第三篇 $\boxed{\text{动态电路}}$的相量分析法

第 8 章 交流动态电路 相量法

第 9 章 正弦稳态功率和能量

第10章 频率响应 多频正弦稳态电路

第11章 耦合电感和理想变压器

× 第12章 拉普拉斯变换在电路分析中的应用

第10讲 8-1~8-7 相量，KL和VCR的相量形式，阻抗和导纳

§8-1 正弦激励的过渡过程和稳态

激励：直流激励，交流激励（典型：正弦激励）

例如：我国和大多数国家使用的民用电力即为频率50Hz的正弦交流电。

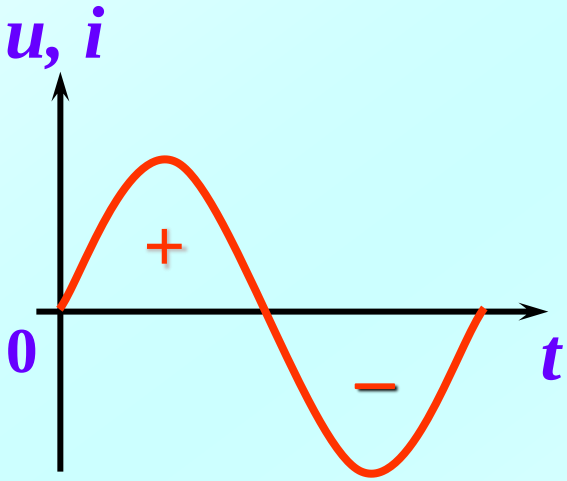
外部激励强制决定动态电路的稳态响应

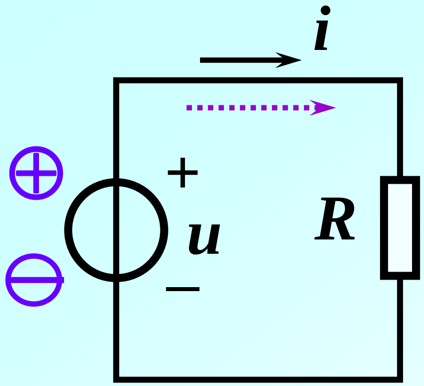
- **直流稳态：直流激励$U_S \rightarrow U_S$即为稳态解**
- **交流稳态：正弦激励 $u_S(t) = U_{Sm}\cos(\omega t + \psi)$**

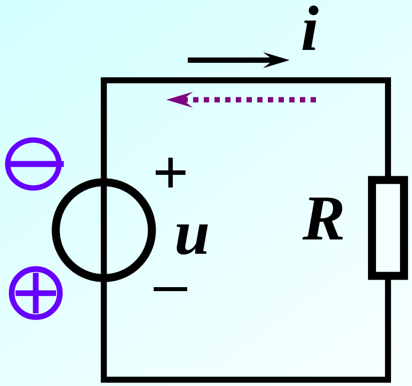
$\rightarrow$ 稳态解形式 $u_p(t) = U_p\cos(\omega t + \theta)$

正弦电压与电流

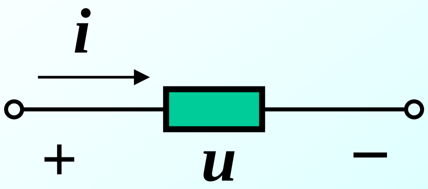
- 正弦电压和电流是按正弦规律周期性变化的。
- 电路图上所标的方向是指它们的参考方向，即代表正半周的方向。负半周时，由于电压（或电流）为负值，所以其实际方向与参考方向相反。





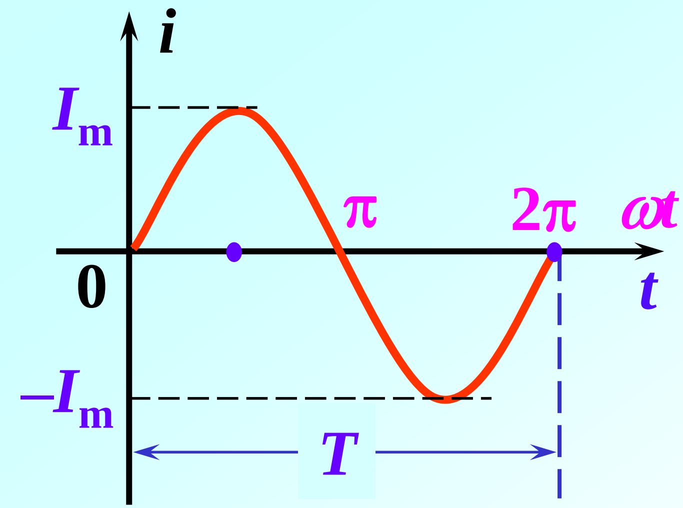


正弦量的三要素



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

1. 频率与周期



周期 T：正弦量变化一周所需要的时间；

频率 f：正弦量每秒内变化的次数；

$$f = \frac{1}{T}$$

交流电每交变一个周期便变化了2π弧度，即$\omega T = 2\pi$.

角频率 ω：$\omega = \dfrac{\mathrm{d}(\omega t + \psi)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$　　单位：rad/s

2. 幅值与有效值

$i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi)$

- 瞬时值是交流电任一时刻的值。用小写字母表示，如: i, u
- 最大值是交流电的幅值。用大写字母加下标m表示, 如: I_m, U_m
- 有效值是指与周期量热效应相同的直流电数值。用大写字母表示，如: I，U

定义: $\int_0^T i^2 R dt = I^2 RT$ 即 $I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$ 方均根值

当电流为正弦量时: $I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi)$$

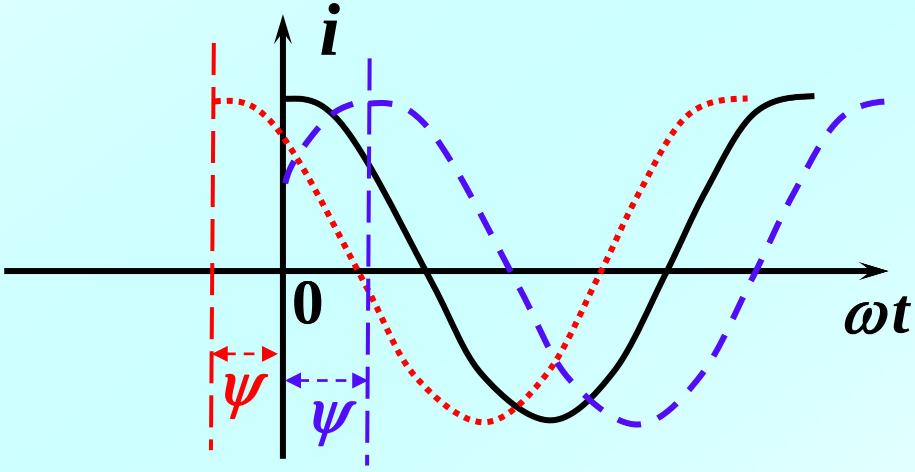
3. 初相位

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi)$$

- $(\omega t+\psi)$ 称为正弦量的**相位角**或**相位**。它反映出正弦量变化的进程。

- $t=0$ 时的相位角 ψ 称为**初相位角**或**初相位**。

  初相位角 $\in [-\pi, \pi)$



黑色波形： $\psi=0$

蓝色波形： $\psi<0$

红色波形： $\psi>0$

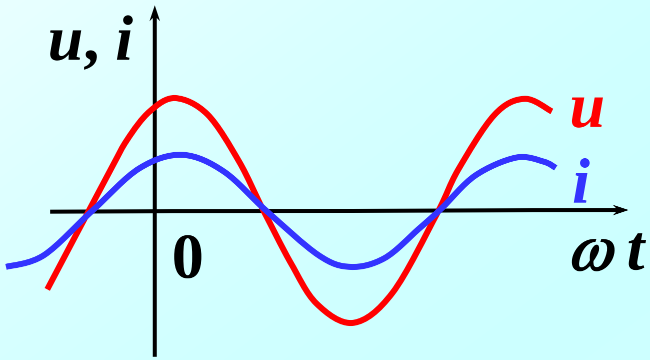
同频率正弦量的相位差 (*phase difference*)

设 $u(t) = U_m\cos(\omega t+\psi_u)$, $i(t) = I_m\cos(\omega t+\psi_i)$

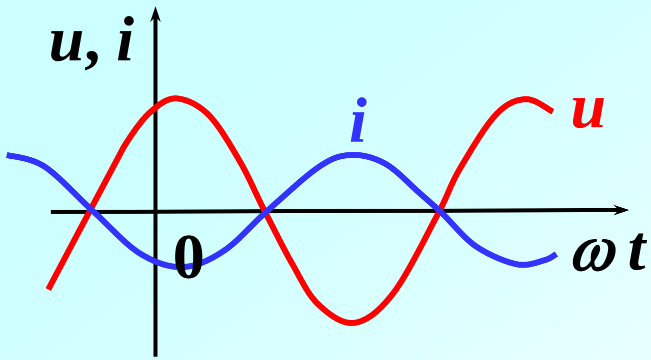
相位差 $\varphi = (\omega t+\psi_u) - (\omega t+\psi_i) = \psi_u - \psi_i$， $|\varphi| \leq \pi$

特殊相位关系

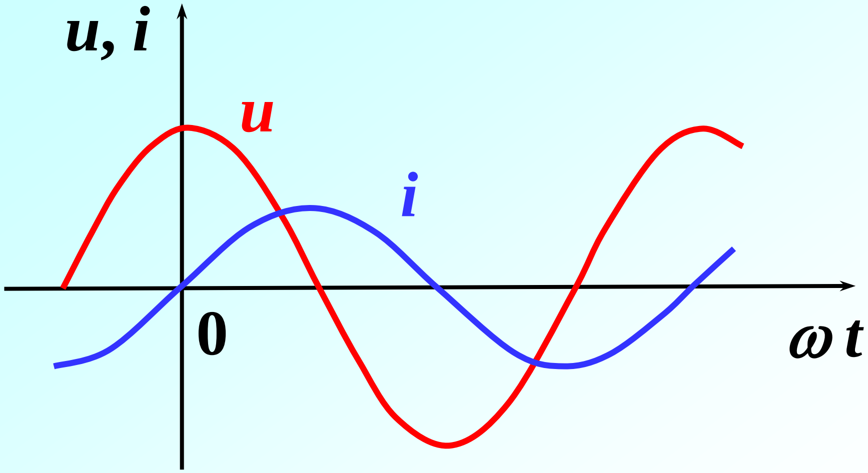
$\varphi = 0$， 同相



$\varphi = \pm\pi$ ($\pm 180^\circ$)， 反相

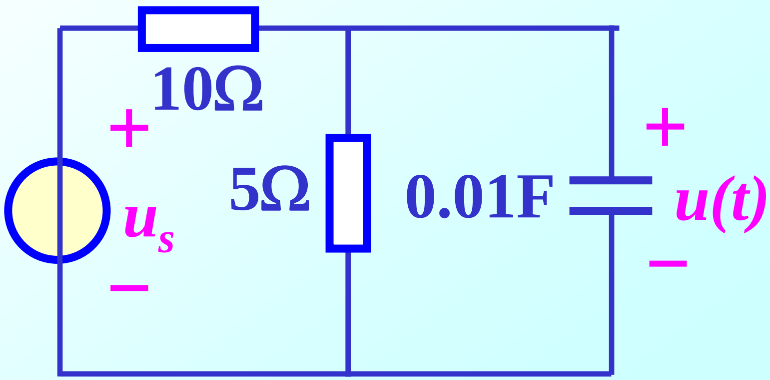


$\varphi = 90^\circ$， 正交



正弦激励下的一阶电路

如图所示电路，$u_s(t)=17\cos(16t)\,\mathrm{V}$于 t=0时接入电路，$u(0)$=0，求电容电压 $u(t)$，$t\geq 0$.



解： 列 $t\geq 0$ 时微分方程

$$u(t)+10\left[0.01\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{u(t)}{5}\right]=17\cos(16t)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+30u(t)=170\cos(16t)$$

解： $u(t)=\underbrace{Ke^{-t/\tau}}_{\text{瞬态响应 (齐次解)}}+\underbrace{A\cos(16t+B)}_{\text{稳态响应(特解)}}$

瞬态响应 (齐次解) 稳态响应(特解)

把特解代入微分方程得:

$$\left.\begin{aligned} &A=5,\ B=-28^{\circ}\\ &\tau=(5//10)0.01=\frac{1}{30}s\\ &u(0)=0\end{aligned}\right\}u(t)=-4.41e^{-t/\tau}+5\cos(16t-28^{\circ})$$

条件： $u(0)=0$，$u_s(t)=17\cos(16t)\,\mathrm{V}$

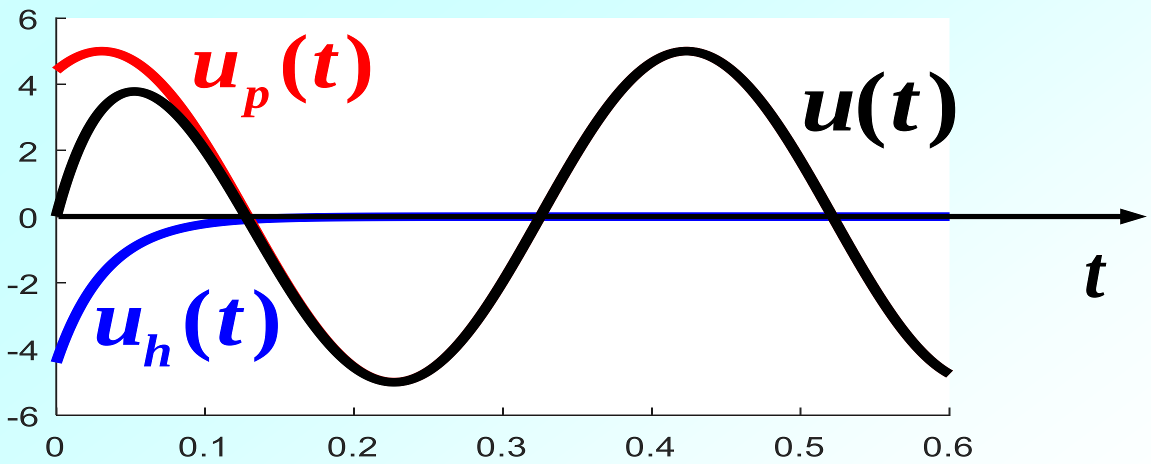
求得： $u(t)=\underbrace{-4.41\mathrm{e}^{-30t}}_{\text{瞬态响应 (齐次解)}}+\underbrace{5\cos(16t-28^\circ)}_{\text{稳态响应(特解)}}$

稳态响应 $u_p(t)=5\cos(16t-28^\circ) \Longrightarrow f(\infty)$

瞬态响应 $u_h(t)=\left[u(0)-u_p(0)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}=-4.41e^{-30t}\ \mathrm{V}$

$u(0) \to f(0_+)$

$u_p(0) \to f(\infty)\big|_{0_+}$



直流激励下一阶电路的三要素法

$$f(t)=f(\infty)+\left[f(0_+)-f(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

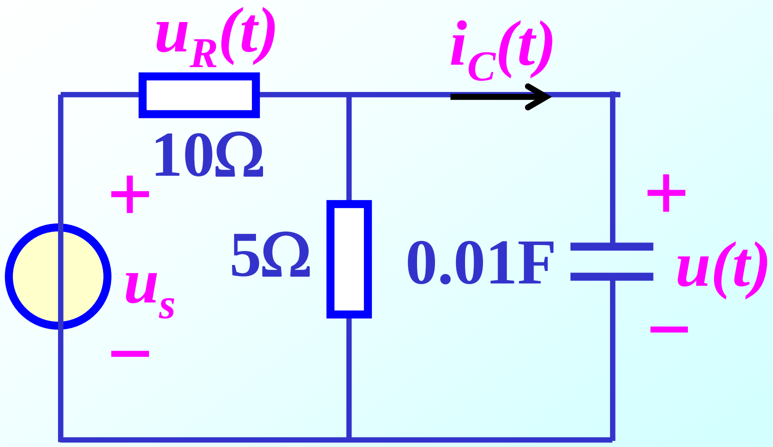
$f(\infty)$：直流稳态值

直流和正弦激励下一阶电路的三要素法

$$f(t)=f(\infty)+\left[f(0_+)-f(\infty)\big|_{0_+}\right]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$f(\infty)\big|_{0_+}$：正弦稳态响应初始值

如：$u(t)=u_p(t)+u_h(t)=\underbrace{5\cos(16t-28^\circ)}_{f(\infty)}+\big(\underset{\downarrow \atop f(0_+)}{0}-\underset{\downarrow \atop f(\infty)|_{0_+}}{4.41}\big)e^{-30t}\ \text{V}$



$u(t)$ 稳态响应为：

$$u_p(t) = 5\cos(16t - 28^{\circ})\,\mathrm{V}$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -0.05\times16\sin(16t - 28^{\circ}) = 0.8\cos(16t + 62^{\circ})$$

$$u_R(t) = 10\times\left[i_C(t) + \frac{u(t)}{5}\right] = 8\cos(16t + 62^{\circ}) + 10\cos(16t - 28^{\circ})$$

$$= 12.8\cos(16t + 15^{\circ})\,\mathrm{V}$$

所有支路电压电流的稳态响应均以相同频率变化!!

正弦交流电路是指含有正弦电源(激励)而且电路各部分所产生的电压和电流(稳态响应)均按同频正弦规律变化的电路。

正弦稳态问题

如前题：在正弦激励下，各稳态响应均以相同频率变化，不同的仅是幅值和初相位。

用什么可以同时表示幅值和相位？ **复数!!**

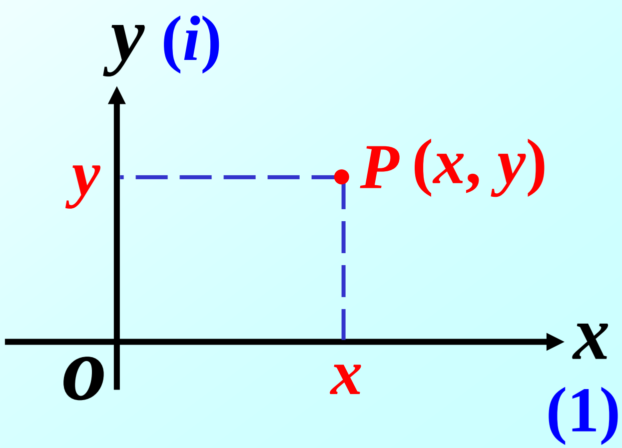
用什么可以同时表示幅值和初相？ **相量!!**

~~向量~~

一、复数的表示法

1. 点的表示法

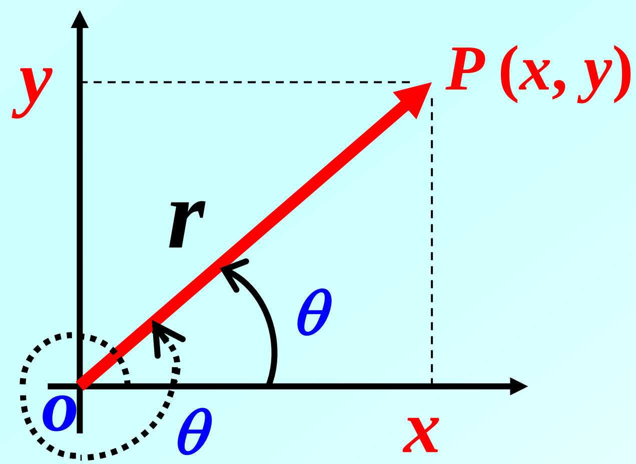
$z\ (x, y)$



复平面

2. 向量表示法

用从原点指向点P 的向量$\overrightarrow{OP}$表示.



模: $|z| = |\overrightarrow{OP}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

辐角: $z \neq 0$时, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, 无穷多个辐角

(Arg z)

$z = 0$时，辐角不确定。

辐角主值：$\theta_0 = \arg z \in (-\pi, \pi]$

二者关系：$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$，$k \in Z$

$$\theta_0 = \arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, & \text{I, IV象限, 正实轴} \\ \arctan\dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y \neq 0, & \text{II, III象限} \\ \pi, & x < 0, y = 0, & \text{负实轴} \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \neq 0, & \text{虚轴(去原点)} \end{cases}$$

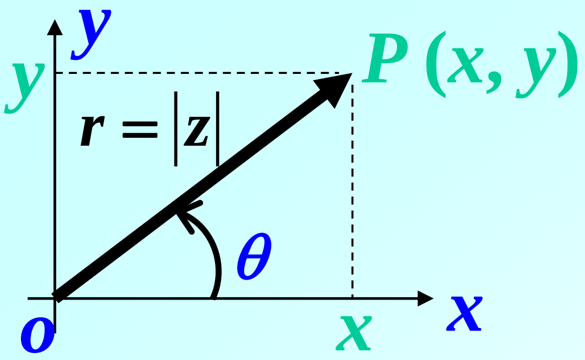
(其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$)

3. 代数表示式

$$z = x + iy$$

4. 三角表示式

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$



5. 极坐标表示式

$$z\ (\rho, \theta)$$

$$x = |z|\cos\theta,\quad y = |z|\sin\theta$$

6. 指数表示式

$$z = |z|e^{i\theta}$$

工程上，$z = |z|\angle\theta$

相量

欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$e^{\theta} = 1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots \Longrightarrow e^{i\theta} = 1 + i\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \qquad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \Longrightarrow i\sin\theta = i\frac{\theta}{1!} - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = |z|e^{i\theta} = |z|\angle\theta$$

复数表示法的相互转化

$$z=-1+i\sqrt{3}$$

$$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

z 位于第II象限，$\theta_0=\arctan\left(-\sqrt{3}\right)+\pi=\frac{2}{3}\pi$

$$z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

θ 一般取其主值 $\in\left(-\pi,\pi\right]$

$$z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z=2\angle\frac{2\pi}{3}$$

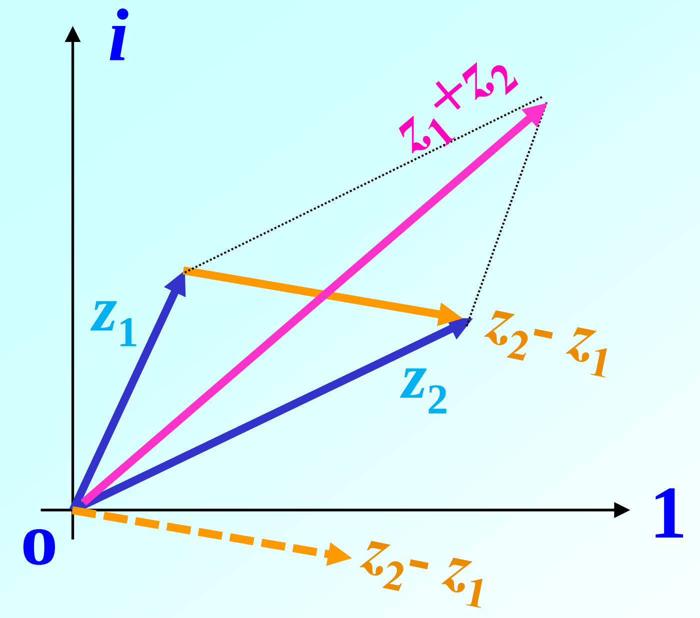
二、复数的运算

1. 加减运算

- 复数的加与减运算宜用代数式

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

复平面上加与减运算满足平行四边形法则。



加减法的几何意义

2. 乘除法运算

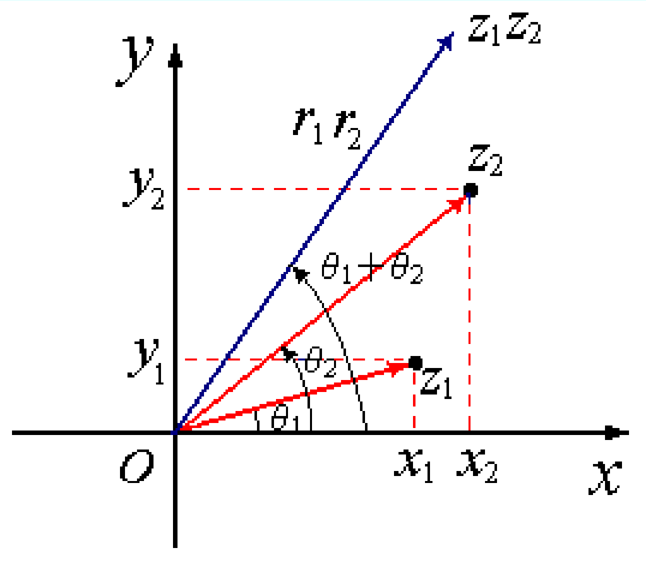
设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1} = r_1\angle\theta_1$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} = r_2\angle\theta_2$

则有

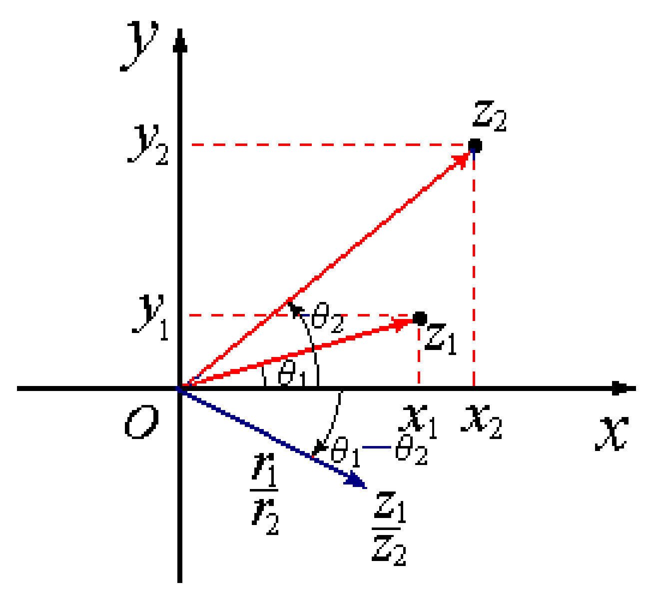
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1 r_2 \angle(\theta_1+\theta_2)$$



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1-\theta_2)$$



旋转因子

$$e^{i\psi} = \cos\psi + i\sin\psi = 1\angle\psi$$

$ze^{i\psi} \Longrightarrow z$ 逆时针旋转一个角度ψ，模不变

几个特殊旋转因子

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \angle\frac{\pi}{2}$$ 逆时针旋转90°

$$-i = e^{i(-\frac{\pi}{2})} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = \angle-\frac{\pi}{2}$$ 顺时针旋转90°

$$-1 = e^{i(\pm\pi)} = \cos(\pm\pi) + i\sin(\pm\pi) = \angle\pm\pi$$ 顺(逆)时针旋转180°

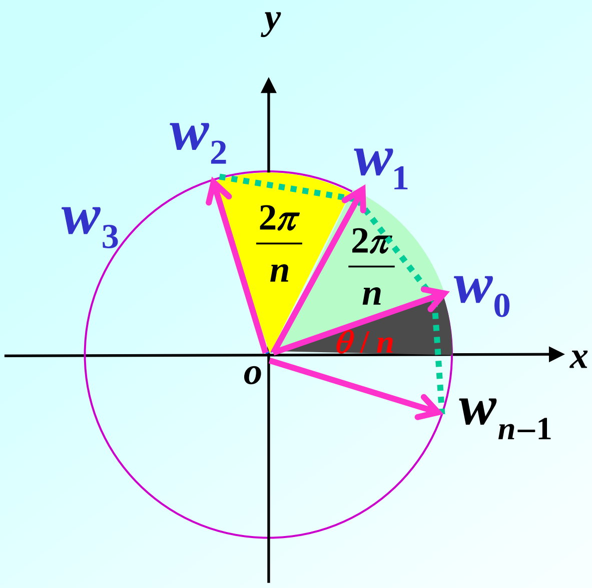
3. 乘幂方根运算

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

则 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

$$= \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}} \qquad k = 0,1,\cdots,n-1$$



方根的几何意义：

$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心，

$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

§8-4 相量

- 正弦电流 $i(t) = I_m\cos(\omega t+\psi)$

$$= \mathrm{Re}[I_m e^{j(\omega t+\psi)}]=\mathrm{Re}[I_m e^{j\psi} e^{j\omega t}]$$

- 在已知频率的情况下，定义包含振幅和初相的复数

振幅相量

$$\dot{I}_m= I_m e^{j\psi} = I_m\angle\psi = I_m\cos\psi + j\,I_m\sin\psi$$

简称为相量(phasor: phase vector), 即有相位的量。

有效值相量

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = I e^{j\psi} = I\angle\psi = I\cos\psi + jI\sin\psi$$

相量是正弦交流电的变换式，是一个复数，并非正弦交流电本身。正弦交流电是时间的函数，所以二者之间不能画等号。

例如 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ 的相量为

$$\dot{I}_m = I_m \angle \varphi = I_m e^{j\varphi} = I_m (\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

相量与正弦量之间关系可表示为：

$$\dot{I}_m \Longleftrightarrow i(t) \qquad \dot{I}_m \neq i(t)$$

$$i(t) = \mathrm{Re}(\dot{I}_m \angle \omega t)$$

相量图

在复平面上按照正弦量的大小和相位关系画出的若干个相量的图形。

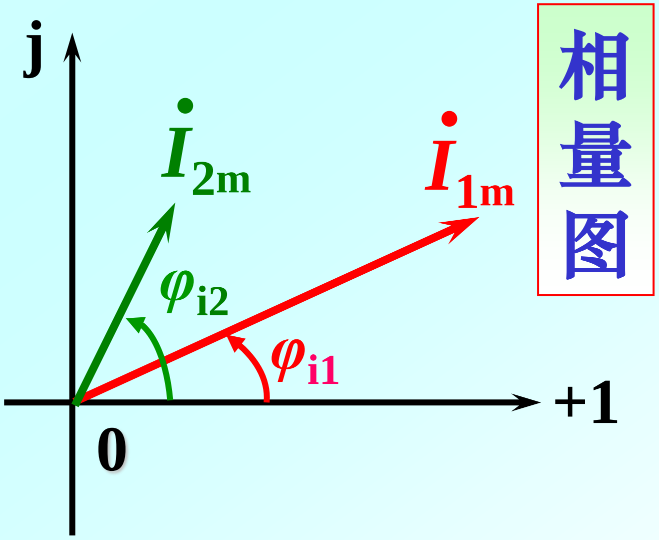
[例] 若 $i_1 = I_{1m}\cos(\omega t + \varphi_{i1})$

$i_2 = I_{2m}\cos(\omega t + \varphi_{i2})$，

已知：$\varphi_{i1} = 30^\circ$，$\varphi_{i2} = 65^\circ$，

$I_{1m} = 2I_{2m}$

试画出相量图。



注意

只有正弦量才能用相量表示；

只有同频率的正弦量才能画在同一相量图上。

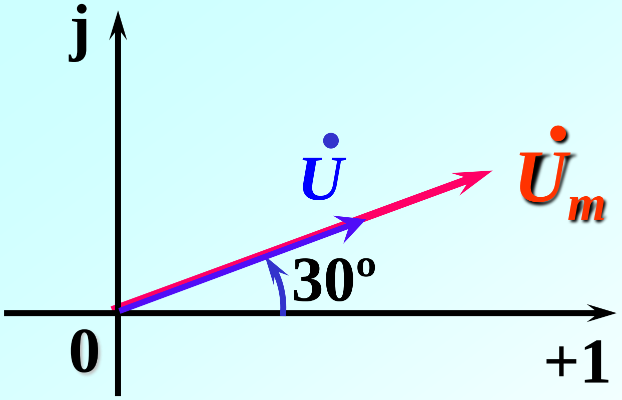
例：已知某正弦电压 $U_m = 311V$，$f = 50Hz$，$\psi_u = 30^o$，试写出此电压的瞬时值表达式、振幅相量和有效值相量，画出相量图，求出 $t = 0.01s$ 时电压的瞬时值。

解：瞬时值 $u = 311\cos(100\pi t + 30^o)\ V$

振幅相量 $\dot{U}_m = 311\angle 30^o\ V$

有效值 $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{311}{\sqrt{2}} = 220V$

有效值相量 $\dot{U} = 220\angle 30^o\ V$



电压的瞬时值

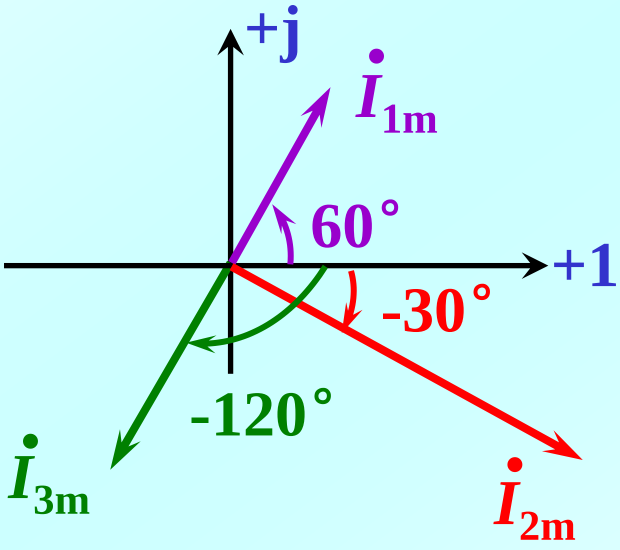
$$u(0.01) = 311\cos(100\pi \times 0.01 + 30^o) = -269.3V$$

例： $i_1(t)= 5\cos(314t + 60^\circ)\ \text{A}$

$i_2(t)= 10\sin(314t + 60^\circ)\ \text{A}$

$i_3(t)= -7\cos(314t + 60^\circ)\ \text{A}$

写出相量，绘相量图



解： $\dot{I}_{1m}=5\underline{/60^\circ}\ \text{A}$

$i_2(t) = 10\sin(314t+60^\circ) = 10\cos(314t-30^\circ)$

$\dot{I}_{2m}=10\underline{/-30^\circ}\ \text{A}$

$i_3(t) = -7\cos(314t+ 60^\circ)$

$= 7\cos(314t-120^\circ)\ \text{A}$

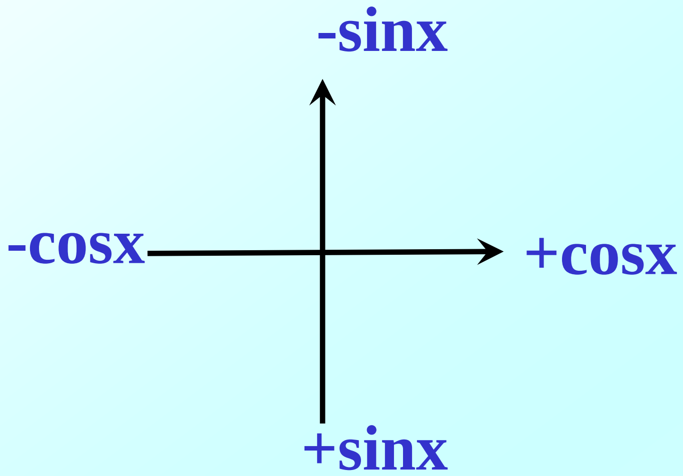
$\dot{I}_{3m}=7\underline{/-120^\circ}\ \text{A}$

$\sin x=\cos(x-90^\circ)$

$-\cos x=\cos(x+180^\circ)$

$=\cos(x-180^\circ)$

$-\sin x=\cos(x+90^\circ)$



$$\sin x = \cos(x - 90^\circ)$$
$$-\cos x = \cos(x + 180^\circ)$$
$$= \cos(x - 180^\circ)$$
$$-\sin x = \cos(x + 90^\circ)$$

§8-5 相量的线性性质和基尔霍夫定律的相量形式

1. 相量的线性性质

同频率正弦量实系数线性组合的相量等于各个正弦量对应的相量的同一线性组合。

正弦量 $\longleftrightarrow$ 相量

$$i(t) = k_1 i_1(t) + k_2 i_2(t) \longleftrightarrow \dot{I}_{\mathrm{m}} = k_1 \dot{I}_{\mathrm{m1}} + k_2 \dot{I}_{\mathrm{m2}}$$

k_1, k_2为实数

[例] 若已知 $i_1=100\cos(\omega t+45°)$ A，$i_2=60\cos(\omega t-30°)$ A，试求 $i=i_1+i_2$。

[解] 正弦电量的运算可按下面的方法进行

i_1 ， i_2 $\xrightarrow{\text{变换成相量}}$ $\dot{I}_{1m}$ ， $\dot{I}_{2m}$ 在相量域计算

三角方法

$$\dot{I}_m=\dot{I}_{1m}+\dot{I}_{2m}=100\angle 45^\circ+60\angle -30^\circ$$
$$=(70.7+j70.7)+(52-j30)=122.7+j40.7$$
$$=129\angle 18.35^\circ$$

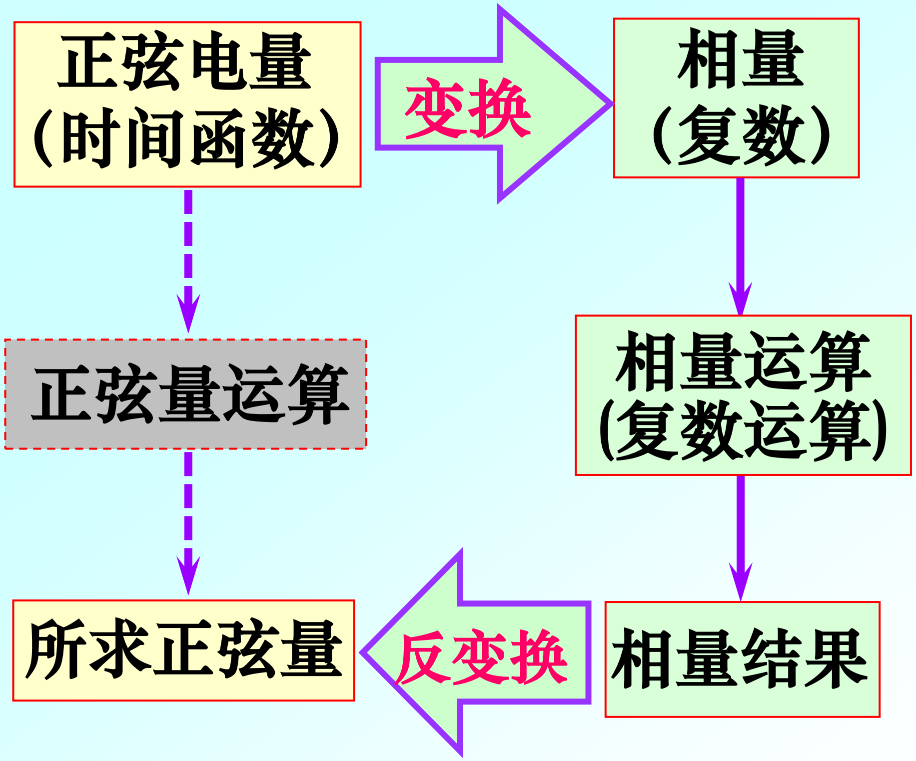
反变换成正弦量

$\therefore\ i=129\cos(\omega t+18.35°)$ A

变换方法（§ 8-2）

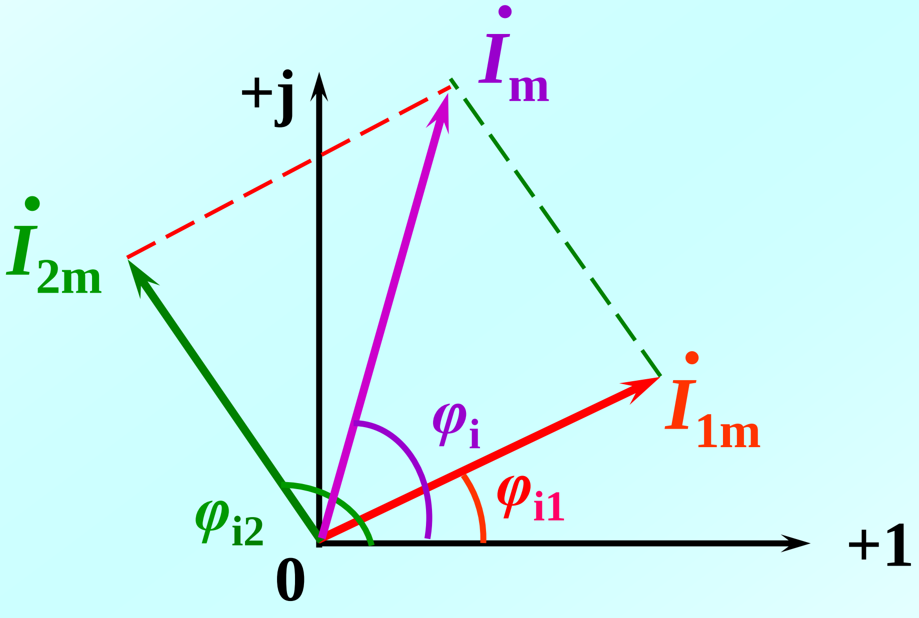
原域的难题→变换到变换域→在变换域中容易求解→将结果反变换回原域

相量法是一种用来表示和计算同频率正弦量的数学工具。在相量域中可以使正弦量的计算变得很简单。



相量图解法

例 若已知 $i_1 = I_{1m}\cos(\omega t + \varphi_{i1})$、 $i_2 = I_{2m}\cos(\omega t + \varphi_{i2})$，用相量图求解 $i = i_1 + i_2$。



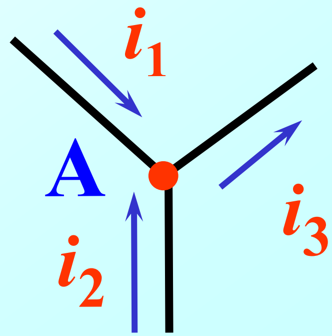
$$i = I_m\cos(\omega t + \varphi_i)$$

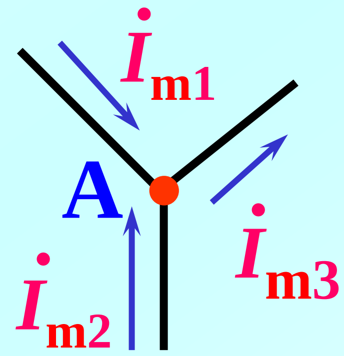
2. 基尔霍夫定律的相量形式

$$i_1 = I_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$i_2 = I_{2m}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$i_3 = I_{3m}\cos(\omega t + \varphi_3)$$





由KCL，结点A电流的时域表达式为

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

结点A电流的相量表达式为

$$\dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} - \dot{I}_{m3} = \dot{0} = 0$$

KCL的相量形式	$\sum \dot{I}_m = 0$	KVL的相量形式	$\sum \dot{U}_m = 0$

§8-6 三种基本电路元件VCR的相量形式

1 正弦稳态电路中的电阻元件

设 $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ ⟺ $\dot{I}_m = I_m \angle \varphi$

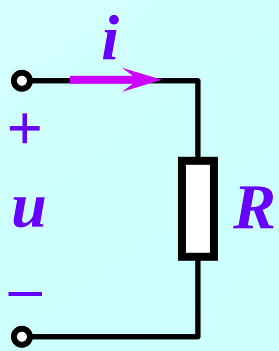
则 $u(t) = Ri(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ ⟺ $\dot{U}_m = U_m \angle \varphi$

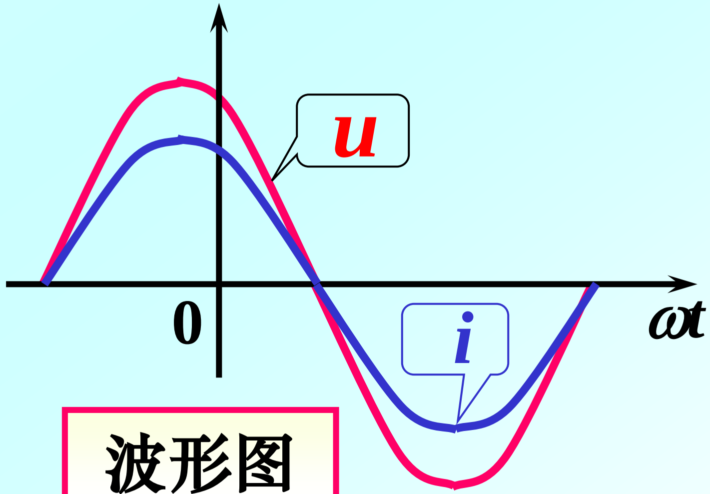
♦电压与电流同频率、同相位，

大小关系 $U_m = R\, I_m$

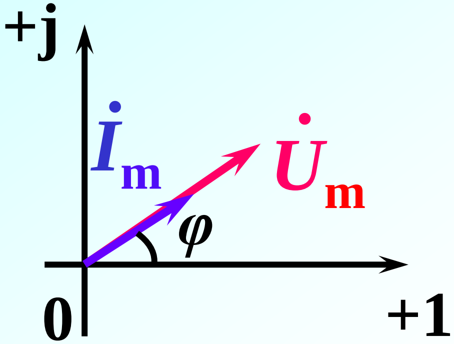
♦电压与电流相量关系

$$\dot{U}_m = R\dot{I}_m$$





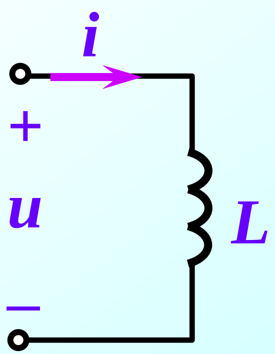
波形图



相量图

2 正弦稳态电路中的电感元件

时域

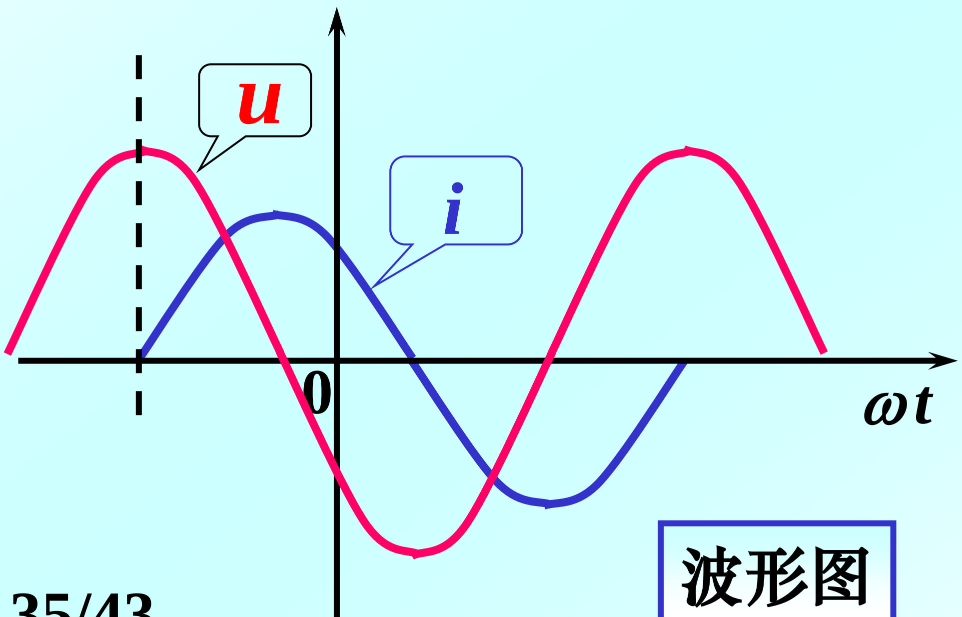


设 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi)$，则

$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}\left[I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)\right]}{\mathrm{d}t}=-LI_m\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

$$=\omega LI_m\cos(\omega t+\varphi+90^{\circ})=U_m\cos(\omega t+\varphi+90^{\circ})$$

其中 $U_m=\omega LI_m$



波形图

- ♦ u和 i 的频率相同
- ♦ u 在相位上比 i 超前 90°
- ♦ u 和 i 的最大值和有效值间关系为：

$$U_{\mathrm{m}}=\underline{\omega L}I_{\mathrm{m}}$$

$$U=\underline{\omega L}I$$

相量域

$$i = I_m\cos(\omega t+\varphi) \Longleftrightarrow \dot{I}_m = I_m\angle\varphi$$

$$u = \omega L I_m\cos(\omega t+\varphi+90°) \Longleftrightarrow \dot{U}_m = \omega L I_m\angle(\varphi+90^\circ)$$

电压与电流相量表达式

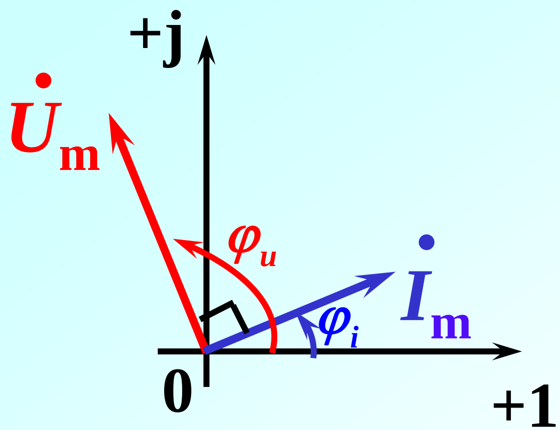
$$= \underline{\omega L I_m\angle\varphi}\cdot\underline{\angle 90^\circ}$$

$$= \underline{\mathrm{j}}\,\omega L\underline{\dot{I}_m}$$

$$\boxed{\dot{U}_m = \underline{\mathrm{j}\,\omega L}\,\dot{I}_m}$$

$$\dot{U}_m = U_m\angle\varphi_u,\qquad \dot{I}_m = I_m\angle\varphi_i$$

$$\begin{cases} U_m = \omega L I_m \\ \varphi_u = \varphi_i + 90^\circ \end{cases}$$



相量图

感抗 $X_L = \omega L = 2\pi f L$　单位：Ω

感抗与频率f和L成正比。高频高抗，低频低抗，直流短路。

例：已知：L=0.1H，$u=10\sqrt{2}\cos(\omega t+30^\circ)$ V，

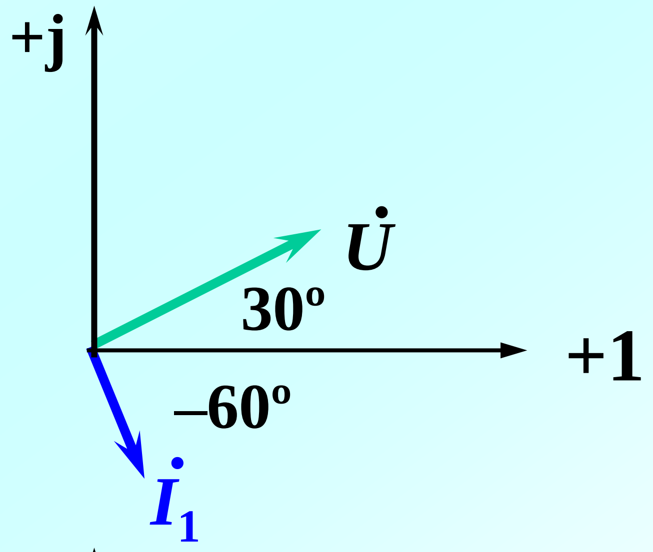
当f_1= 50Hz，f_2 = 5000Hz时，求X_L及$\dot{I}$，

并画出$\dot{U}$、$\dot{I}$的相量图。

解：$X_{L1}=\omega L=2\pi f_1 L=31.4\ \Omega$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}}{jX_{L1}}=\frac{10\angle 30^\circ}{j31.4}$$

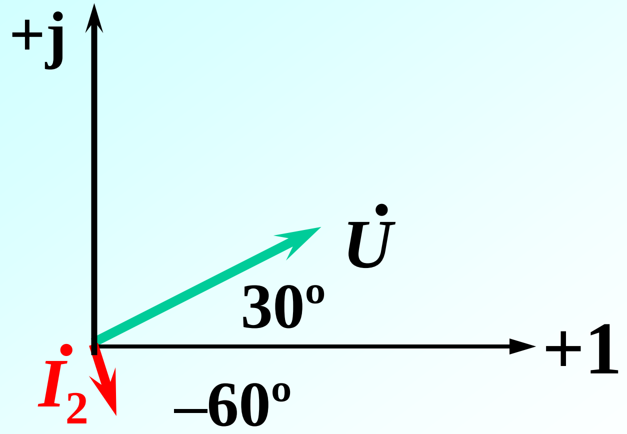
$$=0.318\angle-60^\circ\text{A}$$



$X_{L2}=2\pi f_2 L=3140\ \Omega$

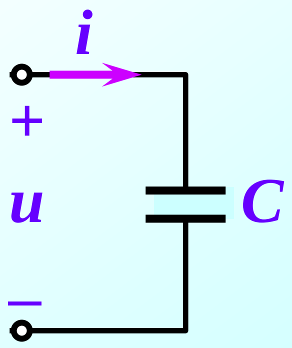
$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}}{jX_{L2}}=\frac{10\angle 30^\circ}{j3140}$$

$$=0.00318\angle-60^\circ\text{A}$$



3 正弦稳态电路中的电容元件

时域



设 $u=U_m\cos(\omega t+\varphi)$，

则 $i=C\dfrac{du}{dt}=-C\omega U_m\sin(\omega t+\varphi)$

$=\underline{\omega C U_m}\cos(\omega t+\varphi+90^\circ)$

$=\underline{I_m}\cos(\omega t+\varphi+90^\circ)$

- ♦ u 和 i 的频率相同；
- ♦ i 在相位上超前于 u 90°；
- ♦ u 和 i 的最大值之间的关系为：$U_m=\boxed{\dfrac{1}{\omega C}}I_m$

相量域

$$u=U_m\cos(\omega t+\varphi) \Leftrightarrow \dot{U}_m = U_m\angle\varphi$$

$$i= C\omega U_m \cos(\omega t+\varphi+90^\circ) \Leftrightarrow \dot{I}_m = \omega C U_m\angle(\varphi+90^\circ)$$

$$= \omega C U_m\angle\varphi\cdot\angle 90^\circ$$

$$= j\omega C\dot{U}_m$$

电压与电流相量表达式

$$\dot{I}_m = \underline{j\,\omega\, C}\,\dot{U}_m$$

$$\boxed{\dot{U}_m = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_m}$$

$$\begin{cases} U_m = \dfrac{I_m}{\omega C} \\ \varphi_u = \varphi_i - 90^\circ \end{cases}$$

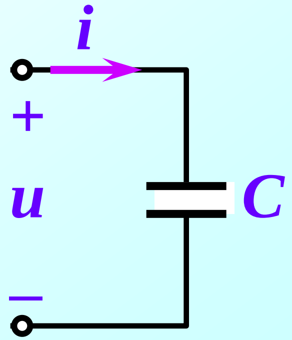
容抗：$X_C = -\dfrac{1}{\omega C}$　　单位：Ω

容抗与 f, C 成反比：高频低抗，低频高抗，直流开路。

时域

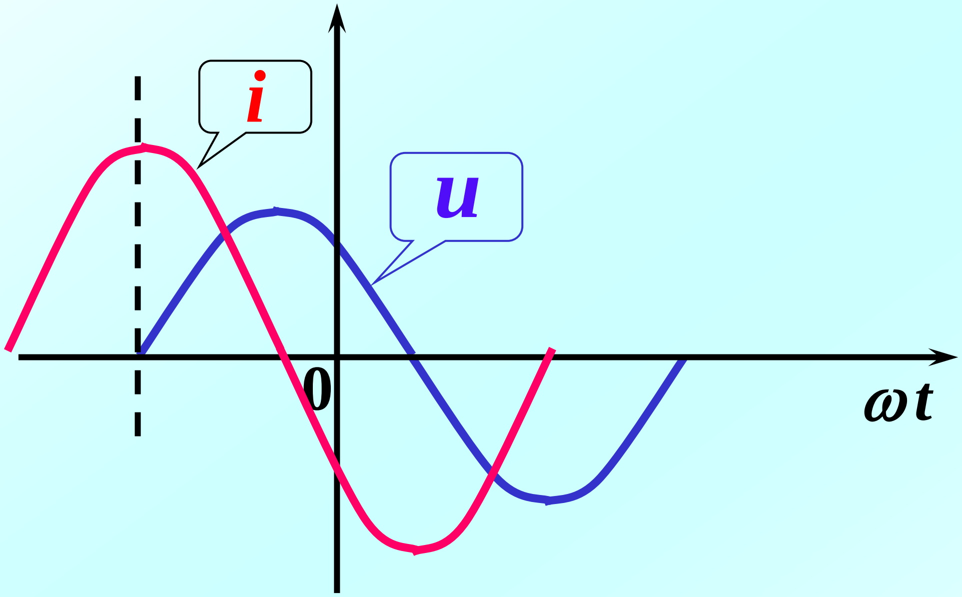
$u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

$i = C\omega U_m \cos(\omega t + \varphi + 90^{\circ})$

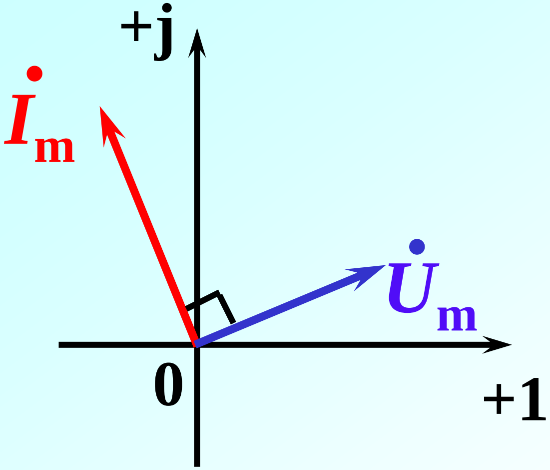


相量域

$$\dot{U}_m = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}_m$$



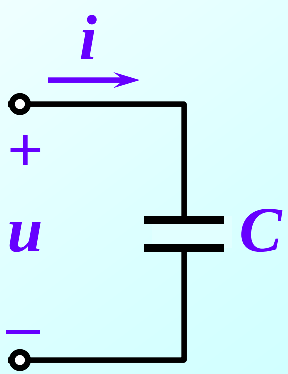
波形图



相量图

例： 下图中电容 $C = 23.5\mu F$，接在电源电压 $U = 220V$、频率为50Hz、初相为零的交流电源上。

求： 电流 i。



解： 电源 $u_s = \sqrt{2} \cdot 220\cos(314t)$

$$I_m = \omega C U_m$$
$$= 314 \times 23.5 \times 10^{-6} \times 220 \cdot \sqrt{2} = 2.3\,A$$

$$\therefore i = I_m \cos(\omega t + 90°)$$
$$= 2.3\cos(314t + 90°)A$$

小结：三种基本元件正弦稳态电路

	电阻元件	电感元件	电容元件
时域VCR	$u = iR$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
相量形式VCR	$\dot{U} = R\dot{I}$	$\dot{U} = \boxed{\mathrm{j}\omega L}\dot{I}$	$\dot{U} = \boxed{-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}$
电压电流相位关系	同相位	电压超前电流90°	电压滞后电流90°

§ 8-7 阻抗和导纳

三种元件VCR的相量形式

欧姆定律的相量形式

电阻 $\dot{U} = R\dot{I}$

电感 $\dot{U} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}$

电容 $\dot{U} = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}$

$\xrightarrow{\text{统一}}$ $\dot{U} = Z\dot{I}$ $\dot{I} = Y\dot{U}$

阻抗 $Z = \dot{U}/\dot{I}$ 导纳 $Y = \dot{I}/\dot{U}$

	阻抗 Z	电抗 X	电纳 B
电阻	$Z_R = R$	———-	———-
电感	$Z_L = \mathrm{j}\omega L$	$X_L = \omega L$（感抗）	$B_L = \dfrac{-1}{\omega L}$（感纳）
电容	$Z_C = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}$	$X_C = \dfrac{-1}{\omega C}$（容抗）	$B_C = \omega C$（容纳）