课程编号：　　　　　　　北京理工大学

离散数学期末模拟试题答案及评分标准（A 卷）

班级__________　学号__________　姓名__________　成绩_________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									

1. 选择题（共 10 题, 每题 1 分）

1). B　2).B　3). C　4).B　5). C　6). B　7). B　8). B　9). B　10). C

2. 判断题（共 10 题, 每题 1 分，真为"T", 假为"F"）

1).T　2).T　3).F　4).F　5).F

6).T　7). T　8). T　9).F　10). F

3. 填空题（共 10 题, 每题 2 分）

1) $q \vee r \vee \neg s$

2) {<1,2>,<1,3>,<3,2>}

3) 9

4) 4,2

5) 3, 5, 6

6) 53

7) 192

8) 12

9) 2，3

10) 102

答案：群 G 的置换结构为：　恒等置换：1 个

绕中心转 90、270 度：（****）（****）（*）2 个

绕中心转 180 度：（**）（**）（**）（**）（*）1 个

翻转 180 度：（**）（**）（**）（*）（*）（*）4 个

带入 Polya 定理：　$M=(2^9+2*2^3+2^5+4*2^6)/8=102$

4. **（10 分）**

答：（A）$F \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6$（8 分）

（B） $F \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$

$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \wedge r) \wedge \neg(p \wedge \neg r))$（2 分）

5. **（10 分）**

符号化：4 分

$\forall x(P(x) \rightarrow R(x)),\ \forall x(R(x) \wedge V(x) \rightarrow S(x)),\ \exists x(P(x) \wedge V(x) \wedge U(x))$

结论：$\exists x(P(x) \wedge S(x) \wedge U(x))$

证明：6 分

1)	$\exists x(P(x) \wedge V(x) \wedge U(x))$	前提引入
2)	$P(a) \wedge V(a) \wedge U(a)$	1) ES
3)	$P(a)$	2) 化简
4)	$V(a)$	2) 化简
5)	$U(a)$	2) 化简
6)	$\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$	前提引入
7)	$P(a) \rightarrow R(a)$	6) US
8)	$R(a)$	7) 化简
9)	$R(a) \wedge V(a)$	8)4) 合取引入
10)	$\forall x(R(x) \wedge V(x) \rightarrow S(x))$	前提引入
11)	$R(a) \wedge V(a) \rightarrow S(a)$	10) US
12)	$S(a)$	9)11) 假言推理
13)	$P(a) \wedge S(a) \wedge U(a)$	3)12)5) 合取引入
14)	$\exists x(P(x) \wedge S(x) \wedge U(x))$	13) EG

6. （**10 分**）

解、(1) $\forall x\in N, x+x$ 是偶数，有 xRx，R 自反. (2 分)

若$<x,y>\in R$，即 $x+y$ 是偶数，则 $y+x$ 是偶数，有$<y,x>\in R$，R 对称. (2 分)

若$<x,y>\in R$，$<y,z>\in R$，即 $x+y$ 是偶数，$y+z$ 是偶数，$x+z=(x+y)+(y+z)-2y$ 是偶数，有$<x,z>\in R$，R 满足传递性. (2 分)

因此，R 是一个等价关系.

(2) 关系 R 的等价类有：$[1]_R=\{1,3,5,...\}$，$[0]_R=\{0,2,4,6...\}$. (4 分)

7. （**10 分**）

（1）证明：

任取 $f\in B^A$，对于任意的 $x\in A$，有 $f(x)\in B$，由函数的定义知，$f(x)=f(x)$，即 fRf，所以 R 具有自反性. (2 分)

任取 $f, g\in B^A$，若 fRg 且 gRf，则对于任意的 $x\in A$，都有 $f(x)\in B$，$g(x)\in B$，且 $f(x)\le g(x)$，$g(x)\le f(x)$. 因为$<B, \le>$是偏序集，所以$\le$具有反对称性，因此有 $f(x)=g(x)$. 根据函数的定义知 $f=g$. 所以 R 是反对称的. (2 分)

任取 $f, g, h\in B^A$，若 fRg 且 gRh，则对于任意的 $x\in A$，都有 $f(x), g(x), h(x)\in B$，且有 $f(x)\le g(x)$，$g(x)\le h(x)$. 因为$<B, \le>$是偏序集，所以$\le$具有传递性，因此有 $f(x)\le h(x)$，即 fRh. 所以 R 是传递的. (2 分)

因此 R 为 B^A 上的偏序关系.

(2) 偏序集$<B^A, R>$中的最大元为：$f(x)=b$. (4 分)

8. （**10 分**）

证明：由补图定义知：

$$E(G)+E(\bar{G})=\frac{v(v-1)}{2} \qquad (1)（3 分）$$

又因为G是平面图，有

$$E(G)\le 3v-6 \qquad (2)（3 分）$$

由(1)(2)得：

$$E(\bar{G})\ge\frac{(v^2-7v+12)}{2} \qquad （2 分）$$

由二次函数性质，当$v\ge 11$时，$E(\bar{G})>3v-6$，从而$\bar{G}$不是平面图（需要说明清楚） （2 分）

9. （10 分）

证　设 G 是 6 阶群，则 G 中元素只能是 1 阶、2 阶、3 阶或 6 阶.（4 分）

若 G 中含有 6 阶元，设为 a，则 a^2 是 3 阶元.（3 分）

若 G 中不含 6 阶元，下面证明 G 中必含有 3 阶元.

如若不然，G 中只含 1 阶和 2 阶元，

即 $\forall a \in G$，有 $a^2=e$，由命题知 G 是 Abel 群.

取 G 中 2 阶元 a 和 b, $a \neq b$，

令　$H = \{e, a, b, ab\}$，则 H 是 G 的子群，

但 $|H| = 4$，$|G| = 6$，与拉格朗日定理矛盾.（3 分）