第一部分 数理逻辑

- 1数理逻辑
  - ch1命题逻辑的基本概念
    - 1.1命题与联结词
    - 1.2 命题公式及其赋值
  - ch2命题逻辑的等值演算
    - 2.1等值式
    - 2.2析取范式与合取范式
    - 2.3 联结词完备集
    - 2.4 可满足性问题与消解法
  - ch3命题逻辑的推理理论
    - 3.1推理的形式结构
    - 3.2自然推理系统P
  - ch4一阶逻辑的基本概念
    - 4.1一阶逻辑命题符号化
    - 4.2一阶逻辑公式及其解释
  - ch5一阶逻辑的等值演算和推理
    - 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则
    - 5.2 一阶逻辑前束范式
    - 5.3 一阶逻辑的推理理论

主要内容

- 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则
  - 一阶逻辑等值式与基本的等值式
  - 置换规则、换名规则、代替规则
- 5.2 一阶逻辑前束范式
- 5.3 一阶逻辑的推理理论
  - 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$及其推理规则

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

定义5.1 设A, B是两个谓词公式, 如果$A \leftrightarrow B$是永真式, 则称A与B**等值**, 记作$A \Leftrightarrow B$, 并称$A \Leftrightarrow B$是**等值式**

【基本等值式】

第一组 命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

例如，$\neg\neg\forall xF(x) \Leftrightarrow \forall xF(x)$,

$\forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x) \vee \exists yG(y)$ 等

- 判断下列公式的类型：

（1）$\forall xP(x) \rightarrow (\exists x\exists yQ(x,y) \rightarrow \forall xP(x))$ 永真式

（2）$\forall xP(x) \rightarrow (\forall xP(x) \vee \exists yG(y))$ 永真式

（3）$\neg (P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \wedge Q(x,y)$ 矛盾式

【基本等值式】

第二组

(1) 消去量词等值式

设$D=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

① $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$

② $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$

例 设个体域 $A=\{a,b\}$, 公式 $(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)S(x)$在$A$上消去量词后应为:

$P(a) \wedge P(b) \wedge (S(a) \vee S(b))$

【基本等值式】

(2) 量词否定等值式

① $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

② $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

例

设论域为人，$P(x)$: x来上课，$\neg P(x)$: x没来上课

$\forall x P(x)$:所有人都来上课

$\neg\forall x P(x)$:不是所有人都来上课

$\exists x \neg P(x)$: 有人没来上课

$\exists x P(x)$:有人来上课

$\neg\exists x P(x)$:没有人来上课

$\forall x \neg P(x)$: 所有人都没来上课

量词否定等值式（续）

设个体域中的客体变元为$a_1,a_2,\ldots,a_n$，则

$$\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1) \wedge \ldots \wedge A(a_n))$$
$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \ldots \vee \neg A(a_n)$$
$$\Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$$

$$\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1) \vee \ldots \vee A(a_n))$$
$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \wedge \ldots \wedge \neg A(a_n)$$
$$\Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$$

【基本等值式】

(3) 量词辖域收缩与扩张等值式

$A(x)$ 是含 x 自由出现的公式，B 中不含 x 的自由出现

关于全称量词的：

① $\forall x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$

② $\forall x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$

③ $\forall x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\rightarrow B$

④ $\forall x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$

关于存在量词的：

① $\exists x(A(x)\vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$

② $\exists x(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge B$

③ $\exists x(A(x)\rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow B$

④ $\exists x(B\rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

证明：基本等值式 ③

关于全称量词的：③ $\forall x(A(x)\to B) \Leftrightarrow \exists xA(x)\to B$

证明：

$\forall x(A(x)\to B)$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg A(x) \vee B)$

$\Leftrightarrow \forall x\neg A(x) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg\exists x A(x) \vee B$

$\Leftrightarrow \exists xA(x)\to B$

$\forall x(A(x)\to B)$

$\Leftrightarrow (A(a) \to B) \wedge (A(b) \to B)$

$\Leftrightarrow (\neg A(a) \vee B) \wedge (\neg A(b) \vee B)$

$\Leftrightarrow (\neg A(a) \wedge \neg A(b)\ ) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg (A(a) \vee A(b)\ ) \vee B$

$\Leftrightarrow (A(a) \vee A(b)\ ) \to B$

$\Leftrightarrow \exists xA(x)\to B$

关于存在量词的：③ $\exists x(A(x)\to B) \Leftrightarrow \forall xA(x)\to B$

证明：

$\exists x(A(x)\to B)$

$\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B)$

$\Leftrightarrow \exists x\neg A(x) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg \forall xA(x) \vee B$

$\Leftrightarrow \forall xA(x)\to B$

$\exists x(A(x)\to B)$

$\Leftrightarrow (A(a) \to B) \vee (A(b) \to B)$

$\Leftrightarrow (\neg A(a) \vee B) \vee (\neg A(b) \vee B)$

$\Leftrightarrow (\neg A(a) \vee \neg A(b)\ ) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg (A(a) \wedge A(b)\ ) \vee B$

$\Leftrightarrow (A(a \wedge A(b)\ ) \to B$

$\Leftrightarrow \forall xA(x)\to B$

【基本等值式】

(4) 量词分配等值式

① $\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

③ $\exists x(A(x)\rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

注意：∀对∨，∃对∧无分配律

$$\forall x(A(x)\vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall xA(x)\vee\forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\rightarrow B(x)) \not\Leftrightarrow \exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$$

$$\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \not\Leftrightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$$

证明：量词分配等值式③

$$\exists x(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \to \exists xB(x)$$

证明：

右式$\Leftrightarrow \neg\forall xA(x) \vee \exists xB(x)$

$\Leftrightarrow \exists x\neg A(x) \vee \exists xB(x)$

$\Leftrightarrow \exists x\,(\neg A(x) \vee B(x))$

$\Leftrightarrow$ 左式

【重言蕴涵式】

$$\forall x(A(x) \lor B(x)) \not\Leftrightarrow \forall x A(x) \lor \forall x B(x)$$

$$\forall x(A(x) \lor B(x)) \Leftarrow \forall x A(x) \lor \forall x B(x)$$

$$\exists x(A(x) \land B(x)) \not\Leftrightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x)$$

$$\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x)$$

$$\exists x(A(x) \to B(x)) \not\Leftrightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \to \exists x B(x)$$

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \not\Leftrightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$

$$\forall x(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$$

$$\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x))$$

$$\forall x(A(x)\vee B(x)) \Leftarrow \forall xA(x)\vee \forall xB(x)$$

例：$A(x)$: x 聪明，$B(x)$: x努力

"这些人都聪明或这些人都努力"，可推出"这些人都或聪明或努力"。但是，"这些人都或聪明或努力"不能推出"这些人都聪明或这些人都努力"。

设论域元素为**a，b**，则：　　a，b都聪明　　a，b都努力

$$\forall xA(x)\vee \forall xB(x) \Leftrightarrow (A(a)\wedge A(b))\vee (B(a)\wedge B(b))$$

$$\forall x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow (A(a)\vee B(a))\wedge (A(b)\vee B(b))$$

$$\Leftrightarrow (A(a)\wedge A(b))$$ a，b都聪明

$$\vee (A(a)\wedge B(b))$$ a聪明，b努力

$$\vee (B(a)\wedge A(b))$$ a努力，b聪明

$$\vee (B(a)\wedge B(b))$$ a，b都努力

置换规则、换名规则、代替规则

1. 置换规则

设$\Phi(A)$是含A的公式, 那么, 若$A \Leftrightarrow B$, 则$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

2. 换名规则

设A为一公式，将A中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号，其余部分不变，设所得公式为A'，则$A' \Leftrightarrow A$.

3. 代替规则

设A为一公式，将A中某个个体变项的所有自由出现用A中未曾出现过的个体变项符号代替，其余部分不变，设所得公式为A'，则$A' \Leftrightarrow A$.

约束变元的换名

约束变元的换名规则:

1) 换名范围:量词中的指导变元和作用域中出现的该变元. 公式中其余部分不变.

2) 要换成作用域中没有出现的变元名称.

例:

$$\forall x(P(x) \rightarrow R(x,y)) \wedge Q(x,y)$$

$$\forall z(P(z) \rightarrow R(z,y)) \wedge Q(x,y) \quad \checkmark$$

$$\forall y(P(y) \rightarrow R(y,y)) \wedge Q(x,y) \quad \times$$

$$\forall z(P(z) \rightarrow R(x,y)) \wedge Q(x,y) \quad \times$$

自由变元的代替

自由变元的代替规则：

1) 对该自由变元每一处进行代替.
2) 代替的变元与原公式中所有变元名称不能相同.

例：

$$\exists x(P(y) \wedge R(x, y))$$

$$\exists x(P(z) \wedge R(x, z))$$

实例

例1 将下面命题用两种形式符号化, 并证明两者等值:

(1) 没有不犯错误的人

解 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x犯错误.

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\Leftrightarrow \forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)\vee G(x))$ 置换

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 置换

实例

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：爱看电影.

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$$\begin{aligned}
&\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) && \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x)) && \text{量词否定等值式} \\
\Leftrightarrow\ &\exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x)) && \text{置换} \\
\Leftrightarrow\ &\exists x(F(x)\wedge\neg G(x)) && \text{置换}
\end{aligned}$$

实例

例2 将公式化成等值的不含既有约束出现、又有自由出现的个体变项：$\forall x(F(x,y,z)\to\exists yG(x,y,z))$

解　$\forall x(F(x,y,z)\to\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,y,z)\to\exists tG(x,t,z))$　　换名规则

$\Leftrightarrow \forall x\exists t(F(x,y,z)\to G(x,t,z))$　　辖域扩张等值式

或者

$\forall x(F(x,y,z)\to\exists yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x,u,z)\to\exists yG(x,y,z))$　　代替规则

$\Leftrightarrow \forall x\exists y(F(x,u,z)\to G(x,y,z))$　　辖域扩张等值式

实例

例3 设个体域$D=\{a,b,c\}$, 消去下述公式中的量词:

(1) $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

解法一

$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$

$\Leftrightarrow (\exists y(F(a)\rightarrow G(y)))\wedge(\exists y(F(b)\rightarrow G(y)))\wedge(\exists y(F(c)\rightarrow G(y)))$

$\Leftrightarrow((F(a)\rightarrow G(a))\vee(F(a)\rightarrow G(b))\vee(F(a)\rightarrow G(c)))$

$\wedge((F(b)\rightarrow G(a))\vee(F(b)\rightarrow G(b))\vee(F(b)\rightarrow G(c)))$

$\wedge((F(c)\rightarrow G(a))\vee(F(c)\rightarrow G(b))\vee(F(c)\rightarrow G(c)))$

实例

解法二

$$\forall x \exists y(F(x) \to G(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \to \exists y G(y)) \qquad \text{辖域缩小等值式}$$

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \to G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a) \to G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

$$\wedge (F(b) \to G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

$$\wedge (F(c) \to G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

实例

解法三

$$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow G(y))$$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\rightarrow\exists yG(y))$　　　辖域缩小等值式

$\Leftrightarrow \exists xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$　　　辖域缩小等值式

$\Leftrightarrow F(a)\vee F(b)\vee F(c) \rightarrow G(a)\vee G(b)\vee G(c)$

实例

(2) $\exists x \forall y F(x,y)$

解法一

$$
\begin{aligned}
& \exists x \forall y F(x,y) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x(F(x,a) \wedge F(x,b) \wedge F(x,c)) \\
\Leftrightarrow\ & (F(a,a) \wedge F(a,b) \wedge F(a,c)) \\
& \vee (F(b,a) \wedge F(b,b) \wedge F(b,c)) \\
& \vee (F(c,a) \wedge F(c,b) \wedge F(c,c))
\end{aligned}
$$

实例

(2) $\exists x \forall y F(x,y)$

解法二

$$\exists x \forall y F(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \forall y F(a,y) \vee \forall y F(b,y) \vee \forall y F(c,y)$$

$$\Leftrightarrow (F(a,a) \wedge F(a,b) \wedge F(a,c))$$

$$\vee (F(b,a) \wedge F(b,b) \wedge F(b,c))$$

$$\vee (F(c,a) \wedge F(c,b) \wedge F(c,c))$$

主要内容

- 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则
  - 一阶逻辑等值式与基本的等值式
  - 置换规则、换名规则、代替规则
- 5.2 一阶逻辑前束范式
- 5.3 一阶逻辑的推论理论
  - 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$ 及其推理规则

5.2 一阶逻辑前束范式

定义5.2 设A为一个一阶逻辑公式，若A具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$$

则称A为**前束范式**，其中Q_i $(1\le i\le k)$为$\forall$或$\exists$，B为不含量词的公式.

例如， $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow(G(y)\wedge H(x,y)))$ 是前束范式

而 $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$ 不是前束范式，

前束范式存在定理

定理5.1（前束范式存在定理）

一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

例4 求下列公式的前束范式

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

解 $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

后两步结果都是前束范式，说明公式的前束范式不惟一.

求前束范式的实例

(2) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ （量词分配等值式）

$\forall x(A(x)\wedge B(x))$

$\Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

或

$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ 辖域收缩扩张规则

求前束范式的实例

(3) $\forall xF(x)\to\exists y(G(x,y)\land\neg H(y))$

解 $\forall xF(x)\to\exists y(G(x,y)\land\neg H(y))$

$\Leftrightarrow \forall zF(z)\to\exists y(G(x,y)\land\neg H(y))$ 换名规则

$\Leftrightarrow \exists z\exists y(F(z)\to(G(x,y)\land\neg H(y)))$ 辖域收缩扩张规则

$\forall xA(x)\to B$ $\Leftrightarrow \exists x(A(x)\to B)$	$B\to\exists xA(x)$ $\Leftrightarrow \exists x(B\to A(x))$

或

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\to\exists y(G(z,y)\land\neg H(y))$ 代替规则

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\to(G(z,y)\land\neg H(y)))$

求前束范式的实例

4) $\forall x P(x) \to \exists x Q(x)$

$\Leftrightarrow \neg \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$

$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee Q(x))$

$\Leftrightarrow \exists x (P(x) \to Q(x))$

或

$\Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists y Q(y)$ 换名规则

$\Leftrightarrow \exists x \exists y (P(x) \to Q(y))$

求前束范式的实例

5) $\forall x \forall y(\underline{\exists z(P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow \exists u Q(x,y,u)})$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z(P(x,z) \wedge P(y,z) \rightarrow \exists u Q(x,y,u))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \exists u(P(x,z) \wedge P(y,z) \rightarrow Q(x,y,u))$

$\exists x A(x) \rightarrow B$
$\Leftrightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B)$

$B \rightarrow \exists x A(x)$
$\Leftrightarrow \exists x(B \rightarrow A(x))$

例 求前束范式

6) $(\forall xF(x,y)\to\exists yG(y))\to\forall xH(x,y)$

$\Leftrightarrow(\forall xF(x,z)\to\exists yG(y))\to\forall xH(x,z)$

代替规则

$\Leftrightarrow\exists x(F(x,z)\to\exists yG(y))\to\forall xH(x,z)$

$\forall xA(x)\to B$ $\Leftrightarrow\exists x(A(x)\to B)$	$B\to\exists xA(x)$ $\Leftrightarrow\exists x(B\to A(x))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x,z)\to G(y))\to\forall xH(x,z)$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x,z)\to G(y))\to\forall tH(t,z)$ 换名规则

$\exists xA(x)\to\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\to B(x))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\forall t((F(x,z)\to G(y))\to H(t,z))$

练习 求前束范式

$\forall x(F(x) \wedge \forall y G(x,y)) \rightarrow \exists x H(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \wedge \forall y G(x,y)) \rightarrow \exists x H(x,u)$

$\Leftrightarrow \exists x((F(x) \wedge \forall y G(x,y)) \rightarrow H(x,u))$

$\Leftrightarrow \exists x(\forall y(F(x) \wedge G(x,y)) \rightarrow H(x,u))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y((F(x) \wedge G(x,y)) \rightarrow H(x,u))$

$$\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

练习 求前束范式

$$\forall x\,(F(x) \wedge \forall y G(x,y)) \rightarrow \exists x H(x,y)$$
$$\Leftrightarrow \forall x\,(F(x) \wedge \forall y\, G(x,y)) \rightarrow \exists x H(x,u)$$
$$\Leftrightarrow \neg\forall x(F(x) \wedge \forall y G(x,y)) \vee \exists x H(x,u)$$
$$\Leftrightarrow \exists x\, \neg(F(x) \wedge \forall y G(x,y)) \vee \exists x H(x,u)$$
$$\Leftrightarrow \exists x\,(\neg(F(x) \wedge \forall y G(x,y)) \vee H(x,u))$$
$$\Leftrightarrow \exists x\,(\neg F(x) \vee \neg \forall y G(x,y) \vee H(x,u))$$
$$\Leftrightarrow \exists x\,(\neg F(x) \vee \exists y \neg G(x,y) \vee H(x, u))$$
$$\Leftrightarrow \exists x\, \exists y\,(\neg F(x) \vee \neg G(x,y) \vee H(x, u))$$
$$\Leftrightarrow \exists x \exists y((F(x) \wedge G(x,y)) \rightarrow H(x,u))$$

主要内容

- 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则
  - 一阶逻辑等值式与基本的等值式
  - 置换规则、换名规则、代替规则
- 5.2 一阶逻辑前束范式
- 5.3 一阶逻辑的推理理论
  - 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$及其推理规则

5.3 一阶逻辑的推理理论

推理的形式结构

1. $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

   若此式是永真式, 则称推理正确, 记作$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

2. 前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$

   结论: B

推理定理: 永真式的蕴涵式

推理定理

第一组 命题逻辑推理定理的代换实例

如, $\forall xF(x)\wedge\exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$

第二组 基本等值式生成的推理定理

如, $\forall xF(x) \Rightarrow\neg\neg\forall xF(x)$, $\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow\forall xF(x)$

$\neg\forall xF(x)\Rightarrow\exists x\neg F(x)$, $\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$

第三组 其他常用推理定理

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

(4) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

(5) $\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x) \Rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$

多个量词的使用

设$A(x,y)$表示x和y同姓，

论域x是甲村的人，y是乙村的人，

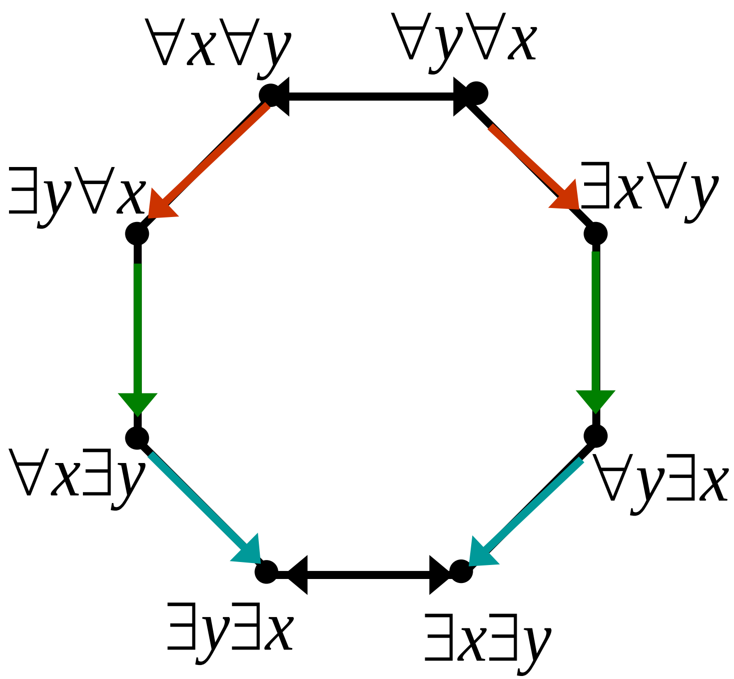
则：

$\forall x\forall yA(x,y)$: 甲村与乙村所有人同姓

$\forall y\forall xA(x,y)$: 乙村与甲村所有人同姓

$$\forall x\forall yP(x,y) \Leftrightarrow \forall y\forall xP(x,y)$$

多个量词的使用



$\forall x\forall yA(x,y)$:

甲村与乙村所有人同姓

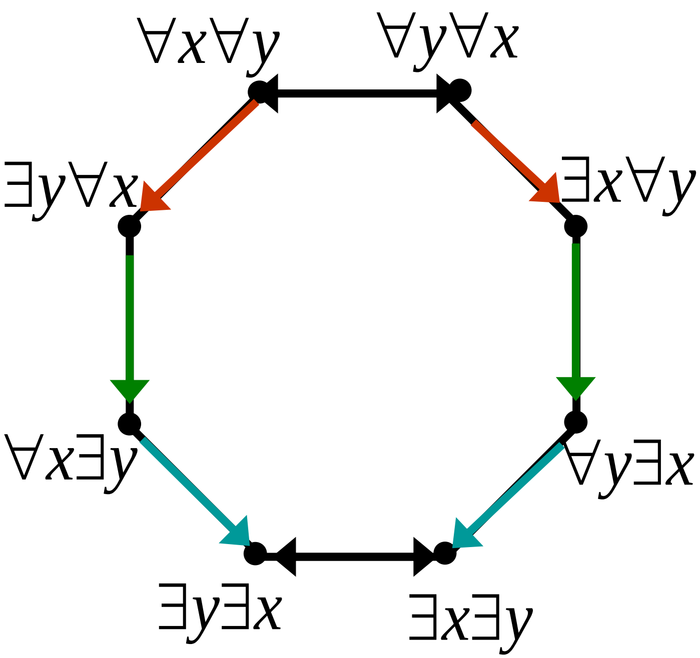
$\exists y\forall xA(x,y)$:乙村有一个人，甲村的人都和他同姓

$\forall x\exists yA(x,y)$:甲村所有人，乙村都有人和他同姓

$\exists y\exists xA(x,y)$:

乙村与甲村有人同姓

多个量词的使用



$$
\begin{array}{ccc}
\forall x \forall y A(x,y) & \Leftrightarrow & \forall y \forall x A(x,y) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\exists y \forall x A(x,y) & & \exists x \forall y A(x,y) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\forall x \exists y A(x,y) & & \forall y \exists x A(x,y) \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\exists y \exists x A(x,y) & \Leftrightarrow & \exists x \exists y A(x,y)
\end{array}
$$

消去(添加)量词的规则

(1) 全称指定规则 US
(2) 全称推广规则 UG
(3) 存在指定规则 ES
(4) 存在推广规则 EG

U : Universal

S : Specification

E : Existential

G : Generalization

消去(添加)量词的规则

(1) 全称指定规则 US

$\forall x A(x) \Rightarrow A(c)$

其中，c是论域中某个任意客体

- 如果个体域的所有元素都具有性质A，则个体域中的任一个元素具有性质A。

(2) 全称推广规则 UG

$A(c) \Rightarrow \forall x A(x)$

注意：必须能够证明对于每个c, A(c)都为真.

- 如果个体域中任意一个个体都具有性质A，则个体域中的全体个体都具有性质A。

消去(添加)量词的规则

3) 存在指定规则 ES

$\exists xA(x) \Rightarrow A(c)$

其中， c是论域中使A(c)为真的客体

- 如果个体域中存在有性质A的元素，
  则个体域中必有某一元素c具有性质A.

4) 存在推广规则 EG

$A(c) \Rightarrow \exists xA(x)$

其中， c是论域中使A(c)为真的客体

- 如果个体域中某一元素c具有性质A，
  则个体域中存在着具有性质A的元素。

自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

定义5.3 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$定义如下:

1. 字母表. 同一阶语言$\mathscr{L}$的字母表
2. 合式公式. 同$\mathscr{L}$的合式公式
3. 推理规则:

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则【$(A\to B)\wedge A \Rightarrow B$】

(5) 附加规则【$A \Rightarrow (A\vee B)$】

(6) 化简规则【$(A\wedge B) \Rightarrow A$】

(7) 拒取式规则【$(A\to B)\wedge\neg B \Rightarrow \neg A$】

自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$

(8) 假言三段论规则【 $(A\to B)\wedge(B\to C)\Rightarrow(A\to C)$ 】

(9) 析取三段论规则【 $(A\vee B)\wedge\neg B\Rightarrow A$ 】

(10) 构造性二难推理规则

【 $(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow(B\vee D)$ 】

(11) 合取引入规则【 $A, B\Rightarrow(A\wedge B)$ 】

(12) 全称指定规则 US

(13) 全称推广规则 UG

(14) 存在指定规则 ES

(15) 存在推广规则 EG

构造推理证明的实例

前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), \forall xF(x)$

结论：$\forall xG(x)$

证明：

① $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
② $F(c)\rightarrow G(c)$	①US
③ $\forall xF(x)$	前提引入
④ $F(c)$	③US
⑤ $G(c)$	②④假言推理
⑥ $\forall xG(x)$	⑤ UG

构造推理证明的实例

例5 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中构造下面推理的证明, 取个体域R: 不存在能表示成分数的无理数. 有理数都能表示成分数. 所以, 有理数都不是无理数.

解 设$F(x)$:x是无理数, $G(x)$:x是有理数, $H(x)$:x能表示成分数.

前提: $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$, $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论: $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

构造推理证明的实例

前提: $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x)), \forall x(G(x)\rightarrow H(x))$

结论: $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明:

① $\neg\exists x(F(x)\wedge H(x))$ 前提引入

② $\forall x(\neg F(x)\vee\neg H(x))$ ①置换

③ $\forall x(F(x)\rightarrow\neg H(x))$ ②置换

④ $F(c)\rightarrow\neg H(c)$ ③ US

⑤ $\forall x(G(x)\rightarrow H(x))$ 前提引入

⑥ $G(c)\rightarrow H(c)$ ⑤ US

⑦ $H(c)\rightarrow\neg F(c)$ ④置换

⑧ $G(c)\rightarrow\neg F(c)$ ⑥⑦假言三段论

⑨ $\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$ ⑧ UG

构造推理证明的实例

例6 在自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$中构造下面推理的证明, 取个体域R:

任何自然数都是整数. 存在自然数. 所以, 存在整数.

解 设$F(x)$:x是自然数, $G(x)$:x是整数.

前提: $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$, $\exists xF(x)$

结论: $\exists xG(x)$

证明:

① $\exists xF(x)$	前提引入
② $F(c)$	① ES
③ $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
④ $F(c)\rightarrow G(c)$	③ US
⑤ $G(c)$	②④假言推理
⑥ $\exists xG(x)$	⑤ EG

构造推理证明的实例

例7 前提：$\forall x(F(x)\rightarrow G(x)), \exists x(F(x)\land H(x))$

结论：$\exists x(G(x)\land H(x))$

证明：

①	$\exists x(F(x)\land H(x))$	前提引入
②	$F(c)\land H(c)$	① ES
③	$F(c)$	②化简
④	$H(c)$	②化简
⑤	$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$	前提引入
⑥	$F(c)\rightarrow G(c)$	⑤ US
⑦	$G(c)$	③⑥假言推理
⑧	$G(c)\land H(c)$	⑦④合取引入
⑨	$\exists x(G(x)\land H(x))$	⑧ EG

例 试找出推证过程中的错误

①	$\exists x(F(x)\wedge H(x))$	前提引入
②	$F(c)\wedge H(c)$	① ES
③	$F(c)$	②化简
④	$\exists x(G(x)\wedge M(x))$	前提引入
⑤	$G(c)\wedge M(c)$	④ ES
⑥	$G(c)$	⑤化简
⑦	$F(c)\wedge G(c)$	③⑥合取引入
⑧	$\exists x(F(x)\wedge G(x))$	⑦ EG

苏格拉底三段论

所有的人都是要死的，
苏格拉底是人，
所以苏格拉底是要死的。

设$M(x)$:x是人, $D(x)$:x是要死的, s:苏格拉底

前提: $\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$， $M(s)$

结论: $D(s)$

证明:

①	$M(s)$	前提引入
②	$\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$	前提引入
③	$M(s)\rightarrow D(s)$	②US
④	$D(s)$	①③假言推理

第五章 一阶逻辑等值演算与推理（回顾）

主要内容

- **5.1 一阶逻辑等值式与置换规则**
  - 一阶逻辑等值式与基本的等值式
  - 置换规则、换名规则、代替规则
- **5.2 一阶逻辑前束范式**
- **5.3 一阶逻辑的推理理论**
  - 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$及其推理规则