第五章 特征值与特征向量

§5.1 特征值与特征向量

一、矩阵的相似

定义 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是两个 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵。若存在 $\boldsymbol{n}$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ **相似**于 $\boldsymbol{B}$，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$；$\boldsymbol{P}$ 称为由 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的**相似变换矩阵**。

性质 矩阵的相似满足：

（1）**自反性**：$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$；

（2）**对称性**：$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$；

（3）**传递性**：$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$。

例 (1) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}^m\sim\boldsymbol{B}^m$；

(2) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$。

例 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & a\end{pmatrix}\sim B=\begin{pmatrix}-1 & \\ & 3\end{pmatrix}$，求 a。

解 因为 $A\sim B$，所以 $|A|=|B|$，即

$$a-4=-3$$

由此得 $a=1$。

定义 设 A 是 n 阶方阵，若

$$A\sim\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda$$

则称 A **可对角化**，称 Λ 为 A 的**相似标准形**。

二、特征值与特征向量的定义和求法

设 A 是 3 阶可对角化矩阵，则存在 3 阶可逆矩阵 P，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

把$\boldsymbol{P}$按列分块，$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3]$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{X}_2\quad \boldsymbol{X}_3]=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_3],$$

而

$$\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}=[\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{X}_2\quad \boldsymbol{X}_3]\begin{pmatrix}[\lambda_1] & [0] & [0] \\ [0] & [\lambda_2] & [0] \\ [0] & [0] & [\lambda_3]\end{pmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{X}_1[\lambda_1]\quad \boldsymbol{X}_2[\lambda_2]\quad \boldsymbol{X}_3[\lambda_3]]$$

$$=[\lambda_1\boldsymbol{X}_1\quad \lambda_2\boldsymbol{X}_2\quad \lambda_3\boldsymbol{X}_3]$$

因

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

故有

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_3]=[\lambda_1\boldsymbol{X}_1\quad \lambda_2\boldsymbol{X}_2\quad \lambda_3\boldsymbol{X}_3]$$

由此得

$$AX_1=\lambda_1X_1,\ AX_2=\lambda_2X_2,\ AX_3=\lambda_3X_3$$

共同特点：$AX=\lambda X$

定义 设 A 是n阶方阵。若存在数 λ 及 n 元**非零列向量** X，使得

$$AX=\lambda X \quad 或 \quad (\lambda I-A)X=0$$

则称 λ 为矩阵 A 的**特征值**，X 为矩阵 A 的属于（或对应于）特征值 λ 的**特征向量**。

特征值与特征向量的计算：

A：方阵；λ_0：特征值；X_0：特征向量。

$$AX_0=\lambda_0X_0$$

$$\Rightarrow\ (\lambda_0I-A)X_0=0$$

$\Rightarrow$ X_0是齐次线性方程组

$$(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = 0 \qquad ①$$

的非零解

$\Rightarrow$ 方程组①有非零解

$\Rightarrow$ $|\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$

$\Rightarrow$ λ_0是方程

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0 \qquad ②$$

的根。

结论：特征值 $\rightarrow$ 方程②的根

特征向量 $\rightarrow$ 方程组①的非零解

定义 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，则称

$\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征矩阵**；

$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**，记为 $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$；

$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**；

$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = 0$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程组**；

对 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_0，称零空间 $\boldsymbol{N}(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 为特征值 λ_0 的**特征子空间**，记为 $\boldsymbol{V}_{\lambda_0}$。

例 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

的特征值与特征向量。

解

$$\because\ |\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1\\ 4 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

$\therefore$ $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2 和 1（二重）。

对 $\lambda=2$，解 $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$：

$$2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=0\\ \boldsymbol{x}_2=0\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{x}_3=1\Rightarrow \boldsymbol{X}_1=(0,\quad 0,\quad 1)^{\boldsymbol{T}}$，故 $\boldsymbol{A}$属于 2 的全部特征向量为 $\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{k}_1\neq 0)$。

对 $\lambda=1$，解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$：

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_3=0\\ \boldsymbol{x}_2+2\boldsymbol{x}_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{x}_3\\ \boldsymbol{x}_2=-2\boldsymbol{x}_3\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{x}_3=1\Rightarrow \boldsymbol{X}_2=(-1\quad -2\quad 1)^{\boldsymbol{T}}$，故 $\boldsymbol{A}$属于 1 的全部特征向量为 $\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{k}_2\neq 0)$。

例 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$的特征值与特

征向量。

解

$$\because\ |\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda+2 & -2\\ 1 & -1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{R_3+R_1}\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda+2 & -2\\ \lambda & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_1+(-1)C_3}\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1\\ 0 & \lambda+2 & -2\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+2)$$

$\therefore$ $\boldsymbol{A}$的特征值为 0（二重）和 -2。

对 $\lambda=-2$，解 $(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$得基础解系:

$$\boldsymbol{X}_1=(-1,\quad -2,\quad 1)^T$$

故 $\boldsymbol{A}$属于 -2的特征向量为 $\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{k}_1\neq 0)$。

对 $\lambda=0$，解 $(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$得基础解系:

$$X_2=(1,\quad 1,\quad 0)^T,\quad X_3=(-1,\quad 0,\quad 1)^T$$

故 A 属于 0 的特征向量为 $k_2X_2+k_3X_3$ $(k_2,k_3$不全为零)。

例 已知 A 的特征值为 1，2，3。求 A^2-2I 的特征值。

解 设 λ 是 A 的特征值，X 是对应的特征向量，则

$$\begin{aligned}
&AX=\lambda X\\
\Rightarrow\ &A(AX)=A(\lambda X)\\
\Rightarrow\ &A^2X=\lambda^2X\\
\Rightarrow\ &A^2X-2X=\lambda^2X-2X\\
\Rightarrow\ &(A^2-2I)X=(\lambda^2-2)X
\end{aligned}$$

$\because\ X\neq\theta$

$\therefore\ \lambda^2-2$ 是 A^2-2I 的特征值，对应的特征向量也是 X。

于是，A^2-2I 的特征值为 $-1,2,7$。

三、特征值与特征向量的性质

性质 设 A与 B是n阶方阵，且 $A \sim B$，则

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$$

定理 设 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$是n阶方阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是 A的n个特征值，则

(1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

(2) $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|$

推论 (1) $A \sim B \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

(2) 可逆矩阵没有零特征值。

例 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & b & \\ & & -7 \end{pmatrix}$$

且 $A \sim B$。求 a, b。

解法一： $\because$ $A \sim B$ $\therefore$ $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$，

即 $1-2-2=2+\boldsymbol{b}-7$，解得 $\boldsymbol{b}=2$。

又 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，

即 $4-8\boldsymbol{a}=-28$，解得 $\boldsymbol{a}=4$。

解法二： $\because$ $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$

$\therefore$ $\boldsymbol{A}$与 $\boldsymbol{B}$有相同的特征值

故 $\boldsymbol{A}$的特征值为 $2,\ \boldsymbol{b},\ -7$。由

$$|(-7)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$$

解得 $\boldsymbol{a}=4$。

此时，

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

所以 $\boldsymbol{b}=2$；或由 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 解得 $\boldsymbol{b}=2$。

§5.2 矩阵的相似对角化

$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{n}$阶方阵，可对角化。则存在 $\boldsymbol{n}$阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

令 $P=[X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n]$，则 $AX_i=\lambda_i X_i$。

由 P可逆 $\Rightarrow X_1,X_2,\cdots,X_n$线性无关

$\Rightarrow X_1,\cdots,X_n \neq \theta$

$\Rightarrow \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是 A的特征值，

于是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是 A的 n个线性无关的特征向量。

定理 n阶方阵 A可对角化 $\Leftrightarrow$ A有 n个线性无关的特征向量。

证明 “$\Leftarrow$” n阶方阵 A有 n 个线性无关的特征向量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，设它们对应的特征值分别为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$AX_i=\lambda_i X_i \text{（} i=1,2,\cdots,n \text{）}$$

令 $P=[X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n]$，因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$

为 $\boldsymbol{n}$个线性无关的 $\boldsymbol{n}$元列向量，故 $\boldsymbol{P}$是 $\boldsymbol{n}$阶方阵且可逆。

又

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{X}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}]$$

$$=[\boldsymbol{AX}_1\quad \boldsymbol{AX}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{AX}_{\boldsymbol{n}}]$$

$$=[\lambda_1\boldsymbol{X}_1\quad \lambda_2\boldsymbol{X}_2\quad \cdots\quad \lambda_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}]$$

$$=[\boldsymbol{X}_1\quad \boldsymbol{X}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}]\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\boldsymbol{n}}\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{\boldsymbol{n}}\end{pmatrix}$$

故

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

即 A可对角化。

例 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

有特征值0（二重）和 -2，对应的特征向量分别为

$$(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ (-1,0,1)^{\mathrm{T}},\ (-1,-2,1)^{\mathrm{T}}$$

因

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$$

故这三个特征向量线性无关。于是 A可对角化。令

$$
\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}
$$

则

$$
\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & -2\end{pmatrix}
$$

例 已知

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}
$$

问 $\boldsymbol{A}$可否对角化？

解

$$
\because |\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)
$$

$\therefore$ $\boldsymbol{A}$有特征值1, 2, 3。

它们对应的特征向量分别为

$$
(1,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}},(2,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}},(\frac{9}{2},\ 3,\ 1)^{\mathrm{T}}。
$$

因这三个向量线性无关，故 $\boldsymbol{A}$可对角化。令

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

定理 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是 $\boldsymbol{A}$的互不相同的特征值，它们对应的特征向量分别为$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m$，则$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m$线性无关。

证明 对 m作数学归纳法：

当$m=1$时，$\boldsymbol{X}_1\neq\boldsymbol{\theta}\Rightarrow\boldsymbol{X}_1$线性无关；

当$m=s-1$时，设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{s-1}$线性无关；

当$m=s$时，证 $\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_{s-1},\boldsymbol{X}_s$线性无关。

令

$$k_1\boldsymbol{X}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{X}_s=\boldsymbol{\theta} \qquad ①$$

则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{X}_1+\cdots+\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{X}_s)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{k}_1(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1)+\cdots+\boldsymbol{k}_s(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_s)=\boldsymbol{\theta}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{X}_1+\cdots+\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{\lambda}_s\boldsymbol{X}_s=\boldsymbol{\theta} \qquad ②$$

由①又得

$$\boldsymbol{\lambda}_s\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{X}_1+\cdots+\boldsymbol{\lambda}_s\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{X}_s=\boldsymbol{\theta} \qquad ③$$

②-③得

$$(\boldsymbol{\lambda}_1-\boldsymbol{\lambda}_s)\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{X}_1+\cdots+(\boldsymbol{\lambda}_{s-1}-\boldsymbol{\lambda}_s)\boldsymbol{k}_{s-1}\boldsymbol{X}_{s-1}=\boldsymbol{\theta}$$

根据归纳假设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{s-1}$线性无关，故

$$(\boldsymbol{\lambda}_1-\boldsymbol{\lambda}_s)\boldsymbol{k}_1=0,\cdots,(\boldsymbol{\lambda}_{s-1}-\boldsymbol{\lambda}_s)\boldsymbol{k}_{s-1}=0$$

已知 $\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\cdots,\boldsymbol{\lambda}_s$互不相同，故

$$\boldsymbol{\lambda}_1-\boldsymbol{\lambda}_s\neq 0,\cdots,\ \boldsymbol{\lambda}_{s-1}-\boldsymbol{\lambda}_s\neq 0$$

由此得

$$\boldsymbol{k}_1=0,\ \cdots,\ \boldsymbol{k}_{s-1}=0$$

代入①得

$$k_s X_s = \theta$$

又 $X_s \neq \theta$，故 $k_s = 0$。于是，$X_1, X_2, \cdots, X_s$ 线性无关。

推论 若 n阶方阵有 n个不同的特征值，则该矩阵可对角化。

定理 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$是矩阵$A$的互不相同的特征值，$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ir_i}$是$A$属于$\lambda_i$的线性无关的特征向量，则$X_{11}, \cdots, X_{1r_1}, X_{21}, \cdots, X_{2r_2}, \cdots, X_{m1}, \cdots X_{mr_m}$线性无关。

$$\underbrace{\overbrace{\overbrace{X_{11},\cdots,X_{1r_1}}^{\lambda_1},\quad \overbrace{X_{21},\cdots,X_{2r_2}}^{\lambda_2},\quad \overbrace{\cdots,}^{\cdots}\quad \overbrace{X_{m1},\cdots,X_{mr_m}}^{\lambda_m}}^{A}}$$

A 的特征向量集合的线性无关组

A：方阵；λ_0：特征值；

① 设 $|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_0)^{p_0} h(\lambda)$，且 $h(\lambda_0) \neq 0$

则称 p_0 是特征值 λ_0 的**代数重数**

② 设 V_{λ_0} 的维数为 q_0，则称 q_0 是特征值 λ_0 的

几何重数

定理 设 λ_0 是方阵 A 的特征值，则 λ_0 的几何重数 q_0 不大于其代数重数 p_0。

互异特征值	λ_1	λ_2	$\cdots$	λ_m
特征值的代数重数	p_1	p_2	$\cdots$	p_m
特征值的几何重数	q_1	q_2	$\cdots$	q_m
q 与 p 的关系	$q_1 \le p_1$	$q_2 \le p_2$	$\cdots$	$q_m \le p_m$

$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = A$ 的阶数；

$q_1 + q_2 + \cdots + q_m = A$ 的线性无关特征向量最大个数

定理 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 n 阶方阵 A 的全部互异的特征值，p_i 和 q_i 分别是特征值 λ_i 的代数重数和几何重数(i =1, 2,$\cdots$, m)，则 A 可对角化的充分必要条件是

$$\boldsymbol{p_i}=\boldsymbol{q_i}, \quad \boldsymbol{i}=1, 2,\cdots, \boldsymbol{m}$$

例 判断矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

可否对角化。

解

$$\because |\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

$\therefore$ $\boldsymbol{A}$的特征值为 2 和 1（二重）。

对 $\lambda=1$，解 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$：

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2+2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=-2x_3 \end{cases}$$

令 $x_3=1$, 则 $\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，故特征值 1 的几何重数为 1，小于其代数重数 2，故 $\boldsymbol{A}$不可对角化。

例 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix},$$

问 a,b,c满足什么条件时，$\boldsymbol{A}$可对角化？

解 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-a)^2(\lambda-c)$

(1)当 $a=c$时，

$\boldsymbol{A}$有3重特征值 a。对方程组 $(a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$，仅当 $\mathrm{r}(a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$时，才能使基础解系含 3个解。

又

$$\boldsymbol{aI}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\boldsymbol{b}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{b}=0$。

(2) 当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}$时，

$\boldsymbol{A}$有特征值 $\boldsymbol{a}$（二重）与 $\boldsymbol{c}$。对特征值 $\boldsymbol{a}$，仅当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{aI}-\boldsymbol{A})=\mathbf{1}$ 时，才能使方程组 $(\boldsymbol{aI}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=0$的基础解系含2个解。

$$\boldsymbol{aI}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\boldsymbol{b}\\0&0&\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\end{pmatrix}$$

因 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\neq 0$，故 $\mathrm{r}(\boldsymbol{aI}-\boldsymbol{A})=\mathbf{1}$。此时$\boldsymbol{b}$任意。

结论：当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$且 $\boldsymbol{b}=0$或 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}$时，$\boldsymbol{A}$可对角化。

小结：1) 重点；2) 难点；3) 注意点。

作业：P301(261) 1(4),6, 12, 14, 18(2)(3),

20, 21,22