第一部分 数理逻辑

- 1数理逻辑
  - ch1命题逻辑的基本概念
    - 1.1命题与联结词
    - 1.2 命题公式及其赋值
  - ch2命题逻辑的等值演算
    - 2.1等值式
    - 2.2析取范式与合取范式
    - 2.3 联结词完备集
    - 2.4 可满足性问题与消解法
  - ch3命题逻辑的推理理论
    - 3.1推理的形式结构
    - 3.2自然推理系统P
  - ch4一阶逻辑的基本概念
    - 4.1一阶逻辑命题符号化
    - 4.2一阶逻辑公式及其解释
  - ch5一阶逻辑的等值演算和推理
    - 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则
    - 5.2 一阶逻辑前束范式
    - 5.3 一阶逻辑的推理理论

主要内容

3.1推理的形式结构

- 推理的正确与错误
- 推理的形式结构
- 判断推理正确的方法
- 推理定律

3.2自然推理系统*P*

- 形式系统的定义与分类
- 自然推理系统*P*
- 在*P*中构造证明:直接证明法、附加前提证明法、归谬法

主要内容

3.1推理的形式结构

- 推理的正确与错误
- 推理的形式结构
- 判断推理正确的方法
- 推理定律

3.2自然推理系统*P*

- 形式系统的定义与分类
- 自然推理系统*P*
- 在*P*中构造证明:直接证明法、附加前提证明法、归谬法

3.1 推理的形式结构

定义3.1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式. 若对于每组赋值, $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假, 或当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时, B也为真, 则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论B的推理是有效的或正确的, 并称B是有效结论.

定理3.1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出B的推理正确当且仅当 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式

注意: 推理正确不能保证结论一定正确

推理的形式结构

推理的形式结构

1. $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$

   若推理正确, 记为$\{A_1,A_2,\ldots,A_n\} \vDash B$

   否则记为$\{A_1,A_2,\ldots,A_n\} \nvDash B$

2. $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

   若推理正确, 记为$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

3. 前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$

   结论: B

推理的形式结构_实例

- 判断下列推理是否正确：

$\{\neg q, p \rightarrow q\} \vdash \neg p$

方法1： 假定$\neg q \wedge (p \rightarrow q)$为1,
则$\neg q$ 为1, 且$(p \rightarrow q)$ 为1。
由于 q 为 0, $(p \rightarrow q)$ 为1，则必须 p 为 0,
故 $\neg p$为1。

前真后真

故：$\{\neg q, p \rightarrow q\} \vDash \neg p$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

推理的形式结构_实例

- 判断下列推理是否正确：

$$\{\neg q, p \rightarrow q\} \vdash \neg p$$

方法2：假定$\neg p$为0, 则p为1.

若q为0, 则$p \rightarrow q$为0,
若q为1, 则$\neg q$为0,

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 } q \text{ 为0, 则 } p \rightarrow q \text{ 为 0,} \\ \text{若 } q \text{ 为1, 则 } \neg q \text{ 为 0,}\end{array}\right\} \neg q \wedge (p \rightarrow q) \text{ 为 } 0$$

后假前假

故：$\{\neg q, p \rightarrow q\} \vDash \neg p$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法

真值表法

- 从真值表上找出 $A_1, A_2, \ldots, A_k$真值均为 1的行，对每一个这样的行，若 B 的真值也为 1,

  则 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$成立。
- 或者看 B为0的行,在每个这样的行中，$A_1, A_2, \ldots, A_k$真值中至少有一个为 0,

  则 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$成立。

真值表法_推理实例

考察 B 是否是下列前提 A_1, A_2 的有效结论？

1)	$A_1: p \rightarrow q$	$A_2: p$	$B: q$	是
2)	$A_1: p \rightarrow q$	$A_2: \neg p$	$B: q$	否
3)	$A_1: p \rightarrow q$	$A_2: q$	$B: p$	否

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

2)

3)

1)

等值演算法_推理实例

例1 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以, 明天是5号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

(1) 推理的形式结构：$(p \to q) \wedge p \to q$

用等值演算法

$$(p \to q) \wedge p \to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee q \Leftrightarrow 1$$

由定理3.1可知推理正确

主析取范式法_推理实例

例1 判断下面推理是否正确

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以, 今天是1号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

(2) 推理的形式结构: $(p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p$

用主析取范式法

$$(p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$$

$$\Leftrightarrow \neg q\vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确

推理定律 — 重言蕴涵式

[1]. $A \Rightarrow (A\vee B)$ 附加律

[2]. $(A\wedge B) \Rightarrow A$ 化简律

[3]. $(A\rightarrow B)\wedge A \Rightarrow B$ 假言推理

[4]. $(A\rightarrow B)\wedge\neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式

[5]. $(A\vee B)\wedge\neg B \Rightarrow A$ 析取三段论

[6]. $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C) \Rightarrow (A\rightarrow C)$ 假言三段论

[7]. $(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C) \Rightarrow (A\leftrightarrow C)$ 等价三段论

[8]. $(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(A\vee C) \Rightarrow (B\vee D)$ 构造性二难

$(A\rightarrow B)\wedge(\neg A\rightarrow B) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)

[9]. $(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(\neg B\vee\neg D) \Rightarrow (\neg A\vee\neg C)$ 破坏性二难

每个等值式可产生两个推理定律

如, 由$A\Leftrightarrow\neg\neg A$可产生 $A\Rightarrow\neg\neg A$ 和 $\neg\neg A\Rightarrow A$

推理定律（续）

[1].附加律： $A \Rightarrow (A \vee B)$

例如：

– 由 “我正学习（ A ）”，
  能得出结论 “我正在学习（ A ）或听音乐（ B ）”
  前真后必真

但是

– 由 “我正在学习（ A ）或听音乐（ B ）”，
  不能得出结论 “我正学习（ A ）” 前真后未必真

推理定律（续）

[2].化简律： $(A \wedge B) \Rightarrow A$

例如：

- 由 “我正边学习（ A ）边听音乐（ B ）”，
  能得出结论 “我正学习（ A ）” 前真后必真

但是

- 由 “我正学习（ A ）”，
  不能得出结论 “我正边学习（ A ）边听音乐（ B ）”
  前真后未必真

推理定律（续）

[3].假言推理： $(A \to B) \land A \Rightarrow B$

例如：

- 如果天下雨地就是湿的$(A \to B)$ ，
  现在天下雨(A) ，所以地是湿的(B)

推理定律（续）

[4]. 拒取式： $(A \rightarrow B) \land \neg B \Rightarrow \neg A$

- 就是通常所使用的反证法，即若A则B，但如果已经有了B的否定($\neg B$)作为前提，那么就有理由相信$\neg A$是成立的。

例如：

如果天下雨地就是湿的($A \rightarrow B$)，

但现在地没有湿($\neg B$)，所以天没有下雨($\neg A$)。

推理定律（续）

对于拒取式$(A\rightarrow B)\wedge\neg B \Rightarrow \neg A$容易犯的两个错误：

- 肯定后件 （推出前件为真）
  - 例如，如果天下雨地就是湿的($A\rightarrow B$)，现在地是湿的（B），所以天下雨了（ A ）。 （可能是洒水车导致的）
- 否定前件 （推出后件为假）
  - 例如，如果天下雨地就是湿的($A\rightarrow B$)，现在天没下雨($\neg A$)，所以地不是湿的($\neg B$)。

（地可以是湿的，可能是洒水车导致的）

推理定律（续）

[5].析取三段论： $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

– 析取三段论本质上与拒取式一致，但在逻辑上通常称为选言推理，或者更通俗地称为排除法

– 例如，小李或者是100米冠军或者是400米冠军($A \vee B$) ，
小李不是400米冠军($\neg B$)，
所以，小李是100米冠军(A)。

– 实际上这里假定前提$A \vee B$已罗列了所有可能情况，因为这只是一种推理模式，因此这种假定是合理的，具有一般性。

推理定律（续）

[6].假言三段论： $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$

- 表明推理的传递性，也是常用的一种三段论

- 例如，如果天下雨(A)，路就会很难走(B)，
  路很难走(B) ，我上学就会迟到(C)，
  所以，如果天下雨，我上学就会迟到。

推理定律（续）

[7].等价三段论： $(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C) \Rightarrow (A\leftrightarrow C)$

- 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出B的推理正确当且仅当
  $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\rightarrow B$ 为重言式。
  $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\rightarrow B$ 为重言式当且仅当
  $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\rightarrow B$ 无成假赋值。

因此，由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推出B的推理正确当且仅当
$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\rightarrow B$ 无成假赋值。

- 例如，央视直播比赛（ B ）当且仅当比赛是决赛（A）。
  我看电视（ C ）当且仅当央视直播比赛（ B ）。
  因此，我看电视（A）当且仅当比赛是决赛（ C ）。

推理定律（续）

[8]. $(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow(B\vee D)$ 构造性二难

$(A\to B)\wedge(\neg A\to B)\Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)

- 例如，如果派小王参加比赛(A)我们就可得到第一名(B)，如果派小张参加比赛(C)就可得到第三名(D)，我们要么派小王去比赛，要么派小张去比赛，所以我们不是得到第一名就是得到第三名。
- 东方朔饮酒

  如果这酒真能使人不死（ A ），

  那么你就杀不死我（ B ）；

  如果这酒不能使人不死 （ C ）（你能杀得死我 ），

  那么不必杀我 （ D ）（ 它没有什么用处 ） ；

  这酒或者能使人不死，或者不能使人不死；

  所以你或者杀不死我，或者不必杀我。

推理定律（续）

$(A \to B) \land (\neg A \to B) \Rightarrow B$　　　构造性二难(特殊形式)

- 纪晓岚买书
- 如果是好书（ A ）（看后背过），那么我不买（ B ）。
  如果不是好书（ $\neg A$ ），那么我不买（ B ）。
  或者是好书，或者不是好书。
  因此，我不买。

推理定律（续）

[9]. $(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$　破坏性二难

– 例如，明天是周一（ A ），小明就要上学（ B ），
明天是周末（ C ），小明就要去游泳（ D ），
小明没有去上学（ $\neg B$ ）或者小明没有去游泳（ $\neg D$ ），
所以明天不是周一（ $\neg A$ ）或者明天不是周末（ $\neg C$ ）。

☆

3.1推理的形式结构（回顾）

- 推理的正确与错误
- 推理的形式结构（3个）
- 判断推理正确的方法（3个）
- 推理定律（9个）

主要内容

3.1推理的形式结构

- 推理的正确与错误
- 推理的形式结构（3个）
- 判断推理正确的方法（3个）
- 推理定律（9个）

3.2自然推理系统*P*

- 形式系统的定义与分类
- 自然推理系统*P*
- 在*P*中构造证明:直接证明法、附加前提证明法、归谬法

3.2 自然推理系统P

定义3.2 一个**形式系统** I 由下面四个部分组成：

(1) 非空的字母表，记作 $A(I)$.

(2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集，记作 $E(I)$.

(3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集，记作 $A_X(I)$.

(4) 推理规则集，记作 $R(I)$.

记$I=<A(I),E(I),A_X(I),R(I)>$,

其中$<A(I),E(I)>$是 I 的**形式语言系统**,

$<A_X(I),R(I)>$ 是 I 的**形式演算系统**.

一般形式系统分为两类：

- **自然推理系统**: 无公理, 即$A_X(I)=\varnothing$
- **公理推理系统** 推出的结论是系统中的重言式, 称作**定理**

自然推理系统*P*

定义3.3 自然推理系统 P 定义如下:

1. 字母表

(1) 命题变项符号：$p\ q\ r\ \ldots\ p_i\ q_i\ r_i\ \ldots$

(2) 联结词符号：$\neg\ \wedge\ \vee \rightarrow \leftrightarrow$

(3) 括号与逗号：( ) ,

2. 合式公式（同定义1.6）

3. 推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

推理规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A\to B \quad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A\vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A\wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A\to B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A\to B \quad B\to C}{\therefore A\to C}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A\vee B \quad \neg B}{\therefore A}$$

推理规则

(10) 构造性二难推理规则

$$\frac{A\to B \quad C\to D \quad A\vee C}{\therefore B\vee D}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\frac{A\to B \quad C\to D \quad \neg B\vee\neg D}{\therefore \neg A\vee\neg C}$$

(12) 合取引入规则

$$\frac{A \quad B}{\therefore A\wedge B}$$

在自然推理系统*P*中构造证明

设前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$，结论B及公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_l$，

如果每一个C_i $(1\le i\le l)$是某个A_j $(1\le j\le k)$，

或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到，

并且$C_l = B$，

则称这个公式序列是由$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出B的证明。

在自然推理系统P中构造证明

例2 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我明天就有课. 若我明天有课，今天必备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期一、也不是星期三.

解 (1) 设命题并符号化

设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我明天有课，s：我今天备课

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

直接证明法

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

(3) 证明

① $r\rightarrow s$　　前提引入

② $\neg s$　　前提引入

③ $\neg r$　　①②拒取式

④ $(p\vee q)\rightarrow r$　　前提引入

⑤ $\neg(p\vee q)$　　③④拒取式

⑥ $\neg p\wedge\neg q$　　⑤置换

附加前提证明法

附加前提证明法　适用于结论为蕴涵式

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$C \to B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

结论：B

理由：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (C \to B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \to B$$

附加前提证明法实例

例3 构造下面推理的证明

2是素数或合数. 若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

解 用附加前提证明法构造证明

(1) 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$ 是无理数，s：4是素数

(2) 推理的形式结构

前提：$p\vee q$，$p\rightarrow r$，$r\rightarrow\neg s$

结论：$s\rightarrow q$

附加前提证明法实例

前提：$p\vee q$，$p\to r$，$r\to\neg s$

结论：$s\to q$

(3) 证明

① s	附加前提引入
② $p\to r$	前提引入
③ $r\to\neg s$	前提引入
④ $p\to\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

归谬法（反证法）

归谬法 (反证法)

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

做法

在前提中加入$\neg B$，推出矛盾.

理由

$$
\begin{aligned}
& A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\rightarrow B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\vee B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge\neg B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge\neg B)\vee 0 \\
\Leftrightarrow\ & A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge\neg B\rightarrow 0
\end{aligned}
$$

归谬法实例

例4 前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\to s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明 用归缪法

① q	结论否定引入
② $r\to s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

课堂练习

前提： 1. 或是天晴,或是下雨。 $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$
2. 若天晴,我去看电影。 $p\rightarrow s$
3. 若我去看电影，我就不看书。$s\rightarrow\neg r$
结论：若我在看书，则天在下雨。 $r\rightarrow q$

p : 天晴　　q : 下雨
s : 我看电影　　r : 我看书

前提：$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q), p\rightarrow s, s\rightarrow\neg r$
结论：$r\rightarrow q$

前提：$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$, $p\to s$, $s\to\neg r$

结论：$r\to q$

证明　用附加前提法

1) r	附加前提引入
2) $p\to s$	前提引入
3) $s\to\neg r$	前提引入
4) $p\to\neg r$	2)3)假言三段论
5) $\neg p$	1)4)拒取式
6) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$	前提引入
7) $(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$	6)置换
8) $p\vee q$	7)化简
9) q	5)8)析取三段论

前提：$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$, $p\to s$, $s\to\neg r$
结论：$r\to q$

证明 用附加前提法

1) r	附加前提引入	P附加
2) $p\to s$	前提引入	P
3) $s\to\neg r$	前提引入	P
4) $p\to\neg r$	2)3)假言三段论	T 2)3)
5) $\neg p$	1)4)拒取式	T 1)4)
6) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$	前提引入	P
7) $(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$	6)置换	T 6)
8) $p\vee q$	7)化简	T 7)
9) q	5)8)析取三段论	T 5)8)

P 规则:前提在推导过程中任何时候都可引用、使用。
T 规则:在推导中,若有一个或多个公式重言蕴含着公式 S,
则 S 可引入推导中。

3.2自然推理系统*P*（回顾）

- 形式系统的定义与分类
- 自然推理系统*P*
- 在*P*中构造证明:
  - 直接证明法
  - 附加前提证明法
  - 归谬法

主要内容

3.1推理的形式结构

- 推理的正确与错误
- 推理的形式结构
- 判断推理正确的方法
- 推理定律

3.2自然推理系统*P*

- 形式系统的定义与分类
- 自然推理系统*P*
- 在*P*中构造证明:直接证明法、附加前提证明法、归谬法

第一部分 数理逻辑（前三章回顾）

主要内容：

- 第一章 命题逻辑基本概念
- 第二章 命题逻辑等值演算
- 第三章 命题逻辑推理理论

- 第四章 一阶逻辑（谓词逻辑）基本概念
- 第五章 一阶逻辑等值演算与推理