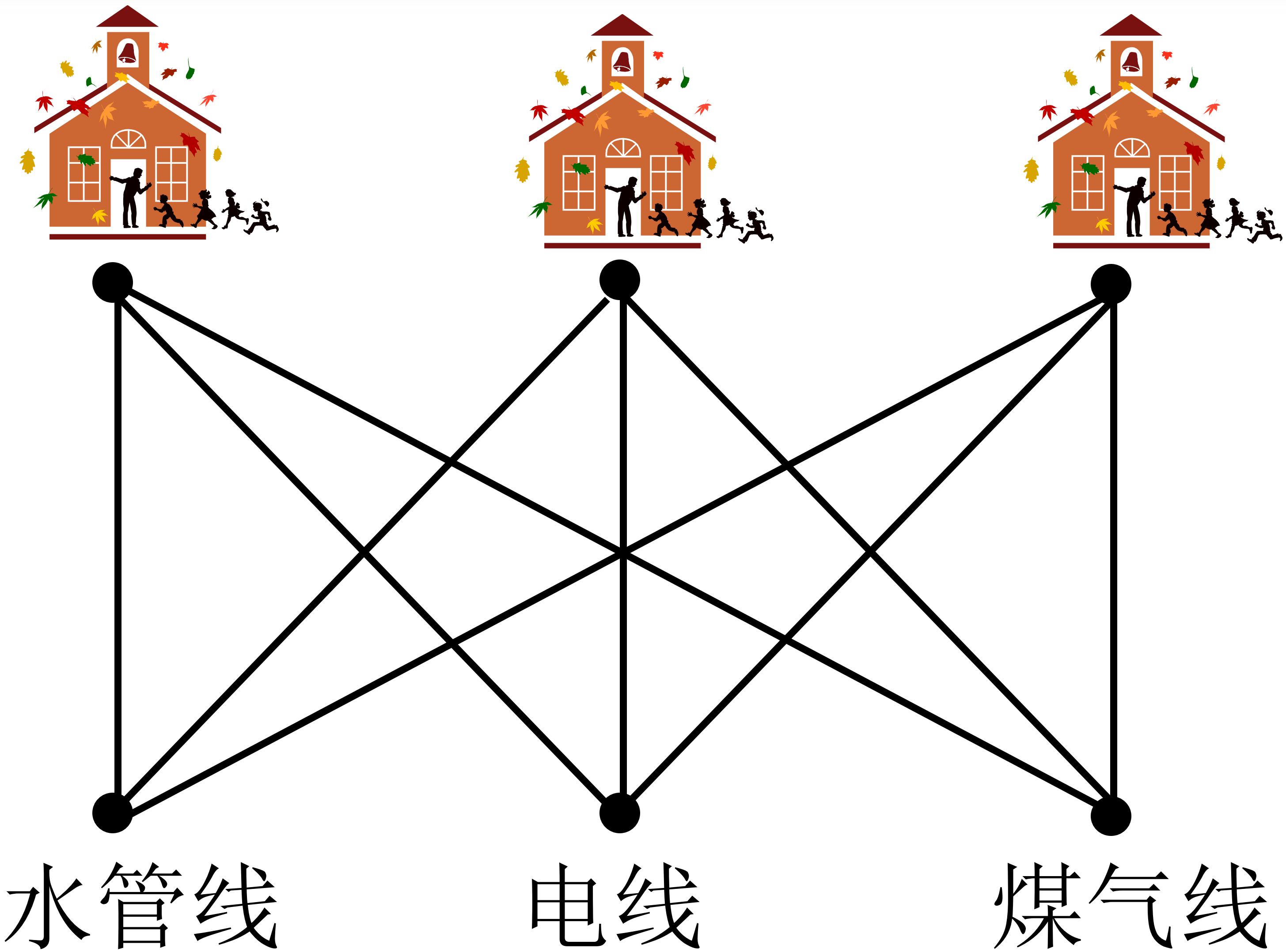
第十七章 平面图

本章的主要内容

房屋布线问题



第十七章 平面图

本章的主要内容

- 17.1平面图的基本概念
- 17.2欧拉公式
- 17.3平面图的判断
- 17.4平面图的对偶图

17.1 平面图的基本概念

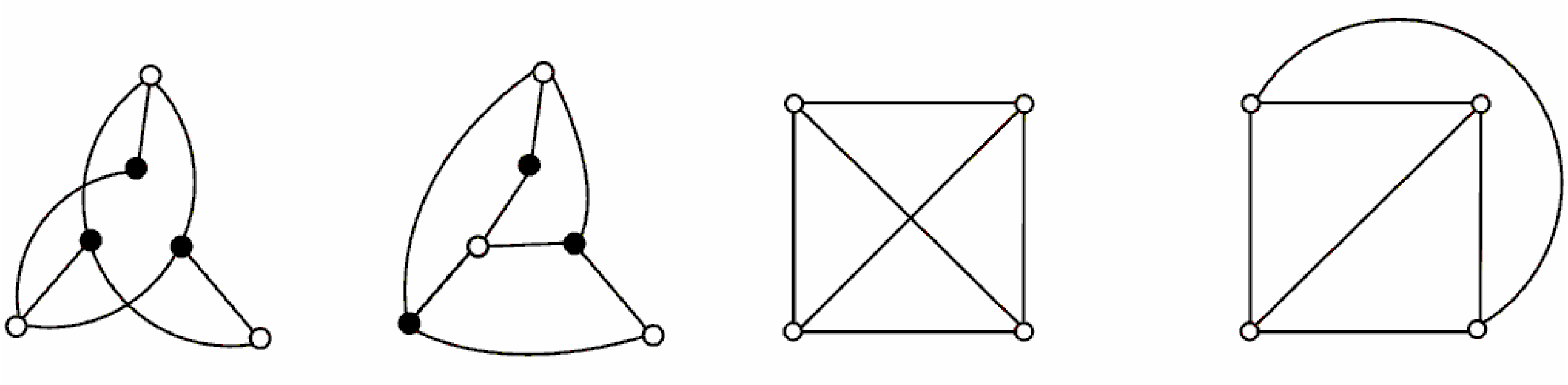
定义17.1

(1) G是可平面图或平面图

——若能将无向图G除顶点外无边相交地画在平面上

(2) 平面嵌入——画出的无边相交的平面图

(3) 非平面图——无平面嵌入的无向图

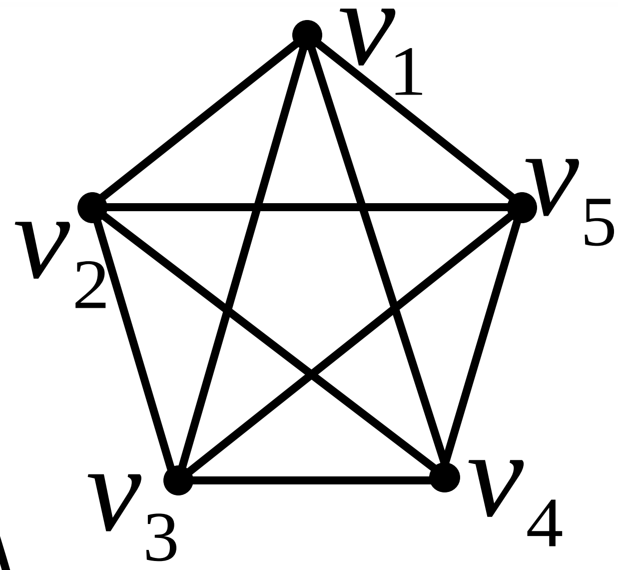


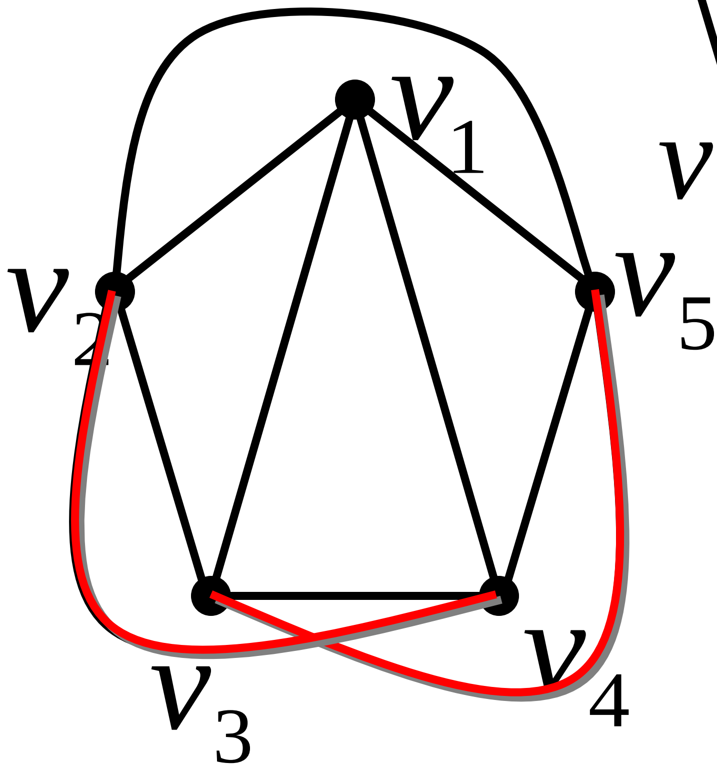
(1) (2) (3) (4)

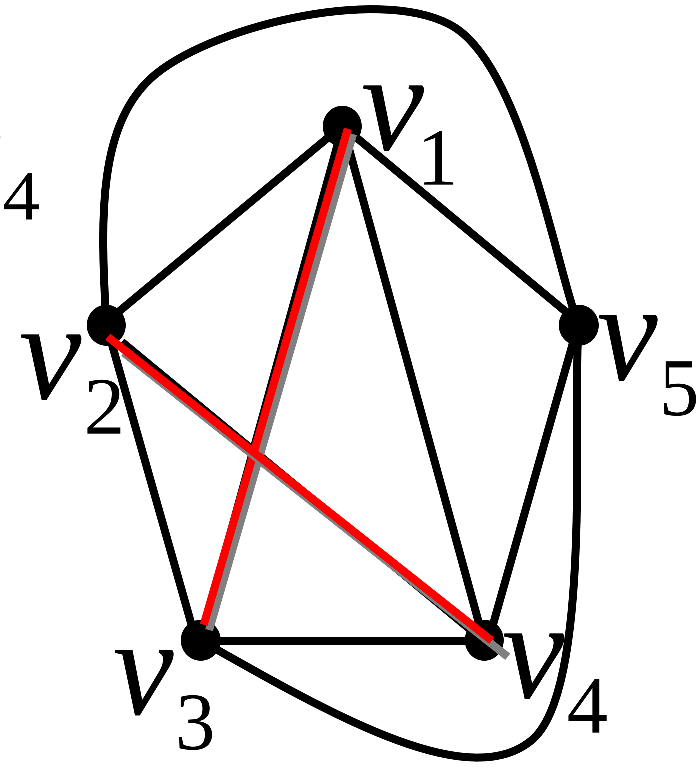
在图中，(2)是(1) 的平面嵌入，(4)是(3)的平面嵌入.

例（续）

非平面图



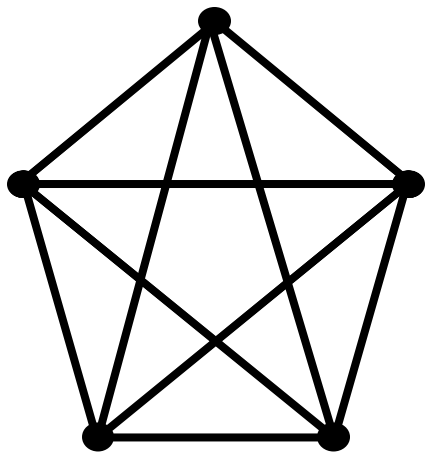


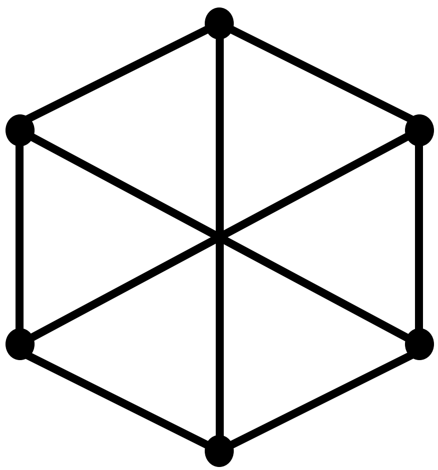


一些简单结论

结论：

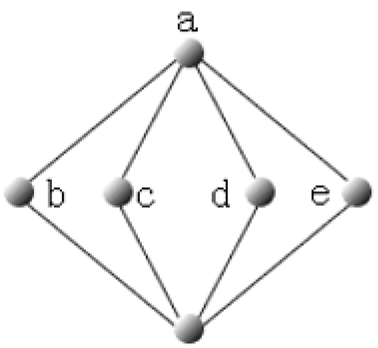
(1) K_5, $K_{3,3}$都不是平面图.





(2) 平面图的子图都是平面图，非平面图的母图都是非平面图（定理17.1）

- $K_n(n\leq 4)$，$K_{2,n}(n\geq 1)$ 的所有子图都是平面图
- $K_n(n\geq 5)$，$K_{s,t}\ (s,t\geq 3)$ 都是非平面图.



(4) 平行边与环不影响平面性（定理17.2）.

平面图(平面嵌入)的面与次数

定义17.2

(1) G的面——由G的平面嵌入的边将平面化分成的区域

(2) 无限面或外部面（可用R_0表示）——面积无限的面

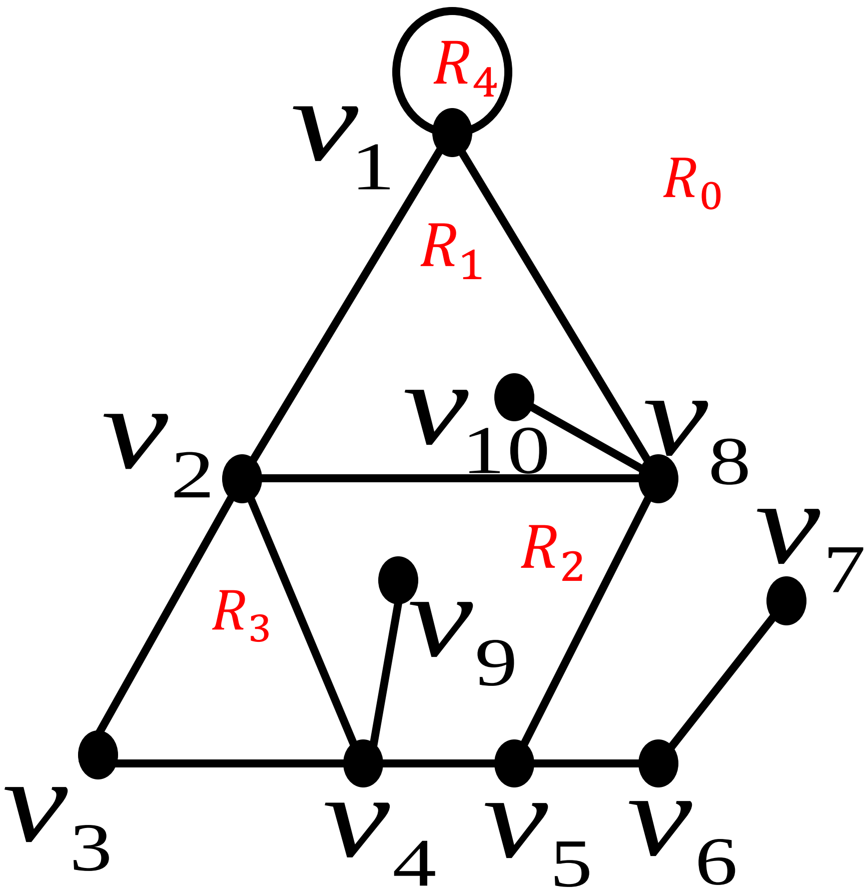
(3) 有限面或内部面（可用$R_1, R_2, \ldots, R_k$等表示）——面积有限的面

(4) 面 R_i 的边界——包围R_i的所有边组成的回路组

(5) 面 R_i 的次数——R_i边界的长度，用$\deg(R_i)$表示

- 若平面图G有k个面，可笼统地用$R_1, R_2, \ldots, R_k$表示，不需要指出外部面.
- 定义17.2(4) 中回路组是指：边界可能是初级回路(圈)，可能是简单回路，也可能是复杂回路. 特别地，还可能是非连通的回路之并.

例



R_3： $v_2v_3v_4v_2$

$deg(R_3)=3$

R_4： v_1v_1

$deg(R_4)=1$

R_2： $v_2v_4\,v_9v_4\,v_5v_8\,v_2$

$deg(R_2)=6$

R_1： $v_1v_2v_8v_{10}v_8v_1$

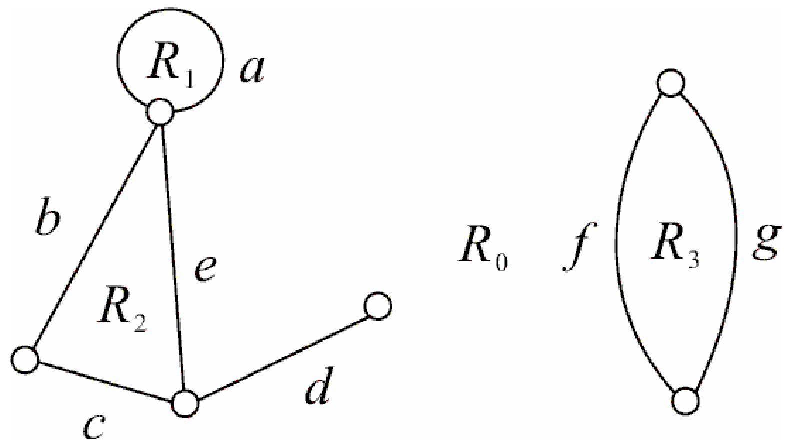
$deg(R_1)=5$

R_0 ：$v_2v_3\,v_4v_5\,v_6v_7\,v_6v_5v_8\,v_1v_1\,v_2$

$deg(R_0)=11$

例

平面图有4个面，
deg(R_1)=1, deg(R_2)=3,
deg(R_3)=2, deg(R_0)=8.
请写各面的边界.



定理17.3 平面图各面次数之和等于边数的两倍.
(握手定理)

$$\sum_{i=1}^{R} \deg(R_i) = 2m$$

其中 R_i 是面，m 是边数

极大平面图

定义17.3 若在简单平面图G中的任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图，则称G为极大平面图.

注意：若简单平面图G中已无不相邻顶点，G显然是极大平面图，如K_1(平凡图), K_2, K_3, K_4都是极大平面图.

极大平面图的主要性质

定理17.4 极大平面图是连通的，且n（$n \geq 3$）阶极大平面图中不可能有割点和桥.

证明(见课后习题)

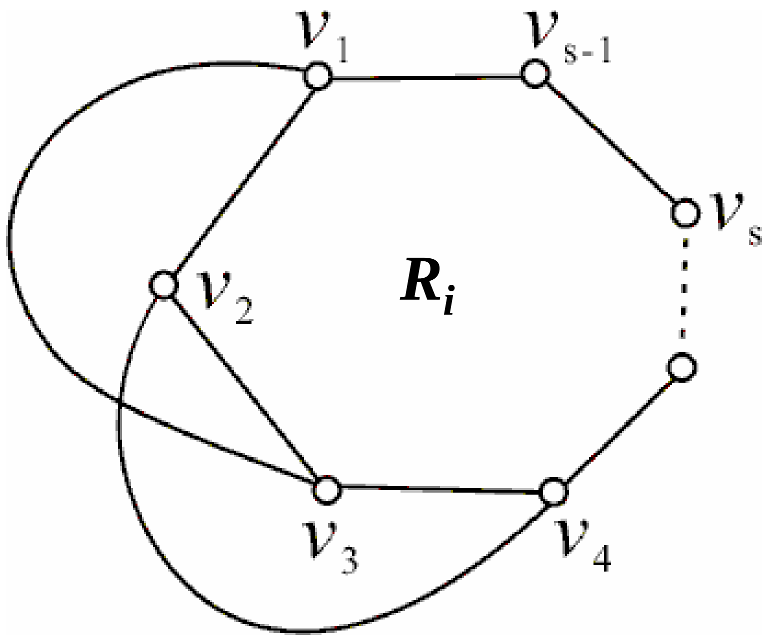
极大平面图的性质

定理17.5 设G为n（$n\geq 3$）阶简单连通的平面图，G为极大平面图当且仅当G的每个面的次数均为3.

证明线索：只证必要性

(1) 由于$n\geq 3$, 又G为简单平面图可知，G每个面的次数均≥ 3.

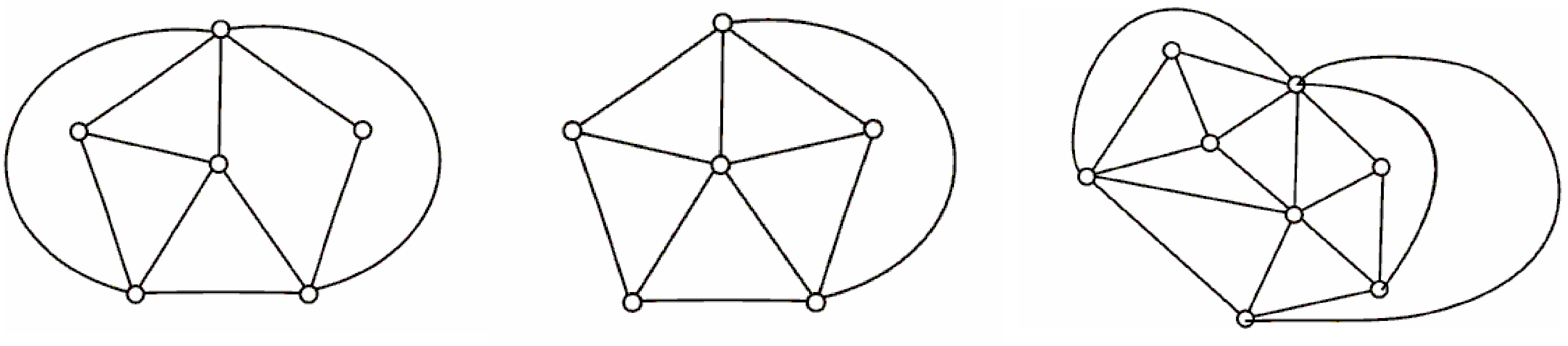
(2) 因为G为平面图，又为极大平面图. 可证G不可能存在次数>3的面.



定义17.3 若在简单平面图G中的任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图，则称G为极大平面图.

定理的应用

判断下列各图是否为极大平面图

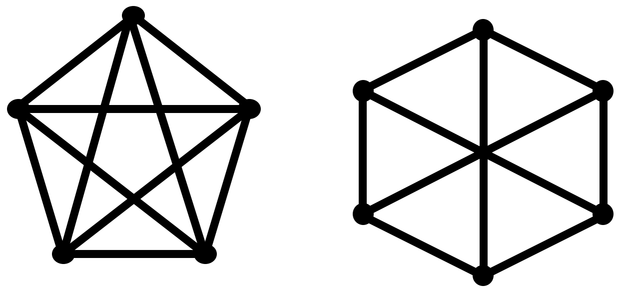


(1)　　(2)　　(3)

上图中，只有(3)为极大平面图

极小非平面图

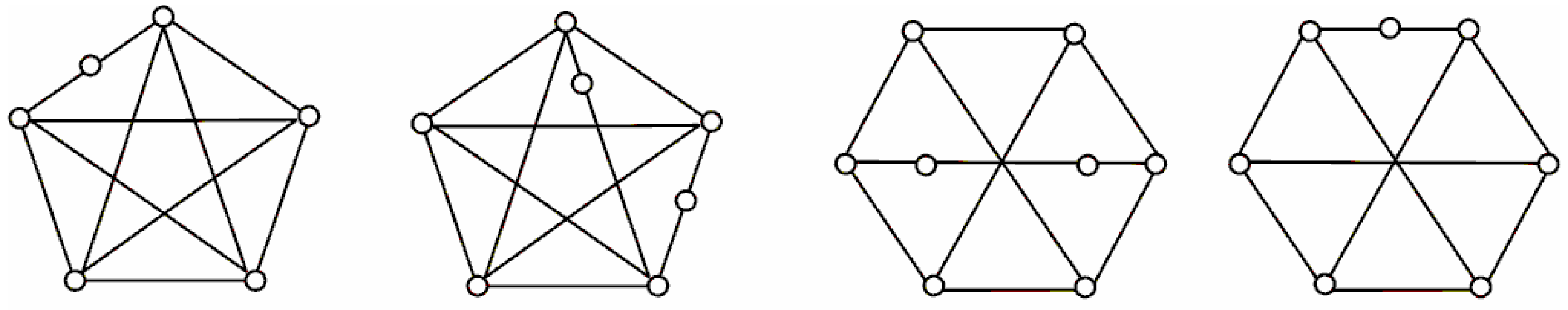
定义17.4 若在非平面图G中任意删除一条边，所得图G'为平面图，则称G为极小非平面图.



由定义不难看出：

(1) K_5, $K_{3,3}$都是极小非平面图

(2) 极小非平面图必为简单图



图中所示各图都是极小非平面图.

17.1 平面图的基本概念(回顾)

- 17.1平面图的基本概念
  - 平面图
    - 定义：若能将无向图G除顶点外无边相交地画在平面上
      - 平面嵌入
    - $K_5, K_{3,3}$都不是平面图
    - 平面图的子图都是平面图，非平面图的母图都是非平面图
    - 平行边与环不影响平面性
  - 平面图的面、面的边界、面的次数
    - $\sum_{i=1}^{R} \deg(R_i) = 2m$
  - 极大平面图
    - 若在简单平面图G中的任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图，则称G为极大平面图
    - 极大平面图是连通的，且n（n>=3）阶极大平面图中不可能有割点和桥
    - 设G为n（n>=3）阶极大平面图，当且仅当G的每个面的次数均为3
    - **m=3n-6**
  - 极小非平面图
    - 若在非平面图G中任意删除一条边而得到的图为平面图，则称G为极小非平面图

第十七章 平面图

本章的主要内容

- 17.1平面图的基本概念
- 17.2欧拉公式
- 17.3平面图的判断
- 17.4平面图的对偶图

17.2 欧拉公式

定理17.6 设G为n阶m条边r个面的连通平面图，则$n-m+r=2$（此公式称为欧拉公式）

(1)设 G 是一个孤立点,则 $n=1,m=0,r=1$, 成立.

(2)设 G 是一条边,即 $n=2,m=1,r=1$, 成立.

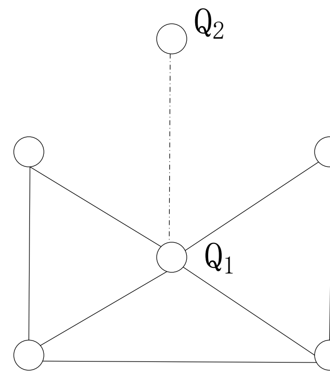
(3)设G 为 k 条边时成立, 即 $n_k-m_k+r_k=2$,

考察G 有 k+1 条边.只有下述两种情况:

- 加上一个新的结点,与图上的一点相连,

  此时 n_k 和 m_k 都增加1, r_k未变, 故

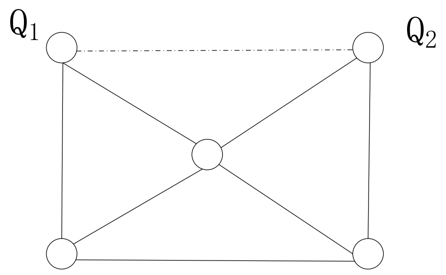
$$(n_k+1)-(m_k+1)+r_k=n_k-m_k+r_k=2$$



- 用一条边连接图上的两个已有点,

  此时 m_k 和 r_k 都增加1而结点数 n_k 未变, 故

$$n_k-(m_k+1)+(r_k+1)=n_k-m_k+r_k=2$$



17.2 欧拉公式

定理17.7 （欧拉公式的推广）设G是具有k（k≥2）个连通分支的平面图，则$n - m + r = k + 1$

证: 设第 i 个连通分支有 n_i个顶点, m_i条边和 r_i 个面.

对各连通分支用欧拉公式:

$$n_i - m_i + r_i = 2, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

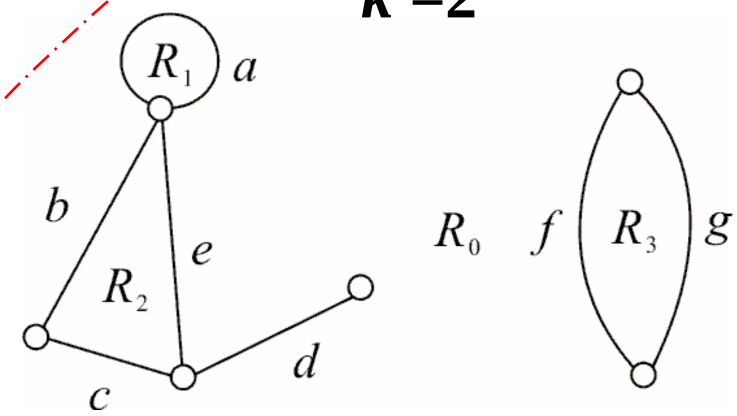
求和 $\sum_{i=1}^{k}(n_i - m_i + r_i) = 2k$

展开 $\sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{k} r_i = 2k$

由于 $r = \sum_{i=1}^{k} r_i - (k-1)$

即得 $n - m + r = k + 1$

$k = 2$



与欧拉公式有关的定理

定理17.8 设G为连通的平面图，且$\deg(R_i)\geq l$（$l\geq 3$），则

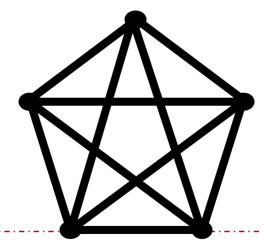
$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

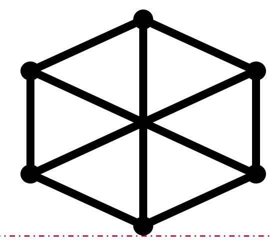
证 由**定理17.3(握手定理)**及**欧拉公式**得

$$2m = \sum_{i=1}^{r}\deg(R_i) \geq l \cdot r = l(2+m-n)$$

解得 $m \leq \dfrac{l}{l-2}(n-2)$

推论 K_5, $K_{3,3}$不是平面图.





证 K_5中每个面的次数均大于等于3，故l=3, $\frac{3}{3-2}$(5-2)=9<10 (m)

$K_{3,3}$中每个面的次数均大于等于4，故l=4, $\frac{4}{4-2}$(6-2)=8<9 (m)

与欧拉公式有关的定理

定理17.9 在具有k（k≥2）个连通分支的平面图中，

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-k-1)$$

证 由定理17.7（欧拉公式的推广）得: $r=k+1+m-n$

由定理17.3（握手定理）及欧拉公式得:

$$2m = \sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) \ge l \cdot r = l(k+1+m-n)$$

解得

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-k-1)$$

与欧拉公式有关的定理

定理17.10 设G为n（$n \geq 3$）阶m条边的极大平面图，则$m=3n-6$.

证 由于极大平面图是连通图，由欧拉公式得 $r=2+m-n$

因为G是极大平面图，

根据定理17.5可知，G的每个面的次数都为3，

因此，根据定理17.3（握手定理）可知， $2m=3r$

代入上式，得$m=3n-6$

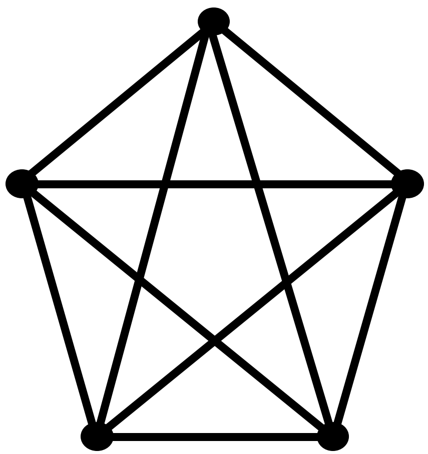
与欧拉公式有关的定理

推论 设G为n（$n\geq 3$）阶m条边的简单平面图，则$m\leq 3n-6$.

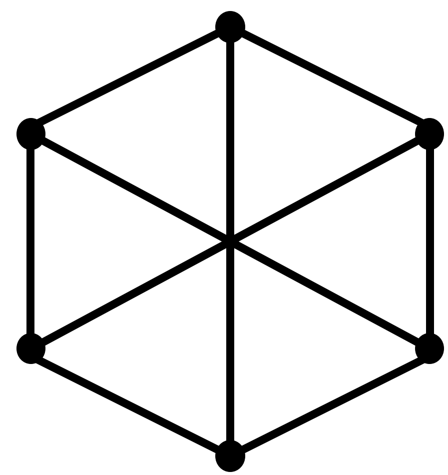
注意

此推论是简单平面图的必要条件，不是充分条件！

K_5



$K_{3,3}$



$m=10$，$n=5$

不满足 $m\leq 3n-6$

所以 K_5 不是平面图。

$m=9$，$n=6$

满足$m\leq 3n-6$

但 $K_{3,3}$ 不是平面图。

与欧拉公式有关的定理

定理17.11 设G为简单平面图，则$\delta(G) \le 5$.

证 阶数 $n \le 6$，结论为真.

当$n \ge 7$时，用反证法.

否则 $\delta(G) \ge 6$

则根据定理14.1（握手定理）$2m \ge 6n \Rightarrow m \ge 3n$（$>3n-6$）

这与定理17.10的推论矛盾.

推论 设G为n（$n \ge 3$）阶m条边的简单平面图，则$m \le 3n-6$.

定理17.5充分性

- 若简单连通平面图G的每个面的次数都等于3，则G为极大平面图。

证 根据定理17.3（握手定理）可知，$2m=3r$

因为G是连通的，根据欧拉公式可知：$r=2+m-n$.

代入上式，得$m=3n-6$.

若G不是极大平面图，则G中一定存在不相邻的顶点u,v，使得$G'=G\cup(u,v)$是简单平面图.

而G'的边数 $m'=m+1=3n-5$，点数 $n'=n$

因此$m'>3n'-6$. 这与定理17.10的推论矛盾。

推论 设G为n（$n\geq3$）阶m条边的简单平面图，则$m\leq 3n-6$.

17.2 欧拉公式（回顾）

- 17.2欧拉公式
  - 连通平面图
    - n-m+r=2
      - n–m+r=k+1
        - k是连通分支数
    - $m \le \dfrac{l}{l-2}(n-2)$
      - $m \le \dfrac{l}{l-2}(n-k-1)$
      - l是面的次数的最小值
  - 简单平面图
    - m>=3n-6
    - $\delta(G) \le 5$.

第十七章 平面图

本章的主要内容

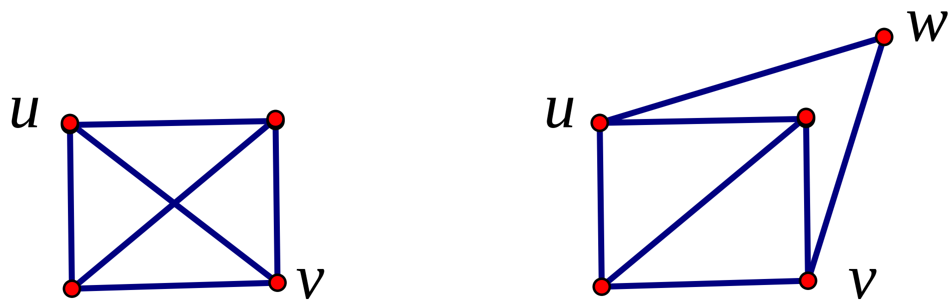
- 17.1平面图的基本概念
- 17.2欧拉公式
- 17.3平面图的判断
- 17.4平面图的对偶图

17.3 平面图的判断

1. 插入2度顶点和消去2度顶点

定义17.5

(1) 插入2度顶点：设 $e = (u, v)$为图G的一条边，在G中删除e，增加新的顶点w，使u, v均与w相邻，称作在G中插入2度顶点w.
见下图中，由(1) 到(2) .



(1) (2)

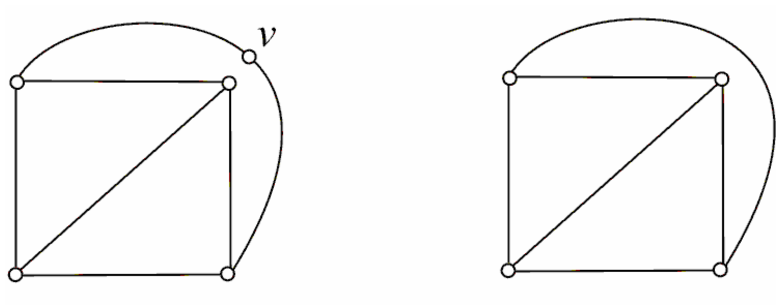
(2) 消去2度顶点，设w为图G的一个2度顶点，w与u, v相邻，删除w，增加新边(u, v)，称作在G中消去2度顶点w.
见上图中，从(2) 到(1) .

图的同胚

2. 图之间的同胚

若G_1与G_2同构，或经过反复插入或消去2度顶点后同构，则称G_1与G_2同胚.

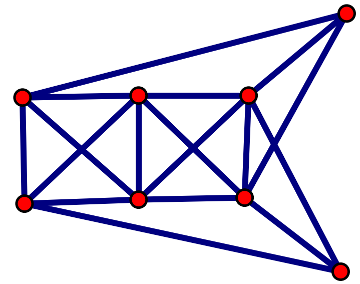
下面两个图同胚



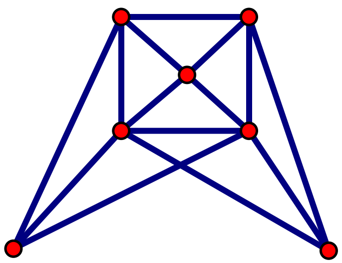
平面图判定定理（一）

定理17.12 G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中不含与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图.

例1 证明所示图(1)与(2)均为非平面图.

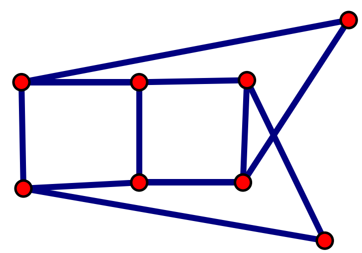


(1)

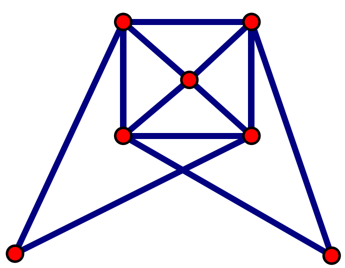


(2)

右图(1′),(2′)分别为原图(1), (2)的子图与$K_{3,3}$, K_5同胚.



(1′)



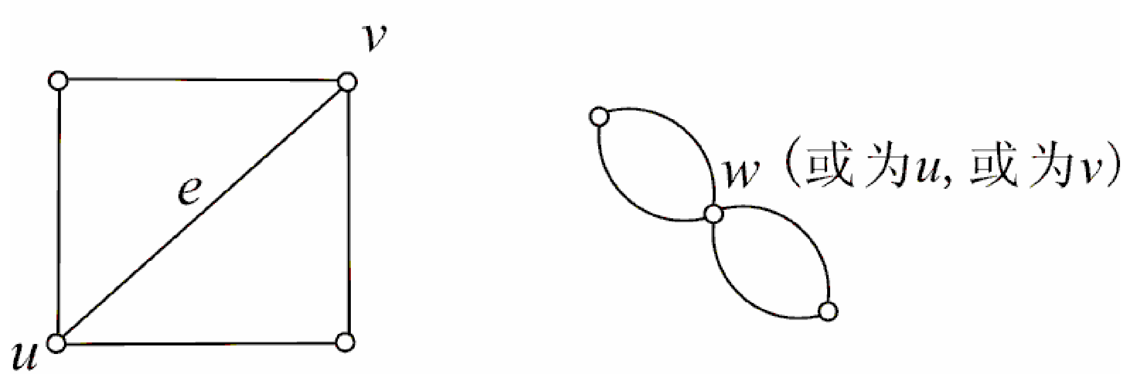
(2′)

平面图判定定理（二）

定理17.13 G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中无可收缩为K_5或$K_{3,3}$的子图

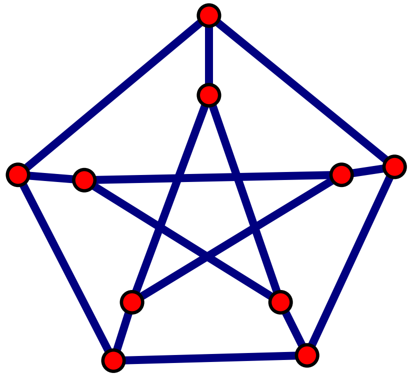
- 回顾：
  收缩边e: 删除e, 用一个新点w代替u和v（也可以是u或v），并使w关联u和v关联的所有边（除了e）

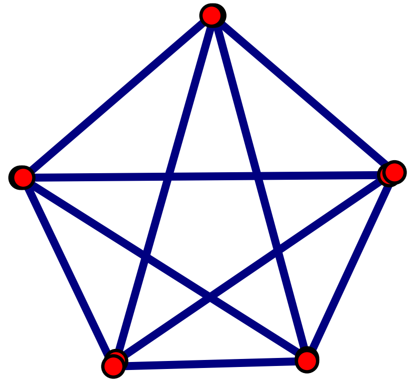
如右图所示



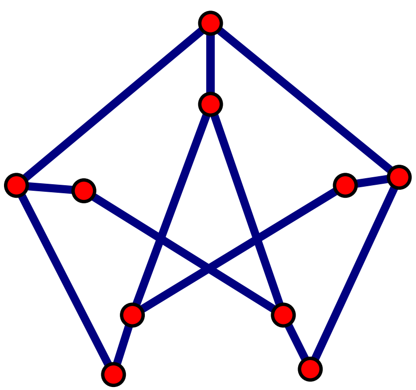
例 判断下图是否为平面图

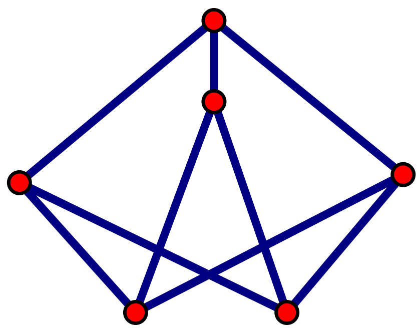
彼得松图不是平面图





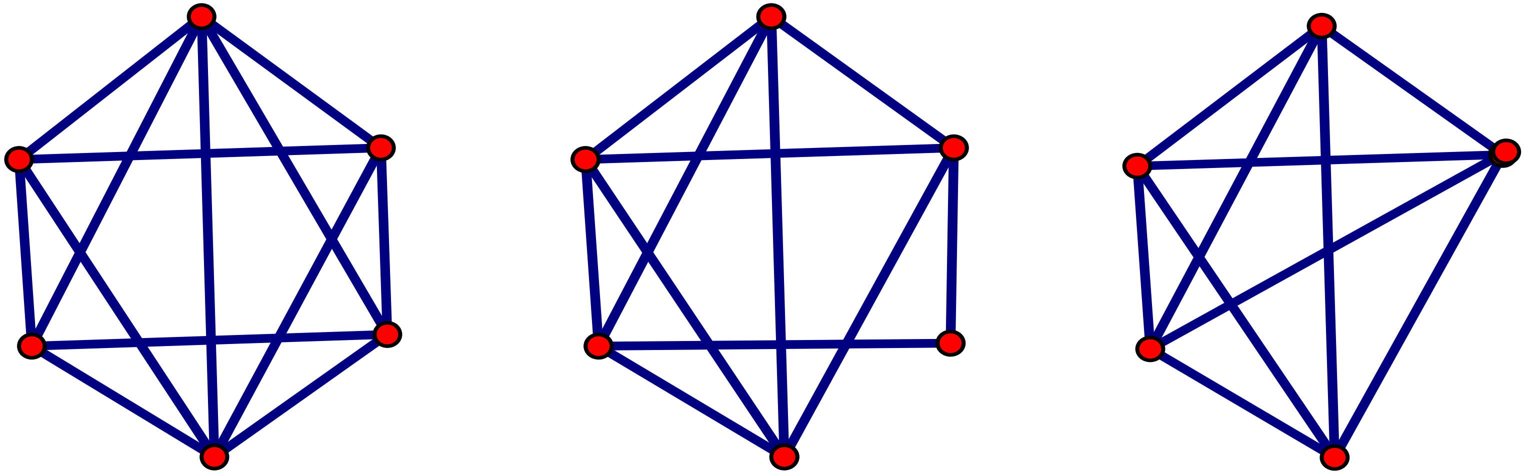
K_5





$K_{3,3}$

课堂练习 判断下图是否为平面图



不是平面图

17.3 平面图的判断（回顾）

- 17.3平面图的判断
  - 插入2度顶点和消去2度顶点
    - 图之间的同胚
  - 判断方法
    - G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中不含与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图
    - G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中无可收缩为K_5或$K_{3,3}$的子图

第十七章 平面图

本章的主要内容

- 17.1平面图的基本概念
- 17.2欧拉公式
- 17.3平面图的判断
- 17.4平面图的对偶图

17.4 平面图的对偶图

定义17.6 设G是某平面图的某个平面嵌入，构造G的对偶图G^*如下：

(1) 在G的面R_i中放置G^*的顶点v_i^*

(2) 设e为G的任意一条边.

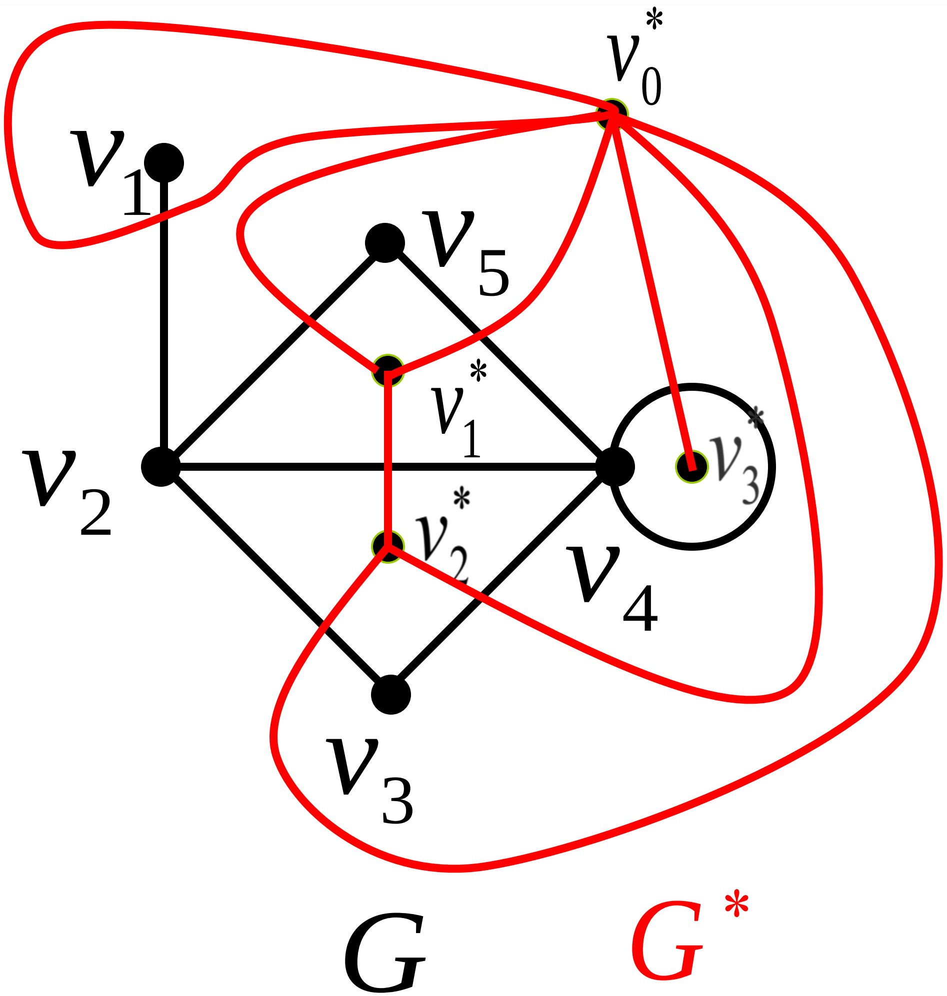
若e在G的面 R_i与 R_j 的公共边界上，做G^*的边e^*与e相交，且e^*关联G^*的位于R_i与R_j中的顶点v_i^*与v_j^*，即

$$e^*=(v_i^*,v_j^*)$$

e^*不与其它任何边相交.

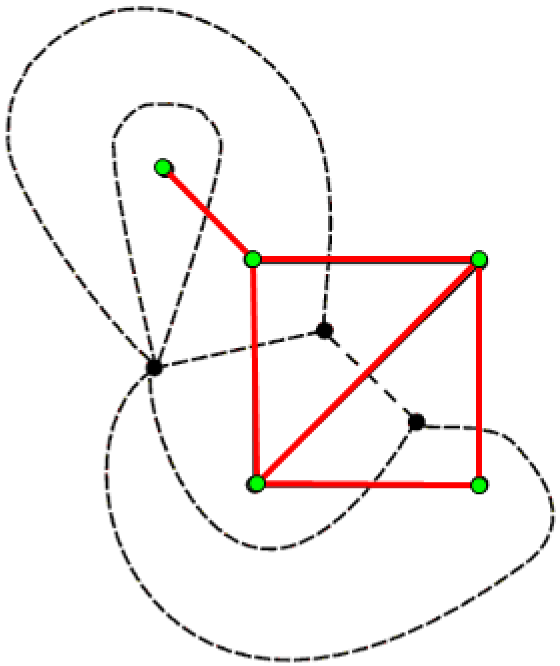
若e为G中的桥且在面R_i的边界上，则e^*是以R_i中G^*的顶点v_i^*为端点的环，即$e^*=(v_i^*,v_i^*)$

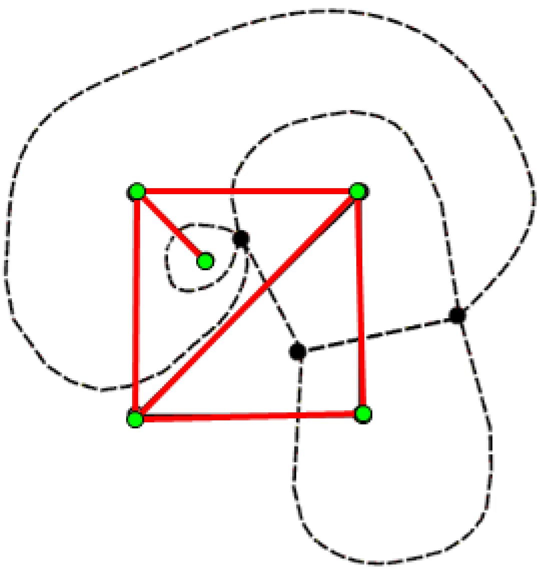
例



实例

下面两图中，实线边图为平面图（红色），虚线边图为其对偶图（黑色）.





对偶图的性质

G 的对偶图G^*有以下性质：

(1) G^*是平面图，而且是平面嵌入.

(2) G^*是连通图

(3) 若边e为G中的环，则G^*与e对应的边e^*为桥，若e为桥，则G^*中与e对应的边e^*为环.

(4) 在多数情况下，G^*为多重图（含平行边的图）.

(5) 同构的平面图（平面嵌入）的对偶图不一定是同构的.

如上面的例子.

平面图与对偶图的阶数、边数与面数之间的关系

定理17.14 设G^*是连通平面图G的对偶图，n^*, m^*, r^*和n, m, r分别为G^*和G的顶点数、边数和面数，则

(1) $n^*= r$

(2) $m^*=m$

(3) $r^*=n$

(4) 设G^*的顶点v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*)=\deg(R_i)$

证明线索

(1)、(2)显然.

(3) 应用欧拉公式.

(4) 的证明中注意，桥只能在某个面的边界中，非桥边在两个面的边界上.

平面图与对偶图的阶数、边数与面数之间的关系

定理17.15 设G^*是具有k（$k≥2$）个连通分支的平面图G的对偶图，则

(1) $n^*= r$

(2) $m^*=m$

(3) $r^*=n-k+1$

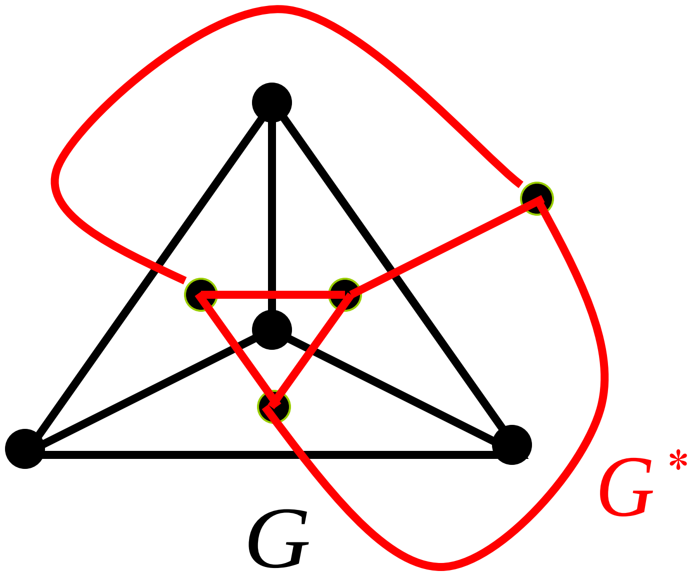
(4)设G^*的顶点v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*)=\deg(R_i)$

其中n^*, m^*, r^*, n, m, r同定理17.14

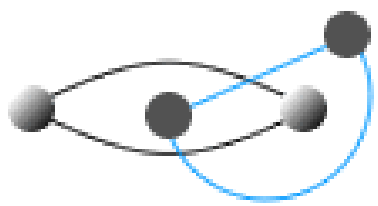
证明(3) 时应同时应用欧拉公式及欧拉公式的推广.

自对偶图

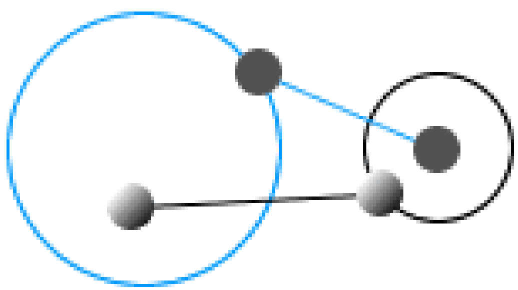
定义17.7 设G^*是平面图G的对偶图，若$G^* \cong G$，则称G为**自对偶图**.



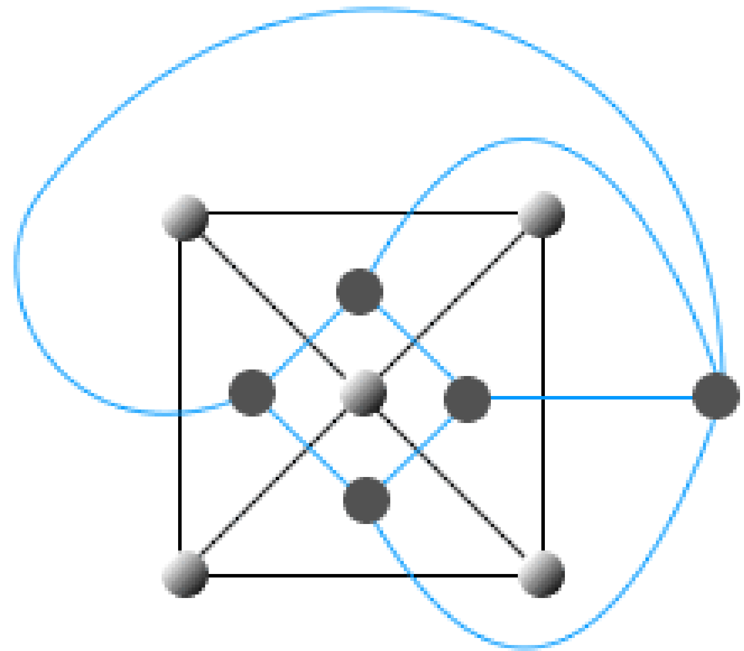
例



(1)



(2)



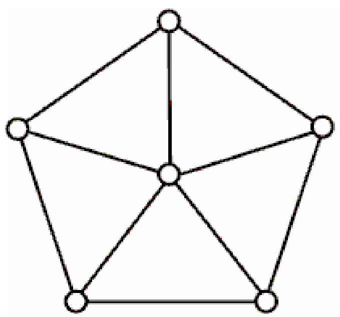
(3)

轮图

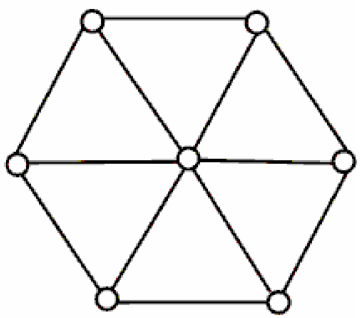
轮图定义如下：

在$n-1$（$n\geq4$）边形C_{n-1}内放置1个顶点，使这个顶点与C_{n-1}上的所有的顶点均相邻. 所得n 阶简单图称为n阶轮图. n为奇数的轮图称为奇阶轮图，n为偶数的轮图称为偶阶轮图，常将 n 阶轮图记为W_n

轮图都是自对偶图.
图中给出了W_6和W_7
请画出它们的对偶图，
从而说明它们都是自对偶图.



W_6



W_7

17.4平面图的对偶图（回顾）

- 17.4平面图的对偶图
  - 边数同，点数和面数对应相同
  - 自对偶图
    - 轮图

第17章 平面图（回顾）

- ch17平面图
  - 17.1平面图的基本概念
    - 平面图
      - 定义：若能将无向图G除顶点外无边相交地画在平面上
        - 平面嵌入
      - $K_5, K_{3,3}$都不是平面图
      - 平面图的子图都是平面图，非平面图的母图都是非平面图
      - 平行边与环不影响平面性
    - 平面图的面、面的边界、面的次数
      - $\sum_{i=1}^{R} \deg(R_i) = 2m$
    - 极大平面图
      - 若在简单平面图G中的任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图，则称G为极大平面图
      - 极大平面图是连通的，且n（n>=3）阶极大平面图中不可能有割点和桥
      - 设G为n（n>=3）阶极大平面图，当且仅当G的每个面的次数均为3
      - **m=3n-6**
    - 极小非平面图
      - 若在非平面图G中任意删除一条边而得到的图为平面图，则称G为极小非平面图
  - 17.2欧拉公式
    - 连通平面图
      - **n-m+r=2**
        - **n–m+r=k+1**
          - k是连通分支数
      - $m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$
        - l是面的次数的最小值
        - $m \le \frac{l}{l-2}(n-k-1)$
    - 简单平面图
      - **m>=3n-6**
      - $\delta(G) \le 5$
  - 17.3平面图的判断
    - 插入2度顶点和消去2度顶点
      - 图之间的同胚
    - 判断方法
      - G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中不含与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图
      - G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中无可收缩为K_5或$K_{3,3}$的子图
  - 17.4平面图的对偶图
    - 边数同，点数和面数对应相同
    - 自对偶图
      - 轮图