课程编号：100172203　　北京理工大学 2022-2023 学年第二学期

2022 级工科数学分析（下）期终考试试题 A 卷解答

座号______班级__________学号___________姓名________成绩______

1.(10 分)判断下列命题是否正确（不用说明原因）.

(1)设 $f(x,y)$ 是连续函数，将累次积分 $I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$ 交换积分次序后的累次积分形式为 $I=\int_{-2}^1 dx\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$..

(2)设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，且在 (x_0,y_0) 点的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 都存在.

(3) 曲线 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+2z^2=7 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线 L 的方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-1}{-5}$.

(4)设 $u_n>0\,(n=1,2,\cdots)$. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

(5)若 $u_n>0$ 且 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$，$n=1,2,\cdots$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛.

1.解答　　**（每小题 2 分）**

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
答案	**是**	**是**	**是**	**否**	**否**

2.(10 分)证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$.

(1)在点 $(0,0)$ 处沿各个方向的方向导数都存在；

(2) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续；

(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

证明 (1) 记方向$\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$，当$\cos\theta=0$时，

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial\vec{l}}=\lim_{t\to0}\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=0\text{；}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\mathbf{1}\text{ 分}$$

当$\cos\theta\neq0$时，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(0,0)}{\partial\vec{l}}&=\lim_{t\to0}\frac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{2t^3\cos\theta\sin^2\theta}{(t^2\cos^2\theta+t^4\sin^4\theta)t}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\mathbf{2}\text{ 分}\\&=\lim_{t\to0}\frac{2\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+t^2\sin^4\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}\end{aligned}$$

（2）**连续性：**当点$P(x,y)$沿着直线$x=ky^2$趋于点$(0,0)$时，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=ky^2}}\frac{2xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{2ky^4}{(k^2+1)y^4}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{2k}{k^2+1}\text{，}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\mathbf{2}\text{ 分}$$

函数在点（0，0）处不存在极限，因此函数在点（0，0）处不连续.

（3）根据偏导数的定义

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0}{\Delta x}=0\text{，}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\mathbf{1}\text{ 分}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{0}{\Delta y}=0.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\mathbf{1}\text{ 分}$$

因为

$$\begin{aligned}&\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{2\Delta x(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}[(\Delta x)^2+(\Delta y)^4]}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\mathbf{1}\text{ 分}\end{aligned}$$

当点$P(\Delta x,\Delta y)$沿着直线$\Delta x=k(\Delta y)^2$趋于点$(0,0)$时，有

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\\Delta x=k(\Delta y)^2}}\frac{2\Delta x(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}[(\Delta x)^2+(\Delta y)^4]}\\&=\lim_{\Delta y\to0}\frac{2k(\Delta y)^4}{\sqrt{k^2(\Delta y)^4+(\Delta y)^2}(k^2+1)(\Delta y)^4}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\mathbf{2}\text{ 分}\\&=\lim_{\Delta y\to0}\frac{2k}{\sqrt{k^2(\Delta y)^4+(\Delta y)^2}(k^2+1)}\end{aligned}$$

显然该极限不存在，所以函数在点（0，0）处不可微.

3.(16 分)求下列函数的偏导数

（1）设 $u=u(x,y)$ 在 R^2 有连续的二阶偏导数，用变换 $\begin{cases} s=x-2\sqrt{y} \\ t=x+2\sqrt{y} \end{cases}$ 化简偏微分方程

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}$.

(2)设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2z+e^{yz}+\int_x^{2y}e^{t^2}dt=0$ 确定的可微隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：（1）取 s,t 为中间变量，设 $u=u(s,t),\ s=x-2\sqrt{y},\ t=x+2\sqrt{y}$，

$\frac{\partial u}{\partial x}=u_s\bullet 1+u_t\bullet 1=u_s+u_t$， ……………………………..**1 分**

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{u_s}{\sqrt{y}}+\frac{u_t}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{y}}(u_t-u_s)$， ……………………………..**1 分**

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(u_{ss}+u_{st})+(u_{ts}+u_{tt})=u_{ss}+2u_{st}+u_{tt}$， ……………………………..**1 分**

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{-1}{2y\sqrt{y}}(u_t-u_s)+\frac{1}{\sqrt{y}}\left[-\frac{1}{\sqrt{y}}\left(u_{ts}-u_{ss}\right)+\frac{1}{\sqrt{y}}\left(u_{tt}-u_{st}\right)\right]\\&=\frac{1}{y}\left[\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(u_s-u_t\right)+\left(u_{ss}-2u_{st}+u_{tt}\right)\right]\end{aligned}$$
， ………………………**2 分**

将 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4u_{st}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(u_t-u_s\right)$ 和 $\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2\sqrt{y}}(u_s-u_t)$ 代入原方程，得到

$4\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}=0$，即 $\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}=0$. ……………………………..**2 分**

（2）解：$2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}+ye^{yz}\frac{\partial z}{\partial x}-e^{x^2}=0$，$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^{x^2}-2xz}{x^2+ye^{yz}}$. ………….**2 分**

$x^2\frac{\partial z}{\partial y}+e^{yz}(z+y\frac{\partial z}{\partial y})+2e^{4y^2}=0,\ \Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2e^{4y^2}+ze^{yz}}{x^2+ye^{yz}}$. ………….**2 分**

$$2x\frac{\partial z}{\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+e^{yz}\frac{\partial z}{\partial x}+ye^{yz}(z+y\frac{\partial z}{\partial y})\frac{\partial z}{\partial x}+ye^{yz}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$ …………**..2 分**

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{(e^{yz}+yze^{yz})\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial z}{\partial y}+y^2e^{yz}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}}{x^2+ye^{yz}}$$ ……………**…………..1 分**

将 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入 ……………. ………………………**..2 分**

4. (24 分) 计算下列积分

(1) 求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Sigma}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Σ 是由 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=1$， $z=4$ 所围成.

(2) 求曲面积分 $\iint\limits_{M}\frac{dzdx}{\cos^2 y}+\frac{2dydz}{x\cos^2 x}-\frac{dxdy}{z\cos^2 z}$，其中 M 是球面的外侧.

其中，球面为 $x^2+y^2+z^2=1$.

(3) 已知曲线积分 $\int_L\frac{1}{\psi(x)+y^2}(xdy-ydx)\equiv A$ (常数)． 其中 $\psi(x)$ 是可导函数且 $\psi(1)=1$， L 是绕原点 $(0,0)$ 一周的任意正向闭曲线，试求出 $\psi(x)$ 以及常数 A.

解：(1). $I=\iiint\limits_{\Sigma}x^2dxdydz+5\iiint\limits_{\Sigma}xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ ----------3 分

由对称性可知

$$I=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)dxdydz+0$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4dz\iint_{D_z}\left(x^2+y^2\right)dxdy$$ ----------4 分

$$=\frac{1}{2}\int_1^4dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3dr=21\pi$$

(2) 利用球面 M 的对称性

原式 $=\iint\limits_{M}\frac{2dxdy}{z\cos^2 z}+\frac{dxdy}{\cos^2 z}-\frac{dxdy}{z\cos^2 z}$ ----------3 分

$$=\iint\limits_{M}\left(\frac{1}{z\cos^2 z}+\frac{1}{\cos^2 z}\right)dxdy$$ -------------1 分

$$=\iint_M \frac{1}{z\cos^2 z}dxdy+\iint_M \frac{1}{\cos^2 z}dxdy$$

而 $\iint_M \frac{1}{\cos^2 z}dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy-\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\cos^2(-\sqrt{1-x^2-y^2})}dxdy=0$.

----------2 分

所以, 原式$=\iint_M \frac{1}{z\cos^2 z}dxdy=2\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$

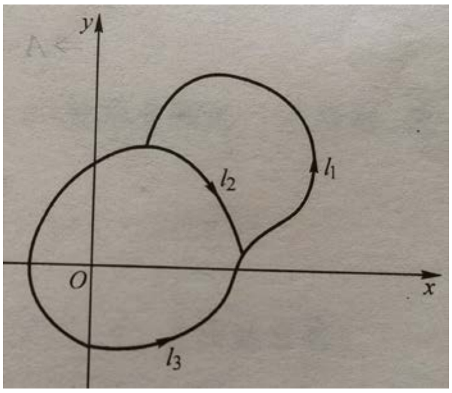
$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}\cos^2\sqrt{1-r^2}}$$

$$=4\pi\int_0^1\frac{-d\sqrt{1-r^2}}{\cos^2\sqrt{1-r^2}}$$

$$=4\pi\int_1^0\frac{d\sqrt{1-r^2}}{\cos^2\sqrt{1-r^2}}$$

$=4\pi\tan\sqrt{1-r^2}\Big|_1^0=4\pi\tan 1$. --------------------------2 分

（3）如图，



设 l_1+l_2 为平面上任意一条不经过原点也不包含原点的正向闭曲线，取辅助路径 l_3

（使 $-l_2+l_3$ 构成闭路并且包围原点）。由已知有

$\oint_{l_1+l_3} Pdx+Qdy=H$　　　（1）-----------------1 分

$\oint_{-l_2+l_3} Pdx+Qdy=H$　　　（2）----------------1 分

式子（1）-（2）得到

$$\oint_{l_1+l_3} Pdx+Qdy-\oint_{-l_2+l_3} Pdx+Qdy$$

$$=\int_{l_1} Pdx+Qdy+\int_{l_3} Pdx+Qdy-\int_{-l_2} Pdx+Qdy-\int_{l_3} Pdx+Qdy$$ ----------2 分

$$=\int_{l_1} Pdx+Qdy-\int_{-l_2} Pdx+Qdy$$

$$=\int_{l_1} Pdx+Qdy+\int_{l_2} Pdx+Qdy=\oint_{l_1+l_2} Pdx+Qdy=0$$

所以，积分与路径无关，此时，

$P=\dfrac{-y}{y^2+\psi(x)}$， $Q=\dfrac{x}{y^2+\psi(x)}$ -----------------1 分

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(\psi(x)+y^2)-2y(-y)}{(y^2+\psi(x))^2}=\frac{-\psi(x)+y^2}{(y^2+\psi(x))^2}$$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\psi(x)+y^2-x\psi'(x)}{(y^2+\psi(x))^2}$ ----------------------2 分

所以，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},(x,y)\neq(0,0)$

$$\Rightarrow -\psi(x)+y^2=\psi(x)+y^2-x\psi'(x)$$

即： $2\psi(x)=x\psi'(x)$

解得$\psi(x)=Cx^2$

再由$\psi(1)=1$推出$C=1$，所以$\psi(x)=x^2$。可以取$\Gamma: x^2+y^2=1$正向，

则推出

$$H=\int_{x^2+y^2=1}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta d\sin\theta-\sin\theta d\cos\theta}{1}$ --------------------2 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

5.(12 分)讨论下列级数的敛散性.若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

（1）$1-\dfrac{1}{2^s}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^s}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{(2n)^s}+\cdots$ （2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$

第一题：解：(1) 当$s=1$，此级数为交错级数：$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}+\cdots$，

由莱布尼茨判别法知此时级数收敛. ----------2 分

(2) 当$s>1$，部分和

$$S_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots+\frac{1}{(2n)^s}\right).$$ ----------1 分

前面括号内正项级数部分和

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\to+\infty\ (\text{当}n\to\infty)$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)=+\infty$ -----------------2 分

后面括号内级数部分和

$$\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots+\frac{1}{(2n)^s}<\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}$$

当$n\to\infty$时，为p级数且$p=s>1$，所以对应级数收敛

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots+\frac{1}{(2n)^s}\right)=A(s)$(有穷）-----------2 分

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$不存在，因此，当$s>1$时所给级数发散.

(3) 当$s<1$，级数写成

$$1-\left(\frac{1}{2^s}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4^s}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{(2n)^s}-\frac{1}{2n+1}\right)-\cdots$$

除第一项外，每一项皆为负项，提出负号后是正项级数，可用极限形式的比较判别法判别其敛散性

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n)^s}-\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n^s}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(2n+1)-(2n)^s\right]n^s}{(2n)^s(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2^s}\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)-(2n)^s}{2n+1}$$ --------------2 分
$$=\frac{1}{2^s}\left[1-\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^s}{2n+1}\right]=\frac{1}{2^s}$$

（因为$\lim\limits_{y\to\infty}\frac{(2y)^s}{2y+1}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{2^s sy^{s-1}}{2}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{2^s s}{2}\frac{1}{y^{1-s}}=0\ (s<1)$）

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$发散（$p$级数，$p=s<1$），因此，当$s<1$时，所给级数发散.

第二题：解，因为$(\frac{\sqrt{x}}{x+1})' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0 \quad (\forall x > 1)$，则当$n > 1$时，$\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$是单调递减数列，并且有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$，由 Leibniz 判别法，交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$收敛，又因为$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n\to\infty)$，所以级数条件收敛。**-----------------------3 分**

6.（10 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}x^{n-1}$的收敛半径，收敛域及和函数的表达式.

解：此级数的收敛域为[−1，1]，设

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n(n+2)}, \quad |x|<1$$

$$\Rightarrow xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n(n+2)}, \quad |x|<1$$ ------------------------2 分

令$g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n(n+2)}$，则$g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n+2}, \quad |x|<1$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^3}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n+2}, \quad |x|<1, x\neq 0$$ ---------------------2 分

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x^3}\left[\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right], \quad |x|<1, x\neq 0$$

$$\Rightarrow g(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{x}\frac{1}{t^3}\left[\ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}\right]dx = \frac{x^2-1}{2x^2}\ln(1+x) + \frac{2-x}{4x}$$ ----------3 分

则和函数为：

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{2x^3}\ln(1+x) + \frac{2-x}{4x^2}, & |x|<1, x\neq 0 \\ \frac{1}{3}, & x = 0 \\ \frac{3}{4}, & x = -1 \\ \frac{1}{4}, & x = 1 \end{cases}$$ -------------3 分

7.（10 分）设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0<x<\pi, \\ 0, & x=\pi, \\ -x^2, & \pi<x\le 2\pi \end{cases}$.

(1)求 $f(x)$ 的 Fourier 级数；

(2)求 $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数在区间$[0,2\pi]$上的表达式；

(3)求$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

解：(1)首先将 $f(x)$ 以 2π 为周期延拓到整个数轴，间断点为$0,\pm n\pi, n=1,2,3,\cdots,n,\cdots$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx \qquad \text{----------1 分}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)dx \qquad \text{----------1 分}$$

$$=-2\pi^2.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx \qquad \text{----------1 分}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)\cos nxdx \qquad \text{----------1 分}$$

$$=\frac{4\left[(-1)^n-1\right]}{n^2}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx \qquad \text{----------1 分}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)\sin nxdx \qquad \text{----------1 分}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{n}+\left(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\left[1-(-1)^n\right]\right\}.$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$=-\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{n^2}[(-1)^n-1]\cos nx+\frac{2}{\pi}[\frac{\pi^2}{n}+(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3})(1-(-1)^n)]\sin nx\right\}.$$

----------1 分

(2) $f(x)$ 的 Fourier 级数的和函数记为$S(x)$.

$$S(x)=\begin{cases} x^2 & x\in(0,\pi) \\ -x^2 & x\in(\pi,2\pi) \\ 0 & x=\pi \\ -2\pi^2 & x=0,2\pi \end{cases}.$$ ----------2 分

(3) 取 $x=0$， $S(0)=-2\pi^2$，则

$$-2\pi^2=-\pi^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4[(-1)^n-1]}{n^2}.$$ ----------1 分

解得 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

8.（8 分）设 Σ 是分片光滑的封闭曲面，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是曲面上的单位外法向量的方向余弦，分别证明对于如下两种情况，

（1） P,Q,R 在 Σ 上具有一阶连续偏导数；

（2） P,Q,R 在 Σ 所围的区域 Ω 上具有二阶连续偏导数.

都有 $I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=0$ 成立。

证明：对情形（1），在 Σ 上任意取一条分段光滑的闭合曲线 Γ，Γ 把 Σ 分成两部分 Σ_1， Σ_2，在 Σ_1， Σ_2 上分别应用 Stokes 公式，得

$$I=\iint_{\Sigma_1}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}dS+\iint_{\Sigma_2}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$ ----------2 分

$$=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz+\oint_{-\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$ ------------------------2 分

$$=0$$

对于情形（2），利用 Guass 公式，

$$I=\iint_{\Sigma}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\;\;\;\bigcirc(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$ ------------2 分

$$=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\right]dxdydz$$ ----------2 分

=0