概率论与数理统计

第 9 讲

二维随机变量及其联合分布

一. 多维随机变量

第二章中，主要介绍了用单个随机变量描述随机现象的概率模型，但是在许多实际问题中，有些随机现象需要同时用多个随机变量描述。

例如：为了研究某一地区6岁儿童的发育状况，对这一地区的每一个6岁儿童，需要观测他的身高H和体重W，为此需要研究两个随机变量：身高H和体重W。

为了确定炼钢厂炼出的钢的质量是否符合要求，需要考察含硫量X、含碳量Y以及硬度Z这几个基本指标，为此要研究三个随机变量：含硫量X 、含碳量Y以及硬度Z；

若用X_1，X_2，X_3，X_4分别表示一个家庭的衣食住行的花费占其家庭总收入的百分比，则我们需要研究这四个随机变量。

一. 多维随机变量

若一个产品有n个质量指标，为明确该产品的质量，就需要研究n维随机变量。

为此，需要引入多维随机变量的概念，将多个随机变量作为一个整体考虑，研究它们总体变化的统计规律性，并进一步讨论各个分量之间的关系。

由于多维随机变量的研究思想和方法与二维随机变量相同，为简便起见，重点讨论二维随机变量。

定 义　设E是一个随机试验，样本空间为$S=\{\omega \mid \omega$为试验的样本点$\}$，$X=X\{\omega\}$，$Y=Y\{\omega\}$是定义在S上的两个随机变量，由它们构成的一个二维向量(X,Y)，称为二维（元）随机向量或二维（元）随机变量。

注意， 二维随机变量是定义在同一个样本空间上的2个随机变量。

对随机事件$A, B, A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$以后用

$\{A, B\}$表示AB　　　$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$表示$\bigcap_{i=1}^{n} A_n$

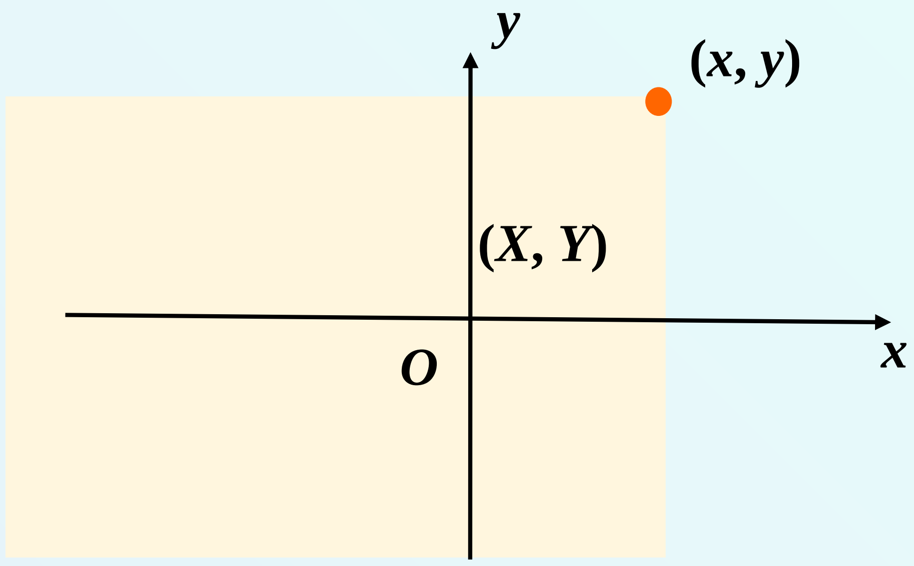
二. 二维随机变量的联合分布函数

定 义 设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x和y，称二元函数

$$F(x,y)=P\{\{X\le x\}\cap\{Y\le y\}\}\triangleq P\{X\le x,Y\le y\}$$

为二维随机变量(X,Y)的联合分布函数，简称分布函数。

将二维随机变量(X,Y)看作平面上随机点的坐标，那么，分布函数$F(x, y)$在点(x, y)处的函数值就是随机点(X,Y)落在下图所示的以点(x, y)为顶点而位于该点左下方的无穷矩形区域内的概率。

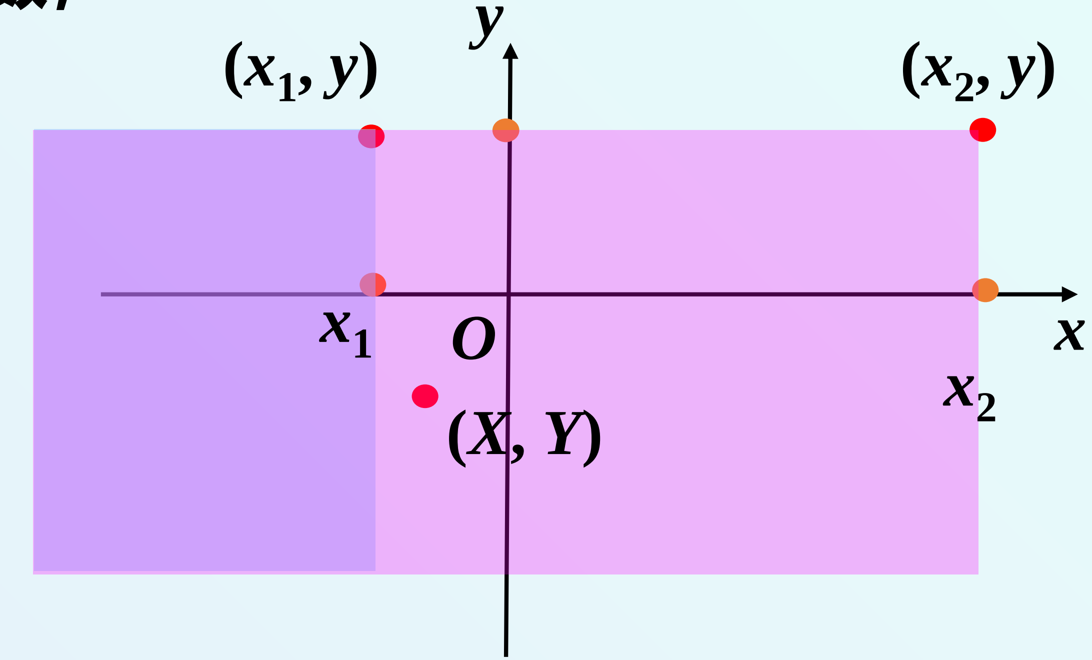


分布函数$F(x,y)$的性质

1.$F(x,y)$是关于变量x和y的不减函数；

对任意固定的$y\in R$及$\forall x_1, x_2 \in R$,
当$x_1 < x_2$时，$F(x_1, y) \le F(x_2, y)$

对任意固定的$x\in R$及$\forall y_1, y_2 \in R$,
当$y_1 < y_2$时，$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$



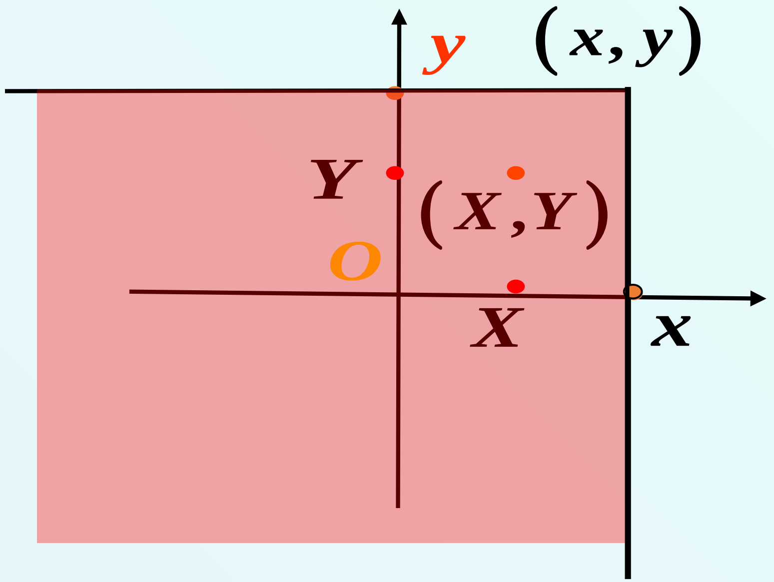
分布函数$F(x,y)$的性质

2. $0 \le F(x, y) \le 1$, 且

对任意固定的$y \in R$, $F(-\infty, y)=0$

对任意固定的$x \in R$, $F(x, -\infty)=0$

$F(-\infty, -\infty)=0$, $F(+\infty, +\infty)=1$



3. $F(x, y)$关于变量x和y都是右连续的；

$$F(x+0, y) = \lim_{x \to x^+} F(x, y) = F(x, y) \qquad F(x, y+0) = \lim_{y \to y^+} F(x, y) = F(x, y)$$

二. 二维随机变量的联合分布函数

分布函数$F(x,y)$的性质

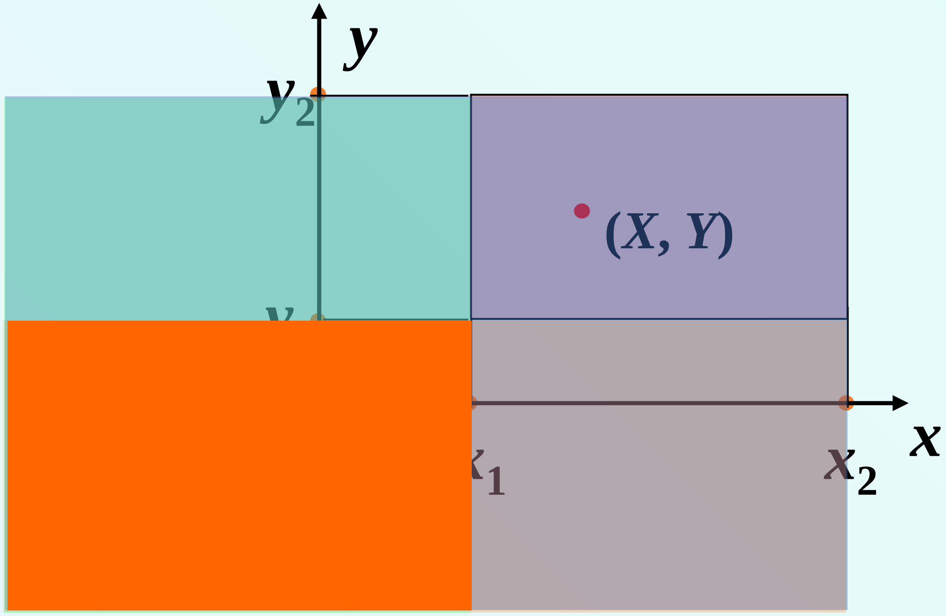
4.对任意的$x_1 < x_2, y_1 < y_2$有下式成立

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\geq 0$$

事实上

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$$

$$=P\{x_1< X\leq x_2, y_1< Y\leq y_2\}\geq 0$$



任何二维随机变量的分布函数都具有这四条性质；反之可证：如果某个二元函数具有这四条性质，那么，它一定是某个二维随机变量的分布函数。

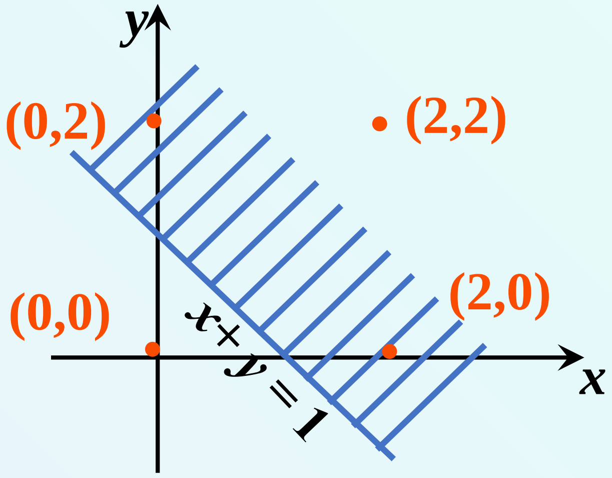
例1.设 $F(x,y)=\begin{cases} 0, & x+y<1 \\ 1, & x+y\geq 1 \end{cases}$

则$F(x, y)$能否成为某二维随机变量的分布函数?

解：取 $x_1=0, x_2=2, y_1=0, y_2=2$

则 $F(2,2)-F(0,2)-F(2,0)+F(0,0)=1-1-1+0=-1<0$

故$F(x, y)$不能作为二维随机变量的分布函数。



例2.设二维随机变量(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=A[B+\arctan(\frac{x}{2})][C+\arctan(\frac{y}{3})]$$

求(1)常数A、B、C的值；(2) $P\{0<X\le 2\sqrt{3},0<Y\le 3\sqrt{3}\}$

解：(1)由分布函数的性质，可得以下方程组

$$F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1 \qquad F(x,-\infty)=A[B+\arctan(\frac{x}{2})](C-\frac{\pi}{2})=0$$

$$F(-\infty,y)=A(B-\frac{\pi}{2})[C+\arctan(\frac{y}{2})]=0 \qquad \therefore A=\frac{1}{\pi^2},B=C=\frac{\pi}{2}$$

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{x}{2}))(\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{y}{3}))$$

$$P\{0<X\le 2\sqrt{3},0<Y\le 3\sqrt{3}\}=F(2\sqrt{3},3\sqrt{3})-F(2\sqrt{3},0)-F(0,3\sqrt{3})+F(0,0)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{2\sqrt{3}}{2}))(\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{3\sqrt{3}}{3}))-\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{2\sqrt{3}}{2}))(\frac{\pi}{2}+\arctan(0))$$

$$-\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan(0))(\frac{\pi}{2}+\arctan(\frac{3\sqrt{3}}{3}))+\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan(0))(\frac{\pi}{2}+\arctan(0))$$

$$=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})-\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{2}+0)-\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+0)(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+0)(\frac{\pi}{2}+0)=\frac{1}{9}$$

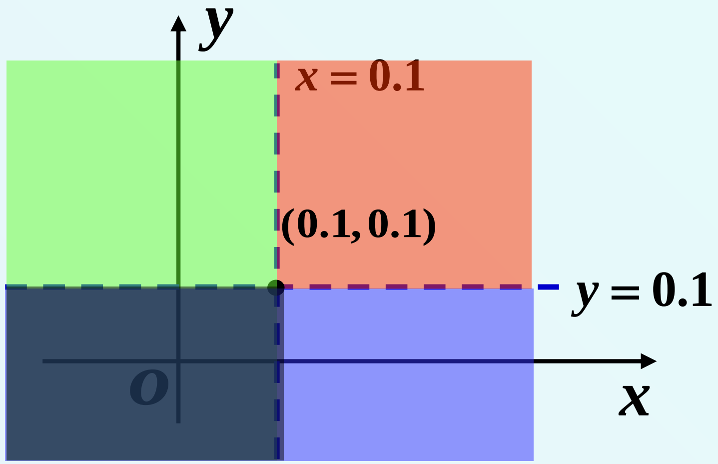
例3.一电子元件由两个部件构成，以X、Y分别表示两个部件的寿命（单位：千小时）。已知X和Y的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), x>0, y>0\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

求两个部件的寿命都超过100小时的概率。

解：所求的概率为

$$P\{X>0.1, Y>0.1\}$$
$$=F(+\infty,+\infty)-F(0.1,+\infty)-F(+\infty,0.1)+F(0.1,0.1)$$
$$=1-(1-e^{-0.1})-(1-e^{-0.1})+(1-e^{-0.1})(1-e^{-0.1})=e^{-0.2}.$$



二. 二维随机变量的联合分布函数

定 义 如果二维随机变量(X,Y)的取值是有限对或可列无限多对，则称(X,Y)是离散型随机变量。

设二维离散型随机变量(X,Y)可能取的值是(x_i, y_j), $i, j=1,2,\ldots$，记

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$$

称之为二维离散型随机变量（X，Y）的联合分布律（列），简称分布律（列）。

二维离散型随机变量(X,Y)的分布律也可表示为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

性质：

$$\begin{cases} p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \cdots \\ \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \end{cases}$$

例3.设随机变量X在1、2、3、4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一个整数值。

试求（1）(X,Y)的分布律；（2）$P\{X\le2, Y\le3\}$。

解：（1）X, Y所有可能的取值为：1，2，3，4

易知，当$j>i$时，$P\{X=i,Y=j\}=0$

当$j\le i$时，$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\mid X=i\}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{i}$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ j\le i$$

于是(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	1/4	1/8	1/12	1/16
2	0	1/8	1/12	1/16
3	0	0	1/12	1/16
4	0	0	0	1/16

（2）$P\{X\leq 2, Y\leq 3\} = P\{X=1, Y=1\}+P\{X=1, Y=2\}+P\{X=1, Y=3\}$

$+P\{X=2, Y=1\}+P\{X=2, Y=2\}+ P\{X=2, Y=3\} = 1/4+0+0+1/8+1/8+0=1/2$

二. 二维随机变量的联合分布函数

已知离散型随机变量(X,Y)的联合分布律

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i=1,2,\ldots, j=1,2,\ldots$$

则有，对任意 $B\subset R^2$

$$P\{(X,Y)\in B\}=\sum_{(x_i,y_j)\in B} p_{ij}$$

离散型随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y} p_{ij}$$

其中和式是对一切满足$x_i\le x, y_j\le y$ 的 i, j的求和。

例4. 设试验E只有3种可能的结果A_1,A_2,A_3，对试验E进行n次独立重复试验，用X_i表示这n次试验中事件A_i发生的次数，$P(A_i)=p_i$, $i=1,2,3$. 求(X_1,X_2)的联合分布律。

解：X_1, X_2, X_3可能取值为0, 1, 2, ……, n。

易知$X_1+X_2+X_3=n$,且$X_1+X_2\le n$, $p_1+p_2+p_3=1$。

对非负整数k_1, k_2，$k_1+k_2\le n$。

$$\{X_1=k_1, X_2=k_2\}=\{X_1=k_1, X_2=k_2, X_3=n-k_1-k_2\}$$

其发生的方式共有 $C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\cdot C_{n-k_1-k_2}^{n-k_1-k_2}=\dfrac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!}$

由试验的独立性，不论A_i发生k_i次的次序如何，上述每一种方式的概率均为

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2}$$

又由于上述各种方式的发生是互不相容的, 所以

$$P\{X_1 = k_1, X_2 = k_2\} = \frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2}$$

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} (1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2}$$

$$k_1, k_2 = 0, 1, 2, \cdots, n, \quad k_1 + k_2 \le n.$$

上式即为(X_1, X_2) 的联合分布律。

二. 二维随机变量的联合分布函数

定 义 对于二维随机变量(X, Y)的分布函数$F(x, y)$，如果存在非负可积函数$f(x, y)$，使对于任意的x, y有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

则称(X, Y)是二维连续型随机变量，函数$f(x,y)$称为二维随机变量(X, Y)的联合概率密度函数，简称联合密度函数。

概率密度的性质

1. **非负性** 对于任意实数x和y， $f(x,y)\geq 0$

2. **正则性（归一性）** $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$; $\left(\iint_{R^2} f(x,y)\,dxdy=1\right)$;

在几何上$z=f(x, y)$表示空间的一张曲面，由性质2知，介于该曲面和xoy平面之间的空间区域的体积是1。

概率密度的性质

3.若$f(x, y)$在点(x, y)连续，则有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$

可得：若$f(x, y)$ 在点(x, y)连续，则当Δx, Δy 较小时

$$P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\} = f(x,y)\Delta x \Delta y$$

也就是点(X,Y)落在小长方形$(x, x+\Delta x]\times(y, y+\Delta y]$内的概率近似地等于$f(x, y)\Delta x\Delta y$。

概率密度的性质

密度函数$f(x,y)$函数值的大小反映了概率集中在点(x,y)附近的程度，即(X,Y)在点(x,y)附近取值的密集程度。

在$f(x,y)$的不连续点，$F(x,y)$的偏导数不存在，在这些点可以用任意一个常数定义$f(x,y)$的值，这不影响事件的概率，这是因为(X,Y)在这些点组成的集合上取值的概率为0，因此一般直接定义$f(x,y)$在不连续的点上的值为0。

概率密度的性质

4.设D是xoy平面上的一个区域，则有 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

$P\{(X,Y)\in D\}$的值等于以D为底，以曲面$z=f(x,y)$为顶的柱体体积。

在许多实际问题中，使用上式时要注意积分范围是$f(x,y)$的非零区域与D的交集部分，然后设法化成累次积分，最后计算出结果，计算中要注意如下事实"直线的面积为零"，故积分区域的边界线是否在积分区域内不影响概率计算的结果。

5. 对平面上的任意曲线L，有 $P\{(X,Y)\in L\}=0$

即二维连续型随机变量在任何面积为的零的区域上的概率为零。

例4.设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} kx^2y & 0<x<y<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

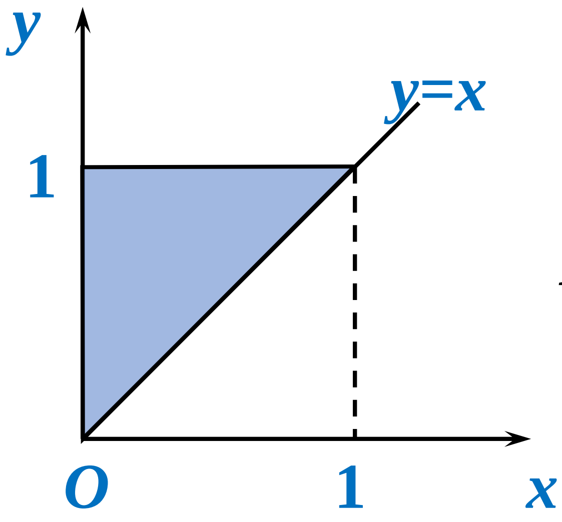
（1）求常数k的值；（2）求概率$P\{X+Y\leq 1\}$。

解：（1）由密度函数的归一性得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1(\int_x^1 kx^2ydy)dx$$

$$=\frac{1}{2}k\int_0^1(x^2-x^4)dx=\frac{1}{15}k$$

解得： $k=15$



$D:\begin{cases} 0<x<1 \\ x<y<1 \end{cases}$

二. 二维随机变量的联合分布函数

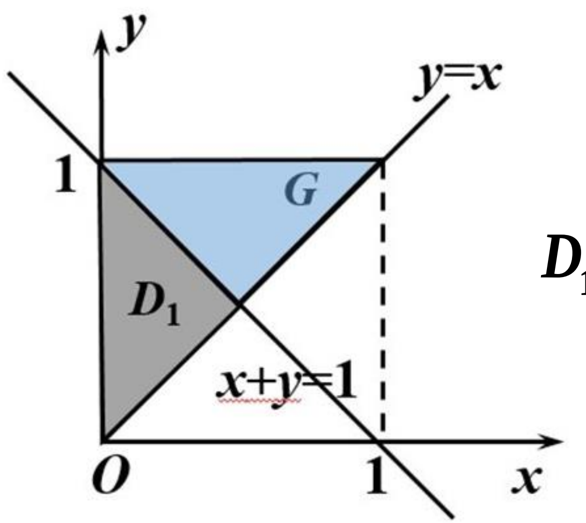
$$f(x,y)=\begin{cases} kx^2y & 0<x<y<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

（2）**求概率**$P\{X+Y\leq 1\}$。

解： （2）$P\{X+Y\leq 1\}=\iint\limits_{x+y\leq 1} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^{1/2}\left[\int_x^{1-x}15x^2ydy\right]dx$$

$$=\frac{5}{64}$$



$$D_1:\begin{cases} 0<x<1/2 \\ x<y<1-x \end{cases}$$

例5. 设二维连续型随机变量(X,Y)具有密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

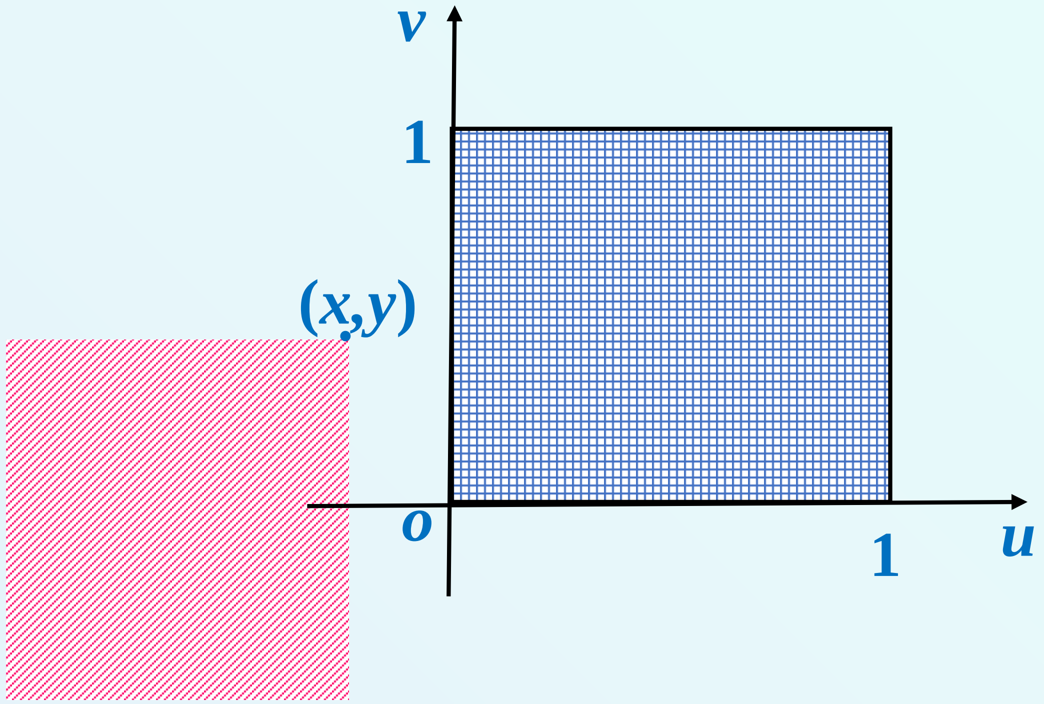
求分布函数$F(x,y)$。

解： $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$

当$x<0$，$y>0$**时，** $F(x,y)=0$。

同理，当$x<0$，$y<0$**时，当**$x>0$，$y<0$**时**

$F(x,y)=0$。



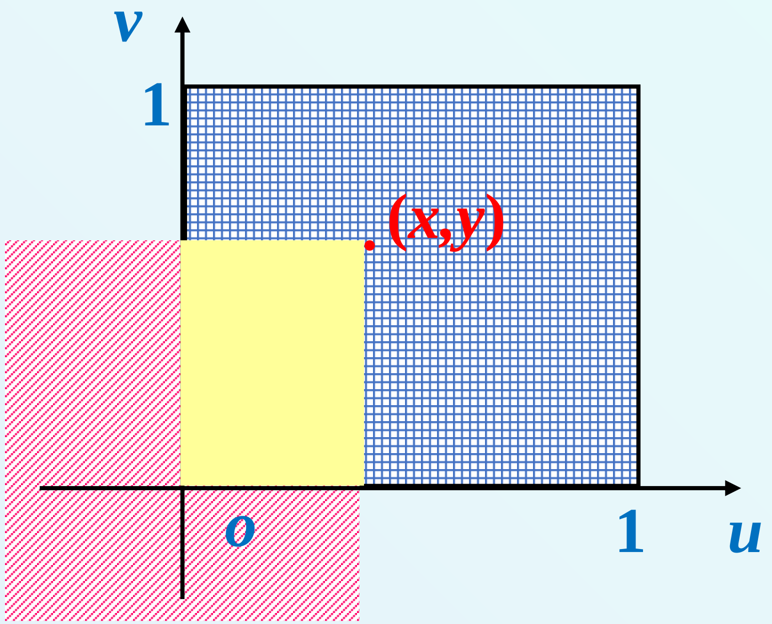
$$f(u,v)=\begin{cases}4uv, & 0<u<1,\ 0<v<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv$$

当$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$时

则黄色区域为积分区域，表示为：

$$\{0\le u\le x,\quad 0\le v\le y\}$$

$$\therefore F(x,y)=\int_{0}^{y}\left[\int_{0}^{x} 4uv\,du\right]dv=x^2y^2$$



二. 二维随机变量的联合分布函数

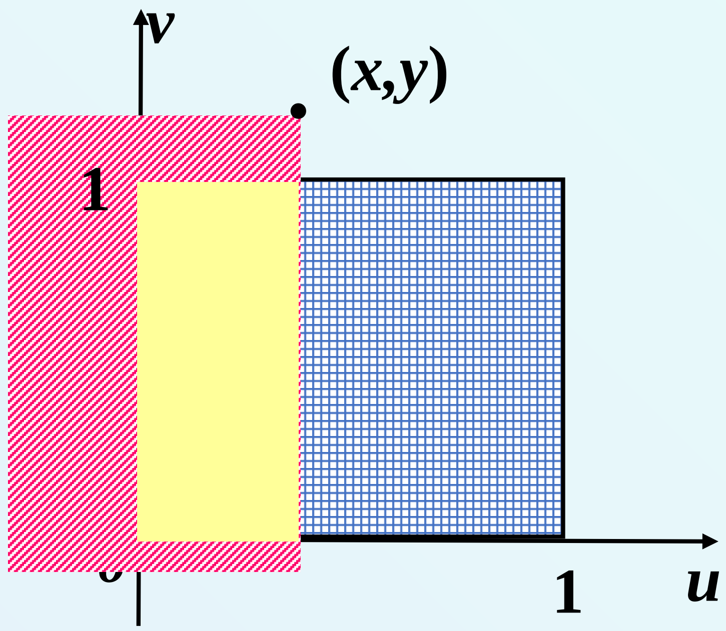
$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

当$0<x<1$， $y>1$时

则黄色区域为积分区域，表示为:

$$\{0<u<x,\quad 0<v<1\}$$

$$\therefore F(x,y)=\int_0^1[\int_0^x 4uvdu]dv=x^2$$



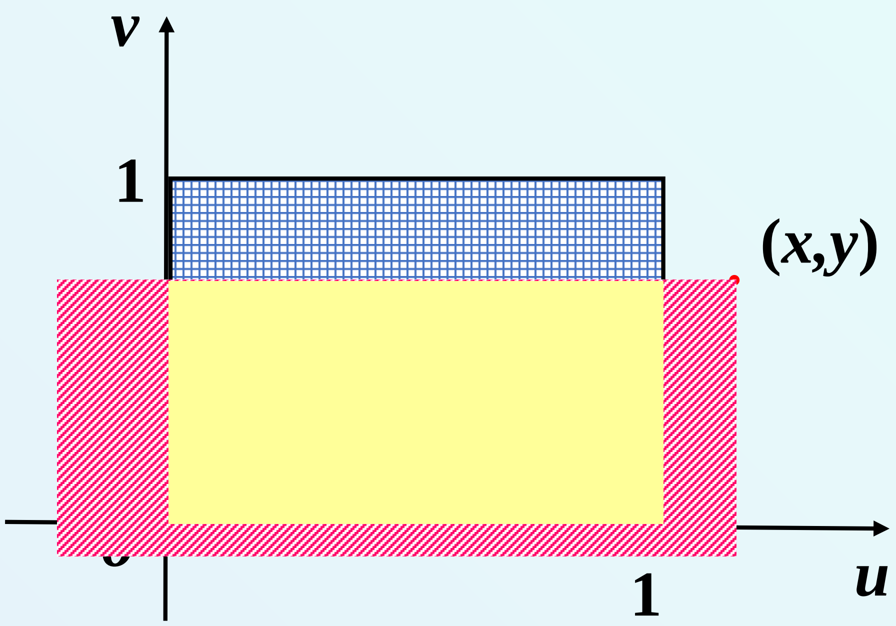
$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

当$x>1$， $0<y<1$时

则黄色区域为积分区域，表示为：

$\{0<u<1,\ \ 0<v<y\}$

$$\therefore F(x,y)=\int_0^y\left[\int_0^1 4uvdu\right]dv=y^2$$



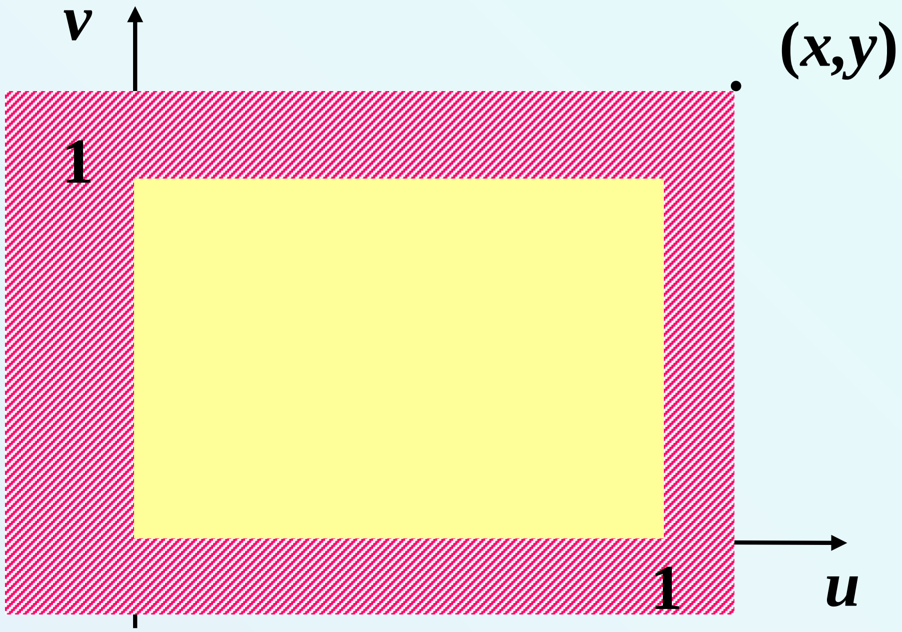
$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

当$x>1$，$y>1$时

则黄色区域为积分区域，表示为：

$\{0<u<1,\ \ 0<v<1\}$

$$\therefore F(x,y)=\int_0^1[\int_0^1 4uvdu]dv=1$$



所以分布函数为 $$F(x,y)=\begin{cases} x^2y^2, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ x^2, \quad 0<x<1, y>1 \\ y^2, \quad x>1, 0<y<1 \\ 1, \quad x\ge 1, y\ge 1 \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}$$

1.二维均匀分布

设D是平面上的有界区域，其面积为S，若二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/S & (x,y)\in D \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则称(X, Y)在D上服从均匀分布。

向平面上有界区域D上任投一质点，若质点落在D内任一小区域A的概率与小区域的面积成正比，而与A的形状及位置无关，则质点的坐标(X, Y)在D上服从均匀分布。

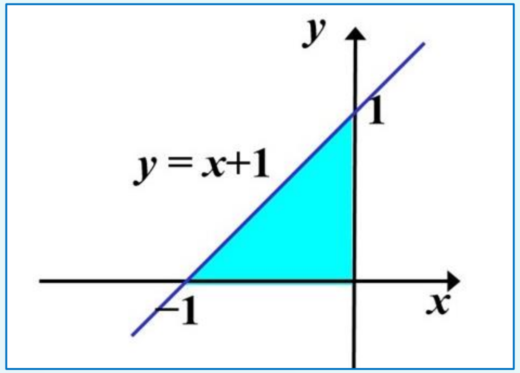
若A为D的一个有面积的子区域，且其面积为S_A，则

$$P\{(X,Y)\in A\}=\iint_A f(x,y)dxdy=\iint_A 1/S\,dxdy=\frac{S_A}{S}$$

例6　已知随机变量(X, Y)在D上服从均匀分布，其中D为x轴，y轴及直线$y=x+1$所围成的三角形区域。求(X, Y)的概率密度及$P\{Y>2X+1\}$。

解：区域D如右图所示，易求得D的面积为 $S_D=\dfrac{1}{2}$

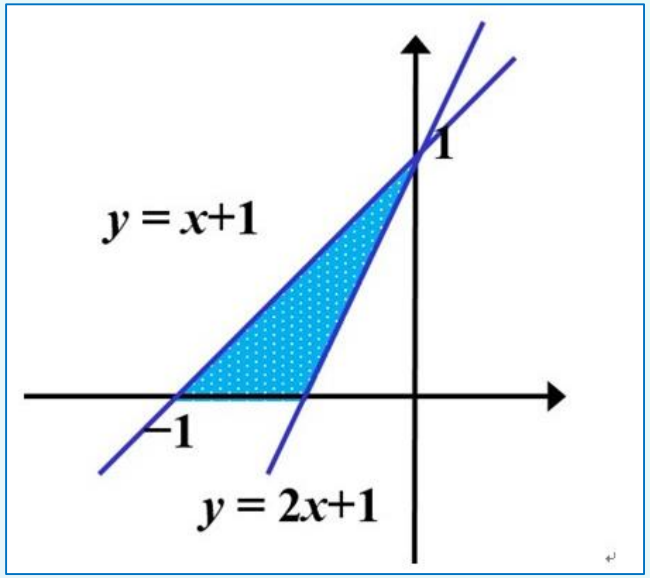
所以(X, Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$



例6 已知随机变量(X, Y)在D上服从均匀分布，其中D为x轴，y轴及直线$y=x+1$所围成的三角形区域。求(X, Y)的概率密度及$P\{Y>2X+1\}$。

设区域$A=\{(x, y): y>2x+1\}$，A与D的交集如图所示

$$P\{Y>2X+1\}=\frac{S_{A\cap D}}{1/2}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}$$



2.二维正态分布（Bivariate Normal Distribution）

若二维随机变量(X,Y)具有概率密度

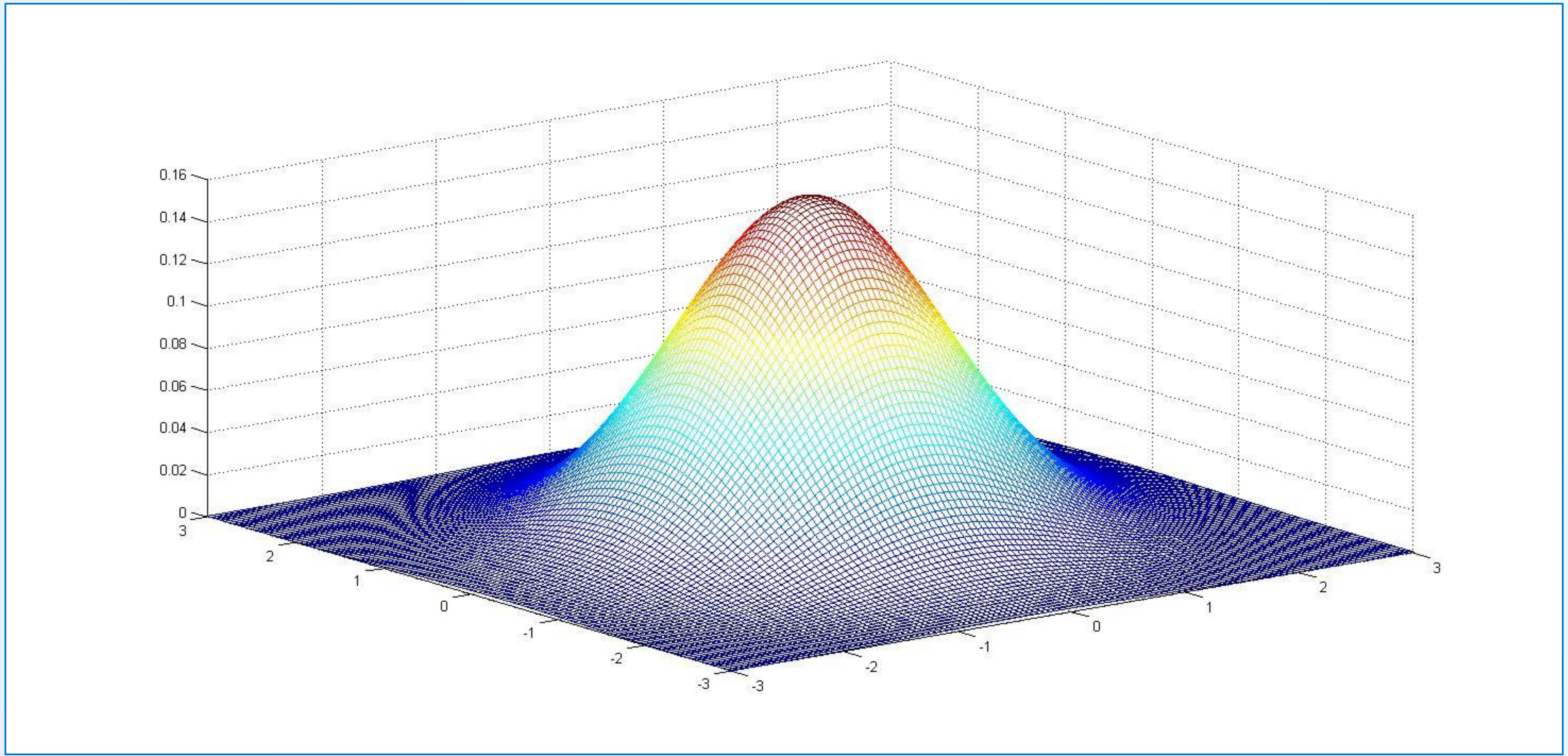
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]},-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty$$

其中$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$均为常数，且$\sigma_1>0, \sigma_2>0, -1<\rho<1$。

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$的二维正态分布，记为：

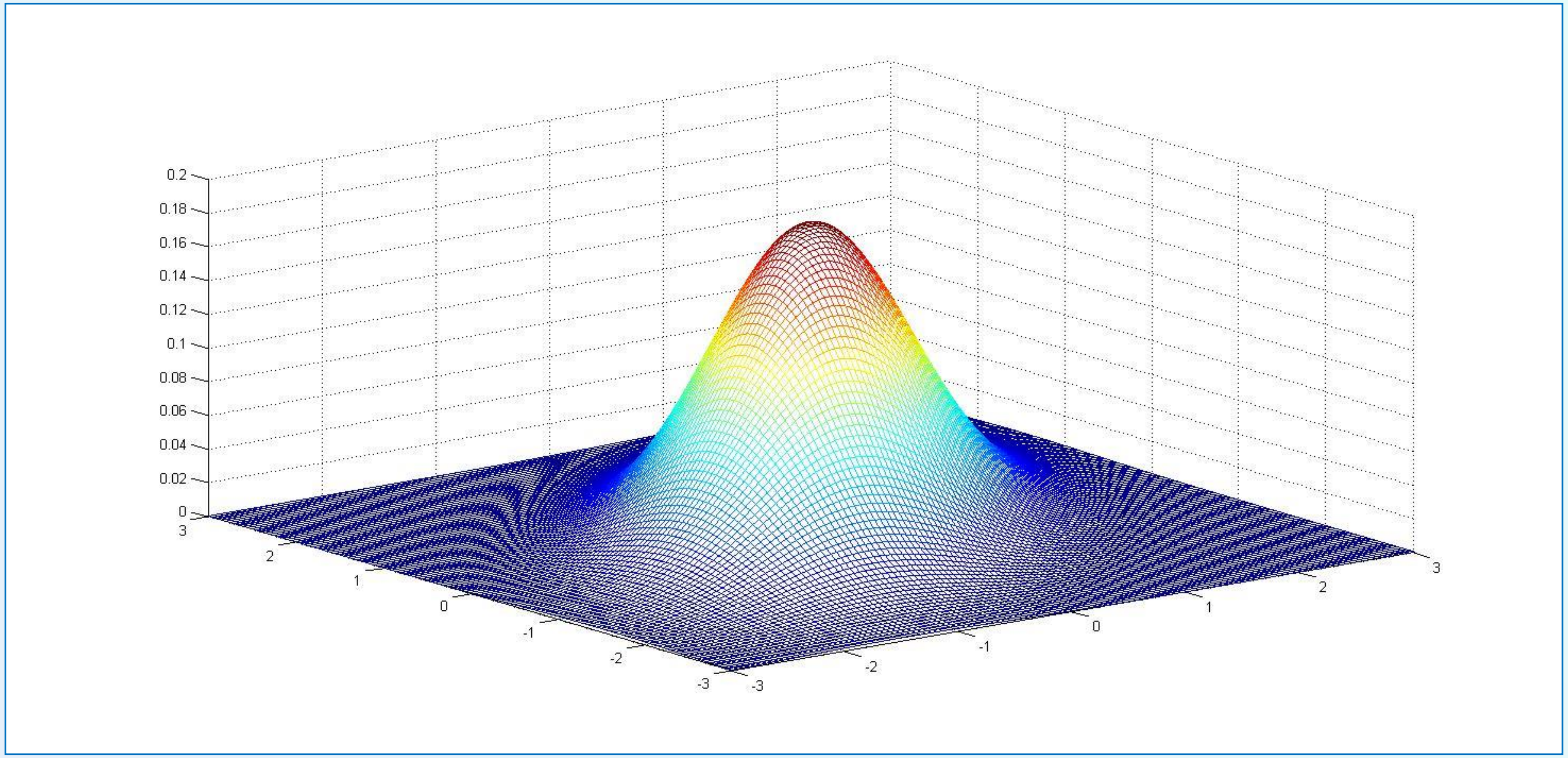
$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$$

三. 两个重要的二维随机变量



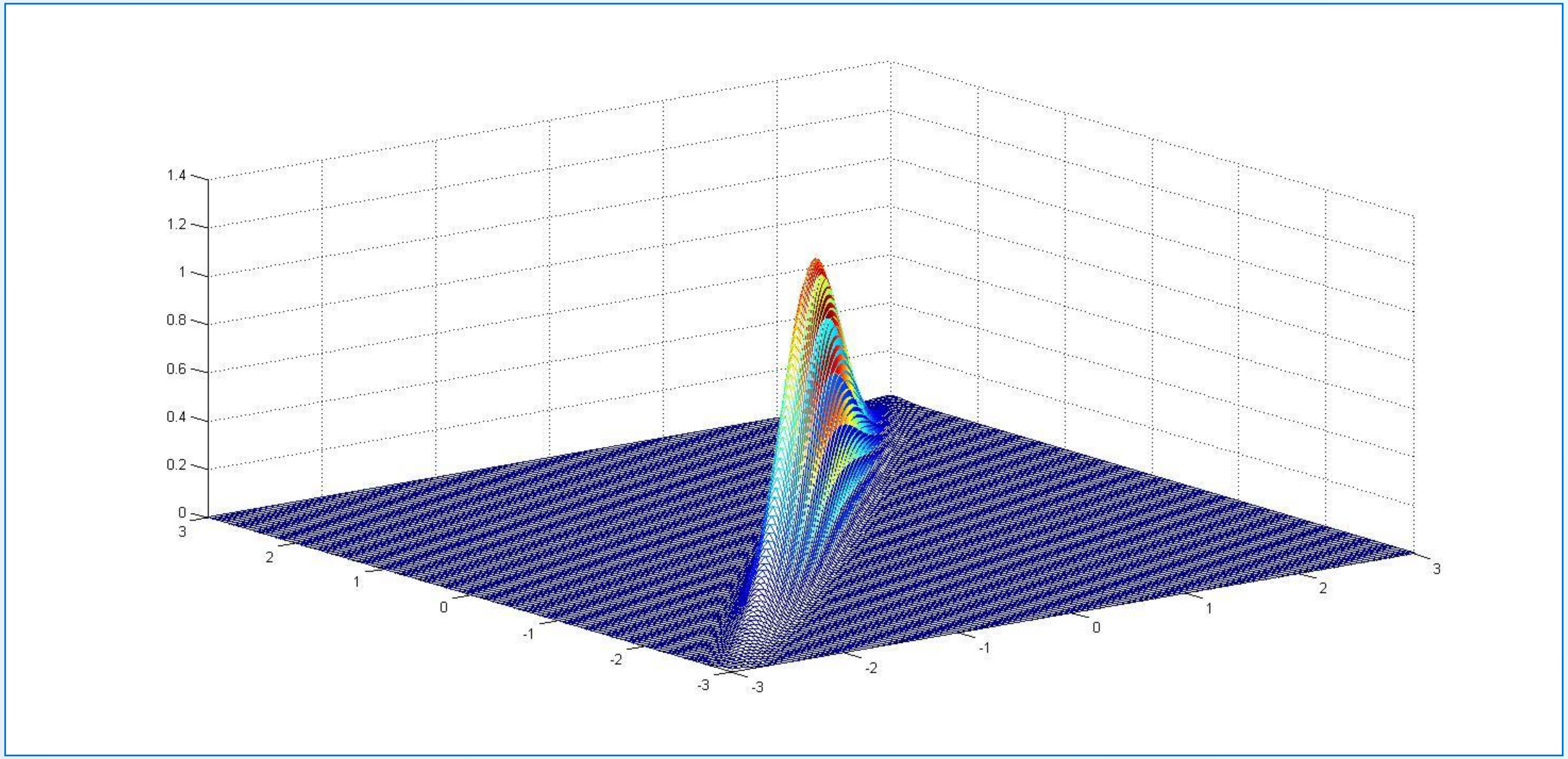
N(0,1,0,1,0.1)的密度函数图

三. 两个重要的二维随机变量



N(0,1,0,1,0.5)的密度函数图

三. 两个重要的二维随机变量



N(0,1,0,1,0.99)的密度函数图

说 明

（1）不论是一维还是二维情形，在定义连续型随机变量时，其实质在于它的概率密度函数是否存在，至于它是否可以在一个区间或区域上连续取值不是本质的。

（2）根据二维离散型随机变量的定义，可以认为，如果X和Y都是一维离散型随机变量，则（X，Y）就是二维离散型随机变量，但是对于二维连续型随机变量类似的结论不成立，即，不能说分量X和Y都是一维连续型随机变量，则（X，Y）就是二维连续型变量。

作业： 1,4,5,7,8,9

第 9 讲

谢谢观看