第七章
二　阶　电　路

作业

7-4　7-8

练习

7-2　7-5

1 二阶网络：所列的电路方程是二阶微分方程或用两个一阶微分方程联立。一阶电路只有一个储能元件，只储存一种能量。二阶电路有两个储能元件，既储存磁场能量，又储存电场能量。

2 典型电路：L与C串联

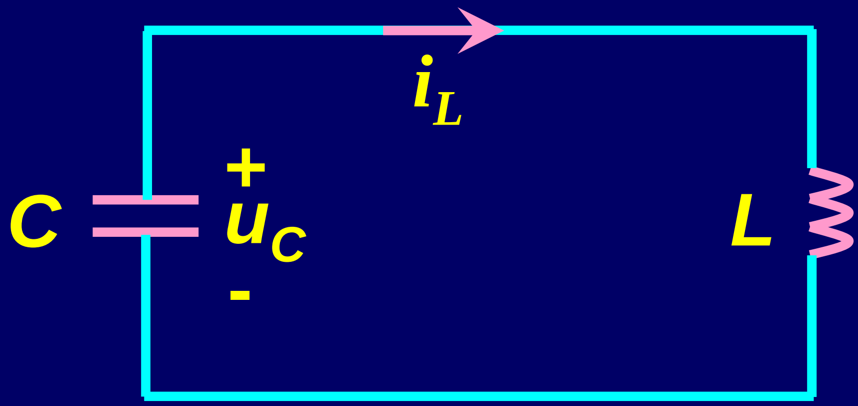
L与C关联

3 响应形式：零输入响应

零状态响应

完全响应

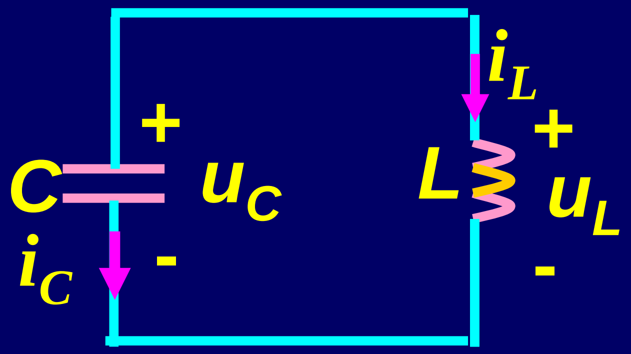
§ 7-1 LC电路的正弦振荡



已知 $u_C(0) = U_0 \quad i_L(0) = 0$

数学分析：

已知 $u_C(0) = U_0 \qquad i_L(0) = 0$



$$u_L - u_C = 0$$

$$i_L = -C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -LC\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2}$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + u_c = 0$$

解的形式 $u_C(t) = K\mathrm{e}^{st}$ 代入方程

特征方程 $LCS^2 + 1 = 0$

特征根 $S_{1、2} = \pm \mathrm{j}\sqrt{\dfrac{1}{LC}} = \pm \mathrm{j}\omega_0$

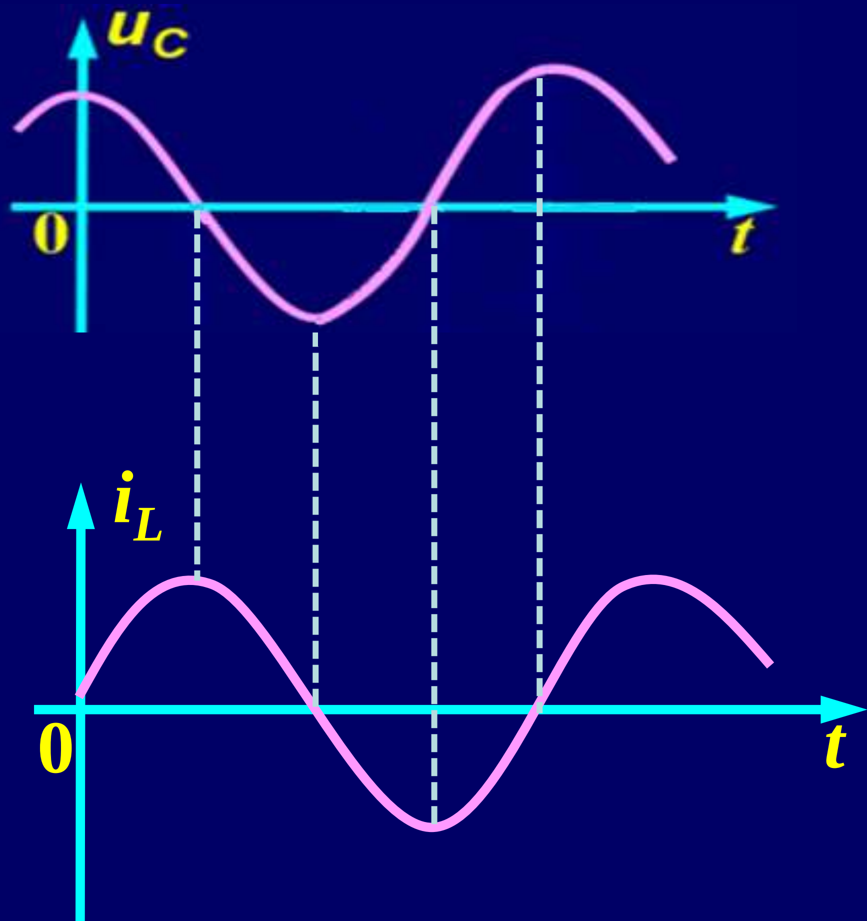
解的形式 $u_C(t) = K_1\cos\omega_0 t + K_2\sin\omega_0 t$

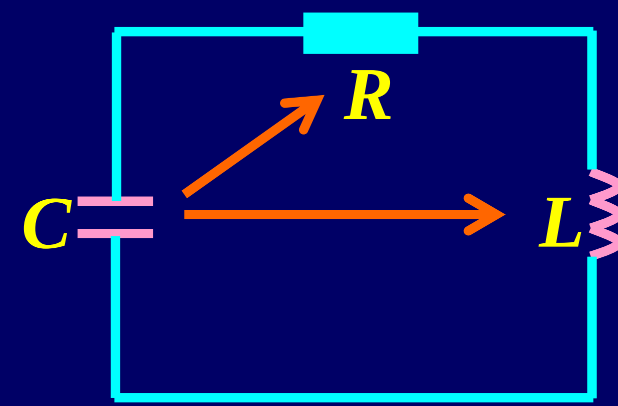
由 $\begin{cases} u_c(0) = K_1 = U_0 \\ u_c'(0+) = i_c(0+)/C = -i_L(0)/C = 0 \end{cases}$

得 $K_1 = U_0 \qquad K_2 = 0$

$$u_C(t) = U_0\cos\omega_0 t$$

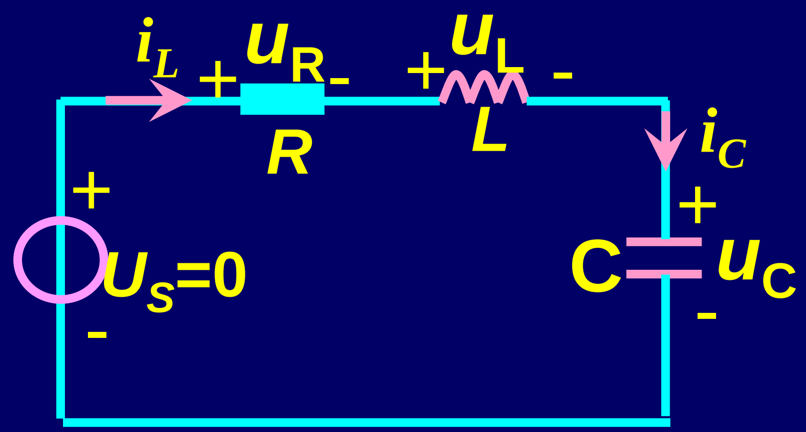
$$i_L(t) = C\omega_0 U_0 \sin\omega_0 t$$





LC电路的零输入响应是按正弦方式变化的等幅振荡，叫自由振荡。

§7-2 RLC串联电路的零输入响应



$$u_R+u_L+u_C = U_S=0$$

$$Ri_L+L\frac{di_L}{dt}+u_C=0$$

已知两个初始条件：
$u_C(0)$、$i_L(0)$ 中有一个不为零

$u'_C(0+)$可求

$$RC\frac{du_C}{dt}+LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+u_C=0$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

解的形式 $u_C(t) = Ke^{st}$ 代入方程

$$LCS^2Ke^{st}+RCSKe^{st}+Ke^{st}=0$$

$$LCS^2+RCS+1=0$$ 特征方程

$LCS^2 + RCS + 1 = 0$ 特征方程

特征方程的根（固有频率）

$$S_{1、2}=\frac{-RC\pm\sqrt{(RC)^2-4LC}}{2LC}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

R、L、C取值不同，根号里的值有四种不同情况。

1. $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ S_1、S_2为两个不相等的负实数

2. $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ S_1、S_2为两个相等的负实数

3. $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ S_1、S_2为共轭复数

4. $R = 0$ S_1、S_2为共轭虚数

一. $(\frac{R}{2L})^2 > \frac{1}{LC}$ $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $R_d = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

串联电路的阻尼电阻

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} = -\beta_1$$

$$\beta_2 > \beta_1$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} = -\beta_2$$

解的形式 $u_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$

$$= K_1 e^{-\beta_1 t} + K_2 e^{-\beta_2 t}$$

初始条件

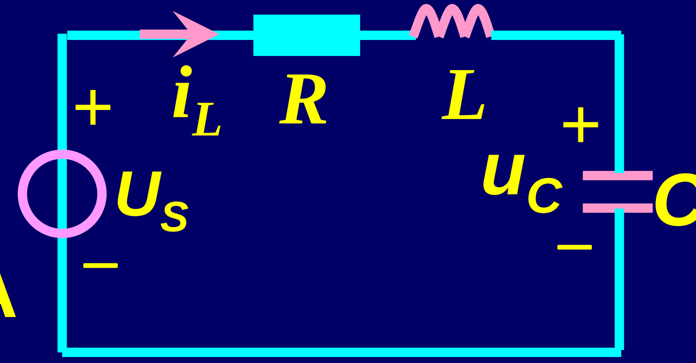
① $K_1 + K_2 = u_C(0)$

② $\frac{du_C}{dt}\Big|_{t=0+} = -\beta_1 K_1 - \beta_2 K_2 = \frac{i_C(0_+)}{C} = \frac{i_L(0)}{C}$

求出K_1、K_2，写出$u_C(t)$表达式

响应是非振荡性的衰减，过阻尼

补充1： 图示电路中 $t \geqslant 0$时



$U_s = 0 \quad R = 3\Omega \quad L = 0.5\text{H}$

$C = 0.25\text{F} \quad u_C(0) = 2\text{V} \quad i_L(0) = 1\text{A}$

求 $u_C(t)$及$i_L(t) \quad t \geq 0$

解： 对于RLC串联电路，不必列微分方程

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC} \qquad R > R_d$$

$$s_{1、2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= -3 \pm \sqrt{9-8}$$

$$= -3 \pm 1$$

$$s_1 = -2 \qquad s_2 = -4$$

$$u_C(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t}$$

由初始条件可求出K_1和K_2

初始条件

$$u_C(0) = K_1 + K_2 = 2$$

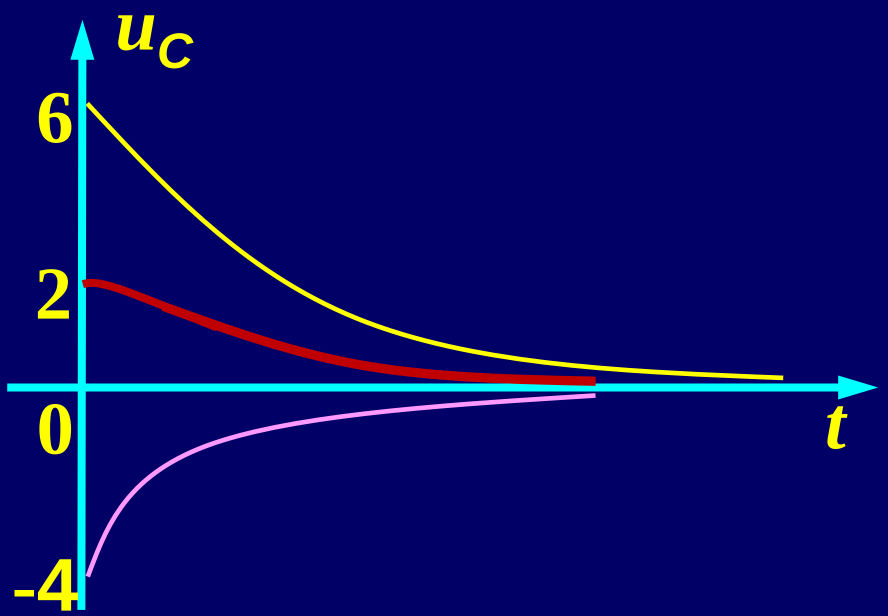
$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} = -2K_1 - 4K_2 = \frac{i_L(0)}{C} = 4$$

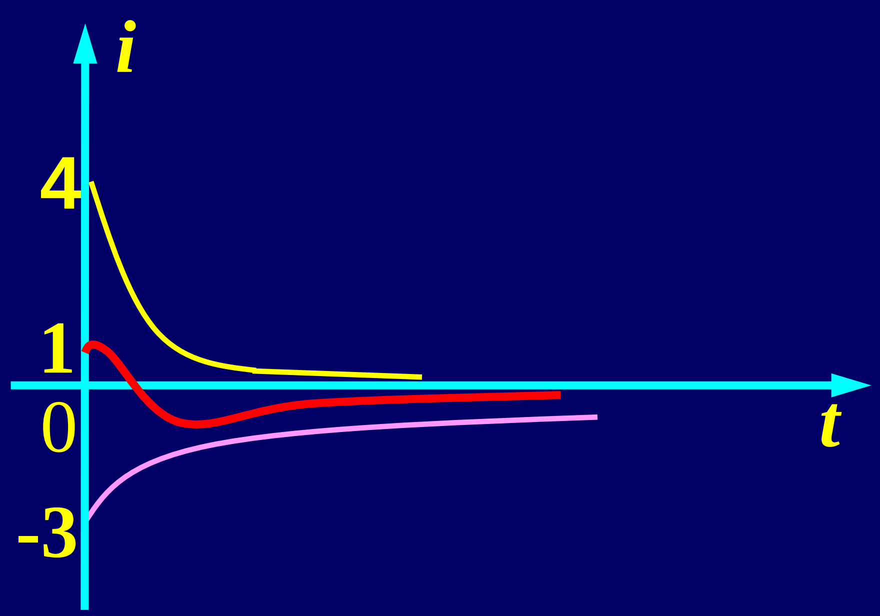
$$\Rightarrow \quad K_1 = 6 \quad K_2 = -4$$

$$i_L(t) = i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$= -3e^{-2t} + 4e^{-4t} \quad t \geq 0$$

$$u_C(t) = 6e^{-2t} - 4e^{-4t}\ \mathrm{V} \quad t \geq 0$$





总结：

1、RLC串联电路求零输入响应时，分别利用通式(假设) $K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}$，求$u_c(t)$、$i_L(t)$。
无非是由于初始条件不同，所以各自的k_1、k_2不同。

2、二阶电路所有响应的固有频率一样。

二. $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $S_1 = S_2 = -\frac{R}{2L} = -\alpha$

解的形式 $u_C(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-\alpha t}$

利用初始条件

① $u_C\big|_{t=0} = K_1$

② $\frac{du_C}{dt}\Big|_{t=0+} = [K_2 e^{-\alpha t} - \alpha(K_1 + K_2 t)e^{-\alpha t}]\Big|_{t=0+}$

$$= K_2 - \alpha K_1 = \frac{i_C(0+)}{C} = \frac{i_L(0)}{C}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = u_C(0) \\ K_2 = \frac{i_L(0)}{C} + \alpha u_C(0) \end{cases}$$

代入K_1、K_2，写出$u_C(t)$表达式

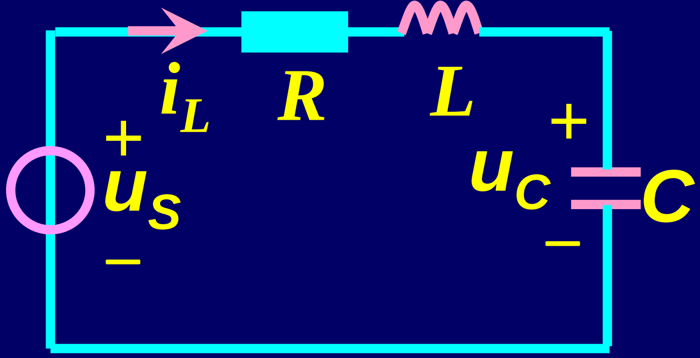
无振荡衰减，临界阻尼

例7-２．已知*RLC*串联电路中 $t \geqslant 0$时

$u_S=0 \quad i_L(0)=0 \quad u_C(0)=-1\text{V}$

$C=1\text{F} \quad L=0.25\text{H} \quad R=1\Omega$

求$i_L(t)$，$t\geq 0$



解:

$$S_{1、2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

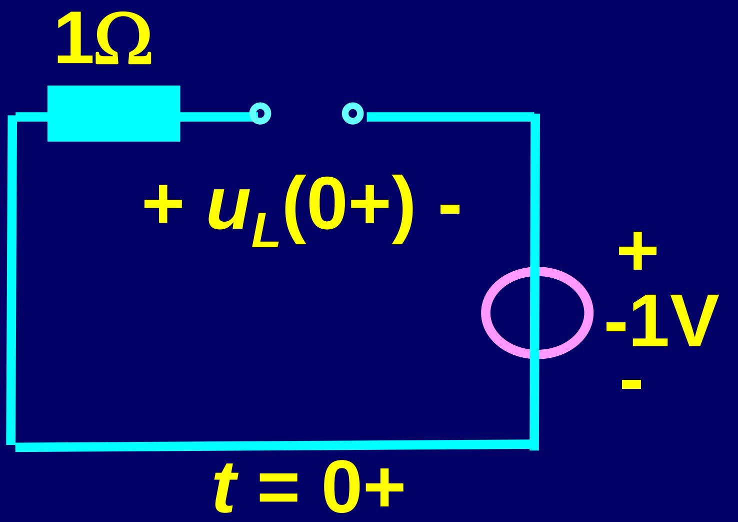
$$=-\frac{1}{0.5}\pm\sqrt{4-4}=-2$$

$$i_L(t)=(K_1+K_2t)e^{-2t}$$

初始条件 $i_L(0)=K_1=0$

$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0+}=K_2-2K_1=\frac{u_L(0+)}{L}$$

需要求$u_L(0+)$



得出：$u_L(0+)=1V$

初始条件为：

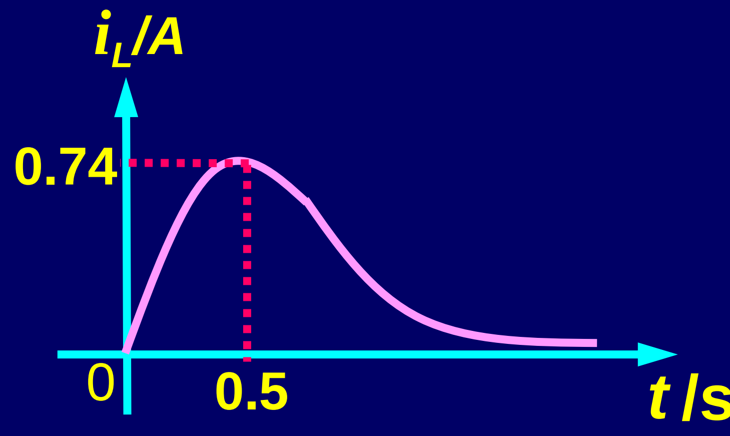
$$\left.\begin{aligned}&i_L(0)=K_1=0\\&\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0+}=K_2-2K_1=\frac{u_{L(0+)}}{L}=\frac{1}{0.25}=4\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}&K_1=0\\&K_2=4\end{aligned}$$

$i_L(t)=4te^{-2t}$ A， $t\geq0$

波形图:

令 $\frac{di_L}{dt}=0$

得：$t=0.5S$ $i_L(0.5)=0.74A$



三、 欠阻尼情况 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$　　$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$S_1 = -\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\alpha + j\omega_d$$

$$S_2 = -\frac{R}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\alpha - j\omega_d$$

S_1、S_2为共轭复数

解的形式　$u_C(t) = e^{-at}[K_1\cos\omega_d t + K_2\sin\omega_d t]$

初始条件

（1）$u_C(0) = K_1$

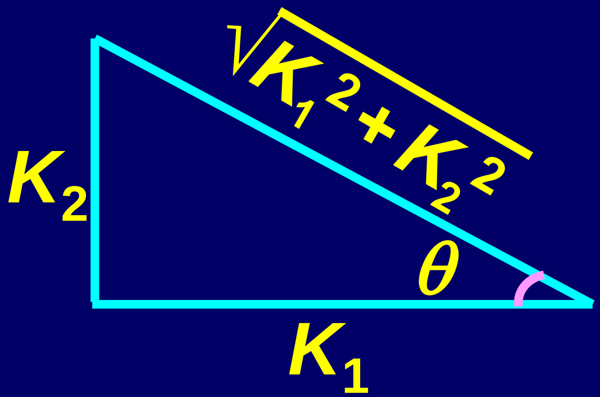
（2）$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0+} = [-\alpha e^{-at}(K_1\cos\omega_d t + K_2\sin\omega_d t) + e^{-at}(-\omega_d K_1\sin\omega_d t + \omega_d K_2\cos\omega_d t)]|_{t=0+}$$

$$= -\alpha K_1 + \omega_d K_2 = \frac{i_L(0)}{C}$$

解出 $K_2 = \frac{i_L(0)}{\omega_d C} + \frac{\alpha u_C(0)}{\omega_d}$

$$u_C(t) = e^{-\alpha t}[K_1\cos\omega_d t + K_2\sin\omega_d t]$$

$$= \sqrt{K_1^2+K_2^2}\, e^{-\alpha t}\left[\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\cos\omega_d t + \frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\sin\omega_d t\right]$$



$$\cos\theta = \frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{K_2}{K_1}$$

利用公式

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

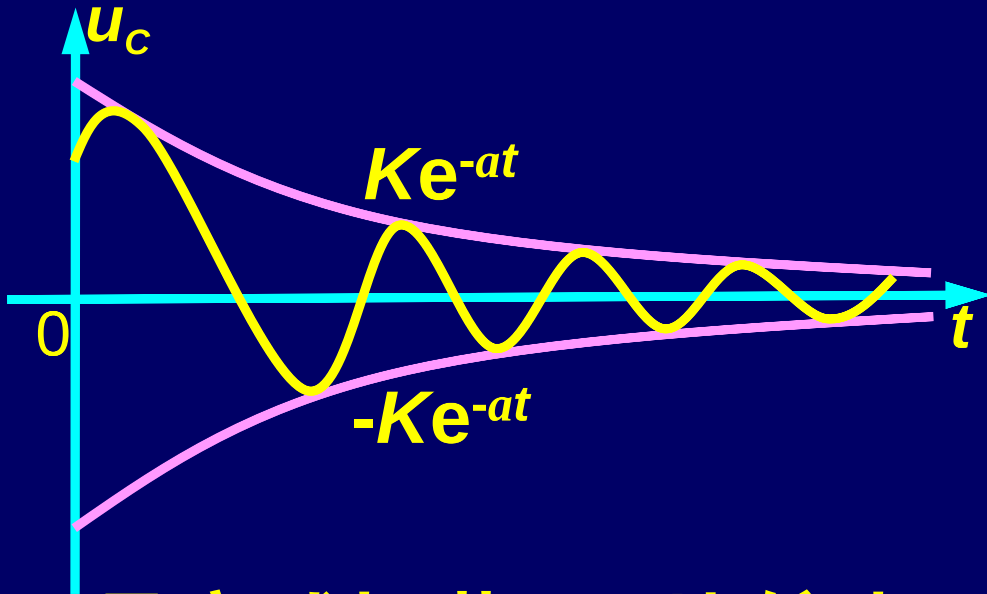
$$u_c(t) = \sqrt{K_1^2+K_2^2}\, e^{-\alpha t}[\cos\theta\cos\omega_d t + \sin\theta\sin\omega_d t]$$

$$= \sqrt{K_1^2+K_2^2}\, e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t - \theta) = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t - \theta)$$

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \qquad \theta = \mathrm{arctg}\frac{K_2}{K_1}$$

也可直接写成

$u_C(t) = Ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t - \theta)$　　用初始条件确定K和θ



$u_C(t)$是衰减振荡，R比较小，称为欠阻尼

ω_d – 衰减振荡角频率

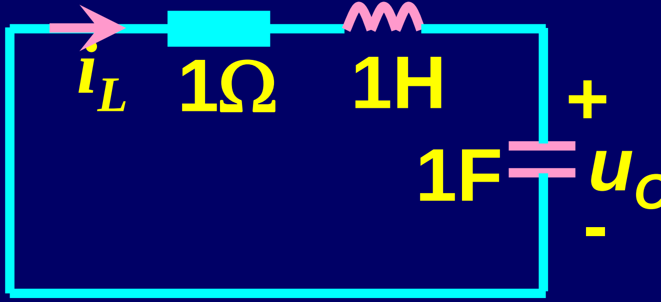
α– 衰减因子，$\alpha = R / (2L)$

$\tau = 1/\alpha = (2L) / R$

衰减的快慢由R、L 决定， 4τ衰减完。

例7-3：求零输入响应 $u_C(t)\quad t\geq 0$

已知$u_C(0)=1\text{V}\quad i_L(0)=1\text{A}$



解：

$$S_1=-\frac{R}{2L}+j\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_2=-\frac{R}{2L}-j\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$u_c(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left[K_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+K_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$u_C(0)=K_1=1 \Longrightarrow K_1=1$$

$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0+}=-\frac{1}{2}K_1+\frac{\sqrt{3}}{2}K_2=\frac{i_L(0)}{C}=1 \Longrightarrow K_2=\sqrt{3}$$

$$u_C(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$$

$$=2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-60^\circ\right)\text{V},\quad t\geq 0$$

四. R = 0 无阻尼

$$S_1 = \mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \mathrm{j}\omega_0 \qquad S_2 = -\mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC}} = -\mathrm{j}\omega_0$$

S_1、S_2为共轭虚数

解形式 $u_C(t) = K_1\cos\omega_0 t + K_2\sin\omega_0 t$

初始条件
$$\begin{cases} K_1 = u_C(0) \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} = \omega_0 K_2 = \dfrac{i_L(0)}{C} \end{cases}$$

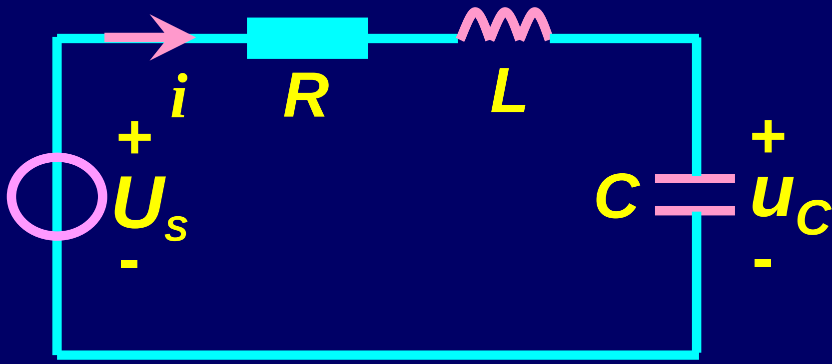
$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = u_C(0) \\ K_2 = \dfrac{i_L(0)}{C\omega_0} \end{cases}$$

$$u_C(t) = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}\cos(\omega_0 t - \phi)$$

其中 $\phi = \arctan\dfrac{K_2}{K_1}$ 　　无衰减等幅振荡

§ 7–3 RLC串联电路的零状态响应和全响应（直流激励）

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S$$



$$u_C(t) = u_{ch} + u_{cp}$$

（1）求通解：

假设电路为过阻尼

$$S_1 = -\alpha_1$$

$$S_2 = -\alpha_2$$

则$u_{ch}(t) = K_1 e^{-\alpha_1 t} + K_2 e^{-\alpha_2 t}$

（2）求特解

设$u_{cp}(t)=Q$，与激励形式一样

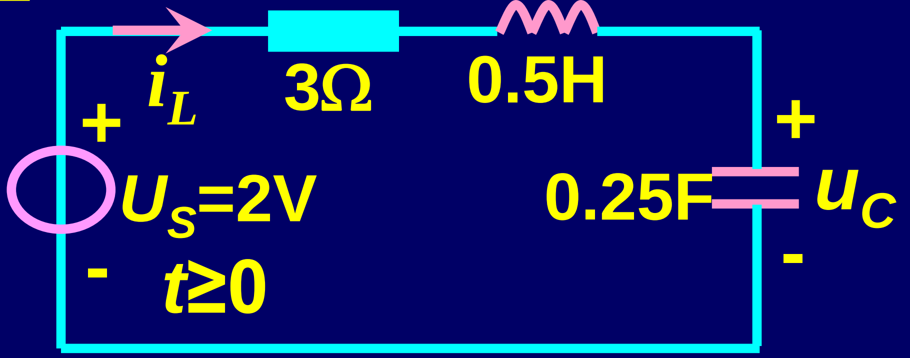
则$Q=U_S$

（3）完全解

$$u_C(t)=K_1 e^{-\alpha_1 t}+K_2 e^{-\alpha_2 t}+U_S$$

K_1、K_2由初始条件确定

补充： 求图示电路中$u_C(t)$， $t \geq 0$



已知$u_C(0) = 0 \quad i_L(0) = 0$

解： $(\frac{R}{2L})^2 > \frac{1}{LC}$

$$s_{1、2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$$

$s_1 = -2 \qquad s_2 = -4$

求通解 $u_{ch}(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t}$

再求特解u_{cp}

$$u_{cp}(t) = U_s = 2V$$

完全解 $u_c(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t} + 2$

利用初始条件求K_1、k_2

$$u_C(0) = K_1 + K_1 + 2 = 0$$

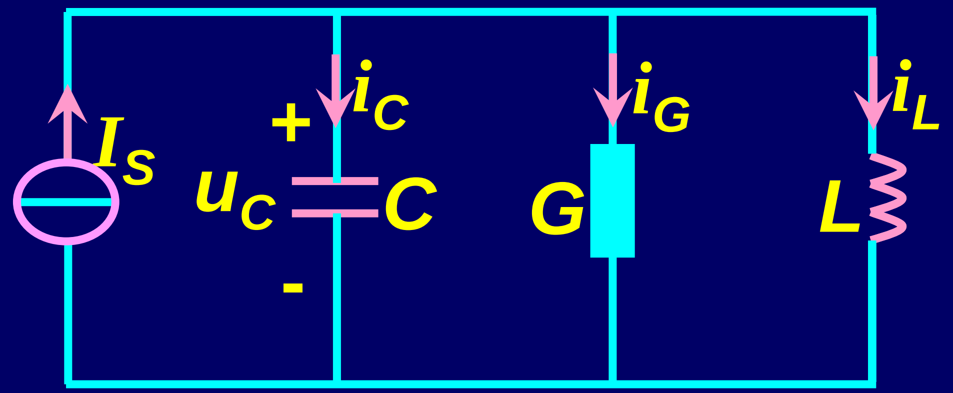
$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0+} = -2K_1 - 4K_2 = \frac{i_L(0)}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_1 = -4 \\ K_2 = 2 \end{cases}$$

$$u_c(t) = (-4e^{-2t} + 2e^{-4t} + 2)\ \mathrm{V}$$

总结：二阶串联电路的完全响应按S不同决定的响应形式从初值变化到稳态值。

§ 7-4 GCL并联电路



$t \geq 0$

$$i_C + i_G + i_L = I_S$$

$$C\frac{du_C}{dt} + Gu_C + i_L = I_S$$

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL\frac{di_L}{dt} + i_L = I_S$$

求通解, 令$I_S = 0$（即零输入响应）

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

$$LCS^2 + GLS + 1 = 0$$

$$S_{1、2} = \frac{-GL \pm \sqrt{(GL)^2 - 4LC}}{2LC}$$

$$= -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

根据固有频率写出通解的形式

求特解：根据激励的形式确定

完全解=通解+特解

利用$i_L(t)$的初始条件

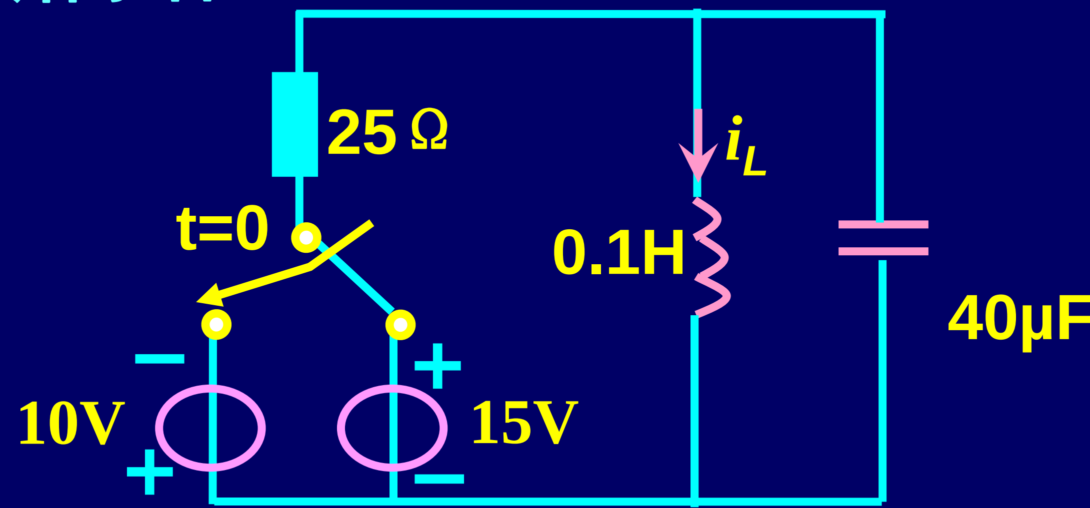
$$\begin{cases} i_L(0) \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0+} = \dfrac{u_{L(0+)}}{L} = \dfrac{u_{c(0)}}{L} \end{cases}$$

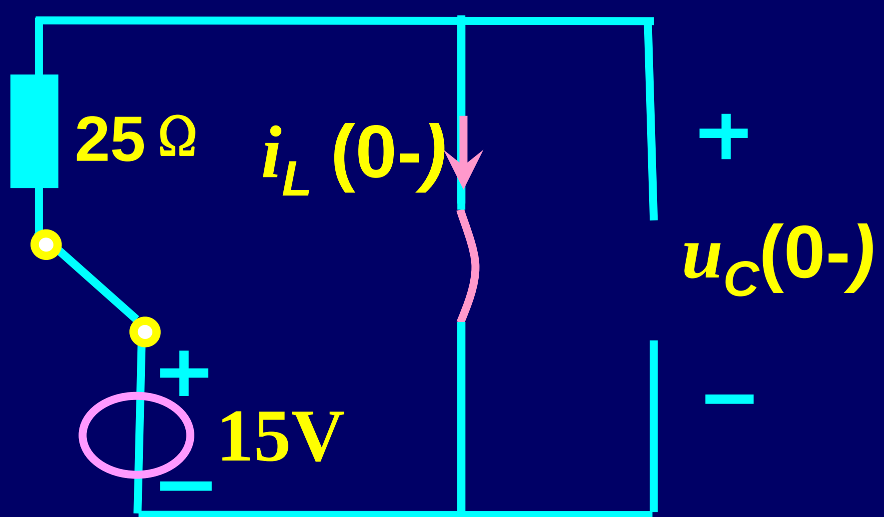
求K_1、K_2。

例7-7. 电路0时刻换路，换路前处于稳态。求$i_L(t)$，$t\geq0$

解：在换路前电路求初始条件

$i_L(0)$，$u_C(0)$





t=0-

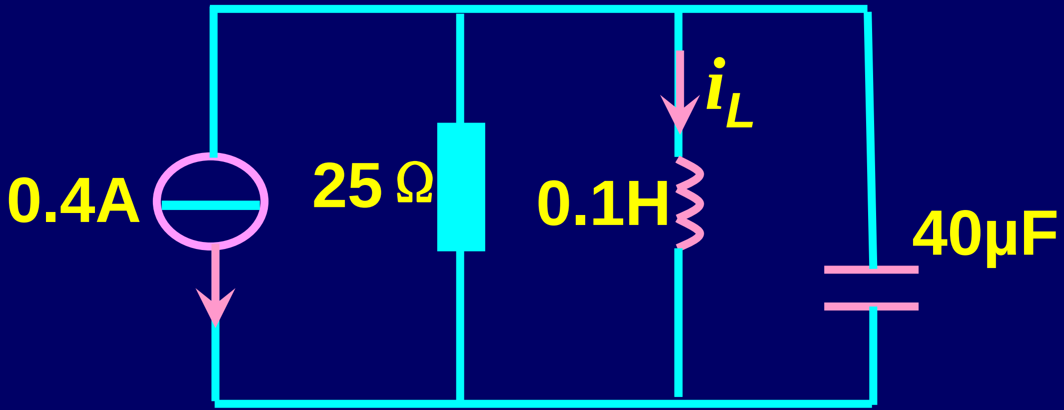
$i_L(0)=15/25=0.6A$

$u_C(0)=0$

求通解 i_{Lht}　　换路后的电路中：

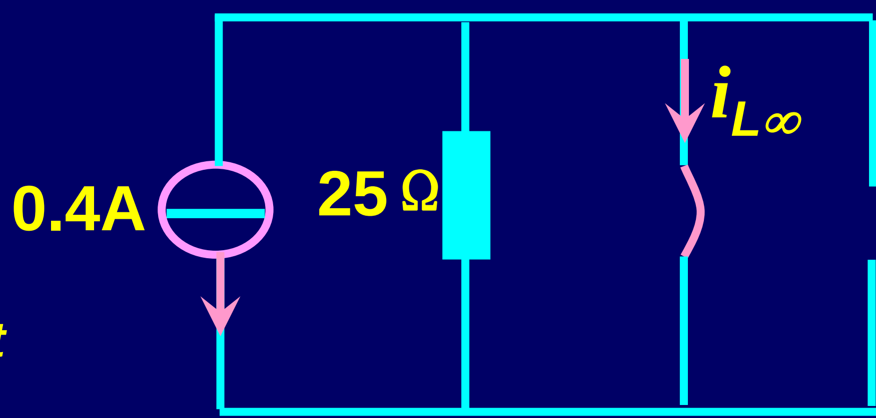
$$S_{1、2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -500$$

$$i_{Lht} = (K_1 + K_2 t)e^{-500t}$$



求特解 i_{Lpt}

$$i_{Lpt} = -0.4A$$



t→∞

$$i_{Lt} = -0.4 + (K_1 + K_2 t)e^{-500t}$$

代入初始条件求K_1和k_2.

$$\begin{cases} i_L(0) = -0.4 + K_1 = 0.6 \\ \left.\dfrac{di_L}{dt}\right|_{t=0+} = -500K_1 + K_2 = \dfrac{u_{L(0+)}}{L} = \dfrac{u_{c(0)}}{L} = 0 \end{cases}$$

得出：$K_1=1 \quad K_2=500$

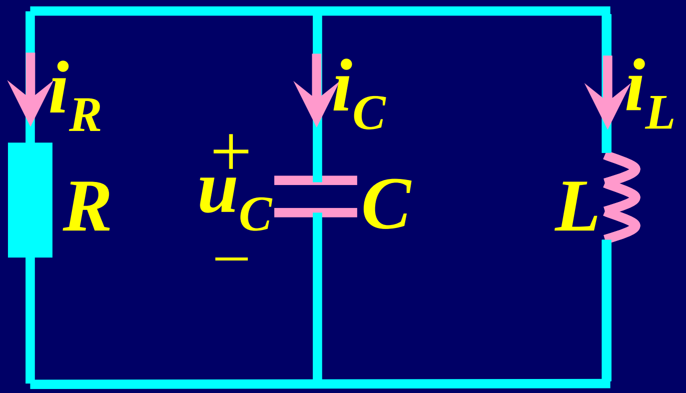
$$i_{Lt} = -0.4 + (1 + 500t)e^{-500t}\ A，\quad t \geq 0$$

补充1：*RLC*并联电路的零输入响应为

$$u_c(t) = 100e^{-600t}\cos 400t$$

若电容初始贮能是 $\frac{1}{30}$ J，求*R*、*L*、C以及电感的初始电流$i_{L(0+)}$。

解（1）求R、L、C



$$w_C(0) = \frac{1}{30} \qquad u_C(0) = 100\text{V}$$

$$\frac{1}{2}Cu_C^2(0) = \frac{1}{30}$$

则：$C = 6.67\mu F$

由 $S_{1、2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm j\omega_d$

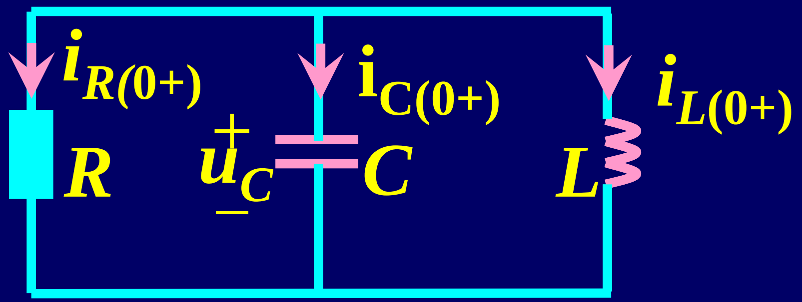
$= -600 \pm j400$

得 $\frac{G}{2C} = 600$ ➡ $G = 80.04 \times 10^{-4}\mathrm{S}$　$R = \frac{1}{G} = 124.9\Omega$

由 $\omega_d = 400 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{G}{2C}\right)^2}$

得 $\frac{1}{LC} = 400^2 + 600^2$ ➡ $L = 0.288\mathrm{H}$

（2）求$i_L(0_+)$



$t=0_+$

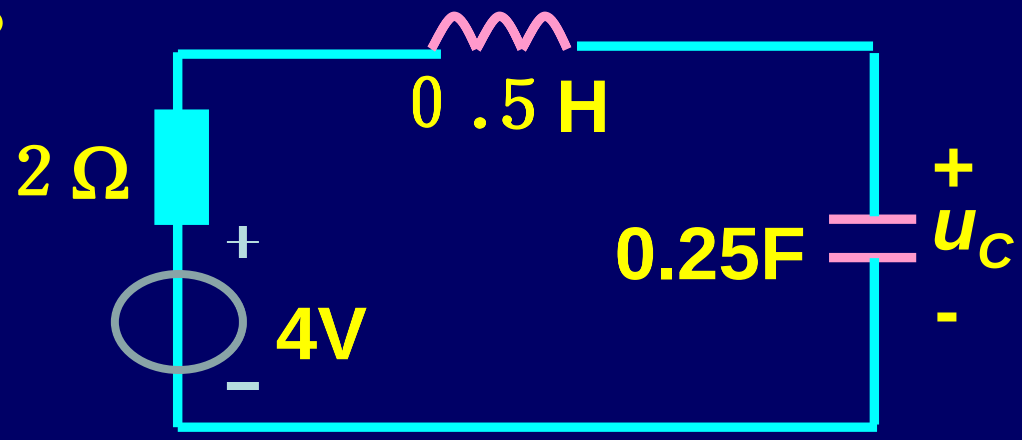
$$i_L(0_+) = -i_R(0_+) - i_C(0_+)$$

$$= -\frac{u_C(0_+)}{R} - C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0+}$$

$$= -\frac{100}{124.9} - 6.67\times10^{-6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(100\mathrm{e}^{-600t}\cos400t)\bigg|_{t=0+}$$

$$= -0.8 + 0.4 = -0.4\mathrm{A}$$

补充2：求电路的固有频率 S 及 $u_c(t)$ 的响应形式。



解： $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$

$$S_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -2 \pm j2$$

$$u_C(t) = e^{-2t}[K_1\cos 2t + K_2\sin 2t] + 4 \text{ V}$$