第十六章 树

主要内容

- 16.1无向树及其性质
- ~~16.2生成树~~
- ~~16.3根树及其应用~~

第十六章 树

主要内容

- 16.1无向树及其性质
- ~~16.2生成树~~
- ~~16.3根树及其应用~~

16.1 无向树及其性质

定义16.1

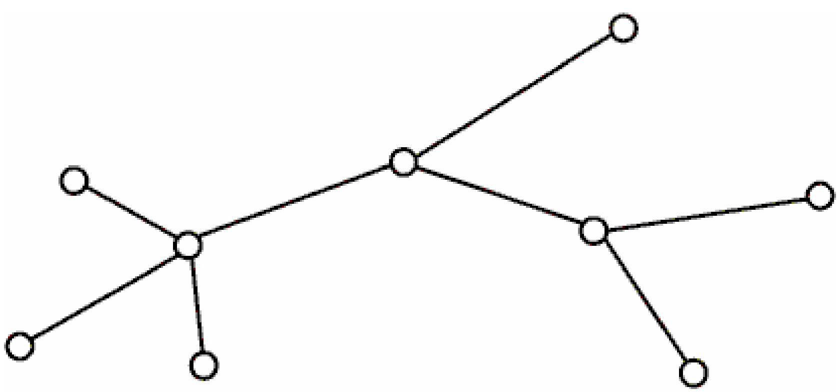
(1) 无向树（简称树）——连通无回路的无向图

(2) 平凡树——平凡图

(3) 森林——至少由两个连通分支（每个都是树）组成

(4) 树叶——1度顶点

(5) 分支点——度数≥2的顶点



无向树的等价定义

定理16.1 设$G=\langle V,E\rangle$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树（连通无回路）

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

证明思路

(1) G 是树（连通无回路）
(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.
(3) G 中无回路且 $m=n-1$.
(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(1)⇒(2). 关键一步是, 若两顶点间路径不惟一必有回路.

(2)⇒(3). 若G中有回路，则回路上任意两点之间的路径不惟一.

对n用归纳法证明$m=n-1$.

$n=1$正确. 设$n\le k$时对，证$n=k+1$时也对：

取G中边e，$G-e$有且仅有两个连通分支G_1,G_2. $n_i\le k$，

由归纳假设得$m_i=n_i-1$, $i=1,2$. 于是，

$$m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1.$$

(3)⇒(4). 只需证明G连通. 用反证法. 否则G有s（$s\ge 2$）个连通分支都是小树. 于是有$m_i=n_i-1$, ,

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\sum_{i=1}^{s} n_i-s=n-s\ (s\ge 2)$$

这与$m=n-1$矛盾.

(1) G 是树（连通无回路）

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

(4)⇒(5). 只需证明G 中每条边都是桥.

$\forall e \in E, G-e$只有$n-2$条边

因为：G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m \geq n-1$”.

由此可知$G-e$不连通，故e为桥.

(5)⇒(6). 由(5)易知G为树，由(1)⇒(2)知，$\forall u,v \in V$（$u \neq v$），u到v有惟一路径，加新边(u,v)得惟一的一个圈.

(6)⇒(1). 只需证明G连通，这是显然的.

无向树的性质

定理16.2 设T是n阶非平凡的无向树，则T 中至少有两片树叶.

证 设 T 有 x 片树叶，则：

$$\sum d(v_i) \geq x + 2(n - x)$$

由握手定理及定理16.1可知：

$$\sum d(v_i) = 2(n-1)$$

故：

$$2(n-1) \geq x + 2(n-x)$$

由上式解出$x \geq 2$

例题

例1 已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

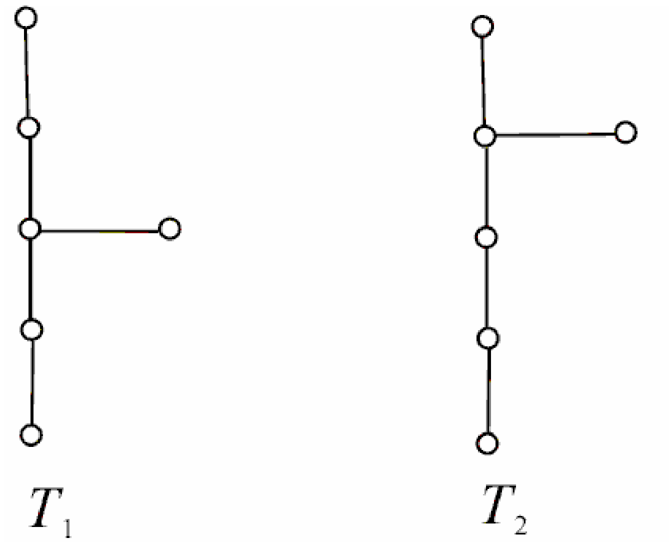
解 解本题用树的性质$m=n-1$，握手定理.

设有x片树叶，于是 $n = 1+2+x = 3+x$,

$$2m = 2(n-1) = 2\times(2+x) = 1\times3+2\times2+x$$

解出$x = 3$，故T有3片树叶.

T 的度数列应为 1, 1, 1, 2, 2, 3，易知3度顶点与1个2度顶点相邻与和2个2度顶点均相邻是非同构的，因而有2棵非同构的无向树T_1, T_2，如图所示：



例题

例2 已知无向树T有5片树叶，2度与3度顶点各1个，其余顶点的度数均为4，求T的阶数n，并画出满足要求的所有非同构的无向树.

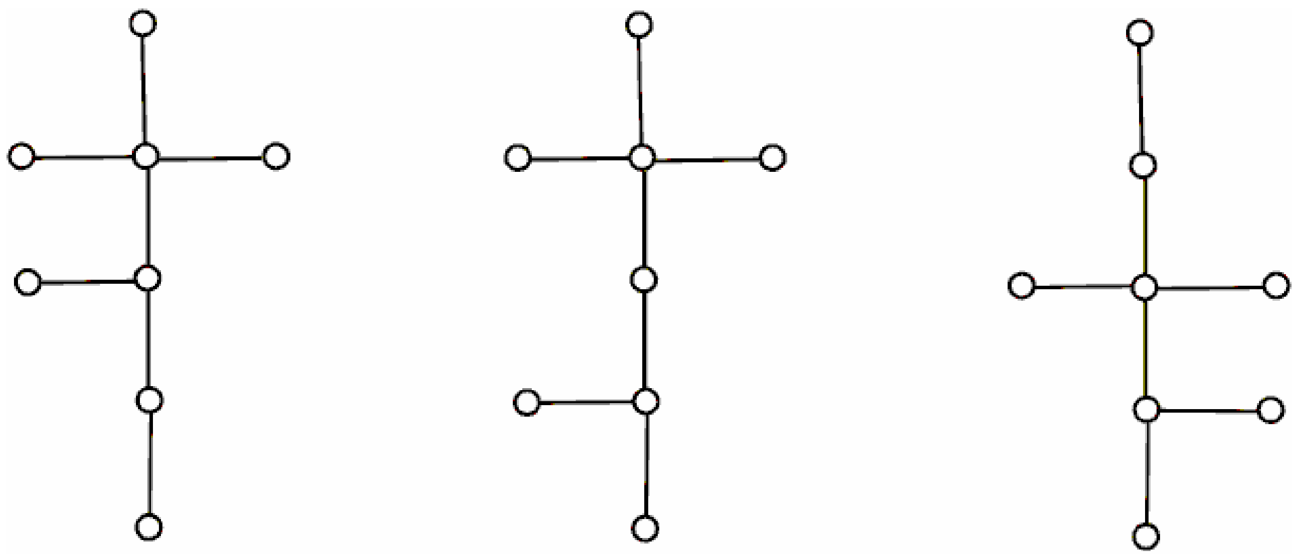
解 设T的阶数为n, 则边数为n–1，4度顶点的个数为n–7.
由握手定理得

$$2m = 2(n-1) = 5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$$

解出n = 8，4度顶点为1个.

例题

***T*的度数列为1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4，共有3棵非同构的无向树，如图所示：**



T_1 T_2 T_3

16.1无向树及其性质（回顾）

16.1无向树及其性质

- 连通无回路的无向图
- G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径
- G 中无回路且 m=n-1
- G 是连通的且 m=n-1
- G 是连通的且 G 中任何边均为桥
- G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.
- n阶非平凡的无向树至少有两片树叶（1度顶点）

第十六章 树

主要内容

- **16.1**无向树及其性质
- ~~**16.2**生成树~~
- ~~**16.3**根树及其应用~~

16.2 生成树

定义16.2 设G为无向图

(1) G的树——T 是G 的子图并且是树

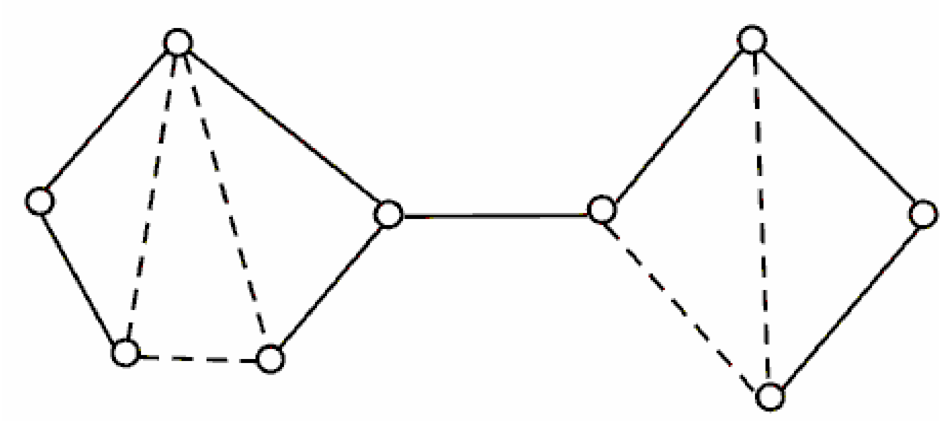
(2) G的生成树——T 是G 的生成子图并且是树

(3) 生成树T的树枝——T 中的边

(4) 生成树T的弦——不在T 中的边

(5) 生成树T的余树 $\overline{T}$ ——全体弦组成的集合的导出子图

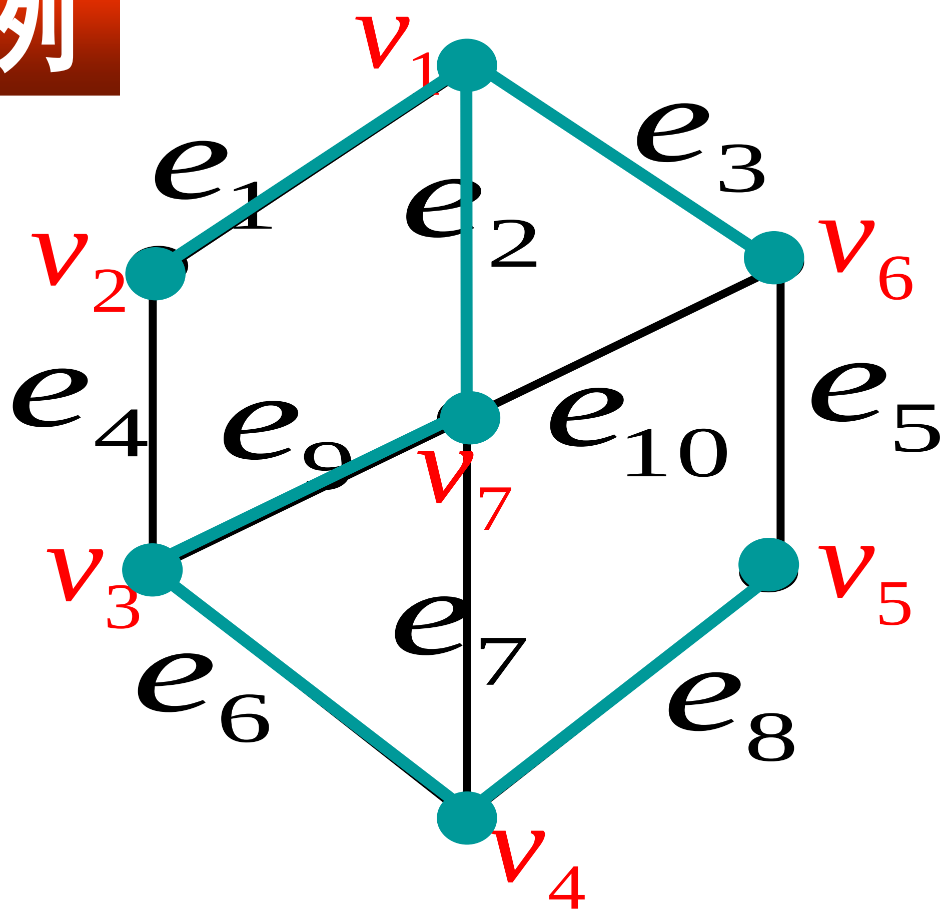
$\overline{T}$ 不一定连通，也不一定不含回路，如图所示:

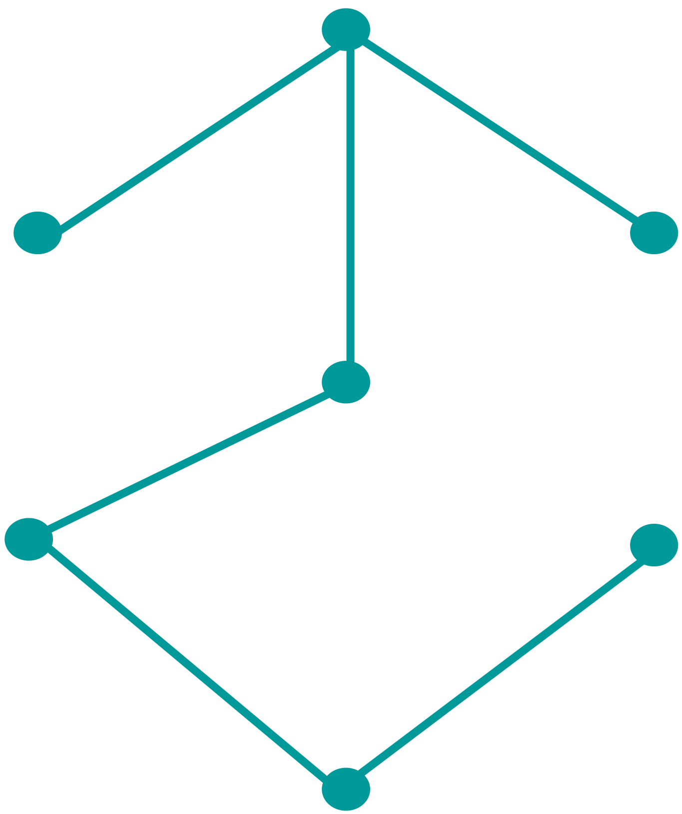


生成树存在条件

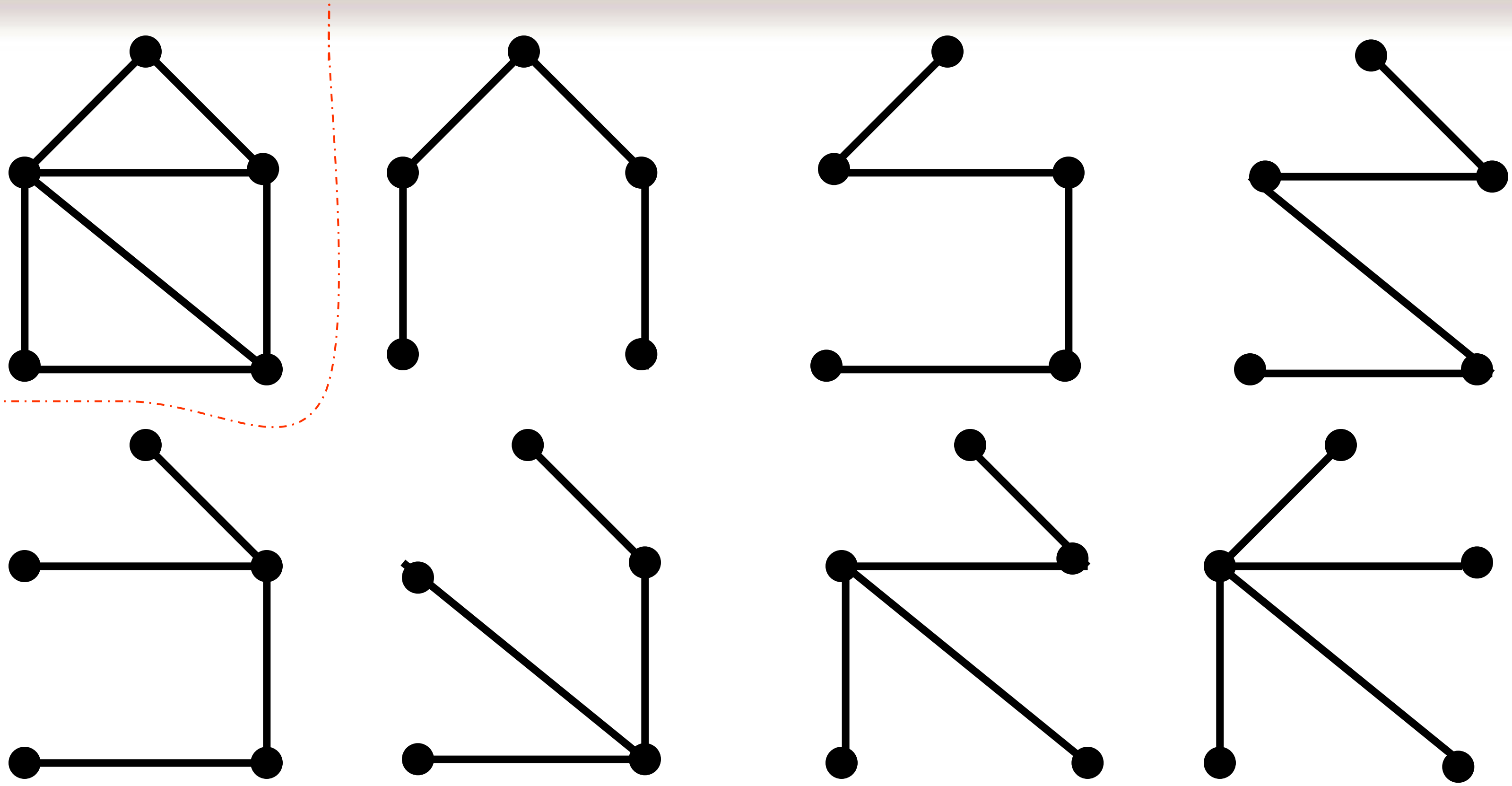
连通图至少有一棵生成树。

例





例



一个连通图可有多棵生成树

生成树存在条件

定理16.3 无向图G具有生成树当且仅当G连通.

证 必要性显然.
充分性用破圈法（注意：在圈上删除任何一条边，不破坏连通性）

推论1 G为n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$.

推论2 $\bar{T}$ 的边数为$m-n+1$.

推论3 $\bar{T}$ 为G的生成树T的余树，C为G中任意一个圈，则C与 $\bar{T}$ 一定有公共边.

证 否则，C中的边全在T中，这与T为树矛盾.

基本回路系统

定理16.4 设T为G的生成树，e为T的任意一条弦，则$T\cup e$中含一个只有一条弦其余边均为T的树枝的圈.

⌘ 不同的弦对应的圈不同！

证 设$e=(u,v)$，在T中u到v有惟一路径Γ，则$\Gamma\cup e$为所求的圈.

定义16.3 设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，设$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{m-n+1}$为$T$的弦. 设$C_r$为$T$添加弦$e'_r$产生的只含弦$e'_r$、其余边均为树枝的圈. 称$C_r$为$G$的对应树$T$的弦$e'_r$的基本回路或基本圈，$r=1, 2, \ldots, m-n+1$. 并称$\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$为$G$对应$T$的基本回路系统，称$m-n+1$为$G$的圈秩，记作$\xi(G)$.

求基本回路的算法：设弦$e=(u,v)$，先求T中u到v的路径Γ_{uv}，再并上弦e，即得对应e的基本回路.

基本割集的存在

定理16.5 设T是连通图G的一棵生成树，e为T的树枝，则G中存在只含树枝e，其余边都是弦的割集，且不同的树枝对应的割集也不同.

证 由定理16.1可知，e是T的桥，因而$T-e$有两个连通分支T_1和T_2，令

S_e={e' | $e'\in E(G)$且 e' 的两个端点分别属于$V(T_1)$和$V(T_2)$}，

由构造显然可知S_e为G的割集，$e\in S_e$且S_e中除e外都是弦，所以S_e为所求.

⌘ 不同的树枝对应的割集不同！

基本割集与基本割集系统

定义16.4 设T是n阶连通图G的一棵生成树，$e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$为$T$的树枝，$S_i$是$G$的只含树枝$e_i$的割集，则称$S_i$为$G$的对应于生成树$T$由树枝$e_i$生成的**基本割集**，$i$=1, 2, …, n–1. 并称$\{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$为$G$对应$T$的**基本割集系统**，称$n$–1为$G$的**割集秩**，记作$\eta(G)$.

求基本割集的算法:

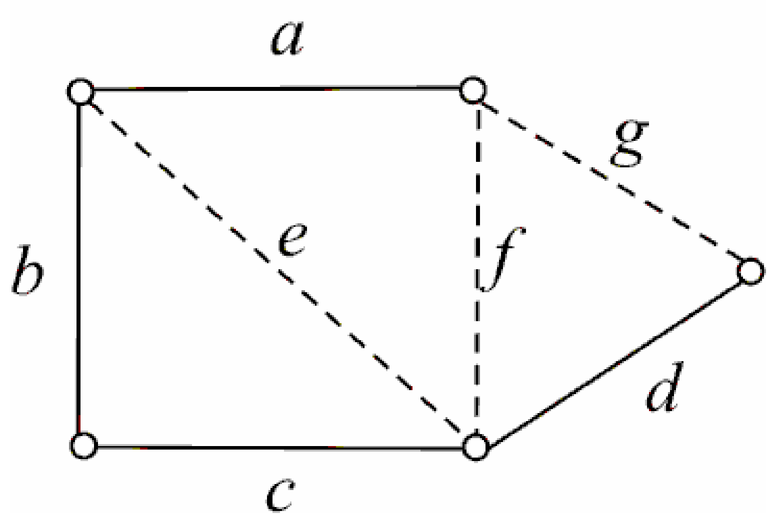
设e为生成树T的树枝，$T-e$为两棵小树T_1与T_2，令

$$S_e = \{e' \mid e' \in E(G) 且 e' 的两个端点分别属于 T_1 与 T_2\}$$

则S_e为e对应的基本割集.

实例

例3 下图实线边所示为生成树，求基本回路系统与基本割集系统



⌘ 不同的弦对应的圈不同！

⌘ 不同的树枝对应的割集不同！

解 弦e, f, g对应的基本回路分别为

$C_e = e\ b\ c,\ C_f = f\ a\ b\ c,\ C_g = g\ a\ b\ c\ d,$

$C_{基} = \{C_e, C_f, C_g\}.$

树枝a, b, c, d对应的基本割集分别为

$S_a = \{a, f, g\},\ S_b = \{b, e, f, g\},\ S_c = \{c, e, f\ g\},\ S_d = \{d, g\},$

$S_{基} = \{S_a, S_b, S_c, S_d\}.$

最小生成树

定义16.5 T是$G=<V,E,W>$的生成树

(1) $W(T)$——T各边权之和

(2) 最小生成树——G的所有生成树中权最小的

求最小生成树的一个算法:

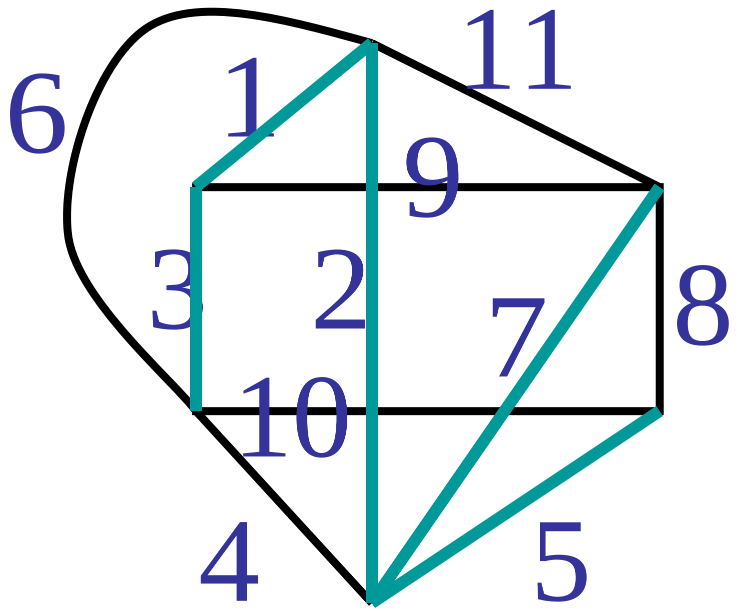
避圈法（Kruskal）设$G=<V,E,W>$，将G中非环边按权从小到大排序：$e_1, e_2, \ldots, e_m$.

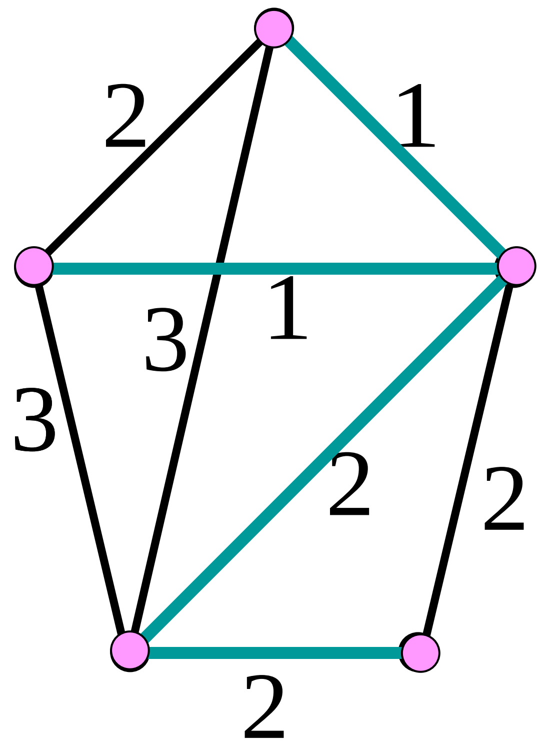
(1) 取e_1在T中

(2) 查e_2，若e_2与e_1不构成回路，取e_2也在T 中，否则弃e_2.

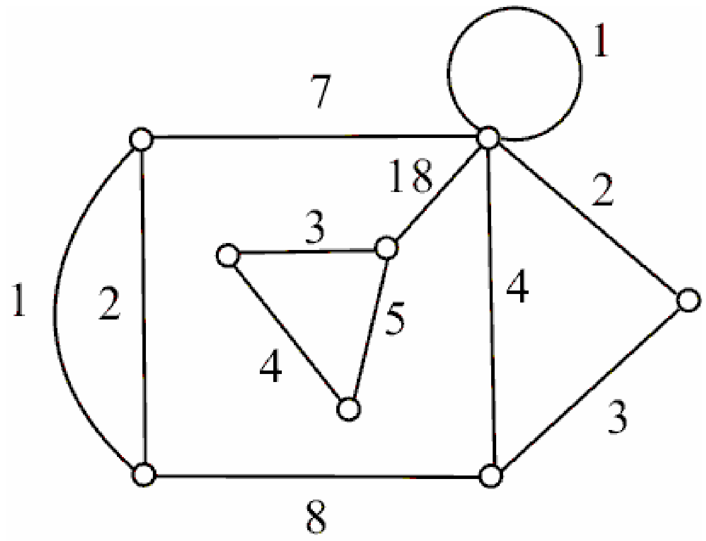
(3) 再查$e_3,\ldots,$ 直到得到生成树为止.

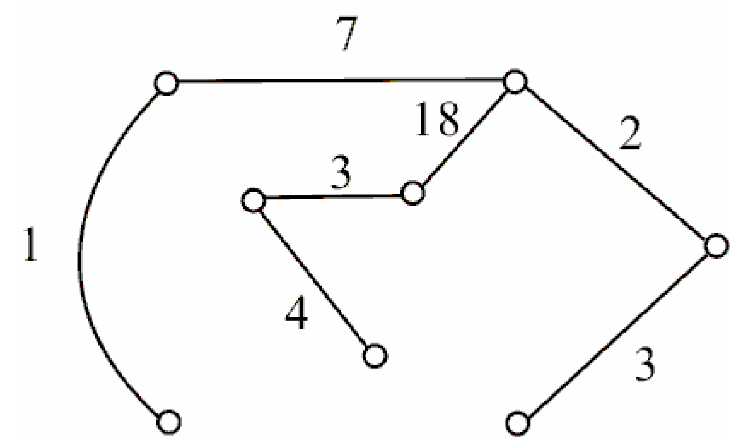
例





例4 求图的一棵最小生成树.





所求最小生成树:
$W(T)=38$

16.2 生成树（回顾）

- ~~16.2生成树~~
  - 相关概念(对于无向图G)
    - (1) G的树——T 是G 的子图并且是树
    - (2) G的生成树——T 是G 的生成子图并且是树
    - (3) 生成树T的树枝——T 中的边
    - (4) 生成树T的弦——不在T 中的边
    - (5) 生成树T的余树——全体弦组成的集合的导出子图
      - 不一定连通，也不一定不含回路, 边数为m-n+1
  - 基本回路系统
    - 不同的弦对应的圈不同
  - 基本割集系统
    - 不同的树枝对应的割集不同
  - 最小生成树

第十六章 树

主要内容

- **16.1**无向树及其性质
- ~~**16.2**生成树~~
- ~~**16.3**根树及其应用~~

16.3 根树及其应用

定义16.6 T是有向树（基图为无向树）

(1) T 为根树——T 中一个顶点入度为0，其余的入度均为1.

(2) 树根——入度为0的顶点

(3) 树叶——入度为1，出度为0的顶点

(4) 内点——入度为1，出度不为0的顶点

(5) 分支点——树根与内点的总称

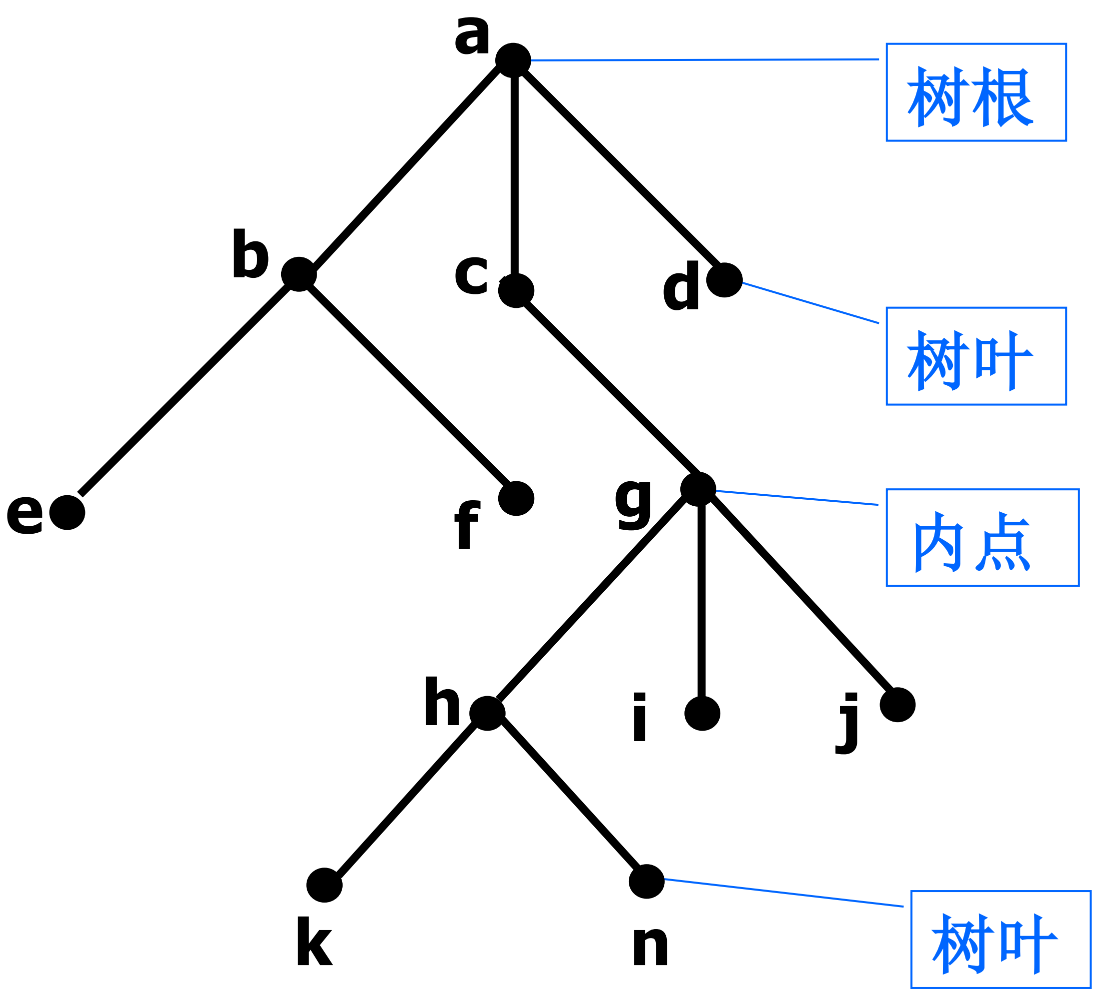
(6) 顶点v的层数——从树根到v的通路长度

(7) 树高——T 中层数最大顶点的层数

(8) 平凡根树——平凡图

根树实例

根树的画法——树根放上方，省去所有有向边上的箭头



内点和树根统称为分支点

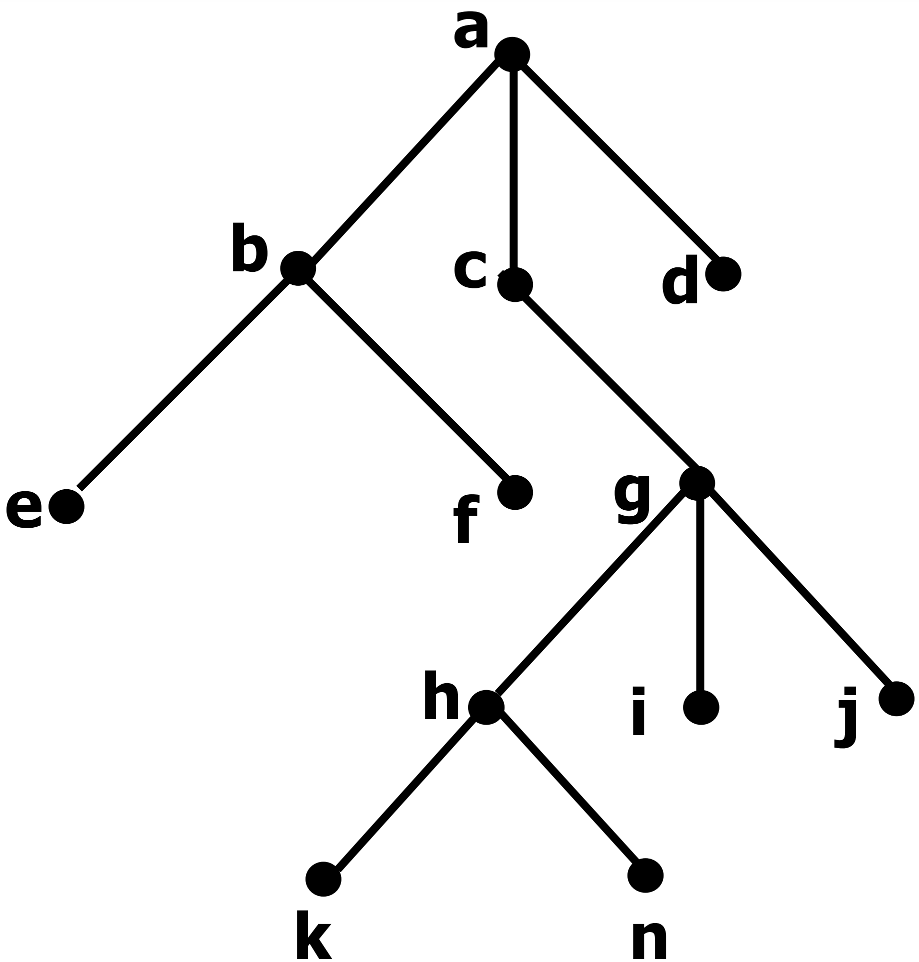
家族树与根子树

定义16.7 T 为非平凡根树

(1) 祖先与后代

(2) 父亲与儿子

(3) 兄弟



定义16.8 设v为根树T中任意一顶点，称v及其后代的导出子图为以v为根的根子树.

根树的分类

(1) T 为有序根树——同层上顶点标定次序的根树

(2) 分类

① r 叉树——每个分支点至多有r 个儿子

② r 叉有序树——r叉树是有序的

③ r 叉正则树——每个分支点恰有r 个儿子

④ r 叉正则有序树

⑤ r 叉完全正则树——树叶层数相同的r叉正则树

⑥ r 叉完全正则有序树

最优二叉树

定义16.9 设2叉树T有t片树叶$v_1, v_2, \ldots, v_t$，权分别为$w_1, w_2, \ldots, w_t$，称 $W(t)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为T的权，其中$l(v_i)$是v_i的层数. 在所有有t片树叶，带权$w_1, w_2, \ldots, w_t$的2叉树中，权最小的2叉树称为**最优2叉树**.

求最优树的算法—— Huffman算法

给定实数$w_1, w_2, \ldots, w_t$，且$w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_t$.

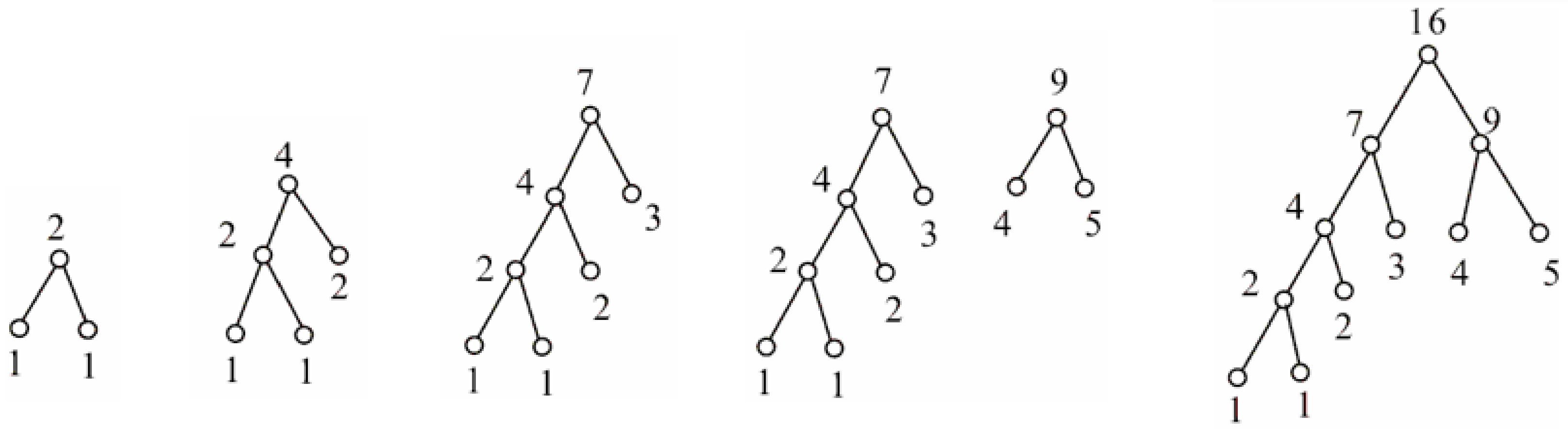
(1) 连接权为w_1, w_2的两片树叶，得一个分支点，其权为w_1+w_2.

(2) 在$w_1+w_2, w_3, \ldots, w_t$中选出两个最小的权，连接它们对应的顶点(不一定是树叶)，得新分支点及所带的权.

(3) 重复(2)，直到形成 $t-1$个分支点，t片树叶为止.

例 5 **求带权为1, 1, 2, 3, 4, 5的最优树.**

解题过程由下图给出，$W(T)=38$



波兰符号法与逆波兰符号法

行遍或**周游根树T**——对T的每个顶点访问且仅访问一次.

对2叉有序正则树的周游方式:

① **中序行遍法**——次序为：左子树、根、右子树

② **前序行遍法**——次序为：根、左子树、右子树

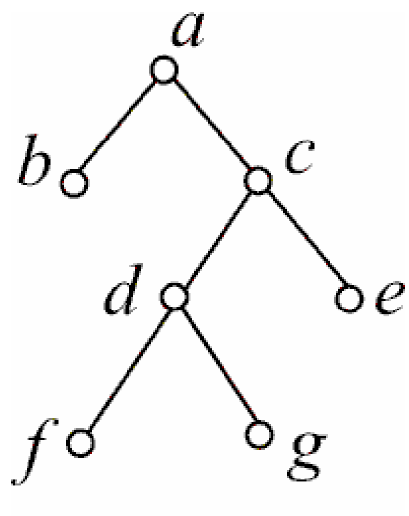
③ **后序行遍法**——次序为：左子树、右子树、根

对图所示根树按中序、前序、后序行遍法访问结果分别为:

$b\ \underline{a}\ (f\ \underline{d}\ g)\ \underline{c}\ e$,

$\underline{a}\ b\ (\underline{c}\ (\underline{d}\ f\ g)\ e)$,

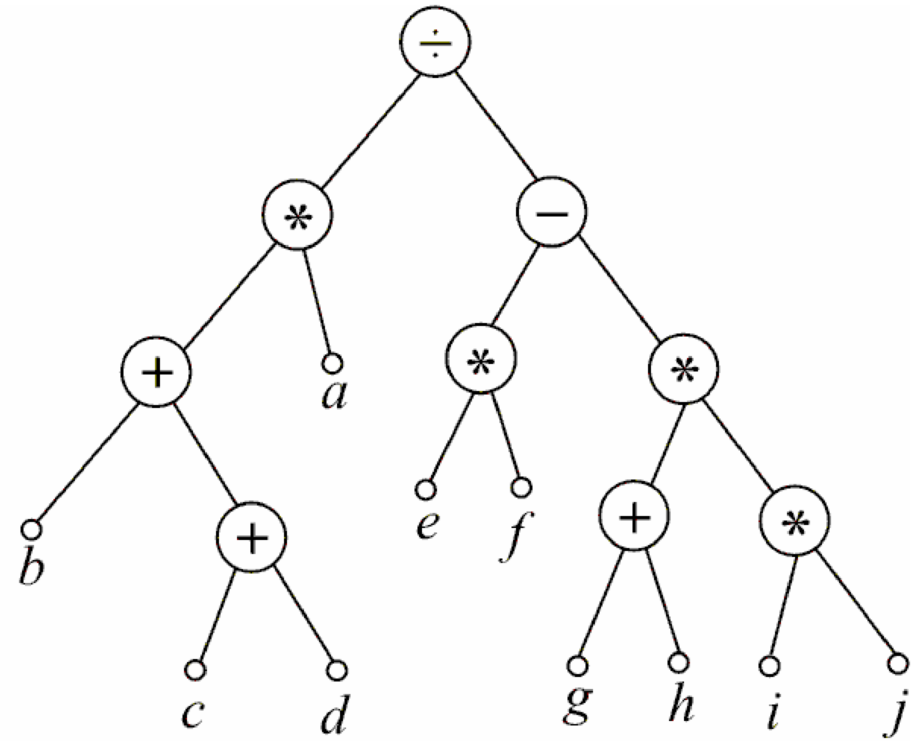
$b\ ((f\ g\ \underline{d})\ e\ \underline{c})\ \underline{a}$



用2叉有序正则树存放算式

存放规则

- 最高层次运算放在树根
- 后依次将运算符放在根子树的根上
- 数放在树叶上
- 规定：被除数、被减数放在左子树树叶上



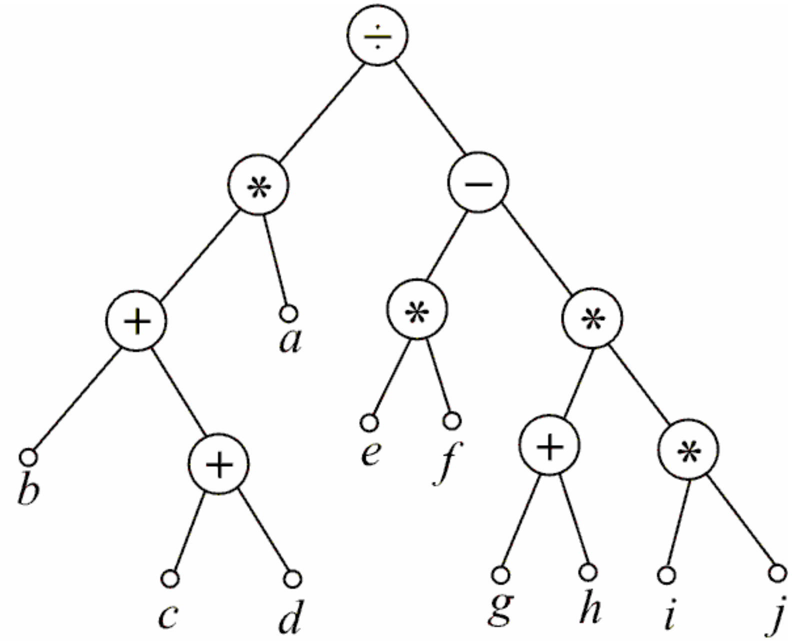
算式 $((b+(c+d))*a)\div((e*f)-(g+h)*(i*j))$
存放在图所示2叉树上.

波兰符号法

波兰符号法

按前序行遍法访问存放算式的2叉有序正则树，其结果不加括号，规定每个运算符号与其后面紧邻两个数进行运算，运算结果正确. 称此算法为波兰符号法或前缀符号法. 对右图的访问结果为:

$$\div * + b + c\, d\, a - * e\, f * + g\, h * i\, j$$



逆波兰符号法

按后序行遍法访问，规定每个运算符与前面紧邻两数运算，称为逆波兰符号法或后缀符号法. 对上图的访问结果为:

$$b\, c\, d + + a * e\, f * g\, h + i\, j * * - \div$$

16.3根树及其应用（回顾）

- ~~16.3根树及其应用~~
  - ~~最优2叉树~~
  - ~~周游根树~~

第十六章 树（回顾）

- 16.1无向树及其性质
  - 连通无回路的无向图
  - G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径
  - G 中无回路且 m=n-1
  - G 是连通的且 m=n-1
  - G 是连通的且 G 中任何边均为桥
  - G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.
  - n阶非平凡的无向树至少有两片树叶（1度顶点）
- ~~16.2生成树~~
- ~~16.3根树及其应用~~