概率论与数理统计

第 10 讲

边缘分布

一. 边缘分布函数

二维联合分布函数全面地反映了二维随机变量(X,Y)的取值及其概率规律。

而X和Y都是随机变量，各自也有它们的分布函数，分别记为：$F_X(x)$，$F_Y(y)$，依次称为二维随机变量(X,Y)关于X的边缘分布函数和关于Y的边缘分布函数。（Marginal Distribution Function）

那么要问：二者之间有什么关系呢？可以相互确定吗？

由于联合分布全面反映了二维随机变量作为一个整体的统计规律性，而边缘分布仅仅反映了单个变量的概率规律，单个变量的概率规律包含在整体的统计规律性内，所以由联合分布可以唯一地确定边缘分布，但反之不一定成立。

一. 边缘分布函数

已知(X, Y)的联合分布，如何确定X的边缘分布?

$F(x, y)=P\{X\leq x, Y\leq y\}$

$F_X(x)=P\{X\leq x\}=P\{X\leq x, Y<+\infty\}$

(X, Y)关于X的边缘分布函数 ⟵ $=F(x, +\infty)$

同理：(X, Y)关于Y的边缘分布函数为 $F(+\infty, y)$

即：(X, Y)关于X和Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y) \qquad F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

例1设二维随机变量（X，Y）的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y-\lambda xy} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中$\lambda>0$为常数。求 (X,Y)的边缘分布函数。

解：当$x\le 0$时，$F_X(x)=\lim\limits_{y\to\infty}F(x,y)=\lim\limits_{y\to\infty}0=0$

当$x>0$时，$F_X(x)=\lim\limits_{y\to\infty}F(x,y)=\lim\limits_{y\to\infty}(1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y-\lambda xy})=1-e^{-x}$

所以X的边缘分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y-\lambda xy} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x,y)=\lim\limits_{x\to\infty}0=0$

当$y>0$时，$F_Y(y)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x,y)=\lim\limits_{x\to\infty}(1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y-\lambda xy})=1-e^{-y}$

所以Y的边缘分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

由此例可以看出，(X,Y)的边缘分布函数与参数λ无关，即，多个联合分布函数对应同一对边缘分布函数，说明由联合分布可以唯一确定边缘分布，但反之，不一定成立。

二. 二维离散型随机变量的边缘分布律

当（X，Y）为二维离散型随机变量时，分量X和Y都是一维离散型随机变量，他们各自的分布律称为（X，Y）的边缘分布律。

定理1 若二维离散型随机变量（X，Y）的联合分布律为

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

则X和Y的边缘分布律分别为

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \triangleq p_{i\cdot} \quad i = 1, 2, \cdots \qquad P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \triangleq p_{\cdot j}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

证明： 由二维随机变量的定义可知，事件 $\{Y=y_j\}$，$j=1,2,\cdots$ 为样本空间的划分。

即样本空间 $S=\bigcup_{j=1}^{\infty}\{Y=y_j\}$ 且 $\{Y=y_j\}$，$j=1,2,\cdots$ 两两互斥。

所以有

$$P\{X=x_i\}=P\left\{\{X=x_i\}\cap\left\{\bigcup_{j=1}^{\infty}\{Y=y_j\}\right\}\right\}=P\left\{\bigcup_{j=1}^{\infty}\left\{\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\}\right\}\right\}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$$

二. 二维离散型随机变量的边缘分布律

同样的方法可得，事件 $\{X=x_i\}, i=1,2,\cdots$ 也构成样本空间的划分。

即样本空间 $S=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{X=x_i\}$ **且** $\{X=x_i\}, i=1,2,\cdots$ **两两互斥。**

所以有

$$P\{Y=y_j\}=P\left\{\{Y=y_j\}\cap\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}\{X=x_i\}\right\}\right\}=P\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}\left\{\{Y=y_j\}\cap\{X=x_i\}\right\}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}$$

二. 二维离散型随机变量的边缘分布律

此定理的结果可用
如表格的形式表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P(X=x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{2j}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$P(Y=y_j)$	$p_{\cdot 1}=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{i1}$	$p_{\cdot 2}=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{i2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij}$	$\cdots$	1

二. 二维离散型随机变量的边缘分布律

由上表可见，求X的边缘分布律就是对联合分布律的行求和，而求Y的边缘分布律就是对联合分布律的列求和。

同时也可以看出，（X，Y）的联合分布律位于表的中央部分，而X和Y的分布律位于表的边缘部分，由此得出“边缘分布”这个名称.

二. 二维离散型随机变量的边缘分布律

例2.袋中有二个白球，三个黑球，从中取两次球

定义： $X=\begin{cases}1, & \text{第一次取到白球}\\ 0, & \text{第一次取到黑球}\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取到白球}\\ 0, & \text{第二次取到黑球}\end{cases}$

求(X,Y)的联合分布及边缘分布，分有放回和无放回讨论。

解：有放回情形 $P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\mid X=0\}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$$

二. 二维离散型随机变量的边缘分布律

例2.袋中有二个白球，三个黑球，从中取两次球

定义： $X=\begin{cases}1, & \text{第一次取到白球}\\ 0, & \text{第一次取到黑球}\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取到白球}\\ 0, & \text{第二次取到黑球}\end{cases}$

求(X,Y)的联合分布及边缘分布，分有放回和无放回讨论。

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\mid X=1\}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$

二. 二维离散型随机变量的边缘分布律

所以有放回时(X,Y)的联合分布律为：

$X \backslash Y$	0	1	
0	9/25	6/25	3/5
1	6/25	4/25	2/5
	3/5	2/5	

所以X和Y的边缘分布律分别为：

X	0	1
P	3/5	2/5

Y	0	1
P	3/5	2/5

二. 二维离散型随机变量的边缘分布律

例2.袋中有二个白球，三个黑球，从中取两次球

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取到白球}\\ 0, & \text{第一次取到黑球}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取到白球}\\ 0, & \text{第二次取到黑球}\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布及边缘分布，无放回。

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\mid X=0\}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\mid X=0\}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

例2.袋中有二个白球，三个黑球，从中取两次球

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取到白球}\\ 0, & \text{第一次取到黑球}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取到白球}\\ 0, & \text{第二次取到黑球}\end{cases}$$

求(X,Y)的联合分布及边缘分布，无放回。

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0|X=1\}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

所以有放回时(X,Y)的联合分布律为：

$X \backslash Y$	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
	3/5	2/5	

所以X和Y的边缘分布律分别为：

X	0	1
P	3/5	2/5

Y	0	1
P	3/5	2/5

二. 二维离散型随机变量的边缘分布律

有放回

X \ Y	0	1	
0	9/25	6/25	3/5
1	6/25	4/25	2/5
	3/5	2/5	

不放回

X \ Y	0	1	
0	3/10	3/10	3/5
1	3/10	1/10	2/5
	3/5	2/5	

边缘分布相同，但联合分布不同。

说明：由边缘分布一般不能确定联合分布。

例3. 设试验E只有3种可能的结果A_1,A_2,A_3，对试验E进行n次独立重复试验，用X_i表示这n次试验中事件A_i发生的次数，$P(A_i)=p_i$，$i=1,2,3$. 求 (X_1,X_2)的联合分布律与边缘分布律。

解：上一节中已求得 (X_1,X_2)的联合分布律为

$$P\{X_1=k_1,X_2=k_2\}=\frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2}$$

$$k_1,k_2=0,1,2,\cdots,n,\quad k_1+k_2\le n.$$

易知X_1可能的取值为$0,1,\ldots,n$，且由定理1知

$$P\{X_1=k_1\}=\sum_{k_2}P\{X_1=k_1,X_2=k_2\}=\sum_{k_2=0}^{n-k_1}P\{X_1=k_1,X_2=k_2\}$$

二. 二维离散型随机变量的边缘分布律

$$P\{X_1=k_1\}=\sum_{k_2=0}^{n-k_1}P\{X_1=k_1,X_2=k_2\}=\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2}$$

$$=\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}p_1^{k_1}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}p_2^{k_2}(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2}$$

$$=C_n^{k_1}p_1^{k_1}\sum_{k_2=0}^{n-k_1}C_{n-k_1}^{k_2}p_2^{k_2}(1-p_1-p_2)^{n-k_1-k_2}=C_n^{k_1}p_1^{k_1}[p_2+(1-p_1-p_2)]^{n-k_1}$$

$$=C_n^{k_1}p_1^{k_1}(1-p_1)^{n-k_1}$$

即X_1~$b(n,p_1)$　同样的方法可以求得X_2~$b(n,p_2)$

二. 二维离散型随机变量的边缘分布律

例3. 设试验E只有3种可能的结果A_1,A_2,A_3，对试验E进行n次独立重复试验，用X_i表示这n次试验中事件A_i发生的次数，$P(A_i)=p_i$，$i=1,2,3$. 求 (X_1,X_2)的联合分布律与边缘分布律。

另外，根据二项分布的应用背景，可以直接得出X_1和 X_2 的边缘分布. 例如，X_1表示在n次试验中A_1发生的次数，此时可以将A_2和A_3两个结果，看作A_1不发生，因此就可以将试验E看作n重的伯努利试验，所以$X_1 \sim b(n, p_1)$。

X_2表示在n次试验中A_2发生的次数，此时可以将A_1和A_3两个结果，看作A_2不发生，因此就可以将试验E看作n重的伯努利试验，所以$X_2 \sim b(n, p_2)$。

三. 二维连续型随机变量的边缘密度函数

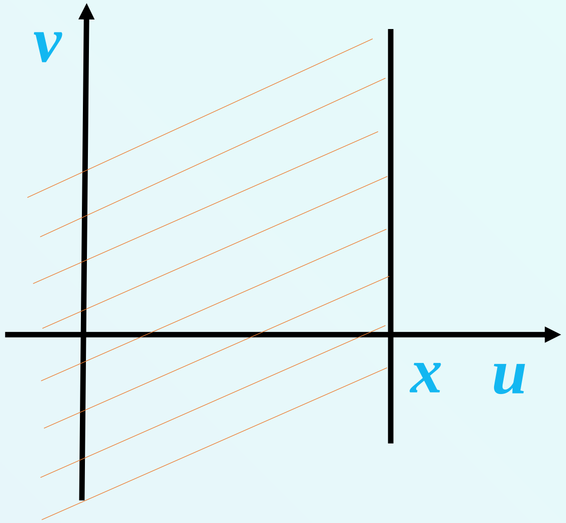
当（X，Y）为二维连续型随机变量时，关于X和Y的边缘分布有如下定理。

定理2 设二维连续型随机变量（X，Y）的联合概率密度函数为$f(x,y)$，则X和Y也是连续型随机变量，且X和Y的密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad 和 \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

证明：设X的分布函数为$F_X(x)$，则有：

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv]du$$



令： $$g(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv$$

三. 二维连续型随机变量的边缘密度函数

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv]du \qquad g(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv$$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv]du=\int_{-\infty}^{x}g(u)du$$

故得：X为连续型随机变量，并且得 $f_X(x)=g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

同理可得Y为连续型随机变量，其概率密度$f_Y(y)$为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

在很多情况下，联合密度函数往往在某个区域是非零的，因此得到的边缘密度函数往往是分段函数，所以在求解边缘密度函数时，要注意该函数的非0区间以及积分限的确定。

例4.设连续型随机变量(X,Y)的概率密度是

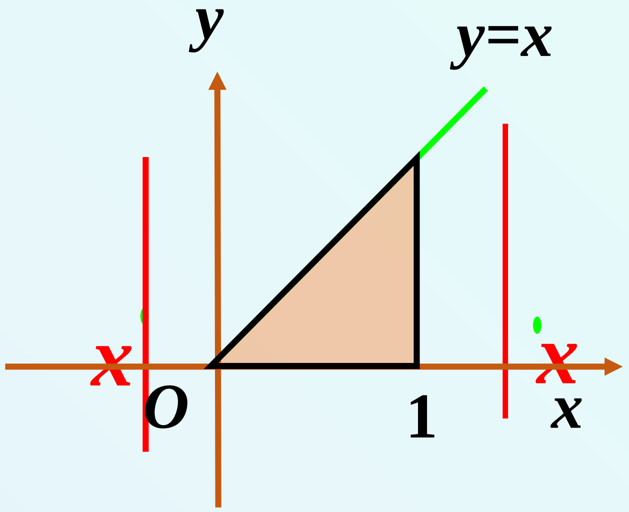
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{24}{5}y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求(X,Y)的两个边缘密度。

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

当 $x<0$ 或 $x>1$时，$\forall y\in(-\infty,+\infty)$，都有$f(x,y)=0$

$\therefore \quad f_X(x)=0$



例4.设连续型随机变量(X,Y)的概率密度是

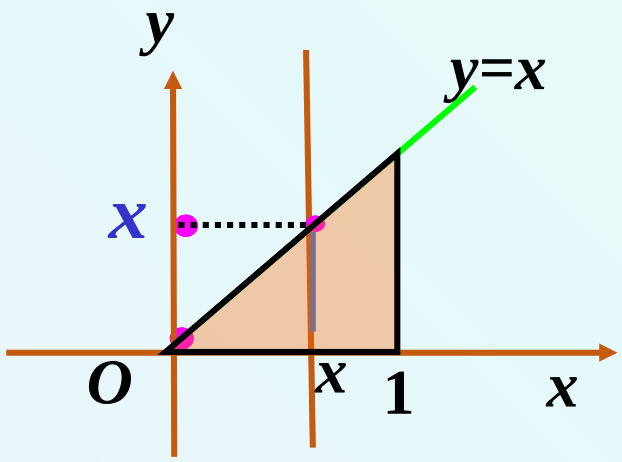
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{24}{5}y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求(X,Y)的两个边缘密度。

暂时固定

当$0\le x\le 1$时

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{0}f(x,y)dy+\int_{0}^{x}f(x,y)dy+\int_{x}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{0}^{x}\frac{24}{5}y(2-x)dy$$



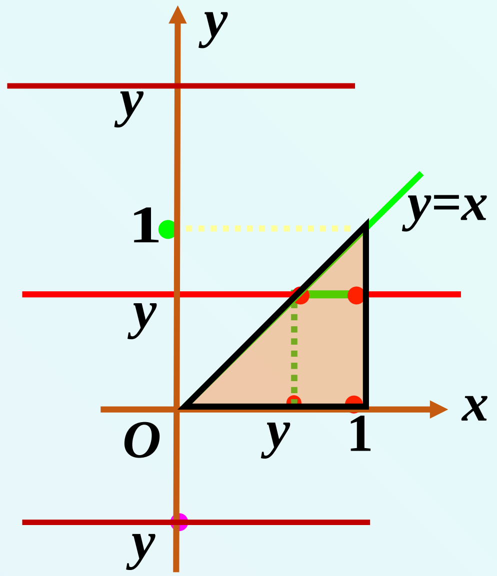
解：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

当$y<0$或$y>1$时，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有$f(x,y)=0$ $\quad\therefore\ f_Y(y)=0$

当$0\le y\le 1$时

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dx+\int_{y}^{1} f(x,y)dx+\int_{1}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\int_{y}^{1}\frac{24}{5}y(2-x)dx=\frac{24}{5}y(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2})$$



三. 二维连续型随机变量的边缘密度函数

所以有 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{12}{5}x^2(2-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{24}{5}y(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2}), & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

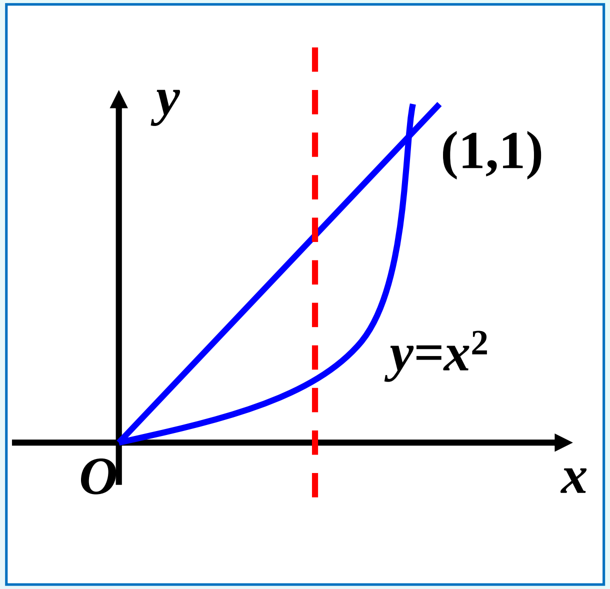
注意：自变量的取值范围

例5.设(X,Y)的概率密度是 $f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ **求边缘概率密度$f_X(x)$和 $f_Y(y)$。**

解：$f(x,y)$的非零区域如右图所示，将其写为如下形式：

$$D=\{(x,y):\ \ 0\le x\le 1,\ \ \ x^2\le y\le x\}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6dy, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

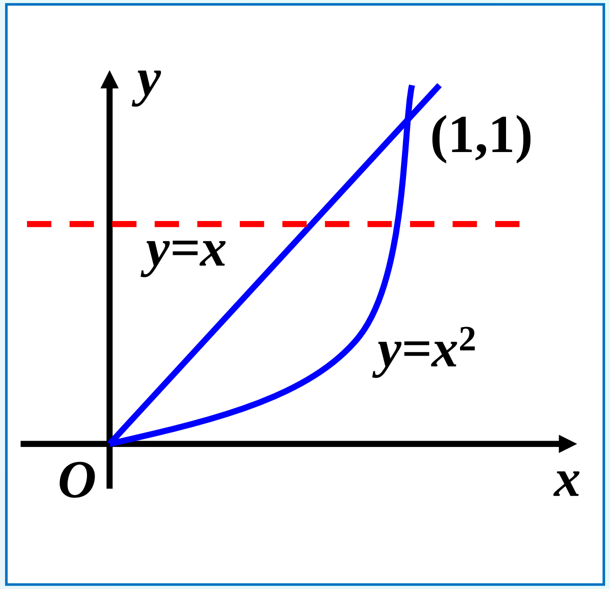


例5.设(X,Y)的概率密度是 $f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ **求边缘概率密度$f_X(x)$和 $f_Y(y)$。**

解：$f(x,y)$的非零区域如右图所示，将其写为如下形式：

$$D=\{(x,y):\ 0\le y\le 1,\ \ y\le x\le\sqrt{y}\}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^{\sqrt{y}}6dx, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

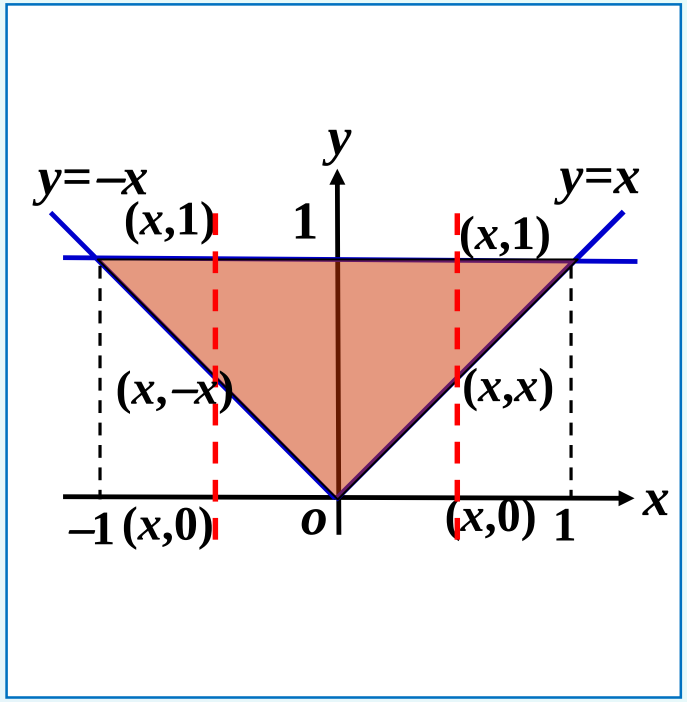


例6. 设(X,Y)的概率密度是 $f(x,y)=\begin{cases}1, |x|\le y, 0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$ **求X的边缘密度。**

解： $f(x,y)$的非零区域G为 $|x|\le y, 0\le y\le 1$

可表示为 $\begin{cases}-1<x<0\\ -x\le y\le 1\end{cases}+\begin{cases}0\le x<1\\ x\le y\le 1\end{cases}$

$$\therefore f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{1} 1dy, -1<x<0\\ \int_{x}^{1} 1dy, 0\le x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}=\begin{cases}1+x, -1<x<0\\ 1-x, 0\le x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$



三. 二维连续型随机变量的边缘密度函数

若(X,Y)服从二维正态分布，即 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$

则有：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$

即二维正态分布(X,Y)的边缘分布是一维正态分布。

反之未必成立。

反例见例7

对这个现象的解释是：边缘概率密度只考虑了单个分量的情况，而未涉及X与Y之间的关系。

三. 二维连续型随机变量的边缘密度函数

例7.设二维随机向量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+xy)\quad(-\infty<x,y<+\infty)$$

求(X,Y)关于X,Y的边缘概率密度。

解： $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+xy)dy=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(xy)dy\right)$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+x\int_{-\infty}^{+\infty}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

同理可得 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

X,Y的边缘概率密度为一维正态分布，但其联合分布不是二维正态分布。

作业： 10,11,12,14,16,17

第 10 讲

谢谢聆听