第十一章
耦合电感和理想变压器

作业

11-3　　11-4　　11-6

11-8　　11-13　　11-16

练习

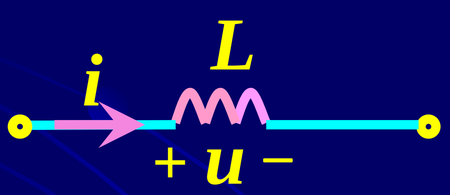
11-5　　11-11　　11-12

11-20　　11-21　　11-22

§11-1 11-2 耦合电感概念、VCR、耦合系数

电感元件

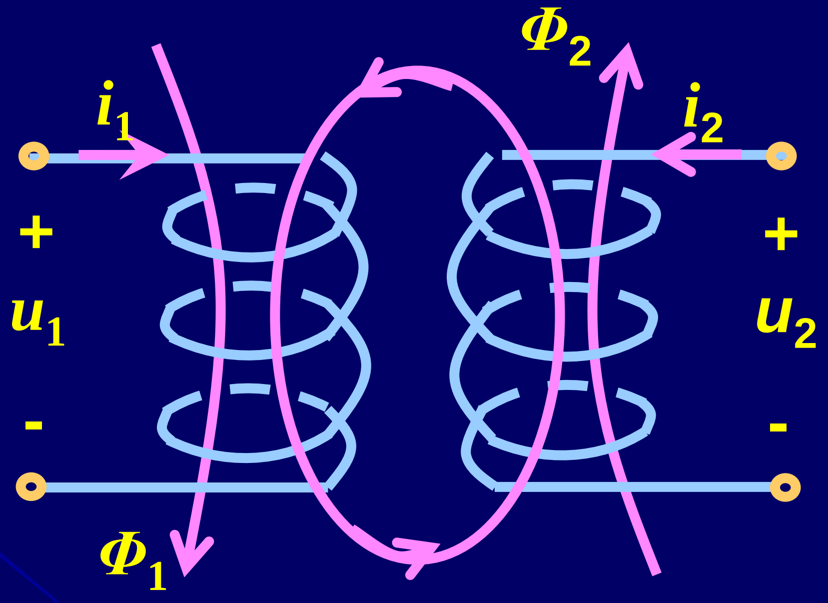
线性电感 $\Psi = Li$

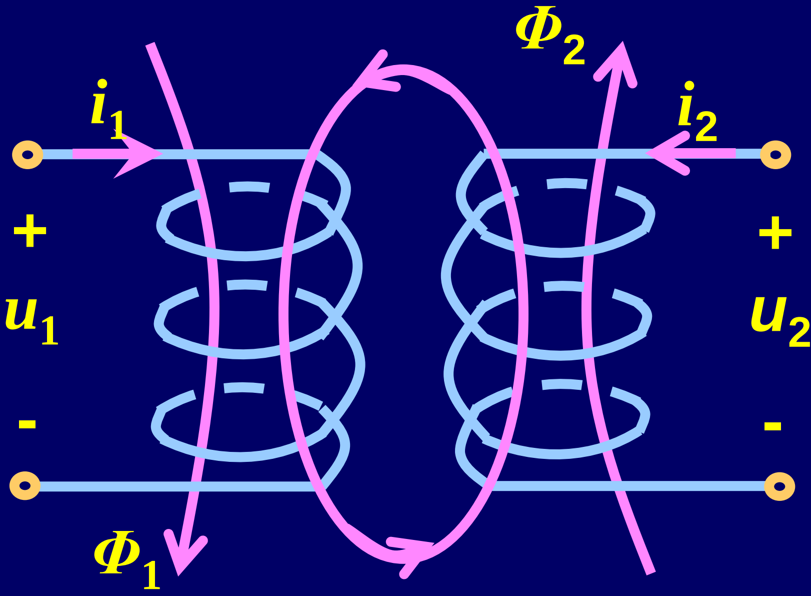


$$u = \frac{d\psi}{dt} = L\frac{di}{dt}$$ （关联参考方向）

一. 耦合电感的伏安关系

设有两个靠近的线性定常电感线圈





i_1 流过第一个线圈产生

自感磁链 $\Psi_{11}=L_1 i_1$

且在第二个线圈产生

互感磁链 $\Psi_{21}=M_{21} i_1$

i_2 流过第二个线圈产生

自感磁链 $\Psi_{22}=L_2 i_2$

且在第一个线圈产生

互感磁链 $\Psi_{12}=M_{12} i_2$

$$\Psi_1=\Psi_{11}+\Psi_{12}=L_1 i_1+M_{12} i_2$$

$$\Psi_2=\Psi_{22}+\Psi_{21}=L_2 i_2+M_{21} i_1$$

$$M_{12}=M_{21}=M$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{d\psi_1}{dt} = L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt} \\ u_2(t) &= \frac{d\psi_2}{dt} = L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt} \end{aligned}}$$

当自感磁通与互感磁通方向不一致时：

$$u_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$$

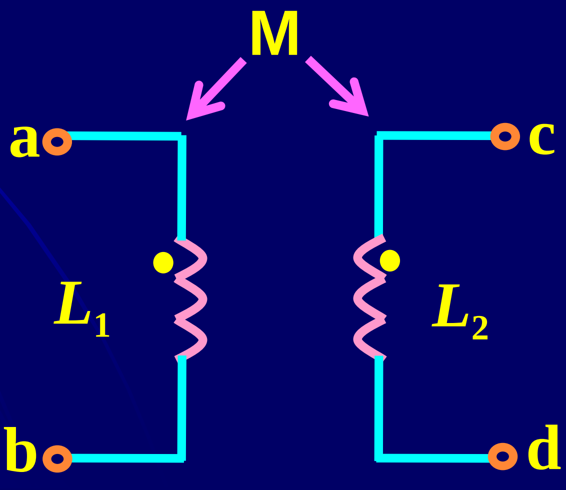
（1）自感压降的正负：

当线圈的电压电流关联参考方向时取正，否则取负。

（2）互感压降的正负：

自感磁通与互感磁通一致取正，否则取负，取决于线圈的绕向、电流的参考方向、线圈的相互位置。由于线圈的绕向常常无法知道，需引入同名端（•或*），以标示互感电压的正负。

耦合电感符号

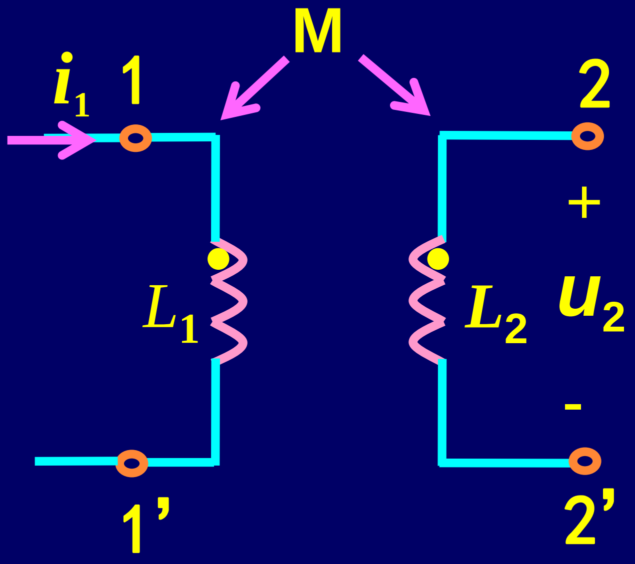


耦合电感用3个参数表示，L_1、L_2、M。

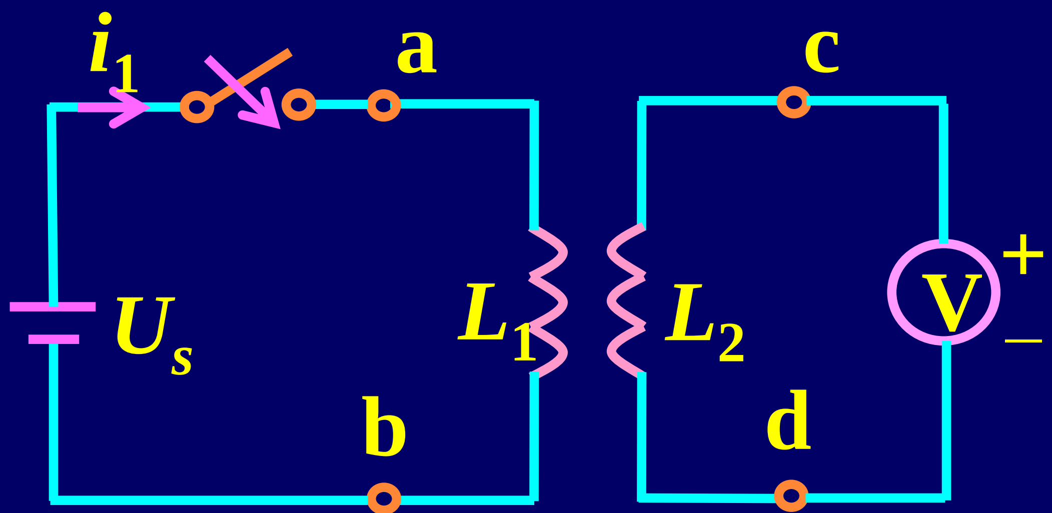
二. 同名端

1 定义

约定在产生互感电压的电流参考方向的流入端、互感电压参考极性的“+”均用“•”标示，称为同名端。



2 用实验方法确定同名端



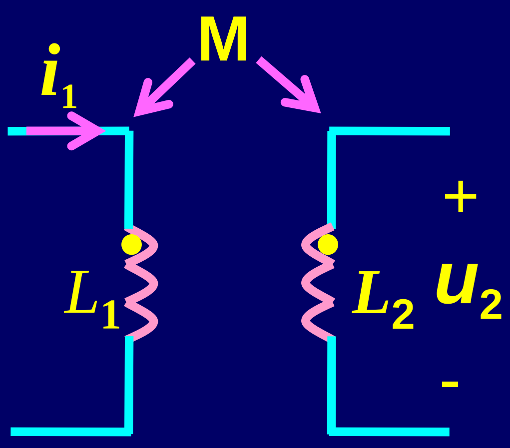
开关闭合后：

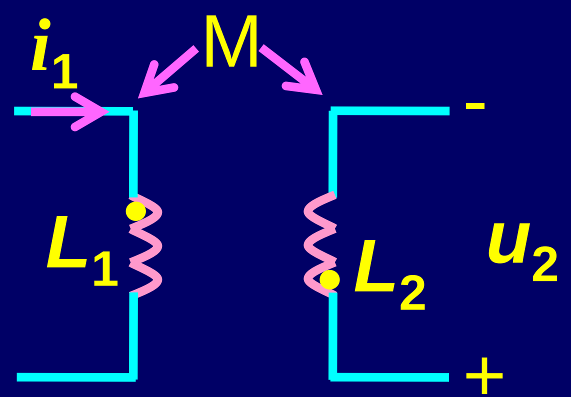
若电压表指针正向偏转，则c点电位高，a、c为同名端；

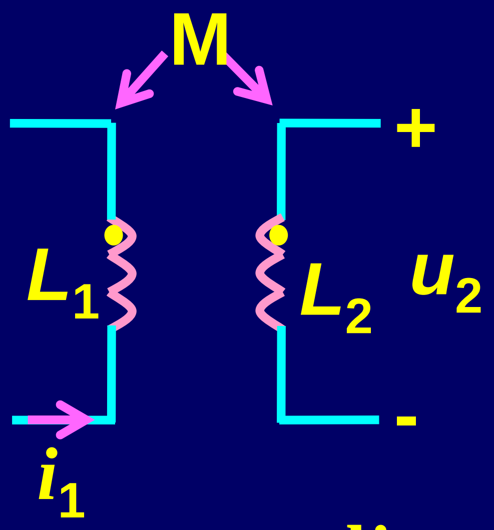
若电压表指针反向偏转，则d点电位高，a、d为同名端.

3. 根据同名端确定互感电压的正负

电流与互感电压的参考方向对同名端一致







$$u_2 = M\frac{di_1}{dt}$$

$$u_2 = M\frac{di_1}{dt}$$

$$u_2 = -M\frac{di_1}{dt}$$

4 总结耦合电感的VCR：

（1）一般情况时：

$$u_1(t) = \pm L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = \pm L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}$$

（2）正弦稳态时：

$$\dot{U}_1 = \pm j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \pm j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1$$

三　耦合系数

耦合系数　$K = \dfrac{M}{M_{max}}$　用来衡量两线圈耦合程度。

$0 \leqslant K \leqslant 1$

$K=1$时：全耦合，此时 $M=M_{max}$

$K=0$时：无耦合

推导 $M_{max}=$?

$$\Psi_{11}=N_1\Phi_{11}=L_1 i_1 \Rightarrow L_1=\frac{N_1\Phi_{11}}{i_1}$$

$$\Psi_{22}=N_2\Phi_{22}=L_2 i_2 \Rightarrow L_2=\frac{N_2\Phi_{22}}{i_2}$$

$$L_1L_2=\frac{N_1N_2\Phi_{11}\Phi_{22}}{i_1 i_2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_{21}=N_2\Phi_{21}=Mi_1 \\ \Psi_{12}=N_1\Phi_{12}=Mi_2\end{array}\right\} \Rightarrow M^2=\frac{N_2\Phi_{21}}{i_1}\frac{N_1\Phi_{12}}{i_2}$$

全耦合时：

$$\Phi_{21}=\Phi_{21max}=\Phi_{11}$$

$$\Phi_{12}=\Phi_{12max}=\Phi_{22}$$

$$此时 M^2=M^2_{max}=\frac{N_2\Phi_{11}}{i_1}\frac{N_1\Phi_{22}}{i_2}=L_1L_2$$

全耦合时：$M=M_{max}=\sqrt{L_1L_2}$

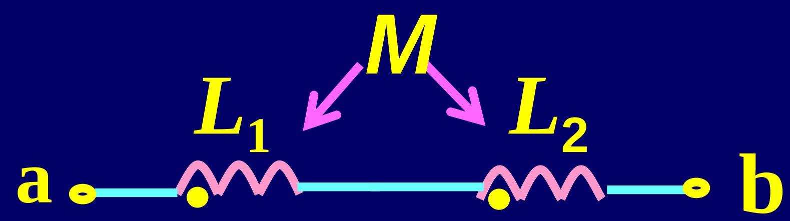
$0\leqslant K\leqslant 1$：　$K=1$　全耦合

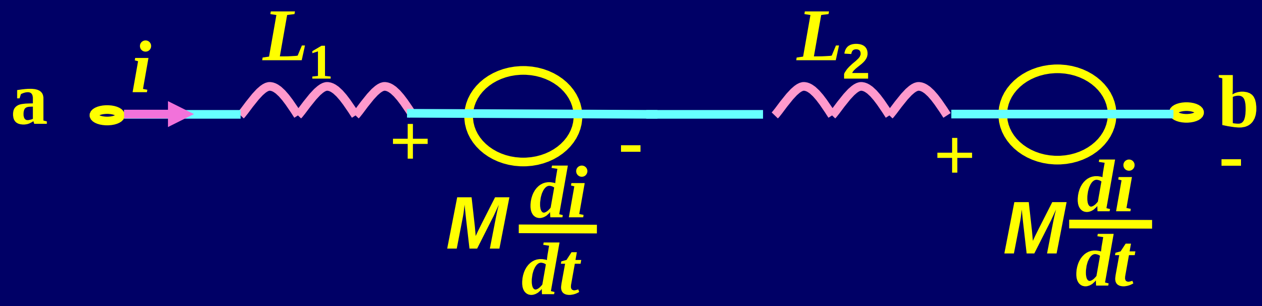
$K=0$　无耦合

四、耦合电感线圈的串联和并联

1. 串联

（1）串联顺接：异名端相接





$$u_{ab} = L_1\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}$$

等效电感 $L=L_1+L_2+2M$

（2）反接：　同名端相接

等效电感 $L=L_1+L_2-2M$

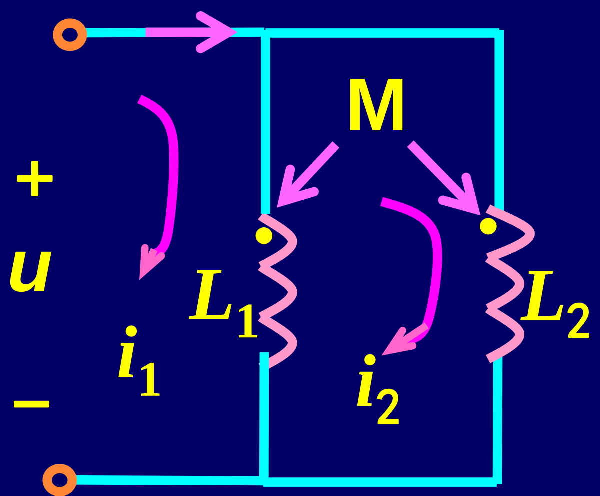
正弦稳态时：

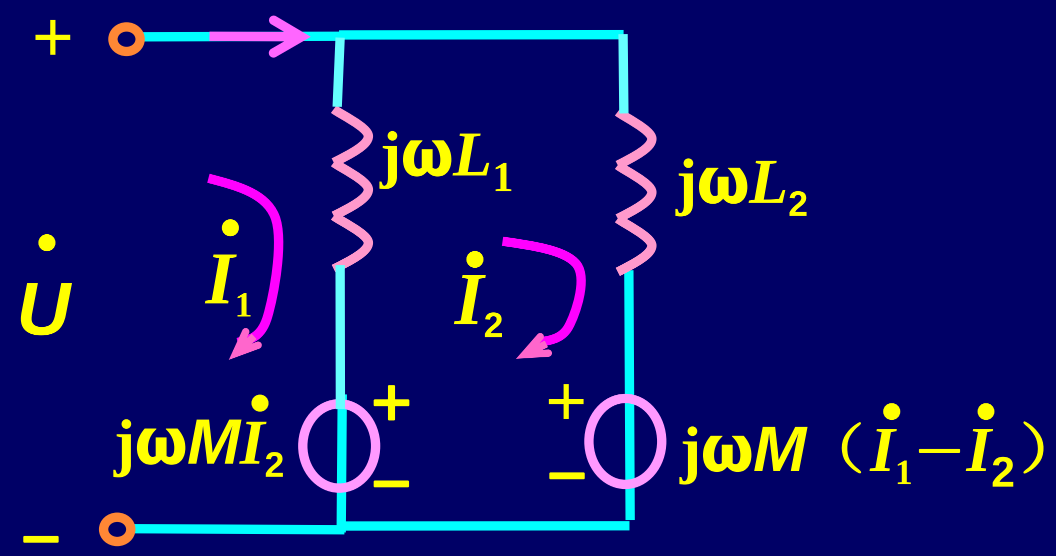
顺接等效阻抗　$Z=\mathrm{j}\omega L_1+\mathrm{j}\omega L_2+2\mathrm{j}\omega M$

反接等效阻抗　$Z=\mathrm{j}\omega L_1+\mathrm{j}\omega L_2-2\mathrm{j}\omega M$

2. 正弦稳态时耦合电感的并联(自己推导)

（1）同名端相接时:





列回路方程:

$$\begin{cases} j\omega L_1\dot{I}_1 - j\omega L_1\dot{I}_2 = \dot{U} - j\omega M\dot{I}_2 \\ -j\omega L_1\dot{I}_1 + (j\omega L_1 + j\omega L_2)\dot{I}_2 = -j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2) + j\omega M\dot{I}_2 \end{cases}$$

解出：

$$\dot{I}_1 = \frac{(L_1 + L_2 - 2M)}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}\dot{U}$$

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}_1} = \frac{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}$$

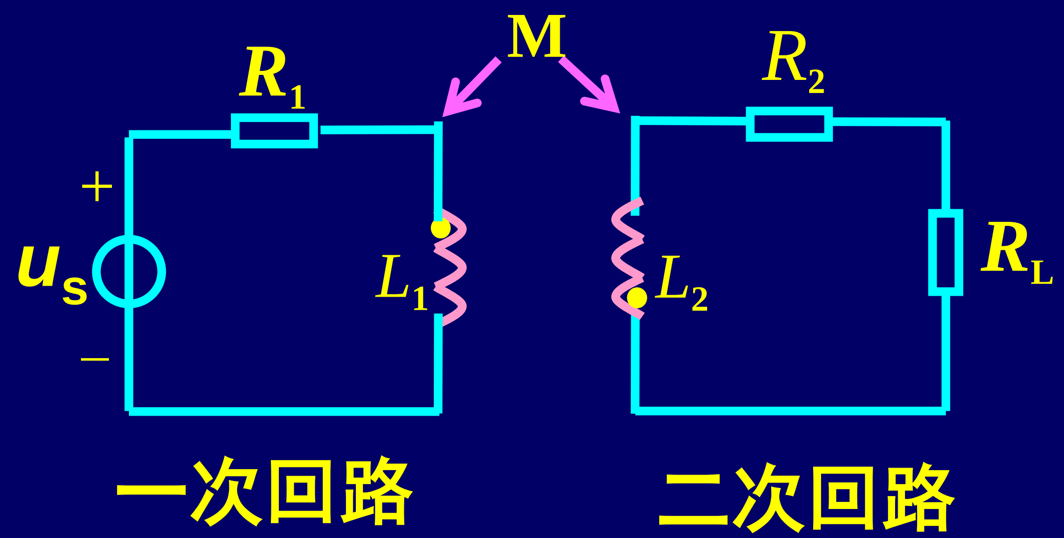
等效电感 $L = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$

（2）异名端相接时：

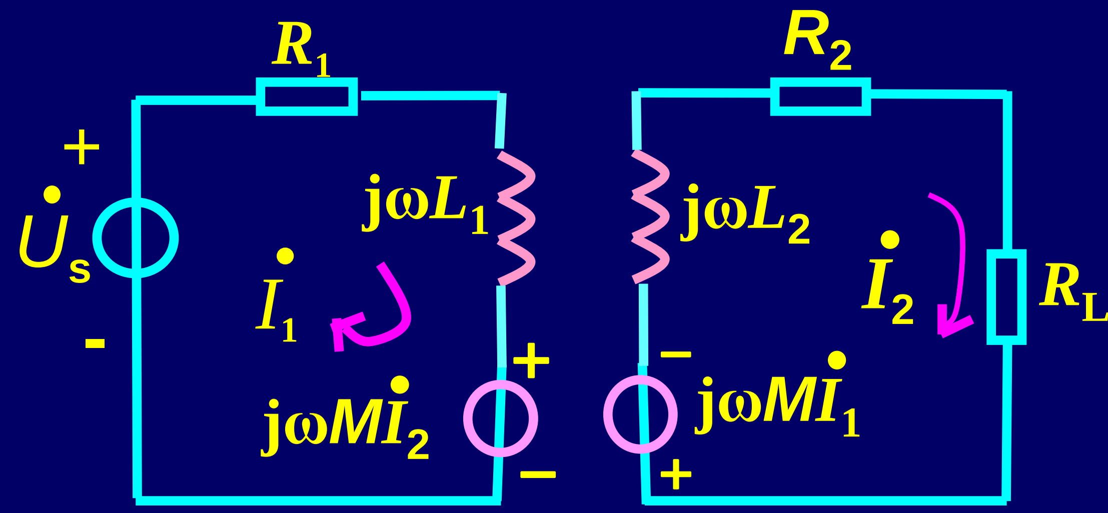
等效电感 $L = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$

§11-3　正弦稳态时空心变压器电路的分析
反映阻抗

- 一. 电路模型



1. 回路法求解电流



相量模型

$$(R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 = -j\omega M\dot{I}_2 + \dot{U}_s$$

$$(R_2 + R_L + j\omega L_2)\dot{I}_2 = -j\omega M\dot{I}_1$$

解出：

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_{22}\dot{U}_s}{Z_{11}Z_{22} + \omega^2 M^2}$$

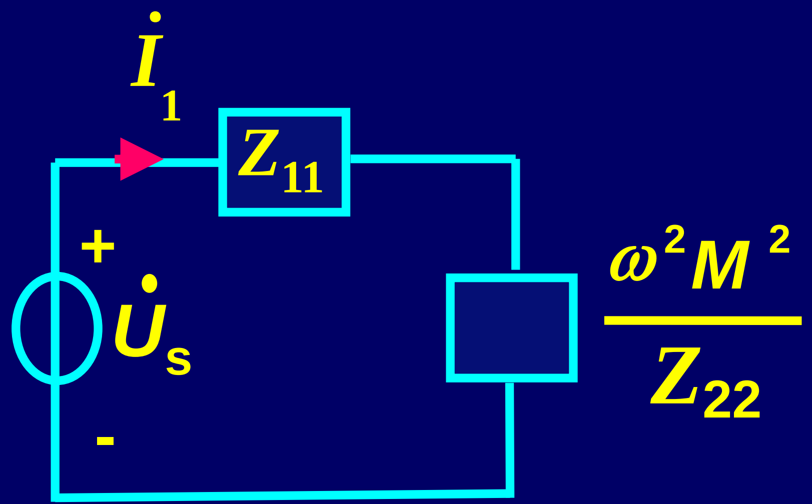
则 $\dot{I}_2 = \dfrac{-j\omega M\dot{I}_1}{Z_{22}}$

分析：（1）若同名端位置不同，对$\dot{I}_1$无影响，

而$\dot{I}_2$则改变符号。

（2）初级看进去的等效阻抗：

$$Z_i = \frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}$$



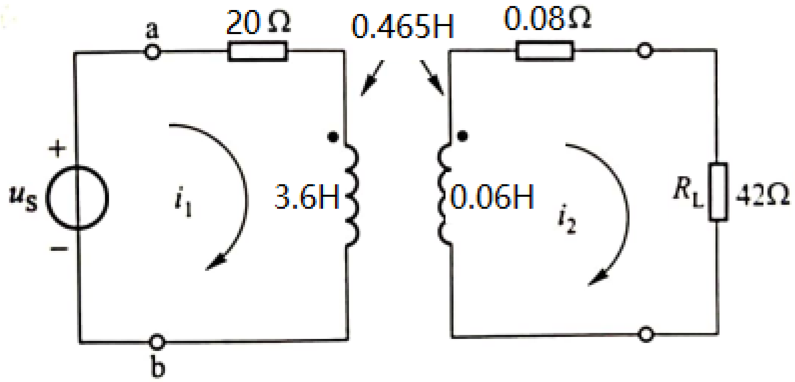
$\frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}$ —— 反映阻抗Z_{ref}

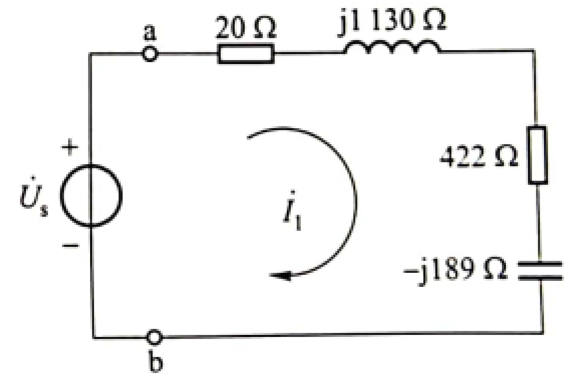
引入新解法——反映阻抗法

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z_i} = \frac{\dot{U}_S}{Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}}$$

例11-5 11-6 求电流$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$，已知$u_S=115\sqrt{2}\cos(314t)$V





解：

$$Z_{11}=R_1+\mathrm{j}\omega L_1=(20+\mathrm{j}314\times3.6)\,\Omega=(20+\mathrm{j}1130)\,\Omega$$

$$Z_{22}=R_L+R_2+\mathrm{j}\omega L_2=(42.08+\mathrm{j}314\times0.06)\,\Omega$$

$$=46.1\angle 24.1^\circ\ \Omega$$

$$Z_{ref}=\frac{\omega^2M^2}{Z_{22}}=\frac{314^2\times0.465^2}{46.1\angle 24.1^\circ}\Omega$$

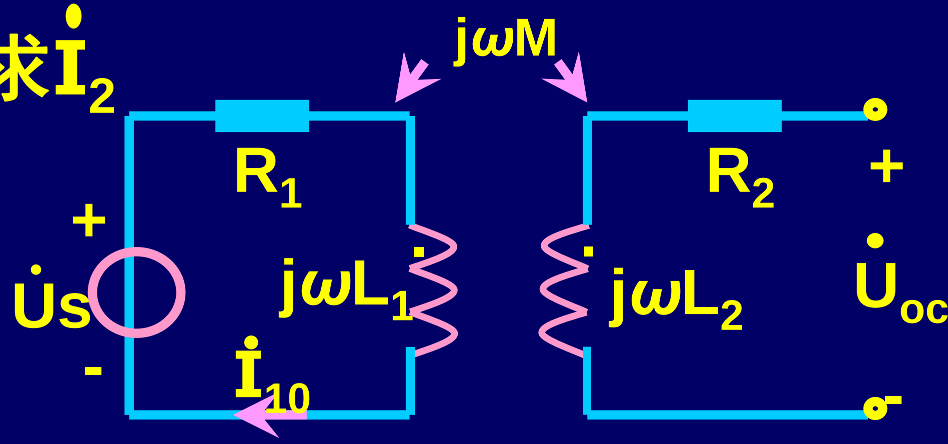
$$=462.4\angle -24.1^\circ\,\Omega=(422-\mathrm{j}189)\,\Omega$$

$$Z_{ab}=Z_{11}+Z_{ref}=(20+\mathrm{j}1130+422-\mathrm{j}189)\,\Omega=1040\angle 64.8^\circ\,\Omega$$

$$\dot{I}_1=\frac{115\angle 0^\circ}{1040\angle 64.8^\circ}\mathrm{A}=110.6\angle -64.8^\circ\ \mathrm{mA}$$

$$\dot{I}_2=\frac{\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1}{Z_{22}}=\frac{314\times0.465\angle 90^\circ\times110.6\times10^{-3}\angle -64.8^\circ}{46.1\angle 24.1^\circ}=0.35\angle 1.1^\circ\ \mathrm{A}$$

例11-6：上题用戴维南定理求$\dot{I}_2$



（1）求$\dot{U}_{oc}$

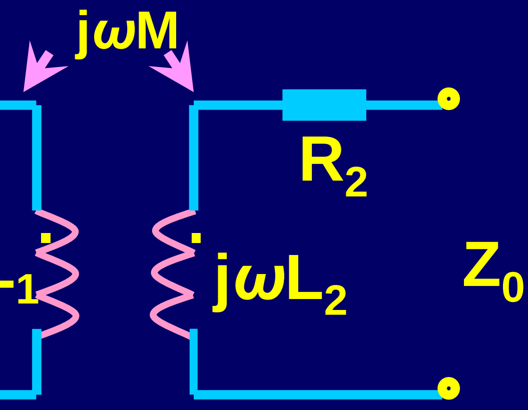
$$\dot{U}_{oc}=j\omega M\dot{I}_{10}$$

$$\dot{I}_{10}=\frac{\dot{U}_s}{Z_{11}}=\frac{115\angle 0^\circ}{20+j1130}=101.7\angle -89^\circ\ \text{mA}$$

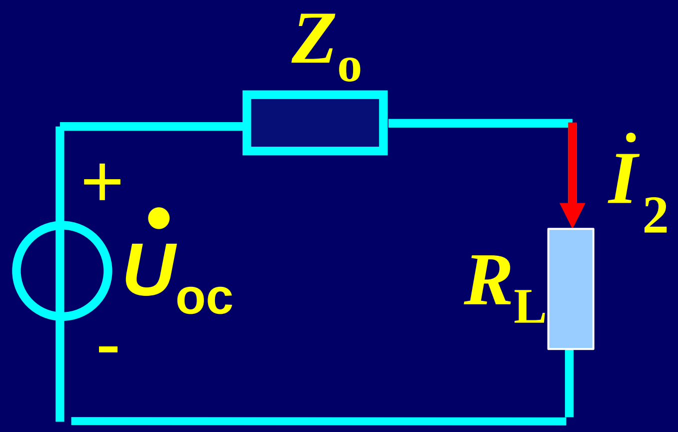
$$\dot{U}_{OC}=j\omega M\dot{I}_{10}$$

$$\dot{U}oc=314\times 0.465\angle 90^\circ \times 101.7\angle -89^\circ \times 0.001=14.8\angle 1^\circ\ \text{V}$$

（2）求Z_0

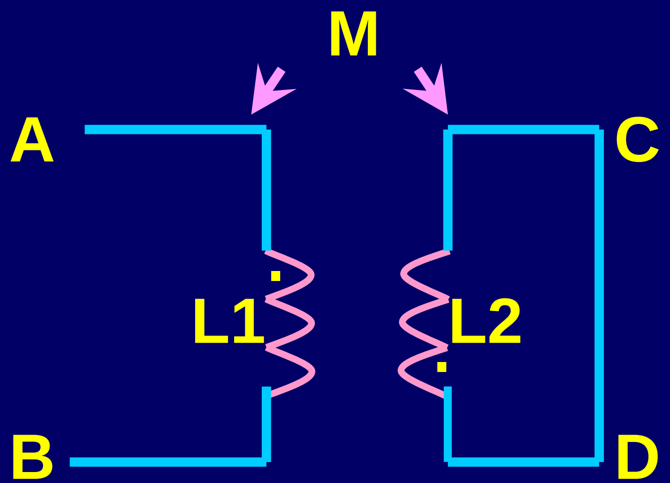


$$Z_0=Z_{22}+\frac{M^2\omega^2}{Z_{11}}=R_2+j\omega L_2+\frac{M^2\omega^2}{Z_{11}}=0.41-j0.04\,\Omega$$



（3） $\dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}_{oc}}{Z_0 + R_L} = \dfrac{14.8\angle 1^\circ}{0.41 - j0.04 + 42} = 0.35\angle 1.1^\circ\ \text{A}$

例11-7：求AB端的等效电感。



解：用Zref求解。

$$Z_{AB}=Z_{11}+\frac{\omega^2M^2}{Z_{22}}$$

$Z_{11}=j\omega L_1$　　　　$Z_{22}=j\omega L_2$

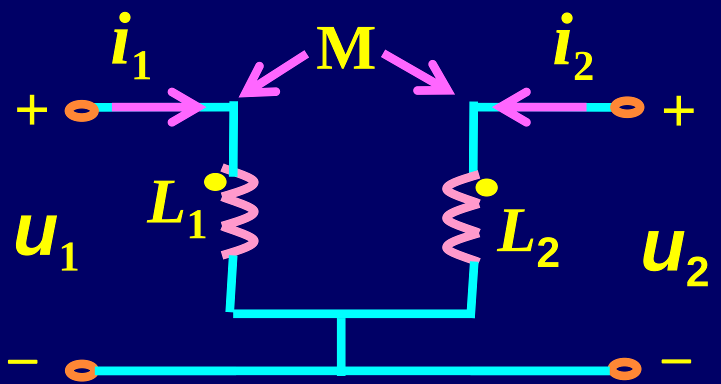
$$Z_{AB}=j\omega L_1+\frac{\omega^2M^2}{j\omega L_2}=j\omega L_1-\frac{j\omega M^2}{L_2}=j\omega\left(L_1-\frac{M^2}{L_2}\right)$$

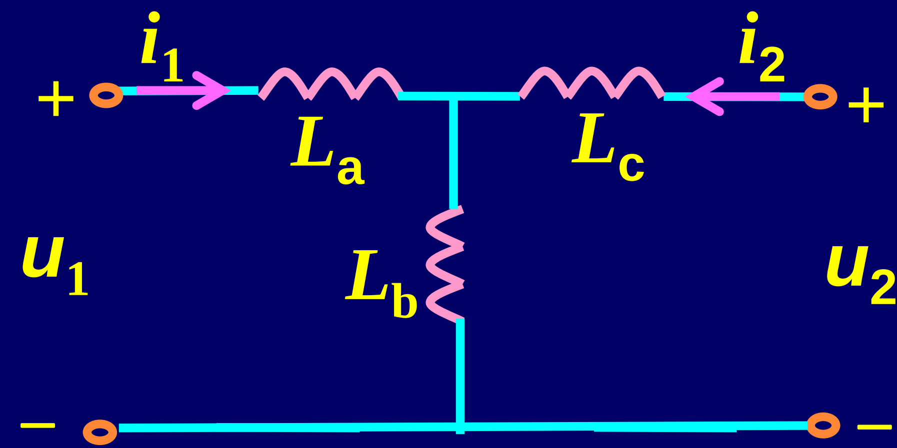
$$L_{AB}=L_1-\frac{M^2}{L_2}$$

§11-4　耦合电感的去耦等效变换

对于在一个公共端相连的一对耦合电感，可用三个电感组成的T形网络来等效。

1、同名端在公共端





$$u_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$u_2(t) = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

$$u_1(t) = L_a\frac{di_1}{dt} + L_b\frac{d(i_1+i_2)}{dt}$$

$$u_2(t) = L_c\frac{di_2}{dt} + L_b\frac{d(i_1+i_2)}{dt}$$

若两电路对外等效，则对应的 $\frac{di_1}{dt}$ 及 $\frac{di_2}{dt}$ 系数相等

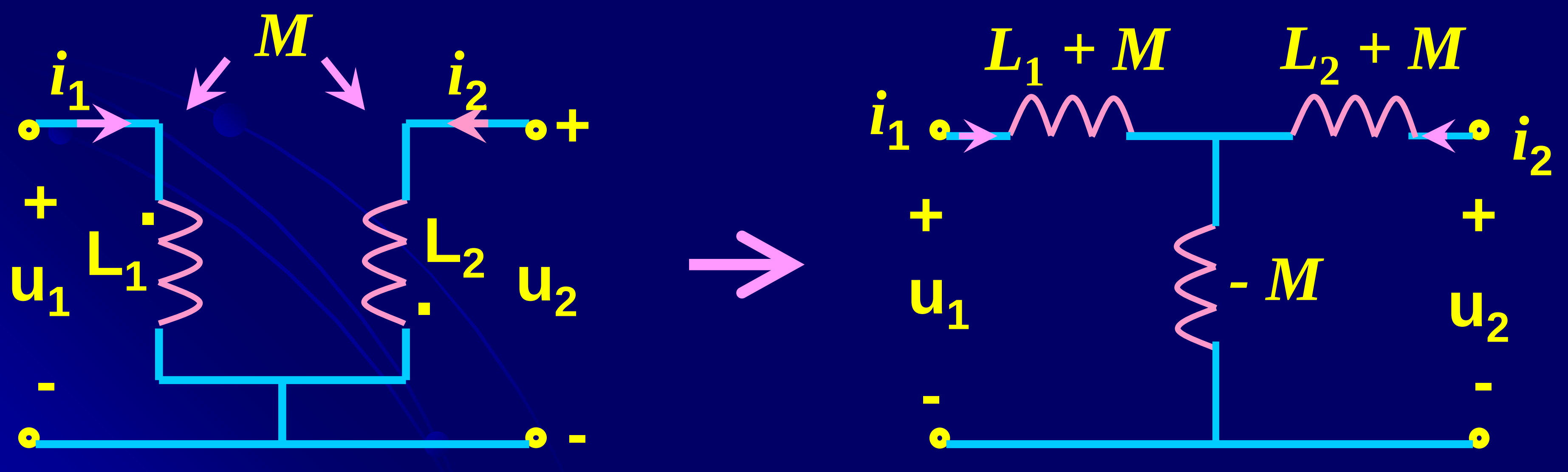
$$\begin{cases} L_1 = L_a + L_b \\ L_2 = L_c + L_b \\ M = L_b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = M \\ L_c = L_2 - M \end{cases}$$

2、异名端在公共端

$$L_a = L_1 + M$$

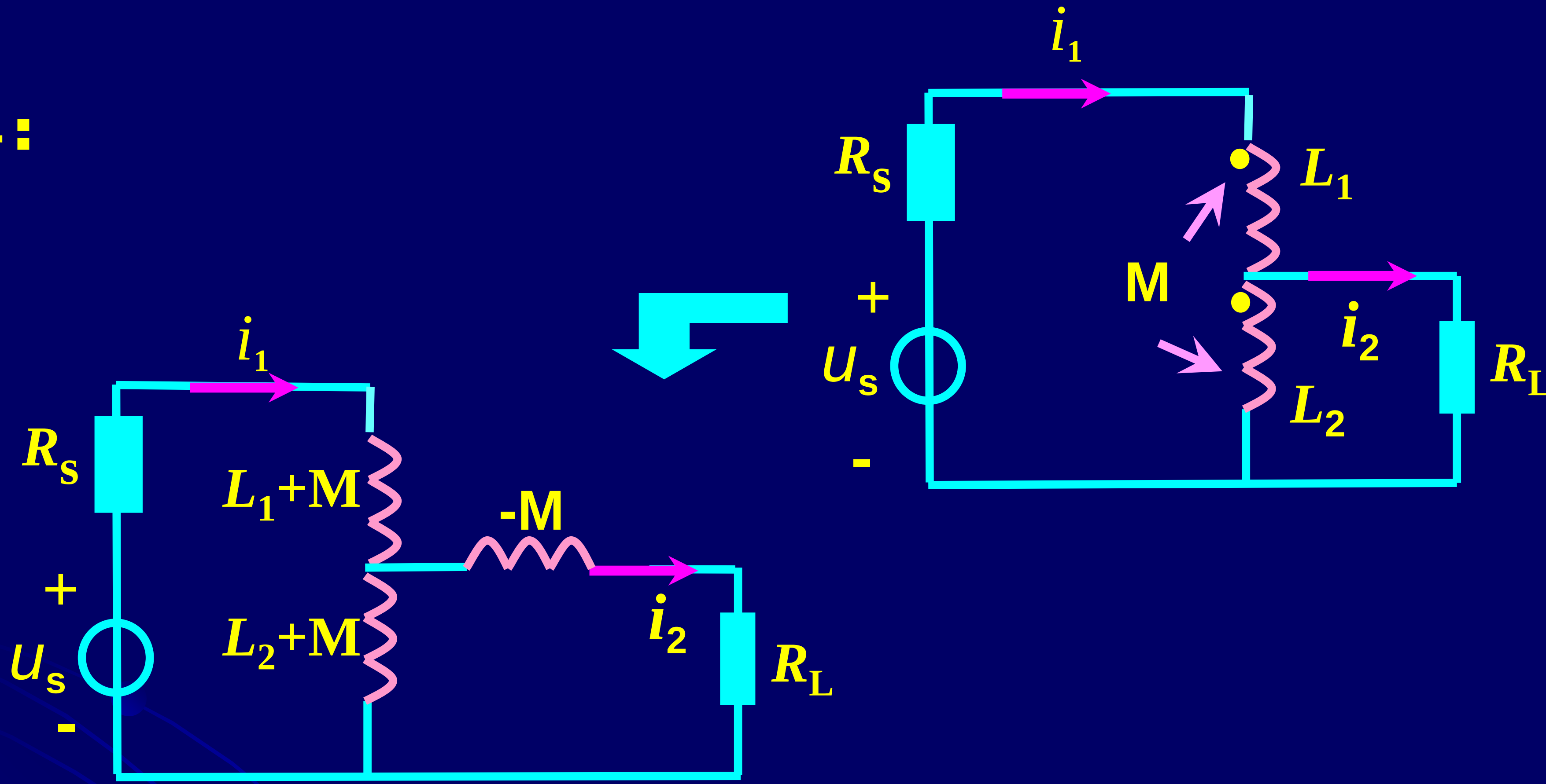
$$L_b = -M$$

$$L_c = L_2 + M$$



例11–9：写出求 $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$ 所需的方程组。

解：



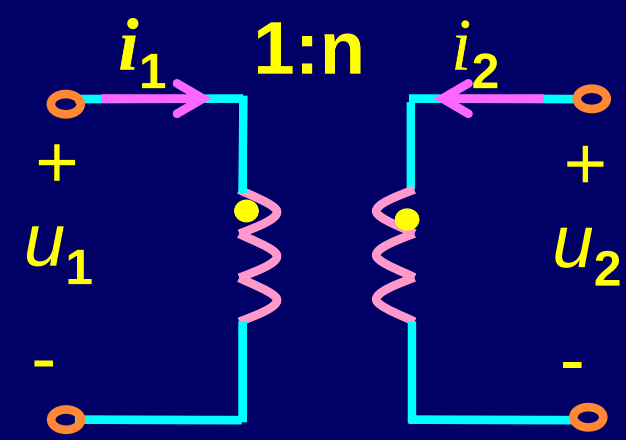
$$\dot{I}_1\,[\,R_s + j\omega\,(\,L_1+L_2+2M\,)\,]\ \ - j\omega\,(\,L_2 + M\,)\,\dot{I}_2 = \dot{U}_s$$

$$- j\omega\,(\,L_2+M\,)\,\dot{I}_1\ + (R_L+j\omega L_2\,)\,\dot{I}_2 = 0$$

§11-5 理想变压器的 VCR

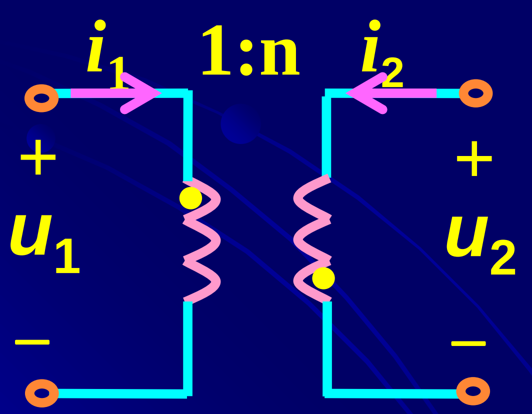
一. 理想变压器的伏安关系

1.电路模型



2. 伏安关系

$$u_2=nu_1 \qquad i_2=-\frac{1}{n}i_1$$



$$u_2=-nu_1 \qquad i_2=\frac{1}{n}i_1$$

（1）两电压高电位端与同名端一致时，电压比取正，反之取负。

（2）两电流都从同名端流进时，电流比取负；反之取正。

3. 参数

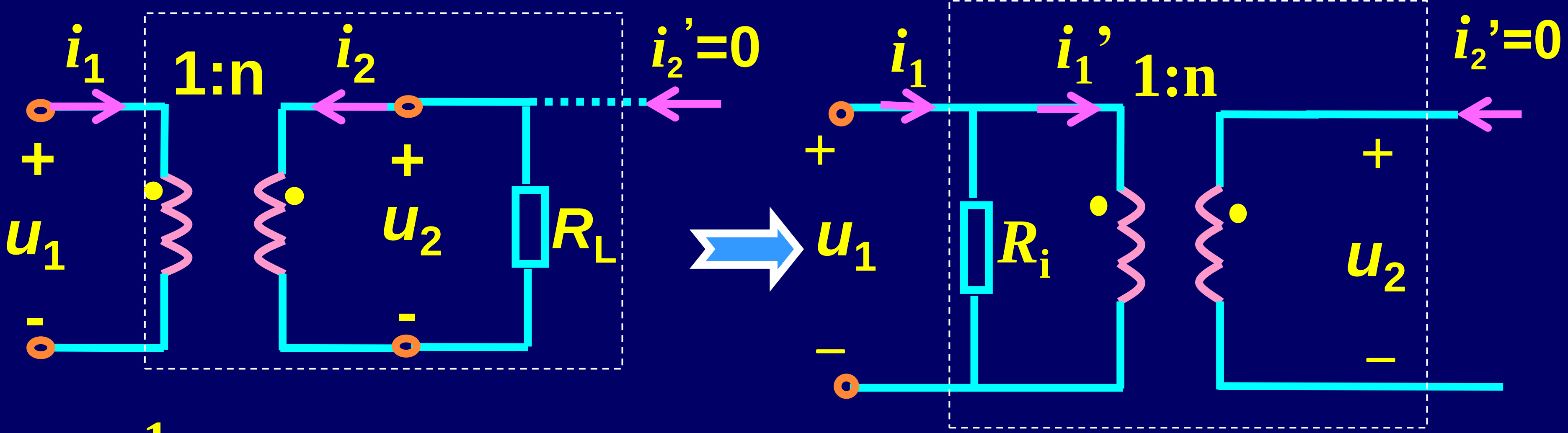
匝数比 $n = \frac{N_2}{N_1}$

4. 功率

$$p = u_2 i_2 + u_1 i_1 = n u_1 \left(-\frac{1}{n} i_1\right) + u_1 i_1 = 0$$

理想变压器既不消耗能量也不储存能量。

§ 11-6　理想变压器的阻抗变换性质



$u_1 = \frac{1}{n} u_2 \qquad i_1 = -n i_2$

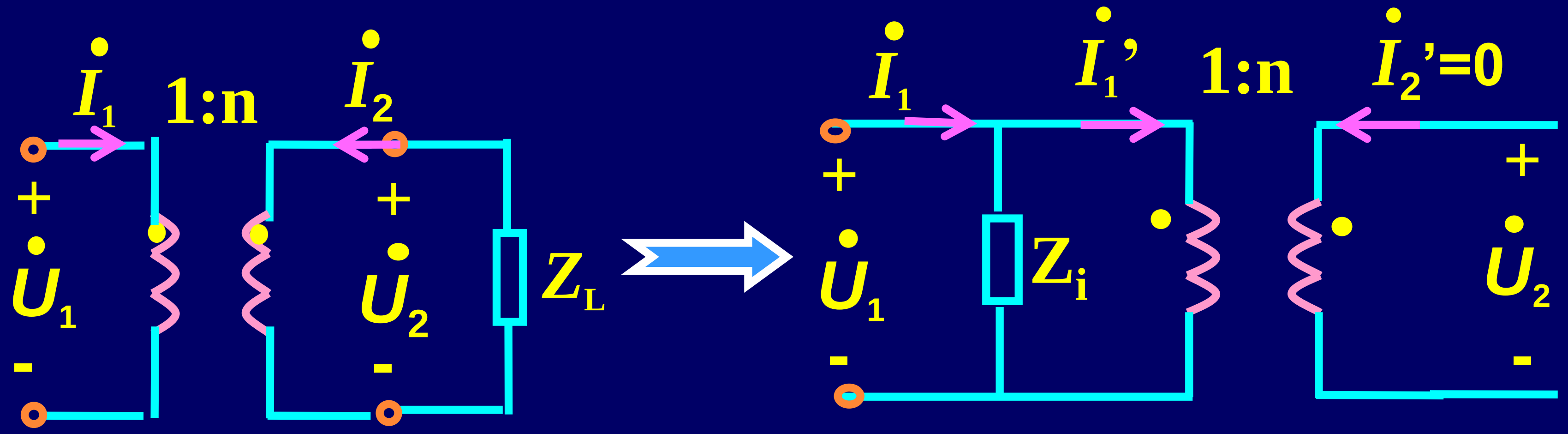
$i_1' = -n i_2' = 0$

$$R_i = \frac{u_1}{i_1} = \frac{\frac{1}{n} u_2}{-n i_2} = -\frac{1}{n^2}\frac{u_2}{i_2} = \frac{1}{n^2} R_L \qquad \therefore R_i = \frac{1}{n^2} R_L$$

$n>1$ 电阻折合到初级变小

$n<1$ 电阻折合到初级变大

该结论适于阻抗：

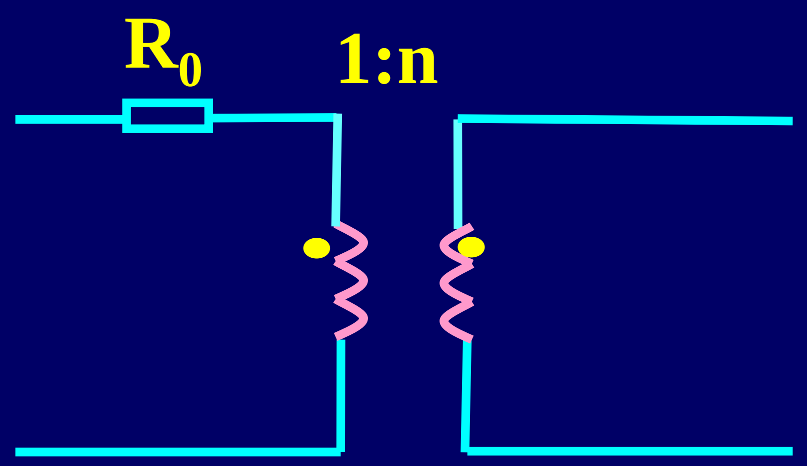


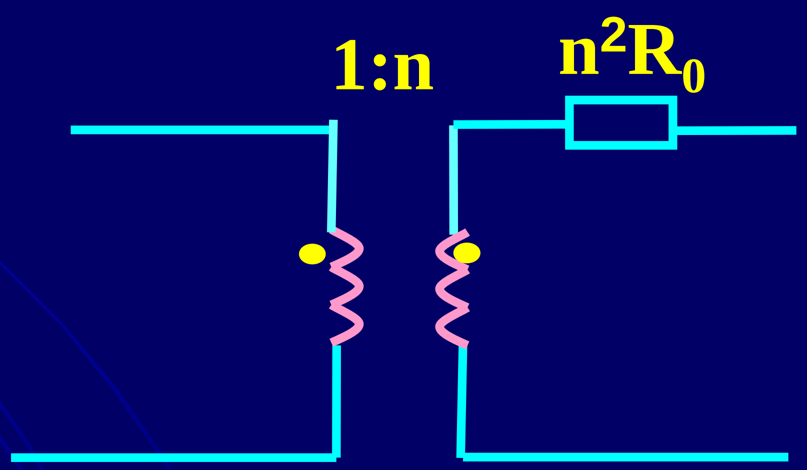
$$Z_i=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=\frac{\frac{1}{n}\dot{U}_2}{-n\dot{I}_2}=-\frac{1}{n^2}\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}=\frac{1}{n^2}Z_L$$

$$Z_i=\frac{1}{n^2}Z_L$$

理想变压器有变换阻抗的性质，可以实现最大功率匹配。

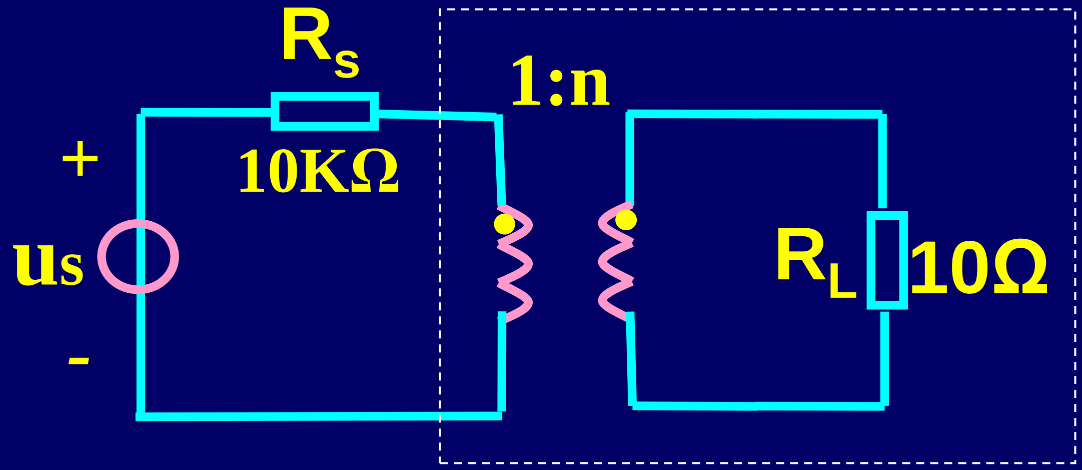
阻抗由原方 ⇨ 付方：





例11-10：求使负载获得最大功率时的匝比n。

解：将R_L变到原方。

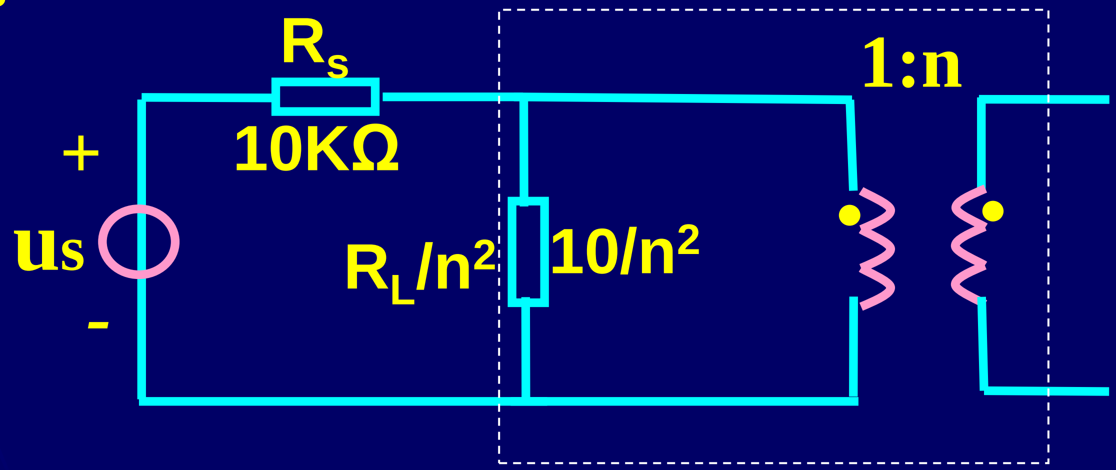


R_L在付方获最大功率相当于 R_L/n^2在原方获最大功率。

$$R_L / n^2 = R_s$$

$$10^4 = 10/n^2$$

$$n = 1/31.6$$



补充例1：求负载获得最大功率时的匝比n，求功率P_{Lmax}。

解：

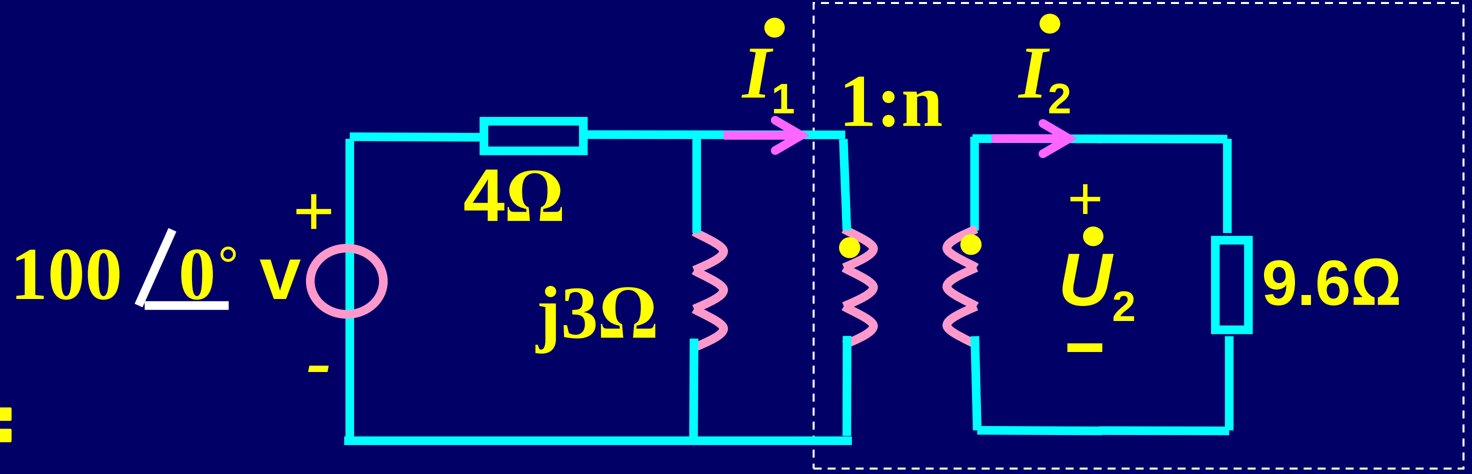


图1

（1）求n：

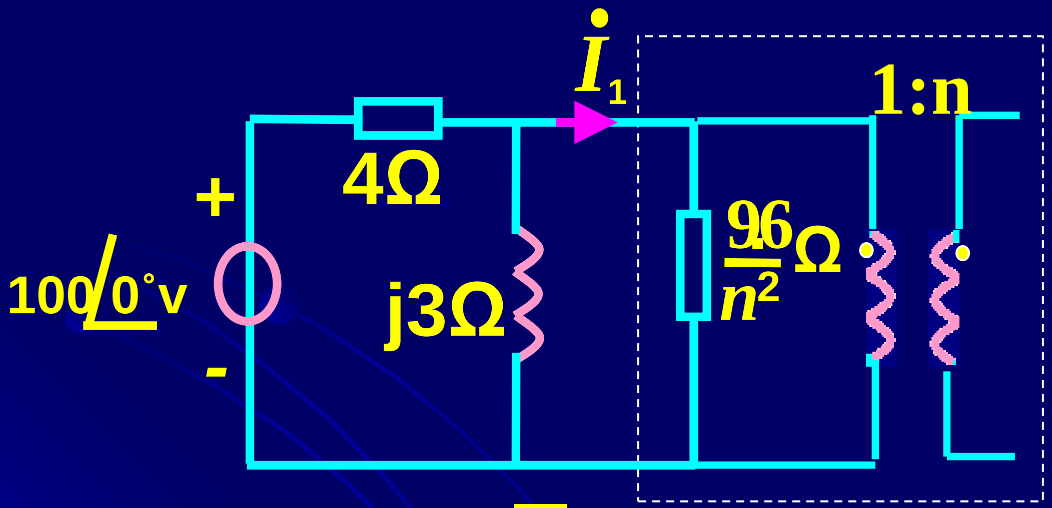
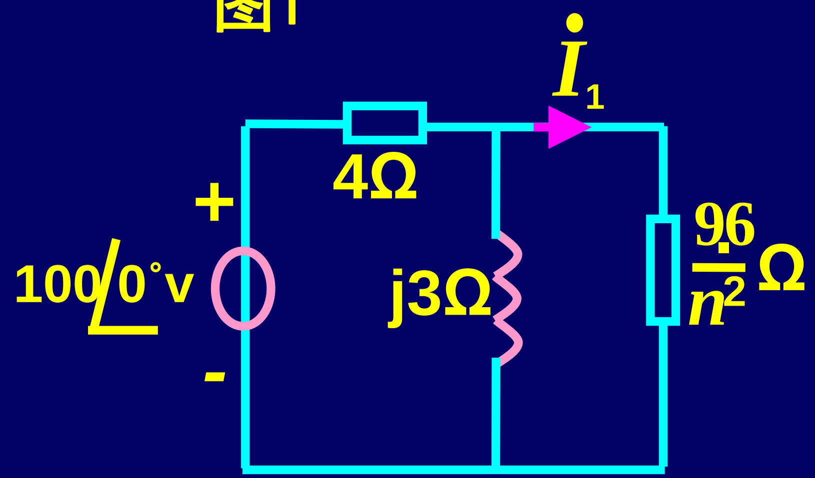


图2



$$Z_0 = \frac{4\times j3}{4+j3} = 2.4\angle 53.1^\circ\Omega$$

$$\frac{9.6}{n^2} = 2.4 \qquad n = 2$$

（2）求 $P_{L\max}$

法1： 图2中，求 $\frac{9.6}{n^2}\Omega$ 的功率，为最大功率

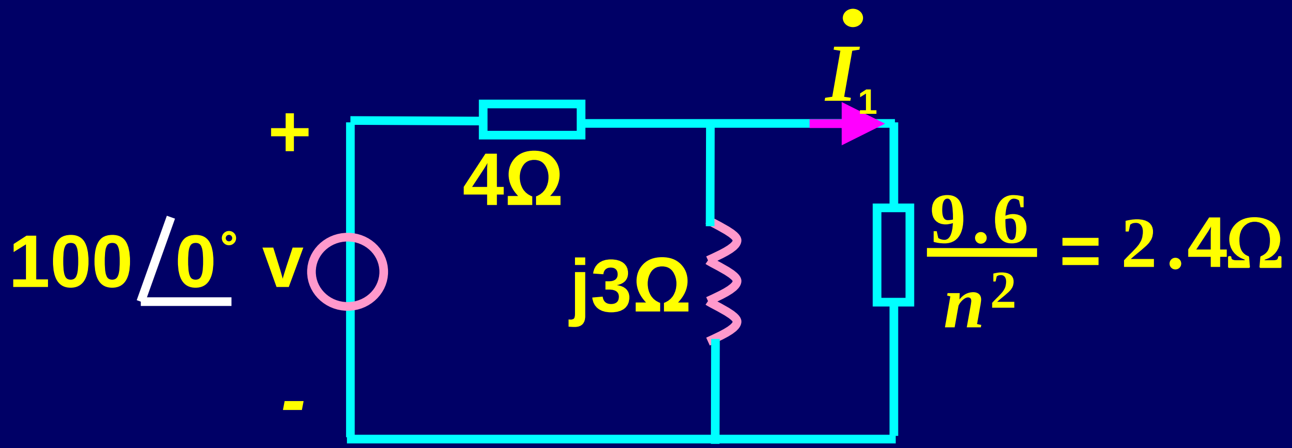


图2

$$\dot{I}_1=\frac{100\angle 0^\circ}{4+j3\,//\,2.4}\times\frac{j3}{j3+2.4}=13.986\angle 26.54^\circ\ \text{A}$$

在图2中求 $\frac{9.6}{n^2}\Omega$ 的功率，得最大功率：

$$P_{L\max}=13.986^2\times 2.4=496.46\ \text{W}$$

法2：

在图1中求9.6Ω的功率，为最大功率：

已求出 $\dot{I}_1 = 13.986\angle 26.54^\circ$ A

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{2}\dot{I}_1 = 6.993\angle 26.54^\circ\ A$$

$$P_{L\max} = 6.993^2 \times 9.6 = 496.46\text{W}$$

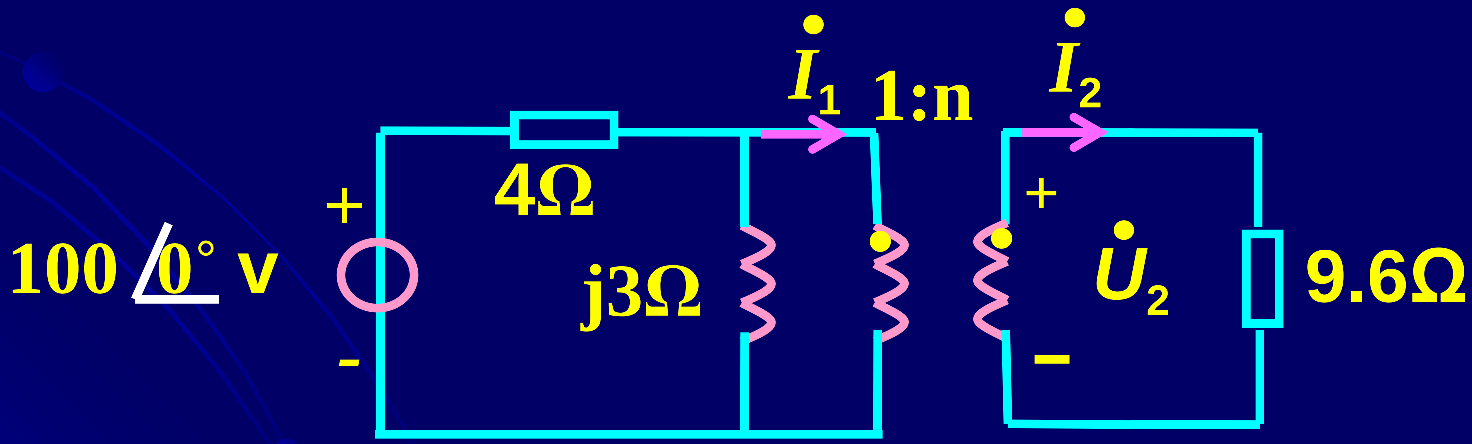
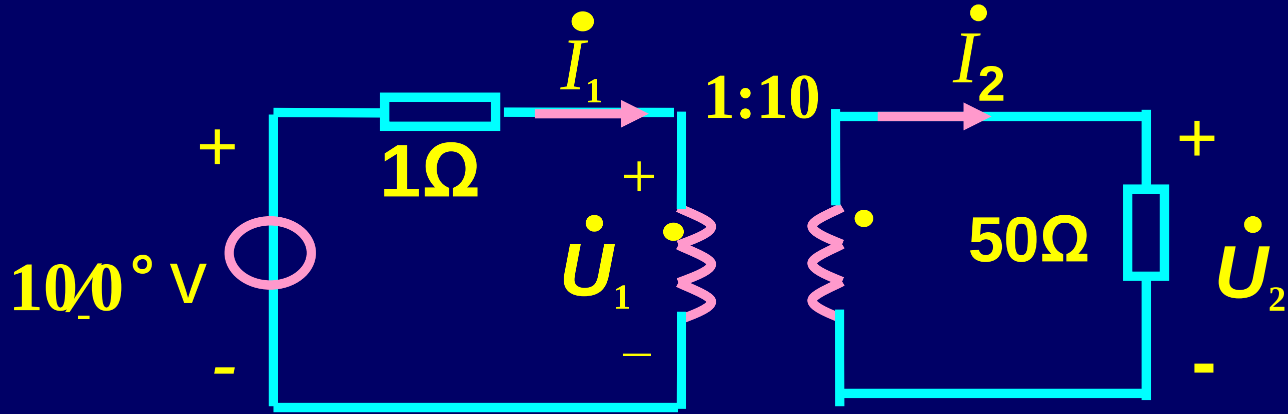
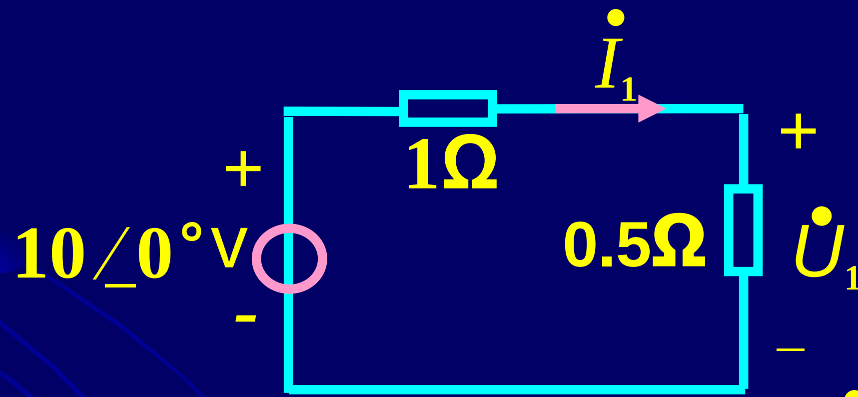


图1

例11-11 求图示电路中$\dot{U}_1$、$\dot{U}_2$ 、$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$



法1：用阻抗折合的方法，把负载阻抗折合到初级



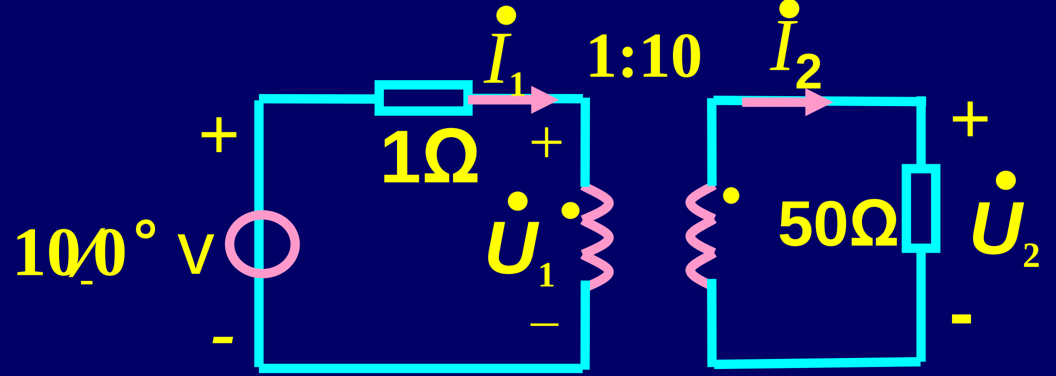
$$\dot{I}_1=\frac{10\angle 0^\circ}{1.5}=\frac{20}{3}\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{U}_1=\frac{0.5}{1.5}\times 10\angle 0^\circ=\frac{10}{3}\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

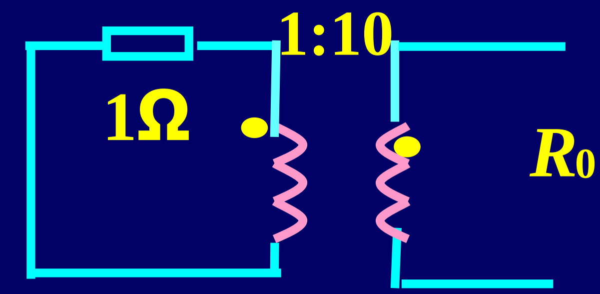
$$\dot{U}_2=\frac{100}{3}\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot{I}_2=\frac{2}{3}\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$$

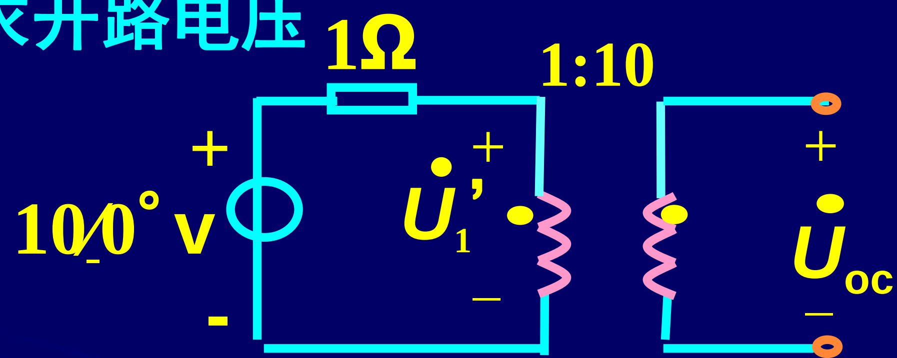
法2：用戴维南定理求电压 $\dot{U}_2$，$\dot{I}_2$

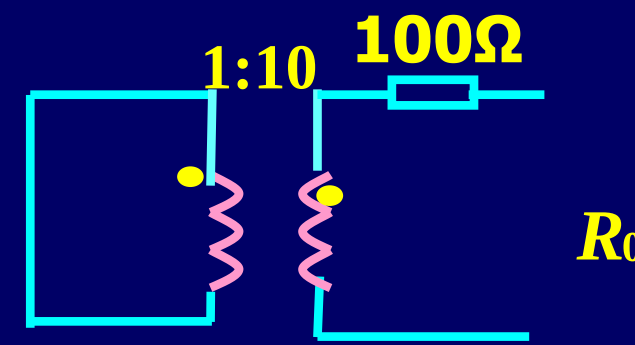


求等效阻抗 R_0



求开路电压

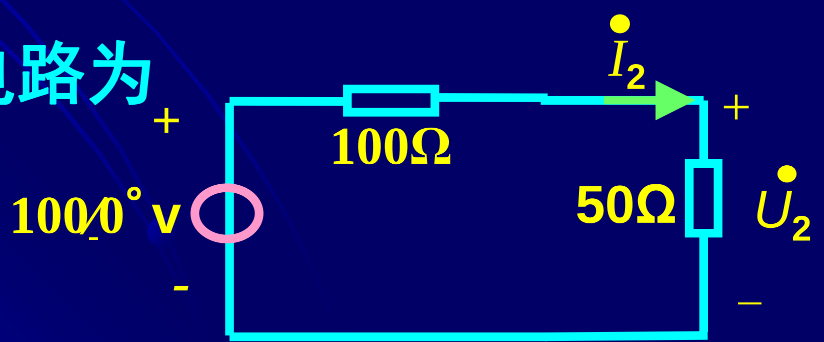




$\dot{U}_1' = 10\angle 0^\circ \text{V}$　　$\dot{U}_{oc} = 10\dot{U}_1' = 100\angle 0^\circ \text{V}$

$R_0 = 100\,\Omega$

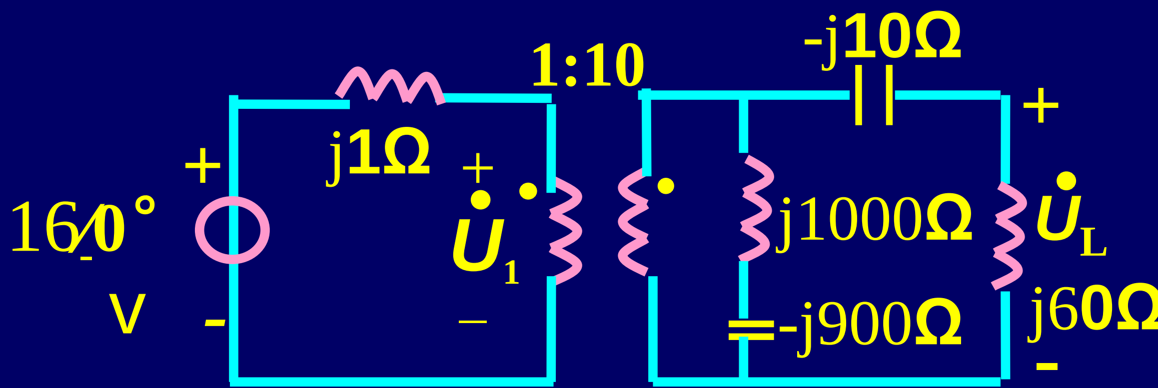
最简等效电路为



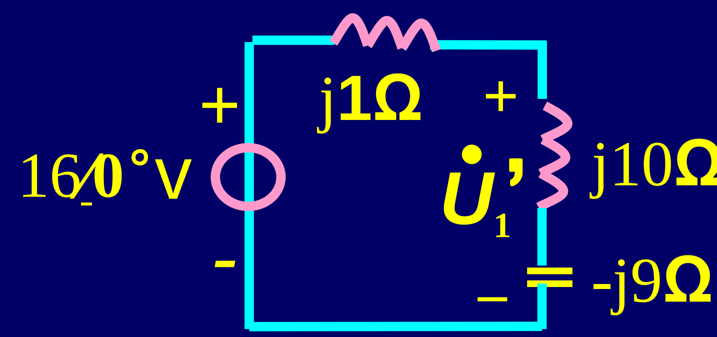
$$\dot{U}_2 = \frac{100}{3}\angle 0^\circ \text{V}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{2}{3}\angle 0^\circ \ \text{A}$$

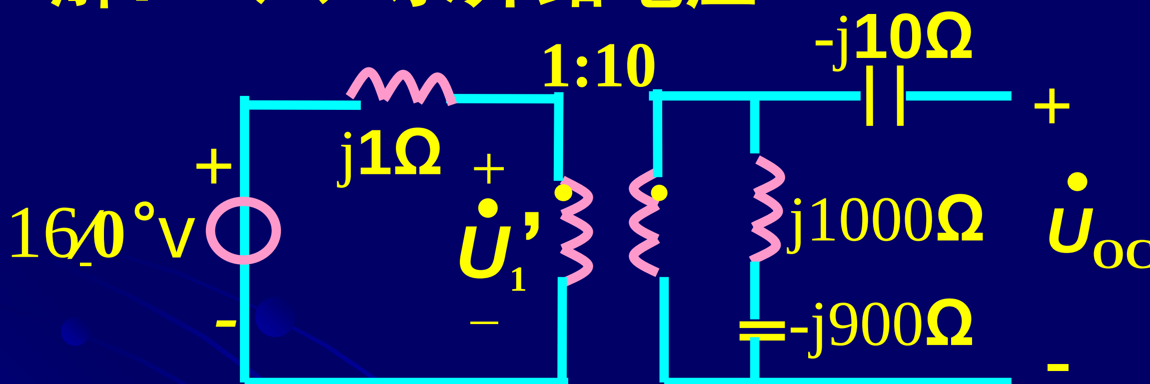
补充1：用戴维南定理求电压$\dot{U}_L$



阻抗折合法求开路电压

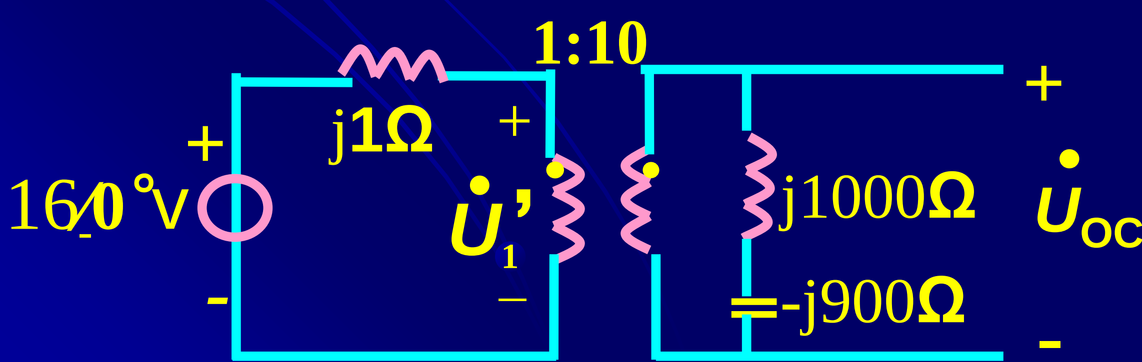


解：（1）求开路电压



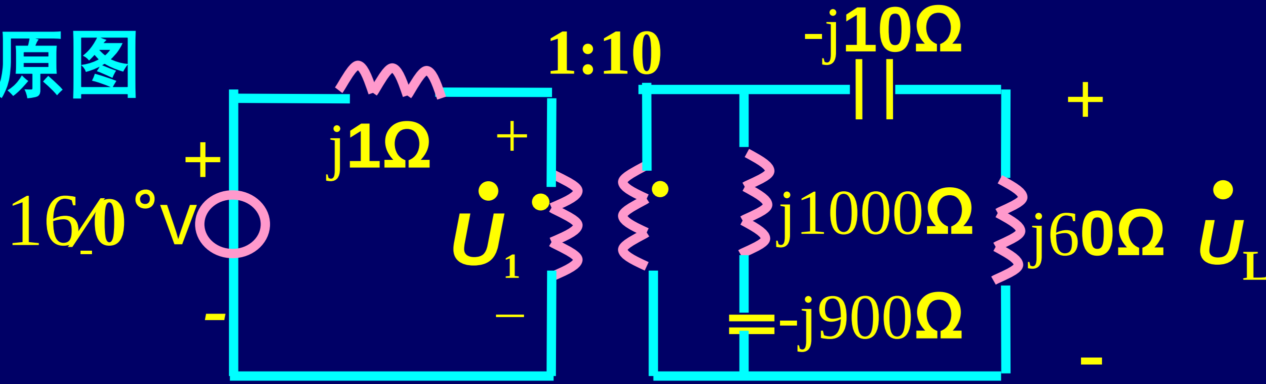
$\dot{U}_1'=8\angle 0^\circ$ V

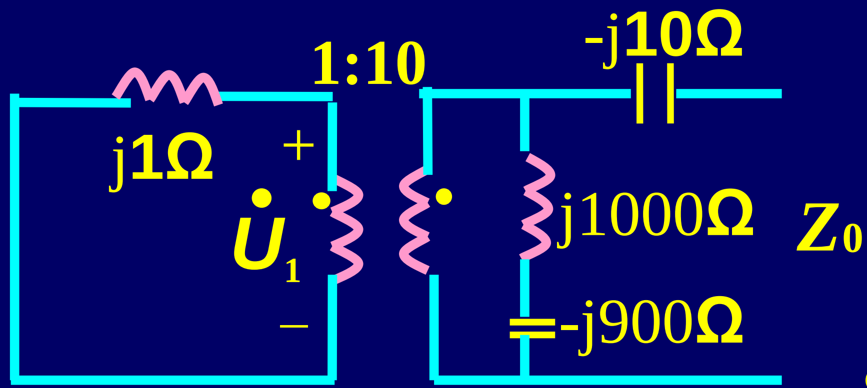
$\dot{U}_{OC}=10\dot{U}_1=80\angle 0^\circ$ V



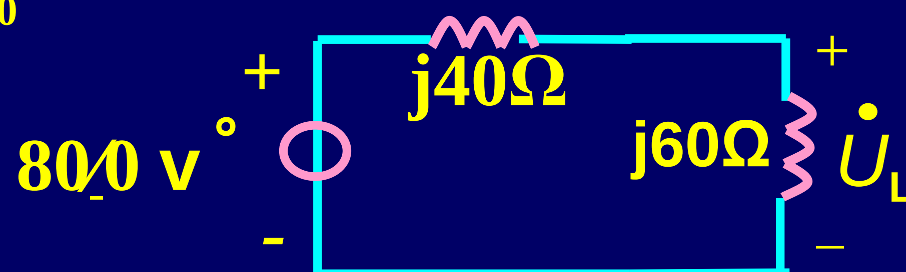
（2）求等效阻抗Z_0

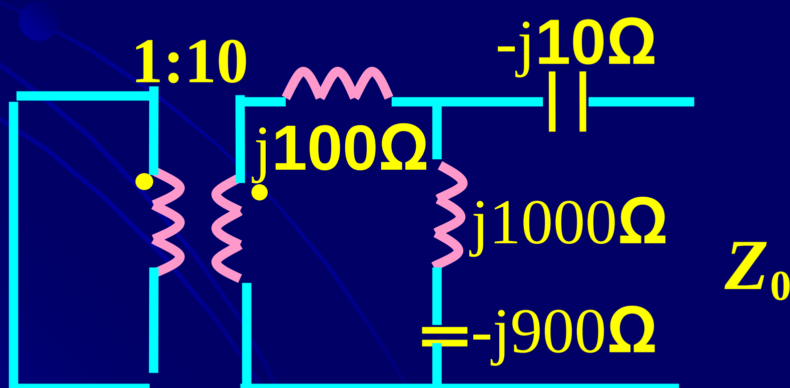
原图





最简等效电路为

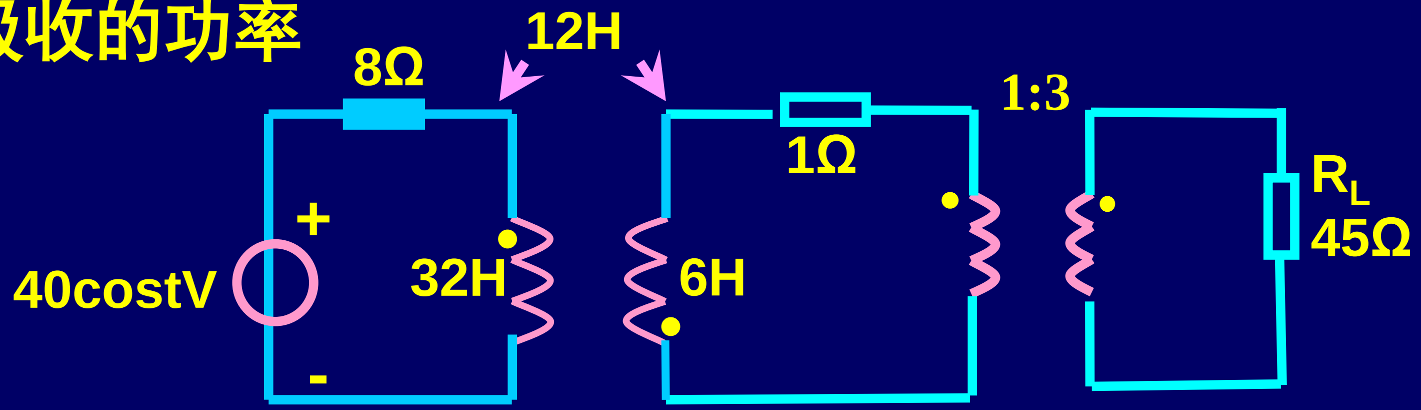




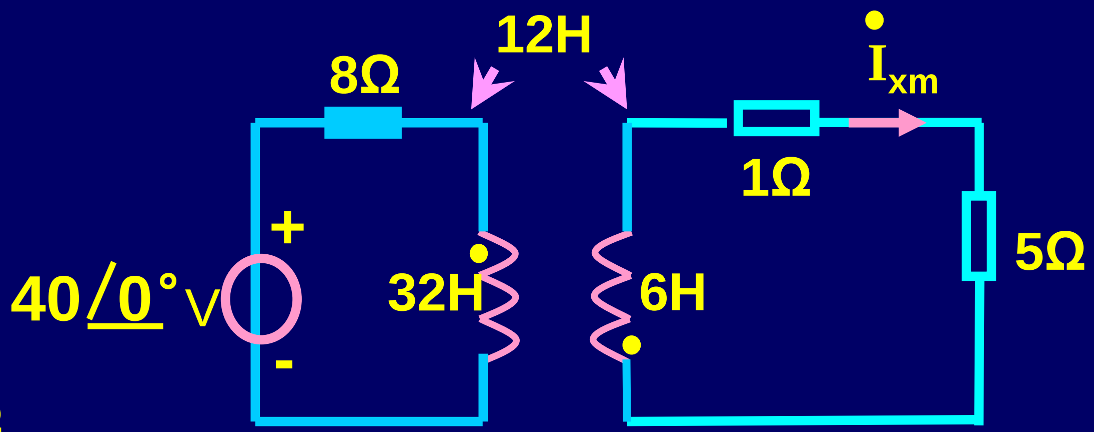
$$\dot{U}_L = 48\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$Z_0 = (j100 // j100) - j10 = j40\ \Omega$$

补充2：求R_L吸收的功率



解：45Ω折合



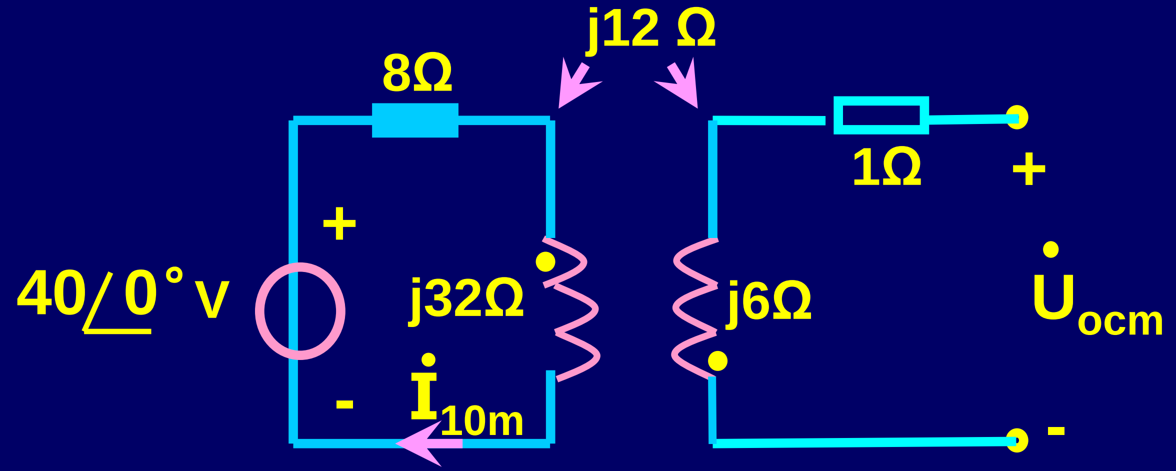
$P_{5\Omega}$=原$P_{45\Omega}$

$P_{5\Omega}=5I_x^2$

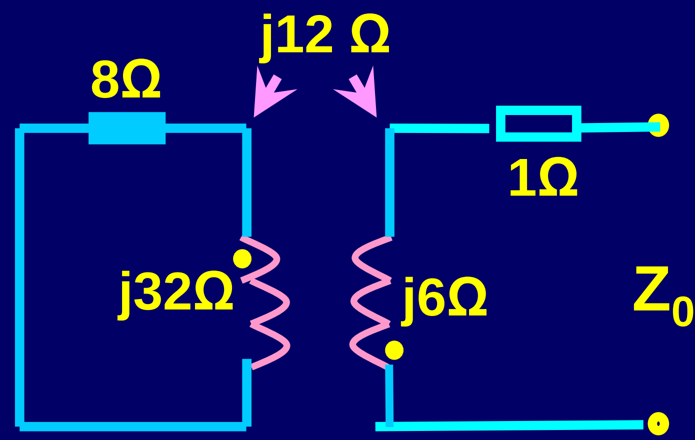
现求I_x

用戴维南定理求 $\dot{I}_x$

（1）求$\dot{U}_{oc}$



$$\dot{U}_{ocm}=-j\omega M\dot{I}_{10m}$$

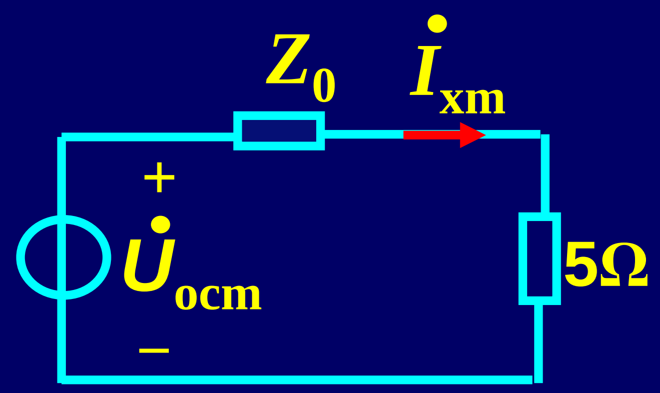


$$\dot{I}_{10m}=\frac{\dot{U}_{sm}}{Z_{11}}=\frac{40\angle 0^\circ}{8+j32}\ \text{A}$$

$$\dot{U}_{ocm}=-j12\times\frac{40\angle 0^\circ}{8+j32}\ \text{V}$$

（2）求Z_0

$$Z_0=Z_{22}+\frac{M^2\omega^2}{Z_{11}}=1+j6+\frac{144}{8+j32}\ \Omega$$



（3）$\dot{I}_{xm}=\dfrac{\dot{U}_{ocm}}{Z_0+R_L}=-2=2\angle 180^\circ$ A

$$P_{RL}=(2^2\div 2)\times 5=10\text{W}$$