第一部分 数理逻辑

- 1数理逻辑
  - ch1命题逻辑的基本概念
    - 1.1命题与联结词
    - 1.2 命题公式及其赋值
  - ch2命题逻辑的等值演算
    - 2.1等值式
    - 2.2析取范式与合取范式
    - 2.3 联结词完备集
    - 2.4 可满足性问题与消解法
  - ch3命题逻辑的推理理论
    - 3.1推理的形式结构
    - 3.2自然推理系统P
  - ch4一阶逻辑的基本概念
    - 4.1一阶逻辑命题符号化
    - 4.2一阶逻辑公式及其解释
  - ch5一阶逻辑的等值演算和推理
    - 5.1 一阶逻辑等值式与置换规则
    - 5.2 一阶逻辑前束范式
    - 5.3 一阶逻辑的推理理论

第二章 命题逻辑等值演算

主要内容

- **2.1 等值式**
- **2.2 析取范式与合取范式**
- **2.3 联结词完备集**
- **2.4 可满足性问题与消解法**

主要内容

- 2.1 等值式
- 2.2 析取范式与合取范式
- 2.3 联结词完备集
- 2.4 可满足性问题与消解法

2.1 等值式

- 等值式的定义
- 基本等值式
- 等值式的判别方法:
  - 真值表法
  - 等值演算法（置换规则）

2.1 等值式

定义2.1 若等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，则称A与B**等值**，记作$A\Leftrightarrow B$，并称$A\Leftrightarrow B$是**等值式**

几点说明：

- 定义中，$A, B, \Leftrightarrow$均为元语言符号
- A或B中可能有哑元出现.

  例如 $(p\to q) \Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\vee(\neg r\wedge r))$ r为左边公式的哑元.

- 等值式的判别方法：
  - 真值表法
  - 等值演算法

用真值表法判别等值式

- 用真值表可检查两个公式是否等值

请验证：

$p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

$p \to (q \to r)$ 不与 $(p \to q) \to r$ 等值

用真值表法判别等值式 实例

例1 判断下列各组公式是否等值:

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

p	q	r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

用真值表法判别等值式 实例

(2) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$

p q r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \to q$	$(p \to q) \to r$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$ 不等值

基本等值式

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$

$A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

零律	$A\vee 1\Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$
同一律	$A\vee 0\Leftrightarrow A$．$A\wedge 1\Leftrightarrow A$
排中律	$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$
矛盾律	$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$
蕴涵等值式 ★	$\boxed{A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B}$
等价等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
假言易位	$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$
等价否定等值式	$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$
归谬论	$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$

特别提示：必须牢记这16组等值式，这是继续学习的基础

证明 $\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$（德摩根律）

A	B	$A\wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A\wedge B)$	$\neg A\vee\neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

证明 $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ （分配律）

A	B	C	$B\vee C$	$A\wedge B$	$A\wedge C$	$A\wedge(B\vee C)$	$(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

基本等值式说明

- 上述等值式都是用元语言符号书写的，其中的A，B，C可以代表任意的公式，称这样的等值式为等值式模式，每个等值式模式都给出了无穷多个同类型的具体等值式。

- 例如：
  - $A = p$, $B=q$时, $p\rightarrow q \Leftrightarrow \neg p\vee q$
  - $A=p\vee q\vee r$, $B=p\wedge q$时，
    $(p\vee q\vee r)\rightarrow(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg(p\vee q\vee r) \vee (p\wedge q)$

对偶式

- 在给定的命题公式 A 中，将联结词 $\wedge$ 换成 $\vee$，将 $\vee$ 换成 $\wedge$，若有特殊变元 **0**和 **1** 亦相互取代，所得公式 A^* 称为 A 的对偶式。

- 反演规则：设 A 和 A^* 是对偶式，$p_1,p_2,\ldots,p_n$是出现在 A 和 A^* 中的原子变元，则

$$A(p_1,p_2,\ldots,p_n) \Leftrightarrow \neg A^*(\neg p_1, \neg p_2, \ldots, \neg p_n)$$

因为：$A\vee B\Leftrightarrow\neg(\neg A\wedge\neg B)$, $A\wedge B\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)$

- 对偶规则：如果 $A \Leftrightarrow B$, 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

真值表法判断等值的优缺点

- **优点：**
  - 对于有少数命题变项的命题公式，简单直观。
- **缺点：**
  - 这种方法的计算量是问题规模的指数函数，因而随着规模的增大，计算量会急剧增大。
  - 例如，对于含20个命题变项的命题公式，它的真值表就有2^{20}=1048576行。当命题变项数量增加到1000时，就要检查2^{1000}种可能的真值组合，现有的一台计算机在几万亿年之内都不可能完成。

因此，有必要将一个给定的命题公式进行化简，即找出和它等值的，但比较简单的命题公式，这就是命题公式的等值演算。

等值演算与置换规则

1. 等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程

2. 等值演算的基础:

   (1) 等值关系的性质：自反性、对称性、传递性

   (2) 基本的等值式

   (3) 置换规则

3. 置换规则

   设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式

   若 $B\Leftrightarrow A$，则 $\Phi(B)\Leftrightarrow\Phi(A)$

等值演算的应用举例

证明两个公式等值

例2 证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee r$ （德摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$ （蕴涵等值式，置换规则）

今后在注明中省去置换规则

注意：一般情况下，用等值演算不能直接证明两个公式不等值！

等值演算的应用举例

证明两个公式不等值

例3 证明A: $p\to(q\to r)$ 与B: $(p\to q)\to r$ 不等值

证 方法一 真值表法, 见例1(2)

方法二 观察法:

观察到000是A的成真赋值，是B的成假赋值

方法三 先用等值演算化简公式，然后再观察:

$A=p\to(q\to r) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee r$

$B=(p\to q)\to r \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r$

更容易看出000是A的成真赋值，

是B的成假赋值

等值演算的应用举例

判断公式类型: A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

例4 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

(2) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

解 (1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

矛盾式

判断公式类型

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

重言式

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

可满足式，101和111是成真赋值，000和010等是成假赋值.

试证：$q\to(p\vee(p\wedge q)) \Leftrightarrow q\to p$

证

因为 $(p\vee(p\wedge q)) \Leftrightarrow p$ （吸收律）

所以 $q \to (p\vee(p\wedge q)) \Leftrightarrow q\to p$

试证：

$$((p\vee q)\wedge\neg(\neg p\wedge(\neg q\vee\neg r)))\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\Leftrightarrow T$$

证　左边 $\Leftrightarrow ((p\vee q)\wedge(p\vee(q\wedge r)))\vee\neg(p\vee q)\vee\neg(p\vee r)$

双重否定律
德摩根律
分配律
幂等律
排中律

$\Leftrightarrow ((p\vee q)\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee r))\vee\neg(p\vee q)\vee\neg(p\vee r)$

$\Leftrightarrow ((p\vee q)\wedge(p\vee r))\vee\neg(p\vee q)\vee\neg(p\vee r)$

$\Leftrightarrow ((p\vee q)\wedge(p\vee r))\vee\neg((p\vee q)\wedge(p\vee r))$

$\Leftrightarrow T$

课堂练习 试证：$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

证

$p \leftrightarrow q$

$\Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p))$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p))$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee F \vee F \vee (q \wedge p)$

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

2.1 等值式（回顾）

- 等值式的定义
- 基本等值式
- 等值式的判别方法：
  - 真值表法
  - 等值演算法（置换规则）

主要内容

- 2.1 等值式
- 2.2 析取范式与合取范式
- 2.3 联结词完备集
- 2.4 可满足性问题与消解法

2.2 析取范式与合取范式

- 2.2.1 简单析取式&简单合取式
- 2.2.2 析取范式&合取范式
- 2.2.3 命题公式的范式
- 2.2.4 主析取范式（极小项）&主合取范式（极大项）
- 2.2.5 主范式的应用

2.2 析取范式与合取范式

- **2.2.1 简单析取式&简单合取式**
- 2.2.2 析取范式&合取范式
- 2.2.3 命题公式的范式
- 2.2.4 主析取范式（极小项）&主合取范式（极大项）
- 2.2.5 主范式的应用

简单析取式&简单合取式 定义

定义2.2

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

p, $\neg q$, $p \vee \neg q$, $p \vee q \vee r$, …

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

p, $\neg q$, $p \wedge \neg q$, $p \wedge q \wedge r$, …

说明：

- 单个文字既是简单析取式，又是简单合取式

简单析取式&简单合取式 性质

定理2.1

（1）一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

（2）一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

2.2 析取范式与合取范式

- 2.2.1 简单析取式&简单合取式
- 2.2.2 析取范式&合取范式
- 2.2.3 命题公式的范式
- 2.2.4 主析取范式（极小项）&主合取范式（极大项）
- 2.2.5 主范式的应用

析取范式&合取范式 定义

定义2.3

(1) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

p, $\neg p\wedge q$, $p\vee\neg q$, $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$

(2) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

p, $p\vee\neg q$, $\neg p\wedge q$, $(p\vee q)\wedge\neg p\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

(3) 范式——析取范式与合取范式的总称

析取范式&合取范式 一般形式

- 析取范式的一般形式：

$$\mathbf{A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \quad (n \geq 1)}$$

其中，$\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ 都是简单合取式。

- 合取范式的一般形式：

$$\mathbf{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \quad (n \geq 1)}$$

其中，$\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ 都是简单析取式。

说明：

- 形如 $p \wedge \neg q \wedge r$，$\neg p \vee q \vee \neg r$ 的公式既是析取范式，又是合取范式

析取范式&合取范式 性质

定理2.2

(1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它每个简单合取式都是矛盾式.

(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

例:

$(p\wedge\neg p)\vee(\neg q\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge\neg r\wedge r)$ 矛盾式

$(p\vee\neg p)\wedge(\neg q\vee q\vee\neg r)\wedge(q\vee\neg r\vee r)$ 重言式

2.2 析取范式与合取范式

- 2.2.1 简单析取式&简单合取式
- 2.2.2 析取范式&合取范式
- 2.2.3 命题公式的范式
- 2.2.4 主析取范式（极小项）&主合取范式（极大项）
- 2.2.5 主范式的应用

命题公式的范式

定理2.3（范式存在定理）

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式

公式*A*的析取(合取)范式——与*A*等值的析取(合取)范式

范式的求法

求公式*A*的范式的步骤：

(1) 消去*A*中的→, ↔（若存在）

$$A\to B \Leftrightarrow \neg A\vee B$$

$$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$$

(2) 否定联结词¬的内移或消去

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

$$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$$

$$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$$

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 求析取范式

求公式的范式

例5 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $(p\to\neg q)\vee\neg r$

(2) $(p\to\neg q)\to r$

解 (1) $(p\to\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去→）

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$

最后结果既是析取范式(由3个简单合取式组成的析取式)，

又是合取范式(由1个简单析取式组成的合取式)

求公式的范式

(2) $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （否定号内移——德摩根律) 析取范式

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律） 合取范式

例 求下式的合取范式

$$((p\vee q)\rightarrow r)\rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow(\neg(p\vee q)\vee r)\rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow\neg(\neg(p\vee q)\vee r)\vee p$$

$$\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge\neg r)\vee p$$

$$\Leftrightarrow(p\vee q\vee p)\wedge(\neg r\vee p)$$

$$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(\neg r\vee p)$$

与命题公式等值的合取范式不唯一

例 求下式的析取范式

$$((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r) \rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee p$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee p$$

$$\Leftrightarrow (q \wedge \neg r) \vee p$$

与命题公式等值的析取范式不唯一

主范式

- 由以上可以看出：一个命题公式的合取范式或析取范式并不是唯一的。
- 那么，如何使任意一个命题公式化成唯一等值命题的标准形式呢？
  - 解决方案：**主范式**
    - 主析取范式（极小项）
    - 主合取范式（极大项）

2.2 析取范式与合取范式

- 2.2.1 简单析取式&简单合取式
- 2.2.2 析取范式&合取范式
- 2.2.3 命题公式的范式
- 2.2.4 主析取范式（极小项）&主合取范式（极大项）
- 2.2.5 主范式的应用

极小项（主析取范式）

定义2.4_1 在含有n个命题变项的简单合取式中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项和它的否定式按下标从小到大或字典序排列，称这样的简单合取式为极小项.

由两个命题变项 p, q 形成的极小项

极小项		
公式	成真赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2
$p\wedge q$	1 1	m_3

极小项的编码(二进制):

命题变项—1

其否定式—0

极小项的性质

p	q	$\neg p\wedge\neg q$ (m_0)	$\neg p\wedge q$ (m_1)	$p\wedge\neg q$ (m_2)	$p\wedge q$ (m_3)
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

1) 每一个极小项当其真值指派与编码相同时，其真值为 1，在其余 2^n-1 种指派情况下均为 0.
2) 任意两个不同极小项的合取式永假.
3) 全体极小项的析取式永为真.

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = m_0 \vee m_1 \vee \cdots \vee m_{2^n-1} \Leftrightarrow T$$

实例

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项

极小项		
公式	成真赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7

几点说明：

- n个命题变项有2^n个极小项
- 2^n个极小项均互不等值
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示.

  m_i称为极小项的名称.

主析取范式　定义

定义2.5_1

- 主析取范式——由极小项构成的析取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$$ ——主析取范式

公式*A*的主析取范式——与*A* 等值的主析取范式

主析取范式 定理

定理2.5_1 (主范式的存在唯一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式，并且是唯一的。

- **主析取范式的求法：**

1. 真值表法

在真值表中，一个公式的真值为 *T* 的指派所对应的极小项的析取，即为此公式的主析取范式。

2. 等值演算法

用真值表法求主析取范式

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$
\begin{aligned}
& p \to q \\
\Leftrightarrow\ & m_0 \vee m_1 \vee m_3 \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p \wedge \neg q) \vee \\
& (\neg p \wedge q) \vee \\
& (p \wedge q)
\end{aligned}
$$

在真值表中，一个公式的真值为 T 的指派所对应的极小项的析取，即为此公式的主析取范式。

说明真值表法的正确性

p	q	$p\to q$	$\neg p\wedge\neg q$ (m_0)	$\neg p\wedge q$ (m_1)	$p\wedge\neg q$ (m_2)	$p\wedge q$ (m_3)
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1

- 若某一个赋值I使公式G取T，而在该赋值下取T的唯一极小项写在其主析取范式G’中，故G’也取T；
- 若I使G取F，而在I下取T的唯一极小项不在G’中且I弄假其它所有极小项，故G’取F值。
- 所以G’是与G等值的主析取范式。

$$p\to q$$
$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$
$$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee$$
$$(\neg p\wedge q)\vee$$
$$(p\wedge q)$$

$A=(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$

用真值表法求主析取范式

p q r	$p\to q$	$p\to r$	$(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	0	0	1
1 0 1	0	1	0
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	1	1

成真赋值：000、001、010、011、100、111；

成假赋值：101、110

$A=(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$

成真赋值: 000、001、010、011、100、111

成假赋值: 101、110

主析取范式:

$$A \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (\neg p\wedge\neg q\wedge r) \vee (\neg p\wedge q\wedge\neg r) \vee (\neg p\wedge q\wedge r) \vee (p\wedge\neg q\wedge\neg r) \vee (p\wedge q\wedge r)$$

用等值演算法求主析取范式

用等值演算法求公式主析取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式 $j=1,2,\ldots,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i\vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

实例

用等值演算法求主析取范式

例6 (1) 求公式 $A=(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$ 的主析取范式

解 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （析取范式） ①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$ ②

---

r

$\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

---

②, ③代入①并排序，得

$(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$ （主析取范式）

实例

例：设$G=(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg q\wedge\neg r)$，求其对应的主析取范式。

解 $G=(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge(r\vee\neg r))\vee(\neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge r)$

$\vee((p\vee\neg p)\wedge\neg q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_6\vee m_7$ 主析取范式

极大项（主合取范式）

定义2.4_2 在含有n个命题变项的简单析取式中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项和它的否定式按下标从小到大或字典序排列，称这样的简单析取式为**极大项**.

由两个命题变项 p, q 形成的极大项

极大项		
公式	成假赋值	名称
$p \vee q$	0 0	M_0
$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

极大项的编码(二进制):

命题变项—0

其否定—1

极大项的性质

p	q	$p\vee q$ (M_0)	$p\vee\neg q$ (M_1)	$\neg p\vee q$ (M_2)	$\neg p\vee\neg q$ (M_3)
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

1) 每一个极大项当其真值指派与编码相同时，其真值为 0，在其余 2^n-1 种指派情况下均为 1.
2) 任意两个不同极大项的析取式永真.
3) 全体极大项的合取式永为假.

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow F$$

实例

由三个命题变项 p, q, r 形成的极大项

极大项		
公式	成假赋值	名称
$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

几点说明：

- n个命题变项有2^n个极大项
- 2^n个极大项均互不等值
- 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示.

  M_i称为极大项的名称.

主合取范式 定义

定义2.5_2

主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_7$$——主合取范式

公式A的主合取范式——与A 等值的主合取范式

主合取范式 定理

定理2.5_2 (主范式的存在唯一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主合取范式，并且是唯一的。

- **主合取范式的求法：**

1. 真值表法

在真值表中，一个公式的真值为 *F* 的指派所对应的极大项的合取，即为此公式的主合取范式。

2. 等值演算法

用真值表法求主合取范式

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p\to q$

$\Leftrightarrow M_2$

$\Leftrightarrow \neg p\vee q$

在真值表中，一个公式的真值为 F 的指派所对应的极大项的合取，即为此公式的主合取范式。

说明真值表法的正确性

p	q	$p\rightarrow q$	$p\vee q$ (M_0)	$p\vee\neg q$ (M_1)	$\neg p\vee q$ (M_2)	$\neg p\vee\neg q$ (M_3)
0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0

- 若某一个赋值I使公式G取F，而在该赋值下取F的唯一极大项写在其主合取范式G’中，故G’也取F；
- 若I使G取T，而在I下取F的唯一极大项不在G’中且I弄真其它所有极大项，故G’取T值。
- 所以G’是与G等值的主合取范式。

$$p\rightarrow q$$
$$\Leftrightarrow M_2$$
$$\Leftrightarrow \neg p\vee q$$

$A=(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$

用真值表法求主合取范式

p q r	$p\to q$	$p\to r$	$(p\to q)\leftrightarrow(p\to r)$
0 0 0	1	1	1
0 0 1	1	1	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	1	1
1 0 0	0	0	1
1 0 1	0	1	0
1 1 0	1	0	0
1 1 1	1	1	1

成真赋值：000、001、010、011、100、111；
成假赋值：101、110

$A=(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\rightarrow r)$

用真值表法求主合取范式

成真赋值: 000、001、010、011、100、111

成假赋值: 101、110

主合取范式:

$A\Leftrightarrow M_5\wedge M_6$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

用等值演算法求主合取范式

用等值演算法求公式的主合取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式 $j=1,2, \ldots ,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

实例

例6 (2) 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$的主合取范式

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （合取范式） ①

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ②

$q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$ ③

---

②, ③代入① 并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ （主合取范式）

用等值演算法求主合取范式

实例

用等值演算法求主合取范式

例：设$G=(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg q\wedge\neg r)$，求其对应的主合取范式。

解 $G=(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(\neg q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge(r\vee\neg r))\vee(\neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge r)$

$\vee((p\vee\neg p)\wedge\neg q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_6\vee m_7$ 主析取范式

$\Leftrightarrow M_2\wedge M_5$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$ 主合取范式

几点说明

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$ （主析取范式）

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$ （主合取范式）

- 一个公式的主析取范式的极小项的编码对应着该公式的所有成真赋值。
- 一个公式的主合取范式的极大项的编码对应着该公式的所有成假赋值。
- 根据主析取范式可以直接求出主合取范式，方法是列出没有出现在主析取范式中的极小项编码，作为极大项的编码。
- 同理，根据主合取范式也可以直接求出主析取范式。

由主析取范式确定主合取范式

例 设A有3个命题变项, 且已知$A= m_1 \vee m_3 \vee m_7$, 求A的主合取范式.

解 A的成真赋值是1,3,7的二进制表示,

成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示,

它们恰好是A的主合取范式的极大项的下角标, 故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

由主析取范式确定主合取范式

今天晚上我在家看电视或去影院看电影。

解：设 p ：今天晚上我在家看电视

q ：今天晚上我去影院看电影

本命题可表示为： $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

不可以表示为： $p\vee q$

$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_2$ （主析取范式）

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_3$ （主合取范式）

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge\neg(p\wedge q)$

极小项与极大项 （回看）

定义2.4 在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，而且命题变项和它的否定式按下标从小到大或字典序排列，称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）.

几点说明：

- n个命题变项有2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示. m_i（M_i）称为极小项（极大项）的名称.

实例

由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

极小项的编码(二进制):命题变项—1，其否定—0
极大项的编码(二进制):命题变项—0，其否定—1

实例

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

m_i与M_i的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$, $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式与主合取范式 （回看）

主析取范式——由极小项构成的析取范式

主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ ——主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_7$——主合取范式

公式A的主析取(合取)范式——与A 等值的主析取(合取)范式

定理2.5 (主范式的存在唯一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式,

并且是唯一的

2.2 析取范式与合取范式

- 2.2.1 简单析取式&简单合取式
- 2.2.2 析取范式&合取范式
- 2.2.3 命题公式的范式
- 2.2.4 主析取范式（极小项）&主合取范式（极大项）
- 2.2.5 主范式的应用

主范式的应用

1. 求公式的成真成假赋值
2. 判断公式的类型
3. 判断两个公式是否等值
4. 解实际问题

主范式的应用

1. 求公式的成真成假赋值

设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值

例如 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,

成假赋值为 000, 010, 100.

类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的应用

2. 判断公式的类型

设A含n个命题变项.

A为重言式 $\Leftrightarrow$ A的主析取范式含全部2^n个极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式不含任何极大项, 记为1

A为矛盾式 $\Leftrightarrow$ A的主析取范式不含任何极小项, 记为0

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式含全部2^n个极大项

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项

主范式的应用

例7 用主析取范式判断公式的类型:

(1) $A \Leftrightarrow \neg(p \to q) \land q$ (2) $B \Leftrightarrow p \to (p \lor q)$ (3) $C \Leftrightarrow (p \lor q) \to r$

解

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p \lor q) \land q \Leftrightarrow (p \land \neg q) \land q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p \lor (p \lor q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_3$ 重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p \lor q) \lor r \Leftrightarrow (\neg p \land \neg q) \lor r$

$\Leftrightarrow (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q \land r)$

$\lor (\neg p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor (p \land q \land r)$

$\Leftrightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_3 \lor m_5 \lor m_7$ 非重言式的可满足式

主范式的应用

3. 判断两个公式是否等值

例8 用主析取范式判断以下每一组公式是否等值

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

主范式的应用

4. 解实际问题

例9 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察, 需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记 p:派A去, q:派B去, r:派C去

(1) $p\rightarrow r$, (2) $q\rightarrow\neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A=(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

主范式的应用

求*A*的主析取范式

$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))$

$\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow(\,(\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q)\,)\vee(\,(\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q)\,)\vee(\,(r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q)\,)\vee$

$(\,(\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q)\,)\vee(\,(\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q)\,)\vee(\,(r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q)\,)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去, 方案2 派B去

?

n个命题变项可以构成多少个不等值的命题公式?

答:

n个命题变项可以产生2^n个极小项（极大项），因此，可以产生 2^{2^n} 个不等值的命题公式。

因为2^n个极小项（极大项），共可产生

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + \ldots + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n}$$

个不同的主析取范式（主合取范式），而每个命题公式都有与之等值的唯一的主范式。

进一步说明

$$C_{2^n}^{0}+C_{2^n}^{1}+\ldots+C_{2^n}^{2^n}=2^{2^n}$$

因为 $(x+y)^{\mathrm{m}}=\sum_{k=0}^{\mathrm{m}} \mathrm{C}_{\mathrm{m}}^{k} \cdot x^{k} \cdot y^{\mathrm{m}-k}$

令 $x=y=1$, $\mathrm{m}=2^{n}$

2.2 析取范式与合取范式（回顾）

- 2.2.1 简单析取式&简单合取式
- 2.2.2 析取范式&合取范式
- 2.2.3 命题公式的范式
- 2.2.4 主析取范式（极小项）&主合取范式（极大项）
- 2.2.5 主范式的应用