概率论与数理统计

第17讲

抽样分布

一. 三大重要分布

统计量是样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的函数，而样本是随机变量。因此，统计量也是随机变量，统计量的分布称为抽样分布。

研究统计量的性质和评价一个统计推断的优良性，取决于抽样分布的性质。

近代统计学的创始人之一，英国统计学家费歇(*R.A.Fisher*)把抽样分布、参数估计和假设检验列为统计推断的三个中心内容. 因此寻求抽样分布的理论和方法很重要。

本节给出在数理统计中占重要地位的三大分布：χ^2分布，t分布，F分布及其几个重要的抽样分布定理。

一. 三大重要分布—χ^2分布

定义1 设$X_1, X_2,\dots, X_n$是来自总体$N(0,1)$的样本，则称统计量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

服从自由度（Degree of freedom）为n的χ^2分布。 记为：$\chi^2 \sim \chi^2(n)$

其中：n表示独立随机变量的个数。

概率密度为 $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

一. 三大重要分布—χ^2分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中：伽玛函数$\Gamma(\alpha)$通过下述积分定义

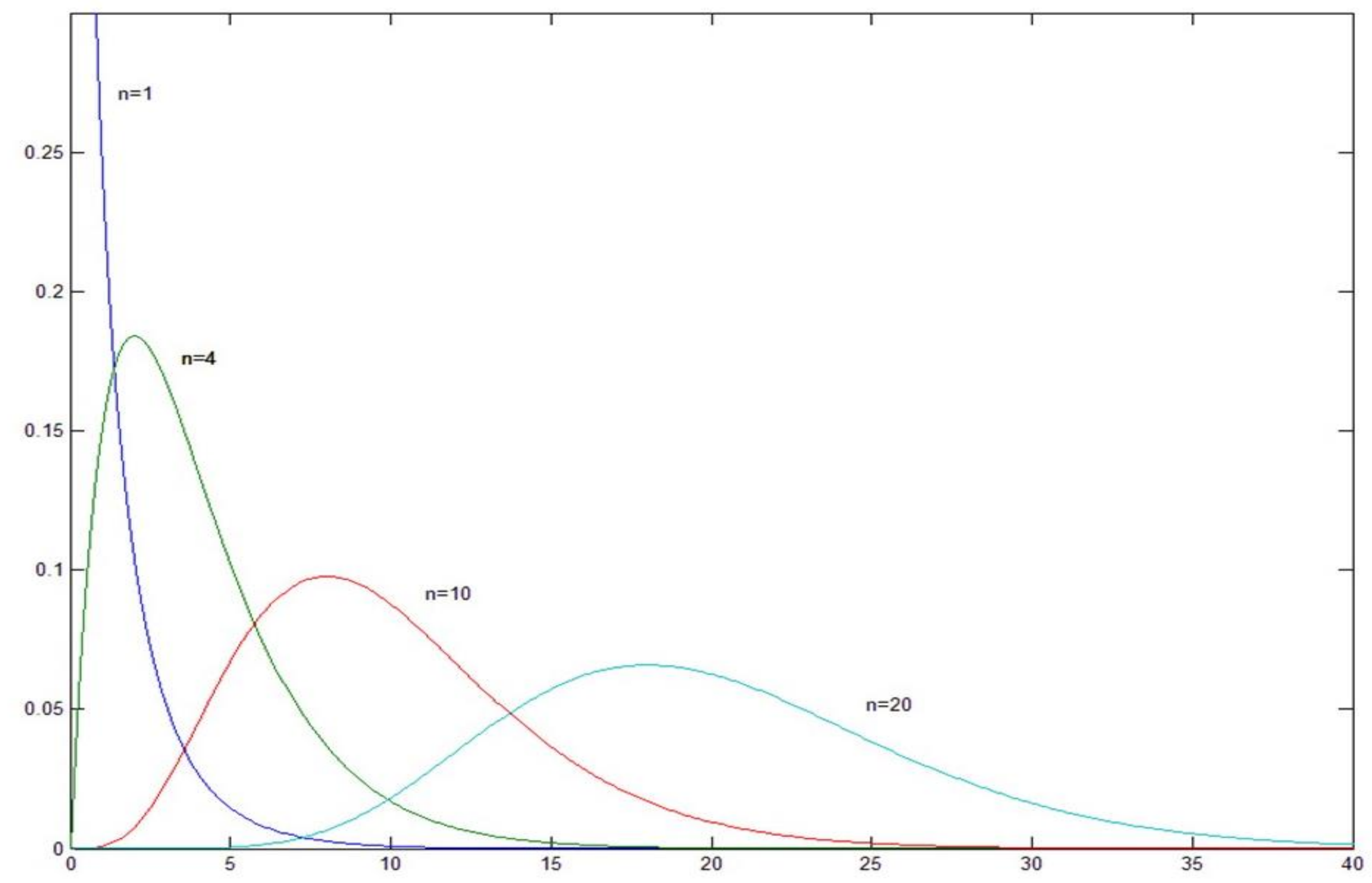
$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\quad \alpha>0$$

特别地，当n=2时，$\chi^2(2)$分布的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

期望为2的指数分布

一. 三大重要分布—χ^2分布



χ^2分布的性质

1. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，都服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$$

证明：由$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$且独立，得 $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 且相互独立

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

2. 设$X\sim\chi^2(n)$，则$E(X)=n$，$D(X)=2n$。

证明：易知存在$X_i\sim N(0,1)$，$i=1,2,\ldots,n$且相互独立，使得 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

$$\boxed{E(X_i)=0, E(X_i^2)=D(X_i)=1}$$

$$\boxed{E(X_i^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=3}$$

$$\boxed{D(X_i^2)=E(X_i^4)-[E(X_i^2)]^2=3-1=2}$$

则有 $E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=n$

$$D(X)=D(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i^2)=2n$$

3. 设$X_1 \sim \chi^2(n_1)$，$X_2 \sim \chi^2(n_2)$，且X_1, X_2相互独立，则$X_1+X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$

χ^2分布的可加性

证明：由χ^2分布的定义知：

$$X_1 = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n_1}^2 \qquad X_2 = V_1^2 + V_2^2 + \cdots + V_{n_2}^2$$

其中，$U_i \sim N(0,1)$，$i=1, 2, \ldots, n_1$，且相互独立

$V_j \sim N(0,1)$，$j=1, 2, \ldots, n_2$，且相互独立

又由于X_1, X_2相互独立，则 U_i与V_j相互独立

$$\therefore X_1 + X_2 = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n_1}^2 + V_1^2 + V_2^2 + \cdots + V_{n_2}^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

推广：设$X_i \sim \chi^2(n_i)$，$i=1,2,\ldots,k$，且相互独立，则 $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)$

例1.设总体$X\sim N(0,1)$, X_1, X_2,…, X_6为来自总体X的样本,记

$$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$$

试确定常数c，使cY服从χ^2分布。

解： $X_1+X_2+X_3\sim N(0,3)$, $X_4+X_5+X_6\sim N(0,3)$

$$(X_1+X_2+X_3)/\sqrt{3}\sim N(0,1) \qquad (X_4+X_5+X_6)/\sqrt{3}\sim N(0,1)$$

且上述两个标准正态随机变量相互独立，故

$$\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{Y}{3}\sim\chi^2(2)$$

因此 $c=1/3$

例2. 设总体X服从指数分布$E(\lambda)$， $X_1, X_2, \dots, X_n$是来自总体X的样本，证明

$$T = 2\lambda(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = 2n\lambda\bar{X} \sim \chi^2(2n)$$

证明：易知$X_1, X_2, \dots, X_n$独立同分布，且都服从$E(\lambda)$，其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

易求得$2\lambda X_1$的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

恰好是自由度为2的χ^2分布。

即有$2\lambda X_1, 2\lambda X_2, \ldots, 2\lambda X_n$独立同分布且都服从自由度为2的$\chi^2$分布。

因此根据χ^2分布布的可加性，得到

$$2\lambda X_1 + 2\lambda X_2 + \cdots + 2\lambda X_n \sim \chi^2(2n)$$

即有： $T = 2\lambda(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = 2n\lambda\bar{X} \sim \chi^2(2n)$

一. 三大重要分布—t 分布

定义2 设X~$N(0,1)$, Y~$\chi^2(n)$，且X与Y相互独立，称随机变量

$$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

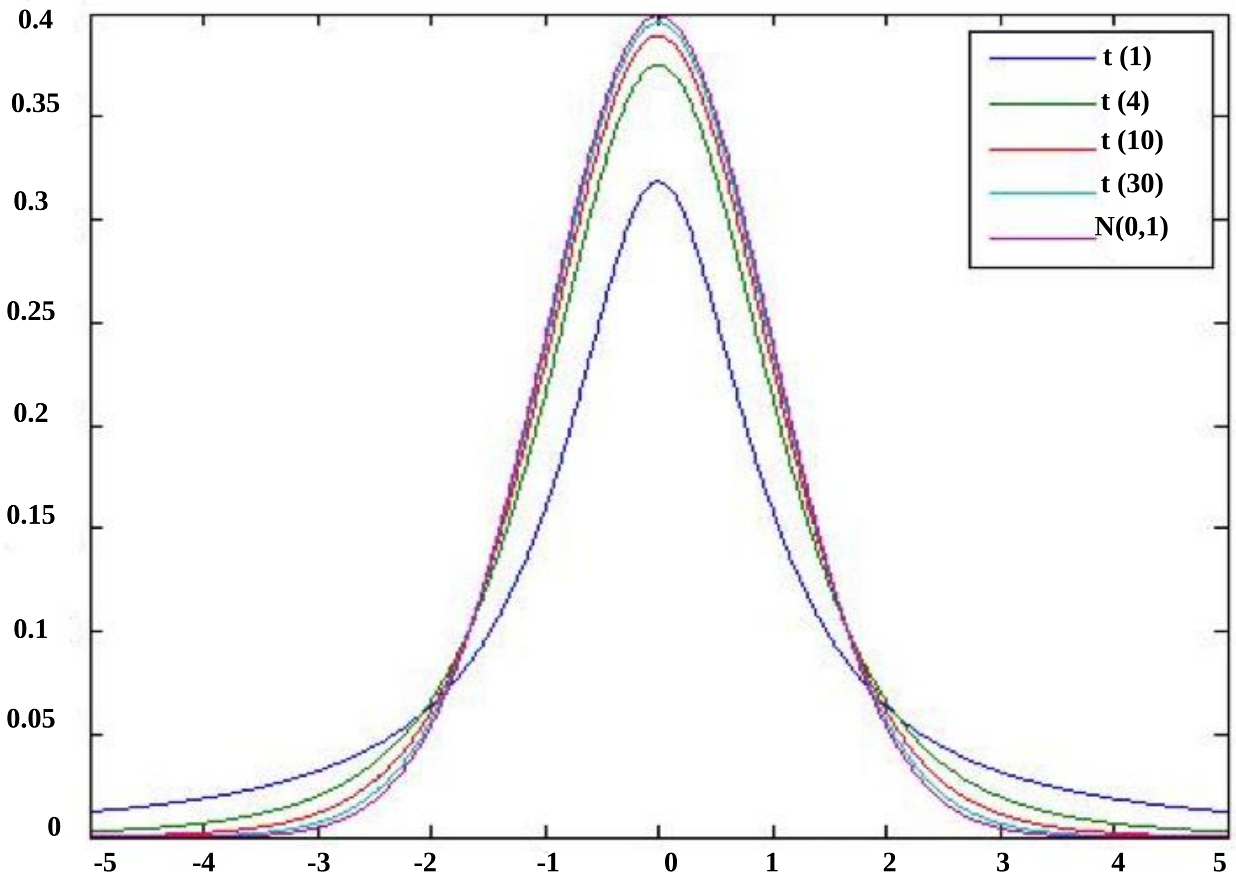
服从自由度为n的t分布，又称学生氏（*student*）分布，记为t~$t(n)$。

Gosset
(1876-1937)

$t(n)$分布的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\qquad -\infty<x<\infty$$

$t(n)$分布的密度函数图形为：



t分布的性质

1. t分布的密度函数关于y轴对称，且 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)=0$

2. t分布的密度函数形状是中间高，两边低，左右对称，与标准正态分布的概率密度函数图像类似，

$$\lim_{n\to\infty} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

当n足够大时，T近似服从标准正态分布$N(0,1)$。实际上，当$n>45$时，t分布与标准正态分布几乎没有差异。当n较小时，在尾部t分布比标准正态分布有更大的概率。

3. 设$T\sim t(n)$，$n>1$，则对于$r<n$，$E(T^r)$存在，且

$$E(T^r)=\begin{cases} n^{\frac{r}{2}}\dfrac{\Gamma[(r+1)/2]\Gamma[(n-r)/2]}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)}, & \text{当}r\text{是偶数}, \\ 0, & \text{当}r\text{是奇数}. \end{cases}$$

特别的，$E(T)=0$，$D(T)=n/(n-2)$，对于$n>2$。

4. 当$n=1$时，其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<\infty$$

此时，t分布就是柯西分布，其数学期望不存在。

例3. 设X 与Y 相互独立,$X \sim N(0,16)$, $Y \sim N(0,9)$, $X_1, X_2, \ldots, X_9$ 与 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{16}$ 分别是取自 X 与 Y 的简单随机样本。

求统计量$\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_{16}^2}}$ 所服从的分布。

解：$X_1+X_2+\ldots+X_9 \sim N(0,144)$ $\quad \therefore \dfrac{1}{12}(X_1+X_2+\cdots+X_9) \sim N(0,1)$

$\dfrac{1}{3}Y_i \sim N(0,1)$ $\quad \therefore \sum_{i=1}^{16}(\dfrac{1}{3}Y_i)^2 \sim \chi^2(16)$ 且上述两个随机变量相互独立，因此

$$\frac{(X_1+X_2+\cdots+X_9)/12}{\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(\frac{1}{3}Y_i)^2}} \sim t(16)$$

即 $$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_{10}^2}} \sim t(16)$$

定义3 设$X\sim\chi^2(m)$, $Y\sim\chi^2(n)$，且X与Y相互独立，称随机变量

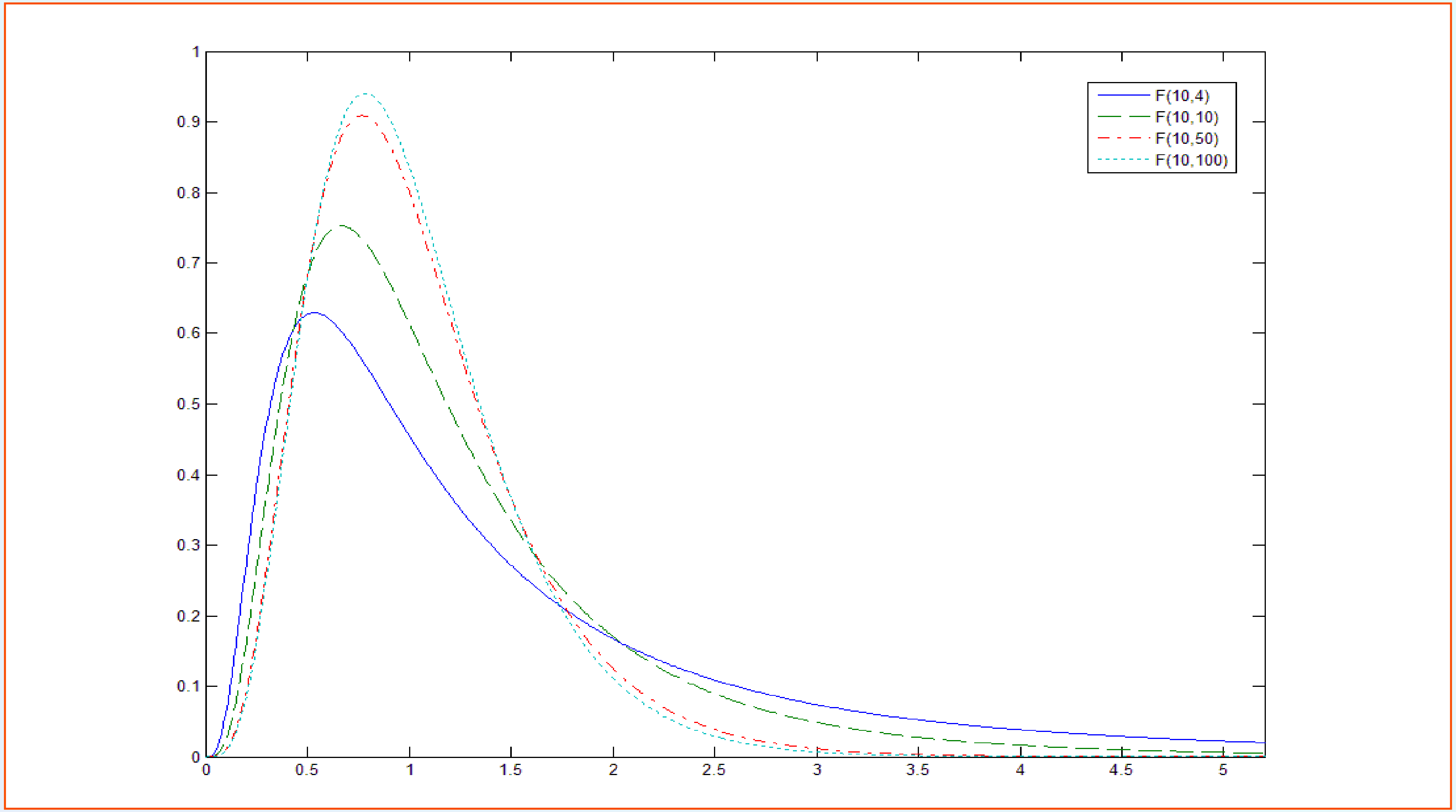
$$F=\frac{X/m}{Y/n}$$

服从自由度为$(m,\ n)$的F分布。 记为$F\sim F(m,n)$

$F(m,n)$分布的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\dfrac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

一. 三大重要分布—F 分布



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
F(10,4)
F(10,10)
F(10,50)
F(10,100)

F分布的性质

1. 设$X \sim F(m, n)$，则$1/X \sim F(n, m)$

2. 设$T \sim t(n)$，则$T^2 \sim F(1,n)$

证明：由于$T \sim t(n)$，$\therefore T = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 其中$X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$且X与Y独立

$\therefore X^2 \sim \chi^2(1)$ 且X^2与Y独立

$$\therefore T^2 = \left(\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\right)^2 = \frac{X^2}{Y/n} \sim F(1, n)$$

例4.设随机变量X和Y都服从标准正态分布, 则

(1) $X+Y$服从正态分布

(2) X^2+Y^2服从χ^2分布

(3) X^2和Y^2都服从χ^2分布 √

(4) X^2/Y^2服从F分布

引理： 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体X（不管服从什么分布，只要均值和方差存在）的一个样本，且$EX=\mu, DX=\sigma^2$，则

$$E\bar{X}=\mu, D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n}, ES^2=\sigma^2$$

其中 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为样本均值 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 为样本方差

证明：易知$X_1, X_2, \ldots, X_n$是独立同分布，且期望均为μ，方差均为σ^2。

$$\therefore E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu$$

二. 几个重要的抽样分布

$$D(\bar{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(S^2)=E[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2]=\frac{1}{n-1}E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu+\mu-\bar{X})^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)-n(\mu-\bar{X})^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2-nE(\bar{X}-\mu)^2]$$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}DX_i-nD\bar{X}]=\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n})=\sigma^2$$

定理1. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in R, \sigma>0$ 的样本，$\bar{X}$ 表示样本均值，则有

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \quad \text{即} \quad \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

证明：易知：$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 均服从 $N(\mu,\sigma^2)$，且相互独立。

相互独立正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布

$\bar{X}$ 服从正态分布　　又由引理可得 $E\bar{X}=\mu$, $D\bar{X}=\dfrac{\sigma^2}{n}$

$\therefore \quad \bar{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$ 将其标准化得 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

定理2. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in R,\sigma>0$的样本，$\bar{X}$ 和 S^2分别表示样本均值和样本方差，则有

（1）$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$　　（2）$\bar{X}$ 和S^2相互独立

定理3. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in R,\sigma>0$的样本，$\bar{X}$和S^2分别表示样本均值和样本方差，则有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

证明：由定理1和定理2，得 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

且它们相互独立，根据t分布的定义得 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \Big/ \sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}} \sim t(n-1)$

即 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

定理4. 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的样本，设$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$是来自正态总体$N(\mu_2,\sigma^2)$的样本，且两个样本相互独立，$\bar{X},\bar{Y},S_1^2,S_2^2$分别是这两个样本的样本均值和样本方差。

则有

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

其中

$$S_\omega^2=\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}, S_\omega=\sqrt{S_\omega^2}$$

二. 几个重要的抽样分布

证明：由定理1得

$$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}), \bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma^2}{m})$$

又由正态分布性质得

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m})$$

标准化后有

$$U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0,1)$$

根据定理2有

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \qquad \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

且它们相互独立，又由χ^2分布的可加性得到

$$V = \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

易知U和V是互相独立性的，根据t分布的定义得到

$$\frac{U}{\sqrt{V/(n+m-2)}} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{1/n+1/m}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

定理5. 设X_1，X_2，…，X_n是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本，设Y_1，Y_2，…，Y_m是来自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_1^2)$ 的样本，且两个样本相互独立，S_1^2, S_2^2 分别是这两个样本样本方差。

则有 $$\frac{S_1^2 \big/ S_2^2}{\sigma_1^2 \big/ \sigma_2^2} \sim F(n-1,m-1)$$

证明：根据定理2有 $\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1)$　$\dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$

由独立性，根据F分布的定义得到 $$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2(n-1)} \Bigg/ \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2(m-1)} \sim F(n-1,m-1)$$

即有 $$\frac{S_1^2 \big/ S_2^2}{\sigma_1^2 \big/ \sigma_2^2} \sim F(n-1,m-1)$$

例5. 设$X_1, X_2, \dots, X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$, $\mu\in R,\sigma>0$的样本，$\bar{X}$和S^2分别表示样本均值和样本方差，又设$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，且$X_{n+1}$与$X_1, X_2, \dots, X_n$互相独立，证明

$$T=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{\bar{X}-X_{n+1}}{S}\sim t(n-1)$$

证明：易知 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}),\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

且它们相互独立。

由于X_{n+1}与$X_1, X_2, \dots, X_n$互相独立 所以$\bar{X}$与X_{n+1}互相独立

$$E(\bar{X}-X_{n+1})=E(\bar{X})-E(X_{n+1})=\mu-\mu=0$$

二. 几个重要的抽样分布

$$D(\bar{X}-X_{n+1})=D(\bar{X})-D(X_{n+1})=\frac{1}{n}\sigma^2+\sigma^2=\frac{n+1}{n}\sigma^2$$

$\therefore\ \bar{X}-X_{n+1}\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$ 从而 $\dfrac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$

而 $\bar{X}-X_{n+1}$ 与 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 相互独立

因此由t分布的定义得 $T=\dfrac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}\Bigg/\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{(n-1)\sigma^2}}=\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\dfrac{\bar{X}-X_{n+1}}{S}\sim t(n-1)$

例6. 设总体$X \sim N(1,\sigma^2)$，总体$Y \sim N(2,\sigma^2)$，且X与Y相互独立，$X_1, X_2, \dots, X_m$是来自总体X的样本，$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$是来自总体Y的样本。$\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$分别是这两个样本的样本均值和样本方差。α和β是两个固定的实数，求T的分布。

$$T = \frac{\alpha(\bar{X}-1)+\beta(\bar{Y}-2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}$$

解：易知两样本相互独立。且 $\bar{X} \sim N(1,\frac{\sigma^2}{m}), \bar{Y} \sim N(2,\frac{\sigma^2}{n})$

根据相互独立正态随机变量线性组合仍然服从正态分布得到

$$U=\frac{\alpha(\bar{X}-1)+\beta(\bar{Y}-2)}{\sigma\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}\sim N(0,1)$$

又有 $\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1),\quad\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

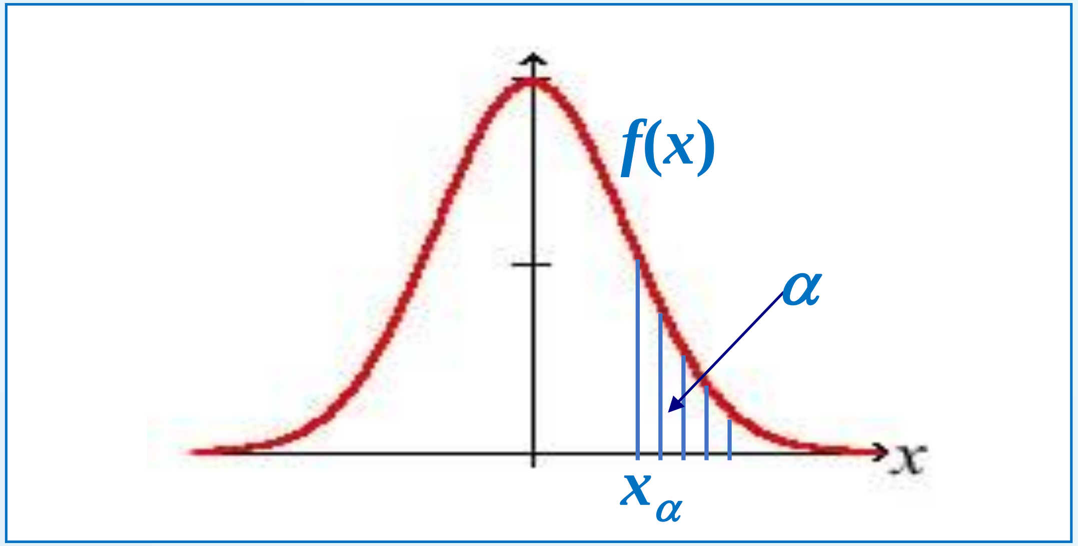
易知U与V相互独立。因此，根据t分布的定义得到

$$\frac{U}{\sqrt{V/(m+n-2)}}=\frac{\alpha(\bar{X}-1)+\beta(\bar{Y}-2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\sqrt{\frac{\alpha^2}{m}+\frac{\beta^2}{n}}}\sim t(m+n-2)$$

三. 分位数

定义4 设$0<\alpha<1$，对连续型随机变量X，称满足$P\{X>x_\alpha\}=\alpha$ 的点x_α为X的概率分布的上α分位数(分位点)。

若X的概率密度函数$f(x)$，则x_α满足 $P\{X \ge x_\alpha\} = \int_{x_\alpha}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$

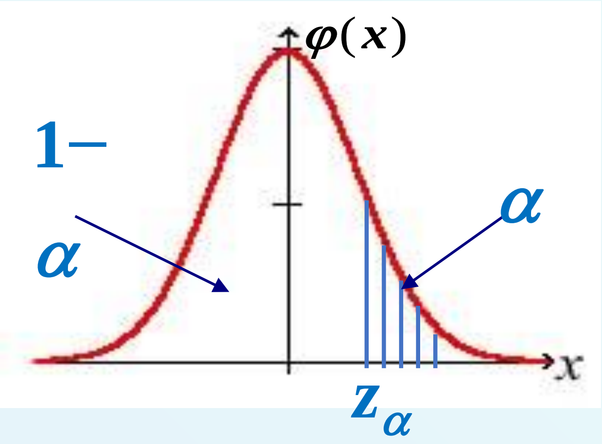


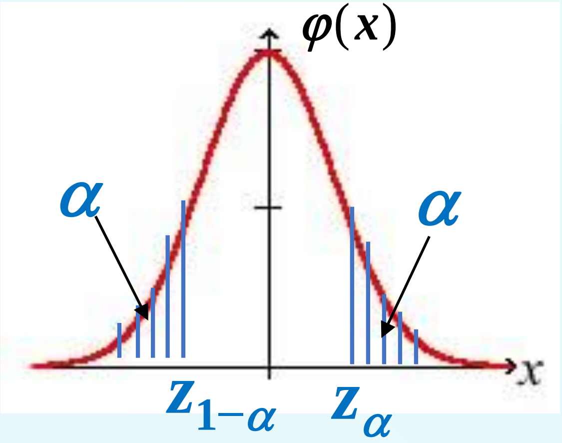
三. 分位数

定义2 设随机变量$X\sim N(0,1)$, 对$0<\alpha<1$，称满足$P\{X>z_\alpha\}=\alpha$的点z_α为标准正态分布的上α分位数(分位点)。

性质1. $\Phi(z_\alpha)=1-\alpha$

性质2. $z_{1-\alpha}=-z_\alpha$





后面常用到下面两个式子

$P\{|Z|>z_{\alpha/2}\}=\alpha, P\{|Z|\le z_{\alpha/2}\}=1-\alpha$

常用数字

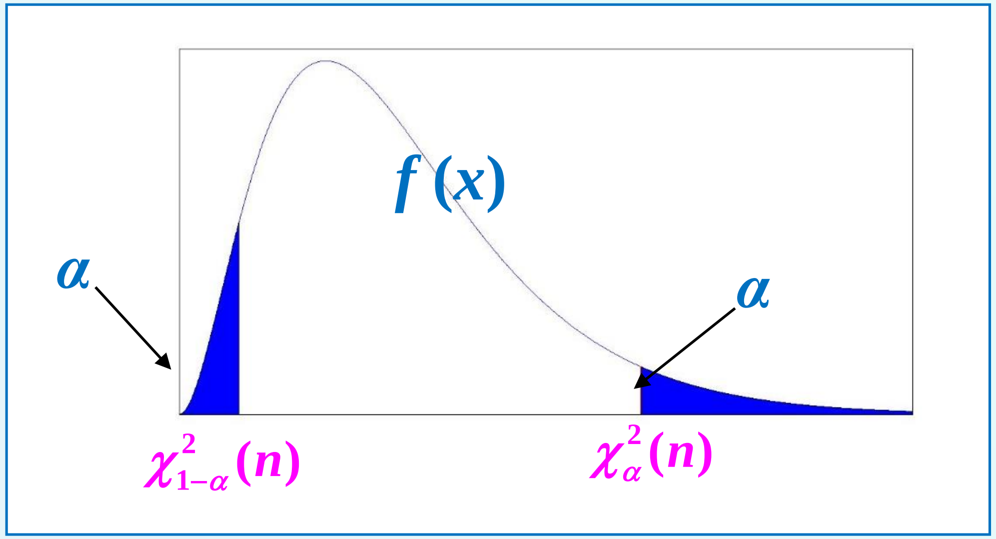
$z_{0.025}=-z_{0.975}=1.96\quad z_{0.05}=-z_{0.95}=1.645$

定义5 设随机变量$X \sim \chi^2(n)$, 对$0<\alpha<1$，称满足$P\{X>\chi^2_\alpha(n)\}=\alpha$的点$\chi^2_\alpha(n)$为自由度为$n$的$\chi^2$分布的上$\alpha$分位数(分位点)。

如： $\chi^2_{0.05}(6)=12.592$

当n充分大($n>45$)时

$$\chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}(z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$$



其中z_α是标准正态分布的上α分位点。

后面常用到下面两个式子

$$P\{\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n)\}+P\{\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\}=\alpha, P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\le\chi^2\le\chi^2_{\alpha/2}(n)\}=1-\alpha$$

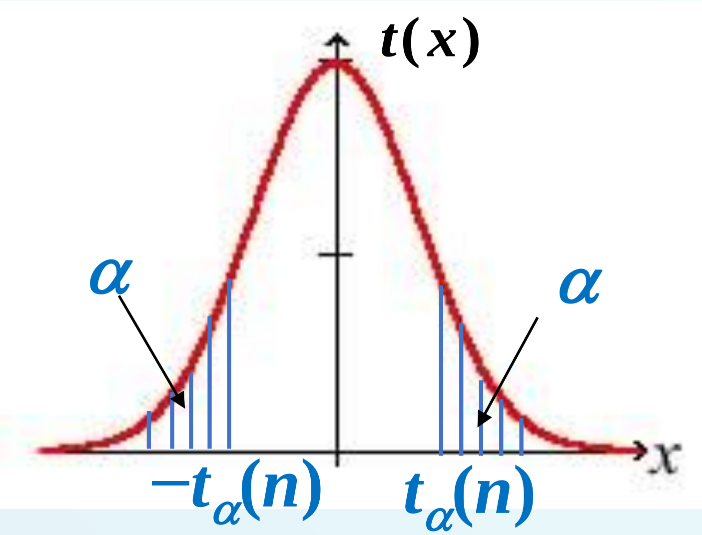
三. 分位数

定义6 设随机变量$X\sim t(n)$, 对$0<\alpha<1$，称满足$P\{X>t_\alpha(n)\}=\alpha$ 的点$t_\alpha(n)$为自由度为n的t分布的上α分位数(分位点)。

性质1. $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

性质2. 若$P(|X|>c)=\alpha$，则$c= t_{\alpha/2}(n)$

性质3. 当n较大($n>45$)时， $t_\alpha(n)\approx z_\alpha$

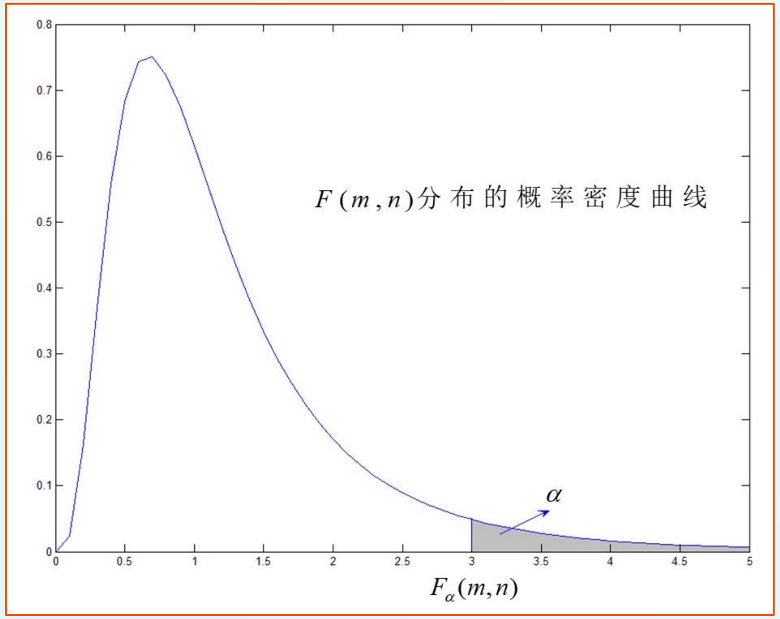


后面常用到下面两个式子：$P\{|t|>t_{\alpha/2}(n)\}=\alpha, P\{|t|\le t_{\alpha/2}(n)\}=1-\alpha$

三. 分位数

定义7 设随机变量$X\sim F(m,n)$, 对$0<\alpha<1$, 称满足$P\{X>F_\alpha(m,n)\}=\alpha$的点$F_\alpha(m,n)$为自由度为$m,n$的$F$分布的上$\alpha$分位数(分位点)。

如: $F_{0.05}(6, 9)=3.37$



后面常用到下面两个式子:

$$P\{F>F_{\alpha/2}(m,n)\}+P\{F<F_{1-\alpha/2}(m,n)\}=\alpha$$

$$P\{F_{1-\alpha/2}(m,n)\le F\le F_{\alpha/2}(m,n)\}=1-\alpha$$

性质1. $F_{1-\alpha}(m,n)=\dfrac{1}{F_{\alpha}(n,m)}$

证明： $\because X \sim F(m,n)$ $\quad \therefore\ 1/X \sim F(n,m)$ $\quad P\{X>F_{1-\alpha}(m,n)\}=1-\alpha$

$$\therefore P\{X>\frac{1}{F_{\alpha}(n,m)}\}=P\{\frac{1}{X}<F_{\alpha}(n,m)\}$$

$$=1-P\{\frac{1}{X}\geq F_{\alpha}(n,m)\}=1-\alpha$$

$$\therefore \quad F_{1-\alpha}(m,n)=\frac{1}{F_{\alpha}(n,m)}$$

作业： 7,9,10,11,16,19

第 17 讲

谢谢观看