概率论与数理统计

第14讲

数学期望的性质、方差

一. 数学期望的性质

性质1. 设c是常数，则$E(c)=c$。

性质2. 若随机变量X的数学期望存在，k为常数，则$E(kX)=kE(X)$。

性质3. 若随机变量X和Y的数学期望都存在，则$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$。

可以将性质2和性质3推广到任意有限个随机变量的和的情况。即，随机变量线性组合的数学期望，等于随机变量数学期望的线性组合，若X_i的数学期望都存在，a_i为n个常数，$i=1,2,\ldots,n$，则

$$E(a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n)=a_1E(X_1)+a_2E(X_2)+\ldots+a_nE(X_n)$$

一. 数学期望的性质

性质4. 设随机变量X和Y的数学期望都存在，且互相独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$。

注意：由$E(XY)=E(X)E(Y)$，不一定能推出X与Y独立。

可以将性质4推广有限个随机变量的情况，设随机变量X_1，X_2,…，X_n的数学期望都存在，且相互独立, 则有

$$E[\prod_{i=1}^{n} X_i]=\prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

性质5. 若随机变量X只取非负值，即$P\{X\geq 0\}=1$，记为$X\geq 0$，$E(X)$存在，则$E(X)\geq 0$。

推论1:

若$X\leq Y$, $E(X)$, $E(Y)$都存在，则$E(X)\leq E(Y)$。特别地,若$a\leq X\leq b$, a, b为常数，则$E(X)$存在，且$a\leq E(X)\leq b$。

例1. 设一批同类型的产品共有N件，其中次品有M件。今从中任取n件，记这n件中所含的次品数为X，求$E(X)$。

解：设 $X_i=\begin{cases}1, & 第i次取到次品\\ 0, & 第i次取到正品\end{cases}, i=1,2,\cdots,n$ **则有** $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$

且有 $P\{X_i=1\}=\dfrac{M}{N}, i=1,2,\cdots,n$ $\quad EX_i=\dfrac{M}{N}$

所以 $EX=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{M}{N}=\dfrac{nM}{N}$

此题中将一个复杂的随机变量分解为若干个简单的易求数学期望的随机变量的和，再利用和的期望等于期望的和的性质进行求解，使所求解问题简单化，此方法具有一定的代表性。

例2. 验血方案的选择

为普查某种疾病，n个人需验血。有如下两种验血方案：

（1）分别化验每个人的血，共需化验n次；

（2）分组化验。每k个人分为1组，k个人的血混在一起化验，若结果为阴性，则只需化验一次；若为阳性，则对k个人的血逐个化验，找出有病者，此时k个人的血需化验$k+1$次。

设：每个人血液化验呈阳性的概率为p，且每个人化验结果是相互独立的。试说明选择哪一方案较经济。

解：只需计算方案（2）所需化验次数X的期望。

为简单计，不妨设n是k的倍数，共分成 $j=n/k$组。

设第i 组需化验的次数为X_i，则其分布律为

X_i	1	$k+1$
P	$(1-p)^k$	$1-(1-p)^k$

$$E(X_i)=1\times(1-p)^k+(k+1)\times[1-(1-p)^k]=(k+1)-k(1-p)^k$$

方案2需要化验的总次数为 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_j$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{j} E(X_i) = \frac{n}{k}[(k+1) - k(1-p)^k] = n[1-((1-p)^k - \frac{1}{k})]$$

若 $(1-p)^k - \frac{1}{k} > 0$，则$E(X)<n$，即方案2优于方案1

如：$n=1000$，$p=0.001$，$k=10$

$$E(X) = 1000[1-(0.999^{10} - \frac{1}{10})] \approx 110 \ll 1000.$$

例4. 某水果商店，冬季每周购进一批苹果。已知该店一周苹果需求量X(单位:千克)服从均匀分布$U(1000,2000)$。购进的苹果在一周内售出1千克获纯利1.5元; 若一周内没售出，1千克需付耗损、储藏等费用0.3元。问一周应购进多少千克苹果, 商店才能获得最大的平均利润。

解：设一周应购进m千克苹果，易知$m\in(1000, 2000)$，商店一周销售苹果获得的利润为Y。则Y与X的函数关系为

$$Y=g(X)=\begin{cases}1.5m, & X\geq m\\ 1.5X-0.3(m-X), & X<m\end{cases}=\begin{cases}1.5m, & X\geq m\\ 1.8X-0.3m, & X<m\end{cases}$$

一. 数学期望的性质

$$g(x)=\begin{cases}1.5m, & x\ge m\\ 1.8x-0.3m, & x<m\end{cases}$$

所以 $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx=\int_{1000}^{2000}g(x)\frac{1}{1000}dx$

$$=\int_{1000}^{m}g(x)\frac{1}{1000}dx+\int_{m}^{2000}g(x)\frac{1}{1000}dx$$

$$=\frac{1}{1000}[\int_{1000}^{m}(1.8x-0.3m)dx+\int_{m}^{2000}1.5mdx]$$

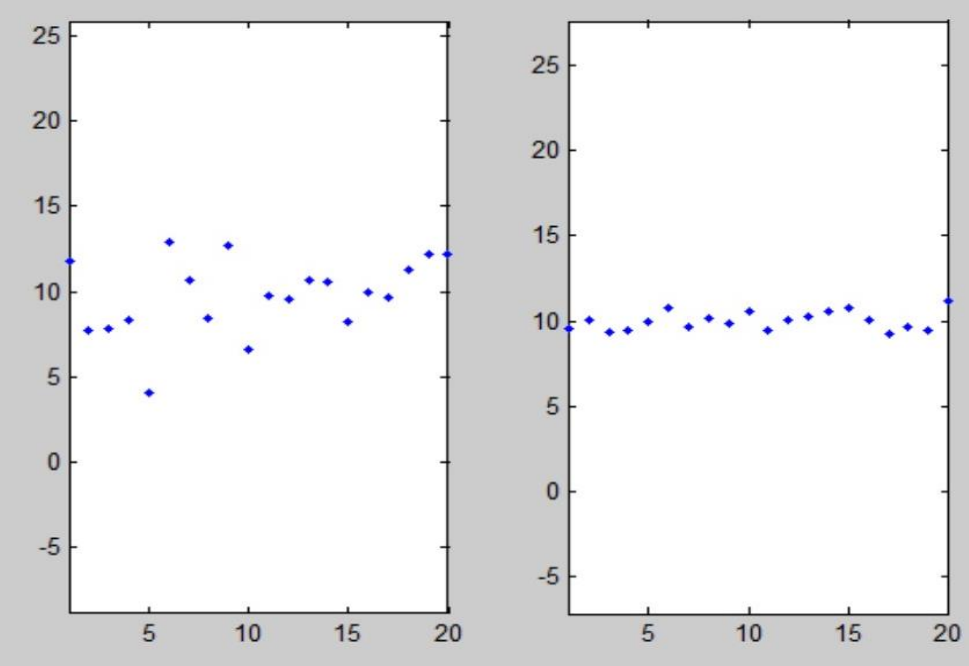
$$=\frac{1}{1000}(-0.9m^2+3300m-9\times10^5)$$

所以有 $-1.8m+3300=0$　　解得m=1833

即当m=1833千克时，平均利润达到最大，最大利润为2125元。

数学期望从平均值的角度描述了随机变量的统计特性，但在某些情况下，仅仅利用平均值不能区分两个量的好坏。

例如，某零件的真实长度为10，现用甲、乙两台仪器各测量20次，测量结果如图所示



二. 方 差

为此需要引进另一个数字特征，用它来度量随机变量的取值围绕其均值的离散(偏离)程度。

这个数字特征就是——方差

偏离程度

$X-E(X)$

$|X-E(X)|$

$(X-E(X))^2$

平均偏离

$E[X-E(X)]=0$

$E(|X-E(X)|)$

$E(X-E(X))^2$

带有绝对值，数学上处理不方便

作为方差的定义

定义1 设随机变量X的数学期望为$E(X)$, 若$E(X-E(X))^2$存在, 则称它为X的方差(Variance)，记为$D(X)$或$Var(X)$，即

$$D(X)=E(X-E(X))^2$$

注 意

（1）$E(X-EX)^2$——随机变量X的取值偏离平均值的平均偏离程度，是一个常数；

（2）方差反映了随机变量相对其均值的偏离程度，$D(X)\geq 0$。

二. 方 差

随机变量X的方差$D(X)$ 的算术平方根$\sqrt{D(X)}$ 称为X的标准差或均方差。记为$\sigma(X)$

它的含义与方差一样，且与随机变量的数学期望具有相同的量纲。

方差的计算

由定义知，方差是随机变量X的函数$g(X)=[X-E(X)]^2$的数学期望。

（1）若X为离散型随机变量，分布律为$P\{X=x_k\}=p_k$， $k=1,2,\cdots$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(x_k-E(X)\right)^2 p_k$$

（2）若X为连续型随机变量，概率密度为$f(x)$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E(X)\right)^2 f(x)dx$$

方差的计算

（3）计算方差的常用公式： $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

证明：

$$
\begin{aligned}
D(X) &= E\{[X-E(X)]^2\} = E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\} \\
&= E(X^2)-E[2XE(X)]+E\{[E(X)]^2\} \\
&= E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2 \\
&= E(X^2)-[E(X)]^2
\end{aligned}
$$

例5. 设随机变量X服从0—1分布$b(1, p)$，求$D(X)$。

解：因为X的分布律为

X	0	1
P	q	p

且有$EX=p$;　又$E(X^2)=1^2\cdot P\{X=1\}+0^2\cdot P\{X=0\}=p$

所以有 $D(X)=E(X^2)-[EX]^2=p-p^2=p(1-p)$

例6. 设随机变量X服从泊松分布$P(\lambda)$，求$D(X)$。

解：因为X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots.$

且有$EX=\lambda$; 又 $E(X^2)=E[X(X-1)+X]=E[X(X-1)]+EX$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\lambda=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda$$

$$\overset{令j=k-2}{=}\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}+\lambda=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda.$$

所以有 $D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$

例7. 设随机变量X服从p（$0<p<1$）的几何分布，求$D(X)$。

解：因为X 的分布律为 $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$, $k=1,2,\ldots$, **且有**$EX=1/p$;**令**$q=1-p$。

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P(X=k)=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}[k(k-1)+k]q^{k-1}$$

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-1}+p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=pq\sum_{k=2}^{\infty}(q^k)''+p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'$$

$$=pq\left(\frac{q^2}{1-q}\right)''+p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}$$

所以有 $D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\dfrac{2}{p^2}-\dfrac{1}{p}-\left(\dfrac{1}{p}\right)^2=\dfrac{1-p}{p^2}$

例8. 设随机变量X服从均匀分布$U(a,b)$，求$D(X)$。

解：因为X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$ 且有 $EX=\dfrac{a+b}{2}$

所以有 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_a^b x^2\cdot\dfrac{1}{b-a}dx=\dfrac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$

故有 $DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{1}{12}(b-a)^2$

例9. 设随机变量X服从参数为λ的指数分布$E(\lambda)$，求$D(X)$。

解：因为X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 且有 $EX=\dfrac{1}{\lambda}$

所以有 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\dfrac{2}{\lambda^2}$

故有 $DX=EX^2-(EX)^2=\dfrac{1}{\lambda^2}$

例10. 设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，求$D(X)$。

解：因为X的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$　　且有 $EX=\mu$

所以有 $D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X-\mu)^2$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{t=(x-\mu)/\sigma}{=}\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}td(-e^{-\frac{t^2}{2}})$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}[t(-e^{-\frac{t^2}{2}})|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}(-e^{-\frac{t^2}{2}})dt]=\sigma^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2$$

例11. 设随机变量X 的概率密度为 $f(x)=ae^{-\frac{(x-3)^2}{8}},-\infty<x<+\infty$

其中a为未知常数， 求常数a的值以及 $E(X^2)$。

解：根据正态分布的密度函数的形式以及该分布的期望和方差的性质知，X服从正态分布，且两个参数分别为μ=3, σ^2=4。

$$a=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$$

所以有 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=4+3^2=13$

二. 方 差

性质1. 设c是常数，则有$D(c)=0$。

性质2. 设X是一个随机变量，a是常数，则有$D(X+a)=D(X)$。

性质3. 设X是一个随机变量，b是常数，则有$D(bX)= b^2D(X)$。

结合性质2与性质3就有 $D(bX+a)=b^2D(X)$

性质4. 设随机变量X、Y的方差$D(X)$、$D(Y)$ 存在，则

$$D(X\pm Y) = DX + DY \pm 2E[(X-EX)(Y-EY)]$$

证明： $D(X\pm Y)=E[(X\pm Y)-E(X\pm Y)]^2 = E[(X-EX)\pm E(Y-EY)]^2$

$$= E[(X-EX)^2 \pm 2(X-EX)(Y-EY)+(Y-EY)^2]$$

$$= E(X-EX)^2 \pm 2E[(X-EX)(Y-EY)]+E(Y-EY)^2$$

$$= DX + DY \pm 2E(X-EX)(Y-EY)$$

性质5.若随机变量X和Y相互独立，它们的方差都存在，则$X\pm Y$的方差也存在，且 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

证明: 由性质4知，只需证明$E[(X-EX)(Y-EY)]=0$

若X, Y相互独立， 则$X-EX$与$Y-EY$相互独立

$$E[(X-EX)(Y-EY)]=E[(X-EX)]E(Y-EY)]$$

$$=[EX-E(EX)]EY-E(EY)]$$

$$=(EX-EX)(EY-EY)=0$$

推论1. 若随机变量$X_1,X_2,\dots,X_n$相互独立，且它们的方差都存在，则$X_1+X_2+\dots+X_n$的方差存在，且

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} DX_i$$

推论2. 若随机变量$X_1, X_2,\dots, X_n$独立同分布，它们的方差都存在，则$X_1+X_2+\dots+X_n$的方差存在，且

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=nDX_1$$

性质6 $D(X)=0$的充要条件是$P\{X=EX\}=1$

性质7 设随机变量X的期望和方差都存在，$E(X)=\mu$, a为常数，则有

$$D(X)\le E(X-a)^2$$

等号成立当且仅当$a=\mu$。

证明： $E(X-a)^2=E(X-\mu+\mu-a)^2=E(X-\mu)^2+2E[(X-\mu)(\mu-a)]+(\mu-a)^2$

$$=E(X-\mu)^2+2(\mu-a)E(X-\mu)]+(\mu-a)^2$$

$$=E(X-\mu)^2+2(\mu-a)\times 0+(\mu-a)^2=DX+(\mu-a)^2\ge DX$$

所以$D(X)\le E(X-a)^2$且等号成立当且仅当$a=\mu$.

性质7的结果表明，在方差的定义中选择以EX为波动的中心，可以使这种波动达到最小。

例12. 设随机变量X服从二项分布$b(n, p)$，求$D(X)$。

解：由二项分布的背景，X表示n次独立重复试验中事件A发生的次数，且$P(A)=p$。

引入随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$，其中$X_i=\begin{cases}1, & 第i次试验A发生\\ 0, & 第i次试验A不发生\end{cases}, i=1,2,\cdots,n$

则$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，均服从0−1分布，且有$X=\sum_{i=1}^{n}X_i$

则有 $D(X_i)=p(1-p) \quad i=1, 2, \ldots, n$

故 $DX=D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}DX_i=np(1-p)$

例13. 随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立，$EX_i=0$， $DX_i=1$，令$Y= X_1+X_2+\ldots+X_n$. 求$E(Y^2)$

解：由期望的性质得

$$E(Y)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=0$$

由独立随机变量方差的性质得

$$D(Y)=D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)=n$$

因此 $E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=n$

例14. 设 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2,\ldots,n$，且相互独立，$a_i\,(i=1,2,\ldots,n)$为常数，不全为0，令 $Z=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i$ ，求Z的分布。

解：由第三章的相关知识，相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，故Z服从正态分布。因为正态分布完全由两个参数决定，所以只要求出Z的期望和方差，就可以确定Z的分布。

由期望和方差的性质 $EZ=E(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}a_iEX_i=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i$

$$DZ=D(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2DX_i=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2$$

所以 $Z\sim N(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2)$

例15. 设随机变量X 的方差$D(X)$存在, 且$D(X)>0$，令 $X^* = \dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 其中$E(X)$是X的数学期望，求 $E(X^*)$ 和 $D(X^*)$。

解： $E(X^*) = E[\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}] = \dfrac{1}{\sqrt{D(X)}}E[X-E(X)] = 0$

$$D(X^*) = D[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}] = \frac{1}{D(X)}D[X-E(X)] = \frac{1}{D(X)}D(X) = 1$$

X^*称为X的标准化随机变量。显然标准化的随机变量是无量纲的。引入标准化的随机变量主要是为了消除计量单位的不同给随机变量带来的影响。

作业：10,13,14,17,20,24,34,35

第 14 讲

谢谢聆听