2022 级工科数学分析（下）期终考试试题(A 卷)

座号______班级__________学号___________姓名________成绩______

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									
签名									

1.(10 分)判断下列命题是否正确（不用说明原因）.

(1) 设 $f(x,y)$ 是连续函数，将累次积分 $I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$ 交换积分次序后的累次积分形式为 $I=\int_{-2}^1 dx\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.

(2) 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，且在 (x_0,y_0) 点的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 都存在.

(3) 曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+2z^2=7\\2x+y+z=1\end{cases}$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线 L 的方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{-5}$.

(4) 设 $u_n>0\,(n=1,2,\cdots)$. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

(5) 若 $u_n>0$ 且 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$，$n=1,2,\cdots$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

1.解答

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
答案					

2.（10 分）证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$.

（1）在点 $(0,0)$ 处沿各个方向的方向导数都存在；

（2）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续；

（3）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

3.（16 分）求下列函数的偏导数

（1） 设$u=u(x,y)$在R^2有连续的二阶偏导数，用变换$\begin{cases} s=x-2\sqrt{y} \\ t=x+2\sqrt{y} \end{cases}$化简偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

(2) 设$z=z(x,y)$是由方程$x^2z+e^{yz}+\int_x^{2y}e^{t^2}dt=0$确定的可微隐函数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4.(24 分)计算下列积分

(1)求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Sigma}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Σ 是由 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$， $z=4$ 所围成.

(2)求曲面积分 $\iint\limits_{M}\dfrac{dzdx}{\cos^2 y}+\dfrac{2dydz}{x\cos^2 x}-\dfrac{dxdy}{z\cos^2 z}$，其中 M 是球面的外侧.

球面方程为 $x^2+y^2+z^2=1$.

(3)已知曲线积分 $\int_{\Gamma}\dfrac{1}{y^2+\psi(x)}(xdy-ydx)\equiv H$ (常数). 其中 $\psi(x)$ 是可导函数且满足 $\psi(1)=1$，而 Γ 是绕原点 $(0,0)$ 一周的任意正向闭曲线，试求出函数 $\psi(x)$ 以及常数 H.

5.(12 分)讨论下列级数的敛散性.若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

（1）$1-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^s}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^s}+\cdots$ （2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

6.(10 分) 求幂级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}x^{n-1}$的收敛半径，收敛域及和函数的表达式.

7. (10 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0<x<\pi, \\ 0, & x=\pi, \\ -x^2, & \pi<x\le 2\pi \end{cases}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数；

(2) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在区间 $[0,2\pi]$ 上的表达式；

(3) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

8. (8 分) 设 Σ 是分片光滑的封闭曲面，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是曲面上的单位外法向量的方向余弦，分别证明对于如下两种情况，

（1） P,Q,R 在 Σ 上具有一阶连续偏导数；

（2） P,Q,R 在 Σ 所围的区域 Ω 上具有二阶连续偏导数.

都有 $I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS=0$ 成立。