sim \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$.

则拒绝域 $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$\Rightarrow |t| > t_{0.025}(8) = 2.3060$

由题 $t=\frac{100.1-100}{0.5/\sqrt{9}} = 0.6$.

则 $0.6 < 2.3060$.

接受H_0. 这批钢管合格