3．基变换与坐标变换

设 V 是 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 是 V 的两个(组)基。设

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + ... + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{n2}\alpha_n \\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则上式可形式上写为

$$[\beta_1,\beta_2,...,\beta_n] = [\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]A$$

称 A 是基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 的**过渡矩阵**。称上面两式为基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 的**基变换公式**。

例 已知 R^3的一组基

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1),\boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,0),\boldsymbol{\beta}_3=(1,0,-1)$$

求 R^3的自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵。

解 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1&=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{\beta}_2&=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3\end{aligned},$$

故

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3]\boldsymbol{A}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

是自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵。

性质

(1) 过渡矩阵是唯一确定的;

(2) 过渡矩阵是可逆矩阵；

(3) 若 A 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵，则 A^{-1} 是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡矩阵。

定理 设 V 是 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 是 V 的两个基，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 A。任取 $\alpha\in V$，设 α 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的坐标为 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，关于基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 的坐标为 $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$，则

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

称上式为基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 的**坐标变换公式**。

例 3.2.9 已知 R^3 的两组基

$$\alpha_1=(1,1,1),\ \alpha_2=(0,1,1),\ \alpha_3=(0,0,1)$$

$$\beta_1=(1,0,1),\ \beta_2=(0,1,-1),\ \beta_3=(1,2,0)$$

(1) 求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵；

(2) 求 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0)$关于基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的坐标。

解 (1)（**法一**）设 $\boldsymbol{A}$为所求过渡矩阵，则

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{A}$$

把$\boldsymbol{\beta}_i$，$\boldsymbol{\alpha}_i$均写成列向量，则 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$是3阶可逆矩阵。于是

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix};$$

（**法二**）取 R^3的自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$，易得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3]\boldsymbol{P},$$

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3]\boldsymbol{Q},$$

其中

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}
$$

$\because\quad [\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}^{-1}$

$\therefore\quad [\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}$

$\Rightarrow$ 所求过渡矩阵为

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}$

$$
=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{pmatrix}
$$

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2+y_3\boldsymbol{\beta}_3$

$\because\quad [\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3]\boldsymbol{Q}$

$$
\boldsymbol{\alpha}=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3]\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}
$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$关于 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$的坐标为 $(2,2,-1)$。

例 3.2.8 已知向量空间 R^3的一个基

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (0,1,1), \boldsymbol{\beta}_2 = (1,0,1), \boldsymbol{\beta}_3 = (1,1,0)$$

求向量 $\boldsymbol{\alpha} = (2,-1,3)$关于基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$的坐标。

解（法一）令 $\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\beta}_1 + x_2\boldsymbol{\beta}_2 + x_3\boldsymbol{\beta}_3$，则

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

解得 $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -1$。所以，$\boldsymbol{\alpha}$关于基 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$的坐标为$(0, 3, -1)$。

（法二）取R^3的自然基$\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$，容易得出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3\\ \boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2\end{aligned}\quad,$$

将之写成矩阵形式

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3]\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

因此，从基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

已知 $\boldsymbol{\alpha}$ 关于自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的坐标为$(2,-1,3)$，根据坐标变换公式，$\boldsymbol{\alpha}$关于基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的坐标为

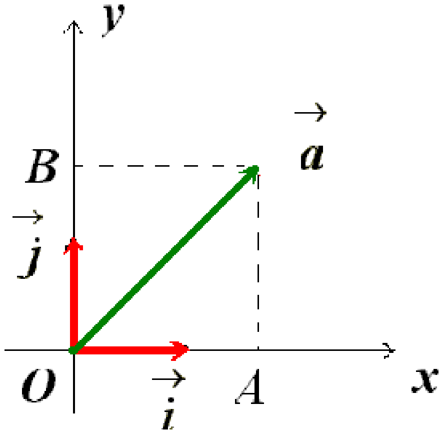
$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$$

例 3.4.10 在$F[x]_4$中,求自然基到基

$g_0=1, g_1=1+x, g_2=1+x+x^2, g_3=1+x+x^2+x^3$

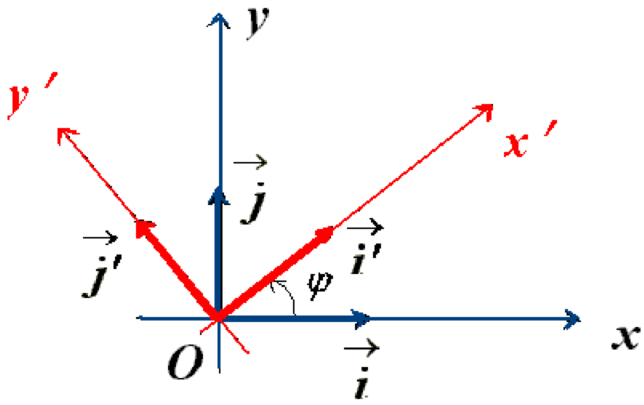
的过渡矩阵. 已知多项式$h(x)$关于基g_0,g_1,g_2,g_3的坐标为$(7,0,8,-2)^{\mathrm{T}}$,求$h(x)$关于自然基的坐标.

例 把R^2视为建立了直角坐标系Oxy的平面上全体有向线段的集合，则R^2即为平面空间。此时，R^2的自然基(1,0)，(0,1)分别对应x轴和y轴上两条起点在原点O方向指向坐标轴正向、长为 1 的有向线段$\vec{i}$和$\vec{j}$。由于$\vec{i}$和$\vec{j}$不共线,且平面上任一有向线段$\vec{a}$均可由$\vec{i}$和$\vec{j}$线性表出，所以$\vec{i}$、$\vec{j}$构成平面空间的一个基。



把坐标系Oxy逆时针旋转φ角，得到新坐标

系$Ox'y'$。在新坐标轴上也取两条起点在原点O、方向指向坐标轴正向、长为 1 的有向线段$\vec{i'}$和$\vec{j'}$，则$\vec{i'}$、$\vec{j'}$也构成平面空间的一个基。



不难得到，平面空间的这两个基$\vec{i}$、$\vec{j}$和$\vec{i'}$、$\vec{j'}$之间具有下列关系

$$\begin{cases} \vec{i'} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi \\ \vec{j'} = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi \end{cases}$$

上式可改写为

$$[\vec{i'}, \vec{j'}] = [\vec{i}, \vec{j}]\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

这就是从基$\vec{i}$、$\vec{j}$到基$\vec{i'}$、$\vec{j'}$的基变换公式，而

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

即为从基$\vec{i}$、$\vec{j}$到基$\vec{i}'$、$\vec{j}'$的过渡矩阵。

任取平面上的一条有向线段$\vec{a}$，设

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{a} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}',$$

则由坐标变换公式得

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

上式即为平面直角坐标系的**转轴公式**。

小结： 1）重点；2）难点；3）注意点。

作业： 1）预习“**§3.3**”

2）习题：**P194 17, 10,20(P163** 7, 8, 50)