计算理论
第一部分 计算模型

[S]

第1章 有限自动机

第3章 图灵机

第1章 有限自动机

字符串与语言

字母表: 任意一个有限集. 常用记号Σ, Γ.

符号: 字母表中的元素

字符串: 字母表中符号组成的有限序列

如asdf, 通俗地说即单词

串的长度|·|, 例: |abcde|=5

串的连接*, 例: (abc)*(de)=abcde

串的反转R, 例: $(abcde)^R$=edcba

空词: 记为ε, 长度为0

语言: 给定字母表上一些字符串的集合

Σ^*, 语言, 字典序

取字母表 $\Sigma = \{0,1\}$, Σ上的语言举例:

A={0,00,0000}, B={0,00,01,000,001,…}

- Σ上所有有限长串记为Σ^*.
- Σ上的任一语言都是Σ^*的子集.
- Σ^*(字典序): ε, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, …
- Σ上所有无限长串记为Σ^N.
- Σ上的语言与Σ^N一一对应.

决定性问题与语言一一对应

决定性问题(Dicision Prob): 只需回答是与否的问题

“一数是否是偶数” ---------------{ 以0结尾的01串 }

“串0,1个数是否相等”------{ 0,1个数相等的01串 }

“图是否连通”-------------------{ <G> | G是连通图 }

其中<G>是图G编码成的字符串.

给定有限字母表Σ,

- 每个输入是一个串, 任意串都可以是输入串
- 一个决定性问题是满足某性质的串的集合(语言)

确定型有限(穷)自动机的形式定义

定义: 有限自动机是一个5元组(Q,Σ,δ,s,F),

1) Q是有限集, 称为状态集;

2) Σ是有限集, 称为字母表;

3) $\delta: Q\times \Sigma\rightarrow Q$是转移函数;

4) $s\in Q$是起始状态;

5) $F\subseteq Q$是接受状态集;

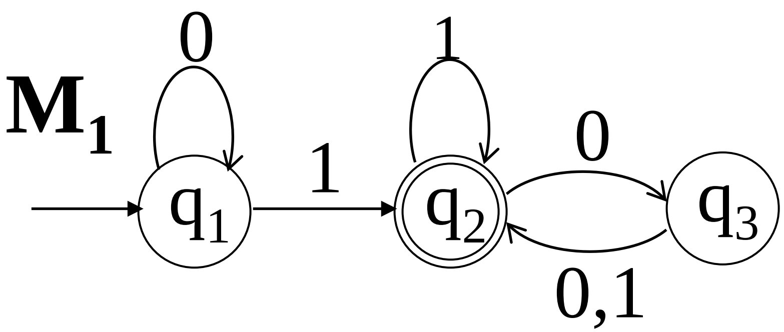
读写头不能改写, 且只能右移

$Q=\{q_1,q_2,q_3\}$, 状态集

$\Sigma=\{0,1\}$, 字母表

$s=q_1$, 起始状态

$F=\{q_2\}$接受状态集



• 状态图等价于形式定义

δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

有限自动机的语言:正则语言

对有限自动机M, 若 $A = \{ w \in \Sigma^* \mid M接受w \}$,

即A是有限自动机M的语言, 记为L(M)=A, 也称M识别A.

若存在DFA识别语言A, 则称A是正则语言.

称两个有限自动机等价若它们语言相同.

有限自动机的设计

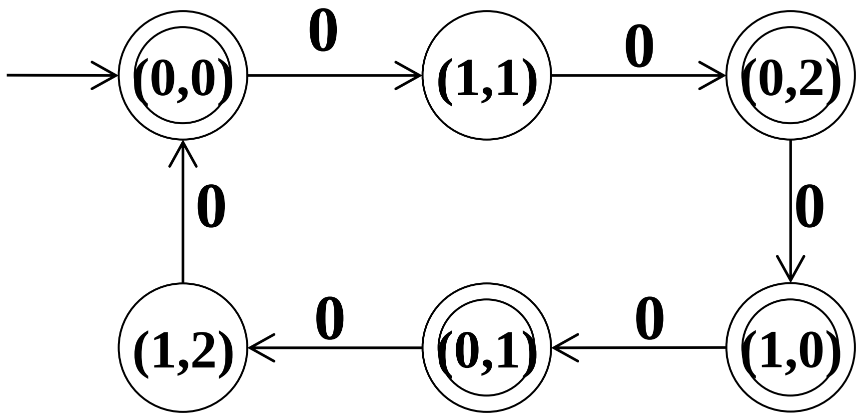
- 自己即自动机
- 寻找需要记录的关键信息

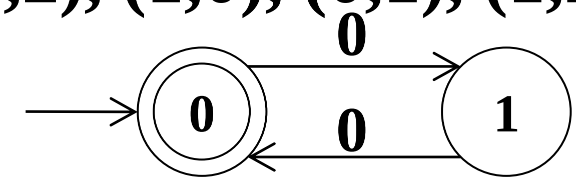
有限自动机的设计

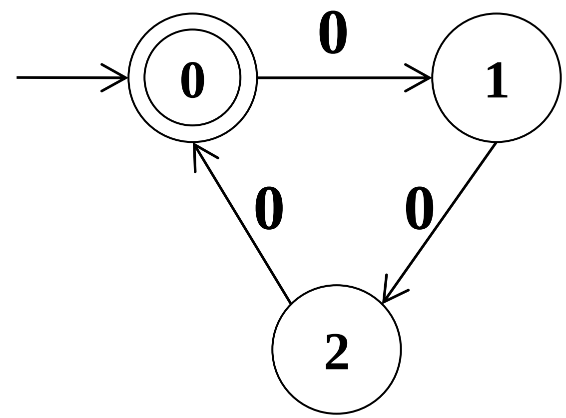
{ 0^k | k是2或3的倍数 }

Σ={0}, 关键信息: ε,0^1,0^2,0^3,0^4,0^5,

记为: 0,1,2,3,4,5 或 (0,0), (1,1), (0,2), (1,0), (0,1), (1,2)







{0^k|k是2或3的倍数} = {0^k|k是2倍数} ∪ {0^k|k是3的倍数}

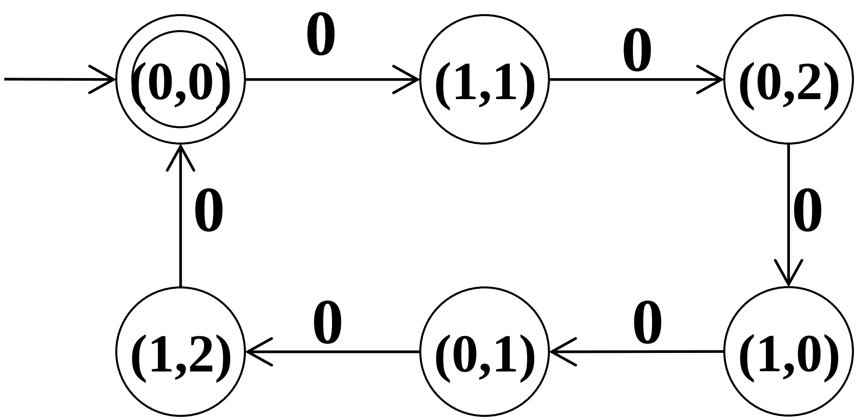
$$F = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$$

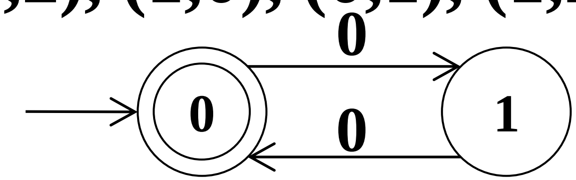
有限自动机的设计

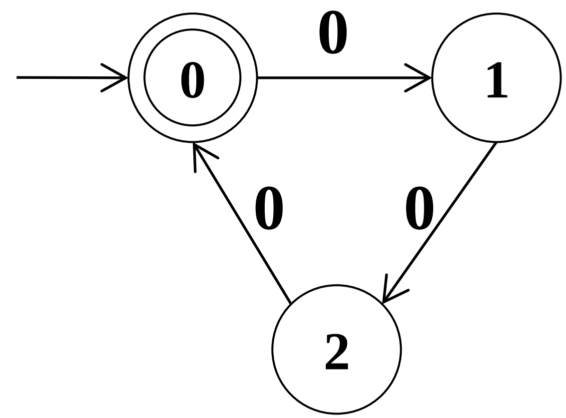
{ 0^k | k是2和3的倍数 }

Σ={0}, 关键信息: ε,0^1,0^2,0^3,0^4,0^5,

记为: 0,1,2,3,4,5 或 (0,0), (1,1), (0,2), (1,0), (0,1), (1,2)







{0^k|k是2和3的倍数} = {0^k|k是2倍数} ∩ {0^k|k是3的倍数}

$$F=F_1\times F_2$$

正则语言与正则运算

如果语言A被一DFA识别,则称A是正则语言

定义: 设A和B是两个语言,定义正则运算

并,连接,星号如下:

- 并: $A \cup B = \{x | x \in A 或 x \in B\}$
- 连接: $A \circ B = \{xy | x \in A 且 y \in B\}$
- 星号: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k | k \geq 0 且每个 x_i \in A\}$

正则语言的并是正则语言

定理: 设A,B都是Σ上的正则语言, 则A∪B也是正则语言.

证明: 设$M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$和$M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,s_2,F_2)$是DFA,

且 $L(M_1)=A$, $L(M_2)=B$,

令$Q=Q_1\times Q_2$, $s=(s_1,s_2)$, $F = F_1\times Q_2 \cup Q_1\times F_2$,

δ: $Q\times\Sigma\to Q$, $\forall a\in\Sigma$, $r_1\in Q_1$, $r_2\in Q_2$,

$$\delta((r_1,r_2) , a) = (\delta_1(r_1,a), \delta(r_2,a)),$$

即对i=1,2, 第i个分量按M_i的转移函数变化.

令$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$, 则 $\forall x (x\in L(M) \leftrightarrow x\in A \cup B)$

即 $L(M) = A \cup B$. 证毕

正则语言的交是正则语言

定理: 设A,B都是Σ上的正则语言, 则$A\cap B$也是正则语言.

证明: 设$M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$和$M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,s_2,F_2)$是DFA,

且 $L(M_1)=A$, $L(M_2)=B$,

令$Q=Q_1\times Q_2$, $s=(s_1,s_2)$, $F=F_1\times F_2$,

δ: $Q\times\Sigma\to Q$, $\forall a\in\Sigma$, $r_1\in Q_1$, $r_2\in Q_2$,

$\delta(\ (r_1,r_2)\ ,\ a\ )=(\ \delta_1(r_1,a),\ \delta(r_2,a)\ )$,

即对i=1,2, 第i个分量按M_i的转移函数变化.

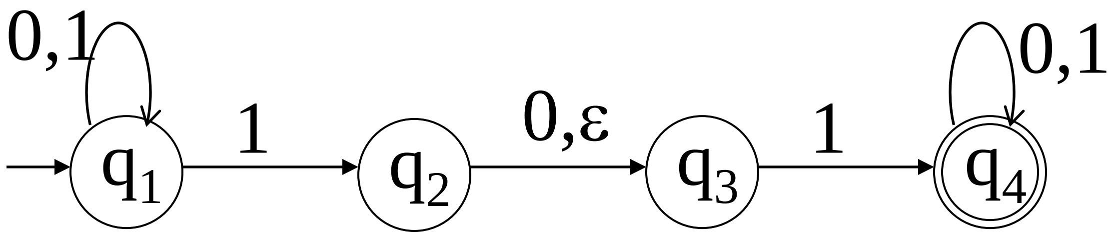
令$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$, 则 $\forall x\ (\ x\in L(M)\leftrightarrow x\in A\cap B\ )$

即 $L(M)=A\cap B$. 证毕

证明特点: 构造性证明

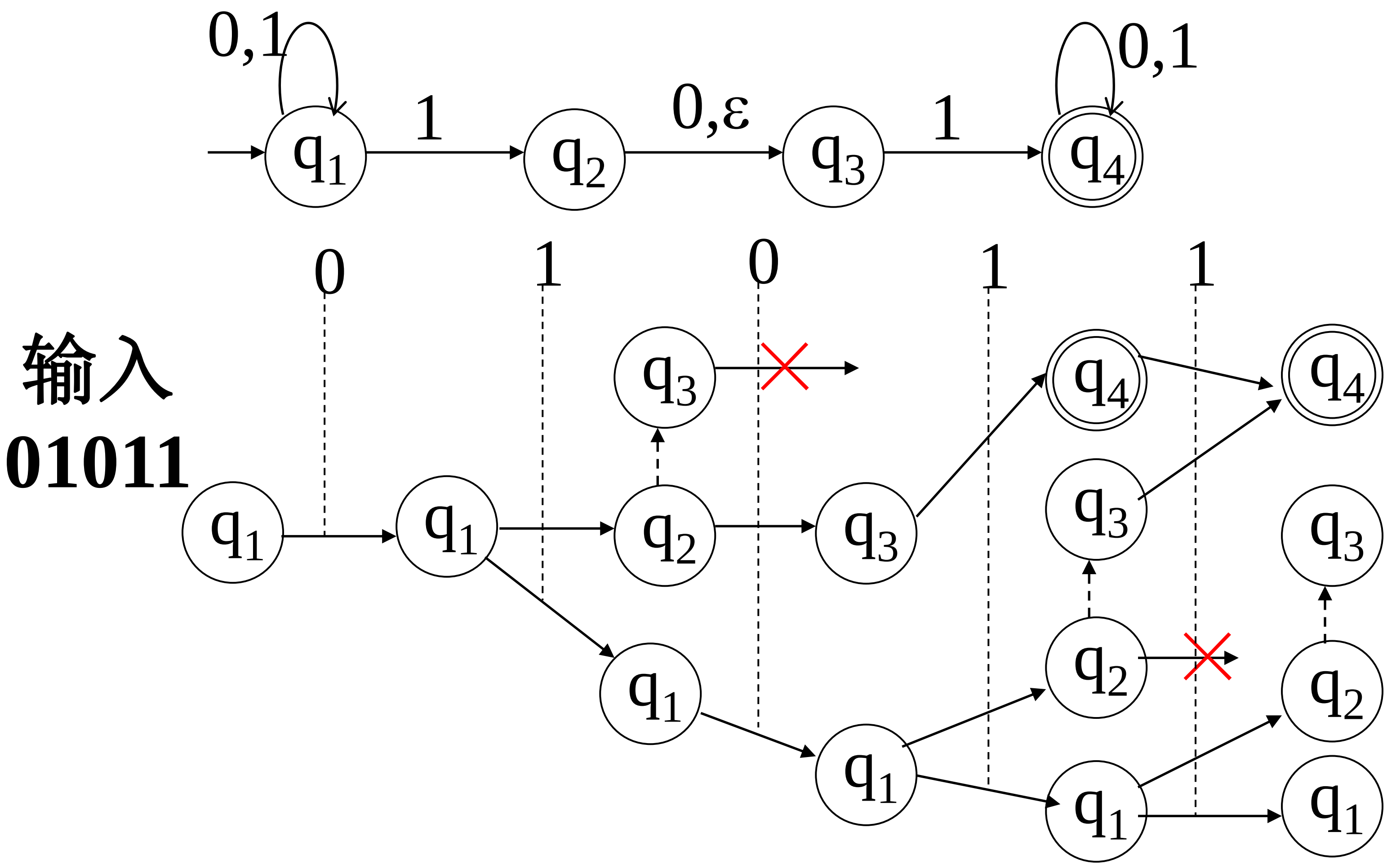
非确定型机器

现在引入非确定型有限自动机(**NFA**)

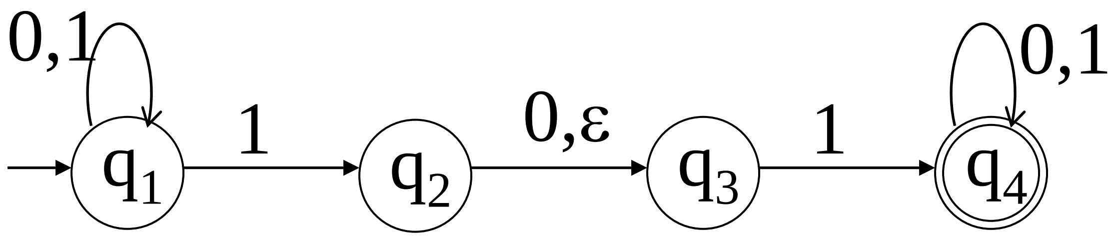


- 每步可以**0**至多种方式进入下一步
- 转移箭头上的符号可以是空串**ε,**
  表示不读任何输入就可以转移过去

非确定型计算



NFA的形式定义



定义: **NFA**是一个5元组(Q,Σ,δ,s,F),

1) Q是状态集;

2) Σ是字母表;

3) $\delta: Q\times \Sigma_\varepsilon \rightarrow P(Q)$是转移函数;

4) $s\in Q$是起始状态;

5) $F\subseteq Q$是接受状态集;

其中 $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

$\delta(q_1,1) = \{q_1,q_2\}$

$\delta(q_2,\varepsilon) = \{q_3\}$

$\delta(q_2,1) = \varnothing$

$\delta(q_1,\varepsilon) = \varnothing$

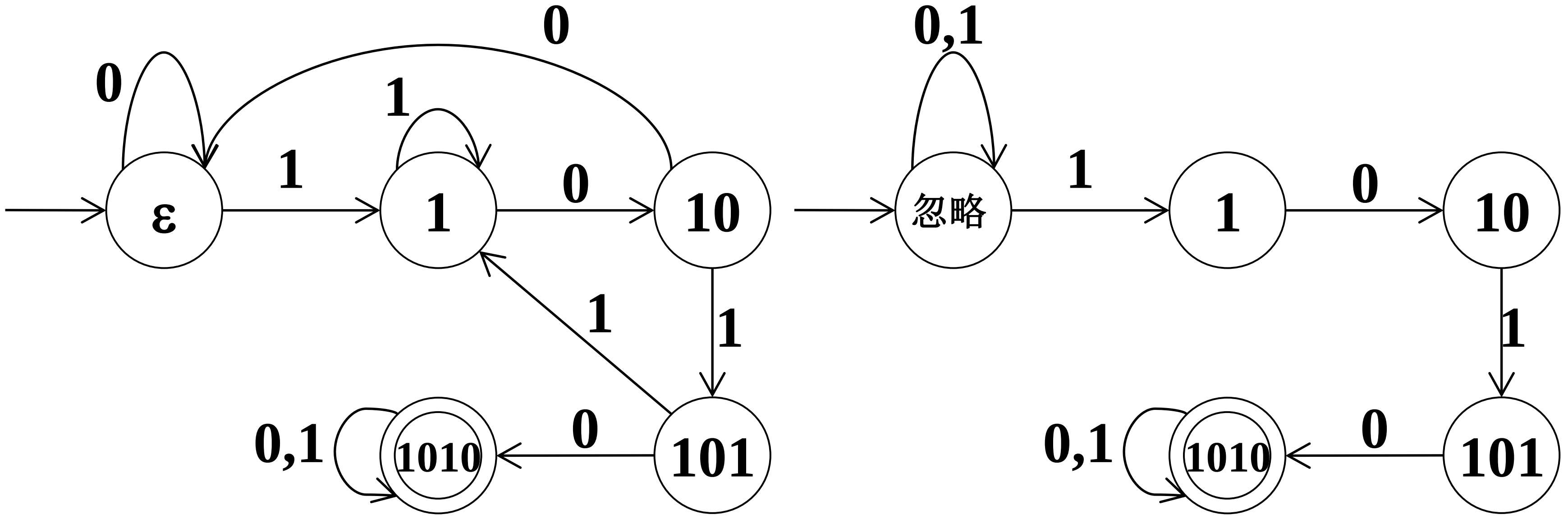
NFA的设计

- 自己即自动机
- 寻找需要记录的关键信息

NFA的设计

{ w∈{0,1}* | w含有子串1010 }

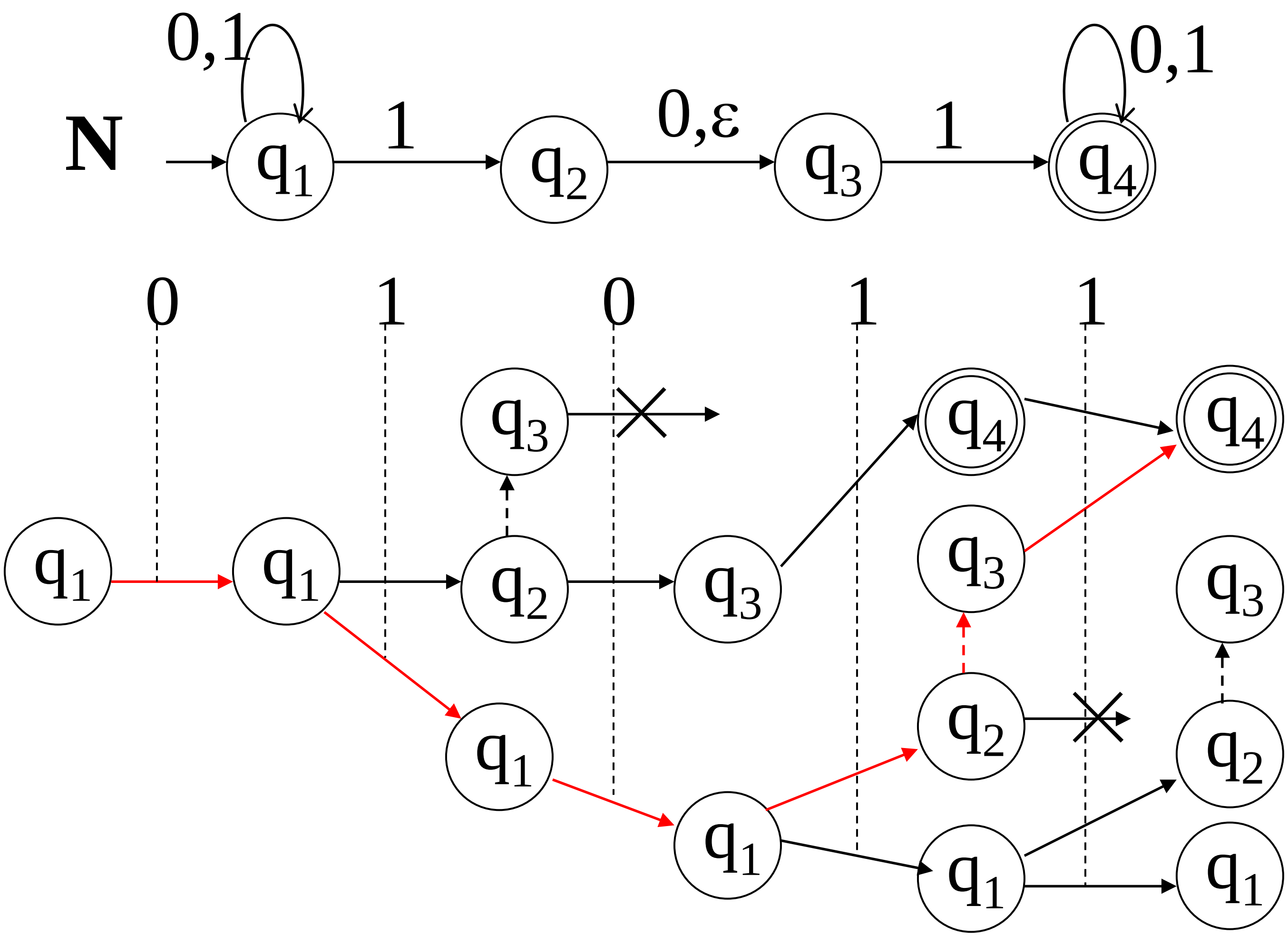
Σ={0,1}, 关键信息: 忽略(ε), 1, 10, 101, 1010



DFA

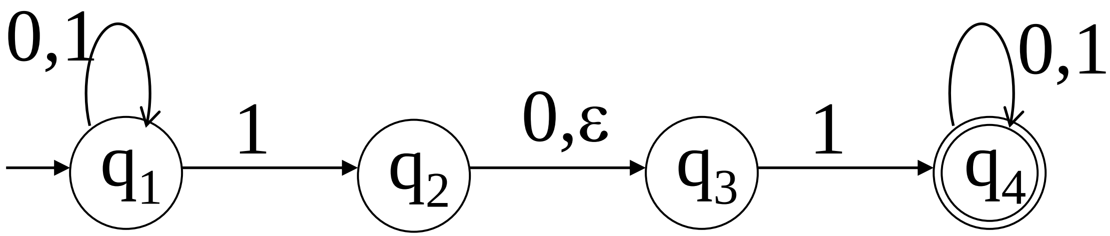
NFA

NFA的计算



N
0,1
q1
1
q2
0,ε
q3
1
q4
0,1
0
1
0
1
1
q1
q1
q2
q3
q1
q3
q1
q4
q3
q2
q1
q4
q3
q2
q1

每个NFA都有等价的DFA



以原状态的子集为新机器的状态

编号	δ	0	1
1	$\{q_1\}$ 1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$2
2	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$3	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$4
3	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
4*	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$5	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
5*	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$6	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
6*	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$

正则运算的封闭性

定理: 正则语言对并运算封闭.

定理: 正则语言对连接运算封闭.

定理: 正则语言对星号运算封闭.

正则表达式

定义: 称R是一个正则表达式, 若R是

1) a, $a \in \Sigma$;

2) ε ;

3) $\varnothing$;

4) $(R_1 \cup R_2)$, R_1和R_2是正则表达式;

5) $(R_1 \circ R_2)$, R_1和R_2是正则表达式;

6) (R_1^*), R_1是正则表达式;

每个正则表达式R表示一个语言,记为L(R).

例: 0^*10^*, $01 \cup 10$, $(\Sigma\Sigma)^*$, $1^*\varnothing$, $\varnothing^*$.

正则表达式与DFA等价

定理2.3.1: 语言A正则⇔A可用正则表达式描述.

A正则⇒A有正则表达式

构造广义非确定有限自动机(GNFA)

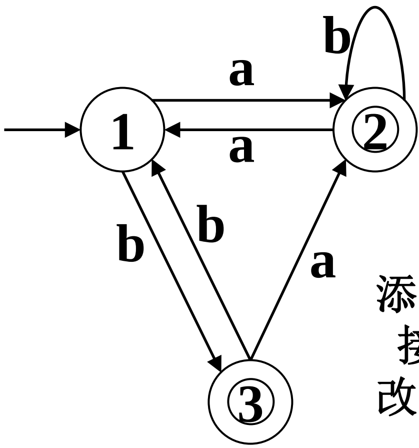
- 非确定有限自动机
- 转移箭头可以用任何正则表达式作标号

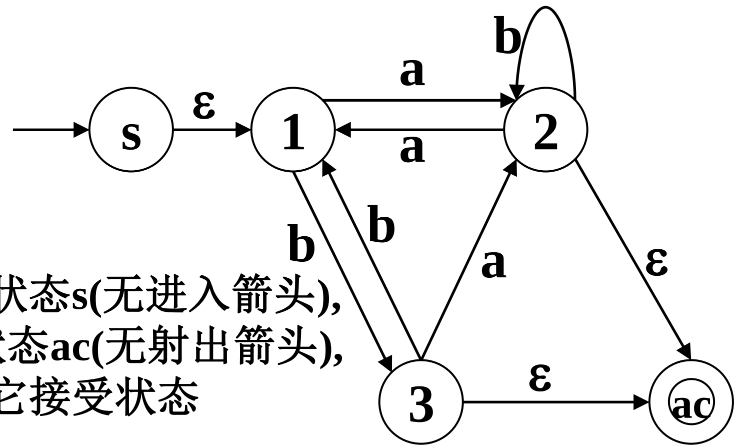
证明中的特殊要求:

- 起始状态无射入箭头.
- 唯一接受状态(无射出箭头).

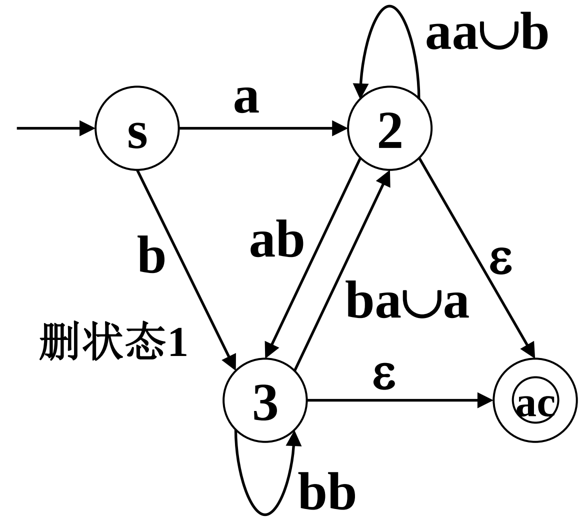
手段: 一个一个地去掉中间状态.

举例: A正则⇒A有正则表达式

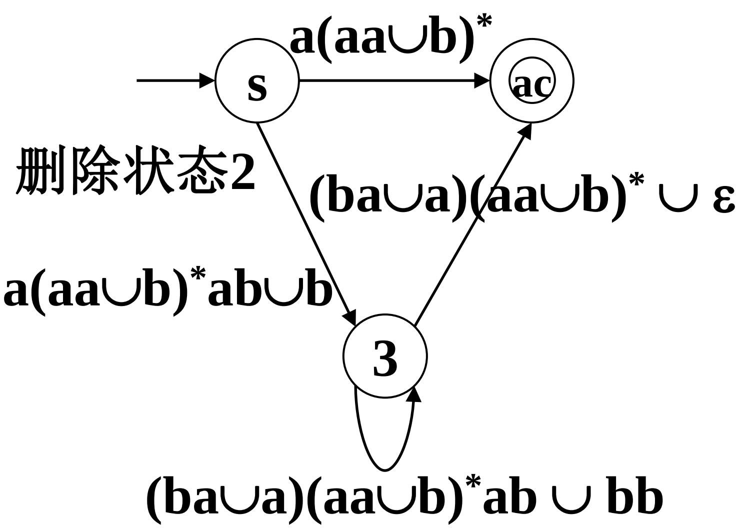




添起始状态s(无进入箭头),
接受状态ac(无射出箭头),
改掉其它接受状态

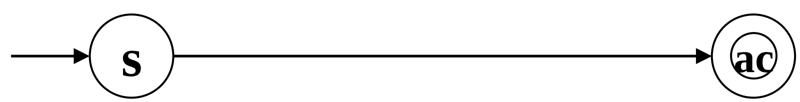


删状态1



删除状态2

$$\left((a(aa\cup b)^*ab\cup b)((ba\cup a)(aa\cup b)^*ab \cup bb)^* ((ba\cup a)(aa\cup b)^*\cup\varepsilon) \right) \cup \left(a(aa\cup b)^* \right)$$



删除状态3

非正则语言：泵引理的等价描述

定理(泵引理): 设A是正则语言,则存在$p>0$使得

对任意$w\in A$, $|w|\geq p$, 存在分割$w=xyz$满足

1) 对任意 $i \geq 0$, $xy^iz \in A$;

2) $|y|>0$;

3) $|xy|\leq p$.

若A是正则语言,

则$\exists p>0$

$\forall w\in A(|w|\geq p)$

$\exists x,y,z(|y|>0, |xy|\leq p, w=xyz)$

$\forall i\geq 0,$

$xy^iz \in A.$

若$\forall p>0$

$\exists w\in A(|w|\geq p)$

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy|\leq p, w=xyz)$

$\exists i\geq 0,$

$xy^iz \notin A.$

则A非正则语言

非正则语言：$B = \{ 0^n1^n \mid n \geq 0 \}$ 非正则

∵ $\forall p>0$,

令$w=0^p1^p$,

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy|\leq p, w=xyz)$

令$i=0$,

$xz = 0^{p-|y|}1^p \notin B$

∴ B非正则语言

若$\forall p>0$

$\exists w \in A(|w| \geq p)$

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy|\leq p, w=xyz)$

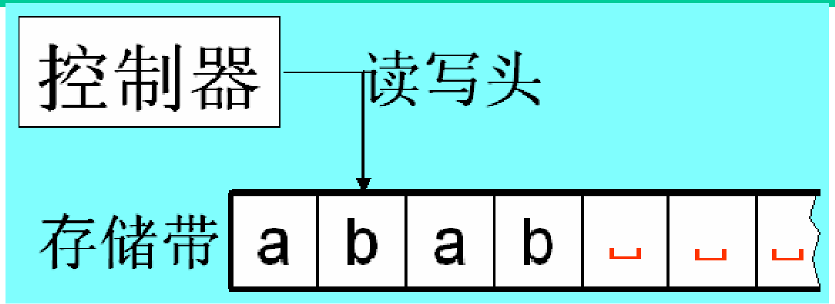
$\exists i \geq 0$,

$xy^iz \notin A$.

则A非正则语言

第3章 图灵机

图灵机(TM)的形式化定义



TM是一个7元组($Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r$)

1) Q是状态集.

2) Σ是输入字母表,不包括空白符␣.

3) Γ是带字母表,其中 $\sqcup \in \Gamma$, $\Sigma \subset \Gamma$.

4) $\delta: Q\times\Gamma \to Q\times\Gamma\times\{L,R\}$是转移函数.

5) $q_0 \in Q$是起始状态. 6) $q_a \in Q$是接受状态.

7) $q_r \in Q$是拒绝状态, $q_a \neq q_r$.

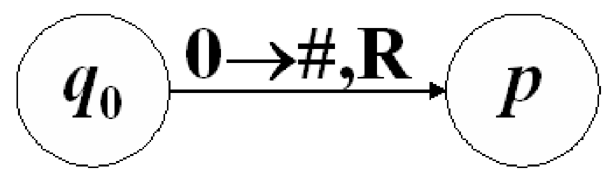
图灵机的运行

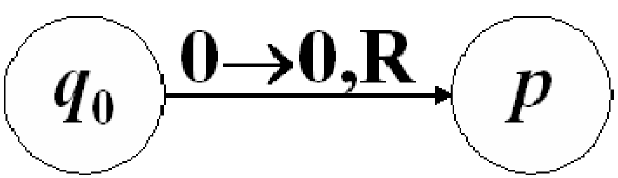
- 图灵机根据转移函数运行.

例:设输入串为**0101**, 且$\delta(q_0,0)=(p,\#,R)$, 则有

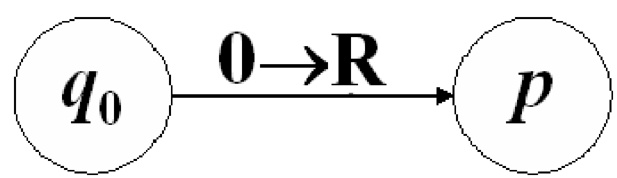
- 注: 若要在最左端左移, 读写头保持不动.

$\delta(q_0,0)=(p,\#,R)$的状态图表示:





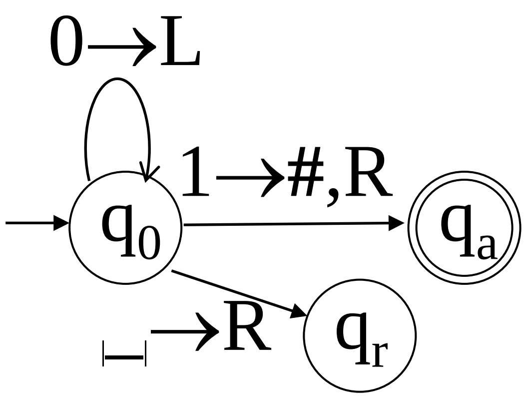
简记为



判定器与语言分类

- 图灵机运行的三种结果

  1. 若TM进入接受状态,则停机且接受输入,
  2. 若TM进入拒绝状态,则停机且拒绝输入,
  3. 否则TM一直运行,不停机.



- 定义: 称图灵机M为判定器,

  若M对所有输入都停机.

- 定义不同语言类:

  图灵可判定语言: 某个判定器的语言

  图灵可识别语言: 某个图灵机的语言,

图灵机的描述

(1) 形式水平的描述(状态图或转移函数)

(2) 实现水平的描述(读写头的移动,改写)

(3) 高水平描述(使用日常语言)

用带引号的文字段来表示图灵机. 例如:

M="对于输入串w,

1) 若$w=\varepsilon$, 则拒绝.

2) 若只有1个0, 则接受.

3) 若0的个数为奇数, 则拒绝.

4) 从带左端隔一个0, 删一个0. 转(2)."

图灵机的变形

图灵机有多种变形:

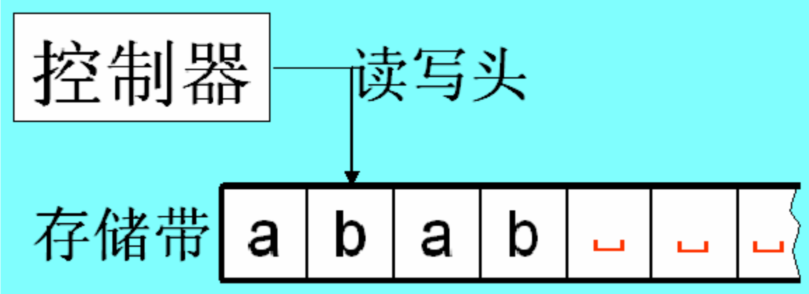
例如多带图灵机, 非确定图灵机

还有如枚举器, 带停留的图灵机等等

只要满足必要特征,

它们都与这里定义的图灵机等价.

非确定型图灵机(NTM)



- NTM的转移函数

  δ: $Q\times\Gamma\to P(Q\times\Gamma\times\{L,R\})$
- NTM转移函数举例

  $\delta(q_3,0)=\{(q_2,x,R), (q_1,1,L), (q_3,\$,R)\}$
- 称NTM M接受x, 若在x上运行M时有接受分支.
- 称一NTM为判定的,

  若它对所有输入,所有分支都停机.
- 定理: 每个NTM都有等价的确定TM.
- 定理: 每个判定NTM都有等价的判定TM.

计算理论
第二部分 可计算理论

第4章 可判定性

定理:停机问题Halt是图灵可识别的

Halt={ <M,x> | 图灵机M在串x上会停机 }

证明: 构造识别Halt的图灵机T,

T = " 对于输入<M,x>, M是图灵机, x是串

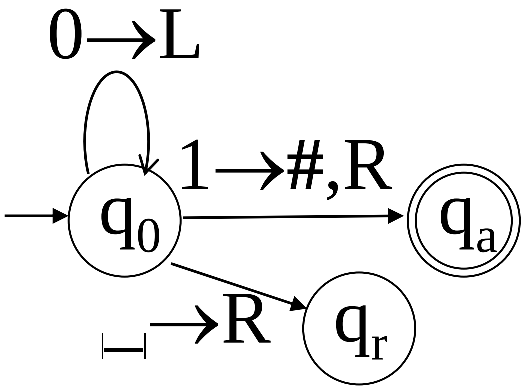
1. 在x上模拟M,

2. 若M停机(接受或拒绝), 则接受."

T的语言是Halt, 证毕.

注: T不是判定器 (?)

例输入<M,01>



M

定理:停机问题Halt不可判定

Halt={ <M,x> | 图灵机M在x上会停机 }

证明: 假设Halt有判定器H, 构造图灵机D使用H:

Diagonal = “ 对于输入<M>, M是图灵机,

1. 在<M,<M>>上运行H,
2. 若H接受, 则返回1;
3. 若H拒绝, 则停机.”

- 在Diagonal上输入<Diagonal>”是否会停机?
- 若D停机, 即<D,<D>>∈HALT, H接受<D,<D>>, 则由2, D不停机
- 若D不停机, 即<D,<D>>∉HALT, H拒绝<D,<D>>, 则由3, D停机
- 矛盾, 所以H不存在.

定理: A_{TM}的补不是图灵可识别的

定理: 若A和A的补都是图灵可识别, 则A图灵可判定

证明: 设图灵机T和Q分别识别A和A的补, 构造R:

R= “ 对于输入x, x是串,

1. 在x上同步模拟T和Q, 直到有一个接受,
2. 若T接受x, 则接受; 若Q接受x, 则拒绝.”

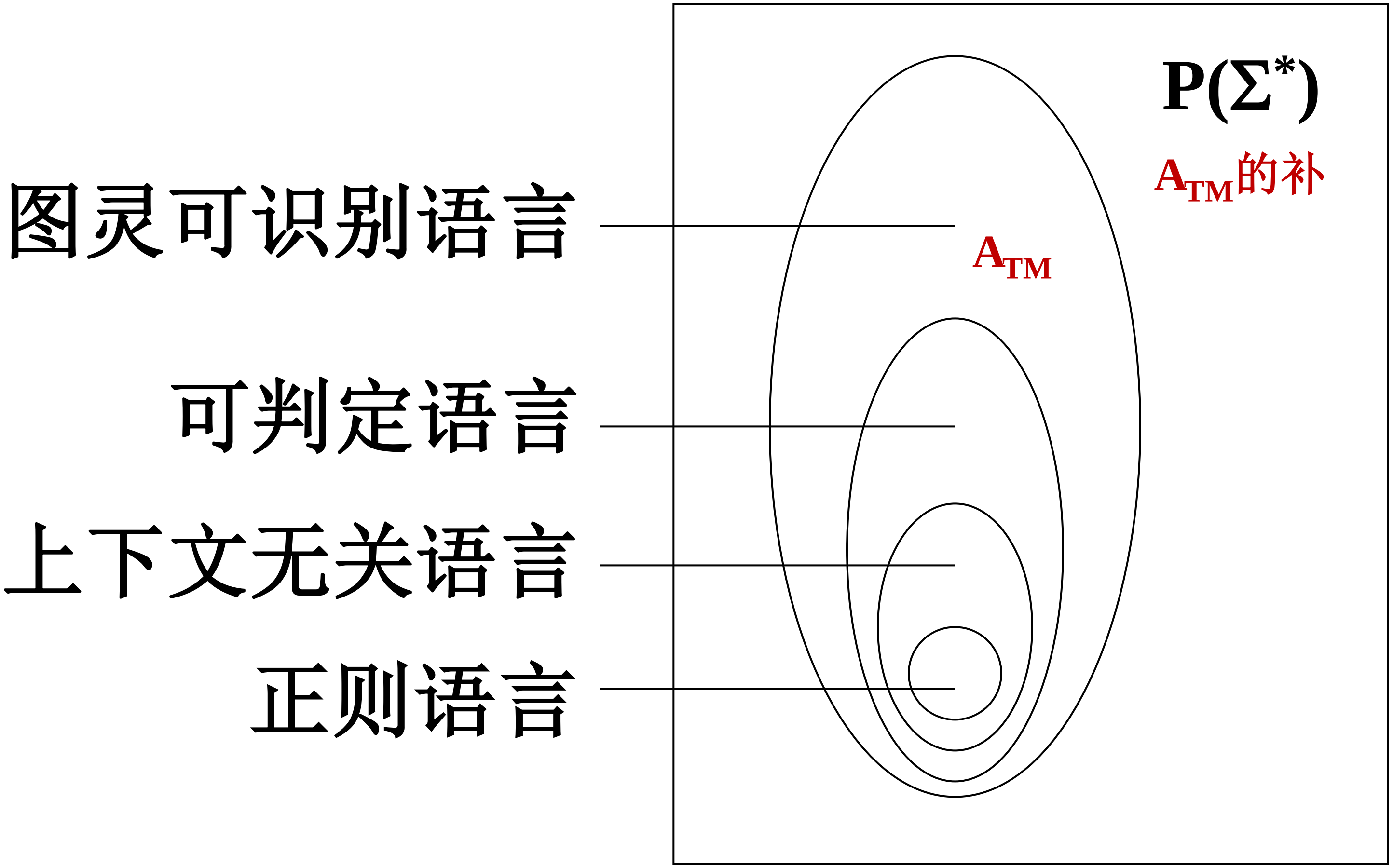
$x \in A \Rightarrow$ T接受x $\Rightarrow$ R接受x

$x \notin A \Rightarrow$ Q接受x $\Rightarrow$ R拒绝x

1. R是判定器 2. R的语言是A.

推论: A_{TM}的补不是图灵可识别的.

各语言类之间的关系



可判定性

成员测试:

A_{DFA}={<B,w>|B是DFA,w是串,B接受w} 可判定

A_{TM}={<M,w>|M是一个TM,且接受w} 不可判定

空性质测试: E_{DFA}={<A>|A是DFA,L(A)=∅} 可判定

等价性质测试:

EQ_{DFA}={<A,B>|A和B都是DFA,且L(A)=L(B)} 可判定

计算理论
第三部分 计算复杂性

第7章 时间复杂性

1. 时间复杂性
   { 0^k1^k | k≥0 }的时间复杂性分析
2. 不同模型的运行时间比较
   单带与多带 确定与非确定
3. P类与NP类
4. NP完全性及NP完全问题

时间复杂性

- 判定器M的运行时间或时间复杂度是f:N→N, f(n)是M在所有长为n的输入上运行的最大步数.
- 若f(n)是M的运行时间, 则称 M在时间f(n)内运行 或 M是f(n)时间图灵机

分析算法

讨论语言A = { 0^k1^k | k≥0 }的复杂性:

M_1=“对输入串w:

1)扫描带,如果在1的右边发现0,则拒绝.

2)如果0和1都在带上,就重复下一步.

3)　扫描带,删除一个0和一个1.

4)如果带上同时没有0和1,就接受.”

时间分析: (1) 2n=O(n), 4) n=O(n),

{ (2) 2n=O(n) + (3) 2n=O(n) } ×(n/2) = $O(n^2)$

所以M_1的运行时间是$O(n^2)$.

图灵机M_2

M_2="对输入串w:

1)扫描带,若1的右边有0,则拒绝. $O(n)$

2)若0,1都在带上,重复以下步骤. $O(n)$

3) 检查带上0,1总数的奇偶性,

若是奇数,就拒绝. $O(n)$

4) 再次扫描带,

第1个0开始,隔1个0删除1个0; $O(n)$

第1个1开始,隔1个1删除1个1.

$\times \log n$

5)若带上同时没有0和1,则接受. $O(n)$

否则拒绝."

总时间: $O(n\log n)$

单带与多带运行时间比较

$\{ 0^k1^k \mid k\geq 0 \}$ 有O(n)时间双带图灵机

M_3="对输入串w:

1) 扫描1带,如果在1的右边发现0,则拒绝.

2) 将1带的1复制到2带上.

3) 每删除一个1带的0就删除一个2带的1.

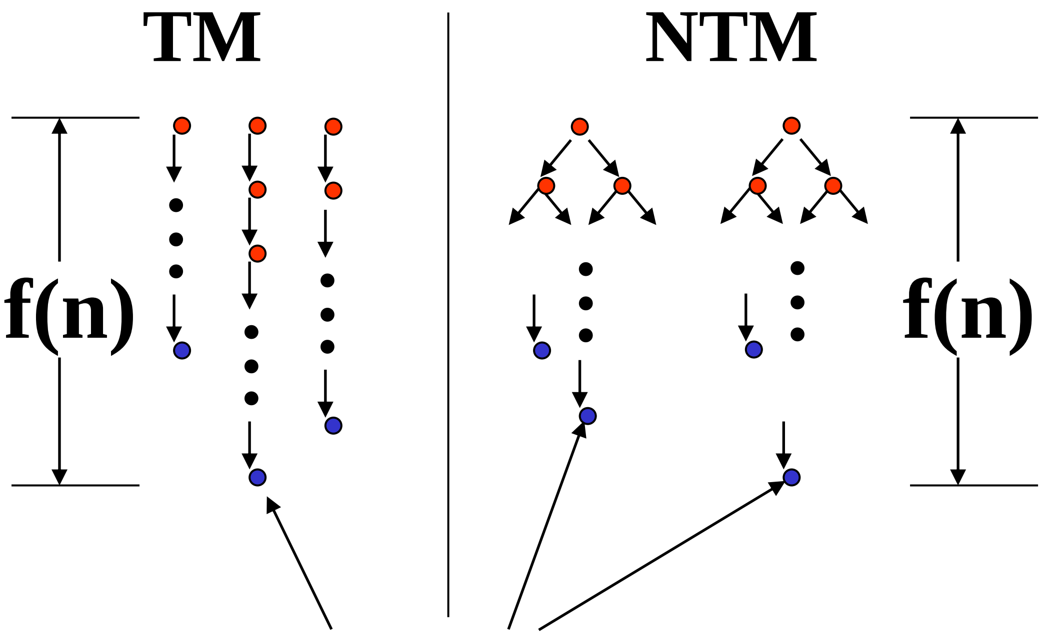
4) 如果两带上同时没有0和1,就接受."

定理:设函数t(n)≥n, 则每个t(n)时间多带TM

和某个$O(t^2(n))$时间单带TM等价.

NTM的运行时间

定义: 对非确定型判定器N, 其运行时间f(n)是在**所有**长为n的输入上, **所有**分支的最大步数.



定理: 设$t(n) \geq n$, 则每个时间$t(n)$NTM都有一等价的时间$2^{O(t(n))}$TM.

$$\mathrm{NTIME}(t(n)) \subseteq \mathrm{TIME}\,(2^{O(t(n))})$$

P类

定义:P是单带确定TM在

多项式时间内可判定的问题,即

$$P = \cup_k \mathrm{TIME}(n^k)$$

P类的重要性在于:

1) 对于所有与单带确定TM等价的模型,P不变.

2) P大致对应于在计算机上实际可解的问题.

研究的核心是一个问题是否属于P类.

NP类

NTIME(t(n))={L|L可被O(t(n))时间NTM判定.}

定义:NP是单带非确定TM在

多项式时间内可判定的问题,即

$$\mathbf{NP} = \cup_k \mathbf{NTIME}(n^k)$$

NP问题

团:无向图的完全子图(所有节点都有边相连).

CLIQUE={<G,k>|G是有k团的无向图}

定理: CLIQUE∈NP.

N="对于输入<G,k>,这里G是一个图:

1)非确定地选择G中k个节点的子集c.

2)检查G是否包含连接c中节点的所有边.

3)若是,则接受;否则,拒绝."

P与NP

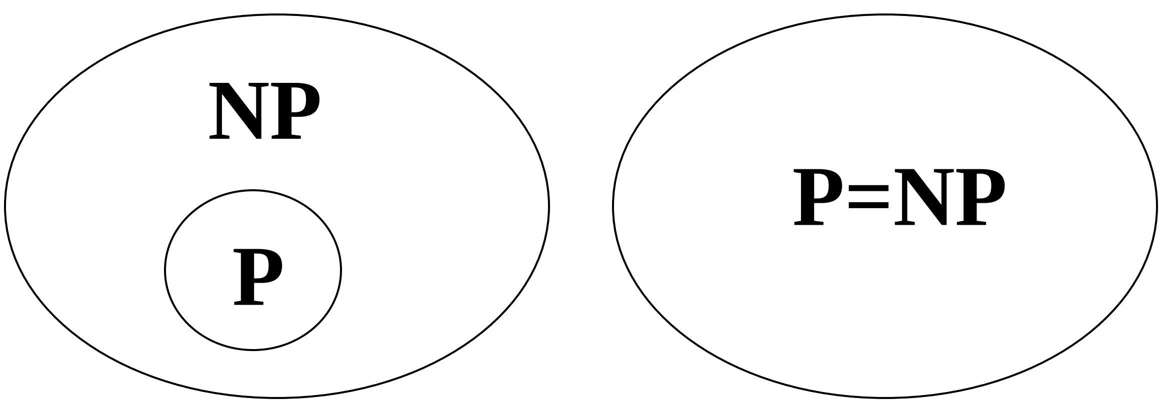
P=成员资格可以快速判定的语言类.

NP=成员资格可以快速验证的语言类.

显然有　　　$P \subseteq NP$

但是否有　　$P=NP$?

看起来难以想象, 但是现在没有发现反例.



当代数学与理论计算机共同的难题.

可满足问题SAT

- **可满足性问题:**

  SAT = { <ϕ> | ϕ是可满足的布尔公式 }

- **二元可满足性问题:**

  2SAT = { <ϕ> | ϕ是可满足的2cnf }

- **三元可满足性问题:**

  3SAT = { <ϕ> | ϕ是可满足的3cnf }

二元可满足问题2SAT∈P

1. 当2cnf中有子句是单文字x, 则反复执行(直接)清洗

1.1 由x赋值, 1.2 删去含x的子句, 1.3 删去含$\neg x$的文字

若清洗过程出现相反单文子子句, 则清洗失败并结束

$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \neg x_2) \wedge (x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_3 \vee x_4)$

$\rightarrow (x_3 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_2) \wedge (x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_3 \vee x_4)$

$\rightarrow (x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \vee x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_3 \vee x_4)$

2. 若无单文字子句, 则任选变量赋真/假值各(赋值)清洗一次

若两次都清洗失败, 则回答不可满足.

$x_3=1 \rightarrow (x_5) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_4) \rightarrow (\neg x_4) \wedge (x_4)$ 失败

$x_3=0 \rightarrow (x_4) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_5) \rightarrow (\neg x_5) \rightarrow \varnothing$ 成功

3. 若成功清洗后有子句剩下, 则继续2. 否则, 回答可满足.

3SAT∈NP

三元可满足性问题:

3SAT = { <ϕ> | ϕ是可满足的3cnf }

P时间内判定3SAT的NTM:

N="对于输入< ϕ>, ϕ是一个3cnf公式,

1)非确定地选择各变量的赋值T.

2)若在赋值T下 ϕ=1, 则接受;否则拒绝."

第2步在公式长度的多项式时间内运行.

多项式时间映射归约与C-L定理

- **Cook-Levin定理: SAT$\in$P $\Leftrightarrow$ P=NP.**
- 定义:多项式时间可计算函数$f:\Sigma^*\to\Sigma^*$.
- 定义:称A可多项式时间映射归约到B ($A\leq_p B$),

  若存在多项式时间可计算函数$f:\Sigma^*\to\Sigma^*$,

  $\forall w\in\Sigma^*$, $w\in A \Leftrightarrow f(w)\in B$.

  函数f称为A到B的多项式时间归约.

  通俗地说: f 将A的实例编码转换为B的实例编码.
- **Cook-Levin定理: 对任意$A\in NP$都有$A\leq_p SAT$.**
- 定理1: 若 $A\leq_p B$, 且 $B\in P$, 则 $A\in P$.
- 注: 定理1说明, 若$SAT\in P$, 则 $NP = P$.

定理: 3SAT $\leq_P$ CLIQUE

3SAT = {<ϕ> | ϕ是可满足的3cnf公式 }

CLIQUE = { <G,k> | G是有k团的无向图 }.

NP完全性

- **定义:语言B称为NP完全的(NPC),若它满足:**

  1) $B \in NP$; 2) $\forall A \in NP$, 都有$A \le_P B$.
- **定理1:若 $A \le_P B$, 且 $B \in P$, 则 $A \in P$.**
- **定理2: 若B是NPC, 且$B \in P$, 则$P=NP$.**
- **定理3: 若B是NPC, $B \le_P C$,且$C \in NP$, 则C是NPC.**

  证明: $\forall A \in NP$, $(A \le_P B) + (B \le_P C) \Rightarrow A \le_P C$
- **Cook-Levin定理: SAT是NP完全问题.**
- **推论: CLIQUE是NPC.**

$\forall A \in NP$, 都有 $A \leq_P SAT$

其它NP完全问题

SAT

3SAT

HP(哈密顿路径) **KS(子集和, 01背包)**

UHP(无向图哈密顿路径)

UHC(无向图哈密顿圈)

TSP(旅行售货员问题)

计算理论总结

计算模型

- 有限自动机 非确定有限自动机 正则表达式
  正则语言 泵引理
- 图灵机 图灵可判定语言 图灵可识别语言

可计算理论

停机问题非图灵可判定,

停机问题的补不是图灵可识别

计算复杂性

- **P, NP, NPC**

计算理论基础第1章作业

1.1 下图给出了两台DFA M_1和M_2的状态图。

回答下述关于这两台机器的问题。

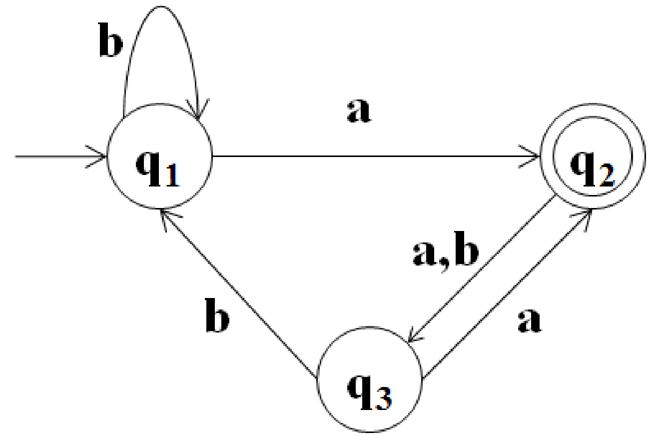
a. 它们的起始状态是什么?

b. 它们的接受状态集是什么?

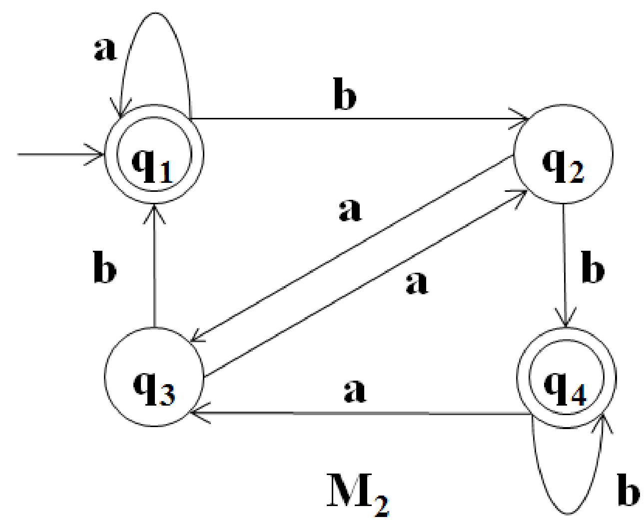
c. 对输入aabb，它们经过的状态序列是什么?

d. 它们接受字符串aabb吗?

e.它们接受字符串ε吗?



M_1



M_2

计算理论基础第1章作业

1.6 画出识别下述语言的DFA状态图. 字母表为{0,1}

d. { w | w的长度不小于3, 并且第3个符号为0};

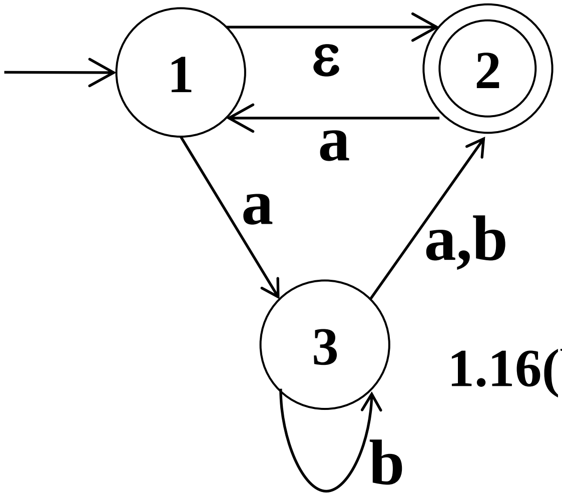
1.7. 给出下述语言的NFA, 并且符合规定的状态数.

字母表为{0,1}

e. 语言$0^*1^*0^*0$, 3个状态.

计算理论基础第1章作业

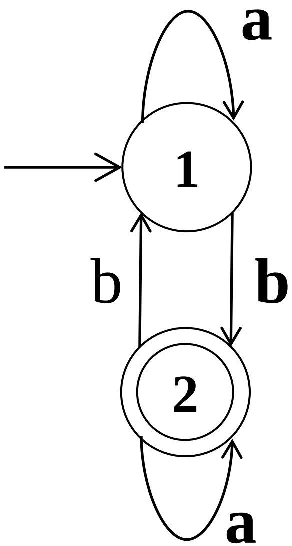
1.16(b) 将如右图的非确定有限自动机转换成等价的确定有限自动机.



1.16(b)题图

计算理论基础第1章作业

1.21(a) 将如右图的有限自动机转换成等价的正则表达式.



1.21(a)题图

1.29 使用泵引理证明下述语言不是正则的。

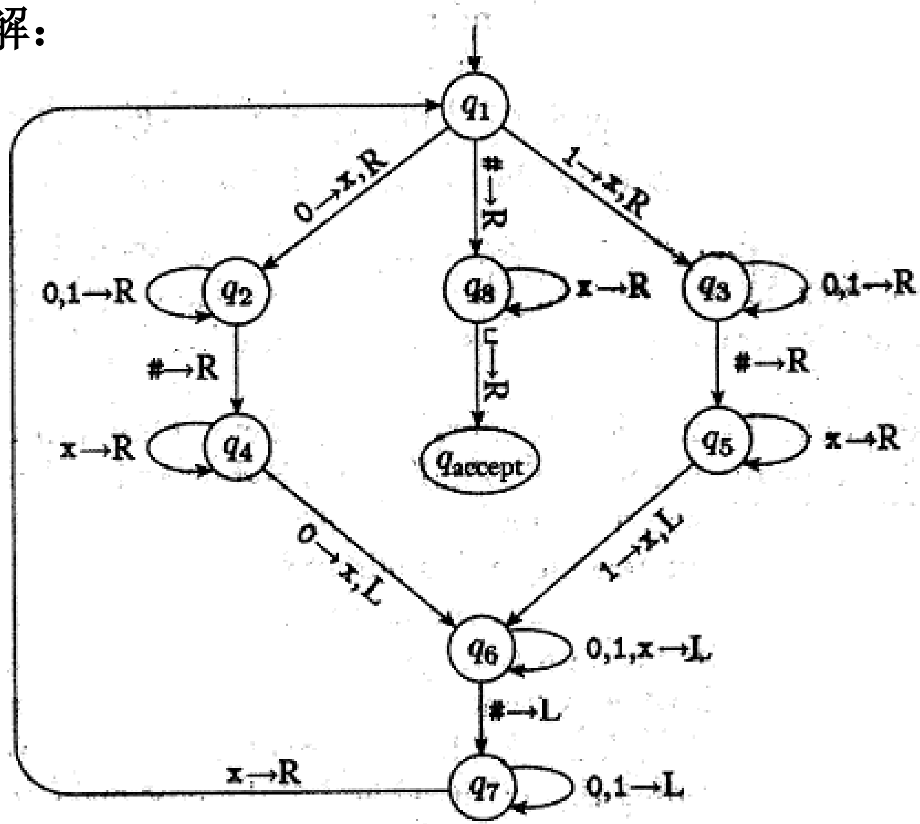
b. $A = \{ www \mid w \in \{a,b\}^* \}$

计算理论第3章作业

3.2 对于识别{w|w=u#u, u∈{0,1}*}的图灵机M_1 (见左图)，在下列输入串上，给出M所进入的格局序列.

c. 1##1， d. 10#11，e. 10#10

解:



补充说明: 没有画出的箭头指向拒绝状态, 假设这些箭头都不改写右移且q_r是拒绝状态.

计算理论第3章作业

3.8 下面的语言都是字母表{0,1}上的语言, 以实现水平的描述给出判定这些语言的图灵机:

b. B = {w|w所包含的0的个数是1的个数的两倍}

3.15b 证明图灵可判定语言类在连接运算下封闭.

3.16d证明图灵可识别语言类在交运算下封闭.

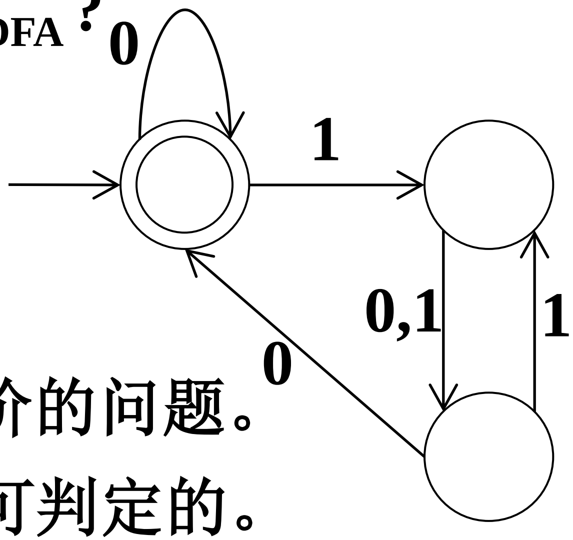
计算理论第4章作业

4.1 对于右图所示的DFA M, 回答下列问题，并说明理由

a. $\langle M,0100\rangle \in A_{DFA}$? **b.** $\langle M,011\rangle \in A_{DFA}$?

c. $\langle M\rangle \in A_{DFA}$?

e. $\langle M\rangle \in E_{DFA}$? **f.** $\langle M,M\rangle \in EQ_{DFA}$?



4.2 考虑一个DFA和一个正则表达式是否等价的问题。将这个问题描述为一个语言并证明它是可判定的。

4.3 设 $ALL_{DFA} = \{\langle A\rangle \mid A\text{是一个识别}\Sigma^*\text{的DFA}\}$. **证明**$ALL_{DFA}$**可判定.**

计算理论第7章作业

7.9 无向图中的三角形是一个3团。证明TRIANGLE∈P，其中TRIANGLE={ <G> | G包含一个三角形 }。

计算理论第7章作业

7.11 若图G的节点重新排序后，G可以变得与H完全相同，则称G与H是同构的。令ISO = {<G,H> | G和H是同构的图}。 证明ISO∈NP。

证明:构造如下非确定图灵机

N= “对于输入<G,H>, G和H都是图,

1) 若G和H顶点数不同, 则拒绝.
2) 设G的顶点为$x_1, x_2, \ldots, x_n$, H的顶点为$y_1, y_2, \ldots, y_n$.
3) 非确定的选择1到n的排列p.
4) 对 i = 1 到 n-1
5) 　　对 j = i+1 到 n
6) 　　　　若 $(x_i,x_j)\in E(G)$ 异或 $(y_{p(i)},y_{p(j)})\in E(H)$ 为真, 则拒绝
7) 接受.”。

若G, H同构,则 N一定有分支接受; 否则, N所有分支拒绝.
N的所有分支都在都在$O(n^2)$时间内运行.
所以, N是ISO的多项式时间非确定判定器, ISO∈NP.