第6讲　5-1~5-7 电容元件和电感元件

第二篇 动态电路的时域分析

第五章 电容元件与电感元件

电阻电路：任一时刻的响应与该时刻的激励有关，无记忆(memoryless)。

动态元件：电容和电感元件的伏安关系都涉及对电流、电压的微分或积分，我们称这两种元件为动态元件(dynamic element)。

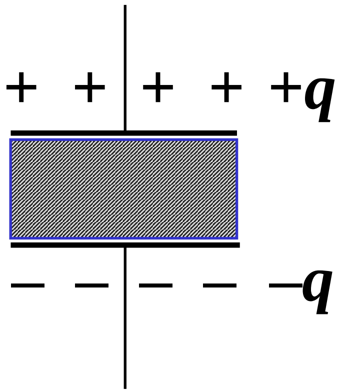
动态电路：至少包含一个动态元件的电路称为动态电路。任一时刻的响应与激励的全部过去历史有关，有记忆(memory)。

集总电路不是电阻电路就是动态电路，均要服从两类约束（KVL、KCL）。

§5-1 电容元件

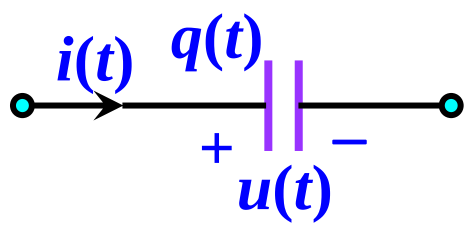
1. 电容元件(capacitor) —集总参数元件

存储电荷，建立电场，存储电场能量

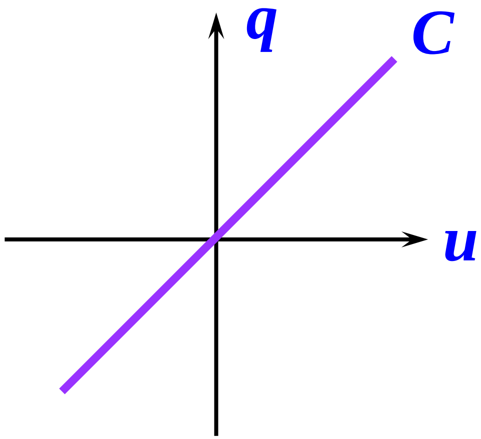


定义：任一时刻，一个二端元件的电荷 $q(t)$ 与其端电压 $u(t)$ 的关系由 $q-u$ 平面上的一条曲线所决定，此二端元件称为**电容元件**。

电容符号：



线性时不变电容



$q(t) = Cu(t)$

定义：若 u-q (伏库)曲线是一条过原点的直线，且不随时间而改变，此二端元件称为线性时不变电容元件。

2. 电容量C (capacitance)

描述给定电压，电容器储存电荷的能力。

对线性电容 $C=\dfrac{q(t)}{u(t)}$ 单位：法拉(F) 微法(μF)

对平行板电容器

$$\left.\begin{array}{l} C \propto S \\ C \propto \dfrac{1}{d} \\ C \propto \varepsilon_r \end{array}\right\} \Rightarrow C=\frac{\varepsilon_r S}{4\pi k d}$$

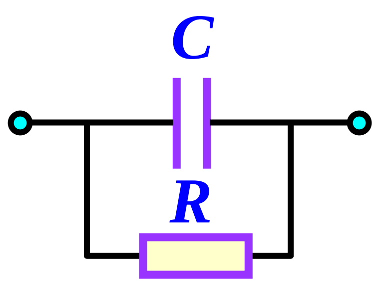
3. 电容器的参数

（1）电容量 C （2）额定电压

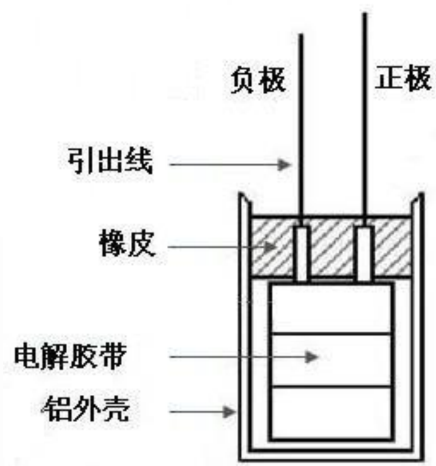
4. 理想与实际电容器

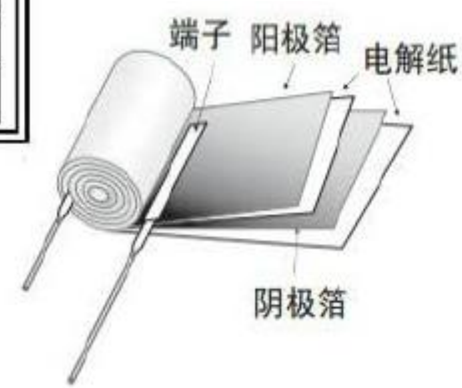
理想电容器： 只存储电场能量，本身无能量损耗。

实际电容器： 其介质不能做到完全绝缘，故有一定程度的漏电。等效电路为：*C* 与 *R* 并联。



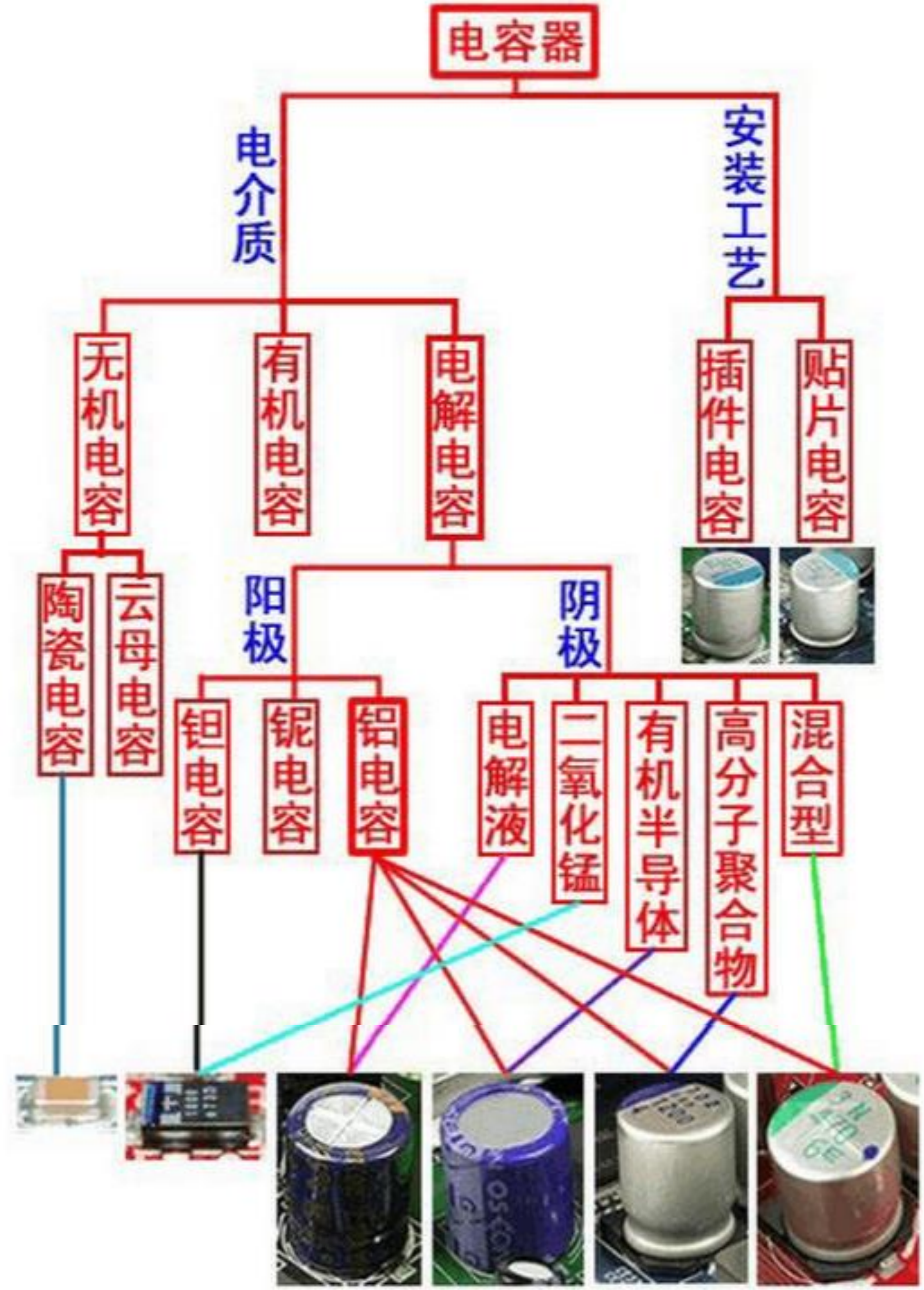
实际电容器等效电路





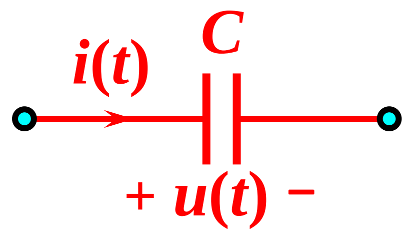
铝电解电容器

5. 电容器分类


电容器
电介质
安装工艺
无机电容
有机电容
电解电容
插件电容
贴片电容
陶瓷电容
云母电容
阳极
阴极
钽电容
铌电容
铝电容
电解液
二氧化锰
有机半导体
高分子聚合物
混合型

§ 5-2 电容的VCR

关联参考方向电容



1. 微分关系的VCR

$$i(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}Cu}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

直流电路中→开路

隔直通交

2. 积分关系的VCR

$$u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0}i(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$=u(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i(\xi)\,\mathrm{d}\xi\quad(t\geq t_0)$$

电容电压初始值

§5-3 电容电压的连续性质和记忆性质

1. 电容电压的连续性质

$$u_C(t_0+\Delta t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} i(\xi)\mathrm{d}\xi \quad (t\geq t_0)$$

若$i(\xi)$在$[t_a,t_b]$有界，则

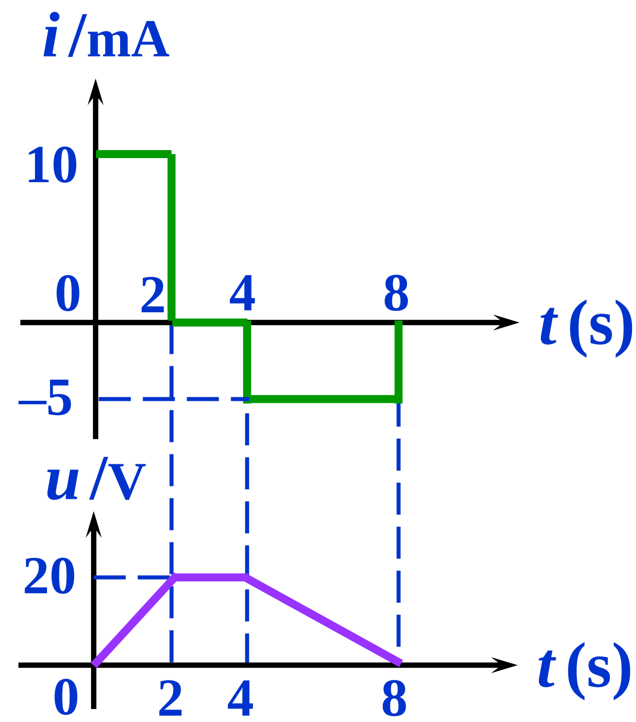
$$\lim_{\Delta t\to 0} u_C(t_0+\Delta t)=u_C(t_0),$$

即电容电压 $u_C(t)$ 在 (t_a, t_b) 内连续。

特别是，对任意时刻 $t\in(t_a,t_b)$，有

$$u_C(t_-)=u_C(t_+)$$

若电容电流有界，则电容电压不能跃变。



图：电容电流 $i(t)$ 不连续，
但电容电压 $u(t)$连续。

2. 电容电压的记忆性质

- $u_C(t)=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

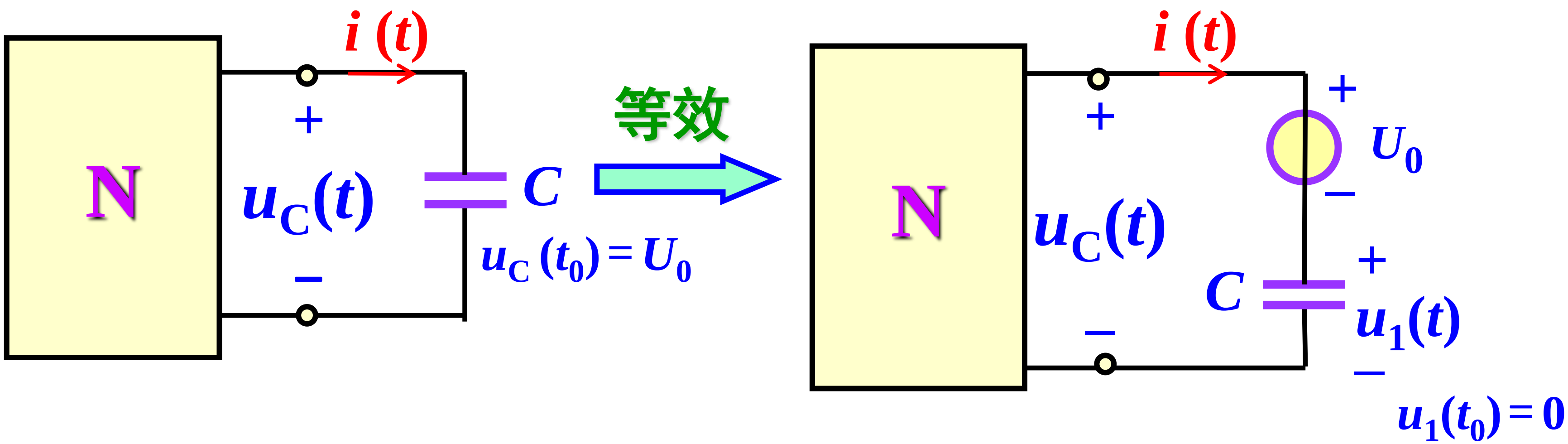
电容电压取决于电容电流的全部历史，具有“记忆”电流的性质，称为记忆元件或惯性元件。

- $u_C(t)=u_C(t_0)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

必须考虑电容电压初始值$u_C(t_0)$。

3. 电容的等效电路

$$u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\xi)\,\mathrm{d}\xi = U_0+u_1(t) \quad t\geqslant t_0$$



结论：一个已被充电的电容(初始值 $u_C(t_0)=U_0$)可等效为一个未充电的电容$u_1(t)$与电压源U_0相串联的电路。

§5-4 电容的储能

1. 电容的功率

瞬时功率(吸收) $p(t)=u(t)\cdot i(t)$ （关联参考方向）

2. 电容的储能

电容在 (t_1, t_2) 区间内的储能为：

$$w_C(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_{t_1}^{t_2} u(\xi)\cdot i(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} u(\xi)\cdot C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi=C\int_{u(t_1)}^{u(t_2)} u\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}C\left[\,u^2(t_2)-u^2(t_1)\,\right]$$

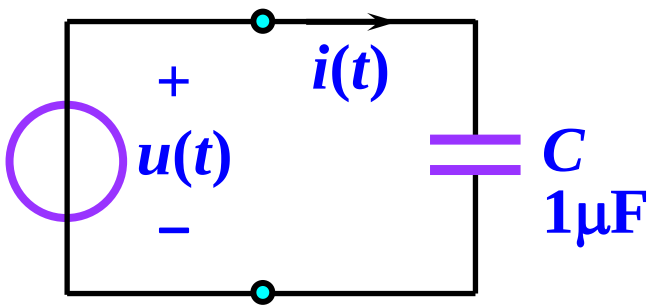
任意时刻电容储能

$$w_C(t)=\int_{-\infty}^{t}p(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}Cu^2(t)-\frac{1}{2}Cu^2(-\infty)$$

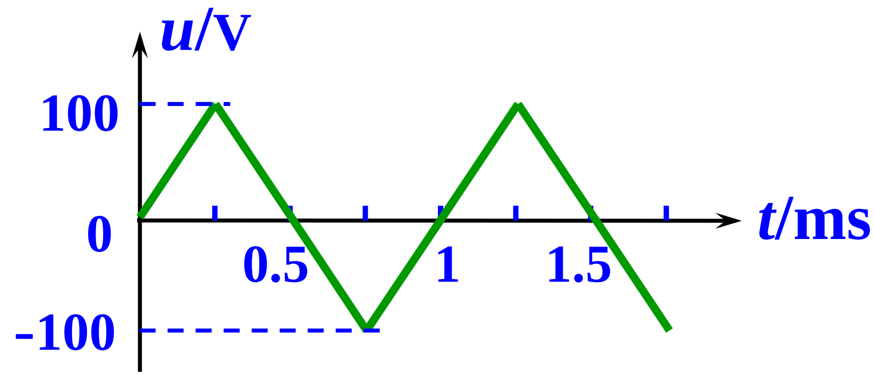
$$\overset{u(-\infty)=0}{=}\frac{1}{2}Cu^2(t)$$

- 电容储能与该时刻的电压值有关，而与电流无关；
- 任一时刻t，电容的储能(吸收能量)≥ 0，电容是无源元件；
- 电容储能$\propto u^2(t)$ — 将u_C称为电路的状态变量，反映了电容的储能状态。

例 电容与电压源 $u(t)$ 相连接的电路如图(a)，$u(t)$的波形为三角波如图 (b) 所示。求电容的电流、功率和储能随时间变化的波形。



图(a)



图(b)

分析： $i(t)=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ ，在三角波每半周期内，$u(t)$ 的变化率为常数，故电容电流$i(t)$为方波。如：0.25 ~ 0.75ms 期间，

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=10^{-6}\left(-\frac{200}{0.5}\times10^{3}\right)=-0.4\mathrm{A}$$

解：(1) $i(t)$ 的波形为方波，幅值为

$$i(t) = -0.4\text{A} \quad (0.25\text{ms}, 0.75\text{ms})$$

$$i(t) = 0.4\text{A} \quad (0.75\text{ms}, 1.25\text{ms})$$

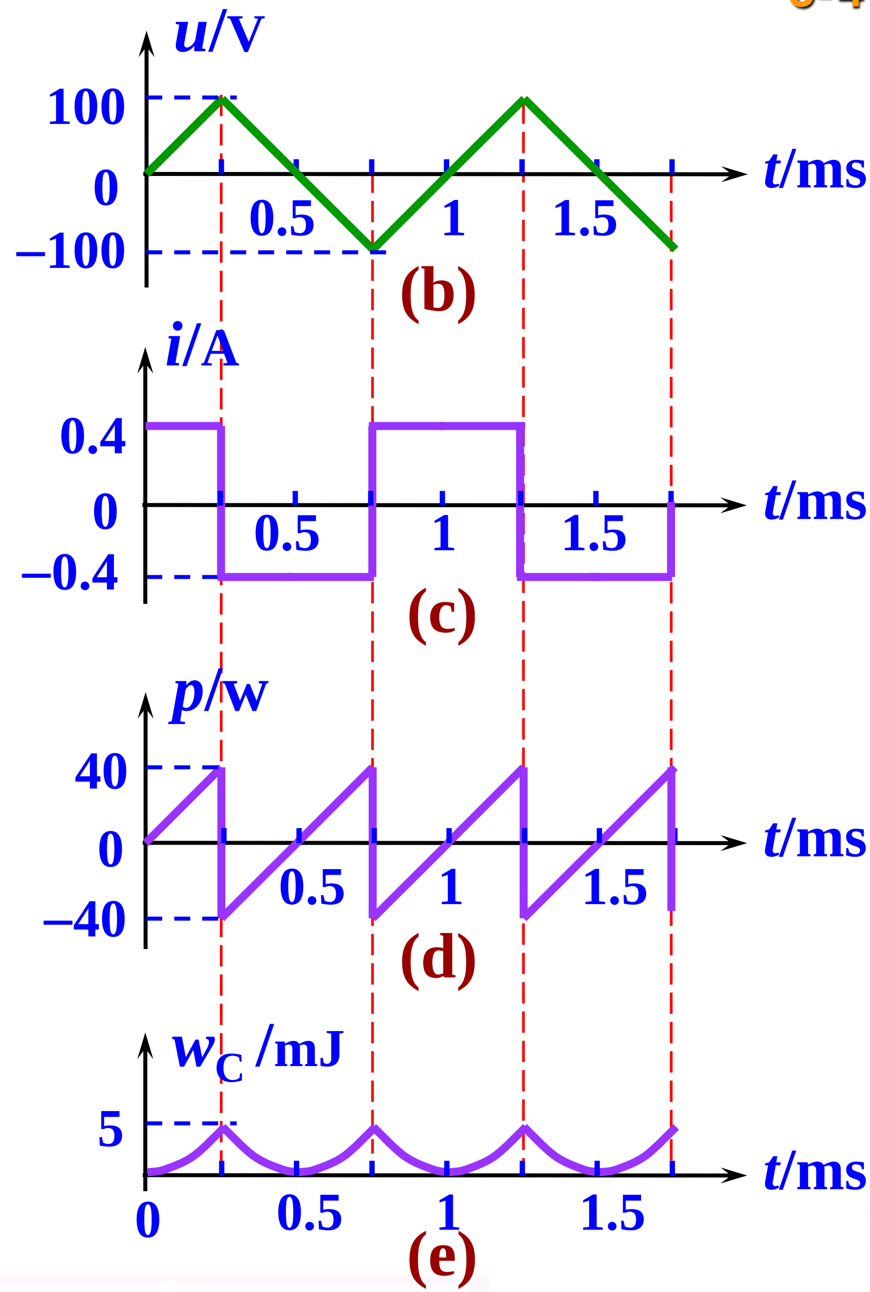
电容电流可能发生越变。

(2) $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

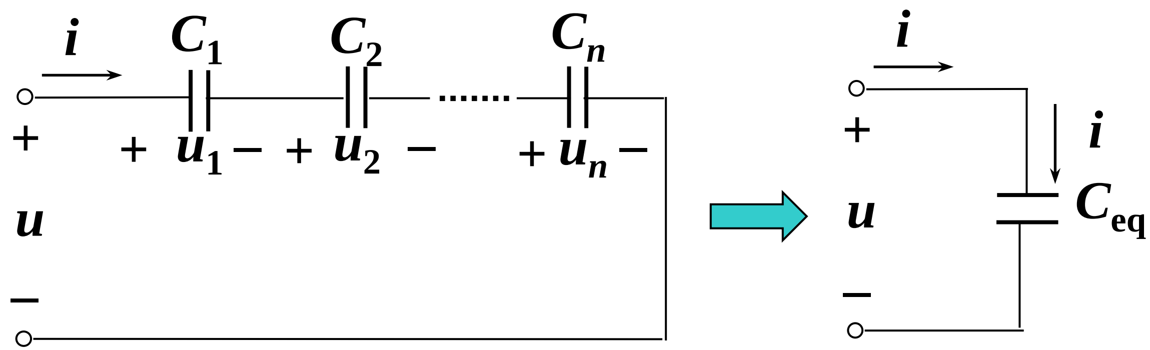
$p(t)$ 的波形为锯齿波，其峰值为 ±40W。电容有时吸收功率，有时提供功率。

(3) $w_C(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$

$w_C(t)$ 的波形为抛物线，其峰值为 5mJ。电容的能量总为正值，但时增时减。



电容的串联



n个电容串联　　　　等效电容

由KVL，有 $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \cdots + u_n(t)$

代入各电容的电压、电流关系式，得

$$u(t) = u_1(0) + \frac{1}{C_1}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau + u_2(0) + \frac{1}{C_2}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau + \cdots + u_n(0) + \frac{1}{C_n}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(0)\right) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= u(0) + \frac{1}{C_{eq}}\int_0^t i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

等效电容与各电容的关系式为

$$\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}$$

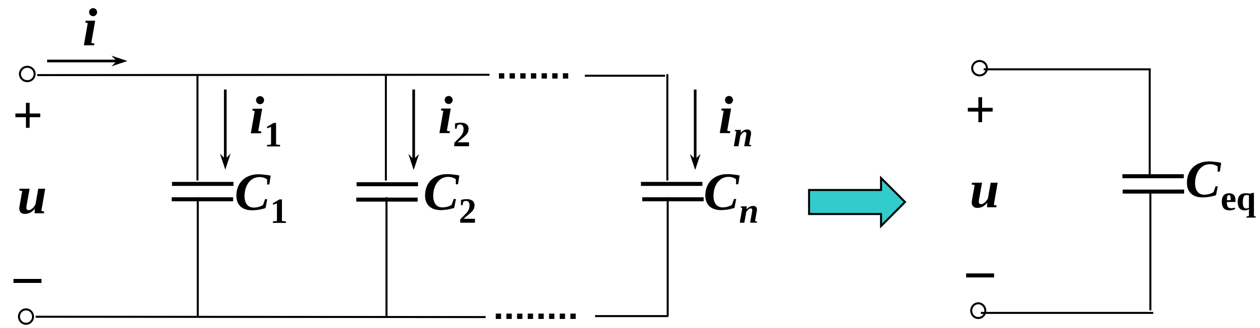
$$u(0)=\sum_{k=1}^{n}u_k(0)$$

结论：n个串联电容的等效电容值的倒数等于各电容值的倒数之和。

当两个电容串联（n=2）时，等效电容值为

$$C_{\mathrm{eq}}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

电容的并联



*n*个电容并联　　　　等效电容

由KCL，有 $i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n$

代入各电容的电压、电流关系式，得

$$i(t) = C_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \cdots + C_n\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$= (C_1 + C_2 + \cdots + C_n)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

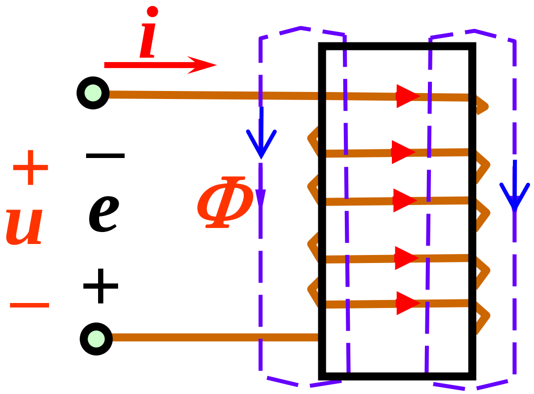
$$= C_{eq}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

并联等效电容与各电容的关系式为

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

结论：*n*个并联电容的等效电容值等于各电容值之和。

知识回顾



磁通 $\Phi = BS$ 单位：韦伯 Wb

磁链 $\psi = N\Phi$ 单位：韦伯 Wb

i，Φ 符合右螺旋

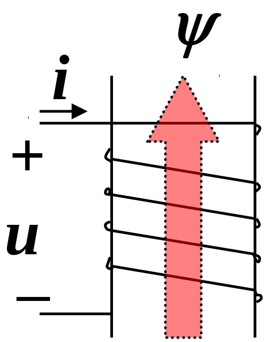
楞次定律 感应电流的磁场要阻碍原磁通的变化。

感应电动势 $e(t) = -\dfrac{d\psi}{dt}$ e 指电压升

感应电压 $u(t) = \dfrac{d\psi}{dt}$ u 指电压降

§5-5 电感元件

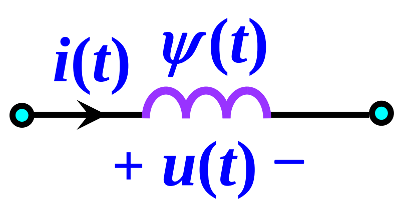
1. 电感元件(inductor) — 产生磁通，存储磁场能量



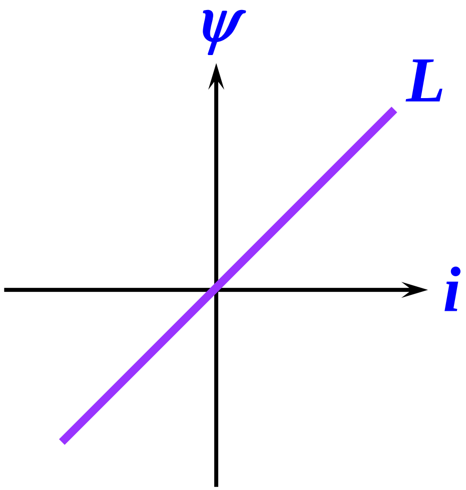
i ,ψ 符合右螺旋

定义：任一时刻，一个二端元件的电流 $i(t)$ 与其磁链 $\psi(t)$ 的关系由 $\psi - i$ 平面上的一条曲线所决定，此二端元件称为电感元件。

电感元件符号：



线性时不变电感



$\psi(t) = L\,i(t)$

定义：若 $\psi - i$ (韦安)曲线是一条过原点的直线，且不随时间而改变，此二端元件称为线性时不变电感元件。

2. 电感量L (inductance)

描述给定电流，电感器储存磁链的能力。

对线性电感 $L=\dfrac{\psi(t)}{i(t)}$ 单位：亨利 （H）

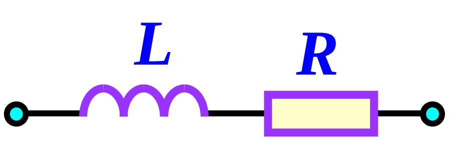
3. 电感器的参数

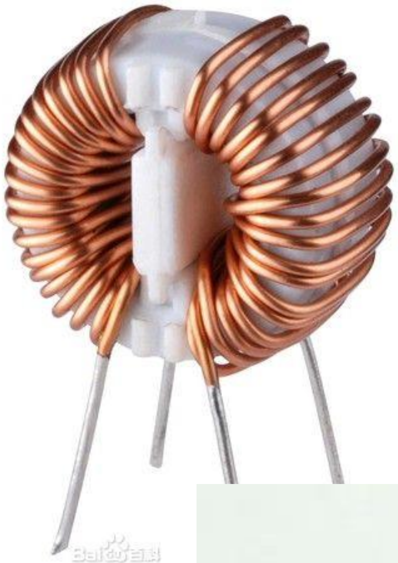
（1）电感量 L； （2）额定电流

4. 实际电感器

导线具有电阻，有能量消耗

可等效为： L 与 R 串联。

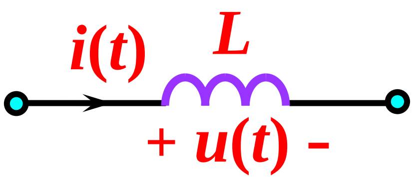





100
5R0
101
101
1R5
100
3R3
220

§5-6 电感的VCR

1. 微分关系



关联参考方向

$$u(t)=\frac{d\psi}{dt}=\frac{dLi}{dt}=L\frac{di}{dt}$$

直流电路中→短路

2. 积分关系

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}u(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

电感电流初始值

§5-7 电容与电感的对偶性 状态变量

1. 电容与电感的对偶性

电容的VCR $$\boxed{i(t)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$ $$q(t)=Cu_C(t)$$

电感的VCR $$\boxed{u(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$ $$\psi(t)=Li_L(t)$$

电容C与电感L为一对对偶量；

电荷q与磁链ψ也是一对对偶量。

2. 电感电流的连续性和记忆性

由L与C的对偶性，可得电感电流的连续性和记忆性：

- 由 $i_L(t)=\dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)\mathrm{d}\xi$

电感电流具有“记忆”电压的性质

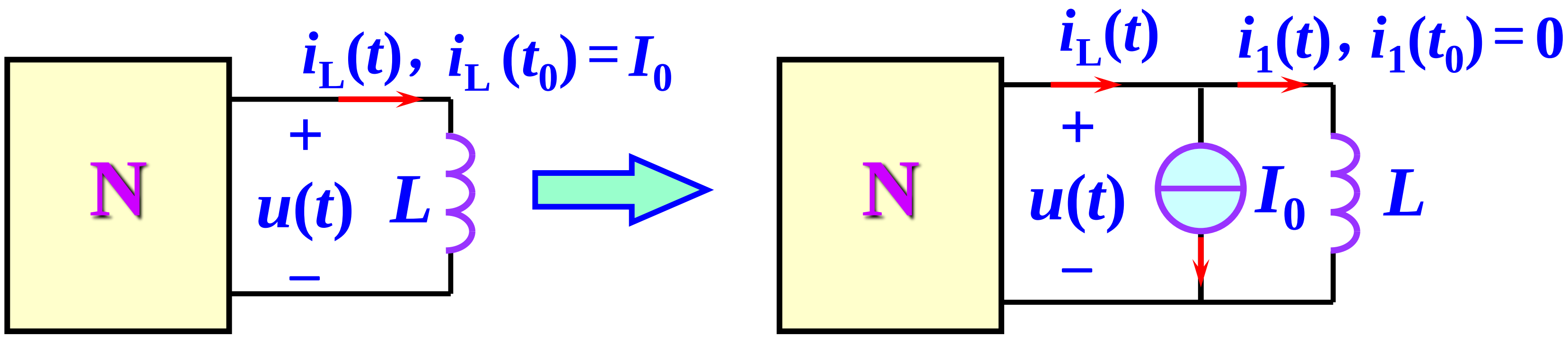
- 电感电压 $u(t)$ 在 $[t_a, t_b]$内有界，则电感电流 $i_L(t)$ 在 (t_a, t_b) 内连续。即对任意时刻 $t_a<t<t_b$，有

$$\boxed{i_L(t_-)=i_L(t_+)}$$

结论：若电感电压有界，则电感电流不能跃变。

3. 电感的等效电路

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\xi)\,d\xi = I_0 + i_1(t) \qquad t \geqslant t_0$$



结论： 一个具有初始电流 $i_L(t_0) = I_0$ 的电感，可等效为一个初始电流为零的电感 $i_1(t)$ 与电流源 I_0 的并联。

4. 电感的储能

任一时刻t 电感的储能：

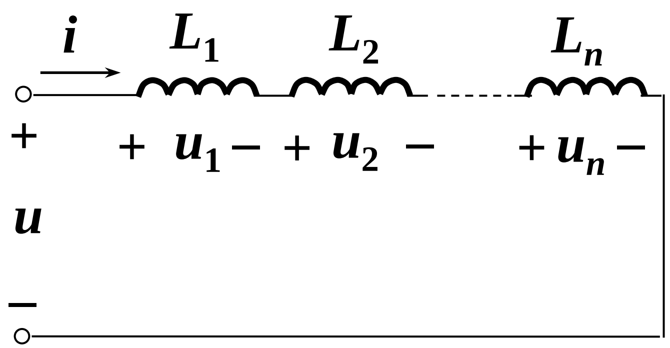
$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$$

$w_L(t) \geq 0$ 电感储能由当前时刻的电流决定，

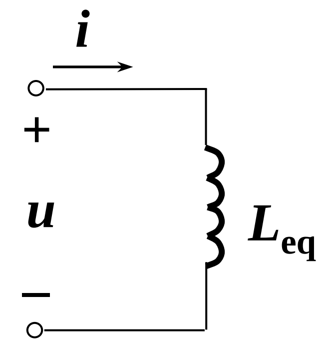
电感是无源元件

i_{L}称为状态变量

电感的串联



n个电感串联



等效电感

根据KVL和电感的电压电流的关系，有

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_n \frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 + \cdots + L_n) \frac{di}{dt}$$

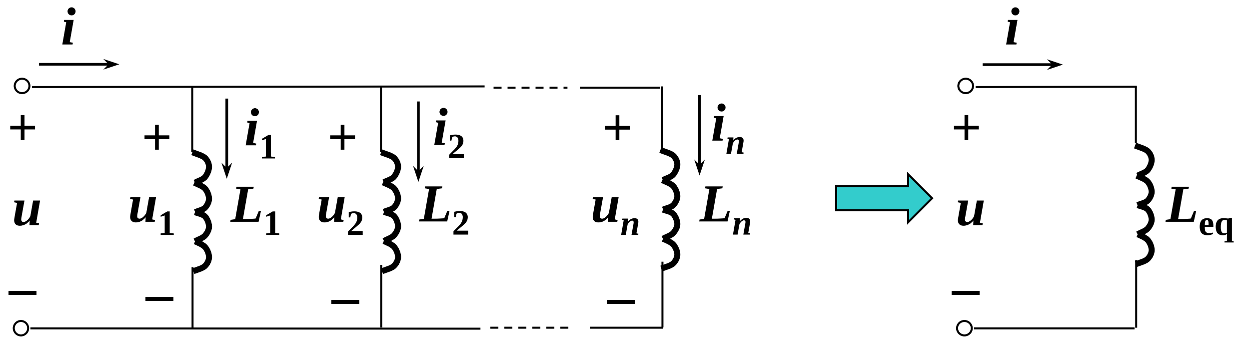
$$= L_{eq} \frac{di}{dt}$$

等效电感与各电感的关系式为

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

结论：n个串联电感的等效电感值等于各电感值之和。

电感的并联



n个电感并联　　等效电感

根据KCL及电感的电压与电流的关系式，有

$$
\begin{aligned}
i(t) &= i_1(t) + i_2(t) + \cdots + i_n(t) \\
&= i_1(0) + \frac{1}{L_1}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau + i_2(0) + \frac{1}{L_2}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau + \cdots + i_n(0) + \frac{1}{L_n}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= i_1(0) + i_2(0) + \cdots + i_n(0) + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}\right)\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= i(0) + \frac{1}{L_{\mathrm{eq}}}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

等效电感与各电感的关系式为

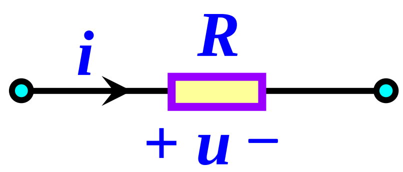
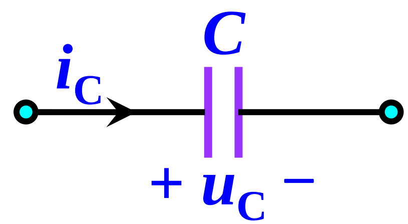
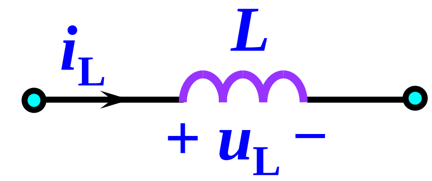
$$\frac{1}{L_{\mathrm{eq}}}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}+\cdots+\frac{1}{L_n}$$

$$i(0)=\sum_{k=1}^{n} i_k(0)$$

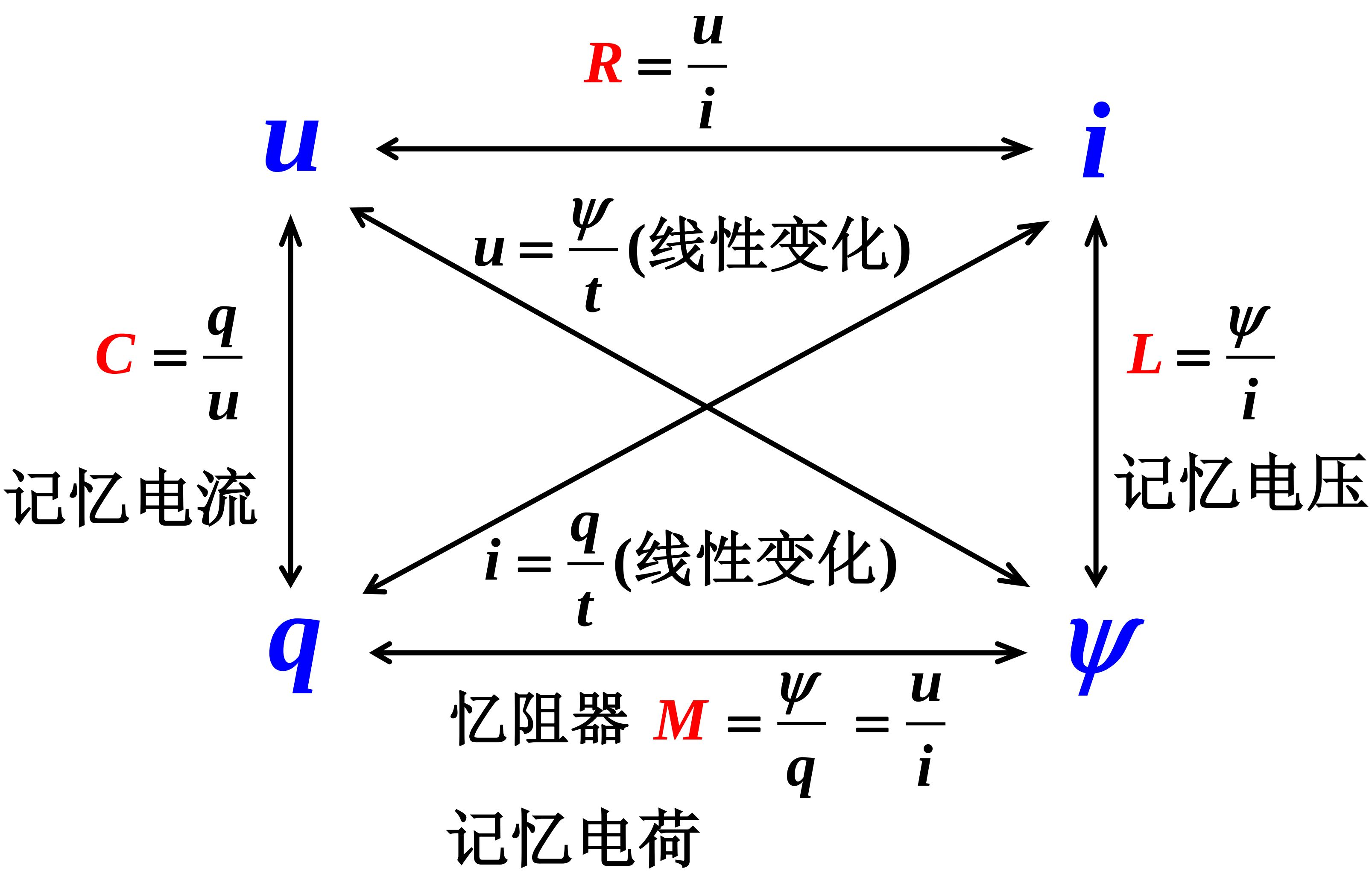
结论：*n*个并联电感的等效电感值 的倒数等于各电感值倒数之和。

当两个电感并联（*n*=2）时，等效电感值为

$$L_{\mathrm{eq}}=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}$$

电阻元件	电容元件	电感元件
		
$u(t)=Ri(t)$	$q(t)=Cu_C(t)$	$\psi(t)=Li_L(t)$
$u(t)=Ri(t)$	$i_C=C\dfrac{du_C}{dt}$	$u_L=L\dfrac{di_L}{dt}$
	$u_C(t)=\dfrac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\xi)d\xi$	$i_L(t)=\dfrac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\xi)d\xi$
$w_R(t)=\int_{t_1}^{t_2}i^2(t)Rdt$	$w_C(t)=\dfrac{1}{2}Cu_C^2(t)$	$w_L(t)=\dfrac{1}{2}Li_L^2(t)$
电流(电压)随电压(电流)瞬间改变	电流为有限值时，电压不能跃变	电压为有限值时，电流不能跃变

线性元件



$R=\frac{u}{i}$
u
i
$u=\frac{\psi}{t}$(线性变化)
$C=\frac{q}{u}$
记忆电流
$L=\frac{\psi}{i}$
记忆电压
$i=\frac{q}{t}$(线性变化)
q
ψ
忆阻器 $M=\frac{\psi}{q}=\frac{u}{i}$
记忆电荷