第一部分 数理逻辑

- 1数理逻辑
  - ch1命题逻辑的基本概念
    - 1.1命题与联结词
    - 1.2 命题公式及其赋值
  - ch2命题逻辑的等值演算
    - 2.1等值式
    - 2.2析取范式与合取范式
    - 2.3 联结词完备集
    - 2.4 可满足性问题与消解法
  - ch3命题逻辑的推理理论
    - 3.1推理的形式结构
    - 3.2自然推理系统P
  - ch4一阶逻辑的基本概念
    - 4.1一阶逻辑命题符号化
    - 4.2一阶逻辑公式及其解释
  - ch5一阶逻辑的等值演算和推理
    - 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则
    - 5.2 一阶逻辑前束范式
    - 5.3 一阶逻辑的推理理论

苏格拉底三段论

- 在命题逻辑中，把命题分解到原子命题为止，认为原子命题是不能再分解的，仅仅研究以原子命题为基本单位的复合命题之间的逻辑关系和推理。
- 这样，有些推理用命题逻辑就难以确切地表示出来。例如，著名的苏格拉底三段论。

所有的人都是要死的，
苏格拉底是人，
所以苏格拉底是要死的。

苏格拉底三段论

所有的人都是要死的，
苏格拉底是人，
所以苏格拉底是要死的。

- 根据常识，认为这个推理是正确的。但是，若用命题逻辑来表示，设 p, q和r分别表示这三个原子命题，则有$p, q \Rightarrow r$
- 然而，$(p \wedge q) \rightarrow r$并不是永真式，故上述推理形式是错误的。

$(p \wedge q) \rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

原因？

- 一个推理，得出矛盾的结论，问题在哪里呢？问题就在于这类推理中，各命题之间的逻辑关系不是体现在原子命题之间，而是体现在构成原子命题的内部成分之间，即体现在命题结构的更深层次上。
- 对此，命题逻辑是无能为力的。所以，在研究某些推理时，有必要对原子命题作进一步分析，分析出其中的个体（或客体）词，谓词和量词，研究它们的形式结构的逻辑关系、正确的推理形式和规则，我们将基于谓词分析的逻辑称为一阶逻辑（谓词逻辑）。
- 一阶逻辑（谓词逻辑）是命题逻辑的扩充和发展。

第四章 一阶逻辑基本概念

主要内容

- **4.1一阶逻辑命题符号化**

  个体词、谓词、量词

  一阶逻辑命题符号化
- **4.2一阶逻辑公式及其解释**

  一阶语言

  合式公式

  合式公式的解释

  永真式、矛盾式、可满足式

4.1一阶逻辑命题符号化

原子命题

客体：不依人们主观而存在的客观实体,可以是具体事物或抽象概念,通常用**小写**字母表示.

谓词：描述客体的性质、特征,或客体间的关系的词,通常用**大写**字母表示.

实例

在命题逻辑中，

p： “张三是个大学生”，

q： “李四是个大学生”。

在谓词逻辑中，

A： “是个大学生”，

c： “张三”，

e： “李四”，则

A(c)： “张三是个大学生”，

A(e)： “李四是个大学生”。

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 个体词 — 所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体

  个体常项：具体的事务，用a, b, c表示

  个体变项：抽象的事物，用x, y, z表示

  个体域(论域) — 个体变项的取值范围

  有限个体域，如 $\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$

  无限个体域，如 N, Z, R, …

  全总个体域——由宇宙间一切事物组成

个体词

设 R(x)：“ x 是大学生”，

如果 x 的个体域为:

- “某大学里的学生”，则 R(x) 是永真式。
- “某单位里的职工”，则 R(x) 对一些人为真，对另一些人为假。

谓词

- 谓词——表示个体词性质或相互之间关系的词

  谓词常项　如, $F(a)$: a是人

  谓词变项　如, $F(x)$: x具有性质F

- n（$n\geq 1$）元谓词（含有n个个体变项的谓词）
  - ✓ 一元谓词(n=1)——表示性质
  - ✓ 多元谓词($n\geq 2$)——表示事物之间的关系

    如, $L(x,y)$：x与 y 有关系 L，$L(x,y)$：$x\geq y$，…
  - ✓ 0元谓词——不含个体变项的谓词, 即命题常项或命题变项

一元谓词

- 通常一元谓词表达了客体的性质。
  如 **A(*x*)** 表示*x*具有性质**A**：
  - ✓ 张三是大学生。
  - ✓ 李四聪明。
  - ✓ 王五学习很好。
  - ✓ 7是素数。
  - ✓ ……

多元谓词

- 通常多元谓词表达了客体之间的关系。

如 **P(x_1, x_1, … , x_n)** 表示x_1, x_1, … , x_n具有关系**P**：

✓ B(x, y) 可以表示：

- x 小于 y.
- 地球绕着太阳转.
- 张明和张华是兄弟.
- ……

✓ L(x, y, z) 可以表示:

- x在 y 和 z 之间.
- $x + y = z$.
- ……

- 在多元谓词表示式中,客体名称字母出现的次序与事先约定有关.

实例1

例1 用0元谓词将命题符号化

(1) 墨西哥位于南美洲

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$ 是有理数

(3) 如果$2>3$，则$3<4$

解：在命题逻辑中：

(1) p，p为墨西哥位于南美洲（真命题）

(2) $p \to q$，其中，p：$\sqrt{2}$是无理数，q：$\sqrt{3}$ 是有理数.（假命题）

(3) $p \to q$，其中，p：$2>3$，q：$3<4$.（真命题）

在一阶逻辑中：

(1) $F(a)$，其中，a：墨西哥，$F(x)$：x位于南美洲.

(2) $F(\sqrt{2}) \to G(\sqrt{3})$,

其中，$F(x)$：x是无理数，$G(x)$：x是有理数

(3) $F(2, 3) \to G(3, 4)$，其中，$F(x, y)$：$x>y$，$G(x, y)$：$x<y$

量词

- 例如：$R(x)$表示x是大学生，x的个体域为“某单位里的职工”
  - $R(x)$ ：某单位所有的职工都是大学生？
  - $R(x)$ ：某单位有一些职工是大学生？
- 为了避免理解上的歧义，还需要引入用以刻划“所有的”、“有一些”等表示不同数量的词，即量词(表示数量的词)。

全称量词

- 全称量词∀: 表达"对所有的"，"每一个"，"对任一个"，"任意的"，"凡"，"都"等。

  $\forall x$: 对个体域中所有的x

  如, $\forall xF(x)$表示个体域中所有的x具有性质F

例

1）所有的人都是要呼吸的，个体域为人。

2）每个学生都要参加考试，个体域为学生。

3）所有的人都要呼吸，并且每个学生都要考试。

实例

1）所有的人都是要呼吸的，个体域为人。

设$H(x)$: x要呼吸

$\forall x H(x)$

2）每个学生都要参加考试，个体域为学生。

设Q(y):y要考试

$\forall y Q(y)$

3）所有的人都要呼吸，并且每个学生都要考试。

$\forall x H(x) \land \forall y Q(y)$?

特性谓词

- 为了方便我们通常使用全总个体域，对于每一个客体变元的变化范围，通常用**特性谓词**加以限制。除非特别说明，否则将采用全总个体域。
- 对于 $\forall$，表示客体变化范围的特性谓词通常作为蕴含的前件。

实例

符号化下列命题：

1）所有的人都是要呼吸的。

2）每个学生都要参加考试。

3）所有的人都要呼吸，并且每个学生都要考试。

解

(1)

$M(x)$:x是人

$H(x)$:x要呼吸

$\forall x(M(x) \rightarrow H(x))$

(2)

$P(x)$: x 是学生

$Q(x)$: x 要参加考试

$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

(3)

$\forall x(M(x) \rightarrow H(x)) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

存在量词

- 存在量词∃: 表达“存在”，,”有的”，“有一个”，“至少有一个”，“有 一些”等。

  $\exists x$: 个体域中有一个x

  如, $\exists xF(x)$表示个体域中有一个x具有性质F。

例

解：

1） 有些人是聪明的，个体域为人。

2） 有些学生早饭吃面包，个体域为学生。

1) $R(x)$: x 是聪明的.

$\exists xR(x)$

2) $E(y)$: y 早饭吃面包.

$\exists yE(y)$

全总个体域

- 对于∃，表示客体变化范围的特性谓词通常作为合取项。

例

符号化下列命题：

1) **有些人是聪明的。**

2) **有些学生早饭吃面包。**

解：

1) $M(x)$: x是人.

$R(x)$: x 是聪明的.

$\exists x(M(x) \wedge R(x))$

2) $S(x)$: x是学生.

$E(x)$: x早饭吃面包.

$\exists x(S(x) \wedge E(x))$

实例2

例 2 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美

(2) 有人用左手写字

个体域分别为

(a) D为人类集合

(b) D为全总个体域

解 (a) (1) $\forall xG(x)$，$G(x)$：x爱美

(2) $\exists xG(x)$，$G(x)$：x用左手写字

(b) $F(x)$：x为人，$G(x)$：x爱美

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

注意：

1. 引入特性谓词$F(x)$

2. (1),(2)是一阶逻辑中两个“基本”公式

使用特性谓词常犯错误

对于全称量词∀，用∧代替→

错误之一

对于：所有的人都是要呼吸的

设：$M(x)$: x是人　$P(x)$: x要呼吸

则 $(\forall x)\,(M(x) \land P(x))$　×

翻译为：宇宙万物都是人并且都要呼吸

- 对于存在量词∃，用→代替∧

错误之二

对于：有一些人是聪明的

设：$M(x)$: x是人　$Q(x)$: x聪明

则　$(\exists x)\,(M(x) \rightarrow Q(x))$　×

翻译为：在宇宙中存在这样的个体，如果它是人，则它是聪明的。

实例3

例3 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解 注意：题目中没给个体域，一律用全总个体域

(1) 令$F(x)$：x为正数，$G(y)$：y为负数， $L(x,y)$：$x>y$

$$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$$

或者 $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$

(2) 令$F(x)$：x是无理数，$G(y)$：y是有理数，$L(x,y)$：$x>y$

$$\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$$

或者 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$

实例4

例4 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 没有不呼吸的人

(2) 不是所有的人都喜欢吃糖

解 (1) $F(x)$: x是人， $G(x)$: x呼吸

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $F(x)$: x是人， $G(x)$: x喜欢吃糖

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

实例5

例5_1 设个体域为实数域, 将下面命题符号化

(1) 对每一个数x都存在一个数y使得$x<y$

(2) 存在一个数x使得对每一个数y都有$x<y$

解 设 $L(x,y)$: $x<y$

(1) $\forall x \exists y L(x,y)$

(2) $\exists x \forall y L(x,y)$

注意: $\forall$与$\exists$不能随意交换

显然(1)是真命题, (2)是假命题

实例（续）

例5_2 设个体域为全总个体域, 将下面命题符号化

(1) 对每一个数x都存在一个数y使得$x<y$

(2) 存在一个数x使得对每一个数y都有$x<y$

解 设R(x):x是数； $L(x,y)$: $x<y$

(1) $\forall x(R(x)\rightarrow\exists y(R(y)\wedge L(x,y)))$

或，$\forall x\exists y(R(x)\rightarrow(R(y)\wedge L(x,y)))$

(2) $\exists x(R(x)\wedge\forall y(R(y)\rightarrow L(x,y)))$

或，$\exists x\forall y(R(x)\wedge(R(y)\rightarrow L(x,y)))$

符号化下列命题:

(1)所有的人都长着黑头发。

(2)有的人登上过月球。

(3)没有人登上过木星。

(4)在美国留学的学生未必都是亚洲人。

解: 设M(x): x是人。

(1) 令F(x):x长着黑头发

$\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$

(2) 令G(x):x登上过月球

$\exists x(M(x) \land G(x))$

(3) 令H(x):x登上过木星

$\neg\exists x(M(x) \land H(x))$

或 $\forall x(M(x) \rightarrow \neg H(x))$

(4) 令F(x):x在美国留学的学生;

G(x):x是亚洲人.

$\neg\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

或 $\exists x(F(x) \land \neg G(x))$

符号化下列命题:

(1)兔子比乌龟跑得快。

(2)并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

(3)不存在跑得同样快的两只兔子。

(4)有的兔子比所有的乌龟跑得快。

(5)所有兔子都比某些乌龟跑得快。

解: 设F(x): x是兔子, G(y): y是乌龟, H(x,y): x比y跑得快,
L(x,y):x与y跑得一样快。

(1) $\forall x(F(x)\to\forall y(G(y)\to H(x,y)))$或$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y))$

(2) $\neg\forall x(F(x)\to\forall y(G(y)\to H(x,y)))$或$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y))$

(3) $\neg\exists x(F(x)\wedge\exists y(F(y)\wedge L(x,y)))$或$\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge F(y)\wedge L(x,y))$

(4) $\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\to H(x,y)))$或$\exists x\forall y(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))$

(5) $\forall x(F(x)\to\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$或$\forall x\exists y(F(x)\to(G(y)\wedge H(x,y)))$

多个量词的使用

- 多个量词出现时，量词对变元的约束通常与量词的次序有关，量词的次序不能随意颠倒。
- 对于命题中的多个量词，约定从左到右的次序读出。

例如：设$G(x,y)$: x与y能配成一对搭档，个体域为人。

$\forall x\forall yG(x,y)$：所有的x和所有的y都能配成一对。

$\exists x\exists yG(x,y)$：存在一个x与某个y能配成一对。

$\forall x\exists yG(x,y)$：对于每一个x，都存在一个y，x与y能配成一对。

$\exists y\forall xG(x,y)$：存在一个y，对于每一个x，x与y能配成一对。

练习

“这世界上只要有一个女孩子生下来，就一定会有一个男孩子在世界的另一个地方等她。”

（个体域为全总个体域）

设F(x): x是女孩子，M(y): y是男孩子，W(x,y): y等x

$$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(M(y)\wedge W(x,y)))$$

或 $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow(M(y)\wedge W(x,y)))$

小结

- 一元谓词用以描述某一个个体的某种特性，而*n*元谓词则用以描述*n*个个体之间的关系；
- 根据命题的实际意义，选用全称量词或存在量词。全称量词加入时，其刻划个体域的特性谓词将以蕴涵的前件加入，存在量词加入时，其刻划个体域的特性谓词将以合取项加入；
- 有些命题在进行符号化时，由于语言叙述不同，可能翻译不同，但它们表示的意思是相同的，即句子符号化形式可不止一种.
- 如有多个量词，则读的顺序按从左到右的顺序；另外，量词对变元的约束，往往与量词的次序有关，不同的量词次序，可以产生不同的真值，此时对多个量词同时出现时，不能随意颠倒它们的顺序，颠倒后会改变原有的含义。

主要内容

- **4.1一阶逻辑命题符号化**
  个体词、谓词、量词
  一阶逻辑命题符号化
- **4.2一阶逻辑公式及其解释**
  一阶语言
  合式公式
  合式公式的解释
  永真式、矛盾式、可满足式

4.2 一阶逻辑公式及解释

定义4.1 设L是一个非逻辑符集合, 由L生成的一阶语言$\mathscr{L}$的字母表包括下述符号:

非逻辑符号

(1) 个体常项符号: $a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 函数符号: $f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 谓词符号: $F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

逻辑符号

(4) 个体变项符号: $x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号: $\forall, \exists$

(6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号: (,), ,

一阶语言$\mathscr{L}$的项与原子公式

定义4.2 $\mathscr{L}$的项的定义如下：

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1),(2)得到的

如，a, x, $x+y$, $f(x)$, $g(x,y)$等都是项

定义4.3 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是$\mathscr{L}$的任意n元谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是$\mathscr{L}$的任意n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是$\mathscr{L}$的原子公式.

如，$F(x, y)$, $F(f(x_1, x_2), g(x_3, x_4))$等均为原子公式

一阶语言$\mathscr{L}$的公式

定义4.4 $\mathscr{L}$的**合式公式**定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式

(5) 只有有限次地应用(1)—(4)形成的符号串才是合式公式.

- 合式公式简称**公式**

如，$F(x)$, $F(x)\vee\neg G(x,y)$, $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ $\exists x\forall y(F(x)\rightarrow G(y)\wedge L(x,y))$等都是合式公式

变元的约束

定义4.5

在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称x为**指导变元**，

A为相应量词的**辖域**.

在$\forall x$和 $\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为**约束出现**，

A中不是约束出现的其他变项均称为是**自由出现**.

实例

1) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

指导变元

辖域

约束出现

实例

$$2)\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$$

指导变元

辖域

指导变元

辖域

实例

$$3)\ \ \forall x \forall y(\underline{P(x,y) \wedge Q(x,y)}) \wedge \exists x \underline{P(x,y)}$$

指导变元

辖域

指导变元

辖域

自由出现

实例

$$4)\forall x\underline{(P(x)\wedge\exists xQ\underline{(x,z)}\rightarrow\exists yR\underline{(x,y)})}\vee Q(x,y)$$

指导变元

辖域

指导变元

辖域

指导变元

辖域

自由出现

实例

- 指出下列各公式中的指导变元，各量词的辖域，自由出现以及约束出现的个体变元

1） $\forall x(F(x,y)\to G(x,z))$

2） $\exists x(F(x,y,z)\to \forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$

解：1） $\forall x(F(x,y)\to G(x,z))$

- ✓ x为指导变元，$(F(x,y)\to G(x,z))$为$\forall x$ 的辖域，
- ✓ x的两次出现均为约束出现，
- ✓ y与 z 均为自由出现

实例

2）$\exists x(F(x,y,z)\rightarrow\forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$

- $\exists x$中的x是指导变元, 辖域$(F(x,y,z)\rightarrow\forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$
- $\forall y$中的y是指导变元, 辖域为$(G(x,y)\wedge H(x,y,z))$
- x的3次出现都是约束出现
- y的第一次出现是自由出现, 后2次是约束出现
- z的2次出现都是自由出现

公式的解释

定义4.7 设$\mathscr{L}$是L生成的一阶语言, $\mathscr{L}$的**解释**I由4部分组成:

(a) 非空个体域 D_I.

(b) 对每一个个体常项符号$a\in L$, 有一个 $\bar{a}\in D_I$, 称 $\bar{a}$ 为a在I中的解释.

(c) 对每一个n元函数符号$f\in L$, 有一个D_I上的n元函数 $\bar{f}: D_I^n \to D_I$, 称 $\bar{f}$ 为f在I中的解释.

(d) 对每一个n元谓词符号$F\in L$, 有一个D_I上的n元谓词常项$\bar{F}$, 称$\bar{F}$ 为F在I中的解释.

I下的赋值σ: 对每个个体变项符号x指定D_I中的一个值$\sigma(x)$.

设公式A, 取个体域D_I, 把A中的个体常项符号a、函数符号f、谓词符号F分别替换成它们在I中的解释$\bar{a}$、$\bar{f}$ 、$\bar{F}$, 且将A中自由出现的个体变项符号x替换成$\sigma(x)$, 则称所得到的公式A'为A在I下的**解释**, 或A在I下**被解释成**A'.

实例

例6 给定解释 I和I下赋值σ如下：

(a) 个体域 D=R

(b) $\bar{a}=0$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y,\quad \bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$ (e) $\sigma(x)=1, \sigma(y)=2$

写出在给定的解释I和I下赋值σ的下列公式的真值.

(1) $\exists xF(f(x,a),g(x,a))$

$\exists x(x+0=x\cdot 0)$ 真

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,y),g(x,y))\rightarrow F(x,y))$

$\forall x\forall y(x+y=x\cdot y\rightarrow x=y)$ 假

(3) $\forall xF(g(x,a), x)\rightarrow F(x,y)$

$\forall x(x\cdot 0=x)\rightarrow(1=2)$ 真

封闭的公式

定义4.6 若公式A中不含自由出现的个体变项，则称A为**封闭的公式**，简称**闭式**.

例如，$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$ 为闭式，
而 $\exists x(F(x)\wedge G(x,y))$ 不是闭式

定理4.1 闭式在任何解释下都是命题

注意: 不是闭式的公式在解释下可能是命题, 也可能不是命题

例如： $\forall x(x\cdot y=0)$不是命题
$\forall x(x\cdot 0=x)\rightarrow(x=y)$是真命题

公式的类型

定义4.8 若公式A在任何解释和该解释的任何赋值下均为真, 则称A为永真式(逻辑有效式). 若A在任何解释和该解释的任何赋值下均为假, 则称A为矛盾式(永假式). 若至少有一个解释和该解释下的一个赋值使A为真, 则称A为可满足式.

几点说明:

永真式为可满足式，但反之不真

判断公式是否是可满足的(永真式, 矛盾式)是不可判定的

一阶逻辑的判定问题

- 若说一阶逻辑是可判定的，就要求给出一个能行的方法，使得对任一公式都能判断是否是有效的。所谓能行的方法，乃是一个机械方法，可一步一步做下去，并在有穷步内实现判断。
- 由于一阶逻辑中的永真(永假)公式，要求所有解释*I*都满足(弄假)该公式。而解释*I*依赖于一个非空集合*D*。由于集合*D*可以是无穷集合，而集合*D*的“数目”也可能是无穷多个，因此，所谓公式的“所有”解释，实际上是无法考虑的。

一阶逻辑的判定问题

Alan Mathison Turing
1912.6.23—1954.6.7

- 由于一阶公式的复杂性和解释的多样性，至今还没有一个可行的算法判定任意公式的类型。
- 早在1936年，*Churen*和*Turing*各自独立地证明了：对于一阶逻辑，其判定问题是不可解的。

代换实例

定义4.9 设A_0是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用A_i $(1 \le i \le n)$ 处处代替A_0中的p_i，所得公式A称为A_0的代换实例.

例如， $F(x) \to G(x)$, $\forall x F(x) \to \exists y G(y)$等都是$p \to q$的代换实例.

定理4.2 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例7 判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式？

(1) $\forall xF(x)\to(\exists x\exists yG(x,y)\to\forall xF(x))$

重言式 $p\to(q\to p)$ 的代换实例，故为永真式.

(2) $\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

矛盾式 $\neg(p\to q)\wedge q$ 的代换实例，故为永假式.

(3) $\forall x(F(x)\to G(x))$

解释I_1: 个体域N, $F(x)$:x>5, $G(x)$: x>4, 真

解释I_2: 个体域N, $F(x)$:x<5, $G(x)$:x<4, 假

结论: 非永真式的可满足式

(4) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

解释I_1: D_1=N, $F(x)$:x是偶数, $G(x)$: x是素数, 真

解释I_2:D_2=N, $F(x)$:x是偶数, $G(x)$: x是奇数, 假

结论: 非永真式的可满足式

主要内容

- **4.1一阶逻辑命题符号化**
  个体词、谓词、量词
  一阶逻辑命题符号化
- **4.2一阶逻辑公式及其解释**
  一阶语言
  合式公式
  合式公式的解释
  永真式、矛盾式、可满足式