第十八章 着色

主要内容

- ~~18.1支配集、点覆盖集与点独立集~~
- ~~18.2边覆盖与匹配~~
- ~~18.3二部图中的匹配~~
- 18.4点着色
- 18.5地图着色与平面图的点着色
- 18.6边着色

第十八章 着色

主要内容

- 18.1支配集、点覆盖集与点独立集
- 18.2边覆盖与匹配
- 18.3二部图中的匹配
- 18.4点着色
- 18.5地图着色与平面图的点着色
- 18.6边着色

支配集与支配数

定义18.1 设$G=\langle V,E\rangle$，$V^*\subseteq V$.

(1) V^*为**支配集**——$\forall v_i\in V-V^*,\exists v_j\in V^*$，使得$(v_i,v_j)\in E$

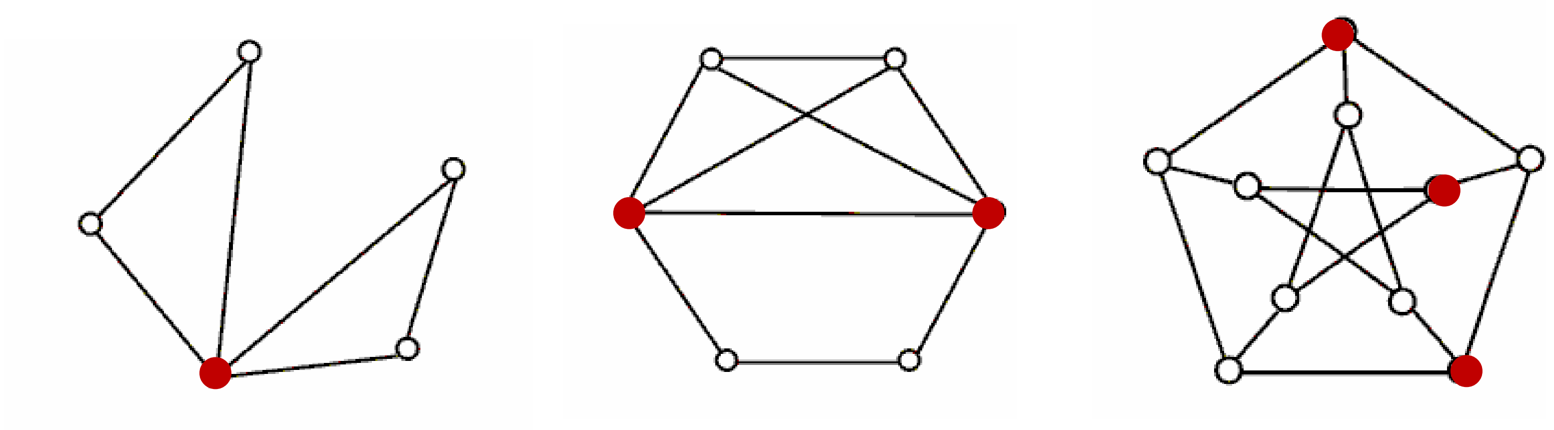
(2) V^*为**极小支配集**——V^*的真子集不是支配集

(3) **最小支配集**——元素最少的支配集

(4) **支配数** $\gamma_0(G)$——最小支配集中的元素个数

极小与最小支配集之间的关系

最小支配集为极小支配集，但反之不真.
另外，极小支配集与最小支配集都可能不惟一.
又易知完全图、轮图、星形图的支配数均是1.



(1) (2) (3)

图中，(1),(2),(3)(彼得松图)的支配数分别为1，2，3
请各找出一个最小支配集.

点独立集与点独立数

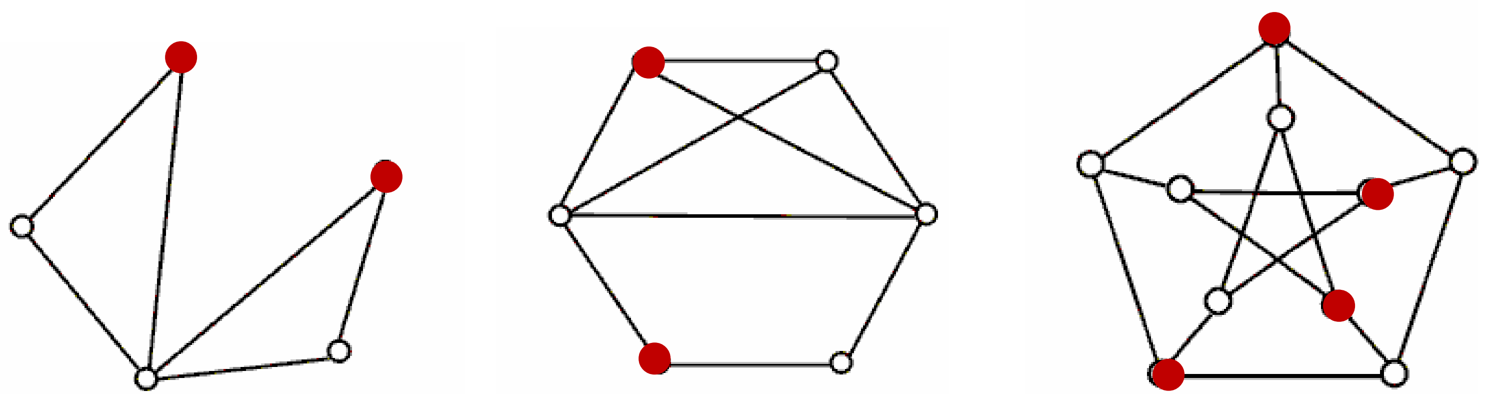
定义18.2 设$G=<V,E>$， $V^*\subseteq V$.

(1) 点独立集V^*——V^*中顶点彼此不相邻

(2) V^*为极大点独立集——V^*中再加入任何顶点就不是点独立集

(3) 最大点独立集——元素最多的点独立集

(4) 点独立数——最大点独立集中的元素个数，记为 β_0



(1) (2) (3)

在图中，点独立数依次为2, 2, 4

极大独立集与极小支配集

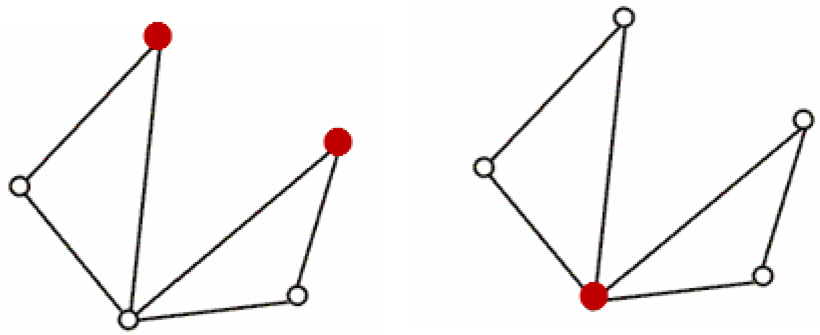
定理18.1 设$G=<V,E>$中无孤立点，则G的极大点独立集都是极小支配集.

证明线索：

(1) 设V^*为G的极大点独立集，证明它也是支配集.
$\forall v\in V-V^*$，必$\exists v'\in V^*$，使$(v,v')\in E$，否则$\exists v_0\in V-V^*$不与V^*中任何顶点相邻，则$V^*\cup\{v_0\}$仍为点独立集，这与V^*是极大点独立集矛盾.

(2) 证V^*是极小支配集. 只需证V^*的真子集不是支配集.

特别注意，定理18.1其逆不真.



点覆盖集与点覆盖数

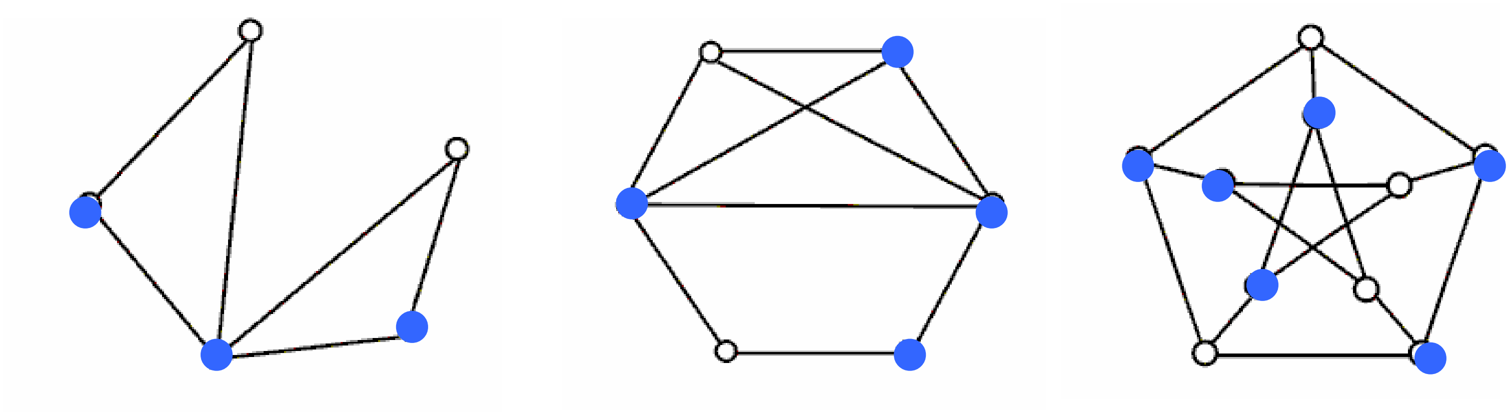
定义18.3 设$G=\langle V,E\rangle$, $V^*\subseteq V$.

(1) V^*是**点覆盖集（简称点覆盖）**——$\forall e\in E$，$\exists v\in V^*$，使e与v关联

(2) V^*是**极小点覆盖集**——V^*的任何真子集都不是点覆盖集

(3) **最小点覆盖集**(或最小点覆盖)——顶点数最少的点覆盖集

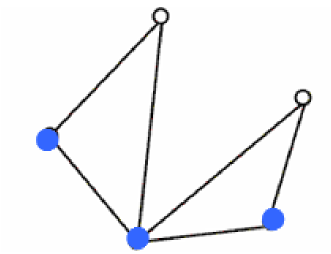
(4) **点覆盖数** $\alpha_0(G)$——最小点覆盖的元素个数

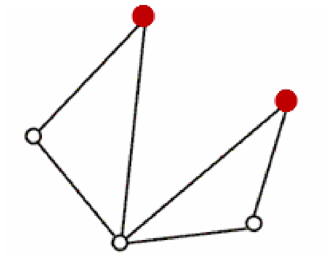


图中，点覆盖数依次为3,4,6

点覆盖集与点独立集的关系

定理18.2 设$G=<V,E>$无孤立点，$V^* \subseteq V$，则V^*是点覆盖当且仅当 $\overline{V^*} = V- V^*$为点独立集





证 必要性. 若$\exists v_i, v_j \in \overline{V^*}$ 相邻，即$(v_i,v_j)\in E$，则V^*中顶点不能覆盖(v_i,v_j)，这是矛盾的.

充分性. 由于$\overline{V^*} = V- V^*$ 是点独立集，因而$\forall e\in E$，e的两个端点至少一个在V^*中.

推论 设G为n阶无孤立顶点图，则V^*是极小(最小)点覆盖当且仅当是极大（最大）点独立集，从而有 $\alpha_0+\beta_0=n$

定义18.1 设$G=<V,E>$， $V^*\subseteq V$.

(1) V^*为支配集——$\forall v_i\in V-V^*$,$\exists v_j\in V^*$，使得$(v_i,v_j)\in E$

(4) 支配数$\gamma_0(G)$——最小支配集中的元素个数

定义18.3 设$G=<V,E>$, $V^*\subseteq V$.

(1) V^*是点覆盖集——$\forall e\in E$，$\exists v\in V^*$，使e与v关联

(4) 点覆盖数$\alpha_0(G)$——最小点覆盖的元素个数

定义18.2 设$G=<V,E>$， $V^*\subseteq V$.

(1) 点独立集V^*——V^*中顶点彼此不相邻

(4) 点独立数——最大点独立集中的元素个数，记为β_0

$$\alpha_0+\beta_0=n$$

第十八章 着色

主要内容

- **18.1**支配集、点覆盖集与点独立集
- **18.2**边覆盖与匹配
- **18.3**二部图中的匹配
- **18.4**点着色
- **18.5**地图着色与平面图的点着色
- **18.6**边着色

18.2 边覆盖集与匹配

边覆盖集与边覆盖数

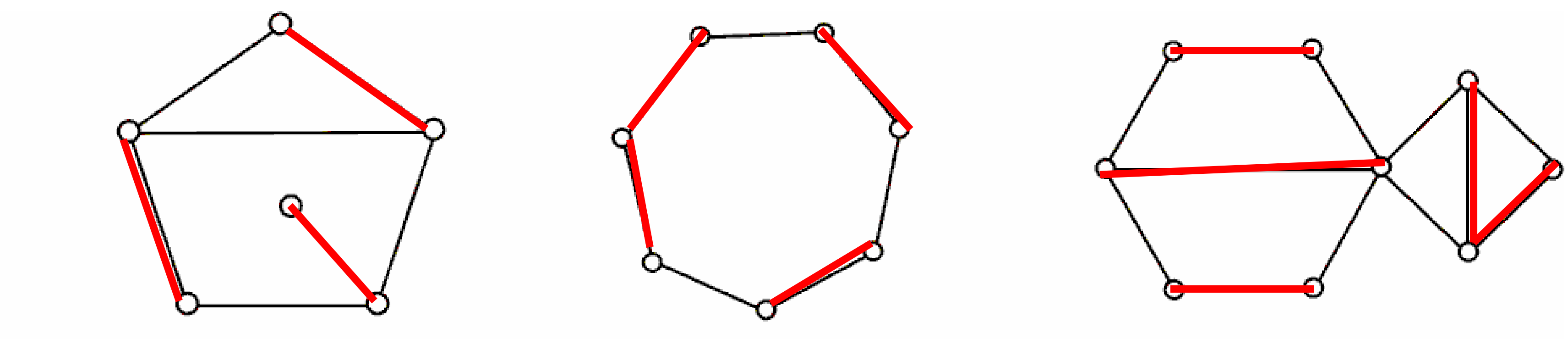
定义18.4 设$G=<V,E>$，$E^* \subseteq E$，

(1) E^* 为边覆盖集——$\forall v\in V$，$\exists e\in E^*$，使得v与e关联

(2) E^* 为极小边覆盖——E^* 的真子集不是边覆盖

(3) 最小边覆盖——边数最少的边覆盖

(4) 边覆盖数 α_1——最小边覆盖中元素个数



图中各图的边覆盖数依次为3, 4, 5

请各找出一个最小边覆盖.

匹配(边独立集)与匹配数(边独立数)

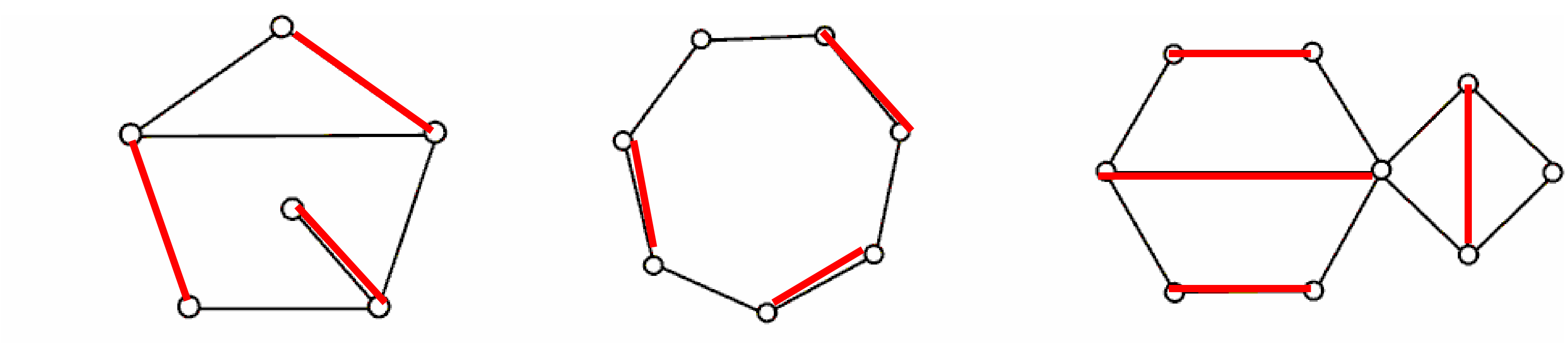
定义18.5 设$G=<V,E>$, $E^*\subseteq E$,

(1) 匹配(边独立集)E^*——E^*中各边均不相邻

(2) 极大匹配E^*——E^*中不能再加其他边了

(3) 最大匹配——边数最多的匹配

(4) 匹配数——最大匹配中的边数，记为β_1



上图中各图的匹配数依次为3, 3, 4

关于匹配中的其他概念

定义18.6 设M为G中一个匹配（边独立集）.

(1) v_i与v_j被M匹配——$(v_i,v_j)\in M$

(2) v为M饱和点——有M中边与v关联

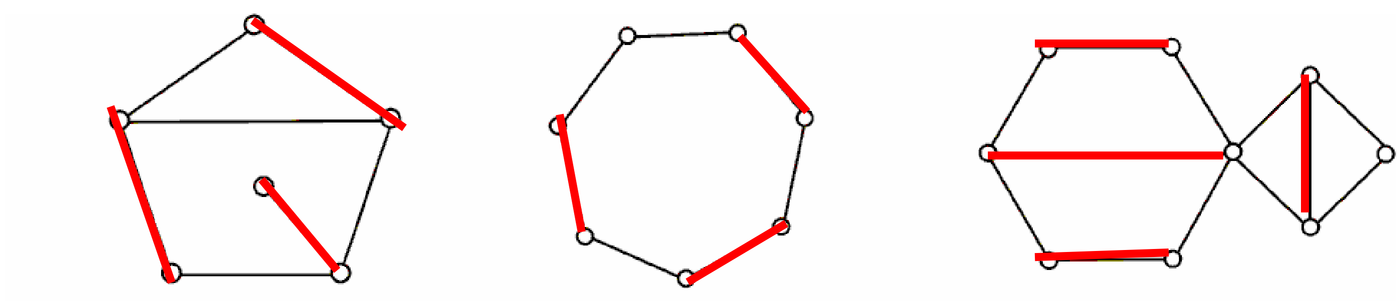
(3) v为M非饱和点——无M中边与v关联

(4) M为完美匹配——G中无M非饱和点

(5) M的交错路径——从M与$E-M$中交替取边构成的G中路径

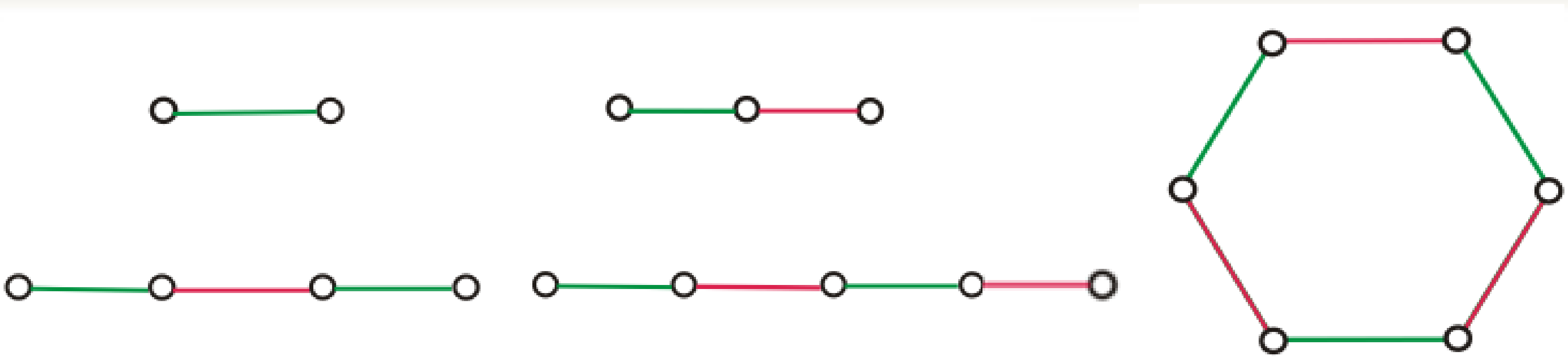
(6) M的可增广交错路径——起、终点都是M非饱和点的交错路径

(7) M的交错圈——由M与$E-M$中的边交替出现构成的G中圈



上图中，只有第一个图存在完美匹配

可增广路径及交错圈



(1)　　(2)　　(3)

设红色边在匹配M中，绿色边不在M中，则图(1)中的两条路径均为可增广的交错路径；(2)中的全不是可增广的交错路径；(3)中是一个交错圈.

- 不难看出，可增广交错路径中，不在M中的边（绿色）比在M中的边（红色）多一条.交错圈一定为偶圈.

最大匹配与最小边覆盖之间关系

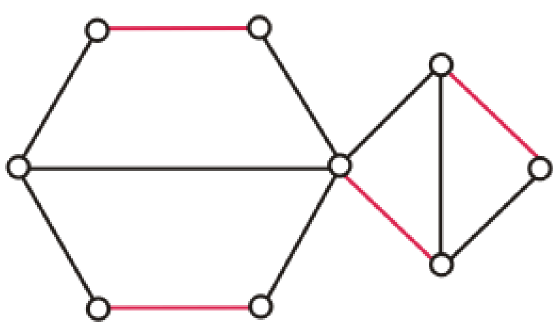
定理18.3 设n阶图G中无孤立顶点.

(1) 设M为G中一个最大匹配，对于G中每个M非饱和点均取一条与其关联的边，组成边集N，则$W=M\cup N$为G中最小边覆盖.

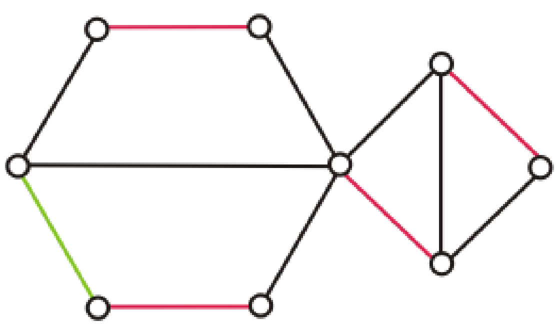
(2) 设W_1为G中一个最小边覆盖；若W_1中存在相邻的边就移去其中的一条，设移去的边集为N_1，则$M_1=W_1-N_1$为G中一个最大匹配.

(3) G中边覆盖数α_1与匹配数β_1满足$\alpha_1+\beta_1=n$.

证明见教材.



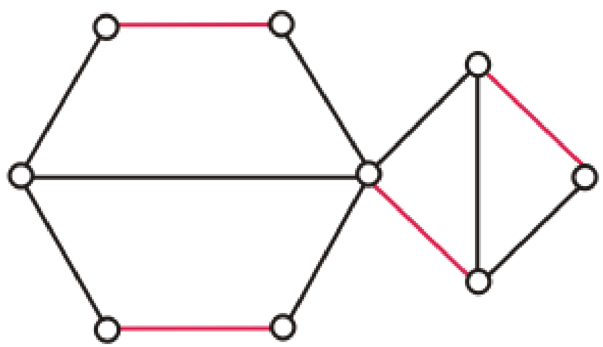
(1)



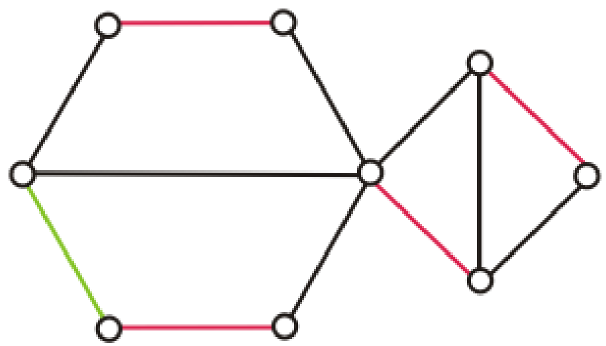
(2)

推论

推论 设G是n阶无孤立顶点的图. M为G中的匹配， W是G中的边覆盖，则 $|M| \le |W|$，等号成立时，M为G中完美匹配，W为G中最小边覆盖.



(1)



(2)

最大匹配判别定理

定理18.4 M为G中最大匹配当且仅当G中不含M的可增广交错路径.

证明（略）

定义18.4 设$G=<V,E>$，$E^* \subseteq E$，

(1) E^* 为边覆盖集——$\forall v \in V$，$\exists e \in E^*$，使得v与e关联

(4) 边覆盖数α_1——最小边覆盖中元素个数

定义18.5 设$G=<V,E>$, $E^* \subseteq E$，

(1) 匹配(边独立集)E^*——E^*中各边均不相邻

(4) 匹配数β_1——最大匹配中的边数

$$\alpha_1+\beta_1=n$$

第十八章 着色

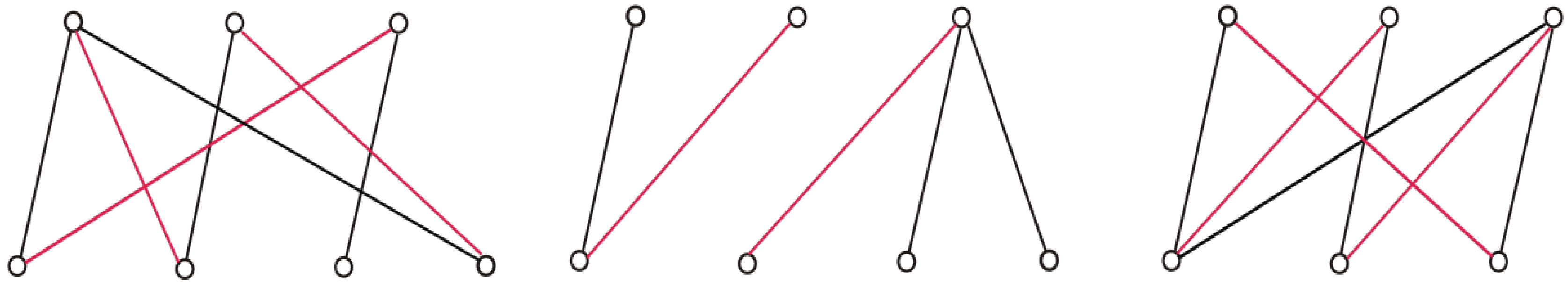
主要内容

- **18.1**支配集、点覆盖集与点独立集
- **18.2**边覆盖与匹配
- **18.3**二部图中的匹配
- **18.4**点着色
- **18.5**地图着色与平面图的点着色
- **18.6**边着色

18.3 二部图中的匹配

定义18.7 设$G=<V_1,V_2,E>$为二部图，$|V_1|\le|V_2|$，M是G中最大匹配，若V_1中顶点全是M饱和点，则称M为V_1到V_2的完备匹配.

$|V_1|=|V_2|$ 时完备匹配变成完美匹配.



(1) (2) (3)

图中，红边组成各图的一个匹配，

(1)中为完备匹配，

(2)中匹配不是完备的，(2)中无完备匹配，

(3)中匹配是完备的，也是完美的.

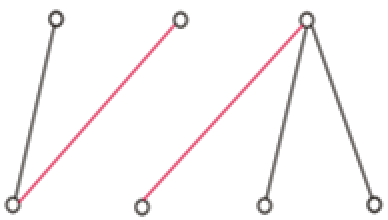
Hall定理

定理18.5 （**Hall定理**）设二部图$G=<V_1,V_2,E>$中，$|V_1|\le|V_2|$. G中存在从V_1到V_2的完备匹配当且仅当V_1中任意$k(k=1,2,\ldots,|V_1|)$个顶点至少与V_2中的k个顶点相邻.

本定理中的条件常称为“相异性条件”.

由Hall定理立刻可知，

图(2)为什么没有完备匹配.



(2)

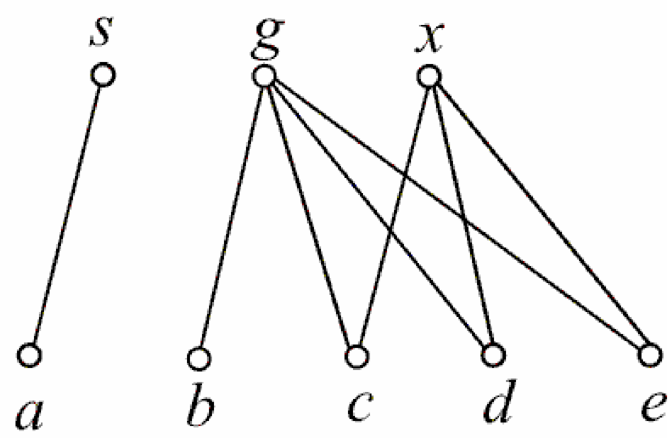
定理18.6 设二部图$G=<V_1,V_2,E>$中，V_1中每个顶点至少关联t $(t\ge1)$条边，而V_2中每个顶点至多关联t条边，则G中存在V_1到V_2的完备匹配.

定理18.6中的条件称为t（$t\ge1$）条件.

一个应用实例

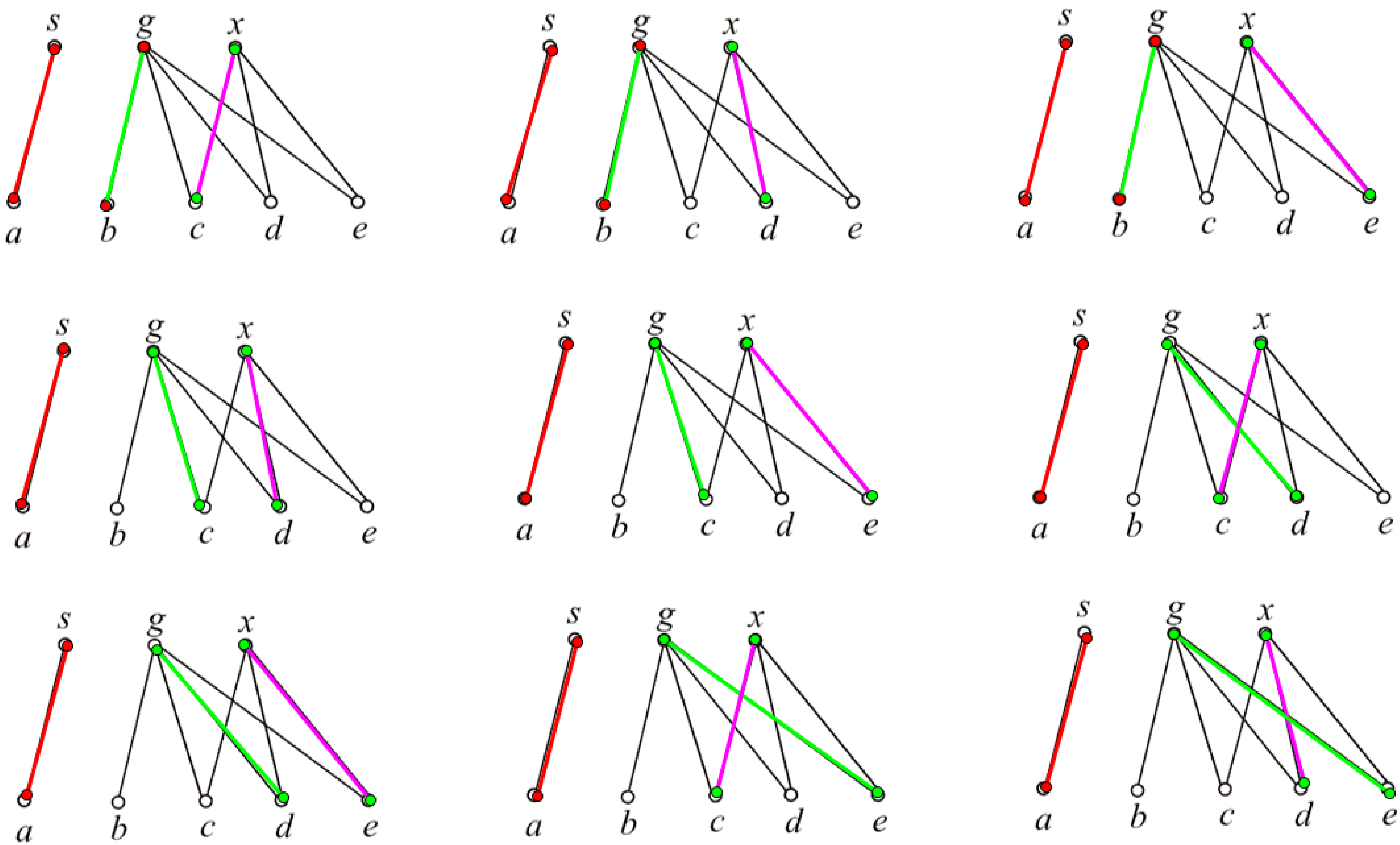
- 某课题组要从a, b, c, d, e 5人中派3人分别到上海、广州、香港去开会. 已知a只想去上海，b只想去广州，c, d, e都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下，可以派遣吗？若可以，共有几种派遣方案？

解 用二部图中的匹配理论解本题方便.
令$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，其中$V_1=\{s, g, x\}$，$s, g, x$分别表示上海、广州和香港. $V_2=\{a, b, c, d, e\}$, $E=\{(u,v) \mid u\in V_1, v\in V_2, v$想去$u\}$.
G如图所示.



G满足相异性条件，因而可派遣，共有9种派遣方案(请给出这9种方案).

9种方案


s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e
s g x
a b c d e

第十八章 着色

主要内容

- ~~18.1支配集、点覆盖集与点独立集~~
- ~~18.2边覆盖与匹配~~
- ~~18.3二部图中的匹配~~
- 18.4点着色
- 18.5地图着色与平面图的点着色
- 18.6边着色

18.4 点着色

定义18.8

(1) 图G的一种**点着色**——给图G的每个顶点涂上一种颜色，使相邻顶点具有不同颜色

(2) 对G进行k**着色**（G是k-可着色的）——能用k种颜色给G的顶点着色

(3) G的**色数**$\chi(G)=k$——G是k-可着色的，但不是$(k-1)$-可着色的.

色数的上界

定理18.7 对于任意无向图G，均有

$$\chi(G) \le \Delta(G)+1$$

证明线索：对G的阶数n做归纳.

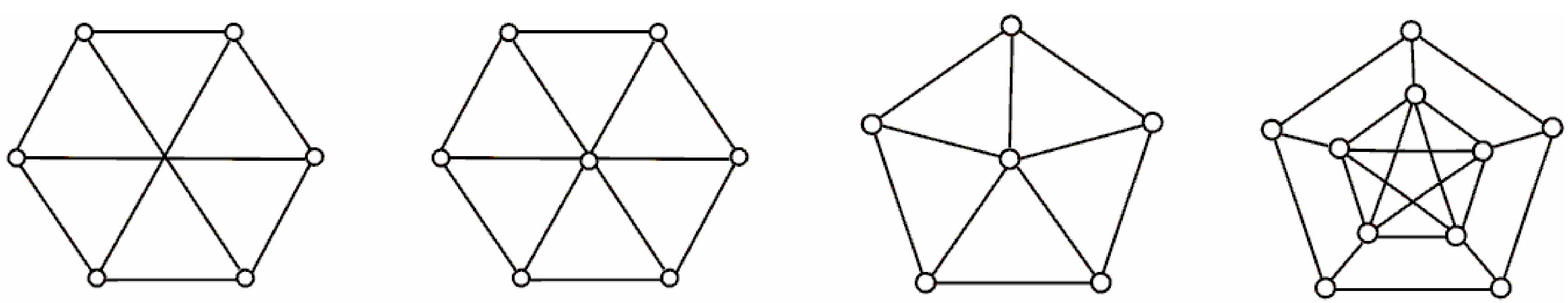
定理18.8 若连通无向图G不是K_n,（$n\geq 3$），也不是奇圈，则

$$\chi(G) \le \Delta(G)$$

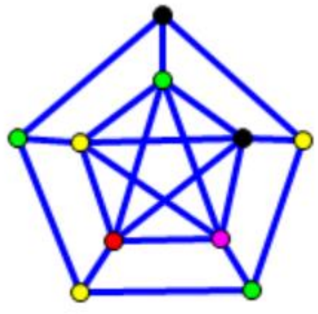
定理18.8称为布鲁克斯定理.

关于顶点着色的几个简单结果

1. $\chi(G)=1$当且仅当G为零图
2. $\chi(K_n)=n$
3. 若G为偶圈，则$\chi(G)=2$，若G为奇圈或奇阶轮图，则$\chi(G)=3$，若G为偶阶轮图，则$\chi(G)=4$.
4. 若G的边集非空，则$\chi(G)=2$当且仅当G为二部图.



上述各图中，色数分别为2，3，4，5，为什么？



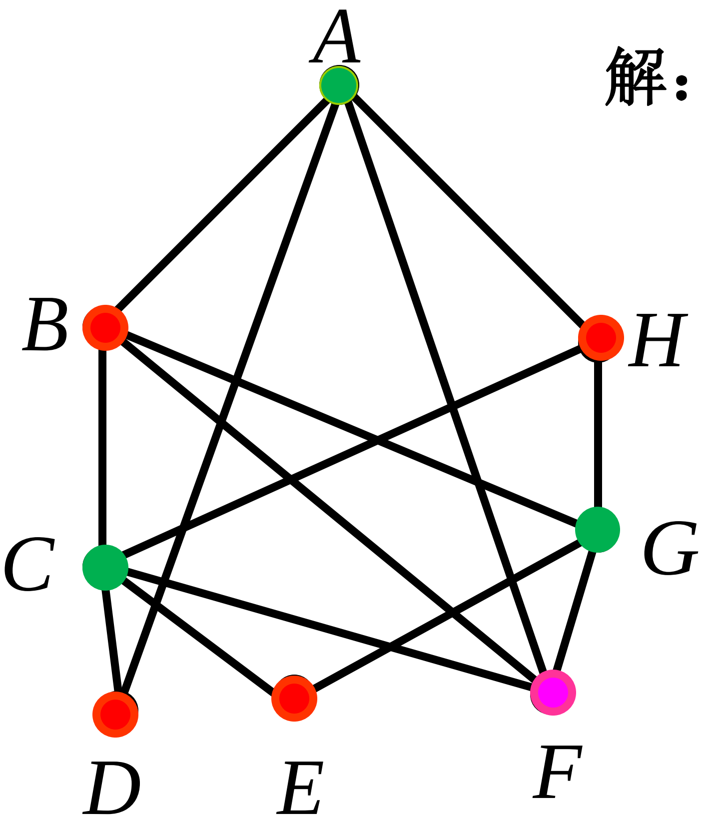
韦尔奇·鲍威尔法(Welch Powell)

1） 将图*G* 中的结点按度数递减的次序进行排列（相同度数的结点的排列随意）。

2） 用第一种颜色，对第一点着色，并按排列次序对与前面结点不相邻的每一点着同样的颜色。

3） 用第二种颜色对尚未着色的点重复第 2 步，直到所有的点都着上颜色为止。

例 用韦尔奇 · 鲍威尔法对图进行着色



解：•按度数递减次序排列各点

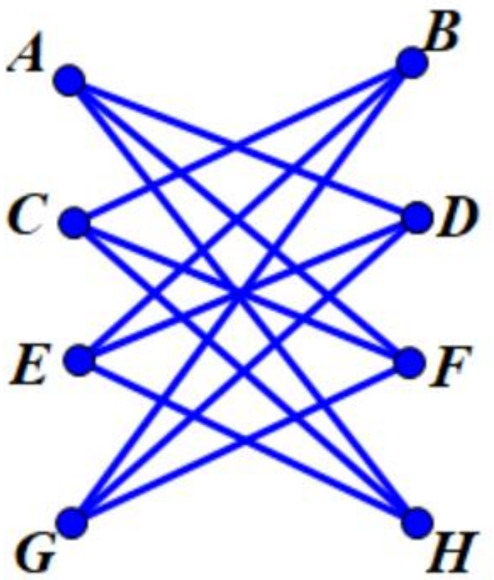
$\cancel{C}\ \cancel{A}\ \cancel{B}\ \cancel{F}\ \cancel{G}\ \cancel{H}\ \cancel{D}\ \cancel{E}$

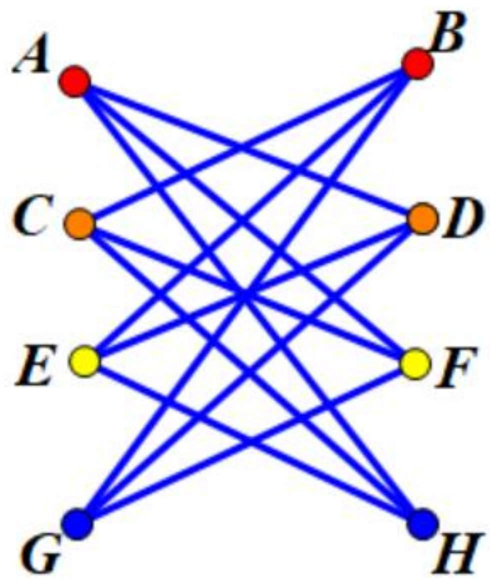
- 第一种颜色： *C*, *A*, *G*
- 第二种颜色： *B*, *H*, *D*, *E*
- 第三种颜色： *F*

所以图是3色的。

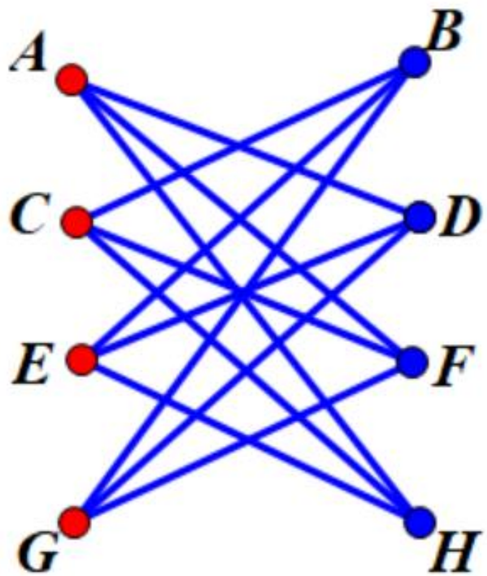
另外图不能是两色的，因为图中有 *A*,*B*,*F* 两两邻接，所以 $\chi(G)=3$

注意： 韦尔奇 · 鲍威尔法并不总能得到最少颜色数目的着色方案





ABCDEFGH

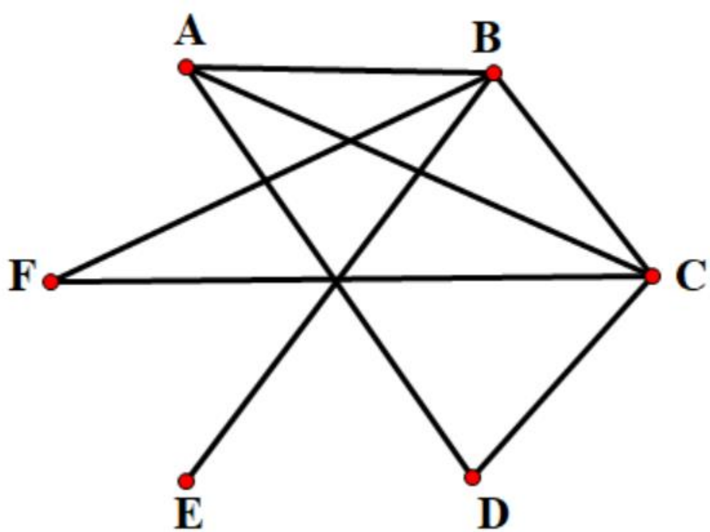


ACEGBDFH

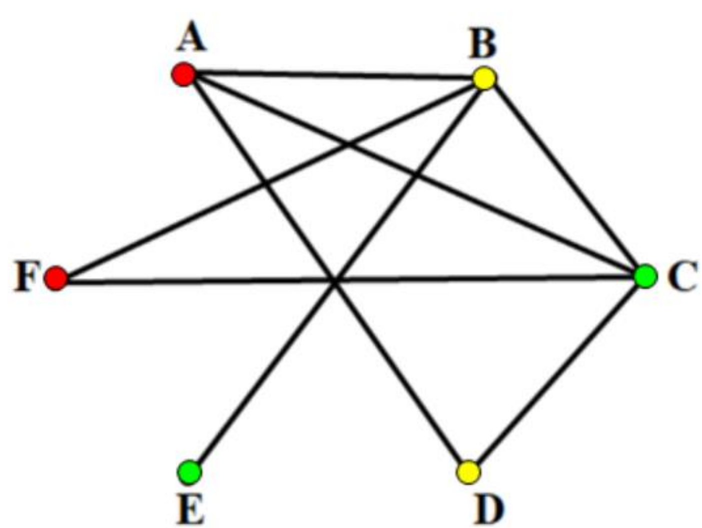
点着色的应用实例1

例：一个班级的学生共计选修A、B、C、D、E、F六门课程，其中一部分人同时选修D、C、A，一部分人同时选修B、C、F，一部分人同时选修B、E，还有一部分人同时选修A、B，期终考试要求每天至少安排一场考试，且为了减轻学生负担，每人在一天内最多只参加一场考试，请问，最少几天能考完？并设计一个考试日程表。

解：以每门课程为一个顶点，共同被选修的课程之间用边相连，来构造一个图（左图），按题意，相邻顶点对应课程不能安排在同一天中，相邻顶点不同色，
不相邻顶点对应课程能安排在同一天中。不相邻顶点可以同色



排序：BCADFE



最少3天能考完，
如BD CE AF，
就是一个符合要求的考试日程表

点着色的应用实例2

例：某校计算机系学生在本学期共选6门选修课C_i, i=1,2, …, 6. 设$S(C_i)$为选C_i课的学生集. 已知：

$$S(C_i)\cap S(C_6)\neq\varnothing,\quad i=1, 2, \ldots, 5,$$

$$S(C_i)\cap S(C_{i+1})\neq\varnothing,\quad i=1, 2, 3, 4,$$

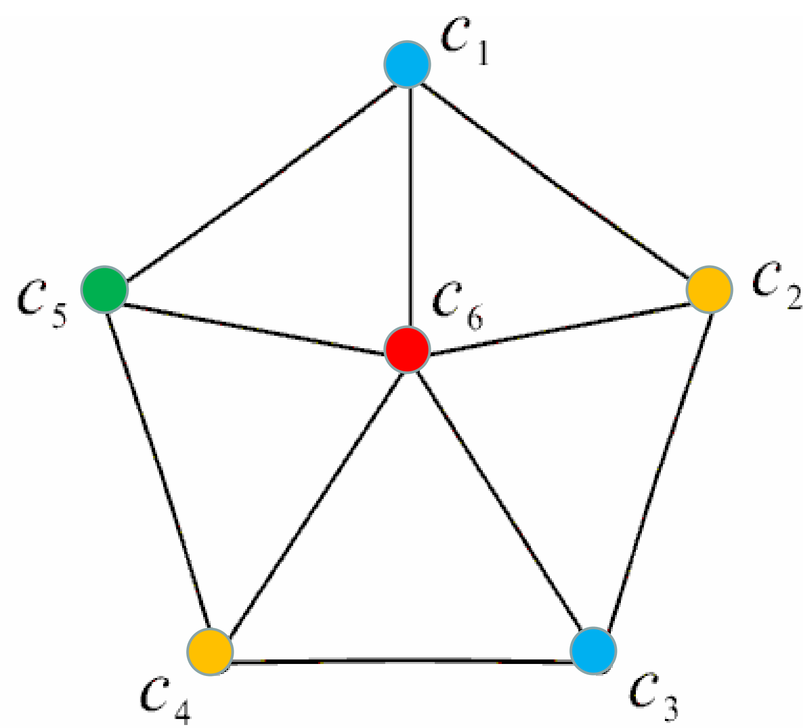
$$S(C_5)\cap S(C_1)\neq\varnothing.$$

问这6门课至少几天能考完？

点着色的应用实例2（续）

$S(C_i)\cap S(C_6)\neq\varnothing$, i=1, 2, …, 5,
$S(C_i)\cap S(C_{i+1})\neq\varnothing$, i=1, 2, 3, 4,
$S(C_5)\cap S(C_1)\neq\varnothing$.

解： 由已知条件做无向图$G=\langle V,E\rangle$，
其中 $V=\{C_1, C_2, \ldots, C_6\}$，
$E=\{(C_i,C_j)\mid S(C_i)\cap S(C_j)\neq\varnothing\}$，
如图所示W_6.



给G一种着色(点着色)，
C_i与C_j着同色
$\Leftrightarrow$ C_i与C_j不相邻
$\Leftrightarrow$ 没有学生既学C_i又学C_j
$\Leftrightarrow$ C_i与C_j可同时考.

于是最少的考试时间为

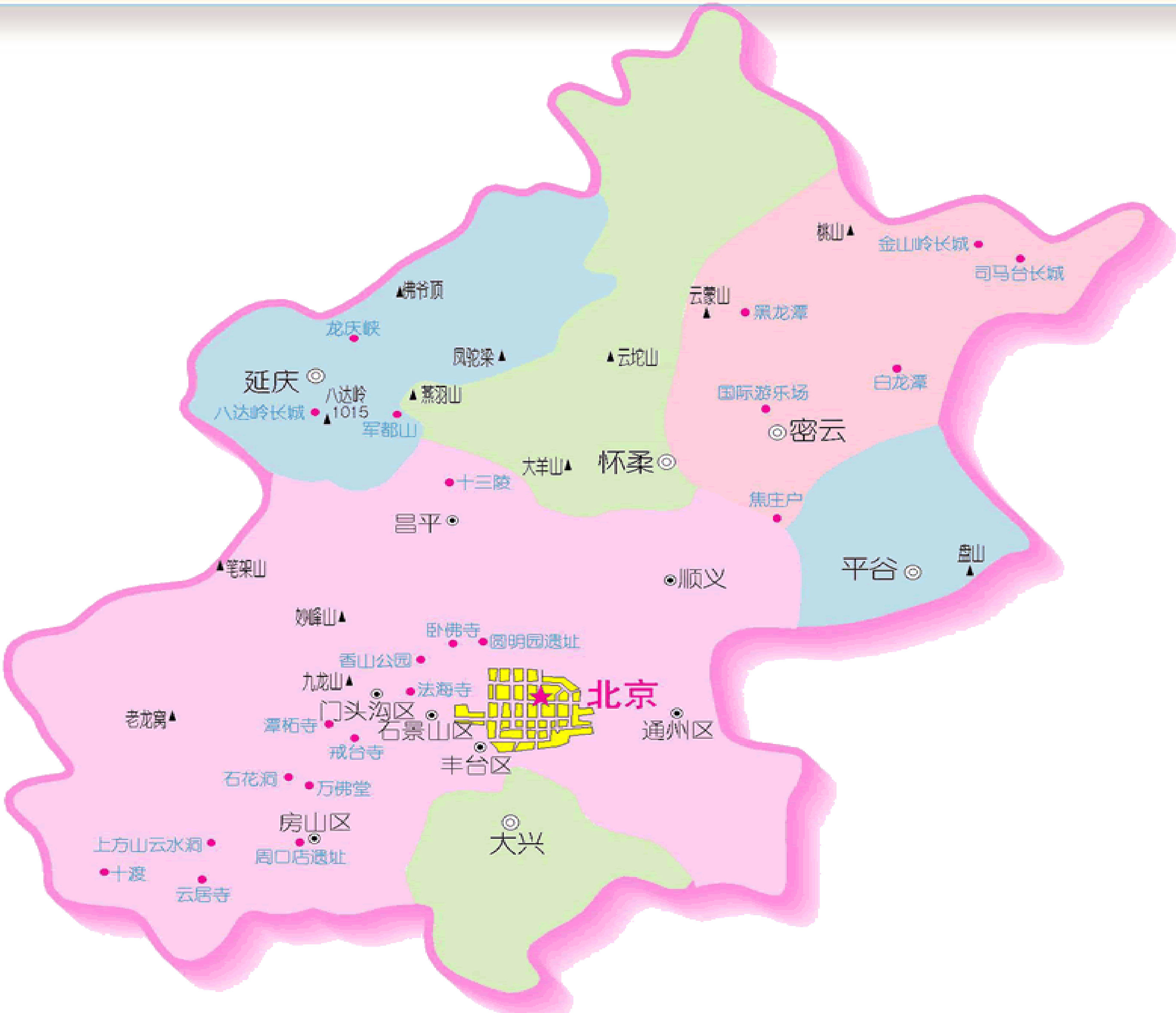
$\chi(G)=4$

第十八章 着色

主要内容

- ~~18.1支配集、点覆盖集与点独立集~~
- ~~18.2边覆盖与匹配~~
- ~~18.3二部图中的匹配~~
- 18.4点着色
- **18.5地图着色与平面图的点着色**
- 18.6边着色

北京地图



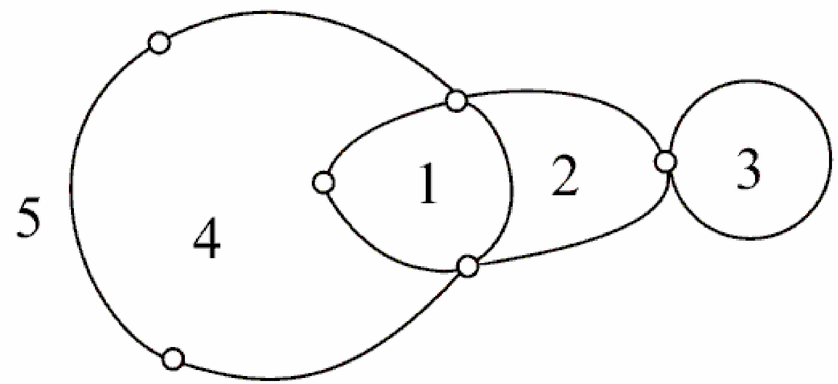
佛爷顶
龙庆峡
凤驼梁
延庆
八达岭
1015
八达岭长城
燕羽山
军都山
云蒙山
黑龙潭
金山岭长城
司马台长城
国际游乐场
白龙潭
密云
大羊山
怀柔
十三陵
焦庄户
昌平
笔架山
顺义
平谷
盘山
妙峰山
卧佛寺
圆明园遗址
香山公园
九龙山
法海寺
北京
门头沟区
老龙窝
潭柘寺
石景山区
通州区
戒台寺
丰台区
石花洞
万佛堂
房山区
大兴
上方山云水洞
周口店遗址
十渡
云居寺

18.5 地图着色与平面图的点着色

(1) 地图——连通无桥平面图的平面嵌入与所有的面

(2) 国家——地图的面

(3) 两个国家相邻——它们的边界至少有一条公共边



在上图的地图中，有5个国家，其中1与2相邻，1与4相邻，2,3,4均与5相邻.

地图的面着色

定义18.9

(1) 地图G的**面着色**——对G的每个国家涂上一种颜色，相邻国家涂不同颜色

(2) G是**k-面可着色的**——能用k种颜色给G的面着色

(3) G的**面色数**$\chi^*(G)=k$——最少用k种颜色给G的面着色.

地图的面着色转化成对偶图的点着色

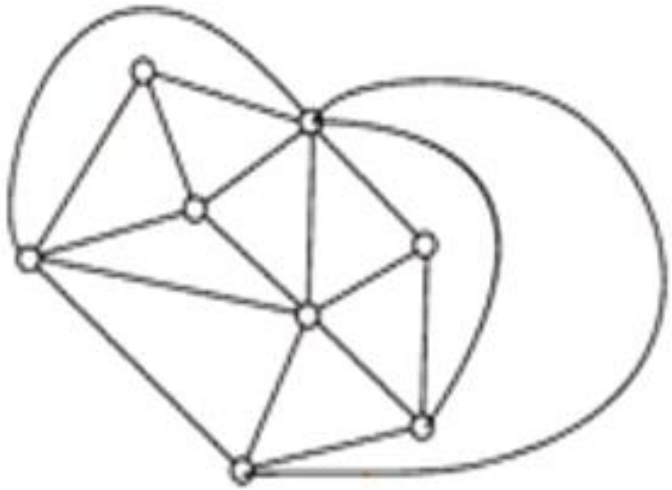
定理18.9 地图G是k-面可着色的当且仅当它的对偶图G^*是k-点可着色的.

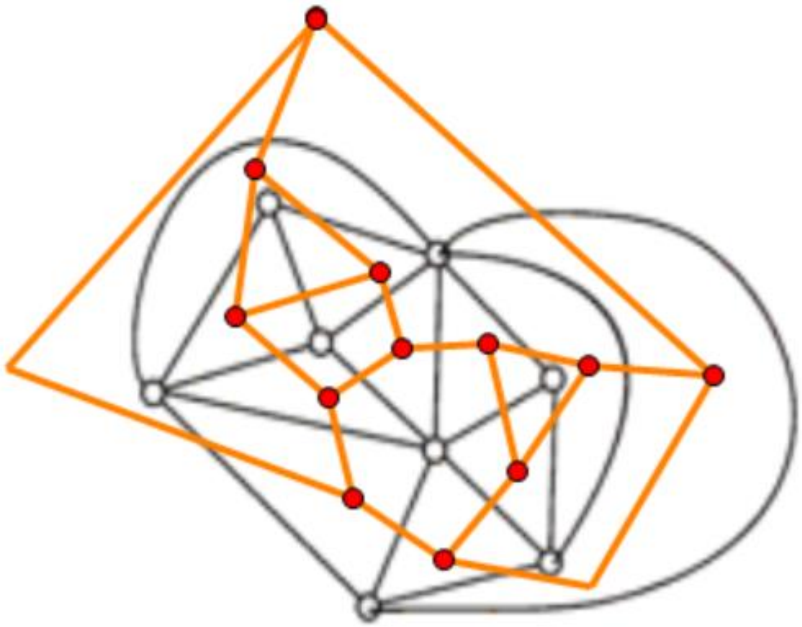
四色定理

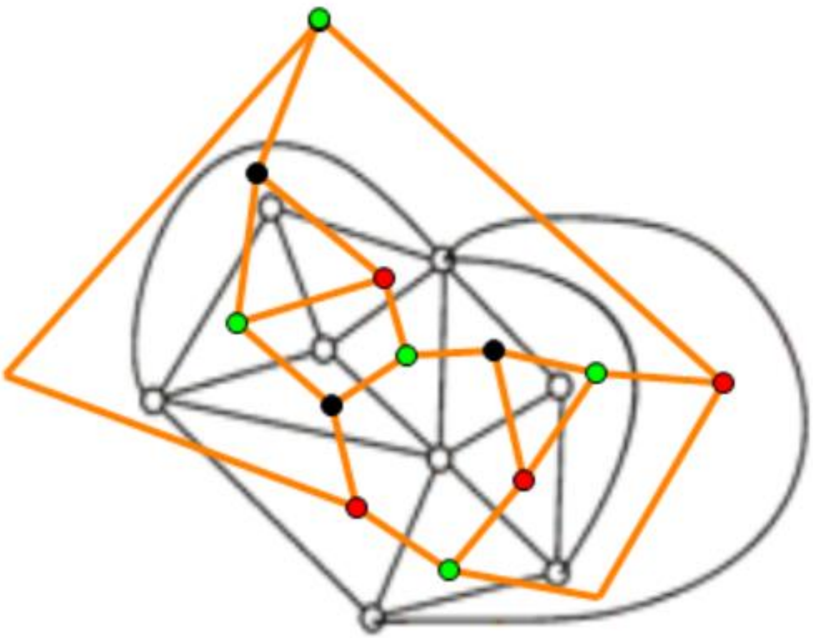
定理18.10 任何平面图都是4-可着色的

剩下的大问题：四色猜想是否为真

面着色实例







第十八章 着色

主要内容

- ~~18.1支配集、点覆盖集与点独立集~~
- ~~18.2边覆盖与匹配~~
- ~~18.3二部图中的匹配~~
- 18.4点着色
- 18.5地图着色与平面图的点着色
- 18.6边着色

18.6 边着色(无环无向图)

定义18.10

(1) 对G的边着色——每条边着一种颜色，相邻的边不同色

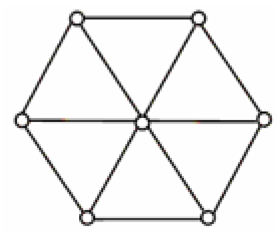
(2) G是k-边可着色的——能用k种颜色给G的边着色

(3) G的边色数$\chi'(G)$——最少用k种颜色给G的边着色

定理18.11 (Vizing定理)G为无向简单图，则

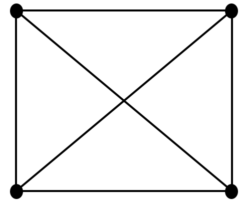
$$\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$$

定理18.12 二部图的边色数等于最大度.



- 偶圈边色数为2，奇圈边色数为3.
- $\chi'(W_n) = n-1, n\ge 4$.
- n为奇数（$n\neq 1$）时，$\chi'(K_n)=n$；

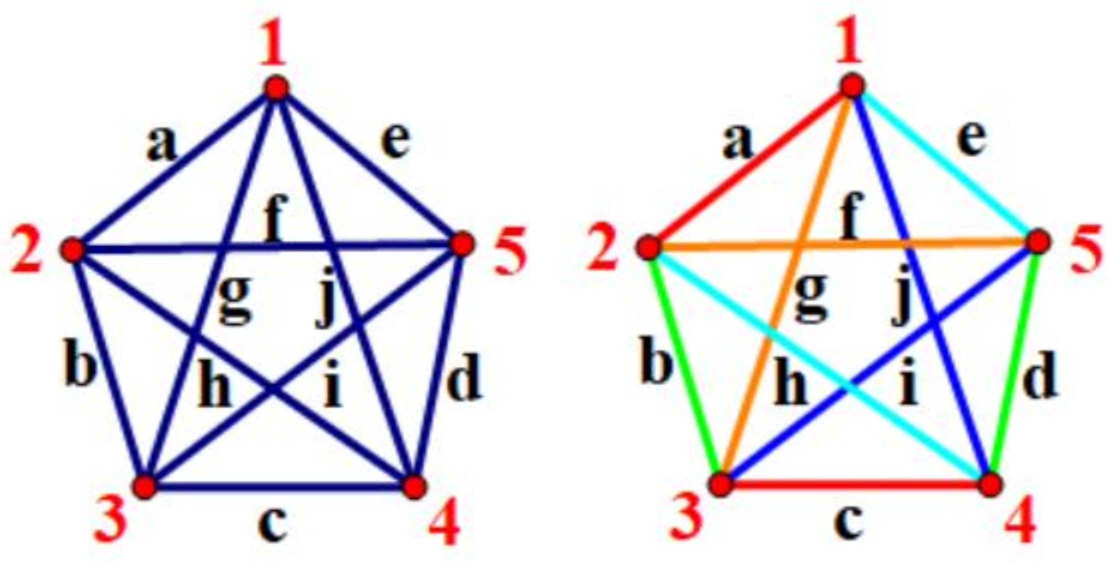
  n为偶数时，$\chi'(K_n)=n-1$.



边着色的应用实例

例： 一个科研小组中共有5名同学，老师要安排这5名同学两两互相交流，要求交流时间必须是一个小时，那么如何安排才能使完成全部交谈所需总时间最少？

解： 以每名同学为一个顶点，若同学之间有交流就将对对应的两点之间用边相连，来构造一个图(左图)，按题意，欲使完成全部交谈总时间最少，就要最大化地安排交谈并行进行，这可以转化为一个边着色问题。



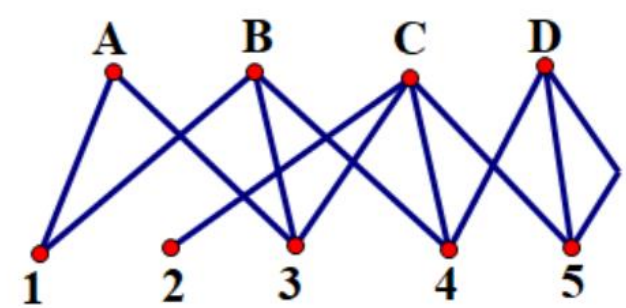
- 按边的相邻度排序：
  a b c d e f g h i j
- 边着色结果：
  ac bd eh fg ij
- 一个具体安排如下：
  12 34
  23 45
  15 24
  25 13
  35 14
- 用时5个小时

边着色的应用实例

例： 某中学高三年级有5个班，由4位教师(A,B,C,D)为他们授课，周一每位教师为每个班上课的节数如下表所示.问：本年级周一至少要安排多少节课？需要多少个教室？

	1班	2班	3班	4班	5班
A	1	0	1	0	0
B	1	0	1	1	0
C	0	1	1	1	1
D	0	0	0	1	2

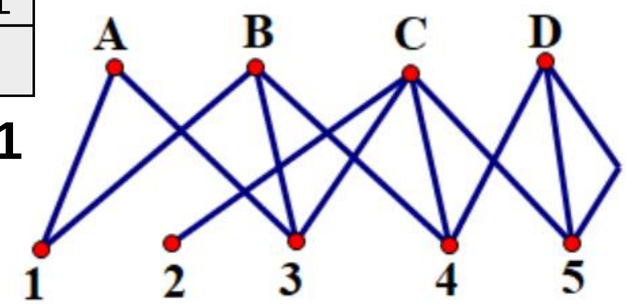
根据题意构造二部图G(右图)，
其中ABCD四位教师给12345班上课，
每条边代表某位教师给某个班上一节课



边着色的应用实例

C3	C4	C5	B3	B4	D4	D5	D5'	A3	B1	C2	A1
5	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3	2

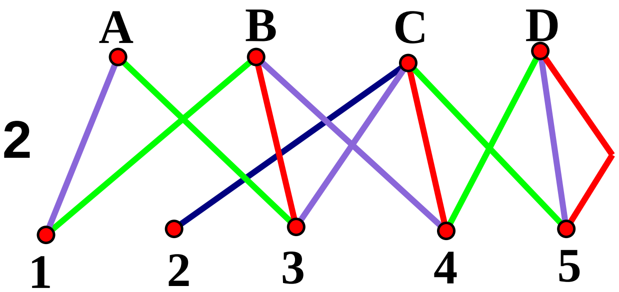
图1



按边相邻度排序并着色

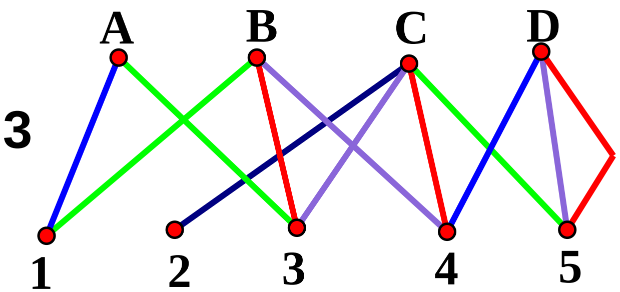
与同一个顶点关联的边对应同一位教师或同一个班上的课，不能安排在同一时间。不相邻的边对应不同教师和不同班上的课，可以安排在同一时间。这正好对应图G的边着色4(图2)。

图2



着不同颜色的边对应的课必须安排在不同时间，着相同颜色的边对应的课可以安排在同一时间。因此,每天至少安排的节数正好为G的边色数4。

图3



由于着同色的边所对应的课程必须在不同的教室上课，所以同色边数的最大值是所用教室的个数，应该使这个最大值尽可能小(图3)。(改边A1和D4)

至少安排4节课，3个教室

第十八章 着色

ch18着色

- ~~18.1支配集、点覆盖集与点独立集~~
- ~~18.2边覆盖与匹配（边独立）~~
- ~~18.3二部图中的匹配~~
- 18.4点着色
  - 色数$\chi(G)$
  - $\chi(G) \le \Delta(G)+1$
  - 韦尔奇.鲍威尔法
- 18.5地图着色与平面图的点着色
  - 面色数$\chi^*(G)$
  - 地图的面着色转化成对偶图的点着色
- 18.6边着色
  - 边色数$\chi'(G)$
  - $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$
  - 二部图的边色数等于最大度