第十五章 欧拉图与哈密顿图

主要内容

- 15.1 欧拉图
- 15.2 哈密顿图
- ~~15.3 最短路问题与货郎担问题~~

- 15.1 欧拉图
  - 欧拉图E
    - 具有欧拉回路（每边1且仅1）
  - 半欧拉图
    - 具有欧拉通路而无欧拉回路
  - 判别方法
- 15.2 哈密顿图
  - 哈密顿图H
    - 具有哈密顿回路（每点1且仅1）
  - 半哈密顿图
    - 具有哈密顿通路且无哈密顿回路
  - 判别方法
- ~~15.3 最短路问题与货郎担问题~~
  - ~~最短路问题（Dijkstra算法）~~
  - ~~货郎担问题（最短哈密顿回路）~~

第十五章 欧拉图与哈密顿图

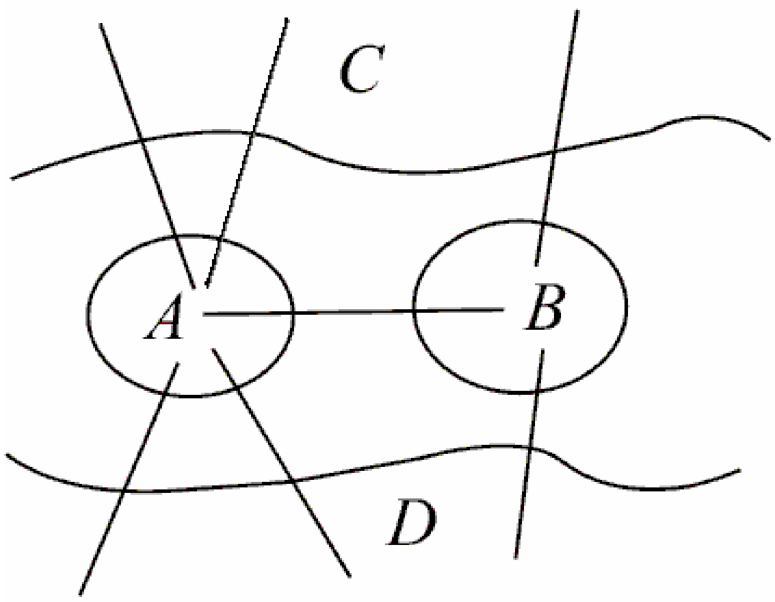
主要内容

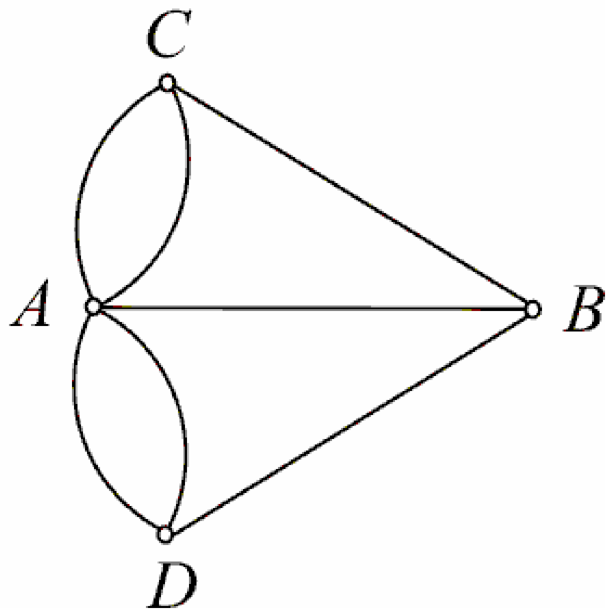
- 15.1 欧拉图
- 15.2 哈密顿图
- ~~15.3最短路问题与货郎担问题~~

15.1 欧拉图

历史背景：哥尼斯堡七桥问题与欧拉图

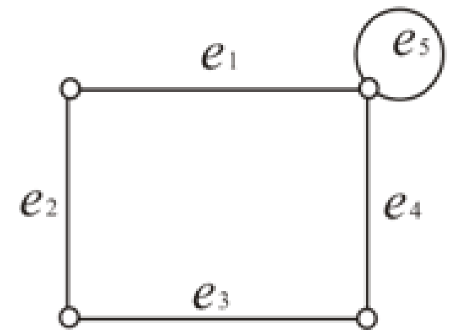
问题 能否从河岸或小岛出发，通过每一座桥，且仅通过一次回到原地？





欧拉通过对七桥问题的研究，不仅圆满地回答了哥尼斯堡居民提出的问题，而且得到并证明了更为广泛的有关一笔画的结论，人们通常称之为“欧拉定理”。

欧拉图定义



定义15.1

(1)欧拉通路:

经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路:

经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) 欧拉图: 具有欧拉回路的图.

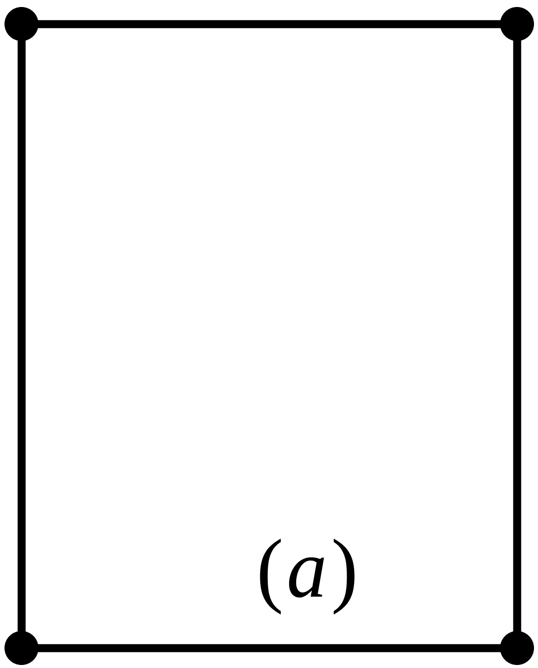
(4) 半欧拉图: 具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

几点说明:

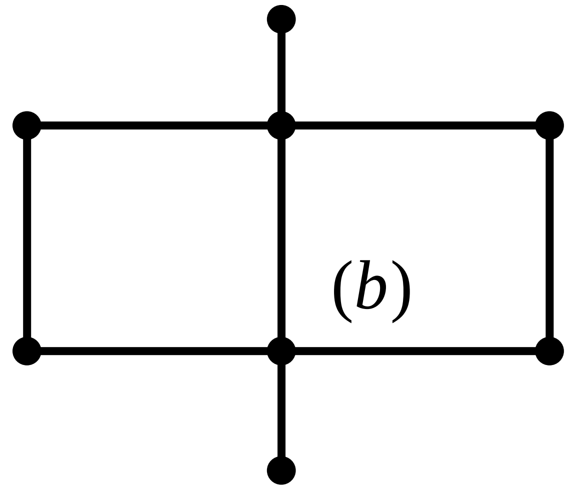
- 规定平凡图为欧拉图.
- 欧拉通路是生成的简单通路，欧拉回路是生成的简单回路.
- 环不影响图的欧拉性.

例

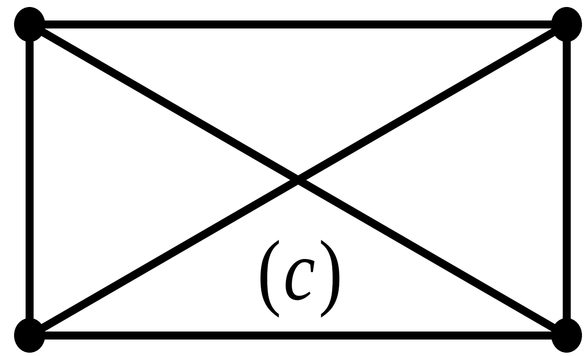
判断下面各图是否为欧拉图或半欧拉图？



欧拉图



半欧拉图



既不是欧拉图

也不是半欧拉图

无向欧拉图的判别法

定理15.1 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度数顶点.

证 若G为平凡图无问题. 下设G为 n 阶 m 条边的无向图.

必要性 设C为G中一条欧拉回路.

(1) G 连通显然.

(2) $\forall v_i \in V(G)$，v_i在C上每出现一次获2度，所以v_i为偶度顶点.

由v_i的任意性，结论为真.

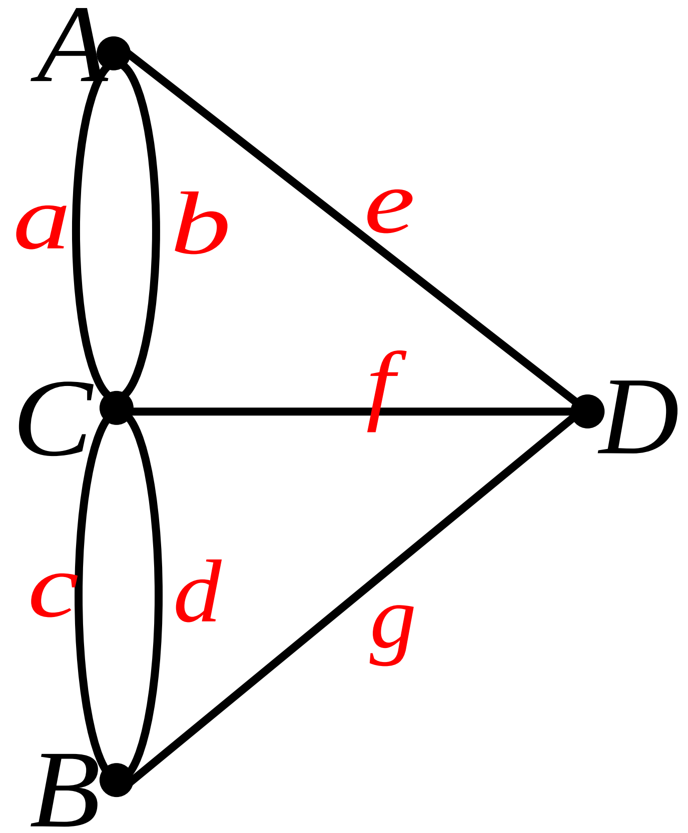
充分性 对边数m做归纳法（第二数学归纳法）.

(1) $m=1$时，G为一个环，则G为欧拉图.

(2) 设$m \le k$（$k \ge 1$）时结论为真，证明$m=k+1$时结论也为真

哥尼斯堡七桥问题

图中奇数度结点的个数是
4个，所以不是欧拉图。



无向半欧拉图的判别法

定理15.2 无向图G是半欧拉图

当且仅当G 连通且恰有两个奇度顶点.

证 必要性（略）.

充分性（利用定理15.1）

设u,v为G 中的两个奇度顶点，令

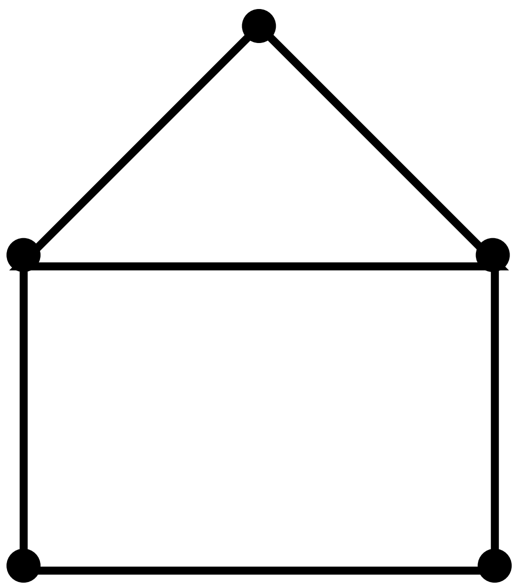
$$G' = G\cup(u,v) \quad // (u,v)\text{表示一条边}$$

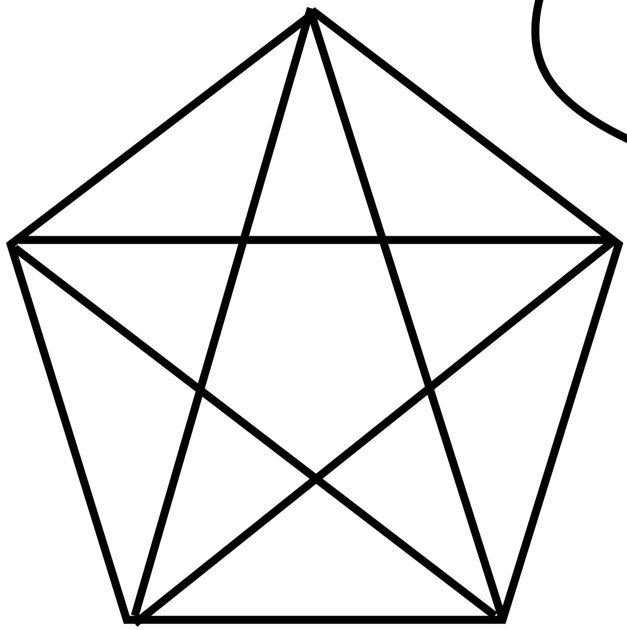
则G' 连通且无奇度顶点，由定理15.1知G'为欧拉图，因而存在欧拉回路C，令

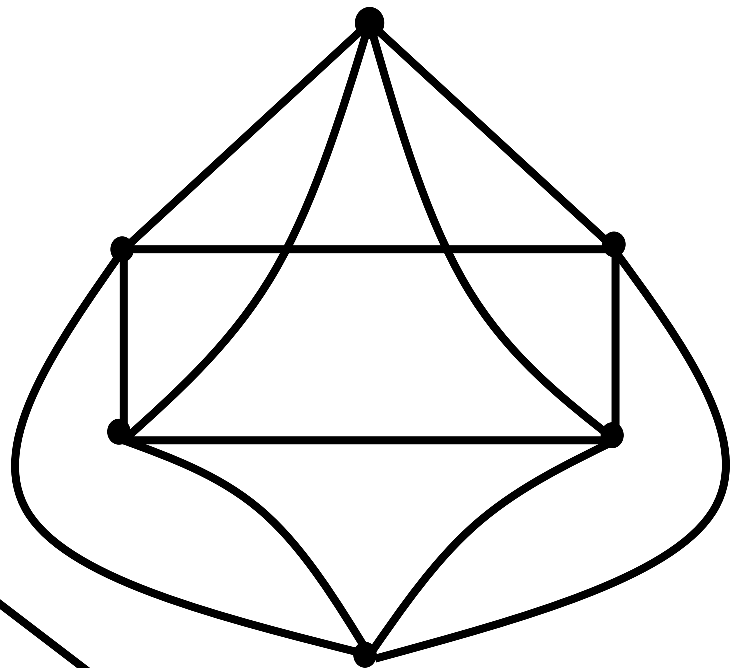
$$\Gamma = C-(u,v)$$

则Γ为 G 中欧拉通路.

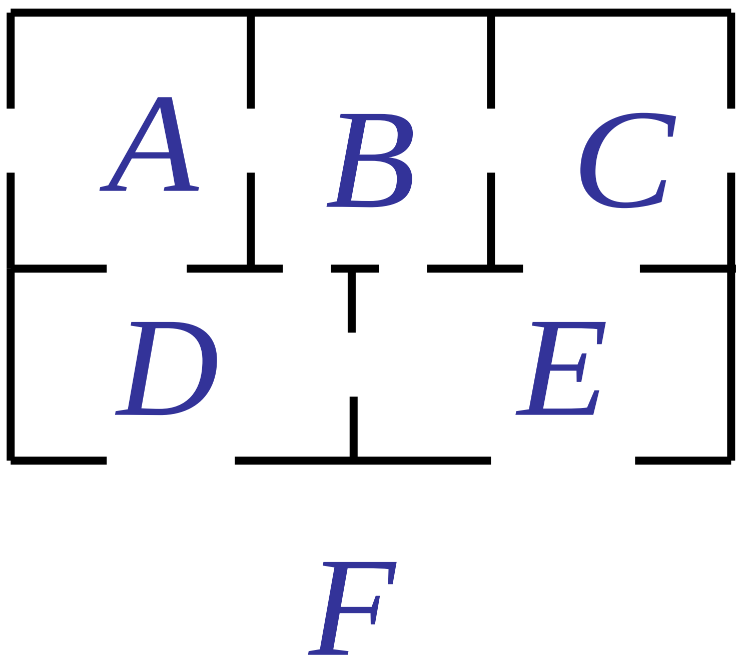
例：一笔画判定问题

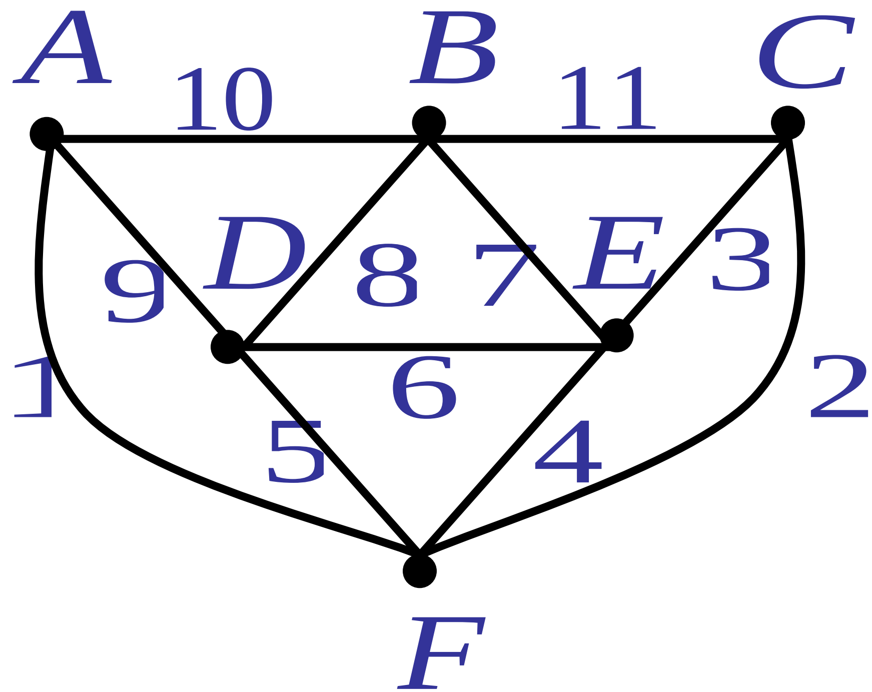






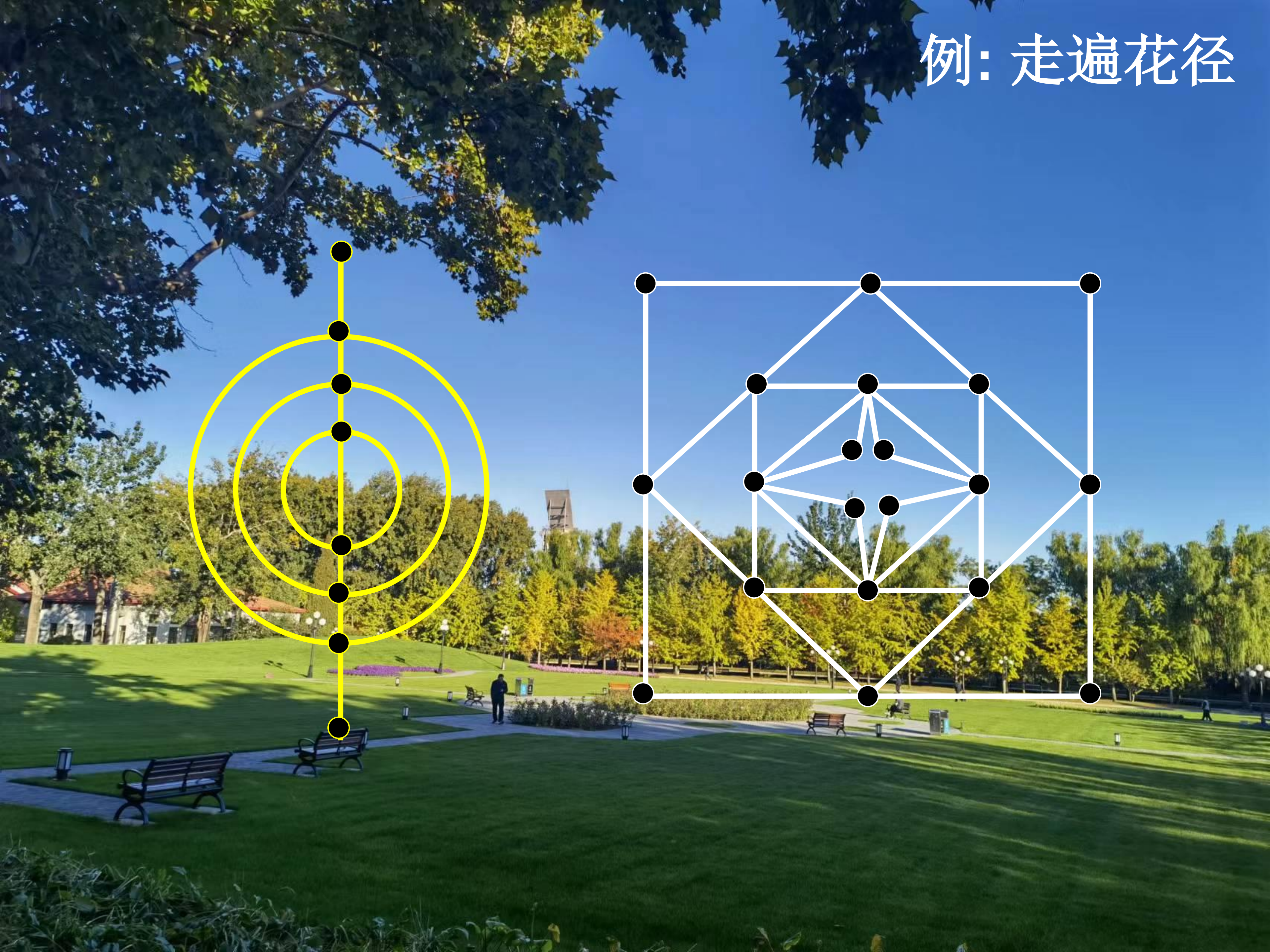
例：走遍房间



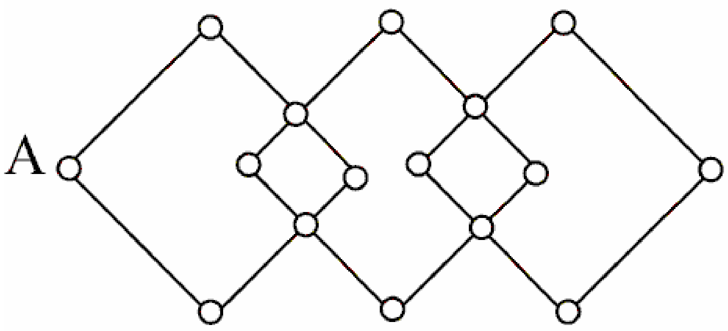


问题

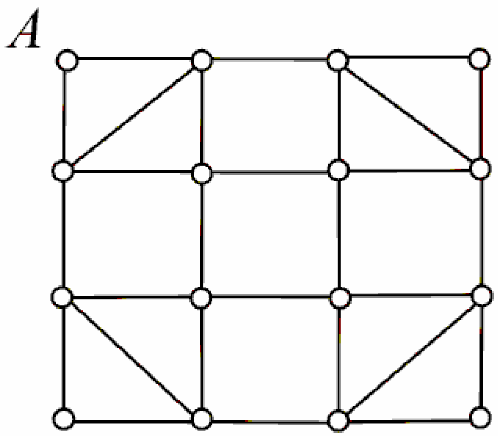
能否从任意一个房间或外面出发，
不重复地通过每一个房门？


例: 走遍花径

例题



(1)



(2)

上图中，(1),(2)两图都是欧拉图，均从*A*点出发，如何一次成功地走出一条欧拉回路来？

Fleury算法

算法：

(1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0=v_0$.

(2) 设$P_i = v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$ 已经行遍，按下面方法从 $E(G)-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选取$e_{i+1}$：

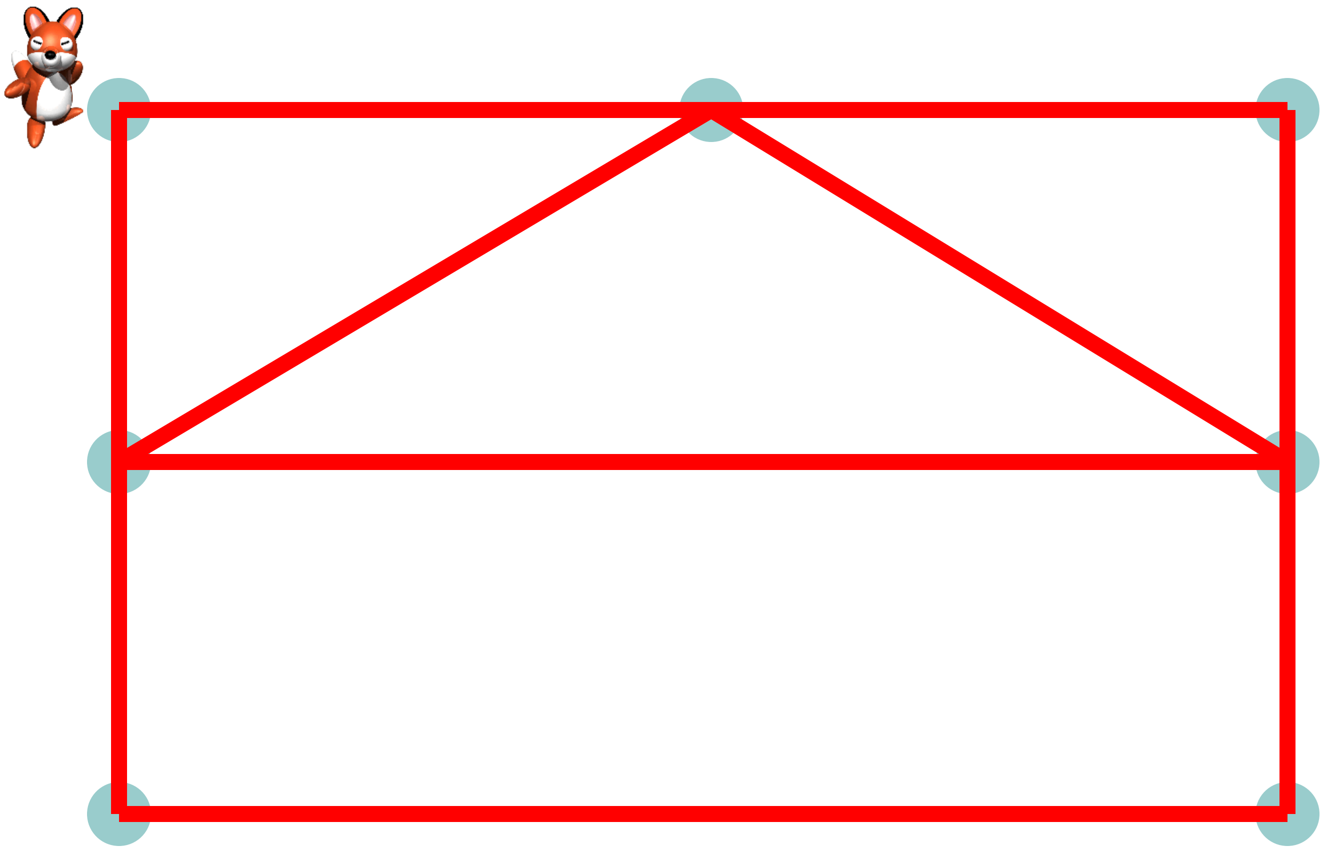
(a) e_{i+1}与v_i 相关联；

(b) 除非无别的边可供行遍，否则e_{i+1}不应该为 $G_i = G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的桥.

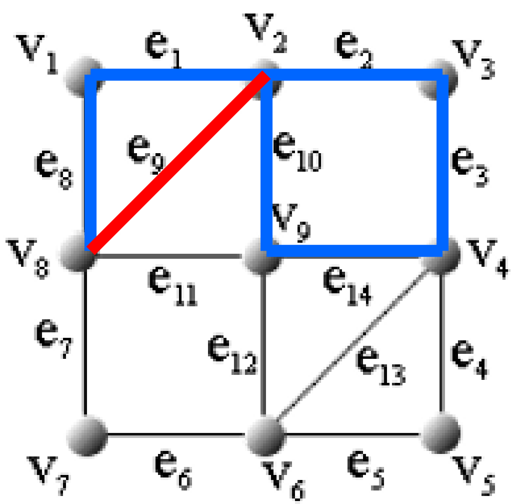
(3) 当 (2)不能再进行时，算法停止.

可以证明算法停止时所得简单通路 $P_m = v_0e_1v_1e_2\ldots e_mv_m$ $(v_m=v_0)$为G 中一条欧拉回路.

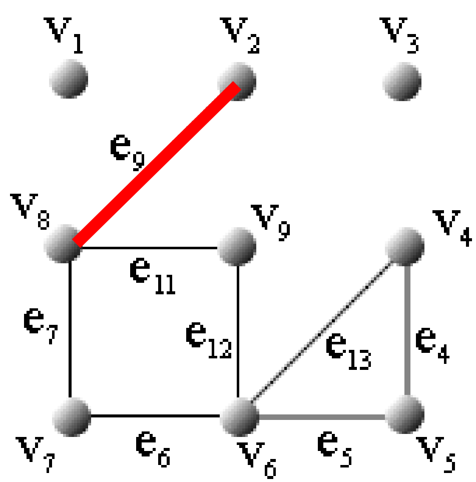
Fleury算法示例



例 图（1）是给定的欧拉图G。某人用Fleury算法求G中的欧拉回路时，走了简单回路$v_2e_2v_3e_3v_4e_{14}v_9e_{10}v_2e_1v_1e_8v_8e_9v_2$之后，无法行遍了，试分析在哪步他犯了错误？



(1)



(2)

解：此人行遍v_8时犯了能不走桥就不走桥的错误，因而他没行遍出欧拉回路。当他走到v_8时，G-{$e_2,e_3,e_{14},e_{10},e_1,e_8$}为图（2）所示。此时$e_9$为该图中的桥，而$e_7,e_{11}$均不是桥，他不应该走$e_9$，而应该走$e_7$或$e_{11}$，他没有走，所以犯了错误。

注意，此人在行遍中，在v_3遇到过桥e_3，v_1处遇到过桥e_8，但当时除桥外他无别的边可走，所以当时均走了桥，这是不会犯错误的。

有向欧拉图的判别法

定理15.3 有向图*D*是欧拉图当且仅当

*D*是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

本定理的证明类似于定理15.1.

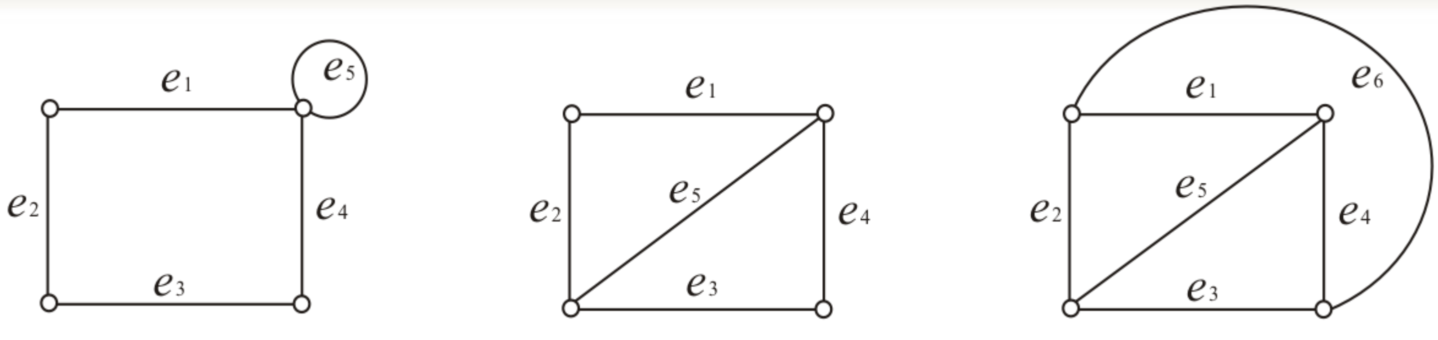
定理15.4 有向图*D*是半欧拉图当且仅当

*D*是单向连通的且*D*中恰有两个奇度顶点，

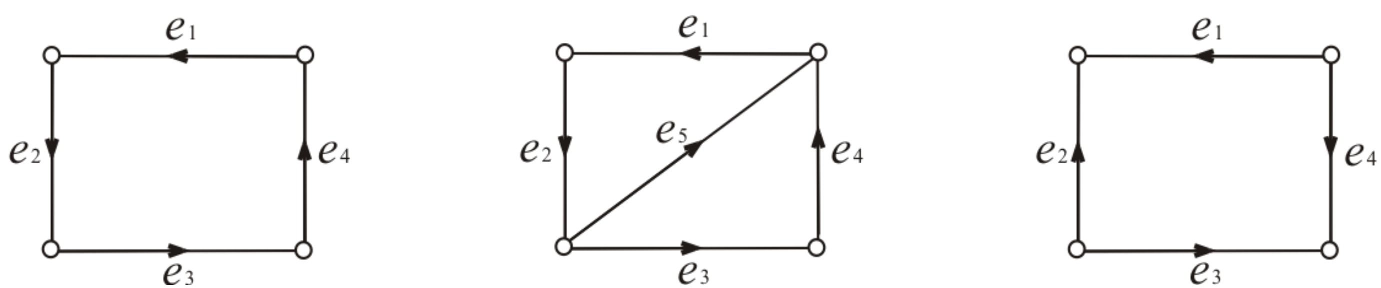
其中一个的入度比出度大1（终点），另一个的出度比入度大1（起点）， 而其余顶点的入度都等于出度.

本定理的证明类似于定理15.1.

欧拉图实例



(1) (2) (3)



(4) (5) (6)

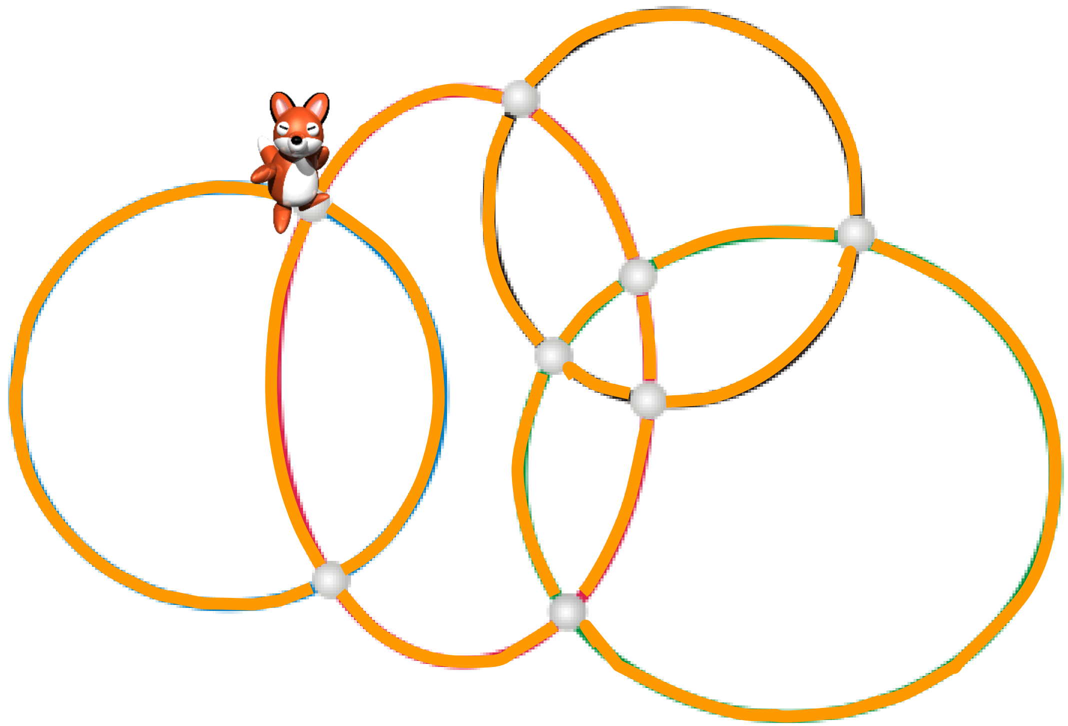
- 上图中，(1),(4) 为欧拉图，(2),(5)为半欧拉图，(3),(6) 既不是欧拉图，也不是半欧拉图.
- 在(3),(6)中各至少加几条边才能成为欧拉图？

定理15.5

定理15.5 *G*是非平凡的欧拉图当且仅当

*G*是连通的且为若干个边不重的圈之并.

可用归纳法证定理15.5.

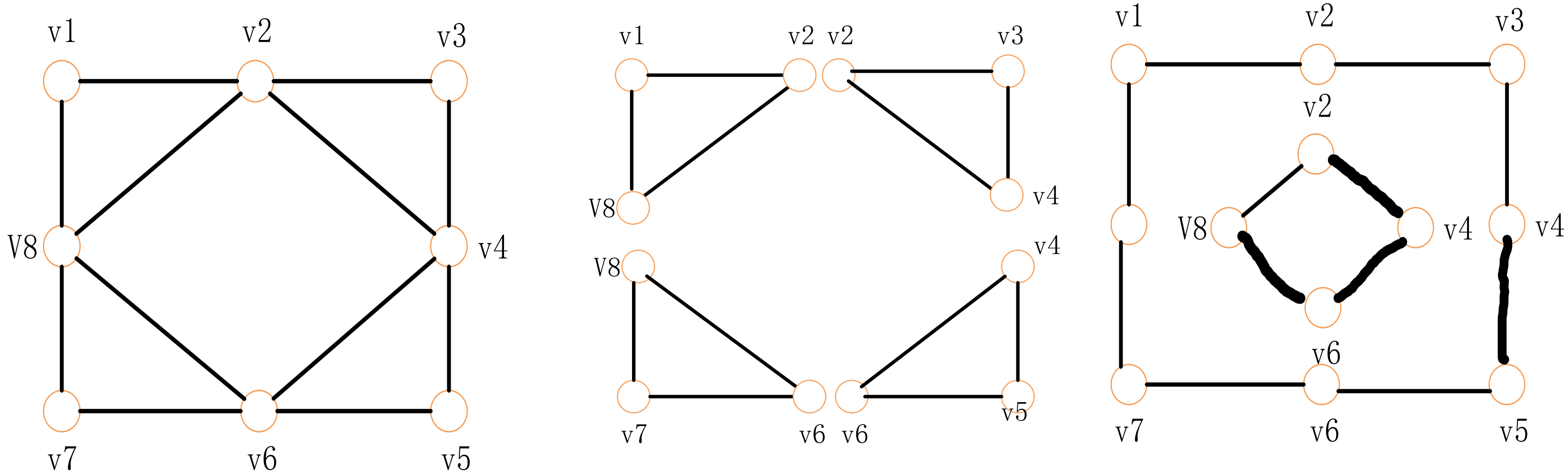


欧拉图能分解为若干个边不重的圈之并

PLAY

例子

由定理15.1，图(a)为欧拉图，该图既可以看成圈$v_1v_2v_8v_1$,$v_2v_3v_4v_2$,$v_4v_5v_6v_4$,$v_6v_7v_8v_6$之并（图(b)），也可以看成圈$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_1$ 与圈$v_2v_4v_6v_8v_2$之并（图(c)中）。



(a) (b) (c)

例题

例1 设G是欧拉图，但G不是平凡图，也不是一个环，

则：$\lambda(G)\geq 2$.

证 只需证明G中不可能有桥:

方法一：直接证明法.

证 设C为G中一条欧拉回路，因为任意的$e\in E(C)$，

故：$p(G-e)=p(G)$，所以e不为桥.

方法二：反证法. 利用欧拉图无奇度顶点及握手定理的推论.

否则，设$e=(u,v)$为G中桥，则$G-e$产生两个连通分支G_1, G_2，

不妨设u在G_1中，v在G_2中.

由于从G中删除e时，只改变u,v的度数(各减1)，因而G_1与G_2

中均只含一个奇度顶点，这与握手定理推论矛盾.

15.1 欧拉图（回顾）

- 15.1 欧拉图
  - 欧拉图E：具有欧拉回路（每边1且仅1）
  - 半欧拉图：具有欧拉通路而无欧拉回路
  - 判别方法
    - 无向E当且仅当E连通且无奇度数顶点 — Fleury算法
    - 无向半E当且仅当G连通且恰有两个奇度顶点
    - 有向E当且仅当
      - E是强连通的且每个顶点的入度都等于出度
    - 有向半E当且仅当
      - D是单向连通的且D中恰有两个奇度顶点
      - (起点：出度-入度=1，终点：入度-出度=1)
    - 非平凡E当且仅当
      - E是连通的且为若干个边不重的圈之并
    - 欧拉图中不可能有桥

主要内容

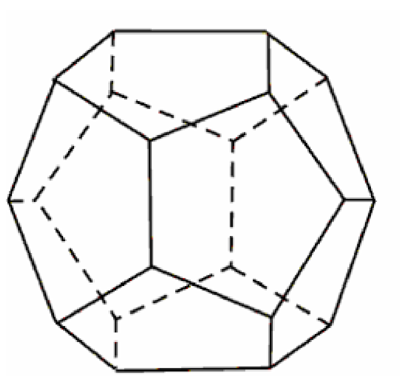
- **15.1 欧拉图**
- **15.2 哈密顿图**
- ~~**15.3最短路问题与货郎担问题**~~

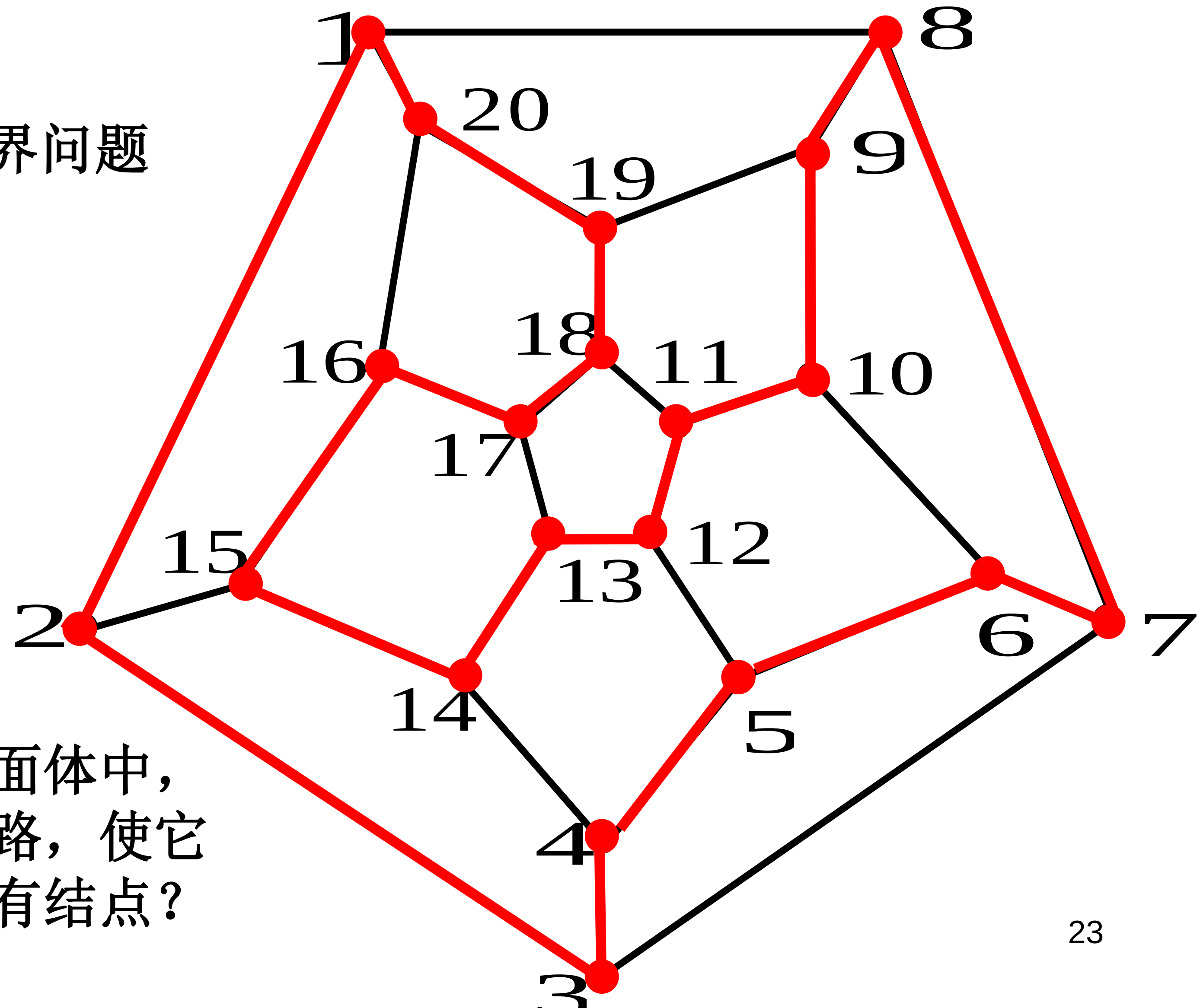
15.2 哈密顿图

历史背景：

哈密顿周游世界问题

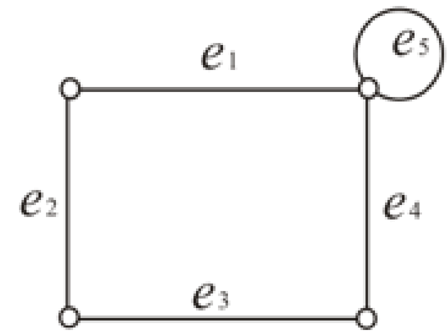
与哈密顿图





在图所示的十二面体中，能否找到一条回路，使它含有这个图的所有结点？

哈密顿图与半哈密顿图



定义15.2

(1) 哈密顿通路：经过图中所有顶点一次仅一次的通路.

(2) 哈密顿回路：经过图中所有顶点一次仅一次的回路.

(3) 哈密顿图：具有哈密顿回路的图.

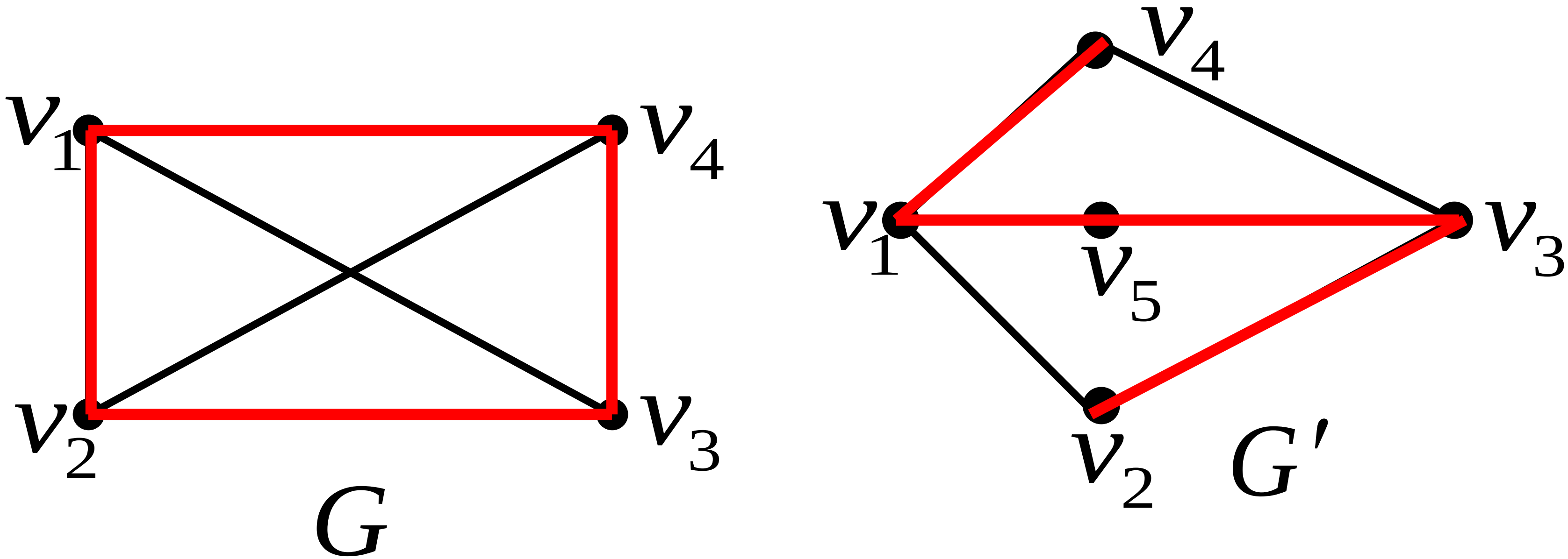
(4) 半哈密顿图：具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

几点说明：

- 平凡图是哈密顿图.
- 哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路.
- 环与平行边不影响哈密顿性.
- 哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上

例

判断下面各图是否为哈密顿图或半哈密顿图?

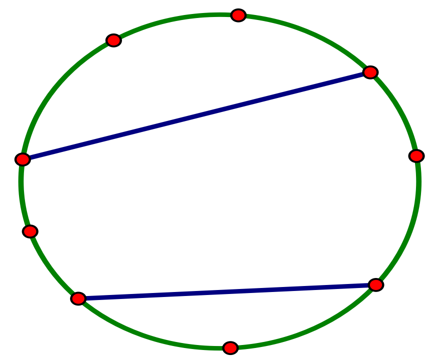


哈密顿图　　　　半哈密顿图

无向哈密顿图的一个必要条件

定理15.6 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有

$$p(G-V_1) \le |V_1|$$



证 设C为G中一条哈密顿回路

(1) $p(C-V_1) \le |V_1|$

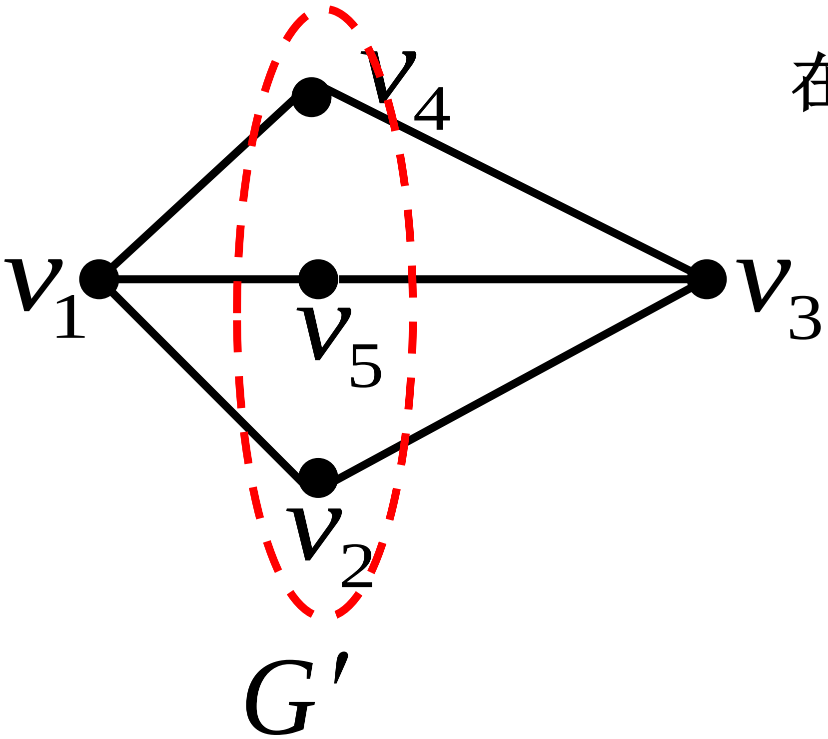
(2) $p(G-V_1) \le p(C-V_1) \le |V_1|$ （因为$C \subseteq G$）

注意

定理 15.6 给出的是哈密顿图的必要条件，可以用于判断一个图不是哈密顿图。

即若图中有点集$V_1 \neq \varnothing$，满足 $p(G-V_1) > |V_1|$ 则该图不是哈密顿图

例 判断下图是否为哈密顿图



在 G'中，取

$$V_1 = \{v_1, v_3\}$$

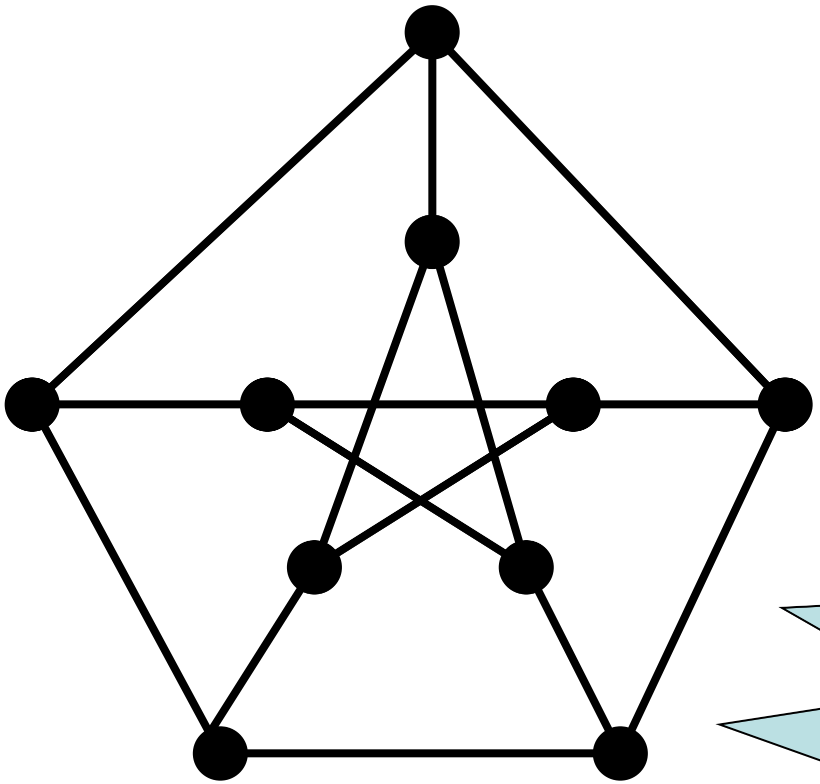
$$|p(G - V_1)| = 3$$

$$|V_1| = 2$$

$p(G-V_1) > |V_1|$

故 G' 不是哈密顿图

彼得松(Peterson)图



彼得松图

彼得松图满足
$p(G - V_1) \leqslant |V_1|$
但它不是哈密顿图。

满足定理15.6条件的图
不一定是哈密顿图

无向半哈密顿图的一个必要条件

推论 设无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$均有

$$p(G-V_1) \le |V_1|+1$$

证 设Γ是G中起于顶点u终于顶点v的哈密顿通路，

令$G'=G \cup (u,v)$　　//在G的顶点u, v之间加新边

易知G'为哈密顿图，

由定理15.6可知，$p(G'-V_1) \leqslant |V_1|$

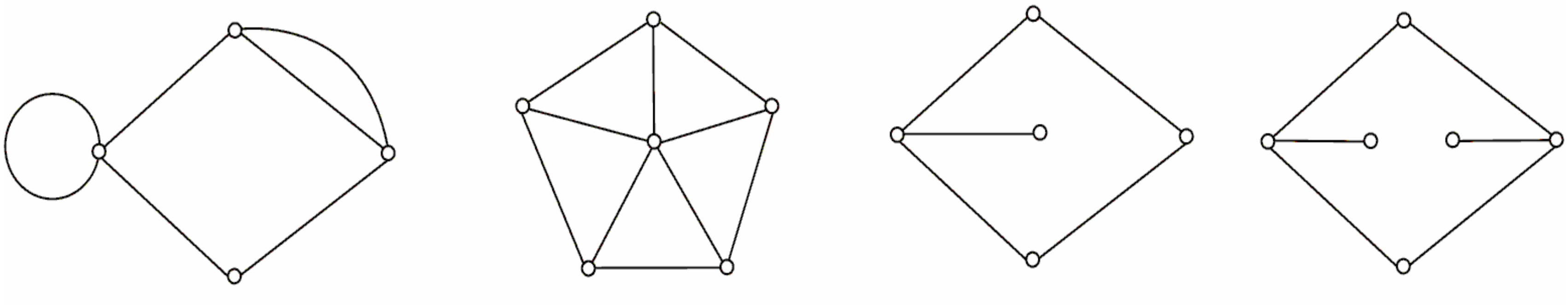
因此，$p(G-V_1) = p(G'-V_1-(u,v))$

$$\leqslant p(G'-V_1)+1$$

$$\leqslant |V_1|+1$$

实例

判断下面各图是否为哈密顿图或半哈密顿图?



(1) (2) (3) (4)

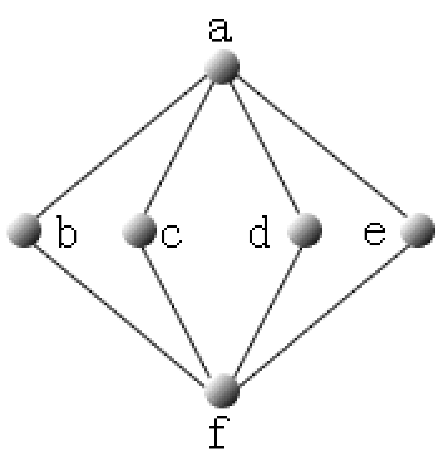
在上图中,

(1),(2) 是哈密顿图;

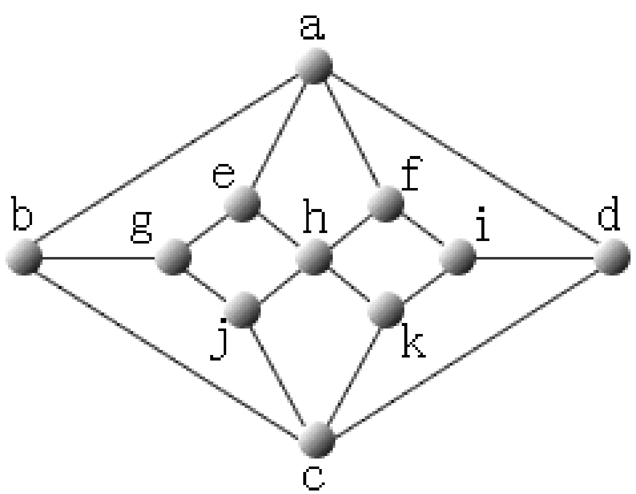
(3)是半哈密顿图;

(4)既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图，为什么?

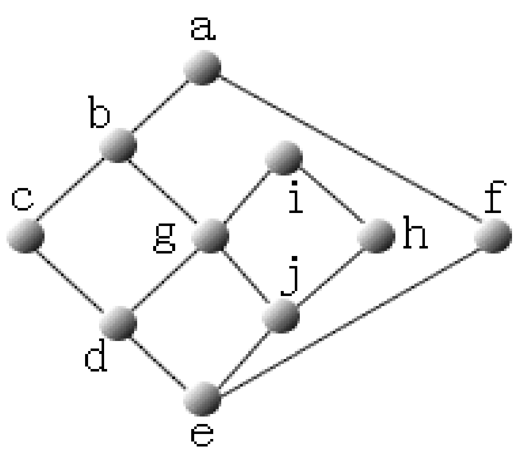
例 下图所示的3个图都是二部图，它们中的哪些是哈密顿图?哪些是半哈密顿图?为什么?



(1)



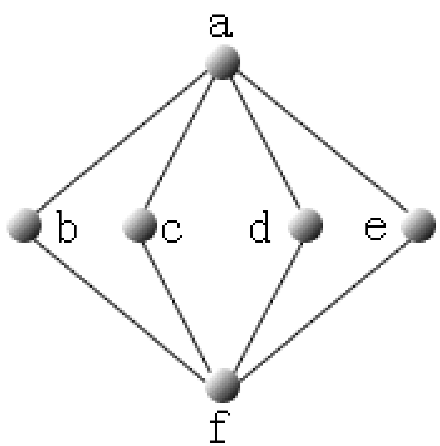
(2)



(3)

例（续）

例 下图所示的3个图都是二部图，它们中的哪些是哈密顿图?哪些是半哈密顿图?为什么?



(1)

解 在图1中,互补顶点子集

$V_1=\{a,f\},V_2=\{b,c,d,e\}$.

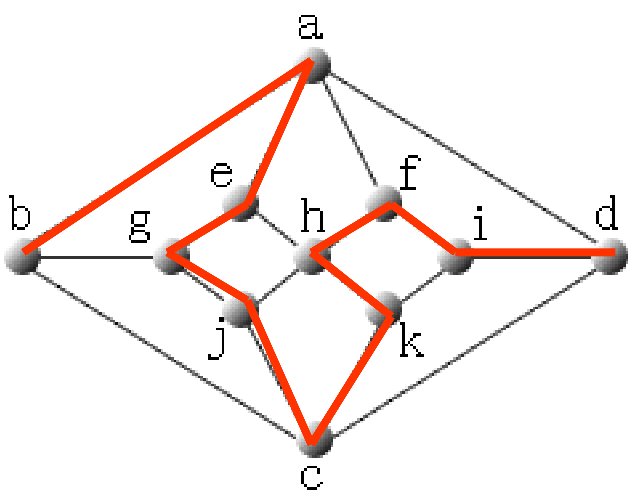
设此二部图为$G_1=<V_1,V_2,E>$.

$p(G_1-V_1)=|V_2|=4>|V_1|=2$.

由定理15.6及其推论可知,G_1不是哈密顿图,也不是半哈密顿图.

例（续）

例 下图所示的3个图都是二部图，它们中的哪些是哈密顿图?哪些是半哈密顿图?为什么?

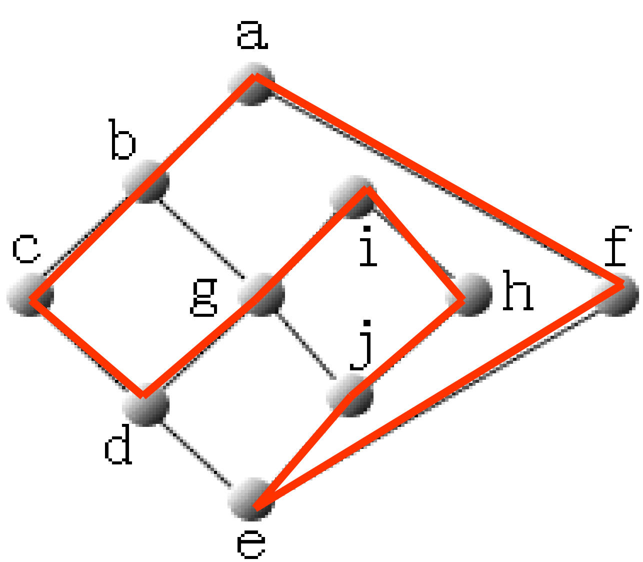


(2)

设图为G_2=<V_1,V_2,E>,其中
$V_1=\{a,g,h,i,c\}$,$V_2=\{b,e,f,j,k,d\}$.
$p(G_2-V_1)=|V_2|=6 > |V_1|=5$.
由定理15.6可知,G_2不是哈密顿图.
而*baegjckhfid*是条哈密顿通路,故G_2是半哈密顿图.

例（续）

例 下图所示的3个图都是二部图，它们中的哪些是哈密顿图?哪些是半哈密顿图?为什么?



(3)

在图中，*abcdgihjefa*是一条哈密顿回路，所以它是哈密顿图，设这个图为

$G_3=<V_1,V_2,E>$，其中

$V_1=\{a,c,g,h,e\}, V_2=\{b,i,f,d,j\}$.

此处有$|V_1|=|V_2|$

$p(G_3-V_1)=|V_2|=|V_1|$

关于上例的进一步说明

一般情况下，设二部图$G=<V_1,V_2,E>$，$|V_1|\le|V_2|$，且$|V_1|\ge 2$，$|V_2|\ge 2$，由定理15.6及其推论可以得出下面结论：

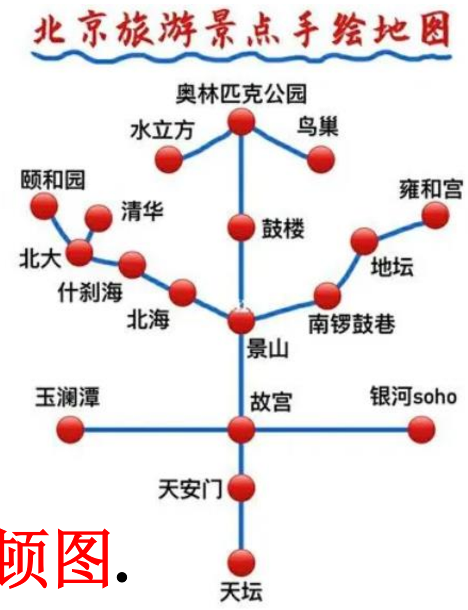
(1) 若G是哈密顿图，则 $|V_1|=|V_2|$

(2) 若G是半哈密顿图，则 $|V_2|=|V_1|+1$

(3) 若$|V_2|>|V_1|+1$，则G不是哈密顿图，也不是半哈密顿图

定理15.6 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|$$



例2 设G为n阶无向连通简单图，

若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图.

证 方法一：（利用定理15.6）

设v为割点，则 $p(G-v) \geq 2 > |\{v\}| = 1$

根据定理15.6，可得:有割点的图不是哈密顿图.

又，K_2有桥，它显然不是哈密顿图.

除K_2外，其他有桥的图（连通的）均有割点. 故得证.

方法二：反证法

如果图G是哈密顿图，则必存在哈密顿回路，即所有结点均在一个回路中，此时删除任意一个结点后的图仍是连通的，于是图G的任何点均不是割点，产生矛盾，即:有割点的图不是哈密顿图.

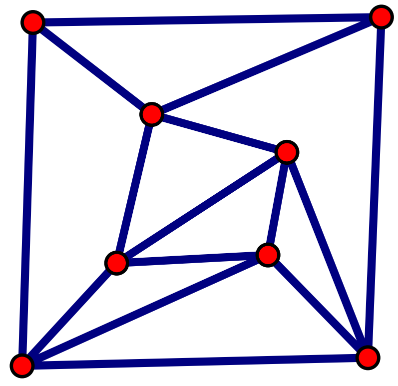
....

无向半哈密顿图的一个充分条件

定理15.7 设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则G 中存在哈密顿通路.



证明线索：

(1) 由$(*)$证G连通

(2) $\Gamma = v_1v_2\ldots v_l$ 为G中极大路径. 若$l = n$, 证毕.

(3) 否则，证G 中存在过Γ上所有顶点的圈C，由(1) 知C外存在与C上某顶点相邻顶点，从而得比Γ更长的路径，重复(2) –(3)，最后得G中哈密顿通路.

无向哈密顿图的一个充分条件

推论 设G为n ($n\geq 3$) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j)\geq n \qquad (**)$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

证明线索：

由定理15.7得$\Gamma = v_1v_2\ldots v_n$为$G$中哈密顿通路.

若$(v_1,v_n)\in E(G)$，得证.

否则利用（**）证明存在过$v_1, v_2,\ldots, v_n$的圈(哈密顿回路).

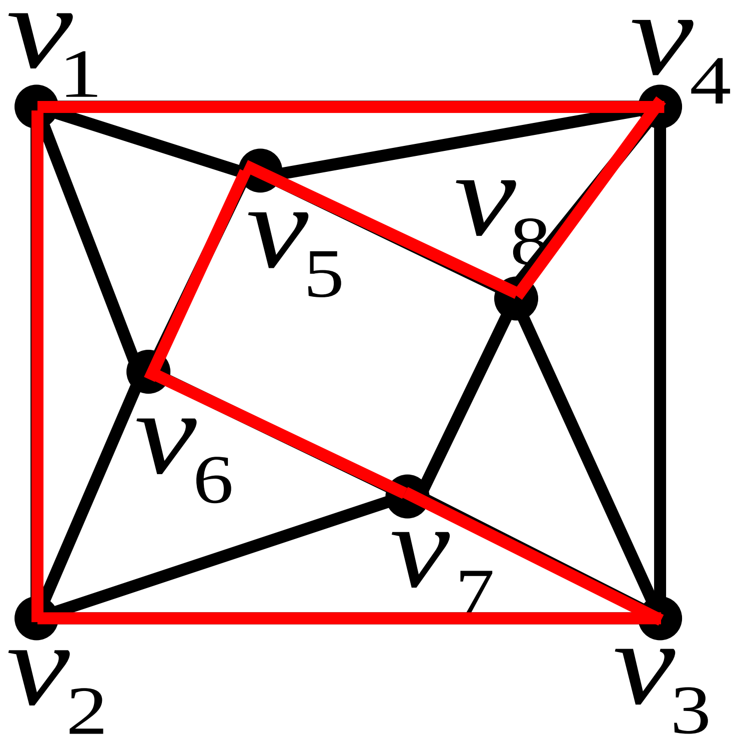
定理15.7 设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j)\geq n-1 \qquad (*)$$

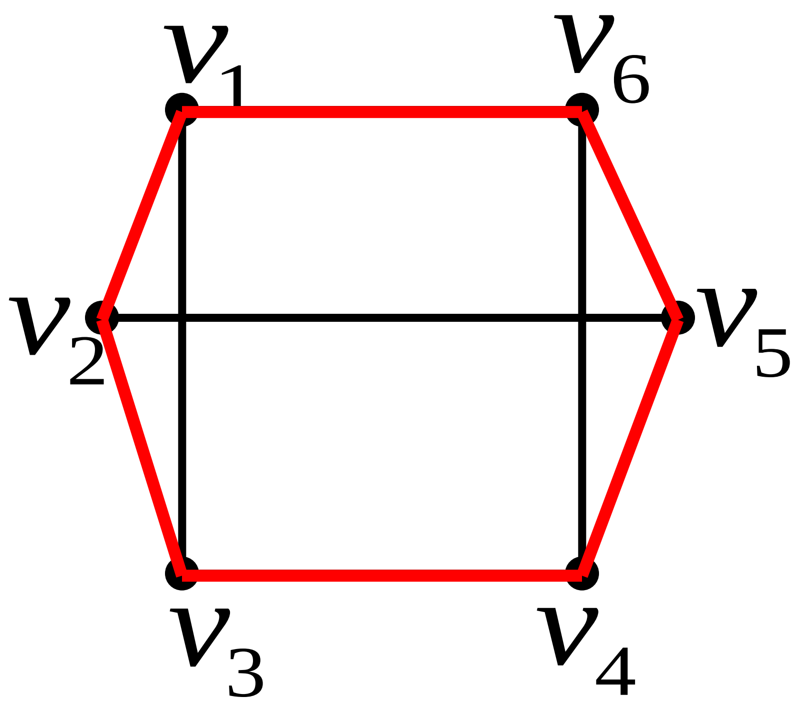
则G中存在哈密顿通路.

练习

请问以下两图是否为哈密顿图?



G



G'

定理15.7 设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则G中存在哈密顿通路.

1.定理15.7是半哈密顿图的充分条件，但不是必要条件.

- 长度为$n-1$（$n\geq4$）的路径构成的图不满足 $d(v_i)+d(v_j) \geq n-1$ 条件，但它显然是半哈密顿图.

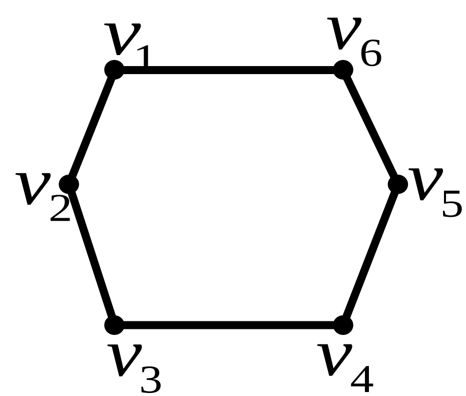
推论 设G为n ($n\geq3$) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad (**)$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

2. 定理15.7的推论同样不是哈密顿图的必要条件.

- G为长为n的圈，不满足 $d(v_i)+d(v_j) \geq n$ 条件，但它当然是哈密顿图



判断某图是否为哈密顿图方法

判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题.

总结判断某图是哈密顿图或不是哈密顿图的某些可行的方法.

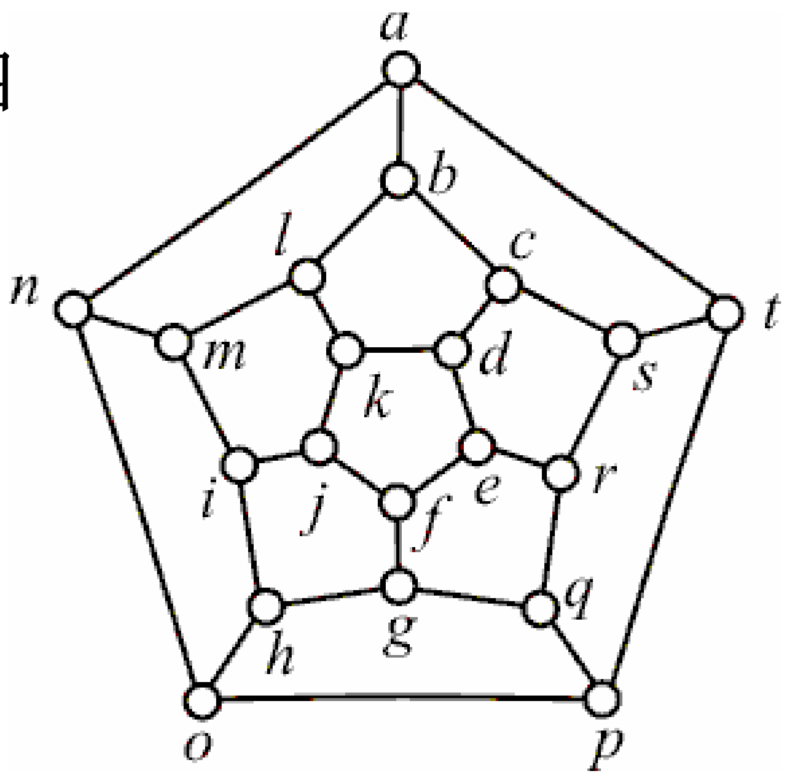
1. 观察出哈密顿回路.

例3 右图(周游世界问题)是哈密顿图

易知

a b c d e f g h i j k l m n p q r s t a

为图中的一条哈密顿回路.



注意，此图不满足

定理15.7的推论的条件.

推论 设G为n ($n\geq 3$) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad (**)$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

判断某图是否

推论 设G为n ($n\geq 3$) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j)\geq n \qquad (**)$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

2．满足定理15.7推论的条件（**）.

例4 完全图K_n ($n\geq 3$) 中任何两个顶点u,v，均有

$$d(u)+d(v) = 2(n-1)\geq n\ (n\geq 3),$$

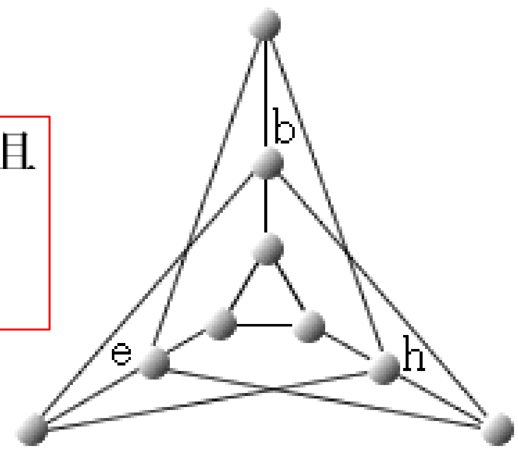
所以K_n为哈密顿图.

3．破坏定理15.6的条件的图不是哈密顿图.

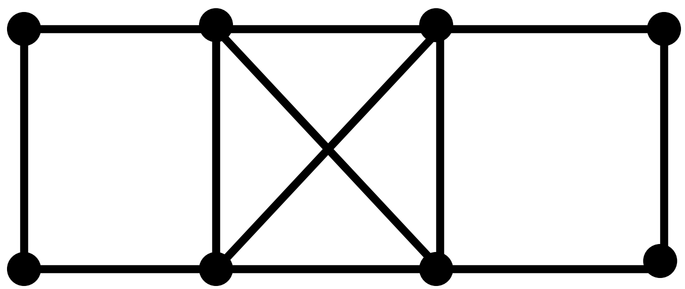
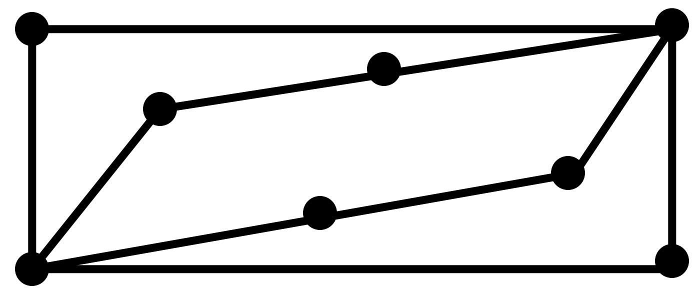
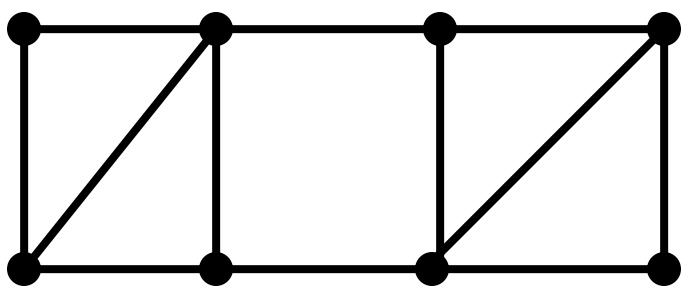
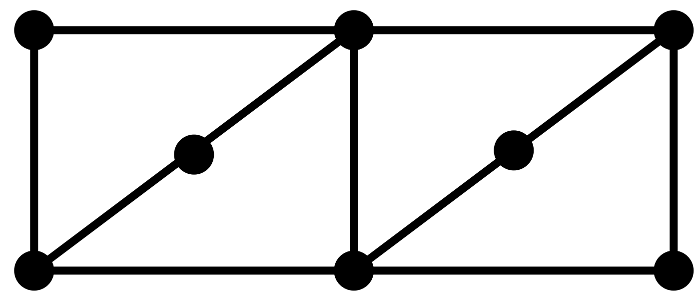
例5 取$V_1=\{b, e, h\}$，从图中删除V_1得4个连通分支，由定理15.6可知，它不是哈密顿图

定理15.6 设无向图$G=\langle V,E\rangle$是哈密顿图，对于任意$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$，均有

$$p(G-V_1)\leq |V_1|$$



判断下列图哪些是 *E* 图、*H*图？

	H	非H
E		
非E		

应用实例1

例：某地有5个景点，若每个景点均有两条道路与其它景点(不同)相通，问是否可经过每个景点恰好一次游完这5个景点？

解：设5个景点分别为$v_1,v_2,\ldots,v_5$，作无向简单图$G=<V,E>$，

其中$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_5\}$，$\forall v_i,v_j\in V$，且$i\neq j$，

若v_i与v_j之间有道路相通，就在v_i,v_j之间连无向边(v_i,v_j)，

由此组成边集合E，则G为5阶无向简单图，

$\forall v_i\in V$，$d(v_i)$为与v_i有道路相通的景点数。

由已知条件可知，$\forall v_i,v_j\in V$且$i\neq j$，均有$d(v_i)+d(v_j)=4$。

故：$d(v_i)+d(v_j)\geq 5-1$

由定理15.7可知，G中存在哈密顿通路，本题有解。

应用实例2

例： 在某次国际会议的预备会议中，共有8人参加，他们来自不同的国家。已知他们中任何两个无共同语言的人中的每一个与其余有共同语言的人数之和大于或等于8，问能否将这8个人排在圆桌旁，使其任何人都能与两边的人交谈。

解： 设8个人分别为$v_1,v_2,\ldots,v_8$，作无向简单图$G=<V,E>$，

其中$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_8\}$，$\forall v_i,v_j\in V$，且$i\neq j$，

若v_i与v_j有共同语言，就在v_i,v_j之间连无向边(v_i,v_j)，

由此组成边集合E，则G为8阶无向简单图，

$\forall v_i\in V$，$d(v_i)$为与v_i有共同语言的人数。

由已知条件可知，$\forall v_i,v_j\in V(i\neq j)$且$(v_i,v_j)\notin E$，

均有$d(v_i)+d(v_j)\geq 8$

由定理15.7的推论可知，G中存在哈密顿回路，

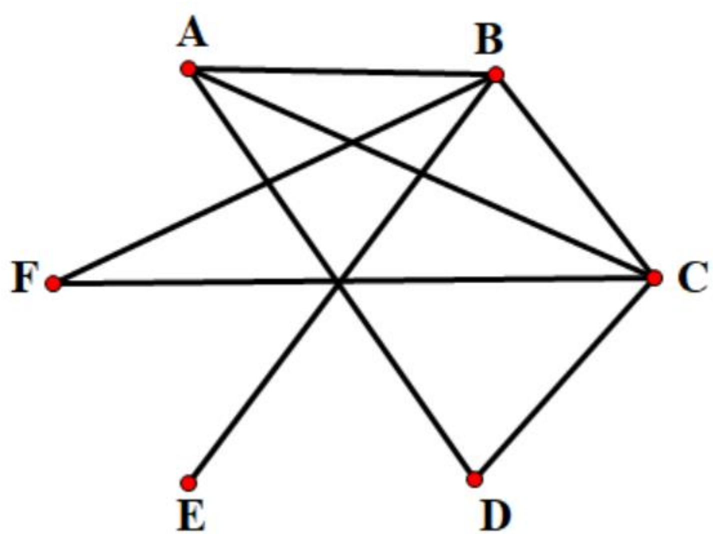
按照一条哈密顿回路的顺序安排座次即可。

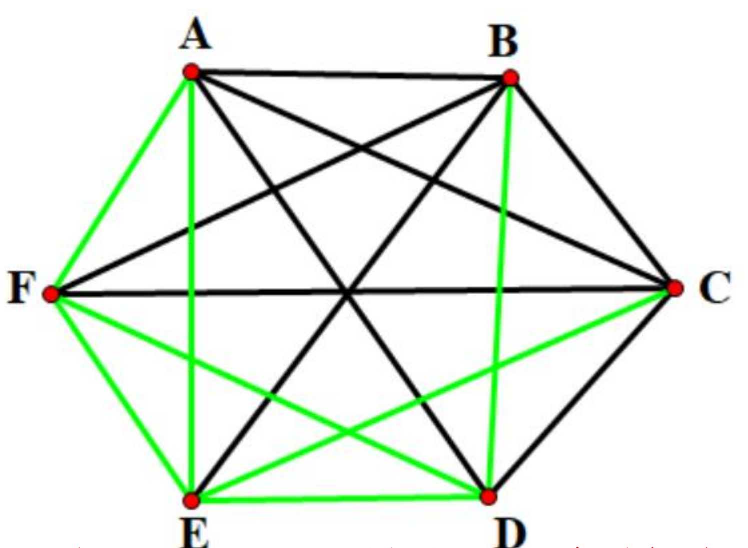
哈密顿图是能将图中所有顶点都能安排在某个圈上的图

应用实例3

例：一个班级的学生共计选修A、B、C、D、E、F六门课程，其中一部分人同时选修D、C、A，一部分人同时选修B、C、F，一部分人同时选修B、E，还有一部分人同时选修A、B，期终考试要求每天考一门课，六天内考完，为了减轻学生负担，要求每人都不会连续参加考试，试设计一个考试日程表。

解：以每门课程为一个顶点，共同被选修的课程之间用边相连，来构造一个图（左图），按题意，相邻顶点对应课程不能连续考试，不相邻顶点对应课程允许连续考试，因此，作左图的补图（绿色），问题是在补图中寻找一条哈密顿通路。





如CEAFDB，就是一个符合要求的考试日程表

定理15.8 &定理15.9

定理15.8 设u,v为n阶无向简单图G中两个不相邻的顶点，且 $d(u)+d(v) \geq n$，则G为哈密顿图当且仅当 $G\cup(u,v)$ 为哈密顿图.（ (u,v) 是加的新边 ）

定理15.9 若D为n（$n\geq2$）阶竞赛图，则D中具有哈密顿通路.

15.2 哈密顿图（回顾）

- 15.2 哈密顿图
  - 哈密顿图H：具有哈密顿回路（每点1且仅1）
  - 半哈密顿图：具有哈密顿通路且无哈密顿回路
  - 判别方法
    - 必要条件
      - 无向H：$p(G-V_1) \le |V_1|$
      - 无向半H：$p(G-V_1) \le |V_1|+1$
        - 破坏了此条件则不是
    - 充分条件
      - 无向半H：$d(v_i)+d(v_j) \ge n-1$
      - 无向H：$d(v_i)+d(v_j) \ge n$
        - 不满足此条件也可以是
    - 若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图
    - 二部图 $|V_1| \le |V_2|$
      - 哈密顿：则 $|V_1|=|V_2|$
      - 半哈密顿：则 $|V_2|=|V_1|+1$
      - 两者都不是：若 $|V_2|>|V_1|+1$

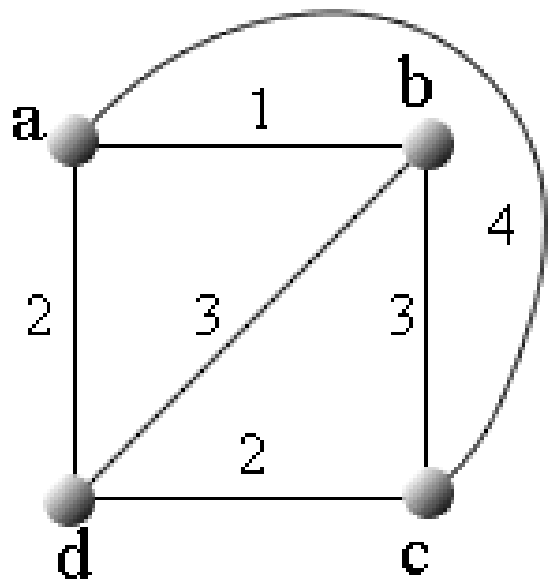
第十五章 欧拉图与哈密顿图

主要内容

- 15.1 欧拉图
- 15.2 哈密顿图
- ~~15.3 最短路问题与货郎担问题~~

15.3 最短路问题与货郎担问题

定义15.3 给定图$G = \langle V,E \rangle$，(G为无向图或有向图)，设$W:E \to \mathrm{R}$ (R为实数集)，对G中任意边$e = (v_i,v_j)$ (G为有向图时，$e = \langle v_i,v_j \rangle$)，设$W(e) = w_{ij}$，称实数$w_{ij}$为边$e$上的**权**，并将$w_{ij}$标注在边$e$上，称$G$为**带权图**，此时常将带权图$G$记作$\langle V,E,W \rangle$.



最短路问题

- 设带权图$G = <V,E,W>$（无向图或有向图），其中每一条边e的权$W(e)$为非负实数。$\forall u,v \in V$，当u和v连通时（即u可达v），称从u到v长度最短的路径为从u到v的**最短路径**，称其长度为从u到v的**距离**，记作$d(u,v)$。
- 约定：

1. $d(u, u)=0$
2. 当u和v不连通时（即u不可达v），$d(u, v) = +\infty$

- 最短路问题：给定带权图$G = <V,E,W>$及顶点u和v，其中每一条边e的权$W(e)$为非负实数，求从u到v的最短路径。

最短路问题

- 如果“$uv_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_k}v$”是从$u$到$v$的最短路径，则对每一个$t$ $(1\le t\le k)$，“$uv_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_t}$”是从$u$到$v_{i_t}$的最短路径。

根据该性质，*E.W.Dijkstra*于1959年给出下述最短路径算法：

- 算法给出从给定的起点s到每一点的最短路径。在计算过程中，赋予每一个顶点v一个标号$l(v)=(l_1(v),l_2(v))$。标号分为永久标号和临时标号：
  - 在v的永久标号$l(v)$中，$l_1(v)$表示s到v的最短路径上v的前一个顶点，$l_2(v)$表示从s到v的距离（即从s到v的最短路径的长度）。
  - 当$l(v)$是临时标号时，$l_1(v)$ 表示当前从s经过永久标号的顶点到v的长度最短的路径上v的前一个顶点；$l_2(v)$表示当前从s经过永久标号的顶点到v的长度最短的路径的长度。

Dijkstra标号法

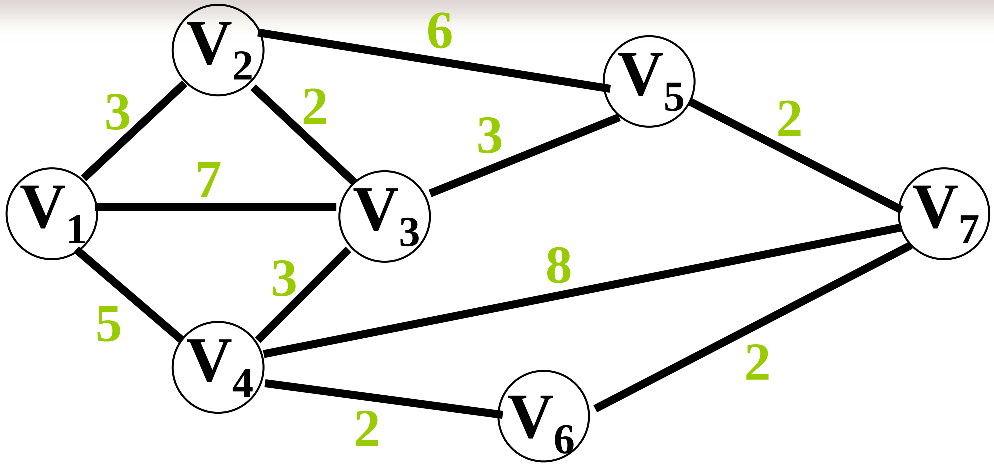
输入：带权图$G = <V,E,W>$和$s \in V$，其中$|V|=n$， $\forall e \in E$，$W(e) \geq 0$

输出：s到G中每一点的最短路径及距离

1. 令$l(s) \leftarrow (s,0)$， $l(v) \leftarrow (s,+\infty)$ $(v \in V - \{s\})$， $i \leftarrow 1$，
   $l(s)$是永久标号，其余标号均为临时标号，$u \leftarrow s$ ($l(u)$:永久标号)
2. for 与u关联的临时标号的顶点v ($l(v)$:临时标号)
3. if $l_2(u) + W(u,v) < l_2(v)$ then
   $l(v) \leftarrow (u, l_2(u) + W(u,v))$
4. 计算 $l_2(t) \leftarrow \min\{l_2(v) | v \in V$ 且有临时标号 $\}$，
   把$l(t)$改为永久标号
5. if $i<n$ then
   $u \leftarrow t, i \leftarrow i+1$, goto 2

- 计算结束时，对每一个顶点u，$d(s,u) = l_2(u)$，利用$l_1(v)$从u开始回溯找到s到u的最短路径。

例



	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
step1	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
step2	$\boxed{(v_1,3)}$	$(v_1,7)$	$(v_1,5)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
step3	$(v_1,3)$	$\boxed{(v_2,5)}$	$(v_1,5)$	$(v_2,9)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
step4	$(v_1,3)$	$(v_2,5)$	$\boxed{(v_1,5)}$	$(v_3,8)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
step5	$(v_1,3)$	$(v_2,5)$	$(v_1,5)$	$(v_3,8)$	$\boxed{(v_4,7)}$	$(v_4,13)$
step6	$(v_1,3)$	$(v_2,5)$	$(v_1,5)$	$\boxed{(v_3,8)}$	$(v_4,7)$	$(v_6,9)$
step7	$(v_1,3)$	$(v_2,5)$	$(v_1,5)$	$(v_3,8)$	$(v_4,7)$	$\boxed{(v_6,9)}$

货郎担问题

设$G=<V,E,W>$为一个n阶完全带权图K_n，各边的权非负，且有的边的权可能为∞. 求G中的一条最短的哈密顿回路，这就是货郎担问题的数学模型.

完全带权图K_n（$n\geq3$）中不同的哈密顿回路数

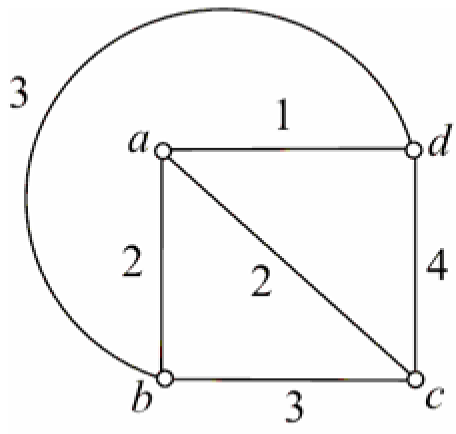
(1) K_n中有$(n-1)!$ 条不同的哈密顿回路（定义意义下）

(2) 完全带权图中有$(n-1)!$ 条不同的哈密顿回路

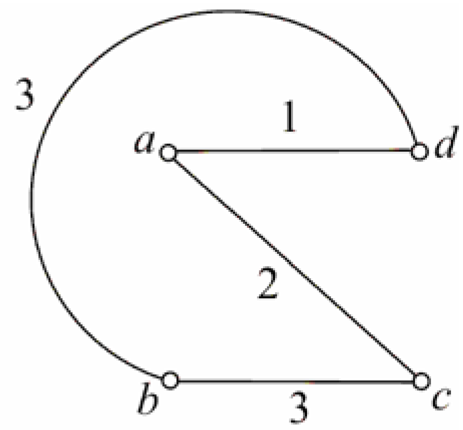
(3) 用穷举法解货郎担问题算法的复杂度为$(n-1)!$，当n较大时，计算量极大

至今还没有找到解决货郎担问题的有效算法！

例6 求图中(1) 所示带权图K_4中最短哈密顿回路.



(1)



(2)

解 $C_1= a\ b\ c\ d\ a$, $W(C_1)=10$

$C_2= a\ b\ d\ c\ a$, $W(C_2)=11$

$C_3= a\ c\ b\ d\ a$, $W(C_3)=9$

可见C_3 (见图中(2)) 是最短的，其权为9.

离散数学 15.3 最短路问题与货郎担问题（回顾）

- ~~15.3 最短路问题与货郎担问题~~
  - ~~最短路问题（Dijkstra算法）~~
  - ~~货郎担问题（最短哈密顿回路）~~

第十五章 欧拉图与哈密顿图（回顾）

- ch15欧拉图&哈密顿图
  - 15.1 欧拉图
    - 欧拉图E
      - 具有欧拉回路（每边1且仅1）
    - 半欧拉图
      - 具有欧拉通路而无欧拉回路
    - 判别方法
  - 15.2 哈密顿图
    - 哈密顿图H
      - 具有哈密顿回路（每点1且仅1）
    - 半哈密顿图
      - 具有哈密顿通路且无哈密顿回路
    - 判别方法
  - ~~15.3 最短路问题与货郎担问题~~
    - ~~最短路问题（Dijkstra算法）~~
    - ~~货郎担问题（最短哈密顿回路）~~