一、填空题（14 分）

1. 若在区间（0,1）内任取两个数，则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$”的概率为______.

2. 设随机变量 K 服从均匀分布 $U(0,5)$. 则关于 x 的方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的概率为______.

3. 如果随机向量(X,Y)服从二维正态分布，则其边缘分布______（一定是，不一定是，一定不是）正态分布.

4. 设随机变量 $X\sim\chi^2(2)$，Y 服从二项分布 $b(4,0.5)$，且相互独立，则 $D(XY)$=______.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是互相独立的随机变量序列，且均服从参数为 3 的泊松分布 $P(3)$，则当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(X_i-1)$ 依概率收敛于______.

6. 设总体 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(0,3)$, $Y\sim N(0,9)$, X_1, X_2, X_3 与 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 分别是取自 X 与 Y 的样本，令 $T=\frac{X_1+X_2+X_3}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2+Y_4^2}}$ ，则当 c=______时，统计量 cT 服从 t 分布 $t(4)$.

7. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 均未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本。令 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Q=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则对假设检验问题 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，使用的检验统计量为______（用 $\bar{X},Q$ 表示）.

1. $\frac{17}{25}$　2. $\frac{3}{5}$　3. 一定是　4. 24　5. 9　6. 2　7. $t=\frac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{Q}}$

二、（12 分）

设甲袋有 5 个白球 6 个红球，乙袋有 10 个白球 9 个红球. 先从甲袋任取一球放入乙袋，再从乙袋任取一球.

1. 求从乙袋取得的是一个白球的概率；2. 若已知从乙袋取得的球是白球，求它是取自“从甲袋取一白球放入乙袋中”这种情况的概率.

解：设 $A=\{从乙袋取得白球\}$，$B_1=\{从甲袋取一白球放入乙袋中\}$，

$B_2=\{从甲袋取一红球放入乙袋中\}$.

1．由题意知 $P(B_1)=\frac{5}{11}, P(B_2)=\frac{6}{11}, P(A|B_1)=\frac{11}{20}, P(A|B_2)=\frac{10}{20}$.

根据全概率公式可得所求的概率为

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{5}{11}\times\frac{11}{20}+\frac{6}{11}\times\frac{10}{20}=\frac{23}{44}\approx 0.52.$$

2.根据 Bayes 公式可得所求的概率为

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{\frac{5}{11}\times\frac{11}{20}}{\frac{5}{11}\times\frac{11}{20}+\frac{6}{11}\times\frac{10}{20}}=\frac{11}{23}\approx 0.48.$$

1. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 X（分钟）服从期望为 5 的指数分布。某顾客在窗口等待服务，若超过 10 分钟他就离开。若该顾客一个月要到银行 5 次，以 Y 表示该顾客一个月未等到服务而离开窗口的次数.

（1）求 Y 的分布律;（2）求 $P\{Y\geq 1\}$.

2. 设 $X \sim N(0,1)$，令 $Y=|X|$，求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解：1. （1）已知等待时间 X~$E(1/5)$，因此等待时间超过 10 分钟的概率为

$$P\{X>10\}=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-x/5}dx=e^{-2}$$

故顾客去银行一次未等到服务而离开的概率为e^{-2}。因此$Y\sim b(5,e^{-2})$，分布律为

$$P\{Y=k\}=C_5^k e^{-2k}(1-e^{-2})^{5-k},\quad k=0,1,\ldots,5$$

（2）$P\{Y\geq 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-e^{-2})^5$

2. 由于$Y=|X|$是非负取值随机变量，因此

当 y<0 时，$F(y)$=0。

当$y\geq 0$时,$F(y)=P\{|X|\leq y\}=P\{-y\leq X\leq y\}=\Phi(y)-\Phi(-y)=2\Phi(y)-1.$

因此有

$$F(y)=\begin{cases}2\Phi(y)-1 & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

因此有

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{dF(y)}{dy}=2\varphi(y)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-y^2/2} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

四、（12 分）

设随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-2(x+y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

1. 确定常数 k 的值；2. 求 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；3. 判断 X 和 Y 是否相互独立，并给出理由；4. 求 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 和密度函数 $f_Z(z)$.

解：1．由

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}ke^{-2(x+y)}dxdy=k\int_{0}^{\infty}e^{-2x}dx\int_{0}^{\infty}e^{-2y}dy=\frac{k}{4}$$

得

$$k=4$$

2. X 的边缘密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2e^{-2x}\int_{0}^{\infty}2e^{-2y}dy, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}2e^{-2x}\ , & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}2e^{-2y}\int_{0}^{\infty}2e^{-2x}dx, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}2e^{-2y}\ , & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

3. 由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，因此 X 和 Y 相互独立.

4. X 和 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-2y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=1-P\{X>z,Y>z\}=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}$$

$$=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))=\begin{cases}1-e^{-4z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$Z=\min(X,Y)$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}4e^{-4z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

五、（8 分）

某厂商生产一件产品是合格品的概率为 0.8。已知生产一件合格品获利 10 元，生产一件次品亏损 5 元。问这家工厂生产 1 万件产品至少获利 69400 元的概率是多少？

六、（16 分）

二维随机变量(X,Y)在区域 $G=\{(x,y):\ |x|<y<1\}$上服从均匀分布，随机变量 V 和(X,Y)独立，且

$V \sim N(0,\dfrac{1}{36})$，令 $U=2X-Y$ ，$Z=U+V+1$，

求 1. $E(X), E(Y), D(X), D(Y), Cov(X,Y)$；2. $E(Z), D(Z)$ 和 ρ_{ZU} .

解：可知(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |x|<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

且 $EV=0, DV=\dfrac{1}{36}$.

于是，有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=0$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=2/3,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=1/6,$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dxdy=1/2$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=1/6,$$

$$D(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=1/18,$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=0,$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.$$

(2) $EZ = 2EX - EY + EV + 1 = \frac{1}{3}$

由 X 与 Y 不相关，可知 $D(U) = 4D(X) + D(Y) = \frac{13}{18}$,

因为 V 与（X，Y）独立，所以 V 与 U 独立

$$DZ = DU + DV = \frac{3}{4}$$

以及 $Cov\,(Z,U) = D(U) = 13/18$,

所以，$\rho_{ZU} = \frac{Cov\,(Z,U)}{\sqrt{D(Z)D(U)}} = \sqrt{\frac{D(U)}{D(Z)}} = \sqrt{\frac{26}{27}}$ ，

七、（12 分）

设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自该总体的样本，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为相应的样本观测值.

1. 求参数 θ 的矩估计； 2.求参数 θ 的最大似然估计；3. 求 DX 的最大似然估计.

解：1. 总体 X 的一阶矩为 $\mu_1 = EX = \theta$

解得 $\theta = \mu_1$

以$A_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$代替$\mu_1$，得参数$\theta$的矩估计量为

$$\hat{\theta} = \bar{X}.$$

2.

似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \theta^{-n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

对θ求导并令导数为零，得对数似然方程为

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

解得θ的最大似然估计值为

$$\hat{\theta} = \bar{x}.$$

因为$D(X) = \theta^2$，由最大似然估计的不变性可得$D(X)$的最大似然估计值为

$$\widehat{D(X)} = \bar{x}^2.$$

八、（14 分）

1. 叙述假设检验中犯第一类错误和犯第二类错误的定义。

2.某零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，按规定其方差σ^2不得超过 0.016。现从一批零件中随机抽取 25 件测量其长度，得样本方差为 0.025. 由此判断这批零件是否符合规定？（显著性水平α=0.05）.

1、第一类错误：原假设成立时拒绝原假设

第二类错误：原假设不成立时，接受原假设

2、提出假设

$$H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2=0.016, H_1:\sigma^2>\sigma_0^2=0.016$$

检验统计量：$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$.

拒绝域：$\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge\chi_\alpha^2(n-1)$.

查表得 $\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(24)=36.415$，计算得 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{24\times0.025}{0.016}=37.5$

因为$37.5>36.415$,

所以在显著性水平$\alpha=0.05$下拒绝原假设，认为这批零件不合格。