



# 离散数学

刘振岩

[zhenyanliu@bit.edu.cn](mailto:zhenyanliu@bit.edu.cn)



- 数理逻辑是用数学方法研究推理（即研究人类思维的形式结构和规律）的科学，它是在传统逻辑（自然语言）的基础上从17世纪70年代开始发展起来的，它采用数学符号化的方法，也称为现代逻辑或符号逻辑。
- 数理逻辑着重于研究从“前提”到“结论”的推理过程是否正确，而不是“前提”或“结论”本身是否正确。
- 从广义上讲，数理逻辑包括：逻辑演算、公理集合论、模型论、递归论、证明论。其中最基本也是最重要的部分是逻辑演算（命题逻辑和一阶逻辑（谓词逻辑））



## 命题逻辑

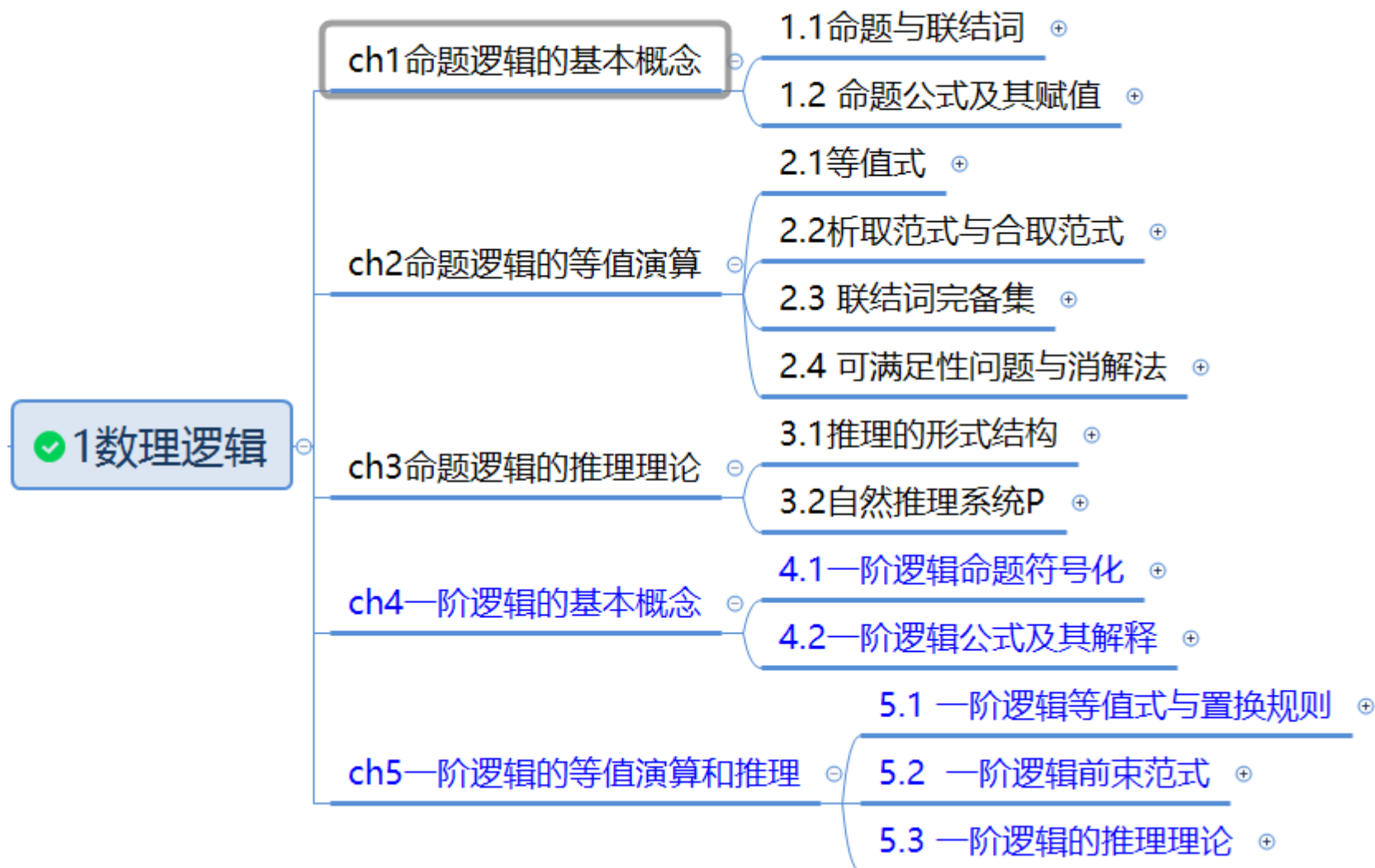
研究由**命题**为基本单位构成的  
**前提**和**结论**之间的可推导关系

前提： 1. 或是天晴,或是下雨。  
2. 若天晴,我去看电影。  
3. 若我去看电影, 我就不看书。  
结论：若我在看书, 则天在下雨。

## 一阶逻辑

命题逻辑的扩充和发展

所有的人都是要死的,  
苏格拉底是人,  
所以, 苏格拉底是要死的。





## 主要内容

- 1.1 命题与联结词
  - 命题及其分类
  - 联结词与复合命题
- 1.2 命题公式及其赋值



## 主要内容

- 1.1 命题与联结词
  - 命题及其分类
  - 联结词与复合命题
- 1.2 命题公式及其赋值



- 命题与真值
  - 命题：判断结果唯一的陈述句
  - 命题的真值：判断的结果
  - 真值的取值：真与假
  - 真命题与假命题
- 注意：
  - 感叹句、祈使句、疑问句都不是命题
  - 陈述句中的悖论，判断结果不唯一确定的不是命题



**例1** 下列句子中那些是命题？

(1)  $\sqrt{2}$ 是有理数.

假命题

(2) 北京是中国的首都.

真命题

(3)  $x + 5 > 3$ .

不是命题

(4) 你去教室吗？

不是命题

(5) 这个苹果真大呀！

不是命题

(6) 请不要讲话！

不是命题

(7) 2050年元旦下大雪.

是命题，但真值现在不知道

(8) 我正在说假话

不是命题，是悖论

### 说谎者悖论

如果这个人说的是真话，那么根据他的话可以推知他说的是假话，矛盾。

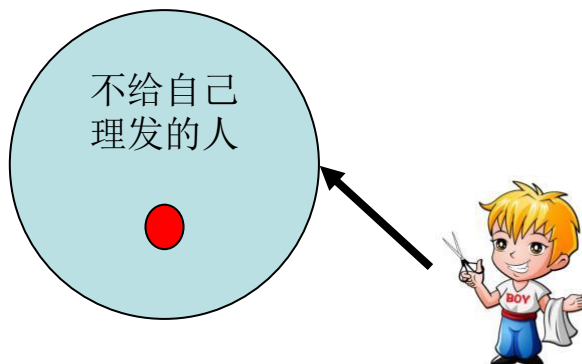
如果这个人说的是假话，即“我没有说假话”，也就是他说的是真话，矛盾。



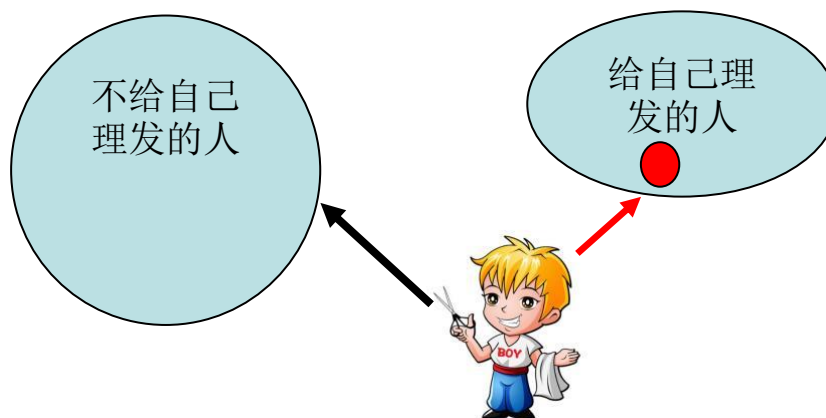


我只给村里所有那些  
不给自己理发的人理发

若理发师不给自己理发



若理发师给自己理发





- 悖论的抽象公式是：

如果事件A发生，则推导出非A，非A发生则推导出A。

说谎者悖论：“我正在说假话”

如果这个人说的是真话，那么根据他的话可以推知：他说的是假话，矛盾

如果这个人说的是假话，即“我没有说假话”，也就是他说的是真话，矛盾

理发师悖论：“我只给村里所有那些 不给自己理发的人 理发”

如果他~~不~~给自己理发，他就属于“不给自己理发的人”，他就要给自己理发，矛盾

如果他给自己理发，他就属于“给自己理发的人”，而按题意他不该给自己理发，矛盾

“此命题是假”也是悖论

如果这个命题是真，即此命题是假，矛盾

如果这个命题是假，即此命题是真，矛盾



### 命题分类:

- 简单命题（也称原子命题, 不能被分解成更简单的命题）
- 复合命题（由简单命题通过**联结词**联结而成的命题）

### 简单命题符号化

- 用小写英文字母  $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i (i \geq 1)$  表示简单命题
- 用“1”表示真(T), 用“0”表示假(F)

例如, 令

$p$ :  $\sqrt{2}$ 是有理数, 则  $p$  的真值为0,

$q$ : 北京是中国的首都, 则  $q$  的真值为1



- 在数理逻辑中，复合命题是由原子命题与逻辑联结词组合而成的，联结词是复合命题中的重要组成部分。
  1. 否定  $\neg$
  2. 合取  $\wedge$
  3. 析取  $\vee$
  4. 蕴涵  $\rightarrow$
  5. 等价  $\leftrightarrow$



**定义1.1** 设  $p$  为命题，复合命题“非 $p$ ”(或“ $p$ 的否定”)称为 $p$ 的**否定式**，记作 $\neg p$ ，符号 $\neg$ 称作**否定联结词**。

规定： $\neg p$  为真 当且仅当  $p$  为假。

■ 否定是一个一元运算。

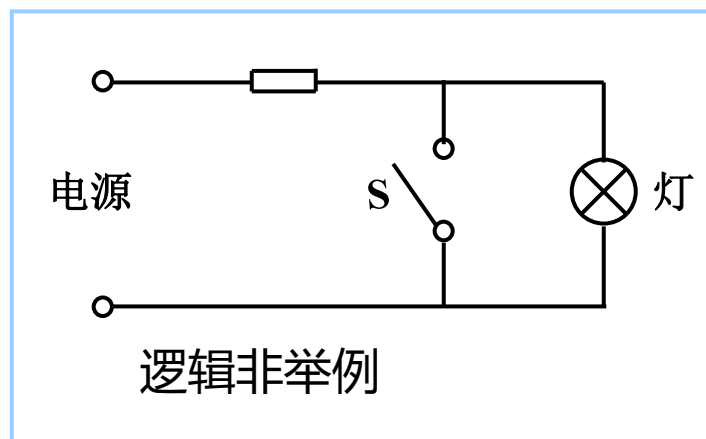
真值表

| $p$ | $\neg p$ |
|-----|----------|
| 0   | 1        |
| 1   | 0        |



# 真值表

| $p$ | $\neg p$ |
|-----|----------|
| 0   | 1        |
| 1   | 0        |



逻辑非举例状态表

| 开关S | 灯 |
|-----|---|
| 断   | 亮 |
| 合   | 灭 |



例1:

$p$ : 北京是一个大城市。

则:

$\neg p$ : 北京不是一个大城市。

或  $\neg p$ : 北京是一个不大的城市。



例2:

$q$  : 每个自然数都是偶数。

不是

$\neg q$  :

每个自然数都不是偶数。 **×**

而是

$\neg q$  :

并非每个自然数都是偶数。





**定义1.2** 设 $p, q$ 为两个命题, 复合命题“ $p$ 并且 $q$ ”(或“ $p$ 与 $q$ ”)称为 $p$ 与 $q$ 的**合取式**, 记作 $p \wedge q$ ,  $\wedge$ 称作**合取联结词**.

规定:  $p \wedge q$ 为真当且仅当 $p$ 与 $q$ 同时为真.

## 真值表

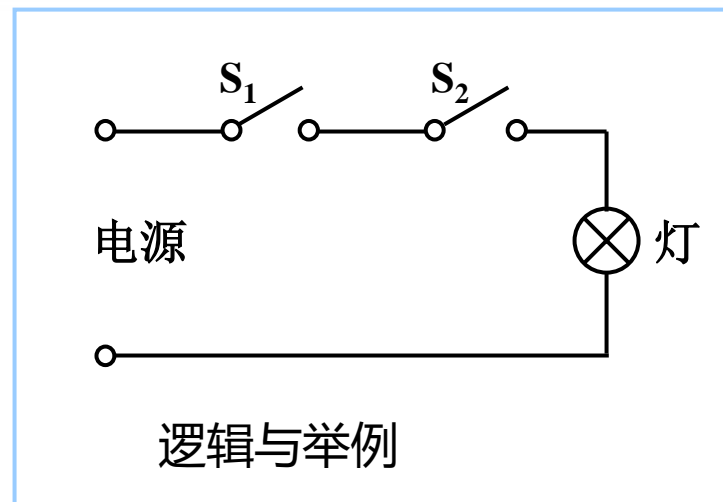
| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| 0   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 1   | 0   | 0            |
| 1   | 1   | 1            |

同真则真  
有假则假



# 真值表

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| 0   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 1   | 0   | 0            |
| 1   | 1   | 1            |



逻辑与举例状态表

| 开关 $S_1$ | 开关 $S_2$ | 灯 |
|----------|----------|---|
| 断        | 断        | 灭 |
| 断        | 合        | 灭 |
| 合        | 断        | 灭 |
| 合        | 合        | 亮 |



**例1:** 将下列命题符号化.

- (1) 吴颖**既**用功**又**聪明.
- (2) 吴颖**不仅**用功**而且**聪明.
- (3) 吴颖**虽然**聪明, **但**不用功.
- (4) 吴颖**不是**不聪明, **而是**不用功.

**(5)** 张辉**与**王丽都是三好生.

**(6)** 张辉与王丽是同学.

解: 令  $p$ : 吴颖用功

$q$ : 吴颖聪明

(1)  $p \wedge q$

(2)  $p \wedge q$

(3)  $\neg p \wedge q$

(4)  $\neg p \wedge \neg(\neg q)$

or  $\neg p \wedge q$

**(5)** 设  $p$ : 张辉是三好生,

$q$ : 王丽是三好生

则:  $p \wedge q$

**(6)**  $p$ : 张辉与王丽是同学

**注意:** “张辉与王丽是同学” 是一个原子命题



例2: 设  $p$  : 今天下雨。  
 $q$  : 明天下雨。

则有

$p \wedge q$  : 今天下雨而且明天下雨。

$p \wedge q$  : 今天与明天都下雨。

$p \wedge q$  : 这两天都下雨。

表示合取关系常用词：

- 与、和、且、都
- 一边...一边...
- 不仅...而且...
- 既...又...
- 虽然...但是...
- 不是...而是...



## 例3:

$p$  : 我去看电影

$q$  : 房间里有十张桌子

则有

$p \wedge q$  : 我去看电影和房间里有十张桌子

## 注意:

在逻辑学中是允许的,

但是, 在自然语言中, 此命题没有意义,

因为 $p$ 和 $q$ 没有内在联系。



**定义1.3** 设 $p, q$ 为两个命题，复合命题“ $p$ 或 $q$ ”称作 $p$ 与 $q$ 的析取式，记作 $p \vee q$ ， $\vee$ 称作析取联结词。

规定： $p \vee q$ 为假当且仅当 $p$ 与 $q$ 同时为假。

## 真值表

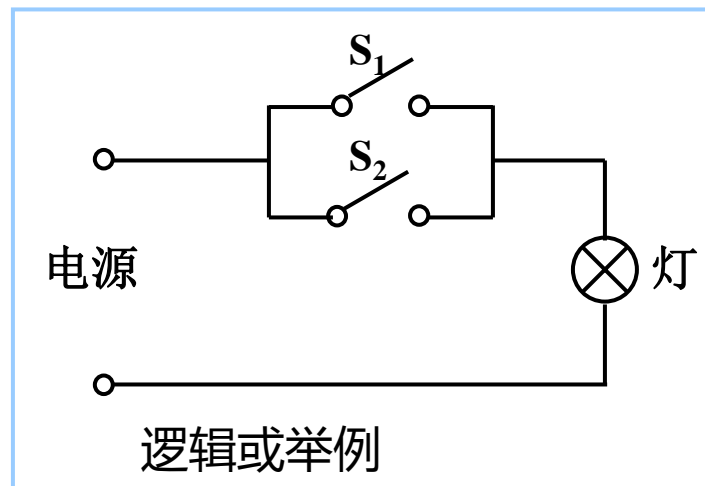
| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| 0   | 0   | 0          |
| 0   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 1          |
| 1   | 1   | 1          |

同假则假  
有真则真



# 真值表

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| 0   | 0   | 0          |
| 0   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 1          |
| 1   | 1   | 1          |



逻辑或举例状态表

| 开关 $S_1$ | 开关 $S_2$ | 灯 |
|----------|----------|---|
| 断        | 断        | 灭 |
| 断        | 合        | 亮 |
| 合        | 断        | 亮 |
| 合        | 合        | 亮 |



**例1** 将下列命题符号化

- (1) 2 或 4 是素数.
- (2) 2 或 3 是素数.
- (3) 4 或 6 是素数.

•析取表示可兼或

•而自然语言中“或”  
既可以表示“可兼或”  
也可表示“不可兼或”

**(4)** 今天晚上我在家看电视或去影院看电影.

**(5)** 王小红生于 1975 年或 1976 年.

(1)—(3) 为：可兼或（相容或）

**(4)—(5)** 为：不可兼或（排斥或）





**例1** 将下列命题符号化

- (1) 2 或 4 是素数.
- (2) 2 或 3 是素数.
- (3) 4 或 6 是素数.

解

- (1) 令  $p$ :2是素数,  $q$ :4是素数,  $p \vee q$
- (2) 令  $p$ :2是素数,  $q$ :3是素数,  $p \vee q$
- (3) 令  $p$ :4是素数,  $q$ :6是素数,  $p \vee q$



例1 将下列命题符号化

(4) 今天晚上我在家看电视或去影院看电影.

(5) 王小红生于 1975 年或 1976 年.

解

(4) 令  $p$ : 今天晚上我在家看电视,  $q$ : 今天晚上我去影院看电影



$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

(5)  $p$ : 王小红生于 1975 年,  $q$ : 王小红生于 1976 年,

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

注意: 他做了二十或三十道题.

这是一个原子命题, “或” 是大约的意思



**定义1.4** 设 $p, q$ 为两个命题，复合命题“如果 $p$ ，则 $q$ ”称作 $p$ 与 $q$ 的**蕴涵式**，记作 $p \rightarrow q$ ，并称 $p$ 是蕴涵式的**前件**， $q$ 为蕴涵式的**后件**， $\rightarrow$ 称作**蕴涵联结词**。

规定： $p \rightarrow q$ 为假当且仅当  $p$ 为真 $q$ 为假。

## 真值表

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0   | 0   | 1                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 1   | 1   | 1                 |

前真后假则假





- (1)  $p \rightarrow q$  的逻辑关系:  $p$  为  $q$  的充分条件,  
或者:  $q$  为  $p$  的必要条件。
- (2) “如果  $p$ , 则  $q$ ” 有很多不同的表述方法:
- 若  $p$ , 就  $q$
  - 只要  $p$ , 就  $q$
  - 只有  $q$ , 才  $p$
  - 除非  $q$ , 才  $p$
  - 除非  $q$ , 否则非  $p$
  - $p$  仅当  $q$
  - .....
- } 如果不  $q$ , 则不  $p$
- (3) 当  $p$  为假时,  $p \rightarrow q$  恒为真, 称为空证明
- (4) 常出现的错误: 不分充分与必要条件



例1 设  $p$ : 天冷,  $q$ : 小王穿羽绒服, 将下列命题符号化



(1) 只要天冷, 小王就穿羽绒服.

$$p \rightarrow q$$

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0   | 0   | 1                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 1   | 1   | 1                 |

(2) 只有天冷, 小王才穿羽绒服.

$$q \rightarrow p$$

| $p$ | $q$ | $q \rightarrow p$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0   | 0   | 1                 |
| 0   | 1   | 0                 |
| 1   | 0   | 1                 |
| 1   | 1   | 1                 |



**例1** 设  $p$ : 天冷,  $q$ : 小王穿羽绒服, 将下列命题符号化

(3) 因为天冷, 所以小王穿羽绒服.

$$p \rightarrow q$$

(4) 若小王不穿羽绒服, 则天不冷.

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

$$\text{or } p \rightarrow q$$

**注意:**  $p \rightarrow q$  与  $\neg q \rightarrow \neg p$  等值 (真值相同)



**例1** 设  $p$ : 天冷,  $q$ : 小王穿羽绒服, 将下列命题符号化

(5) 除非天冷, 小王才穿羽绒服.  $\neg p \rightarrow \neg q$  or  $q \rightarrow p$

(6) 除非小王穿羽绒服, 否则天不冷.  $\neg q \rightarrow \neg p$  or  $p \rightarrow q$

(7) 如果天不冷, 则小王不穿羽绒服.  $\neg p \rightarrow \neg q$  or  $q \rightarrow p$

(8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候.  $q \rightarrow p$



## 例2

- 如果今天是星期天, 那么  $2+3=5$ .  
(永为真)
- 如果今天是星期天, 那么  $2+3=6$ .  
(除星期天外, 天天真)

• 在自然语言中, “如果..., 则...” 是有因果关系的。但在数理逻辑中, 只要  $p$  和  $q$  能够分别确定真值 (不管  $p$  和  $q$  是否有内在关系), 则  $p \rightarrow q$  即成为命题。





**定义1.5** 设  $p, q$  为两个命题，复合命题“ $p$ 当且仅当 $q$ ”称作  $p$ 与 $q$ 的**等价式**，记作 $p \leftrightarrow q$ ， $\leftrightarrow$ 称作**等价联结词**。

规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 $p$ 与 $q$ 同时为真或同时为假。

$p \leftrightarrow q$  的逻辑关系： $p$ 与 $q$ 互为充分必要条件。

## 真值表

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 0   | 0   | 1                     |
| 0   | 1   | 0                     |
| 1   | 0   | 0                     |
| 1   | 1   | 1                     |

同则真  
异则假



**例1** 求下列复合命题的真值

(1)  $2 + 2 = 4$  当且仅当  $3 + 3 = 6$ . 1

(2)  $2 + 2 = 4$  当且仅当 3 是偶数. 0

(3)  $2 + 2 = 4$  当且仅当 太阳从东方升起. 1

(4)  $2 + 2 = 4$  当且仅当 美国位于非洲. 0

(5) 函数  $f(x)$  在  $x_0$  可导的充要条件是 它在  $x_0$  连续. 0

**例2**

- 如果两个三角形全等,则它们的三组对应边相等;  
反之亦然.
- 当王晓红心情愉快时, 她就唱歌;  
反之, 当她唱歌时, 一定心情愉快.

**表示  $p \leftrightarrow q$  的常用词 :**

- $p$ 当且仅当 $q$ .
- $p$ 是 $q$ 的充要条件.
- 如果 $p$ 则 $q$ ;反之亦然.



- 本小节中 $p, q, r, \dots$  均表示命题.
- 联结词集为 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ,  $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$ 为基本复合命题. 其中要特别注意理解 $p \rightarrow q$ 的涵义.
- 反复使用 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 中的联结词组成更为复杂的复合命题.
- 联结词的运算顺序:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ , 同级按先出现者先运算.

## 课堂练习:

设  $p: \sqrt{2}$  是无理数,  $q: 3$  是奇数,

$r$ : 苹果是方的,  $s$ : 太阳绕地球转

则复合命题  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((r \wedge \neg s) \vee \neg p)$  的真值?

**F**



| 逻辑联结词             | 记作                    | 读作             | 常用的汉语表示词语  | 运算 |
|-------------------|-----------------------|----------------|--|----|
| $\neg$            | $\neg p$              | 非 $p$          | 不, 并非  | 一元 |
| $\wedge$          | $p \wedge q$          | $p$ 且 $q$      | 与、和、且、都<br>一边 ... 一边 ...<br>不仅 ... 而且 ...<br>既 ... 又 ...<br>虽然 ... 但是 ...<br>不是 ... 而是 ...                                   | 二元 |
| $\vee$            | $p \vee q$            | $p$ 或 $q$      | 或<br>或者  | 二元 |
| $\rightarrow$     | $p \rightarrow q$     | 如果 $p$ , 则 $q$ | 如果 $p$ , 那么 $q$<br>若 $p$ , 则 $q$<br>只要 $p$ , 就 $q$<br>只有 $q$ , 才 $p$<br>$p$ 仅当 $q$<br>除非 $q$ , 才 $p$<br>除非 $q$ , 否则非 $p$ ... | 二元 |
| $\leftrightarrow$ | $p \leftrightarrow q$ | $p$ 当且仅当 $q$   | 如果 $p$ 则 $q$ ; 反之亦然  | 二元 |



- 否定  $\neg$
- 合取  $\wedge$  同真则真，有假则假（11 1）
- 析取  $\vee$  同假则假，有真则真（00 0）
- 蕴涵  $\rightarrow$  前真后假则假（10 0）
- 等价  $\leftrightarrow$  同则真，异则假

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| 0   | 0   | 1        | 0            | 0          | 1                 | 1                     |
| 0   | 1   | 1        | 0            | 1          | 1                 | 0                     |
| 1   | 0   | 0        | 0            | 1          | 0                 | 0                     |
| 1   | 1   | 0        | 1            | 1          | 1                 | 1                     |



## 主要内容

- 1.1 命题与联结词
  - 命题及其分类
  - 联结词与复合命题
- 1.2 命题公式及其赋值



### 命题变项与合式公式

- 命题变项
- 合式公式
- 合式公式的层次

### 公式的赋值

- 公式赋值
- 真值表
- 公式类型





### 命题变项与合式公式

- 命题变项
- 合式公式
- 合式公式的层次

### 公式的赋值

- 公式赋值
- 真值表
- 公式类型



- 命题常项： 一个命题标识符表示确定的命题，该标识符称为命题常项。
- 命题变项（命题变元）： 命题标识符如仅是表示任意命题的位置标志，就称为命题变项。
- 常项与变项均用  $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots$  等表示.



**定义1.6 合式公式**（简称公式）的递归定义：

- (1) 单个命题变项和命题常项是合式公式, 称作**原子命题公式**
- (2) 若 $A$ 是合式公式, 则  $(\neg A)$ 也是
- (3) 若 $A, B$ 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是
- (4) 只有有限次地应用(1)—(3) 形成的符号串才是合式公式

联结词的运算顺序:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$   
外层括号可以省去

**定义1.7**

- (1) 若公式 $A$ 是单个命题变项, 则称 $A$ 为**0层公式**.
- (2) 称 $A$ 是 **$n+1(n \geq 0)$ 层公式**是指下面情况之一:
  - (a)  $A = \neg B$ ,  $B$  是  $n$  层公式;
  - (b)  $A = B \wedge C$ , 其中 $B, C$  分别为  $i$  层和  $j$  层公式, 且  $n = \max(i, j)$ ;
  - (c)  $A = B \vee C$ , 其中  $B, C$  的层次及  $n$  同(b);
  - (d)  $A = B \rightarrow C$ , 其中 $B, C$  的层次及  $n$  同(b);
  - (e)  $A = B \leftrightarrow C$ , 其中 $B, C$  的层次及  $n$  同(b).
- (3) 若公式 $A$ 的层次为 $k$ , 则称 $A$ 为 **$k$ 层公式**.



例如：公式

■  $A=p$

0层

■  $B=\neg p$

1层

■  $C=\neg p \rightarrow q$

2层

■  $D=\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$

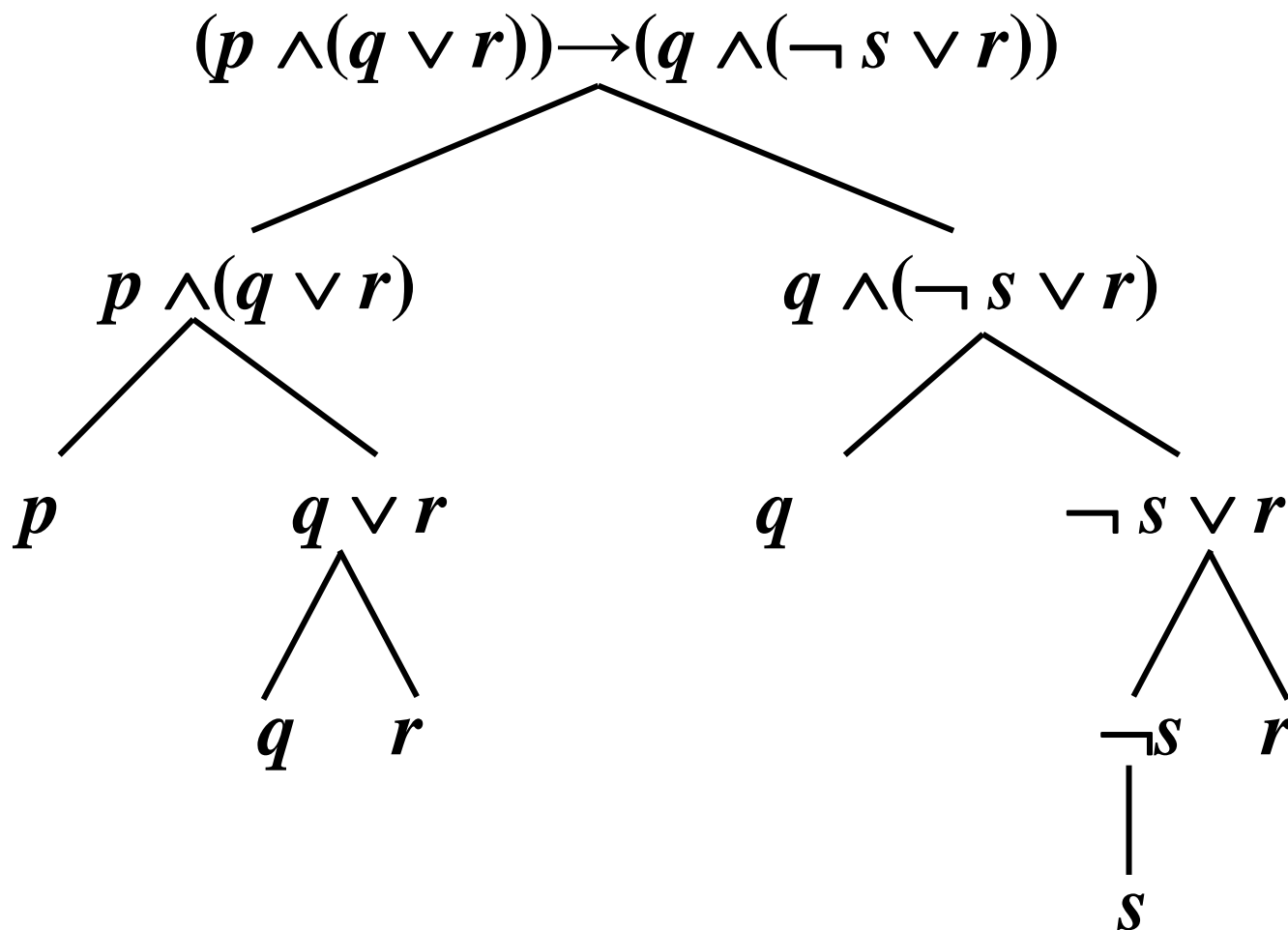
3层

■  $E=((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$

4层



公式  $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow (q \wedge (\neg s \vee r))$  : 4层公式





### 命题变项与合式公式

- 命题变项
- 合式公式
- 合式公式的层次

### 公式的赋值

- 公式赋值
- 真值表
- 公式类型



**定义1.8** 设 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 是出现在公式 $A$ 中的全部命题变项, 给 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 各指定一个真值, 称为对 $A$ 的一个**赋值**或**解释**.

- 若使 $A$ 为1, 则称这组值为 $A$ 的**成真赋值**;
- 若使 $A$ 为0, 则称这组值为 $A$ 的**成假赋值**.





- $A$ 中仅出现  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , 给 $A$ 赋值 $\alpha=\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ 是指  
 $p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \dots, p_n=\alpha_n$ ,  
其中,  $\alpha_i=0$ 或 $1$ ,  $\alpha_i$ 之间不加标点符号 ( $i=1, 2, \dots, n$ )
- $A$ 中仅出现  $p, q, r, \dots$ , 给 $A$ 赋值 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$ 是指  
 $p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3 \dots$
- 含 $n$ 个命题变项的公式有 $2^n$ 个赋值.  
如公式 $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$ 有 $2^3=8$ 个赋值.  
其中:  
000, 010, 101, 110是成真赋值;  
001, 011, 100, 111是成假赋值.





**定义1.9** 将命题公式 $A$ 在所有赋值下取值的情况列成表, 称作 $A$ 的**真值表**.

构造真值表的步骤:

- (1) 找出公式中所含的全部命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$  (若无下角标则按字母顺序排列), 列出 $2^n$ 个全部赋值, 从 $00\dots 0$ 开始, 按二进制加法, 每次加1, 直至 $11\dots 1$ 为止.
- (2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次.
- (3) 对每个赋值依次计算各层次的真值, 直到最后计算出公式的真值为止.



**例** 写出下列公式的真值表, 并求它们的成真赋值和成假赋值:

(1)  $(p \vee q) \rightarrow \neg r$

(2)  $(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$

(3)  $\neg (\neg p \vee q) \wedge q$



$$(1) A = (p \vee q) \rightarrow \neg r$$

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee q$ | $\neg r$ | $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ |
|-----|-----|-----|------------|----------|---------------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 0          | 1        | 1                               |
| 0   | 0   | 1   | 0          | 0        | 1                               |
| 0   | 1   | 0   | 1          | 1        | 1                               |
| 0   | 1   | 1   | 1          | 0        | 0                               |
| 1   | 0   | 0   | 1          | 1        | 1                               |
| 1   | 0   | 1   | 1          | 0        | 0                               |
| 1   | 1   | 0   | 1          | 1        | 1                               |
| 1   | 1   | 1   | 1          | 0        | 0                               |

成真赋值:000,001,010,100,110; 成假赋值:011,101,111



$$(2) B = (q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$$

| $p$ | $q$ | $q \rightarrow p$ | $(q \rightarrow p) \wedge q$ | $(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$ |
|-----|-----|-------------------|------------------------------|--|
| 0   | 0   | 1                 | 0                            | 1  |
| 0   | 1   | 0                 | 0                            | 1  |
| 1   | 0   | 1                 | 0                            | 1  |
| 1   | 1   | 1                 | 1                            | 1  |

成真赋值:00,01,10,11; 无成假赋值



(3)  $C = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$  的真值表

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ | $\neg(\neg p \vee q)$ | $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$ |
|-----|-----|----------|-----------------|-----------------------|--------------------------------|
| 0   | 0   | 1        | 1               | 0                     | 0                              |
| 0   | 1   | 1        | 1               | 0                     | 0                              |
| 1   | 0   | 0        | 0               | 1                     | 0                              |
| 1   | 1   | 0        | 1               | 0                     | 0                              |

成假赋值:00,01,10,11; 无成真赋值

# 离散数学 构造 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 的真值表



今天晚上我在家看电视或去影院看电影。

解：设  $p$ ：今天晚上我在家看电视。

$q$ ：今天晚上我去影院看电影。

本命题可表示为： $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

不可以表示为： $p \vee q$

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ | $\neg p \wedge q$ | $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ |
|-----|-----|----------|----------|-------------------|-------------------|--|
| 0   | 0   | 1        | 1        | 0                 | 0                 | 0  |
| 0   | 1   | 1        | 0        | 0                 | 1                 | 1  |
| 1   | 0   | 0        | 1        | 1                 | 0                 | 1  |
| 1   | 1   | 0        | 0        | 0                 | 0                 | 0  |



| $p$ $q$ $r$ | $p \wedge q \wedge r$ | $p \vee q \vee r$ |
|-------------|-----------------------|-------------------|
| 0 0 0       | 0                     | 0                 |
| 0 0 1       | 0                     | 1                 |
| 0 1 0       | 0                     | 1                 |
| 0 1 1       | 0                     | 1                 |
| 1 0 0       | 0                     | 1                 |
| 1 0 1       | 0                     | 1                 |
| 1 1 0       | 0                     | 1                 |
| 1 1 1       | 1                     | 1                 |

- 目前包括Google在内的很多搜索引擎在使用“**软合取**”语义
- 所谓“**软合取**”是指在对一个包含多个词项的查询进行检索时，检索中的文档中只要出现大部分查询词项即可，并不要求出现全部查询词项





### 定义1.10

- (1) 若 $A$ 在它的任何赋值下均为真, 则称 $A$ 为**重言式**或**永真式**;
- (2) 若 $A$ 在它的任何赋值下均为假, 则称 $A$ 为**矛盾式**或**永假式**;
- (3) 若 $A$ 不是矛盾式, 则称 $A$ 是**可满足式**.

- 重言式 $A$ 的否定 $\neg A$ 是矛盾式; 矛盾式 $A$ 的否定 $\neg A$ 是重言式。
- 重言式一定是可满足式, 可满足式不一定是重言式。
- 可满足式的否定不一定为不可满足式(即为矛盾式)。
- 通过真值表可以求出公式的全部成真赋值与成假赋值, 并判断公式的类型。



$$(1) A = (p \vee q) \rightarrow \neg r$$

| $p$ $q$ $r$ | $p \vee q$ | $\neg r$ | $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ |
|-------------|------------|----------|---------------------------------|
| 0 0 0       | 0          | 1        | 1                               |
| 0 0 1       | 0          | 0        | 1                               |
| 0 1 0       | 1          | 1        | 1                               |
| 0 1 1       | 1          | 0        | 0                               |
| 1 0 0       | 1          | 1        | 1                               |
| 1 0 1       | 1          | 0        | 0                               |
| 1 1 0       | 1          | 1        | 1                               |
| 1 1 1       | 1          | 0        | 0                               |

成真赋值:000,001,010,100,110; 成假赋值:011,101,111

**重言式**

$$(2) B = (q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$$

| $p$ | $q$ | $q \rightarrow p$ | $(q \rightarrow p) \wedge q$ | $(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$ |
|-----|-----|-------------------|------------------------------|--|
| 0   | 0   | 1                 | 0                            | 1  |
| 0   | 1   | 0                 | 0                            | 1  |
| 1   | 0   | 1                 | 0                            | 1  |
| 1   | 1   | 1                 | 1                            | 1  |

成真赋值:00,01,10,11; 无成假赋值



矛盾式

(3)  $C = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$  的真值表

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ | $\neg(\neg p \vee q)$ | $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$ |
|-----|-----|----------|-----------------|-----------------------|--------------------------------|
| 0   | 0   | 1        | 1               | 0                     | 0                              |
| 0   | 1   | 1        | 1               | 0                     | 0                              |
| 1   | 0   | 0        | 0               | 1                     | 0                              |
| 1   | 1   | 0        | 1               | 0                     | 0                              |

成假赋值:00,01,10,11; 无成真赋值



- 在逻辑研究和计算机推理以及决策判断中，人们对于所研究的命题，最关心的莫过于“真”、“假”问题，所以重言式在数理逻辑研究中占有特殊且重要的地位。
- 能否给出一个可行方法，对任意的公式，判定其是否是永真公式称为判定问题。
- 因为一个命题公式的解释的数目是有穷的，所以命题逻辑的判定问题是可解的(可判定的，可计算的)，亦即，命题公式的恒真、恒假性是可判定的。

# 离散数学 第一章 命题逻辑的基本概念（回顾）



## ch1命题逻辑的基本概念

### 1.1 命题与联结词

#### 命题

定义：判断结果唯一的陈述句

命题的真值：判断的结果

感叹句、祈使句、疑问句、悖论都不是命题

#### 联结词

否定  $\neg$

合取  $\wedge$  1 1 1

析取  $\vee$  0 0 0 可兼或

蕴涵  $\rightarrow$  1 0 0

等价  $\leftrightarrow$  同则真，异则假

### 1.2 命题公式及其赋值

合式公式 合式公式的层次

#### 公式的赋值

成真赋值

成假赋值

#### 真值表

#### 公式类型

重言式或永真式

矛盾式或永假式

可满足式（非矛盾式）

命题公式的恒真、恒假性是可判定的