概率论与数理统计

第19讲

最大似然估计方法、估计量的评选标准

求最大似然估计(MLE)的一般步骤是：

1. 由总体X的分布写出似然函数$L(\theta)$；
2. 求对数似然函数$\ln L(\theta)$；
3. 对 $\ln L(\theta)$关于θ求(偏)导数，并令(偏)导函数为0；
4. 解方程(组)，得到未知参数的最大似然估计。

当以上方法不适用时，需要从定义出发，直接求似然函数的极值点。

例1.设总体$X\sim b(1,p)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$是取自X的一个样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$是对应的样本值，求参数p的最大似然估计量。

解：总体X的分布律为

$$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}, x=0,1$$

似然函数为 $L(p)=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

对数似然函数为 $\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n} x_i \ln p+(n-\sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1-p)$

一. 最大似然估计

对数似然函数为 $\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)$

对p求导并令导函数为0，得到对数似然方程

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{1-p}(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)=0$$

解方程得p的最大似然估计值为 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$

最大似然估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$

例2 设$X_1,X_2,\dots X_n$是取自总体X的一个样本

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ **其中$\theta>0$**

求θ的最大似然估计。

解：似然函数为

$$L(\theta)=f(x_1,\dots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}$$

对数似然函数为 $\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

求导并令其为0

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$$

从中解得

$$\hat{\theta} = -n \Big/ \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

即为θ的MLE 。

例3.设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ，σ^2为未知参数，X_1，X_2，…，X_n是取自总体X的一个样本，x_1，$x_2,\dots$，x_n是相应于样本$X_1,X_2,\dots$，X_n的一个样本值，求(1)参数μ,σ^2的最大似然估计量 (2)σ的最大似然估计量。

解：X的密度函数为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$$

似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

对μ,σ^2分别求偏导并令导数为0，得到对数似然方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}[\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu]=0\\[2ex]\dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0\end{cases}$$

一. 最大似然估计

解得μ,σ^2的最大似然估计值为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

最大似然估计量为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

由 于

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}$$

所以σ最大似然估计量为

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\hat{\sigma}^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$

例4.设总体X 的概率分布为

X	0	1	2
P	θ	$1-2\theta$	θ

其中$0<\theta<1/2$为未知参数.今对 X 进行观测，得如下样本值

0，1，2，0，2，1

求θ的最大似然估计。

解：依题意0，1，2，0，2，1是来自总体X的6个样本$X_1,X_2,\ldots,X_6$的观测值似然函数为

$$L(\theta)=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_6=x_6\}$$

一. 最大似然估计

X	0	1	2
P	θ	$1-2\theta$	θ

$$L(\theta)=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_6=x_6\}$$

$$=P\{X_1=0\}P\{X_2=1\}P\{X_3=2\}P\{X_4=0\}P\{X_5=2\}P\{X_6=1\}$$

$$=\theta(1-2\theta)\theta\theta\theta(1-2\theta)=\theta^4(1-2\theta)^2$$

对数似然函数为 $\ln L(\theta)=4\ln\theta+2\ln(1-2\theta)$

求导并令其为0 $\dfrac{4}{\theta}+2\dfrac{-2}{1-2\theta}=0$ 从中解得 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{3}$

例5.设总体X~$U(a,b)$，$a<b$为未知参数，X_1，X_2，…，X_n是取自总体X的一个样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$是相应于样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的样本值，求参数a,b的最大似然估计量。

解：X的密度函数为 $f(x;a,b)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b \\ 0, & 其他 \end{cases}$

a,b的取值范围

$-\infty<a<b<+\infty$

似然函数为 $L(a,b)=\begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n}, & a\le x_1,x_2,\cdots,x_n\le b \\ 0, & 其他 \end{cases}$

一. 最大似然估计

对数似然函数为

$$\ln L(a,b)=\ln\frac{1}{(b-a)^n}=-n\ln(b-a)$$

对数似然方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L(a,b)}{\partial a}=\dfrac{n}{b-a}=0\\[2ex]\dfrac{\partial \ln L(a,b)}{\partial b}=-\dfrac{n}{b-a}=0\end{cases}$$

不能求解。

设$x_{(1)}=min(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_{(n)}=max(x_1, x_2, \dots, x_n)$

因为$a \le x_1, x_2, \dots, x_n \le b$等价于$a \le x_{(1)} < x_{(n)} \le b$，于是

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le b \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

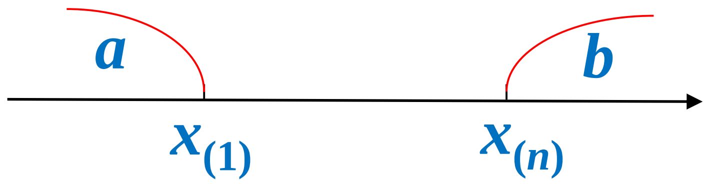
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_{(1)}, b \ge x_{(n)} \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

a,b的取值范围

因此，a 越大、 b 越小, 似然函数L越大。

一. 最大似然估计

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a\le x_{(1)},b\ge x_{(n)}\\ 0 & ,\text{其它}\end{cases}$$



对于满足$a\le x_{(1)}$, $x_{(n)}\le b$的任意a,b有

$$L(a,b)=\frac{1}{(b-a)^n}\le\frac{1}{(x_{(n)}-x_{(1)})^n}$$

即$L(a,b)$在$a=x_{(1)}$, $b=x_{(n)}$时，取最大值$(x_{(n)}-x_{(1)})^{-n}$

$$L(a,b)=\frac{1}{(b-a)^n}\le\frac{1}{(x_{(n)}-x_{(1)})^n}$$

因此a,b的最大似然估计值为

$$\hat{a}=x_{(1)}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \hat{b}=x_{(n)}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

最大似然估计量为

$$\hat{a}=X_{(1)}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n),\quad \hat{b}=X_{(n)}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

矩估计法和最大似然估计法的比较

1. 矩估计法对总体分布要求较少；

2. 最大似然法要求知道总体分布(分布律或密度)；

3. 两种方法的结果有时是一样的，有时有差别，最大似然估计相对来说有更多的优良性。

对于同一参数，用不同的估计方法求出的估计量可能不相同。

问题：采用哪一个估计量好?

设总体$X\sim F(x,\theta)$，其中θ为未知参数，$X_1, X_2,\ldots, X_n$为来自该总体的样本，$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为θ的一个估计量。

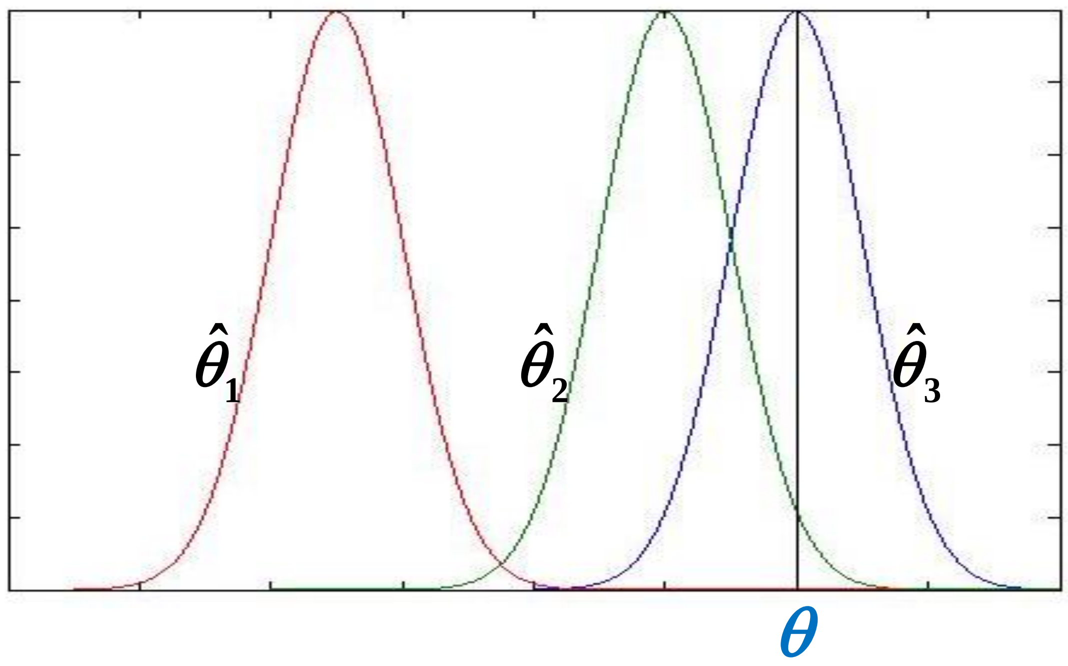
估计量 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 是一个随机变量

当样本$(X_1, \ldots, X_n)$有观测值$(x_1, \ldots, x_n)$时，估计值为 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$

而当样本$(X_1, \ldots, X_n)$有观测值$(y_1, \ldots, y_n)$时，估计值为 $\hat{\theta}(y_1,\cdots,y_n)$

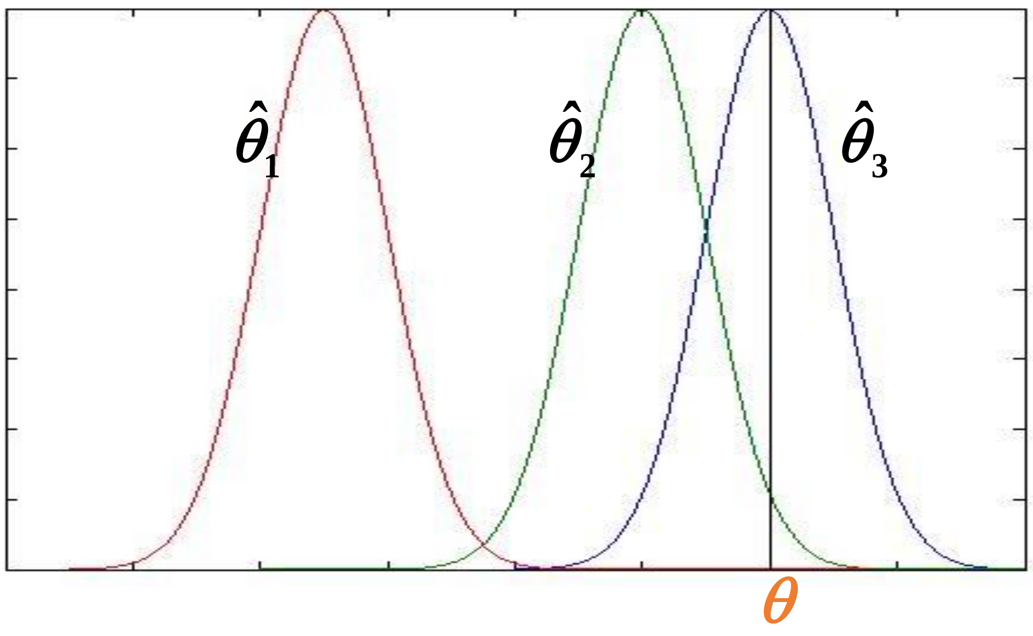
二. 估计量的评选标准

由不同的观测结果，就会求得不同的参数估计值。因此评价一个估计量的好坏，不能仅仅依据一次试验的结果来判断，而必须根据估计量的分布从整体上来做评价。



二. 估计量的评选标准 — 无偏性

当样本值取不同的观测值时，希望相应的估计值在未知参数真值附近摆动，而它的均值与未知参数的真值的偏差越小越好。当这种偏差为0时，就导致无偏性这个标准。



二. 估计量的评选标准 — 无偏性

定义1 (无偏性)：设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为未知参数θ的估计量，若对任意的$\theta\in\Theta$， Θ为参数空间，都有

$$E\left(\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\right)=\theta$$

则称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的无偏估计量 。

二. 估计量的评选标准 — 无偏性

记 $E\left(\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)\right)-\theta=b_n$，称$b_n$为估计$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 的偏差，如果$b_n\neq 0$，称 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为参数θ的有偏估计。

若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[E\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)-\theta\right]=0$ 称 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为参数θ的渐近无估计。

当样本容量n充分大时，可把渐近无偏估计视作无偏估计。

对于无偏估计量，单次的估计值相对于真值，可能偏大，也可能偏小，它无法说明一次估计所产生的偏差，但反复将这一估计量使用多次，平均来说其偏差为0。

无偏估计量仅在多次重复使用时才显示其优越性。

例6.设总体X的k阶原点矩存在，记其为μ_k，$X_1, X_2, \ldots, X_n$为来自总体X的样本，试证明不论总体服从什么分布，样本k阶矩

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

是总体k阶矩μ_k的无偏估计量。

解：由于

$$E(A_k) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = E(X^k) = \mu_k$$

因此样本k阶矩是总体k阶矩的无偏估计量。

特别，当$k=1$时，样本均值 $\bar{X}$是总体均值$E(X)$的无偏估计。

例7. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体X的一个样本，证明：不论总体X服从什么分布，若总体方差$D(X)=\sigma^2$存在，则样本二阶中心矩 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是总体方差σ^2的有偏估计，而样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$是总体方差$\sigma^2$的无偏估计。

证明：由于 $S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\bar{X})^2=\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2]$

其中$\mu=EX$。

所以有 $E(S_n^2)=\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2-nE(\bar{X}-\mu)^2]=\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}]=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

而$E(S^2)=\frac{n}{n-1}E(S_n^2)=\sigma^2$　　这正是称S^2为样本方差的原因。

例8. 设总体X的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

其中$\theta>0$为未知参数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$为来自总体X的样本。

试证: $\bar{X}$ 和$nU=n\{\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)\}$都是$\theta$的无偏估计量。

解： 因为 $E\bar{X}=EX=\theta$ 故$\bar{X}$ 是θ的无偏估计

易求得X的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

Z的分布函数 $F(u)=1-[1-F_X(u)]^n$

对其求导数得到Z的密度函数为：

$$f_U(u)=F'(u)=n[1-F_X(u)]^{n-1}f_X(u)$$

$$=\begin{cases} n[1-(1-e^{-u/\theta})]^{n-1}\dfrac{1}{\theta}e^{-u/\theta}, & u>0 \\ 0, & u\le 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}u}, & u>0 \\ 0, & u\le 0 \end{cases}$$

$$F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-x/\theta}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$$f(x,\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

Z的密度函数为$f_U(u)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}u}, & u>0\\ 0, & u\le 0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta/n}e^{-\frac{1}{\theta/n}u}, & u>0\\ 0, & u\le 0\end{cases}$

指数分布

$$E(U)=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_U(u)du=\int_0^{+\infty}u\frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}u}du=\frac{\theta}{n}$$

由指数分布的性质知：$E(U)=\dfrac{\theta}{n}$

故有：$E(nU)=nE(U)=n\dfrac{\theta}{n}=\theta$

因此，nU也是θ的无偏估计量。

例9. 设$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自总体X的样本，总体均值为$\mu=EX$，证明$\bar{X}$与$\bar{X}'$都是μ的无偏估计。

其中 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad \bar{X}'=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i \qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$

证明：由于 $E\bar{X}=\mu$

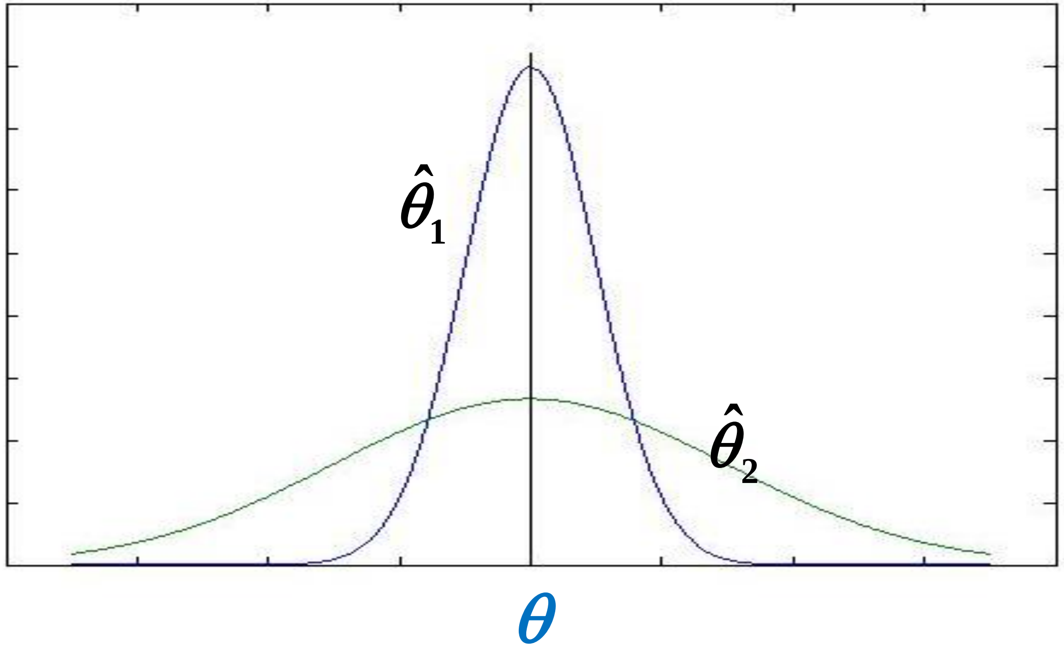
$$E\bar{X}'=E\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i EX_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu=\mu\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\mu$$

所以都是无偏估计。

二. 估计量的评选标准 — 有效性

一个参数往往有不止一个无偏估计，若 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是参数 θ 的无偏估计量，比较 $D(\hat{\theta}_1)$ 和 $D(\hat{\theta}_2)$ 的大小来决定二者谁更优。

无偏估计以方差小者为好, 由此引进有效性这一概念。

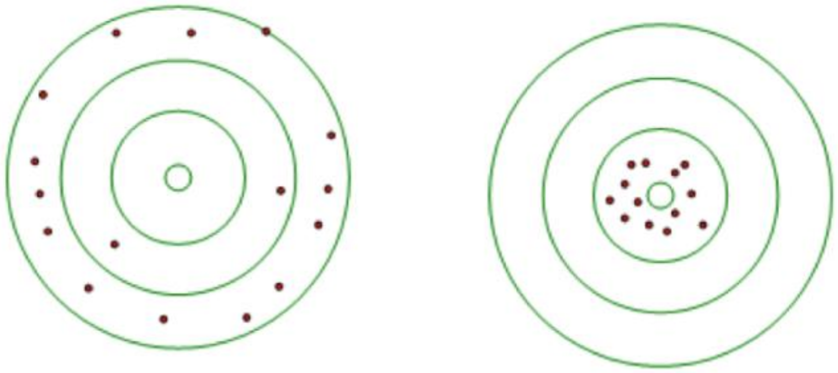


设 $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n),\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是参数θ的无偏估计量

若对任意$\theta\in\Theta$，有

$$D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$$

且至少对某一个$\theta\in\Theta$上式中的不等号成立。则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效。



例10.设总体X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

其中$\theta>0$为未知参数，$X_1, X_2, \dots, X_n$为来自总体X的样本，$n>1$。

试比较：$\bar{X}$和$nU=n\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n)\}$的有效性。

解：由例2知：$\bar{X}$ 和nU都是θ的无偏估计量。

且$U=\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$的密度函数为 $f_U(u)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}u}, & u>0\\ 0, & u\le 0\end{cases}$

二. 估计量的评选标准 — 有效性

U 的密度函数为 $f_U(u)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}u}, & u>0\\ 0, & u\le 0\end{cases}$

由 $D(X)=\theta^2$ 得 $D(\bar{X})=\dfrac{1}{n}D(X)=\dfrac{\theta^2}{n}$

又由 $D(U)=\dfrac{\theta^2}{n^2}$ 得 $D(nU)=n^2D(U)=n^2\cdot\dfrac{\theta^2}{n^2}=\theta^2$

因此，当$n>1$时，$D(nU)>D(\bar{X})$ 即:$\bar{X}$ 比nU有效。

二. 估计量的评选标准 — 有效性

例11. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体X的样本，总体均值为$\mu=EX$，比较$\bar{X}$与$\bar{X}'$的有效性。

其中 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \qquad \bar{X}'=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i \qquad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$

解：例9中已经证明$\bar{X}$与$\bar{X}'$都是μ的无偏估计。

$$\because \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=\sum_{i=1}^{n}[(\alpha_i-\frac{1}{n})+\frac{1}{n}]^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n}$$

$$\therefore D(\bar{X}')=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 D(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sigma^2\geq\frac{\sigma^2}{n}=D(\bar{X})$$

等号成立当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\frac{1}{n}$ **所以$\bar{X}$比$\bar{X}'$有效。**

二. 估计量的评选标准 — 相合性

总体参数θ的点估计 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 与样本容量n有关，前面讲的无偏性和有效性都是在样本容量n固定的前提下给出的点估计的评价标准。

当用$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$去估计$\theta$时，自然要求当$n$越来越大时，一个估计量的值越来越接近待估参数$\theta$的真值，这就是相合性的评价标准。

二. 估计量的评选标准 — 相合性

定义 设 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体分布中未知参数θ的估计量，若对于任意$\theta \in \Theta$，Θ为参数空间，若对于任意$\theta \in \Theta$都满足对于任意ε>0，有

$$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) \xrightarrow{P} \theta$$

依概率收敛

则称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为参数θ的相合估计量。

也说估计 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 具有相合性。

即对于任意$\theta \in \Theta$ 都满足：对于任意ε>0，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1 \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon\} = 0$$

二. 估计量的评选标准 — 相合性

根据大数定律，样本k阶矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 是相应总体k阶矩 $\mu_k=E(X^k)$ 的相合估计(假定被估计的总体k阶矩存在)。

若待估参数是θ=g(μ_1, μ_2, …, μ_k)，其中g为连续函数，则θ=g(μ_1, μ_2, …, μ_k)的矩估计量 $\hat{\theta}=g(A_1,A_2,\cdots,A_k)$ 是θ=g(μ_1, μ_2, …, μ_k)的相合估计量。

特别，样本均值 $\bar{X}$ 与样本二阶中心矩 S_n^2 分别是总体均值EX与总体方差DX的相合估计。

例12.设总体$X\sim U(0,\theta)$，其中$\theta>0$为未知参数，X_1，X_2，…，X_n为来自总体X的样本。令$X_{(n)}=max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.证明：$X_{(n)}$是参数$\theta$的有偏估计，但是它是相合的。

证明：易得 $X_{(n)}$的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

所以 $EX_{(n)}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\theta}x\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\dfrac{n}{n+1}\theta$

所以$X_{(n)}$是参数θ的有偏估计。

二. 估计量的评选标准 — 相合性

对于任意ε>0

$$P\{|X_{(n)}-\theta|<\varepsilon\}=\int_{|z-\theta|<\varepsilon} f_{X_{(n)}}(z)dz=\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} f_{X_{(n)}}(z)dz$$

$$=\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta} nz^{n-1}/\theta^n\, dz=1-\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_{(n)}-\theta|<\varepsilon\}=\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n\right]=1$$

即：$X_{(n)}$是参数θ的相合估计。

二. 估计量的评选标准 — 相合性

相合性是对一个估计量的基本要求，若估计量不具有相合性，那么无论样本容量n取多大，都不能将θ 估计的足够精确，这样的估计量是不可取的。

无偏性、有效性和相合性是评价估计量的一些基本标准，但不是唯一的标准。

作业：1(MLE),4,7,9,10,11

第19讲

谢谢观看