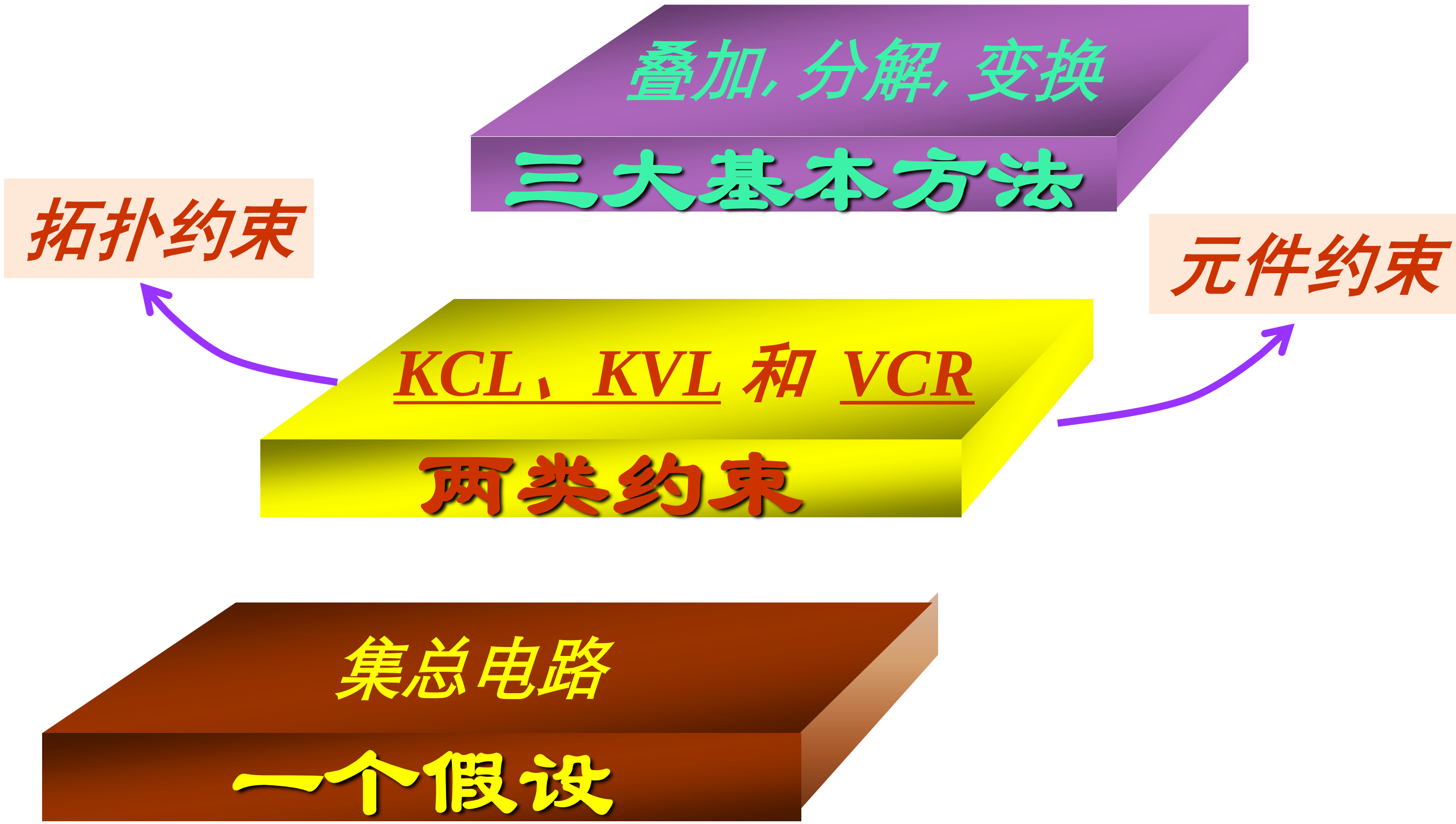
第4讲 3-1 3-2 3-3

网络函数 叠加原理 功率计算

• 学习电路分析所需要的基本原理



第三章　叠加方法与网络函数

3-1　线性电路的比例性　网络函数

3-2　叠加原理

3-3　叠加方法与功率计算(结论)

3.1 线性电路的比例性 网络函数

1. 线性电路(linear circuit)

由线性元件及独立电源组成的电路为线性电路。

数学上看线性：比例性和可加性

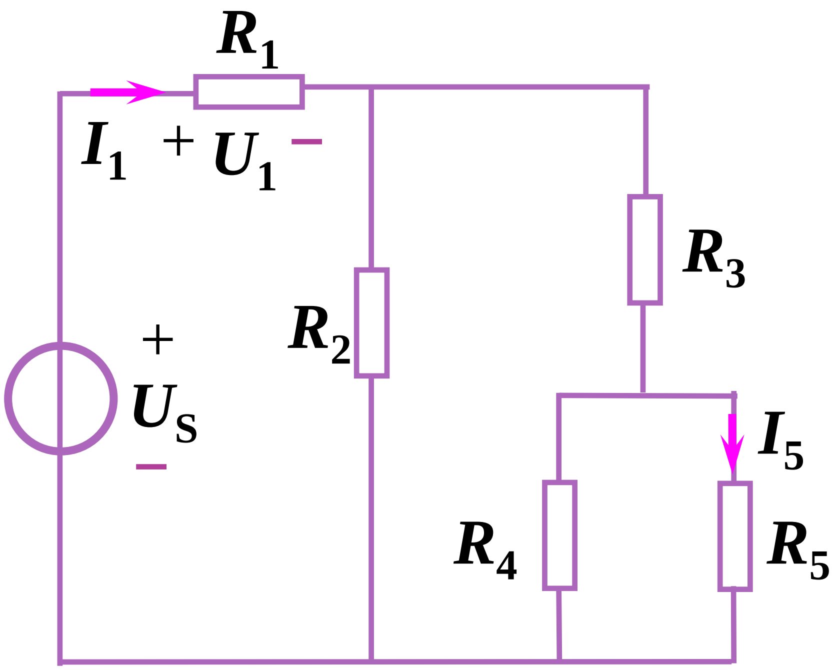
激励(excitation)：电路输入，指独立电源或信号源。

响应(response)：激励引起，如：元件支路的电压和电流。

2. 比例性 (齐次性) (homogeneity)

在单一激励的线性时不变电路中，激励增大多少倍，响应也增大相同的倍数。

求响应I_1、I_5与激励之间关系。



$$R = R_1 + R_2 // \left(R_3 + R_4 // R_5 \right)$$

$$I_1 = \frac{U_S}{R} = \frac{1}{R} U_S = K_1 U_S$$

响应I_1、I_5与激励U_S存在比例性

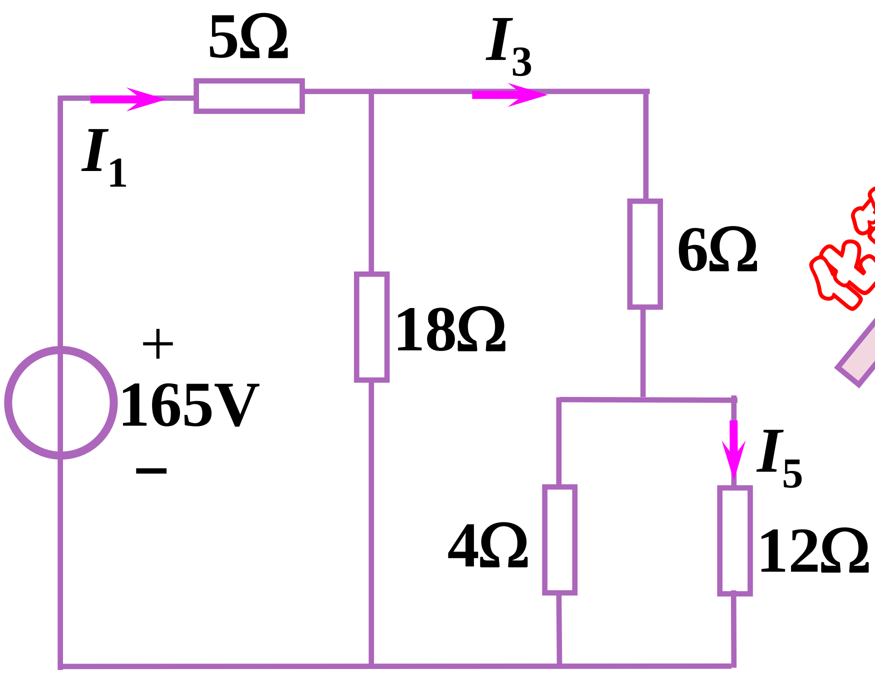
$$I_5 = I_1 \cdot \frac{R_2}{R_2 + \left(R_3 + R_4 // R_5 \right)} \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_5}$$

$$= \frac{R_2 R_4}{R \cdot \left[R_2 + \left(R_3 + R_4 // R_5 \right) \right] \left(R_4 + R_5 \right)} U_S = K_2 U_S$$

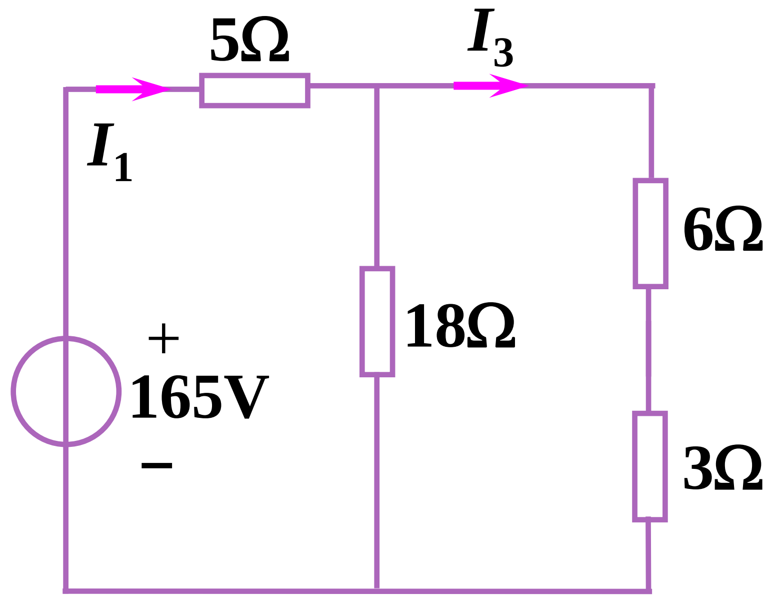
例：求 I_5

解 1:

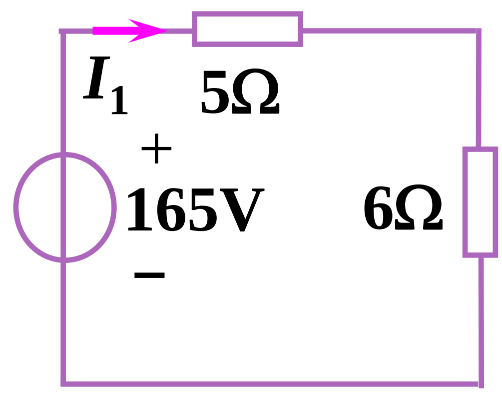
利用电阻的串、并联计算



化简

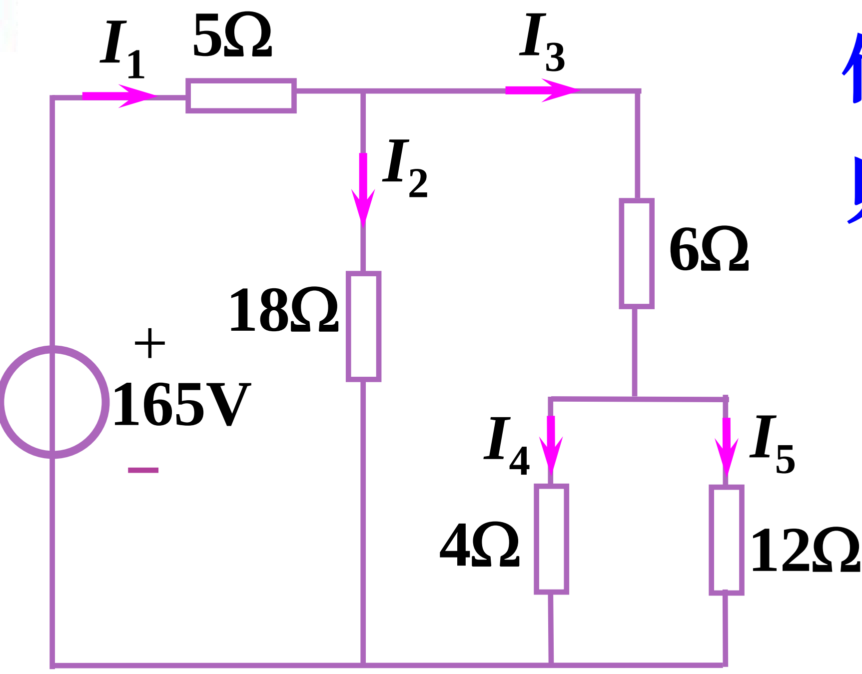


化简



$$I_1=\frac{165\text{V}}{11\Omega}=15\text{A}\rightarrow I_3=\frac{2}{3}I_1=10\text{A}$$

$$\rightarrow I_5=\frac{1}{4}I_3=2.5\text{A}$$



解 2: 用比例性求。

假设 $I_5 = 1\text{A}$,

则由分流性质 $I_4 = 3\text{A}$,

$I_3 = I_4 + I_5 = 4\text{A}$,

$I_2 = (4\times6+3\times4)\ /\ 18 = 2\text{A}$,

$I_1 = I_2 + I_3 = 6\text{A}$,

$U_S = 5\times6 + 18\times2 = 66\text{V}$, 则

比例系数 $K = 165\ /\ 66 = 2.5$

根据比例性,

$I_5 = 1\times2.5 = 2.5\text{A}$

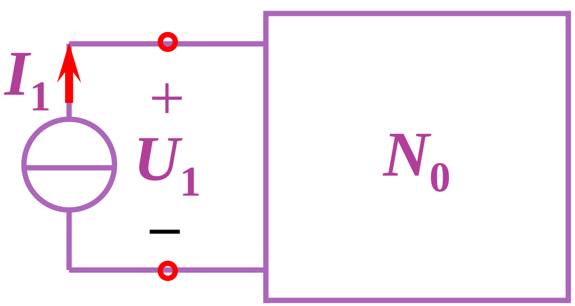
3. 网络函数：

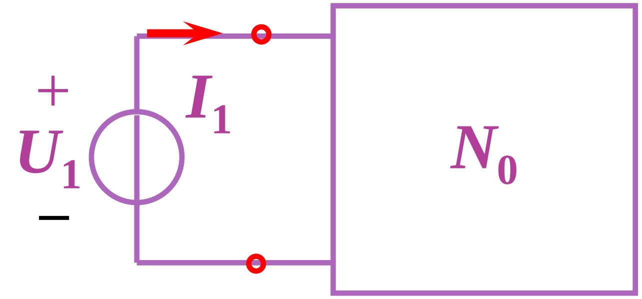
(1)定义：对单一激励的线性时不变电路，指定的响应对激励之比称为网络函数。

$$\text{网络函数}H = \frac{\text{响应}}{\text{激励}}$$

(2)分类：策动点函数、转移函数

策动点(driving point)函数：响应与激励在同一端口。

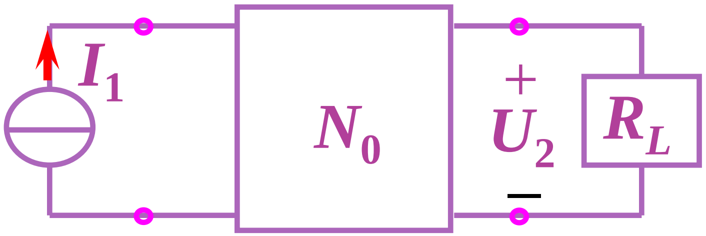


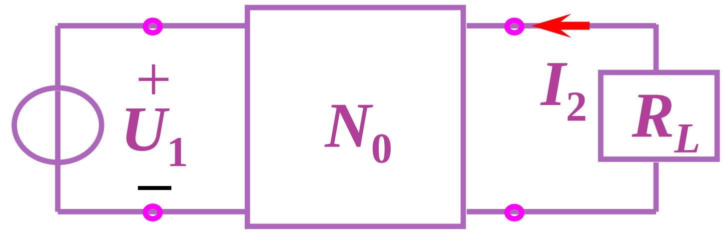


$$H = \frac{U_1}{I_1} = R_i$$ 策动点电阻

$$H = \frac{I_1}{U_1} = G_i$$ 策动点电导

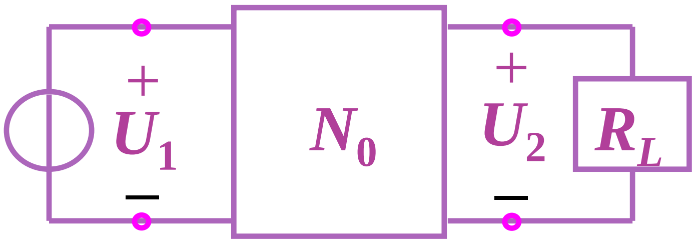
转移(transfer)函数：响应与激励不在同一端口。





转移电阻 $R_T = U_2 / I_1$

转移电导 $G_T = I_2 / U_1$



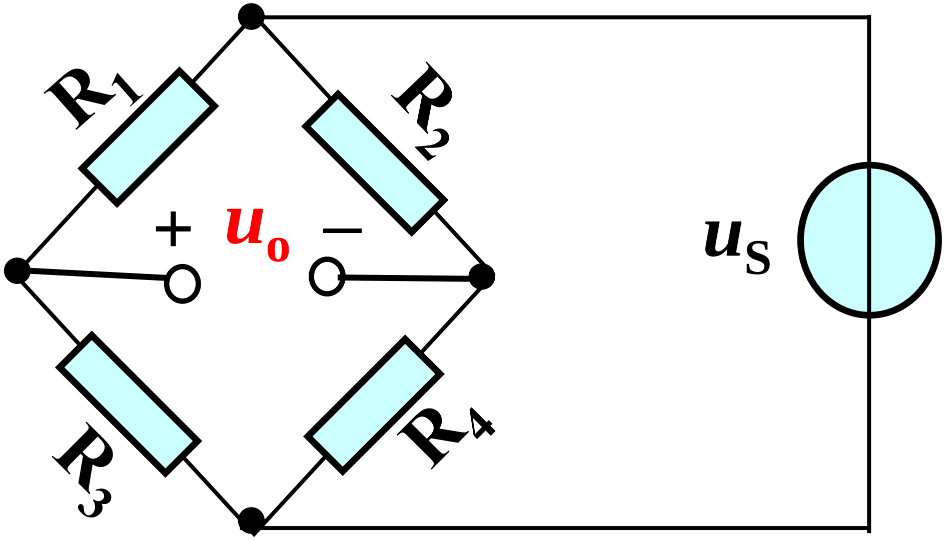
转移电压比 $H_u = U_2 / U_1$

转移电流比 $H_i = I_2 / I_1$

对任何线性电阻电路，网络函数都是实数。

网络函数应用----电桥电路

电桥电路: 由首尾相连的四个阻抗构成，其对角端分别为供桥电源和输出端。

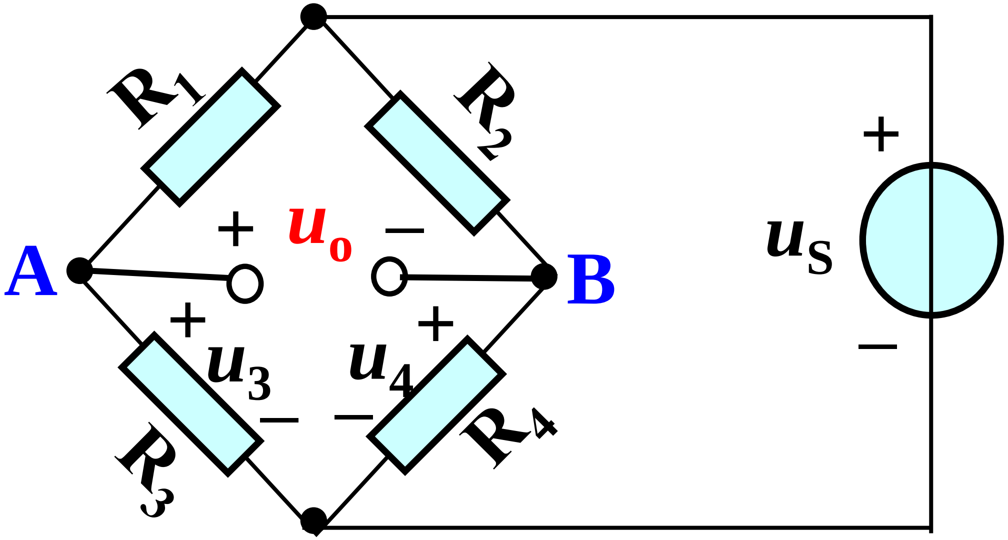


电桥的作用:

把阻抗（电阻，电容或电感）的变化量转化为电压或电流量，提供给后续放大电路进行测量。

电桥电路可间接测量非电学量，例如温度、压力、质量、速度等，因此电桥电路在自动化控制中有着广泛的应用。

求电桥电路转移电压比u_o/u_S



解： $u_o = u_3 - u_4$

$$u_3 = \frac{R_3}{R_1 + R_3} u_S$$

$$u_4 = \frac{R_4}{R_2 + R_4} u_S$$

$$\therefore u_o = \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right) u_S$$

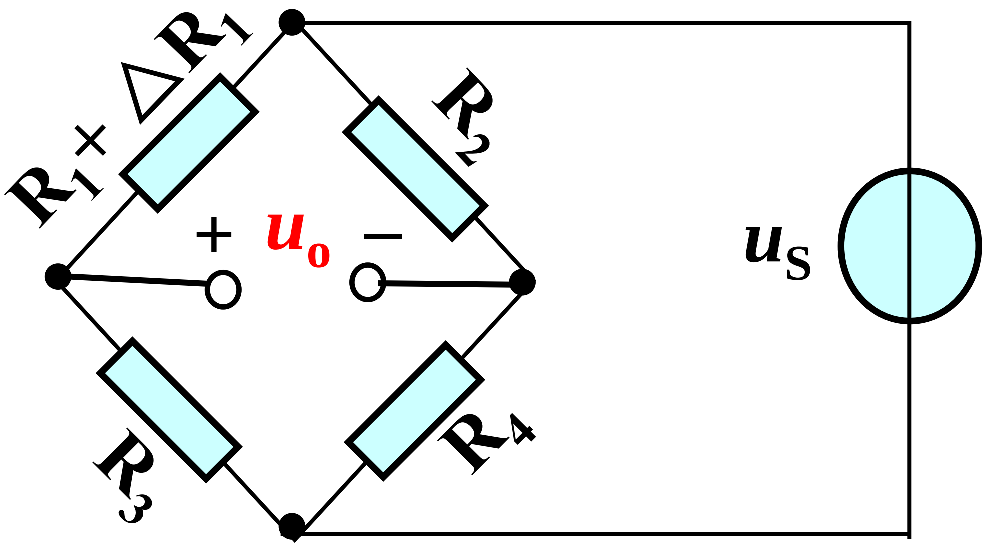
$$\therefore \frac{u_o}{u_S} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} = H$$

当$R_2R_3=R_1R_4$时，$H=0$，
此时$u_o=0$，称为平衡电桥。

此时A和B为等电位点，AB间接任意电阻不影响电路其它支路的电压电流分布.

电桥输出：

$$\frac{u_o}{u_S}=\frac{R_2R_3-R_1R_4}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}$$



当R_1有变化ΔR_1时：

$$\frac{u_o}{u_S}=\frac{R_2R_3-(R_1+\Delta R_1)R_4}{(R_1+\Delta R_1+R_3)(R_2+R_4)}$$

$$\approx\frac{R_2R_3-(R_1+\Delta R_1)R_4}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}$$

$$=\frac{-\Delta R_1R_4}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}$$

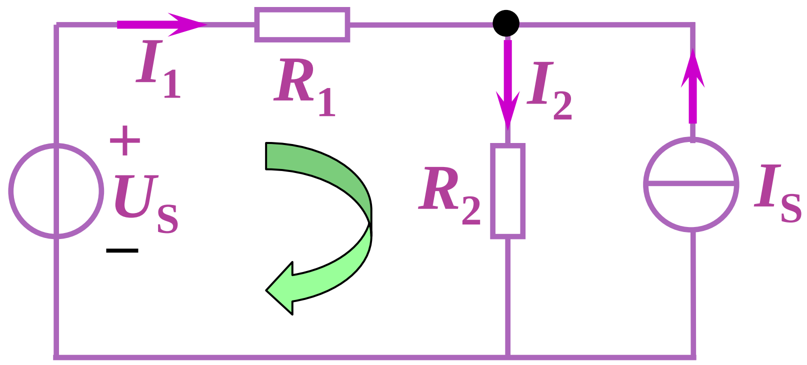
令 $\frac{R_3}{R_1}=n$ ，则：

$$u_o=-\frac{\Delta R_1}{R_1}\frac{n}{(1+n)^2}u_S$$

所以u_o正比于R_1的相对变化。

3.2 叠加原理(superposition)

叠加定理引例: 求电流 I_2.



解: 用支路电流法

KCL: $I_1 - I_2 = -I_S$

KVL: $R_1 I_1 + R_2 I_2 = U_S$

$$I_2 = \frac{U_S + R_1 I_S}{R_2 + R_1} = \boxed{\frac{R_1}{R_2 + R_1} I_S} + \boxed{\frac{1}{R_2 + R_1} U_S}$$

I_S单独作用
($U_S = 0$)

U_S单独作用
($I_S = 0$)

叠加原理：由多个独立电源，线性受控源和线性无源元件共同组成的**线性电路**中，某一支路的电压(电流)等于每一个(组)**独立电源**单独作用(其它独立源不作用)时，该支路上所产生的电压(电流)的**代数和**。

用公式表示：

$$y(t) = \sum H_m x_m(t) \quad (m = 1, 2, \cdots, M)$$

$y(t)$： 任一支路电流或电压

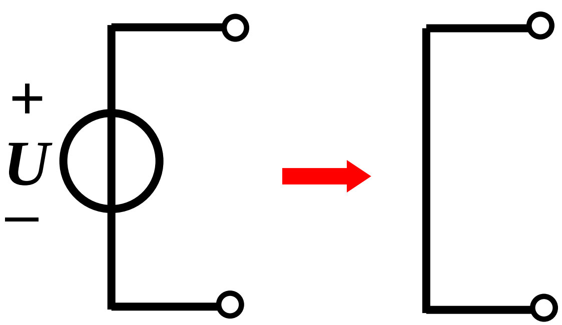
H_m： 第m个独立电源单独作用时的网络函数

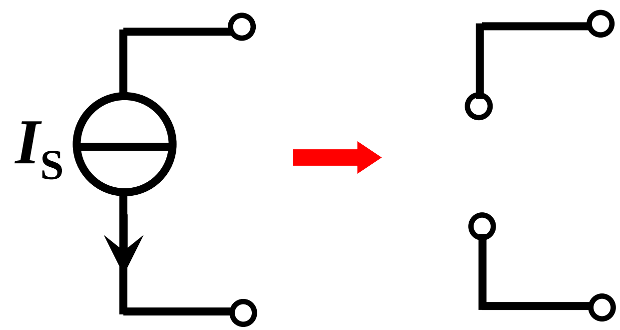
$x_m(t)$： 电路中的电压源电压或电流源电流

M： 独立电源的总数

不作用的含义：

- 当**电压源**不作用（$U_S = 0$）时应视其为**短路**，
- 当**电流源**不作用（$I_S = 0$）时应视其为**开路**，
- 受控源不能单独作用，应保留在电路内。

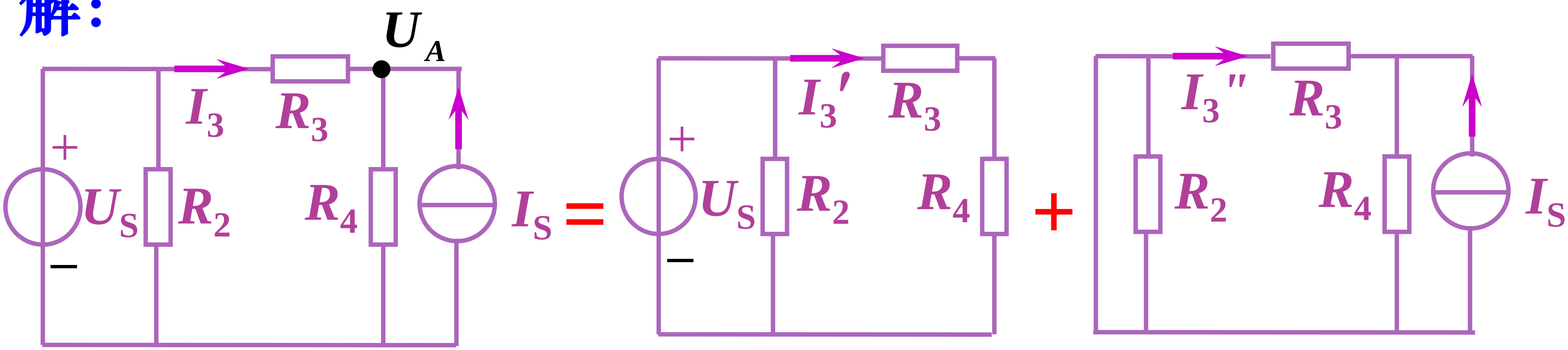




例1：在图示电路中，已知：$U_S = 100\text{V}$，$I_S = 1\text{A}$，$R_2 = R_3 = R_4 = 50\ \Omega$。

求：流过 R_3 的电流及 R_3 上的功率。

解:



节点分析法

$$\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_A-\frac{1}{R_3}U_S=I_S$$

$$\rightarrow U_A=75\text{V}$$

$$\rightarrow I_3=\frac{U_S-U_A}{R_3}=0.5\text{A}$$

叠加法

$$I_3'=\frac{U_S}{R_3+R_4}=1\text{A},$$

$$I_3''=\frac{-R_4}{R_3+R_4}I_S=-\frac{1}{2}\text{A},\quad I_3=I_3'+I_3''=\frac{1}{2}\text{A}$$

$$P_3=I_3^2R_3=12.5\text{W}\neq(I_3')^2R_3+(I_3'')^2R_3$$

证明：电路元件功率不能用叠加原理计算。

若流过某元件的电流为i，两端的电压为u，由叠加原理可表示为

$$i = i' + i''，\quad u = u' + u''$$

该元件的功率为 $p = ui = (u' + u'')(i' + i'')$

$$= u'i' + u''i'' + u'i'' + u''i'$$

$$\neq u'i' + u''i''\ (\text{单独作用时叠加功率})$$

用叠加原理计算功率将失去交叉项，电路元件功率不能用叠加原理计算。

例2:用叠加原理求图中电流I_1。

解：U_S单独作用时

$$(R_1+R_2+R_3)I_1'-aI_1'+U_S=0$$

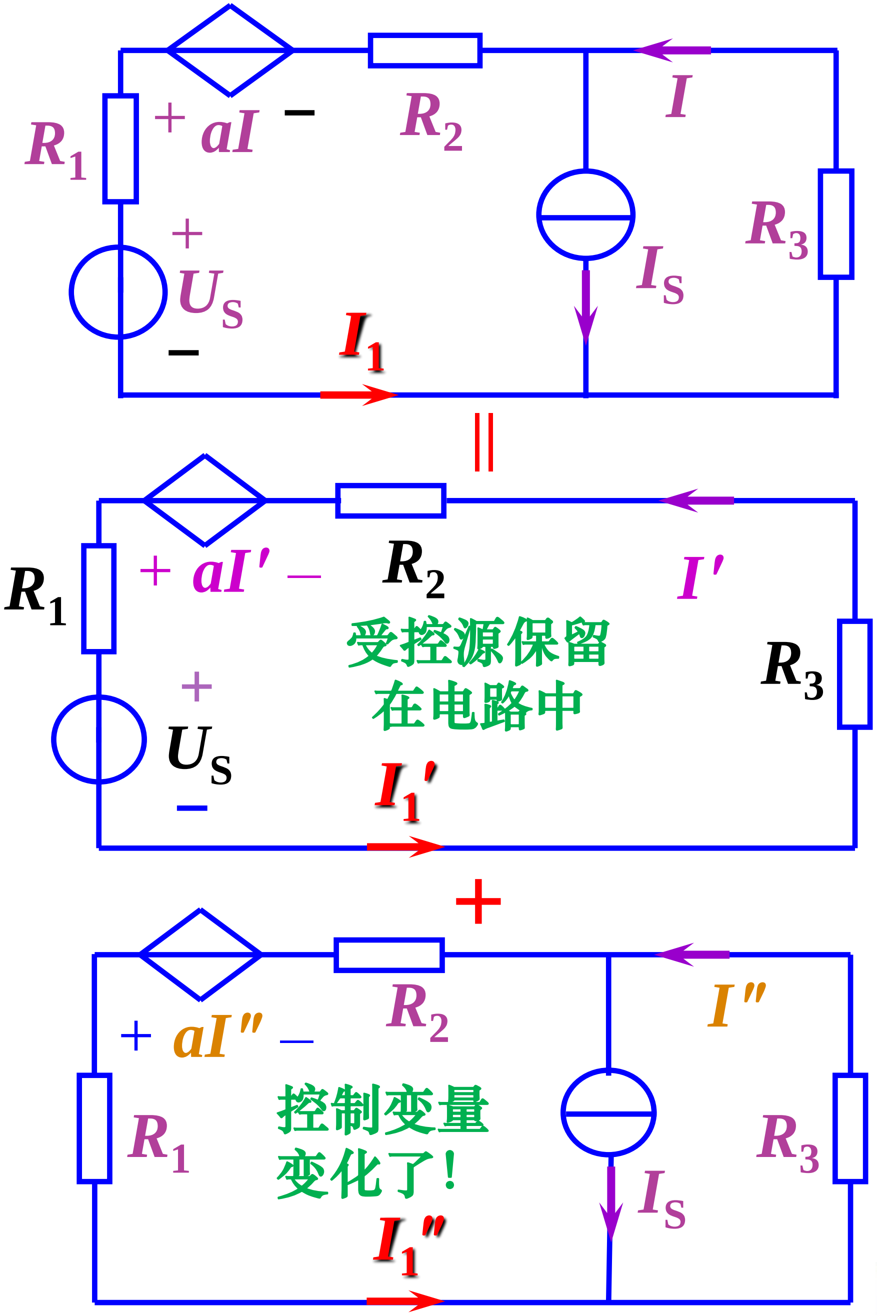
$$I_1'=\frac{U_S}{a-(R_1+R_2+R_3)}$$

I_S 单独作用时

$$\begin{cases} I''=I_1''+I_S \\ (R_1+R_2)I_1''+R_3I''-aI''=0 \end{cases}$$

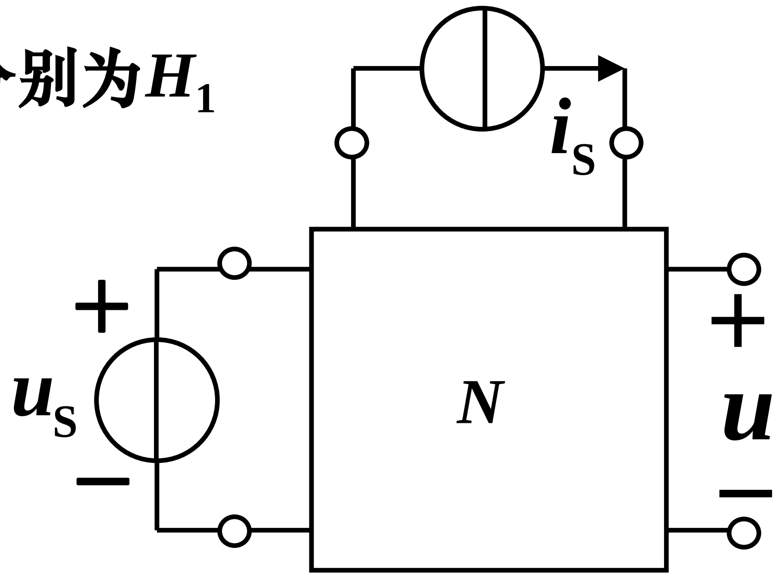
$$I_1''=\frac{(a-R_3)}{(R_1+R_2+R_3)-a}I_S$$

$$\therefore\ I_1=I_1'+I_1''=\frac{U_S+(R_3-a)I_S}{a-(R_1+R_2+R_3)}$$



例3： N的内部结构不知，但只含线性电阻，在 u_s 和 i_s激励下，其实验数据为：当u_s=1V，i_s=1A时，u=0；当u_s=10V，i_s=0时，u=1V。若i_s=10A，u_s=0时，u为多少?

解：设u_s 和 i_s单独激励下网络函数分别为H_1和H_2，则 $u = H_1 u_S + H_2 i_S$



由两实验条件可得

$$\begin{cases} H_1 + H_2 = 0 \\ 10H_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} H_1 &= 0.1 \\ H_2 &= -0.1\Omega \end{aligned}$$

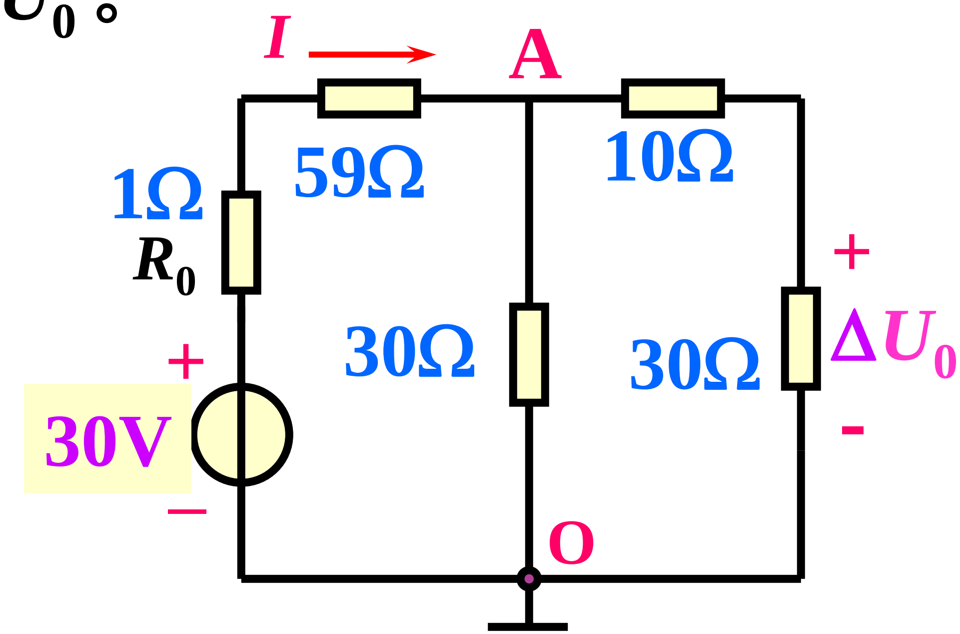
故知 $u = 0.1u_S - 0.1i_S$

当 i_s=10A，u_s=0时，

$$u = (0.1\times0 - 0.1\times10)\,\mathrm{V} = -1\,\mathrm{V}$$

H_1和 H_2可描述响应与激励关系，不必考虑电路各元件参数和结构。

例4： 一直流发电机E = 300V，R_0 = 1Ω作用在图所示的电路中。由于某种原因，E 突然升高到330V，求电压 U_0 的变化量ΔU_0。



解： 发电机电动势由300V升高到330V，相当于叠加一30V电源作用于电路，U_0的变化量正是它的作用所产生的。故电路可改画为

$$R_{AO} = \frac{30\times 40}{30+40} = 17.14\Omega$$

$$U_A = \frac{17.14}{17.14+60}\times 30\text{V}$$

$$= 6.67\text{V}$$

$$\Delta U_0 = \frac{30}{30+10}\times 6.67\text{V}$$

$$= 5\ \text{V}$$

叠加原理小结

1. 叠加原理只适用于线性网络。

2. 网络中的响应是指每一个(组)独立电源单独作用时响应的代数和，注意电流的方向和电压的极性。

3. 独立源可以单独作用，受控源不可以单独作用，受控源要保留在电路中，且注意控制量的变化。

4. 电阻电路求功率不能应用叠加原理。

3.3 叠加方法与功率计算

结论1：功率对电压、电流并非线性函数，因而，一般情况下**功率并不服从叠加原理**。

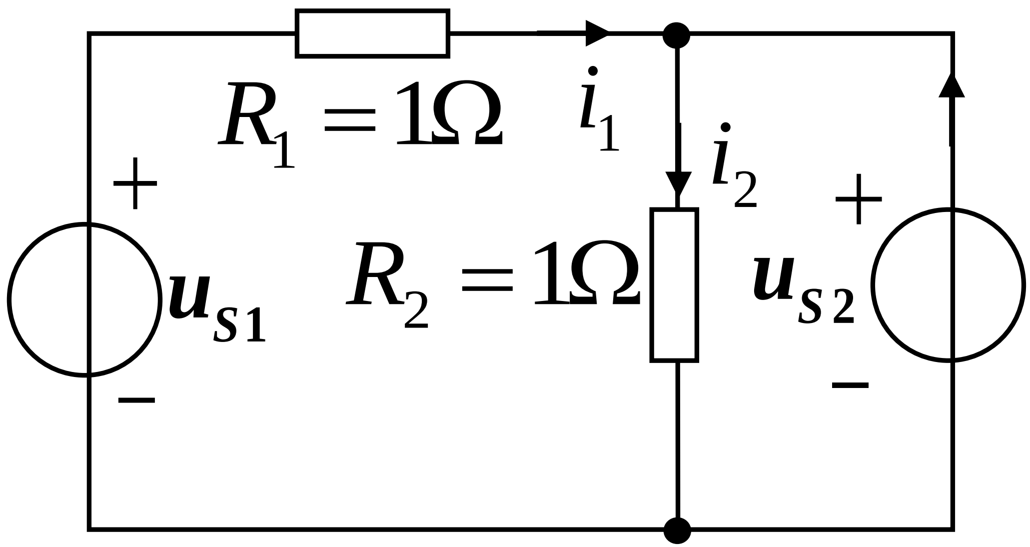
结论2：不含受控源的线性电阻电路中，电源对电路提供的总功率为：**电压源组单独作用**对电路提供的功率与**电流源组单独作用**对电路提供的功率之和，即此时功率对电压源组和电流源组叠加定理成立。

结论3：由于受控源可能提供功率，也可能消耗功率，因而需要具体分析。

结论4：在任何电路中，均满足功率平衡关系。

例1：求电源提供的功率

$$u_{S1}=3\text{V},u_{S2}=1\text{V}$$



解：$i_2=u_{s_2}/R_2=1\text{A},$

$$i_1=2\text{V}/1\Omega=2\text{A}$$

两电源提供的总功率为

$$p_T=3\text{V}\times2\text{A}+1\text{V}\times(1-2)\text{A}=5\text{W}$$

每一电源单独作用时提供的功率

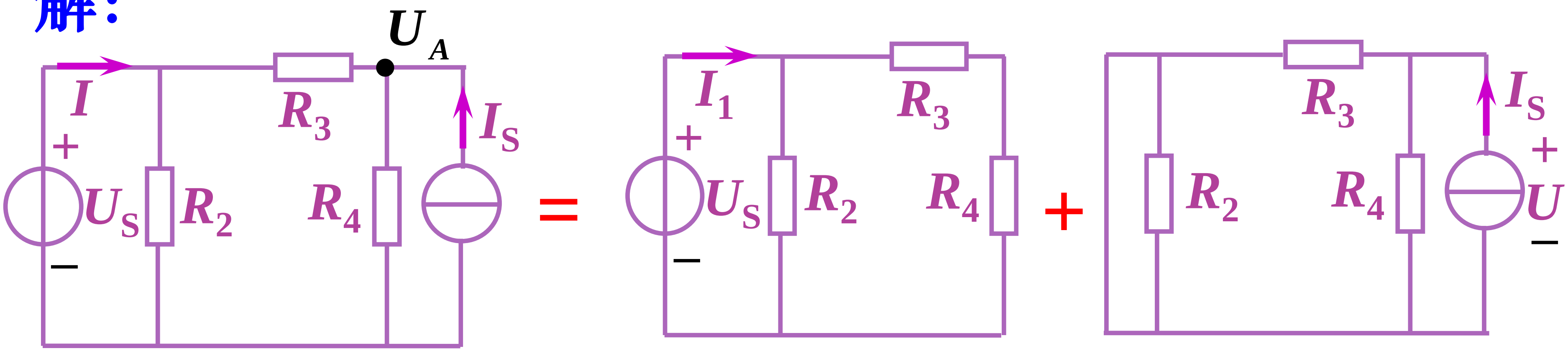
当u_{s1}=3V，u_{s2}=0V时：$p_T'=9\text{W}$

当u_{s1}=0V，u_{s2}=1V时：$p_T''=2\text{W}$

两电压源总功率不满足叠加原理

例2：在图示电路中，已知：$U_S = 100V$，$I_S = 1A$，$R_2 = R_3 = R_4 = 50\ \Omega$。求：电源提供的功率。

解：



$$\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)U_A-\frac{1}{R_3}U_S=I_S$$

$\rightarrow U_A = 75V \rightarrow I = 2.5A$

$P_{U_S} = U_S I = 250W$

$P_{I_S} = U_A I_S = 75W$

电源提供功率：$P = 325W$

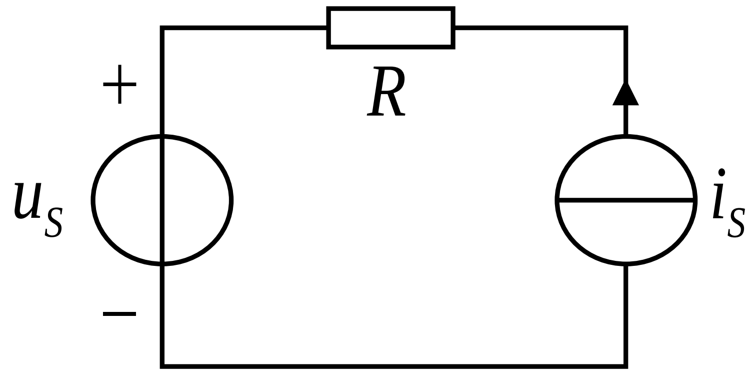
U_S单独作用：$P_{U_S} = 100V \times 3A = 300W$

I_S单独作用：$P_{I_S} = 0.5A \times 50\Omega \times 1A = 25W$

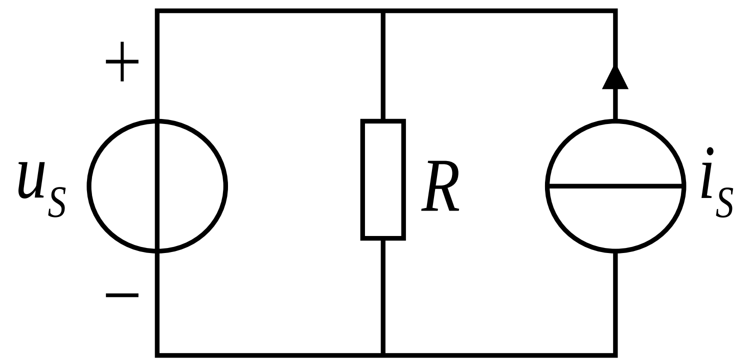
电源提供功率：$P = P_{U_S} + P_{I_S} = 325W$

一个电压源和一个电流源总功率满足叠加原理

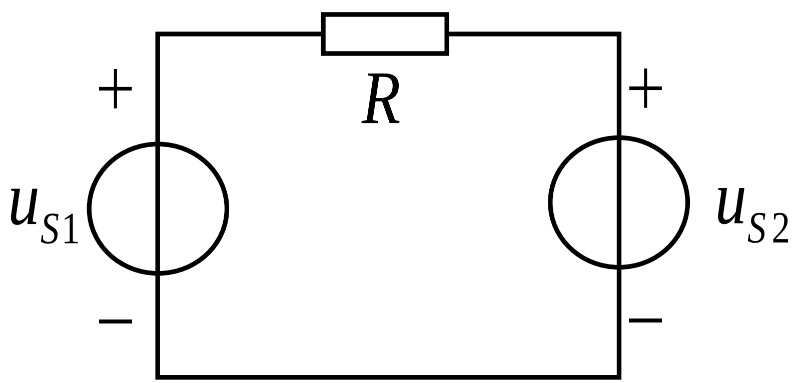
下图中那些功率叠加成立



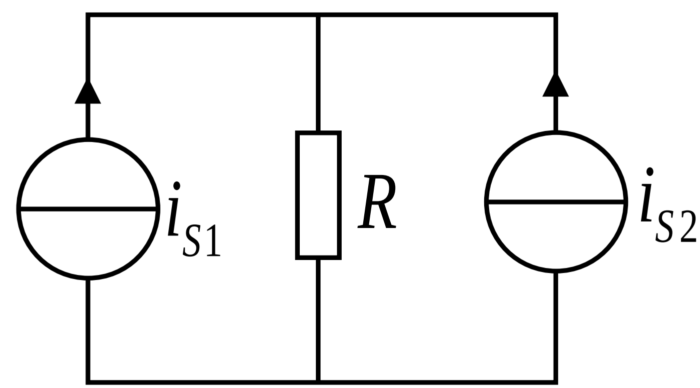
图(a) ✓



图(b) ✓



图(c) ×



图(d) ×

第4讲　小结

1. 单一激励的线性时不变电路具有比例性。

√ 2. 单一激励的线性时不变电路，网络函数 $H=\dfrac{\text{响应}}{\text{激励}}$ 。

3. 对任何线性电阻电路，网络函数都是实数。

√ 4. 叠加原理：$y(t)=\sum_{M} H_m x_m(t)$

- 可计算支路电压或电流，不能计算功率。
- 受控源不能单独作用。

小测验（二）

1. 求图1所示电路电压U_{ab}

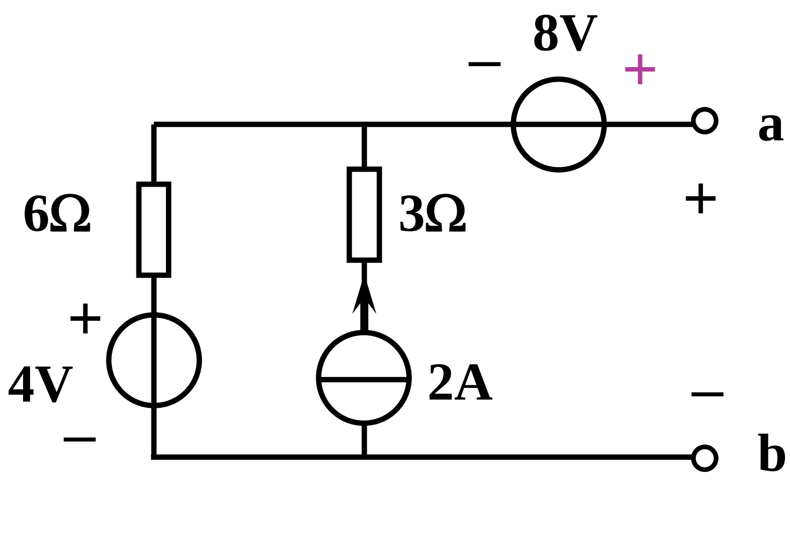


图1

2. 电路如图2所示，
(1) 求电流I;
(2) 求电流源的功率P, 并判断是提供还是吸收功率。

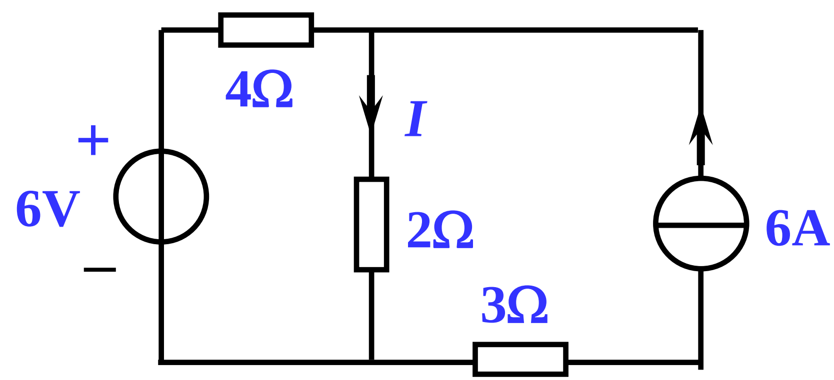


图2