第二章　线性方程组

线性方程组的理论是线性代数的重点研究内容. 通过上一章对高斯消元法的讨论, 我们已经基本解决了线性方程组理论三个基本问题中的两个, 即方程组解的判别问题和求解问题. 在本章我们将重点研究最后一个问题——解的结构. 为此, 我们将引入 n 元向量的概念, 定义它的线性运算, 研究向量的线性相关性, 并最终解决线性方程组解的结构问题.

2.1　向量的线性相关性

通过第一章的讨论我们已经知道, 线性方程组的一个解就是一个有序数组. 例如, 二元线性方程组的一个解就是一个 2 元有序数组, 三元线性方程组的一个解就是一个 3 元有序数组, n 元线性方程组的一个解就是一个 n 元有序数组. 所谓线性方程组解的结构实际上是指解与解的关系, 于是问题就归结为研究有序数组之间的关系.

交互实验 2.1.1

在实际生活中, 也会经常涉及 n 元有序数组. 例如, 电子显示屏幕的颜色都是由一个 3 元有序数组表示的, 一般会用 $(255, 0, 0)$ 表示红色, $(0, 255, 0)$ 表示绿色, $(0, 0, 255)$ 表示蓝色, 白色则用有序数组 $(255, 255, 255)$ 来表示 (图 2.1.1). 扫描交互实验 2.1.1 的二维码, 通过选择不同的 3 元有序数组找到你最喜欢的颜色.

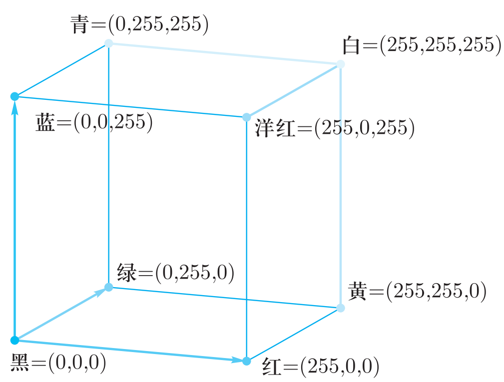

图 2.1.1　颜色立方体

此外, 许多理论研究会经常涉及有序数组. 例如, 一个线性方程中未知数的系数与常数项即对应一个有序数组, 一个矩阵的一行或一列也对应一个有序数组, 一个数列中的前 n 项对应一个 n 元有序数组, 建立了直角坐标系的平面上一条有向线段对应一个 2 元有序数组, 一张采购清单对应

一个有序数组, 体育比赛的名次排列也对应一个有序数组, 这种例子不胜枚举. 由此可见, 对有序数组进行深入研究十分必要.

2.1.1 向量的定义及运算

在解析几何中, 有向线段也称为向量或矢量, 从代数的角度看, 有向线段就是 2 元或 3 元有序数组. 因此, 借用解析几何中的叫法, 把有序数组称为向量.

定义 2.1.1 设 F 是一个数域, 由 F 中 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 顺序构成的一个 n 元有序数组称为数域 F 上的一个 n **元向量** (或 n **维向量**), 记为

$$\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right), \tag{2.1.1}$$

称 a_i 为**向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量** $(i=1,2, \cdots, n)$.

向量一般用小写黑体希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \cdots$ 表示, 而其分量则用小写白体英文字母 $a, b, c, \cdots$ 表示.

向量既可写成 (2.1.1) 的形式, 称之为**行向量**, 也可写成下列形式:

$$\boldsymbol{\alpha}=\left[\begin{array}{c}a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n\end{array}\right],$$

称之为**列向量**. 在很多情况下, 人们把行向量视为行矩阵, 把列向量视为列矩阵. 这样, 列向量可表示成

$$\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)^{\mathrm{T}} .$$

根据向量在理论和实际中的作用以及它与矩阵的相似之处, 我们作出如下规定:

定义 2.1.2 设 $\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1, a_2, \cdots, a_s\right), \boldsymbol{\beta}=\left(b_1, b_2, \cdots, b_t\right)$. 若 $s=t$ 且 $a_i=b_i$ $(i=1,2, \cdots, s)$, 则称**向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等**, 记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

定义 2.1.3 设 $\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right), \boldsymbol{\beta}=\left(b_1, b_2, \cdots, b_n\right)$ 是数域 F 上的两个 n 元向量, 则称向量

$$\left(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n\right)$$

为**向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和**, 记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

定义 2.1.4 设 $\boldsymbol{\alpha}=\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$ 是数域 F 上 n 元向量, $k \in F$, 称向量

$$\left(k a_1, k a_2, \cdots, k a_n\right)$$

为 k **与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积**, 记为 $k\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{\alpha}k$.

向量的加法与数乘运算统称为向量的**线性运算**.

例 2.1.1　设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是数域 F 上任一 n 元向量, 则

$$0\boldsymbol{\alpha}=(0,0,\cdots,0),$$
$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n),$$

称分量全为零的向量 $(0,0,\cdots,0)$ 为**零向量**, 记为 $\boldsymbol{\theta}$ 或 $\mathbf{0}$. 称向量 $(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**, 记为 $-\boldsymbol{\alpha}$. 于是

$$0\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta},\quad (-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}.$$

显然, 对任一 $k\in F$, 还有 $k\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}$. 利用负向量可引入**向量的减法**:

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}).$$

在平面 π 上建立直角坐标系 Oxy, 如图 2.1.2 所示. 设 $\boldsymbol{a}$ 是 π 上任一条有向线段, 把 $\boldsymbol{a}$ 的起点平移到原点 O, 则其终点坐标 (a_1,a_2) 唯一确定. 这样, 有向线段 $\boldsymbol{a}$ 唯一对应一个 2 元向量 (a_1,a_2). 设 $\boldsymbol{b}$ 是 π 上另一有向线段, 对应 2 元向量 (b_1,b_2). 有向线段 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 可按平行四边形对角线法求和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 利用平面解析几何的知识不难证明: 有向线段 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 对应的 2 元向量恰为

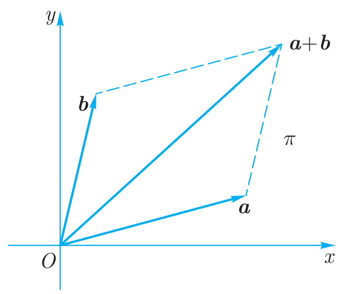

图 2.1.2　有向线段的加法

$$(a_1+b_1,a_2+b_2),$$

即向量 (a_1,a_2) 与 (b_1,b_2) 的和. 向量的数乘与有向线段与实数的乘法也有类似的关系. 由此可见, 向量的线性运算的确是几何运算的推广和延拓.

根据定义可以验证, 向量的线性运算满足下列规则:

性质 2.1.1　设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是数域 F 上任意三个 n 元向量, $k,l\in F$, 则有

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;　(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\alpha}$;　(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\theta}$;

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;　(6) $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$;

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha})$;　(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

除此之外, 向量的线性运算还有下述性质:

(1) 若 $k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$, 则 $k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$;

(2) 向量方程 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}$.

若把向量看成行矩阵或列矩阵, 则上述性质显然都是成立的.

2.1.2 向量的线性相关性

向量的线性相关性是通过向量的线性运算引入的, 为此我们首先给出

定义 2.1.5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是数域 F 上 m 个 n 元向量, $k_1, k_2,\cdots,k_m\in F$, 称向量

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的**一个线性组合**. 此时, 也称**向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出** (或**线性表示**).

例 2.1.2 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1),$$

问 $\boldsymbol{\beta}=(3,2,1)$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出? 若能表出, 求相应的表达式.

解 设

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3, \tag{2.1.2}$$

由向量相等的定义可得

$$\begin{cases} x_1 & =3, \\ x_1+x_2 & =2, \\ x_1+x_2+x_3 & =1, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

显然, (2.1.2) 式成立的充要条件是线性方程组 (2.1.3) 有解, 且其每一个解都是使 (2.1.2) 式成立的一组系数.

容易验证方程组 (2.1.3) 有解 $x_1=3,x_2=-1,x_3=-1$, 所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出, 且 $\boldsymbol{\beta}=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 扫描交互实验 2.1.2 的二维码, 拖动滑动条验证所得结果.

交互实验 2.1.2

在上例中, 我们将 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出的问题转化为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 是否有解的问题, 这里 $\boldsymbol{A}$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为列的矩阵, $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 构成的列矩阵. 线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解是否唯一还可判别线性表出的方式是否唯一. 这个方法具有普遍性.

在解析几何中, 同一平面上的两条有向线段 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 可能具有的最简单关系是共线 (即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行于同一直线), 此时必有 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=l\boldsymbol{a}$,

即存在两个不全为零的实数 k_1, k_2, 使得

$$k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}. \tag{2.1.4}$$

对空间中的三条有向线段 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, 它们可能具有的最简单关系是共面 (即 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 平行于同一平面), 此时必有 $\boldsymbol{a} = n_1\boldsymbol{b} + n_2\boldsymbol{c}$ 或 $\boldsymbol{b} = l_1\boldsymbol{a} + l_2\boldsymbol{c}$ 或 $\boldsymbol{c} = m_1\boldsymbol{a} + m_2\boldsymbol{b}$, 即存在三个不全为零的实数 k_1, k_2, k_3, 使得

$$k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}. \tag{2.1.5}$$

由 (2.1.4)、(2.1.5) 两式可见, 共线的有向线段与共面的有向线段具有相似的代数特征. 因此, 向量间的线性关系可类似地定义.

定义 2.1.6 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是数域 F 上 m 个 n 元向量. 若存在 m 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\theta}, \tag{2.1.6}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关**. 否则, 称该向量组**线性无关**.

由定义可知在验证向量组线性相关时, 只需找到一组不全为零的数使 (2.1.6) 式成立即可.

例 2.1.3 在一个向量组中, 若有一个部分组 (即由其中一部分向量构成的向量组) 线性相关, 则整个向量组也线性相关.

证 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 中有某一部分组线性相关. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s < m)$ 线性相关, 则存在 s 个不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{\theta},$$

于是得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s + 0\boldsymbol{\alpha}_{s+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\theta},$$

因 $k_1, k_2, \cdots, k_s, 0, \cdots, 0$ 不全为零, 故由定义知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

上例的结论也可表述为: 线性无关向量组的任一部分组都线性无关.

例 2.1.4 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一个向量, 证明: 当 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ 时, $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关; 当 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\theta}$ 时, $\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证 因 $\boldsymbol{\alpha}$ 的线性组合为 $k\boldsymbol{\alpha}$, 由性质 2.1.1 可知, $k\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ 必得 $k = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$, 故结论得证.

由例 2.1.3 与例 2.1.4 得: 包含零向量的向量组线性相关.

例 2.1.5 讨论向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3),\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,1),\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)$$

的线性相关性.

解 令

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}, \tag{2.1.7}$$

由向量相等的定义, 对比等号两边向量的分量可得

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3=0, \\ 3x_1+\ \ x_2+x_3=0. \end{cases}$$

显然, 存在不全为零系数使 (2.1.7) 式成立的充要条件是上述齐次线性方程组有非零解. 解这个齐次线性方程组可得一个非零解: $x_1=-1, x_2=-1, x_3=4$. 从而

$$-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta}.$$

交互实验 2.1.3

在上例中, 我们将向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是否线性相关的问题转化为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 是否有非零解的问题, 这里 $\boldsymbol{A}$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为列的矩阵. 这一方法同样具有普遍性. 扫描交互实验 2.1.3 的二维码, 拖动滑动条找到更多可能的线性组合使 (2.1.7) 式成立.

例 2.1.6 m 个 n 元向量 $(m>n)$ 线性相关.

证 任取 m 个 n 元向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m>n)$, 设

$$\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}),\quad 其中\ j=1,2,\cdots,m,$$

令

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta}, \tag{2.1.8}$$

则有

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0, \end{cases} \tag{2.1.9}$$

已知 $m>n$, 故由推论 1.1.1 可得: 齐次方程组 (2.1.9) 有非零解. 于是, 存在不全为零的系数使 (2.1.8) 式成立, 即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

一个向量组若不线性相关则线性无关. 因此线性相关的验证方法也适用于验证线性无关. 也就是说, 如果线性相关对应齐次线性方程组有非零解, 那么线性无关则对应齐次线性方程组没有非零解 (亦即只有零解). 向量组的线性无关有一个易于使用的等价条件:

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是: 如果 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta}$, 那么 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.

例 2.1.7 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,$$

证明: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

证 令

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\theta},$$

则有

$$(x_1+x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(2x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\theta},$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 故由上式得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2 \qquad\;\; =0, \\ 2x_1+\qquad x_3=0, \end{cases}$$

容易验证上述齐次方程组只有零解, 即 $x_1=x_2=x_3=0$. 于是, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

下面给出判别向量组线性相关的一个基本结论.

定理 2.1.1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\ (m\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是: 至少存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (1\leqslant i\leqslant m)$ 可由其余向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.

证 充分性: 假设 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出, 则存在 $m-1$ 个数 $k_1,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_m\in F$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha}_i=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

整理后得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-\boldsymbol{\alpha}_i+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta},$$

因上式中系数 $k_1,\cdots,k_{i-1},-1,k_{i+1},\cdots,k_m$ 不全为零, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

必要性: 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则由定义可知, 存在 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m\in F$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta},$$

设 $k_i\neq 0\ (1\leqslant i\leqslant m)$, 则上式可改写为

$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{k_1}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}-\cdots-\frac{k_m}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

由此可得 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由其余向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.

例 2.1.8 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_i=(\underbrace{0,\cdots,0}_{i-1\text{个}},1,0,\cdots,0)(i=1,2,\cdots,n)$ 是 n 个 n 元向量, 称之为 **n 元基本向量组**. 则对任一 n 元向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 均有 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性相关.

证 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表出. 由定理 2.1.1 可知, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性相关.

关于基本向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$, 容易证明它们是线性无关的.

上一例中隐含了三点特别之处: $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性无关; $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性相关; $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表出. 在一般情况下我们有

定理 2.1.2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出, 且表示法唯一.

证 因 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 故存在 $m+1$ 个不全为零的数 $l,k_1,k_2,\cdots,k_m\in F$, 使得

$$l\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta},$$

若 $l=0$, 则 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零且

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta},$$

由此可得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. 这与已知条件矛盾, 所以 $l\neq 0$. 于是

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{l}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{l}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{l}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.

设

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

且

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

两式相减得

$$(k_1-l_1)\,\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\,\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_m-l_m)\,\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\theta},$$

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 故有

$$k_1-l_1=0,\quad k_2-l_2=0,\ \cdots,\quad k_m-l_m=0,$$

即 $k_1=l_1,k_2=l_2,\cdots,k_m=l_m$. 说明 $\boldsymbol{\beta}$ 只有唯一一种方式被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.

在有些情况下, 利用与其他向量组进行对比, 也可以验证向量组的线性相关性. 因此, 我们有必要推广线性表出的概念.

定义 2.1.7　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是数域 F 上的两组 n 元向量. 若每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 均可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出, 则称**向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出**. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可相互线性表出, 则称**向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$, $\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 等价**, 记为

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}.$$

例 2.1.9　讨论下列向量组之间的关系:

(1) $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1)$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0)$;

(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1)$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2),\boldsymbol{\beta}_2=(2,1)$.

解　(1) 因 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+0\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=0\boldsymbol{\varepsilon}_1+0\boldsymbol{\varepsilon}_2$, 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 线性表出. 而 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出, 故 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出. 所以, $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不等价.

(2) 因 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_1-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2$, 故 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线

性表出. 又显然 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 线性表出, 故 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价.

扫描交互实验 2.1.4 的二维码, 拖动滑动条试将一个向量组中的向量, 用另一个向量组中的向量线性表出.

交互实验 2.1.4

性质 2.1.2 设有 3 个 n 元向量组

① $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$, ② $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$, ③ $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t\}$,

则向量组的等价具有

反身性: ①≅①;

对称性: 若 ①≅②, 则 ②≅①;

传递性: 若 ①≅②, ②≅③, 则 ①≅③.

性质 2.1.3 设向量组 ①: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 ②: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是数域 F 上的两组 n 元向量. 向量组 ① 可由向量组 ② 线性表出的充要条件是存在 F 上的 $t\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$, 使得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t]\boldsymbol{C}.$$

证 充分性可由分块矩阵乘法直接得证. 下面证明必要性.

假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出, 即有

$$\boldsymbol{\alpha}_j=c_{1j}\boldsymbol{\beta}_1+c_{2j}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+c_{tj}\boldsymbol{\beta}_t,$$

其中, $c_{ij}\in F(1\leqslant i\leqslant t,1\leqslant j\leqslant s)$.

令 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$, 利用分块矩阵的乘法, 上式可改写为

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t]\boldsymbol{C}. \tag{2.1.10}$$

在本节的最后, 我们给出向量组线性相关的一个充分条件:

定理 2.1.3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是数域 F 上的一组 n 元向量. 若存在数域 F 上的另一组 n 元向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$, 使得

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出,

(2) $s>t$,

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

证 根据性质 2.1.3, 由定理的条件 (1) 可知存在 $t\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$, 使得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t]\boldsymbol{C}, \tag{2.1.11}$$

因为 $s>t$, 由推论 1.1.1 可知, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{CX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

任取其非零解 $(k_1, k_2, \cdots, k_s)^{\mathrm{T}}$, 有

$$\boldsymbol{C}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{2.1.12}$$

将 (2.1.11) 式两边同时右乘 $(k_1, k_2, \cdots, k_s)^{\mathrm{T}}$, 并利用 (2.1.12) 式可得

$$\begin{aligned} k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s &= [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} \\ &= [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t]\boldsymbol{C}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

从而, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

推论 2.1.1 *设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 是数域 F 上的两组 n 元向量. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $s \leqslant t$.*

2.2 向量组的秩

线性组合、线性表出、线性相关以及线性无关是向量组相关性理论的基本概念, 而向量组线性相关性的判别则是一个核心问题. 为了更好地解决这个问题, 本节引入两个辅助性概念: 向量组的秩与极大无关组. 通过对它们的研究, 特别是揭示其与矩阵的秩的联系, 不仅得到了判别线性相关性的新方法, 而且还极大地拓展了向量理论的应用领域.

2.2.1 向量组的秩

如果我们遇到两个向量组, 一个线性相关, 而另一个线性无关, 那么我们很容易区分它们, 也容易理解它们所产生的不同作用. 但是, 如果我们面对两个都线性相关的向量组, 却可能有着完全不同的情形.

例 2.2.1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,5,4), \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,1,-2)$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1 = (0,1,1), \boldsymbol{\beta}_2 = (1,0,1), \boldsymbol{\beta}_3 = (1,1,0), \boldsymbol{\beta}_4 =$

$(1,1,1)$ 都线性相关, 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为行系数确定齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ 3x_1+5x_2+4x_3=0, \\ x_1+x_2-2x_3=0, \end{cases}$$

以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为行系数确定齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_2+x_3=0, \\ x_1+x_3=0, \\ x_1+x_2=0, \\ x_1+x_2+x_3=0, \end{cases}$$

容易验证, 前一个齐次方程组有非零解, 而后一个齐次方程组却只有零解. 为什么会出现上述情况呢?

我们注意到, 上例中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性无关部分组至多包含 2 个向量, 而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 却有包含 3 个向量的线性无关部分组. 也许两个向量组在线性相关“程度”上的差异是造成上述情况的根本原因. 为此, 我们需要寻找一个能反映向量组线性相关“程度”强弱的数量指标.

定义 2.2.1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 元向量. 若其中存在 r 个向量线性无关, 但任意 $r+1$ 个向量都线性相关, 则称**向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为** r, 记为 $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$.

显然, 向量组的秩就是最大的线性无关部分组包含的向量个数. 秩越大, 线性无关的“程度”越强, 而线性相关的“程度”就越弱. 因此, 向量组的秩就可作为衡量向量组线性相关“程度”强弱的一个数量指标.

定理 2.2.1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是: $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}<m$.

为了给出求向量组秩的方法, 我们再引入一个有关的概念.

定义 2.2.2 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意 r 个线性无关的向量都称为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的**极大线性无关部分组**, 简称为**极大无关组**.

在例 2.2.1 中, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2, 且其中任意 2 个向量都构成极大无关组. 而向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的秩为 3, 且其中任意 3 个向量都构成极大无关组.

性质 2.2.1　向量组与其任一极大无关组都等价.

证　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r, 任取其一个极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$, 要证

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\}.$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个部分组, 故 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出. 下面证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出.

任取 $\boldsymbol{\alpha}_j(1\leqslant j\leqslant m)$, 若 $\boldsymbol{\alpha}_j\in\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出; 若 $\boldsymbol{\alpha}_j\notin\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\}$, 则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r 可得: $\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关. 根据定理 2.1.2, $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出. 于是, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出.

综上, 结论得证.

定理 2.2.2　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出, 则

$$\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\leqslant\mathrm{r}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}.$$

证　设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大无关组, 则 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出. 同样, 设 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots$, $\boldsymbol{\beta}_{j_p}$ 是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的一个极大无关组, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_p}$ 线性表出. 又已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出, 经等量代换可得 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_p}$ 线性表出. 又因 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, 故由推论 2.1.1 可得 $r\leqslant p$. 而极大无关组包含的向量个数即为整个向量组的秩, 所以

$$\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\leqslant\mathrm{r}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}.$$

这个命题在讨论矩阵的秩时非常有用, 其证明过程充分显示了极大无关组的作用. 关于极大无关组, 它还有下述易于使用的等价定义:

定义 2.2.3　设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个部分组. 若

(1) $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关,

(2) 每个 $\boldsymbol{\alpha}_j$ $(j=1,2,\cdots,m)$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出,

则 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的**极大无关组**.

上述说法通过检验 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r 即可获知其正确性.

例 2.2.2 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$. 假设每个 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=s+1,s+2,\cdots,m)$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 则

$$\mathrm{r}\left\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\right\}=\mathrm{r}\left\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right\}.$$

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r, $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是其一个极大无关组, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=s+1,s+2,\cdots,m)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 故 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出. 于是任意 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出. 根据假设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, 故由极大无关组的等价定义, 可知 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 也是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组. 于是

$$\mathrm{r}\left\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right\}=r.$$

2.2.2 向量组的秩与矩阵秩的关系

向量组的秩是刻画向量组的线性相关性的一个重要指标. 通过与矩阵的秩的联系, 我们将得到求向量组的秩的一种实用方法.

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

令

$$\boldsymbol{\gamma}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\qquad \text{其中 } i=1,2,\cdots,m,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\qquad \text{其中 } j=1,2,\cdots,n,$$

我们称 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ **的行向量组**, 称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ **的列向量组**. 此时, $\boldsymbol{A}$ 可记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_1\\ \boldsymbol{\gamma}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\gamma}_m\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n].$$

我们首先讨论阶梯形矩阵的秩与其行向量组的秩之间的关系.

性质 2.2.2　阶梯形矩阵的秩等于其行向量组的秩.

证　任取一个秩为 r 的 $m\times n$ 阶梯形矩阵 $\boldsymbol{T}$. 不妨设

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&b_{1j_1}&\cdots&b_{1j_2}&\cdots&b_{1j_r}&\cdots&b_{1n}\\ 0&\cdots&0&0&\cdots&b_{2j_2}&\cdots&b_{2j_r}&\cdots&b_{2n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&b_{rj_r}&\cdots&b_{rn}\\ 0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix},$$

其中, $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n, b_{1j_1},b_{2j_2},\cdots,b_{rj_r}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的主元. 令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_1&=(0,\cdots,0,b_{1j_1},\cdots,b_{1j_2},\cdots,b_{1j_r},\cdots,b_{1n}),\\ \boldsymbol{\gamma}_2&=(0,\cdots,0,0,\cdots,0,b_{2j_2},\cdots,b_{2j_r},\cdots,b_{2n}),\\ &\cdots\\ \boldsymbol{\gamma}_r&=(0,\cdots,0,0,\cdots,0,0,\cdots,0,b_{rj_r},\cdots,b_{rn}),\\ \boldsymbol{\gamma}_{r+1}&=\cdots=\boldsymbol{\gamma}_m=(0,\cdots,0,\cdots,0,0,\cdots,0,\cdots,0).\end{aligned}$$

容易验证, $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_r$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关. 由此得, $\boldsymbol{T}$ 的行向量组的秩为 r.

性质 2.2.3　矩阵的初等行变换不改变行向量组的秩.

证　只需证明作一次初等行变换不改变矩阵行向量组的秩即可.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组. 对 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等行变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$, 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组.

容易验证, 不管对 $\boldsymbol{A}$ 作哪种初等行变换, 均有 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 线性表出, 根据定理 2.2.2

$$\mathrm{r}\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\}\leqslant\mathrm{r}\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m\},$$

因为初等行变换是可逆的, 所以对 $\boldsymbol{B}$ 作一次相应的初等行变换可还原为 $\boldsymbol{A}$. 利用上述结果可得

$$\mathrm{r}\left\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m\right\} \leqslant \mathrm{r}\left\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\right\},$$

于是

$$\mathrm{r}\left\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m\right\} = \mathrm{r}\left\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m\right\}.$$

下面给出向量组的秩与矩阵的秩的关系:

定理 2.2.3 矩阵的秩等于其行向量组的秩, 也等于其列向量组的秩.

证 任取矩阵 $\boldsymbol{A}$, 并将它用初等行变换化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{T}$, 则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\boldsymbol{T})$. 另一方面, 根据性质 2.2.3

$$\boldsymbol{A} \text{ 的行向量组的秩} = \boldsymbol{T} \text{ 的行向量组的秩},$$

再根据性质 2.2.2,

$$\boldsymbol{T} \text{ 的行向量组的秩} = \mathrm{r}(\boldsymbol{T}),$$

综合上述情况即得, $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩.

因为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行向量组, 所以由上述结论可得: $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩等于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的秩. 而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩也等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

根据这个定理, 可以很方便地利用矩阵的秩来计算向量组的秩.

例 2.2.3 判断向量组

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = (-1,-4,5,0), \boldsymbol{\gamma}_2 = (3,1,7,11), \boldsymbol{\gamma}_3 = (2,3,0,5)$$

的线性相关性.

解 以 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 为行构造矩阵 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \boldsymbol{\gamma}_2 \\ \boldsymbol{\gamma}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 11 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[R_3+2R_1]{R_2+3R_1} \begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -11 & 22 & 11 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+(-\frac{5}{11})R_2}\begin{bmatrix} -1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & -11 & 22 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$. 由此得, $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3\}=2$. 根据定理 2.2.1, $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 线性相关.

利用定理 1.5.1 与定理 2.2.3 可证下述命题:

定理 2.2.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵的充要条件是: $\boldsymbol{A}$ 的行 (列) 向量组线性无关.

下面我们给出求极大无关组的方法:

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是一组 n 元列向量, 以它们为**列**构造矩阵 $\boldsymbol{A}$, 将 $\boldsymbol{A}$ 用初等**行**变换化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1j_1} & \cdots & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_r} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_{2j_2} & \cdots & b_{2j_r} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & b_{rj_r} & \cdots & b_{rm} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $b_{1j_1},b_{2j_2},\cdots,b_{rj_r}$ 是 $\boldsymbol{T}$ 的主元. 可以断言, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 r, 且 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 即是一个极大无关组.

上述论断的第一部分显然成立, 对第二部分只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性无关.

以 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 为列构造矩阵 $\boldsymbol{A}_1$, 则在同样的初等行变换下, $\boldsymbol{A}_1$ 化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{T}_1$

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix} b_{1j_1} & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_r} \\ 0 & b_{2j_2} & \cdots & b_{2j_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rj_r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{T}_1$ 的主元也是 $b_{1j_1},b_{2j_2},\cdots,b_{rj_r}$. 于是

$$\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}\} = \mathrm{r}(\boldsymbol{A}_1) = \mathrm{r}(\boldsymbol{T}_1) = r,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性无关.

例 2.2.4 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,2,3), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,4,-3,6), \boldsymbol{\alpha}_3 = (-2,-6,1,-9)$$
$$\boldsymbol{\alpha}_4 = (1,4,-1,7), \boldsymbol{\alpha}_5 = (4,8,2,9),$$

求该向量组的秩及一个极大无关组, 并用所求极大无关组表示剩余的向量.

解 以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 为列构造矩阵 $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{bmatrix},$$

用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_1,$$

易见 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 3$, 故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3. 又阶梯形中的主元在第 1,2,4 列, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大无关组.

设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_4$, 即 $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 是增广矩阵为 $[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}]$ 的非齐次线性方程组的唯一解. 利用初等行变换将 $\boldsymbol{T}_1$ 化为行简化阶梯形

$$\boldsymbol{T}_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故

$$[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

解得 $x_1=-1, x_2=-1, x_3=0$, 即有 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_4$; 同理可得, $\boldsymbol{\alpha}_5=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_4$.

利用定理 2.2.2, 定理 2.2.3 以及分块矩阵的乘法, 还可以得到下面的结果.

定理 2.2.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times p$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $p\times n$ 矩阵, 则

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}.$$

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$, $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$, $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{p\times n}$, 则由

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n],$$

得

$$\boldsymbol{\gamma}_j=b_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{pj}\boldsymbol{\alpha}_p,\ \text{其中} j=1,2,\cdots,n,$$

由此得向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 线性表出. 根据定理 2.2.2,

$$\mathrm{r}\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n\}\leqslant\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p\},$$

再根据定理 2.2.3, $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

同样的方法可证 $\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

这个定理连同定理 1.4.8、定理 1.6.2 及推论 1.6.3 等都是揭示矩阵运算与矩阵秩的关系的重要结论, 读者应理解并记住它们.

例 2.2.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 并且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

证法一 由于 $\boldsymbol{B}$ 的秩等于 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩, 故只需证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=m$.

已知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$, 故 $\boldsymbol{I}$ 是 m 阶单位矩阵. 根据定理 2.2.5, 可得

$$m=\mathrm{r}(\boldsymbol{I})=\mathrm{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{B}),$$

又 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\leqslant m$. 于是, $\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=m$.

证法二 设 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$, 则

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m],$$

令

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\theta},$$

这里 $\boldsymbol{\theta}$ 是 n 元零列向量. 上式可改写为

$$[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m]\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta},$$

即

$$\boldsymbol{B}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta},$$

已知 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$, 故用 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式两端

$$\boldsymbol{AB}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{A\theta} = \boldsymbol{\theta},$$

由此可得

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

即 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$, 所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

2.3 齐次线性方程组解的结构

本节和下一节将讨论数域 F 上的线性方程组, 即它的系数和常数项都在 F 中, 并在数域 F 上求方程组的解, 即方程组的每个解都是由数域 F 中的数构成的有序数组. 我们将利用数域 F 上的向量组的线性相关性理论研究并解决线性方程组解的结构问题.

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上 $m\times n$ 矩阵, 对 $\boldsymbol{A}$ 按列分块 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$, 则齐次线性方程组

$$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0} \tag{2.3.1}$$

可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\theta}. \tag{2.3.2}$$

称 (2.3.2) 式为**齐次线性方程组** (2.3.1) **的向量表达式**. 于是, 齐次方程组 (2.3.1) 有非零解的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关. 又 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$, 所以有

定理 2.3.1　齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 有非零解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 小于 $\boldsymbol{A}$ 的列数.

这个定理也可叙述为: 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 只有零解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的列数.

为了研究线性方程组解的结构, 我们把 n 元线性方程组的一个解看成一个 n 元列向量, 称为**解向量**.

性质 2.3.1　设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任意两个解向量, $k\in F$, 则有

(1) $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 是此方程组的解向量;

(2) $k\boldsymbol{X}_1$ 是此方程组的解向量.

证　(1) 因 $\boldsymbol{AX}_1=\mathbf{0},\boldsymbol{AX}_2=\mathbf{0}$, 故

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)=\boldsymbol{AX}_1+\boldsymbol{AX}_2=\mathbf{0},$$

所以 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量.

(2) 因 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X}_1)=k(\boldsymbol{AX}_1)=k\mathbf{0}=\mathbf{0}$, 故 $k\boldsymbol{X}_1$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量.

性质 2.3.1 的两个结论可综合为: 若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量, 则 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ 的任意线性组合 $k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量. 并且这个结论可推广为任意有限个解向量的情形.

交互实验 2.3.1

扫描交互实验 2.3.1 的二维码, 利用三元齐次线性方程组的几何意义, 选择解向量的线性组合, 验证性质 2.3.1 中的结论.

在上一节, 我们引入了极大无关组的概念. 通过其等价定义, 可以发现极大无关组在某种程度上反映了向量组的结构. 下面将这一想法推广到齐次线性方程组的解集合中.

定义 2.3.1 设 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的 t 个解向量. 若它们满足

(1) $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_t$ 线性无关,

(2) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任一解向量均可由 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_t$ 线性表出, 则称 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个**基础解系**.

若齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_t$, 则它的一般解可表示为

$$k_1\boldsymbol{X}_1 + k_2\boldsymbol{X}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{X}_t,$$

其中, $k_1, k_2, \cdots, k_t \in F$.

基础解系搭建了齐次线性方程组解集合的结构, 现在的问题是如何寻找齐次线性方程组的基础解系. 下面的定理解决了这个问题.

定理 2.3.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵. 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = r < n$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 存在基础解系, 且基础解系包含 $n-r$ 个解向量.

证 将 $\boldsymbol{A}$ 用初等行变换化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{T}$, 为便于书写, 可设

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 的主元为 $b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{rr}$, 则对应的阶梯形方程组为

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1r}x_r + \cdots + b_{1n}x_n = 0, \\ \qquad b_{22}x_2 + \cdots + b_{2r}x_r + \cdots + b_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad b_{rr}x_r + \cdots + b_{rn}x_n = 0, \end{cases}$$

取 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 为自由未知数, 则有

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1r}x_r = -b_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{1n}x_n, \\ \qquad b_{22}x_2 + \cdots + b_{2r}x_r = -b_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad b_{rr}x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{rn}x_n, \end{cases} \tag{2.3.3}$$

让自由未知数分别取下列 $n-r$ 组值

$$1,0,\cdots,0;0,1,0,\cdots,0;\cdots;0,\cdots,0,1,$$

由方程组 (2.3.3) 相应地求得 $n-r$ 个解向量 (也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量)

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_1=(c_{11},c_{12},\cdots,c_{1r},1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\\
&\boldsymbol{X}_2=(c_{21},c_{22},\cdots,c_{2r},0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\\
&\qquad\cdots\\
&\boldsymbol{X}_{n-r}=(c_{n-r,1},c_{n-r,2},\cdots,c_{n-r,r},0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

下面证明 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$ 就是一个基础解系:

(1) 证明 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$ 线性无关.

以 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$ 为行构造矩阵 $\boldsymbol{C}$, 容易求得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{C})=n-r$, 故

$$\mathrm{r}\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}\}=n-r,$$

所以, $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$ 线性无关.

(2) 证明 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任一解向量均可由 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$ 线性表出.

任取 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解向量 $\boldsymbol{X}_0=(d_1,d_2,\cdots,d_r,d_{r+1},\cdots,d_n)^{\mathrm{T}}$.

令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}_0^*&=\boldsymbol{X}_0-d_{r+1}\boldsymbol{X}_1-d_{r+2}\boldsymbol{X}_2-\cdots-d_n\boldsymbol{X}_{n-r}\\
&=(d_1^*,d_2^*,\cdots,d_r^*,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{X}_0^*$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量, 把 $\boldsymbol{X}_0^*$ 代入同解方程组 (2.3.3), 得

$$\begin{cases}
b_{11}d_1^*+b_{12}d_2^*+\cdots+b_{1r}d_r^*=0,\\
\qquad\quad b_{22}d_2^*+\cdots+b_{2r}d_r^*=0,\\
\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad\qquad\qquad\quad b_{rr}d_r^*=0,
\end{cases}$$

依次回代可求出 $d_1^*=d_2^*=\cdots=d_r^*=0$. 于是

$$\boldsymbol{X}_0-d_{r+1}\boldsymbol{X}_1-d_{r+2}\boldsymbol{X}_2-\cdots-d_n\boldsymbol{X}_{n-r}=\boldsymbol{X}_0^*=\boldsymbol{\theta},$$

即

$$\boldsymbol{X}_0=d_{r+1}\boldsymbol{X}_1+d_{r+2}\boldsymbol{X}_2+\cdots+d_n\boldsymbol{X}_{n-r},$$

所以, $\boldsymbol{X}_0$ 可由 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$ 线性表出.

当齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解时, 其解集合的结构一目了然; 当 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解时, 其解集合包含无穷多解, 它的结构需要研究. 而

定理 2.3.2 告诉我们, 此时方程组存在基础解系, 问题迎刃而解. 此外, 定理 2.3.2 的证明过程提供了一种求基础解系的方法.

例 2.3.1 求下列齐次线性方程组的一个基础解系:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ x_3+\ \ x_4+\ \ x_5=0, \\ 2x_1+4x_2+3x_3+4x_4+\ \ x_5=0, \\ -x_1-2x_2+\ \ x_3+3x_4-3x_5=0, \\ \qquad\qquad 2x_3+4x_4-2x_5=0. \end{cases}$$

解 对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换, 将它化为阶梯形

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

对应阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+\ x_4+x_5=0, \\ \qquad\qquad x_3+2x_4-x_5=0, \end{cases}$$

选 x_2,x_4,x_5 为自由未知数, 得

$$\begin{cases} x_1+x_3=-2x_2-x_4-x_5, \\ \qquad x_3=-2x_4+x_5, \end{cases}$$

取 $x_2=1,x_4=0,x_5=0$ 得 $\boldsymbol{X}_1=(-2,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$;

取 $x_2=0,x_4=1,x_5=0$ 得 $\boldsymbol{X}_2=(1,0,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$;

取 $x_2=0,x_4=0,x_5=1$ 得 $\boldsymbol{X}_3=(-2,0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

于是, $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 为方程组的一个基础解系.

例 2.3.2 求下列齐次线性方程组的一般解:

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=0, \\ 2x_1+5x_2+4x_3=0, \\ 3x_1+6x_2+5x_3=0. \end{cases}$$

解　用初等行变换将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&5&4\\3&6&5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

对应阶梯形方程组为

$$\begin{cases}x_1+\ x_2+\ \ x_3=0,\\ \qquad 3x_2+2x_3=0,\end{cases}$$

选 x_3 为自由未知数, 得

$$\begin{cases}x_1+x_2=-x_3,\\ \quad 3x_2=-2x_3,\end{cases}$$

取 $x_3=3$ 得

$$\boldsymbol{X}_1=(-1,-2,3)^{\mathrm{T}}.$$

于是, $\boldsymbol{X}_1$ 为方程组的一个基础解系. 故原方程组的一般解为 $k_1\boldsymbol{X}_1\,(k_1\in F)$.

在定理 2.3.2 的证明中, 自由未知数 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 的取值实际上是任意的, 只需保证所得解向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$ 线性无关即可.

例 2.3.3　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r<n$, 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量均构成一个基础解系.

证　设 $\boldsymbol{X}_1^*,\boldsymbol{X}_2^*,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}^*$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解向量, $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的任意一个解向量. 要证 $\boldsymbol{X}_1^*$, $\boldsymbol{X}_2^*$, $\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}^*$ 是基础解系, 只需证明 $\boldsymbol{X}_0$ 可由 $\boldsymbol{X}_1^*$, $\boldsymbol{X}_2^*,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}^*$ 线性表出.

任取 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$, 根据定义, 解向量组 $\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_1^*$, $\boldsymbol{X}_2^*,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}^*$ 可由 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}$ 线性表出. 根据定理 2.1.3, $\boldsymbol{X}_0$, $\boldsymbol{X}_1^*$, $\boldsymbol{X}_2^*,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}^*$ 线性相关. 又 $\boldsymbol{X}_1^*,\boldsymbol{X}_2^*,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}^*$ 线性无关, 故由定理 2.1.2 得, $\boldsymbol{X}_0$ 可由 $\boldsymbol{X}_1^*$, $\boldsymbol{X}_2^*,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-r}^*$ 线性表出.

定理 2.3.2 揭示了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩与齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解的关系, 我们可以利用这一点, 通过研究基础解系来讨论矩阵的秩.

例 2.3.4　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵, 则

$$\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

证　只需证明: $\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

考虑齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}, \tag{①}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\mathbf{0}, \tag{②}$$

任取方程组 ① 的一个解 $\boldsymbol{\alpha}_1$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$. 此式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, 得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是方程组 ② 的解.

反之, 任取方程组 ② 的一个解 $\boldsymbol{\alpha}_2$. 若方程组 ② 只有零解, 则 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是方程组 ① 的解; 若方程组 ② 有非零解, 因方程组 ② 的系数矩阵为一个实矩阵, 由定理 2.3.2 中构造基础解系的方法可知, 方程组 ② 存在一个由实向量构成的基础解系 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_t$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{X}_t, \tag{2.3.4}$$

其中, $k_1,k_2,\cdots,k_t\in F$. 因

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\mathbf{0},\quad i=1,2,\cdots,t,$$

两边同时左乘 $\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}$, 得

$$\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i)=\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i$ 为实向量, 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_i=\mathbf{0}, i=1,2,\cdots,t$, 由 (2.3.4) 式可知 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是方程组 ① 的解.

综上所述, 方程组 ① 与方程组 ② 同解. 若方程组 ①、② 都只有零解, 则显然 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)=n$. 否则, 两个齐次方程组有相同的基础解系. 根据定理 2.3.2 可得

$$n-\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n-\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right),$$

于是, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)$.

2.4 非齐次线性方程组解的结构

利用上一节关于齐次线性方程组的结论, 现在可以对数域 F 上的非齐次线性方程组的解集进行讨论了.

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{b}$ 是数域 F 上的 $m\times 1$ 矩阵, 对 $\boldsymbol{A}$ 按列分块 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$, 则线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b} \tag{2.4.1}$$

可表示为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}, \tag{2.4.2}$$

这里 $\boldsymbol{\beta}$ 即列矩阵 $\boldsymbol{b}$, 称 (2.4.2) 式为**非齐次线性方程组** (2.4.1) **的向量表达式**. 由此易得, 方程组 (2.4.1) 有解的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.

于是, 我们有

定理 2.4.1 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\tilde{\boldsymbol{A}})$, 这里 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是该方程组的增广矩阵 $[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}]$.

证 将 $\boldsymbol{A}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 按列分块: $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$, $\tilde{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}]$, 这里 $\boldsymbol{\beta}$ 即矩阵 $\boldsymbol{b}$.

必要性: 若方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解, 由 (2.4.2) 式得 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 从而 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}\}$, 故 $\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}=\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}\}$, 即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\tilde{\boldsymbol{A}})$.

充分性: 设 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\tilde{\boldsymbol{A}})=r$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大无关组, 则 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 由定理 2.1.2 得 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出, 从而可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 即方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有解.

从线性方程组 (2.4.1) 的向量表达式 (2.4.2) 还可发现, (2.4.1) 有唯一解的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 且表示法唯一. 这不仅要求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 有相同的秩, 而且还要求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 因此又有

定理 2.4.2 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\tilde{\boldsymbol{A}})=n$, 这里 $\tilde{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}]$.

这个定理的等价命题是: $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充要条件是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\tilde{\boldsymbol{A}})<n$.

当方程组 (2.4.1) 有无穷多解时, 解集的结构如何, 就是下面要讨论的问题.

由三元线性方程组的几何意义可知, 三元非齐次线性方程 $ax+by+cz=d(d\neq 0)$ 的解集是不过原点的一个平面 π, 而相应的齐次线性方程 $ax+by+cz=0$ 的解集是过原点的一个平面 π_0. 如图 2.4.1 所示. 平面 π 可以由 π_0 沿着向量 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 平移得到, 其中 $\boldsymbol{\gamma}_0\in\pi$. 由向量加法的几何意义可以得到, π 上每一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可以表示成 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}\in\pi_0$. 反之,

对于 π_0 上任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 都有 $\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\alpha}\in\pi$. 因此

$$\pi=\{\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}\in\pi_0\}.$$

从上述几何空间中的例子可以发现, 非齐次线性方程组的解与齐次线性方程组的解有着密切的关系. 设有非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$, 把常数项全部换为零 (即将 $\boldsymbol{b}$ 换为零列矩阵) 得到齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$, 称后者为前者的**导出方程组**.

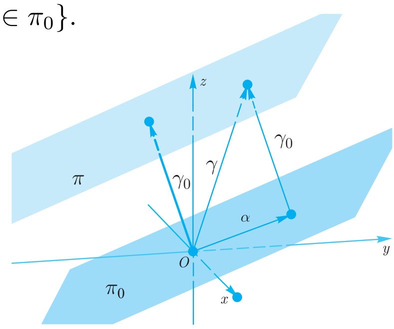

图 2.4.1　方程组的解

性质 2.4.1　(1) 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任意两个解向量, 则 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$ 是其导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量.

(2) 设 $\boldsymbol{X}_0$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一解向量 , $\overline{\boldsymbol{X}}$ 是其导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任一解向量 , 则 $\boldsymbol{X}_0+\overline{\boldsymbol{X}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量.

证　(1) 因 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 都是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解, 故 $\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{b},\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{b}$, 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)=\boldsymbol{AX}_1-\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(2) 因 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解, $\overline{\boldsymbol{X}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解, 故 $\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{X}_0+\overline{\boldsymbol{X}}\right)=\boldsymbol{AX}_0+\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b},$$

所以 $\boldsymbol{X}_0+\overline{\boldsymbol{X}}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解.

交互实验 2.4.1

扫描交互实验 2.4.1 的二维码, 利用三元非齐次线性方程组的几何意义, 选择不同的解向量, 验证性质 2.4.1 中的结论.

与齐次线性方程组不同的是, 非齐次线性方程组解向量的线性组合一般不再是非齐次线性方程组的解向量. 也就是说, 若 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量, 则

$$k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{X}_s$$

一般不再是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解向量, 除非 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$.

与齐次线性方程组相同的是, 非齐次线性方程组仅在有无穷多解时, 才需研究解集合的结构.

定理 2.4.3　设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则其一般解为

$$\boldsymbol{X}_0+k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{X}_t, \tag{2.4.3}$$

其中 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解, $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_t$ 是导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, $k_1,k_2,\cdots,k_t\in F$.

证　显然, (2.4.3) 式是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解. 反之, 任取 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解 $\boldsymbol{X}$, 则 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0$ 是导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解. 于是, $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0=k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{X}_t$, 即

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{X}_t,$$

由此可知, (2.4.3) 式是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一般解.

例 2.4.1　求下列线性方程组的一般解:

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1,\\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3,\\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1,\\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7. \end{cases}$$

解　将增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}]$ 用初等行变换化为阶梯形

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3\\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 7 & -2 & -4 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

对应阶梯形方程组为

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1,\\ 7x_2-2x_3-4x_4=-4, \end{cases}$$

选 x_3,x_4 为自由未知数, 得

$$\begin{cases} x_1+5x_2=-1+x_3+x_4,\\ 7x_2=-4+2x_3+4x_4, \end{cases} \tag{2.4.4}$$

令 $x_3=x_4=0$, 由方程组 (2.4.4) 得原方程组的一个特解

$$\boldsymbol{X}_0=\left(\frac{13}{7},-\frac{4}{7},0,0\right)^{\mathrm{T}}.$$

把方程组 (2.4.4) 中的常数项 -1, -4 均去掉, 得

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = \ \ x_3 + \ \ x_4, \\ \qquad 7x_2 = 2x_3 + 4x_4, \end{cases} \tag{2.4.5}$$

不难看出, 方程组 (2.4.5) 就是原方程组的导出方程组对应的阶梯形方程组 (而且已选定自由未知数). 因此, 由 (2.4.5) 可求导出方程组的基础解系.
取 $x_3 = 1, x_4 = 0$, 由方程组 (2.4.5) 解得

$$\boldsymbol{X}_1 = \left(-\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, 1, 0\right)^{\mathrm{T}},$$

取 $x_3 = 0, x_4 = 1$, 由方程组 (2.4.5) 解得

$$\boldsymbol{X}_2 = \left(-\frac{13}{7}, \frac{4}{7}, 0, 1\right)^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2$ 是导出方程组的一个基础解系.

于是, 原方程组的一般解为

$$\boldsymbol{X}_0 + k_1\boldsymbol{X}_1 + k_2\boldsymbol{X}_2,$$

其中 $k_1, k_2 \in F$.

例 2.4.2 已知 $\boldsymbol{X}_0 = (-1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_0^* = (1, -3, 3)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases} \ \ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1, \\ \ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \end{cases}$$

的两个解, 求此方程组的一般解.

解 因为方程组有两个解, 所以方程组解不唯一. 设系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 增广矩阵为 $\tilde{\boldsymbol{A}}$, 根据定理 2.4.2, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{r}(\tilde{\boldsymbol{A}}) < 3$.

从系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前两行可以看出 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$, 于是得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 2$, 此方程组的导出方程组的基础解系应含 $3 - 2 = 1$ 个解.

令 $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{X}_0^* = (-2, 4, -2)^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{X}_1$ 是导出方程组的非零解. 于是, 可取 $\boldsymbol{X}_1$ 作为其基础解系, 由此得原方程组的一般解为

$$\boldsymbol{X}_0 + k_1\boldsymbol{X}_1,$$

其中 $k_1 \in F$.

注意, 只有齐次线性方程组才有基础解系的概念. 但是, 非齐次线性方程组也存在着一组特殊的解, 与基础解系有些相似之处.

例 2.4.3 设 $\boldsymbol{X}_0$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解, $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_t$ 是导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_t$ 线性无关, 并且 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解均可表示为

$$k_0\boldsymbol{X}_0+k_1\left(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1\right)+k_2\left(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_2\right)+\cdots+k_t\left(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_t\right),$$

其中 $k_0+k_1+k_2+\cdots+k_t=1$.

证 令

$$c_0\boldsymbol{X}_0+c_1\left(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1\right)+c_2\left(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_2\right)+\cdots+c_t\left(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_t\right)=\boldsymbol{\theta},$$

则有

$$\left(c_0+c_1+c_2+\cdots+c_t\right)\boldsymbol{X}_0+c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+c_t\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{\theta}, \tag{2.4.6}$$

若 $c_0+c_1+c_2+\cdots+c_t\neq 0$, 则由 (2.4.6) 式可得, $\boldsymbol{X}_0$ 可由 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_t$ 线性表出. 此时, $\boldsymbol{X}_0$ 也是导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解, 与题设矛盾. 因此, 必有

$$c_0+c_1+c_2+\cdots+c_t=0, \tag{2.4.7}$$

将 (2.4.7) 式代入 (2.4.6) 式得

$$c_1\boldsymbol{X}_1+c_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+c_t\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{\theta},$$

又 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_t$ 线性无关, 故得 $c_1=c_2=\cdots=c_t=0$. 将之代入 (2.4.7) 式得 $c_0=0$. 因此, $\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_t$ 线性无关.

任取 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个解 $\boldsymbol{X}$, 根据定理 2.4.3, $\boldsymbol{X}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\boldsymbol{X}_0+k_1\boldsymbol{X}_1+k_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{X}_t\\&=\left(1-\sum_{i=1}^{t}k_i\right)\boldsymbol{X}_0+k_1\left(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1\right)+\cdots+k_t\left(\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_t\right),\end{aligned}$$

令 $k_0=1-k_1-\cdots-k_t$, 则 $k_0+k_1+\cdots+k_t=1$.

到此为止, 我们已经完成了对线性方程组三个主要问题的讨论. 应该指出的是, 这些讨论只是为线性方程组的实际应用提供了理论基础, 而具体应用时还要考虑规模、误差等多种因素. 特别是对无解线性方程组, 在实际问题中就不能以无解为由而不再考虑. 在第 3.4.5 节, 我们将对无解线性方程组进行深入讨论.

习题二

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,-2,0),\boldsymbol{\beta}=(0,2,-5,1,2)$, 计算 $3\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}$.

2. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10),\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)$, 并且 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\beta})$, 求向量 $\boldsymbol{\beta}$.

3. 已知 $\boldsymbol{\beta}=(0,0,0,1),\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,-1)$, 把向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合.

4. 已知 $\boldsymbol{\beta}=(5,4,1),\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3,t),\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)$, 当 t 取何值时, $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出? 当 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出时, 求出相应的表达式.

5. 判断下列向量组是否线性相关:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,6)$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-1,-1,0),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,0,5)$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,6)$.

6. 证明: 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 也线性无关.

7. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ik}),i=1,2,\cdots,m$. 令

$$\boldsymbol{\beta}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ik},a_{i,k+1},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots,m,$$

证明: 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

9. 证明: 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的分量对应成比例.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出, 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

11. 设 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出, 证明: 表示方法唯一的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

12. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 当 s,t 满足什么条件时, $s\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,t\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关?

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\b&1&1\\2&1&0\end{bmatrix}$, 当 a,b 满足什么条件时, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha}$ 线性相关?

14. 判别下列说法是否正确. 若正确, 则给出证明; 若不正确, 则举反例说明:

(1) 若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in F$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m \neq \boldsymbol{\theta},$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 均可由其余 $m-1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出;

(3) 线性无关的向量组不包含零向量;

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关 ;

(5) 线性相关的向量组至少有一个部分组 (真子集) 也线性相关.

15. 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\,(\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{\theta}, m > 1)$ 线性相关的充要条件是存在 $\boldsymbol{\alpha}_i (1 < i \leqslant m)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表出.

16. 设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化可为矩阵 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$, 证明: 对任意 n 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in F$, 下式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\theta}$$

成立的充要条件是

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\theta}$$

成立.

17. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是一组 n 元向量, 证明: 若任一 n 元向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出, 则 $m \geqslant n$.

18. 证明: 两个等价的线性无关向量组包含相同个数的向量.

19. 证明: 两个等价的向量组具有相同的秩.

20. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 元向量, 证明: 若任一 n 元向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

21. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 满足

$$\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\} = \mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4\} = 3,\ \mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5\} = 4,$$

证明：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

22. 求下列向量组的秩及其一个极大无关组, 并将其余向量用极大无关组线性表出:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (-2,1,0,3), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-3,2,4), \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,0,2,-1), \boldsymbol{\alpha}_4 = (2,-2,4,6)$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,0), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,0), \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,2,3)$;

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3,-4), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,-4,1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,-5,8,-3)$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (5,26,-9,-12), \boldsymbol{\alpha}_5 = (3,-4,1,2)$.

23. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-1,2,4), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,3,1,2), \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,0,7,14)$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (1,-1,2,0), \boldsymbol{\alpha}_5 = (2,1,5,6)$, 求一个包含 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的极大无关组. 并问这样的极大无关组是否唯一?

24. 利用 16 题证明: 初等行变换不改变矩阵列向量组的秩.

25. 已知两个向量组有相同的秩, 且其中一个向量组可由另一个向量组线性表出, 证明: 这两个向量组等价.

26. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵 $(m < n)$, 问方阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 哪个肯定不可逆?

27. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶幂等矩阵 (即$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$), 证明:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = n.$$

28. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, 证明:

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) + \mathrm{r}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = n.$$

29. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 且 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 1$, 证明：$\boldsymbol{A}$ 可分解为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}.$$

30. 证明: 向量组中任意一个线性无关的部分组均可扩充为一个极大无关组.

31. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系及一般解:

$$(1)\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$

(4) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 0$.

32. 求下列线性方程组的一般解, 并用导出方程组的基础解系来表示:

(1) $$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5, \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1; \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12; \end{cases}$$

(3) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$.

33. 设

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1, \\ x_2 - x_3 = a_2, \\ x_3 - x_4 = a_3, \\ x_4 - x_5 = a_4, \\ x_5 - x_1 = a_5, \end{cases}$$

证明: 这个线性方程组有解的充要条件是 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$. 在有解时, 求其一般解.

34. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a+1 & 2a & 3a+1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 且存在 3 阶非零方阵 $\boldsymbol{B}$, 使 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$. 求 a.

35. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵, 证明: $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AB}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{BA}$ 可逆.

36. 已知 $\boldsymbol{X}_1=(1,2,3,4),\boldsymbol{X}_2=(4,3,2,1)$, 求一齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$, 使其以 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 为一个基础解系.

37. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r(<n)$, 证明: 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量都是该方程组的一个基础解系.

38. 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 下述向量组中哪一个也是该方程组的基础解系:

(1) $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_3+\boldsymbol{X}_4,\boldsymbol{X}_4+\boldsymbol{X}_1$;

(2) $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_3-\boldsymbol{X}_4,\boldsymbol{X}_4-\boldsymbol{X}_1$;

(3) $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_3+\boldsymbol{X}_4,\boldsymbol{X}_4-\boldsymbol{X}_1$;

(4) $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_3-\boldsymbol{X}_4,\boldsymbol{X}_4-\boldsymbol{X}_1$.

39. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=m$, 且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-m}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,

$$\boldsymbol{\beta}_i=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in})^{\mathrm{T}},\ \text{其中}\ i=1,2,\cdots,n-m,$$

令

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-m,1} & b_{n-m,2} & \cdots & b_{n-m,n} \end{bmatrix},$$

且设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 证明: 齐次线性方程组 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$.

40. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$, 且 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的三个解. 已知 $\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2=(2,3,1,1),\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_3=(1,2,0,0)$, 求该方程组的一般解.

41. 线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}]$ 满足什么条件时, 可使该方程组有解, 并且全部解向量的第 i 个分量均为零.

42. 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 且其 m 个行向量是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系. 证明: 对任一 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 均有 $\boldsymbol{CB}$ 的行向量组也是 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系.

43. 什么条件下, 在齐次线性方程组

$$\begin{cases} \phantom{-x_1+{}} x_2+ax_3+bx_4=0, \\ -x_1+\phantom{cx_2+{}} cx_3+dx_4=0, \\ ax_1+cx_2-\phantom{ex_3+{}} ex_4=0, \\ bx_1+dx_2+ex_3 =0 \end{cases}$$

的一般解中可取 x_3,x_4 作为自由未知数.

44. 设 $\boldsymbol{X}_0$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解, $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_t$ 是导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系, 证明: $\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_t$ 线性无关.

45. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵, 证明: 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充要条件是

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}([\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}]).$$

46. 设 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, 其中 $i=1,2,\cdots,m$, 证明: 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

的解都是方程

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$$

的解, 则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出.