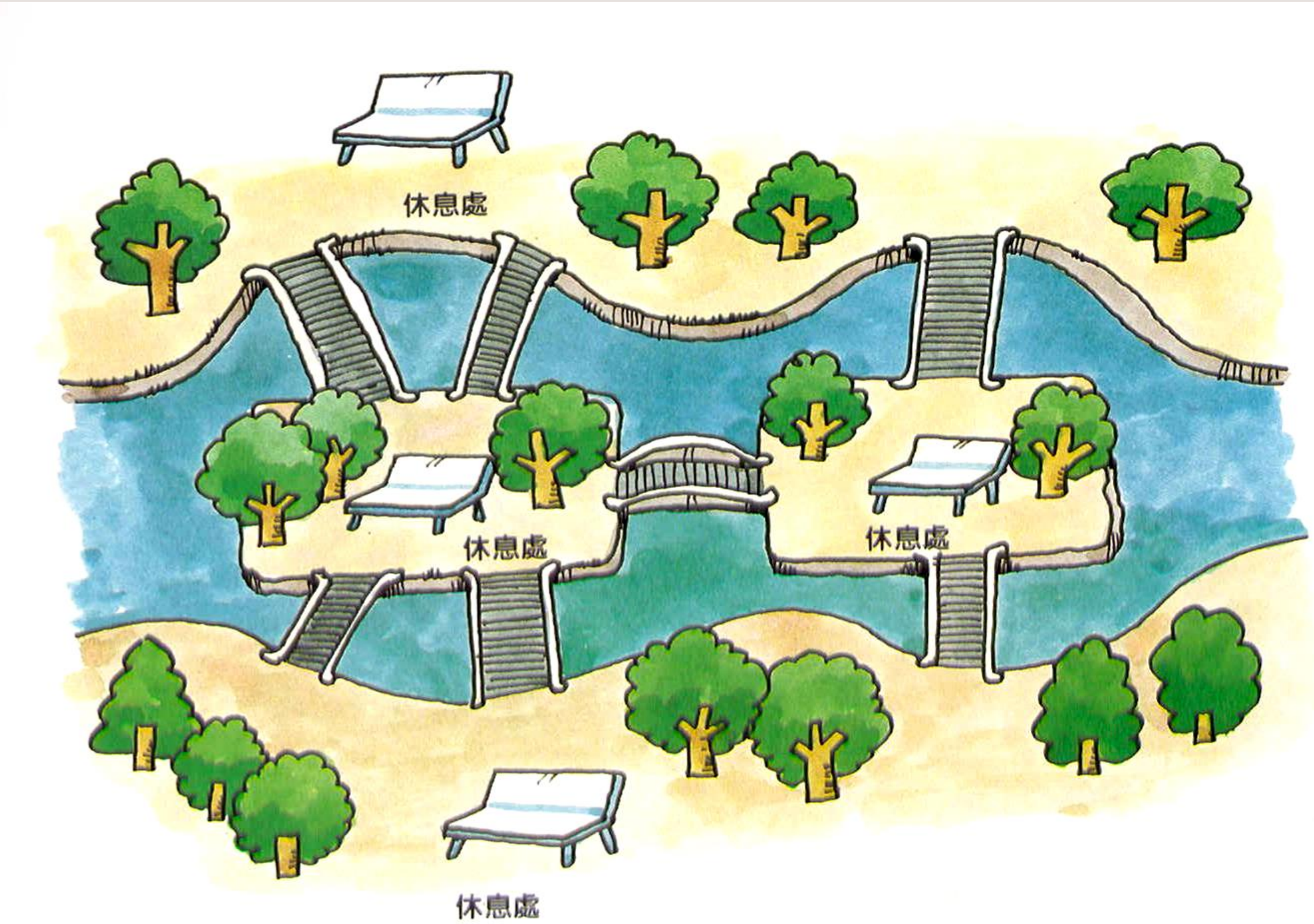
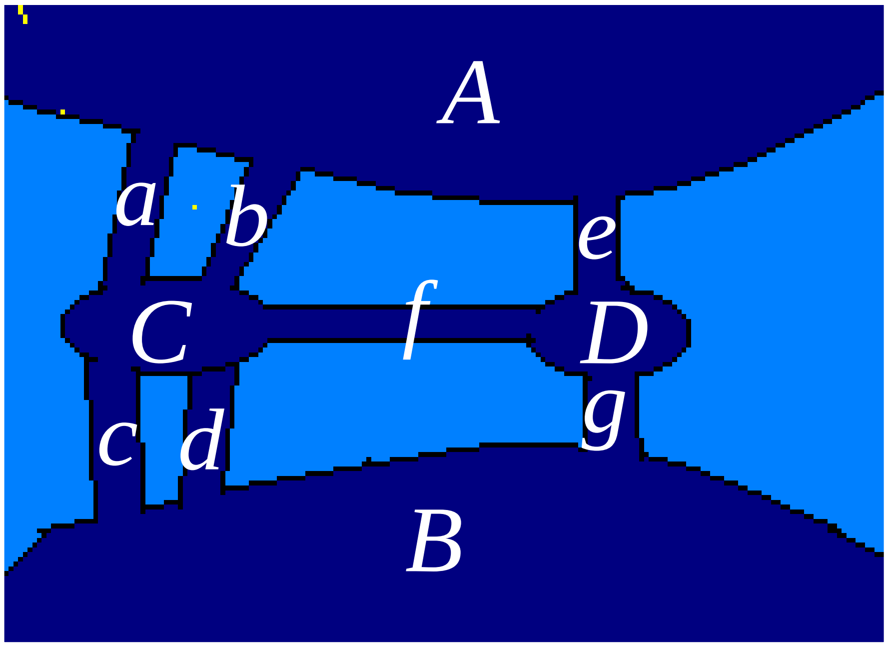
第四部分 图论

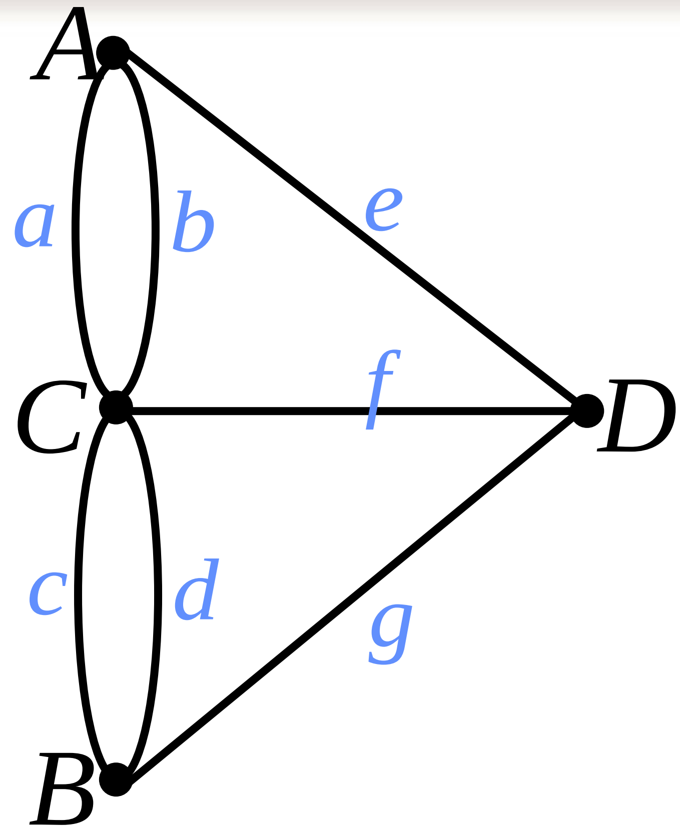
- 4图论
  - ch14图的基本概念
  - ch15欧拉图&哈密顿图
  - ch16 树
  - ch17平面图
  - ch18支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

哥尼斯堡七桥问题



哥尼斯堡七桥问题





问题 能否从河岸或小岛出发，通过每一座桥，且仅通过一次回到原地？

图论发展简史

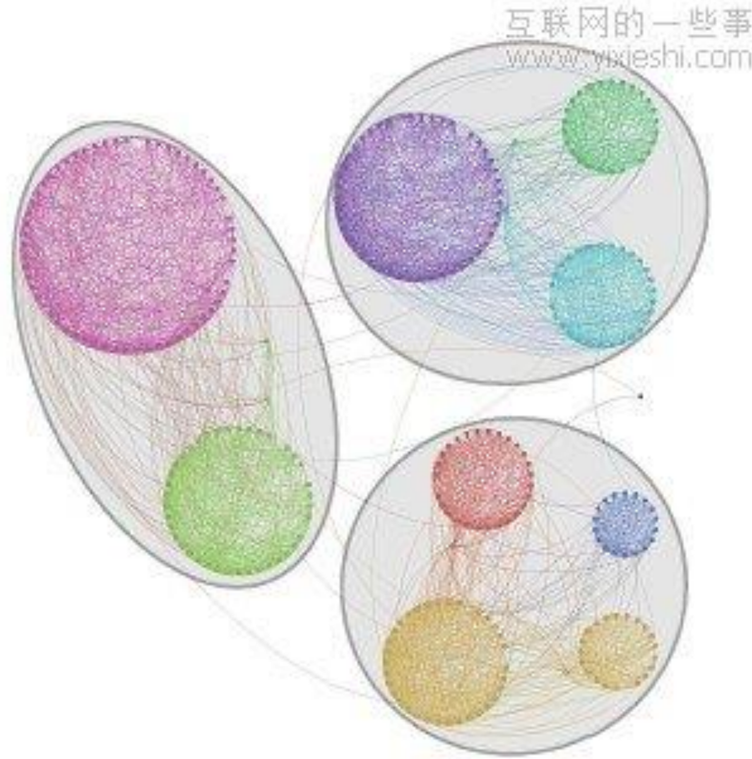
- **1736**年瑞士数学家欧拉（**Euler**）发表了图论的首篇论文——《哥尼斯堡七桥问题无解》。
- **1847**年，克希霍夫用图论分析电路网络，这是图论在工程中的最早应用。
- **1936**年，匈牙利数学家寇尼格（**Konig**）出版了图论的第一部专著《有限图与无限图理论》它标志着图论将进入突飞猛进发展的新阶段。
- 目前，图论在许多领域都得到广泛的应用。如：计算机科学、物理学、化学、运筹学、信息论、控制论、网络通讯、社会科学以及经济管理、军事、国防、工农业生产等。

图论的新应用

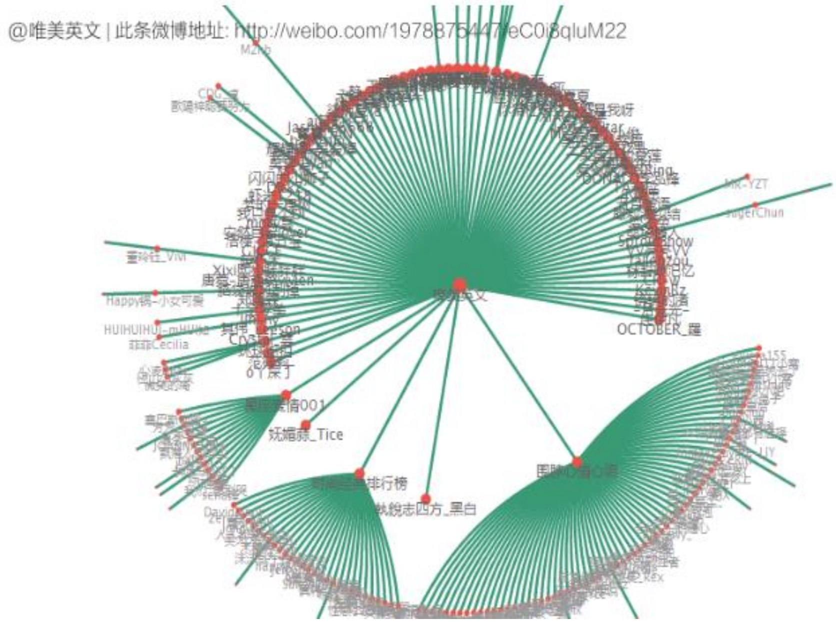
- 社交网络上产生了大量的规模化、群体化的数据，吸引了包括计算机科学、心理学、社会学、新闻传播学等领域专家和学者对其进行研究和探索，希望能够借助更强的社交网络的分析和处理能力发现更多人类尚未探索出的规律。

社区发现


jowyang
rafik
jol
jerrymichalski
stevej
seanbonner
timorellly
evskeys
dickc
sacca
konatbone
ev
illich
dwilson
scobleizer
pkedrosky
veronica
shellen
garyvee

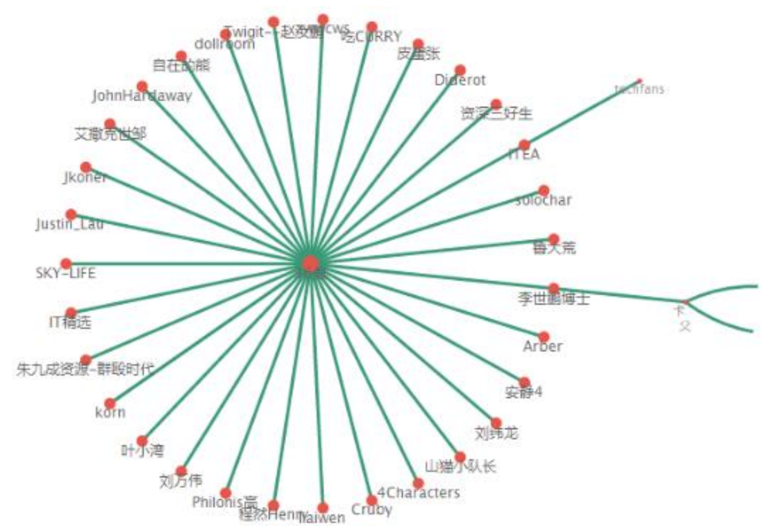

互联网的一些事
www.yixieshi.com

信息传播路径分析



蒲公英式

中心式



知识图谱

第十四章 图的基本概念

主要内容

- **14.1**图
- **14.2**通路与回路
- **14.3**图的连通性
- **14.4**图的矩阵表示
- **14.5**图的运算

预备知识

- 多重集合 — 元素可以重复出现的集合
- 无序积 — $A\&B=\{(x,y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$

第十四章 图的基本概念

主要内容

- 14.1图
- 14.2通路与回路
- 14.3图的连通性
- 14.4图的矩阵表示
- 14.5图的运算

14.1 图

定义14.1 无向图$G = <V,E>$, 其中

(1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为**顶点**

(2) E为$V\&V$ 的多重集，其元素称为无向边，简称**边**

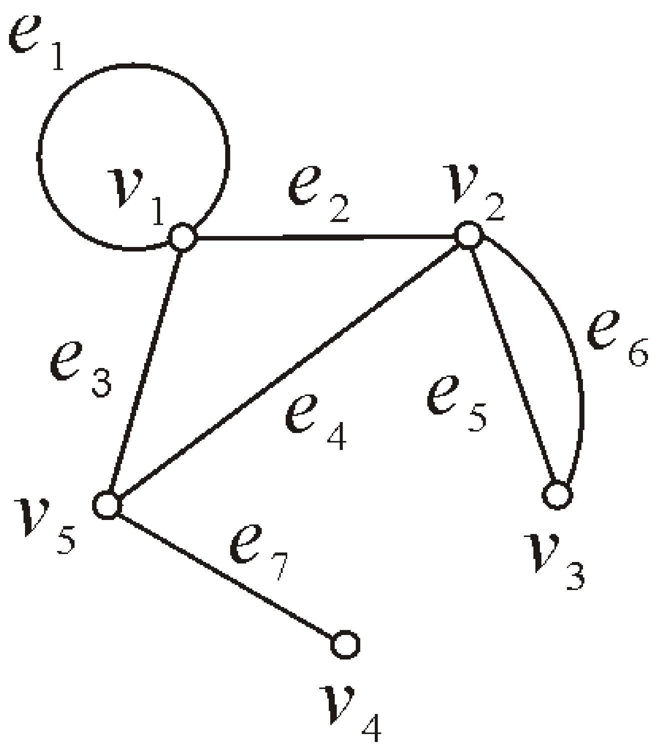
实例

设

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

则 $G = <V,E>$为一无向图



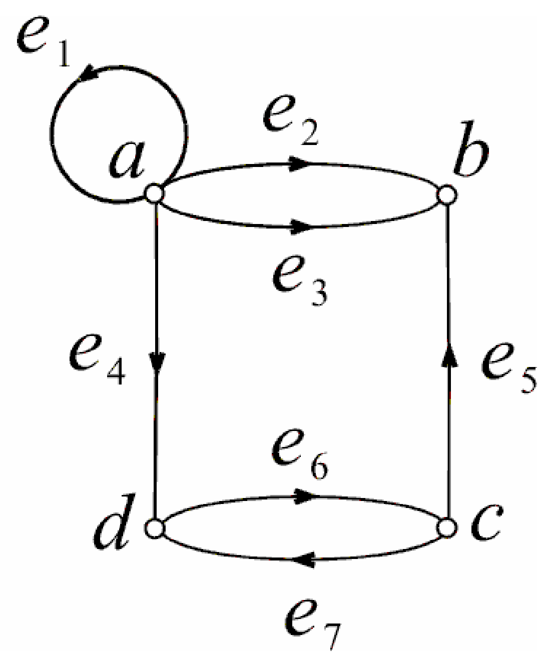
有向图

定义14.2 有向图$D=<V,E>$（只需注意E是$V\times V$的多重子集）

$V = \{a,b,c,d\}$,

$E = \{ <a,a>, <a,b>, <a,b>, <a,d>,$

$<d,c>, <c,d>, <c,b>\}$



相关概念

1. 图
   ① 可用G泛指图（无向的或有向的）
   ② $V(G)$, $E(G)$
   ③ n阶图（n个顶点）
2. n 阶零图（一条边也没有）
3. 平凡图（只有一个顶点，没有边，也称1阶零图）
4. 空图——$\varnothing$（无顶点）
5. 用 e_k 表示无向边或有向边
6. 顶点与边的关联关系
   ① 关联、关联次数（0,1,2）
   ② 环
   ③ 孤立点
7. 顶点之间的相邻、边之间的相邻

相关概念

8. 邻域与关联集

① $v\in V(G)$ (G为无向图)

v的邻域 $N(v)=\{u\mid u\in V(G)\wedge(u,v)\in E(G)\wedge u\neq v\}$

v的闭邻域 $\overline{N}(v)=N(v)\cup\{v\}$

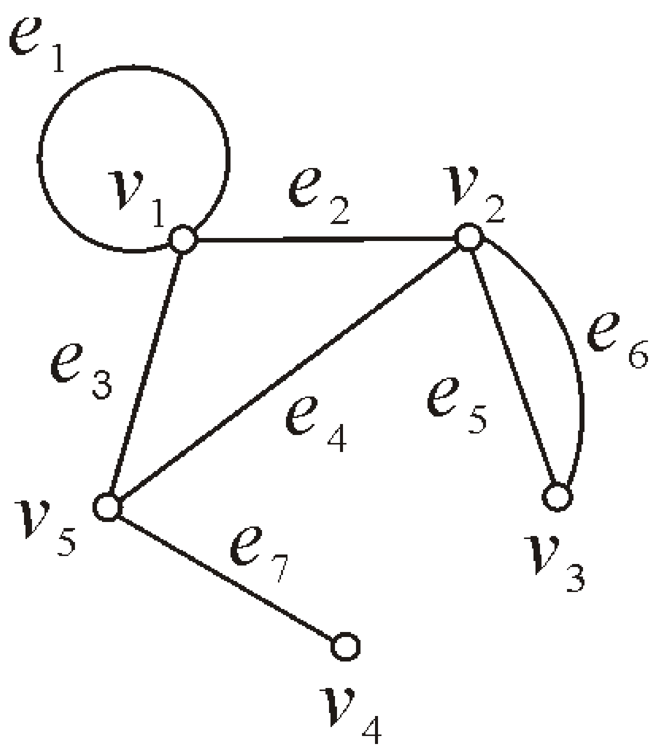
v 的关联集 $I(v)=\{e\mid e\in E(G)\wedge e与v关联\}$

实例

$N(v_1)=\{v_2,v_5\}$

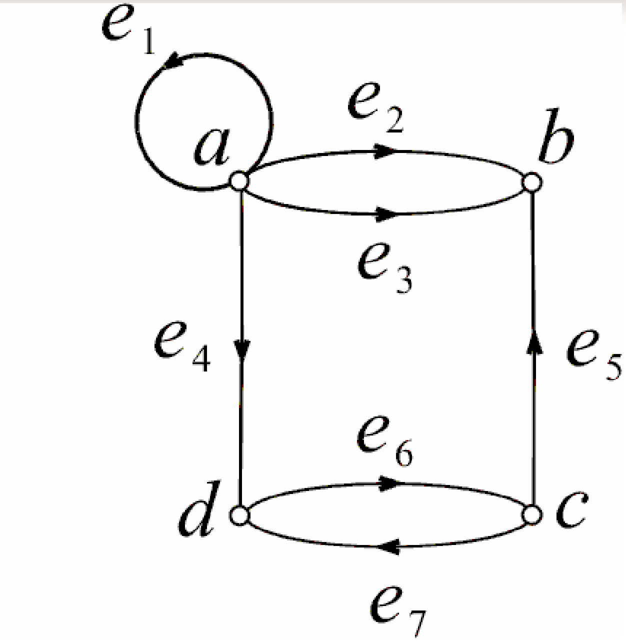
$\overline{N}(v_1)=\{v_1,v_2,v_5\}$

$I(v_1)=\{e_1,e_2,e_3\}$



相关概念

8. 邻域与关联集



实例

$\Gamma^{+}(d)=\{c\}$

$\Gamma^{-}(d)=\{a,c\}$

$N(d)=\{a,c\}$

$\overline{N}(d)=\{a,c,d\}$

② $v\in V(D)$ (D为有向图)

v的后继元集 $\Gamma_D^{+}(v)=\{u \mid u\in V(D)\wedge <v,u>\in E(D)\wedge u\neq v\}$

v的先驱元集 $\Gamma_D^{-}(v)=\{u \mid u\in V(D)\wedge <u,v>\in E(D)\wedge u\neq v\}$

v的邻域 $N_D(v)=\Gamma_D^{+}(v)\cup\Gamma_D^{-}(v)$

v的闭邻域 $\overline{N}_D(v)=N_D(v)\cup\{v\}$

9. 标定图与非标定图（为顶点和边指定符号）

10. 基图（有向→无向）

多重图与简单图

定义14.3

(1) 无向图中的平行边及重数（平行边的条数）

(2) 有向图中的平行边及重数（注意方向性）

(3) 多重图：含平行边的图

(4) 简单图：既不含平行边也不含环的图

在定义14.3中定义的简单图是极其重要的概念

顶点的度数

定义14.4

(1) 设$G=\langle V,E\rangle$为无向图, $\forall v\in V$, $d(v)$——v的度数, 简称度

(2) 设$D=\langle V,E\rangle$为有向图, $\forall v\in V$,

$d^+(v)$——v的出度

$d^-(v)$——v的入度

$d(v)$——v的度或度数（入度+出度）

(3) $\Delta(G)$(最大度), $\delta(G)$ (最小度)

(4) $\Delta^+(D)$, $\delta^+(D)$, $\Delta^-(D)$, $\delta^-(D)$, $\Delta(D)$, $\delta(D)$

(5) 奇度顶点与偶度顶点

握手定理

在任何无向图中，所有顶点的度数之和等于边数的两倍。

定理14.1 设$G=<V,E>$为任意无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

证 G中每条边 (包括环) 均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，m 条边共提供 $2m$ 度.

在任何有向图中，所有顶点的度数之和等于边数的两倍；所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和，都等于边数。

定理14.2 设$D=<V,E>$为任意有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

本定理的证明类似于定理14.1

握手定理推论

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

证 设$G=\langle V,E\rangle$为任意图，令

$V_1=\{v \mid v\in V\wedge d(v)为奇数\}$

$V_2=\{v \mid v\in V\wedge d(v)为偶数\}$

则$V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)$$

由于$2m$, $\sum_{v\in V_2}d(v)$ 均为偶数，所以$\sum_{v\in V_1}d(v)$ 为偶数，但因为V_1中顶点度数为奇数，所以$|V_1|$必为偶数.

握手定理应用

例1 无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点度数均小于3，问G的阶数n为几？

解　本题的关键是应用握手定理.

设除3度与4度顶点外，还有x个顶点$v_1, v_2, \ldots, v_x$，则

$$d(v_i) \le 2,\ i = 1, 2, \ldots, x,$$

于是得不等式

$$32 \le 3*4+4*3+2x$$

得 $x \ge 4$, 阶数 $n \ge 4+4+3=11$.

图的度数列

1 . $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为无向图$G$的顶点集，称$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$为$G$的度数列

2. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为有向图$D$的顶点集，

D的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度列：$d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列：$d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

3. 对于顶点标定的无向图，它的度数序列是唯一的。

反之，对于给定的非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$，若存在以$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为顶点集的$n$阶无向图$G$，使得$d(v_i)=d_i$，则称$d$是可图化的，特别地，若所得到的图是简单图，则称$d$是可简单图化的.

图的度数列

定理14.3 非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$是可图化的当且仅当$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数

定理14.4 设G为任意n阶无向简单图，则$\Delta(G) \leq n-1$

实例：

(2, 4, 6, 8, 10)，(1, 3, 3, 3, 4) 是可图化的，后者又是可简单图化的，

(2, 2, 3, 4, 5)，(3, 3, 3, 4) 都不是可简单图化的，特别是后者也不是可图化的

图的同构

定义14.5 设$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$为两个无向图(两个有向图)，若存在双射函数$f:V_1\to V_2$, 对于$v_i,v_j\in V_1$,

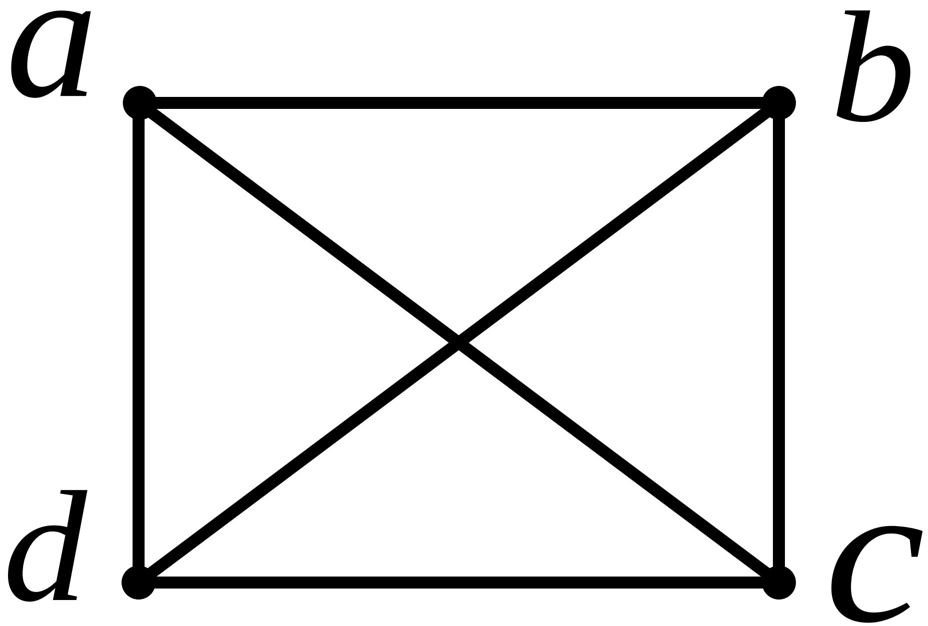
$$(v_i,v_j)\in E_1 \text{ 当且仅当 } (f(v_i),f(v_j))\in E_2$$

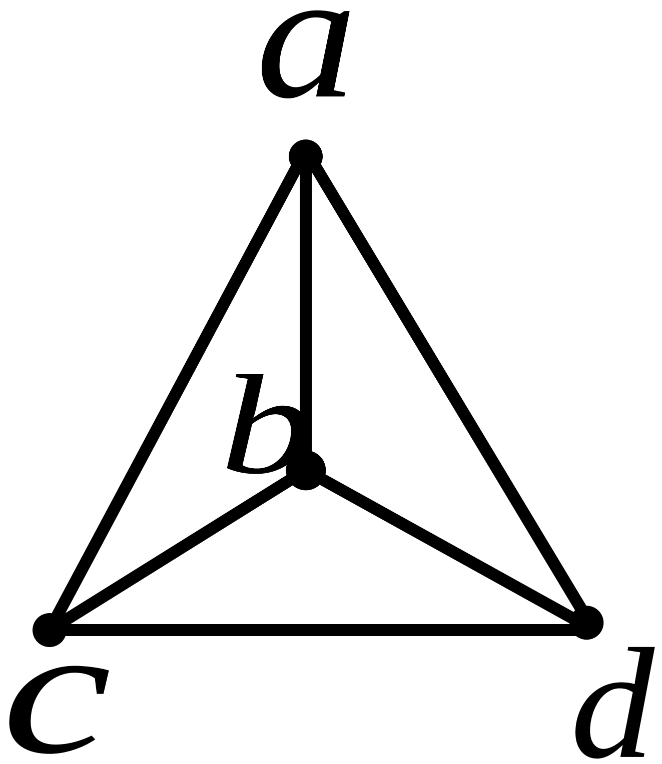
$$（<v_i,v_j>\in E_1 \text{ 当且仅当 } <f(v_i),f(v_j)>\in E_2）$$

并且, (v_i,v_j)（$<v_i,v_j>$）与 $(f(v_i),f(v_j))$（$<f(v_i),f(v_j)>$）的重数相同，则称G_1与G_2是同构的，记作$G_1\cong G_2$.

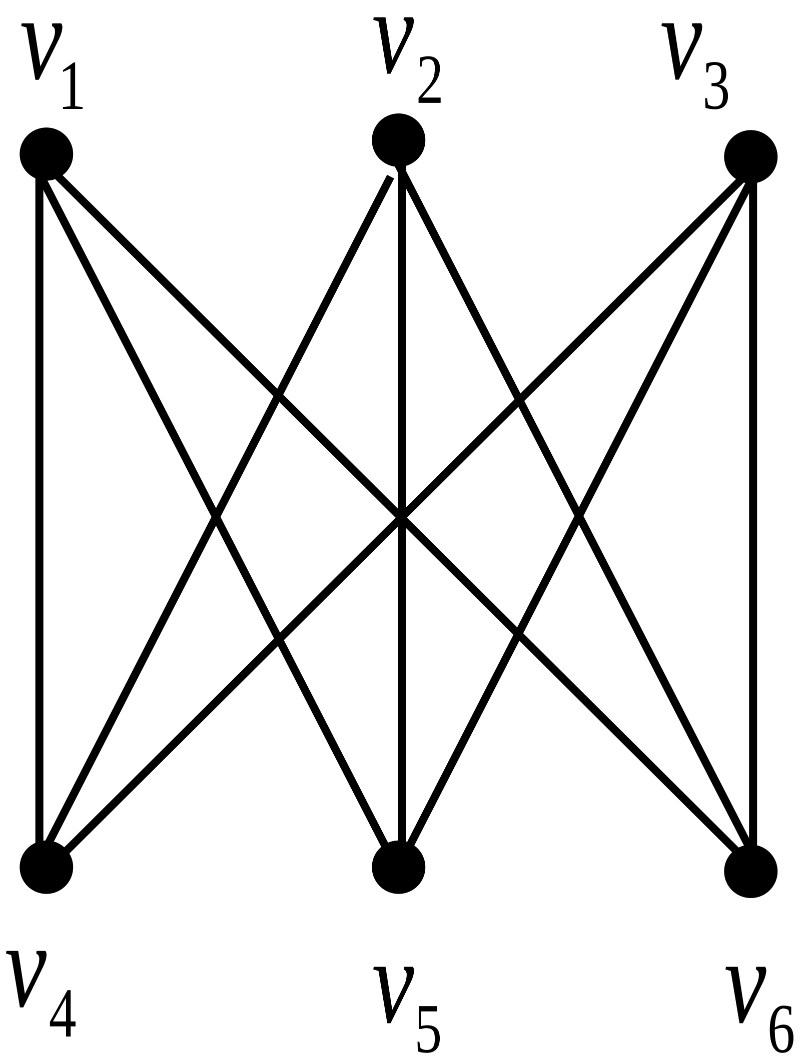
- 图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.
- 能找到多条同构的必要条件，但它们全不是充分条件:
  ①边数相同;
  ②顶点数相同;
  ③度数列相同; 等等
- 判断两个图同构是个难题

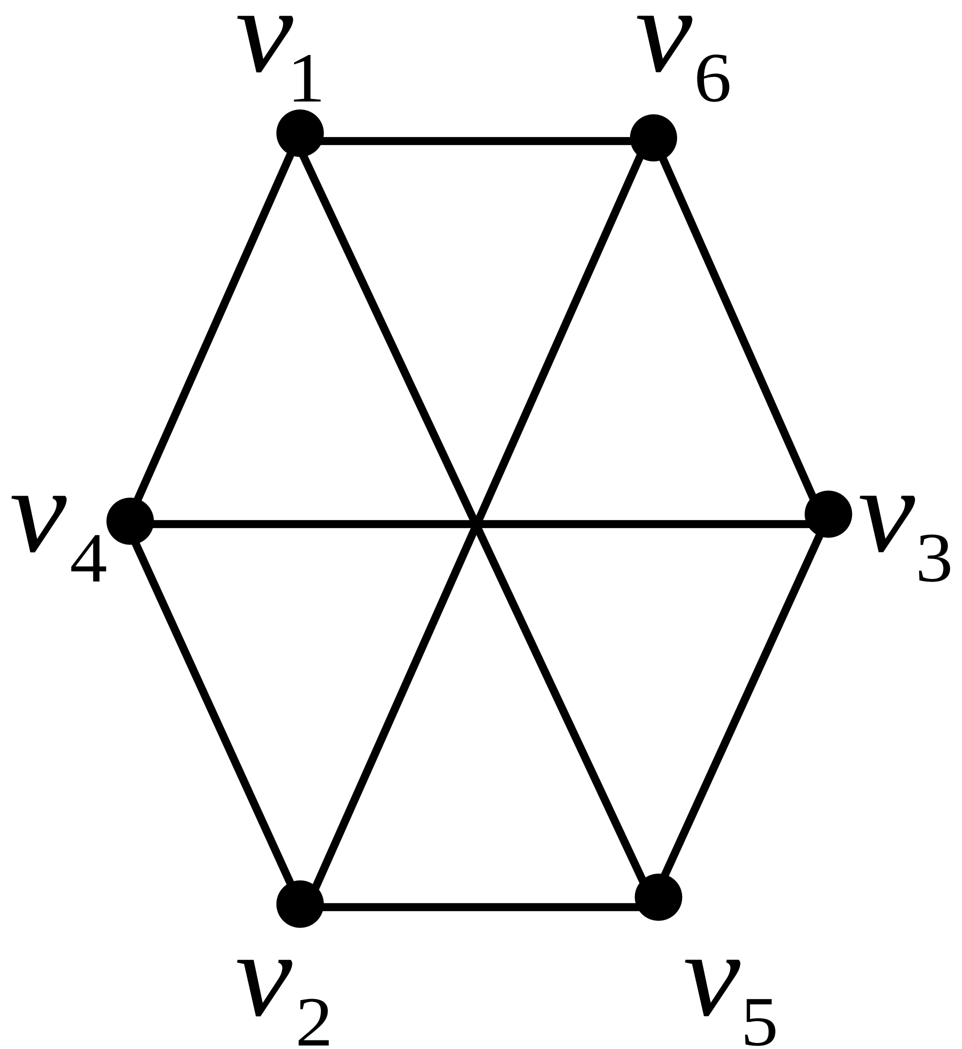
例



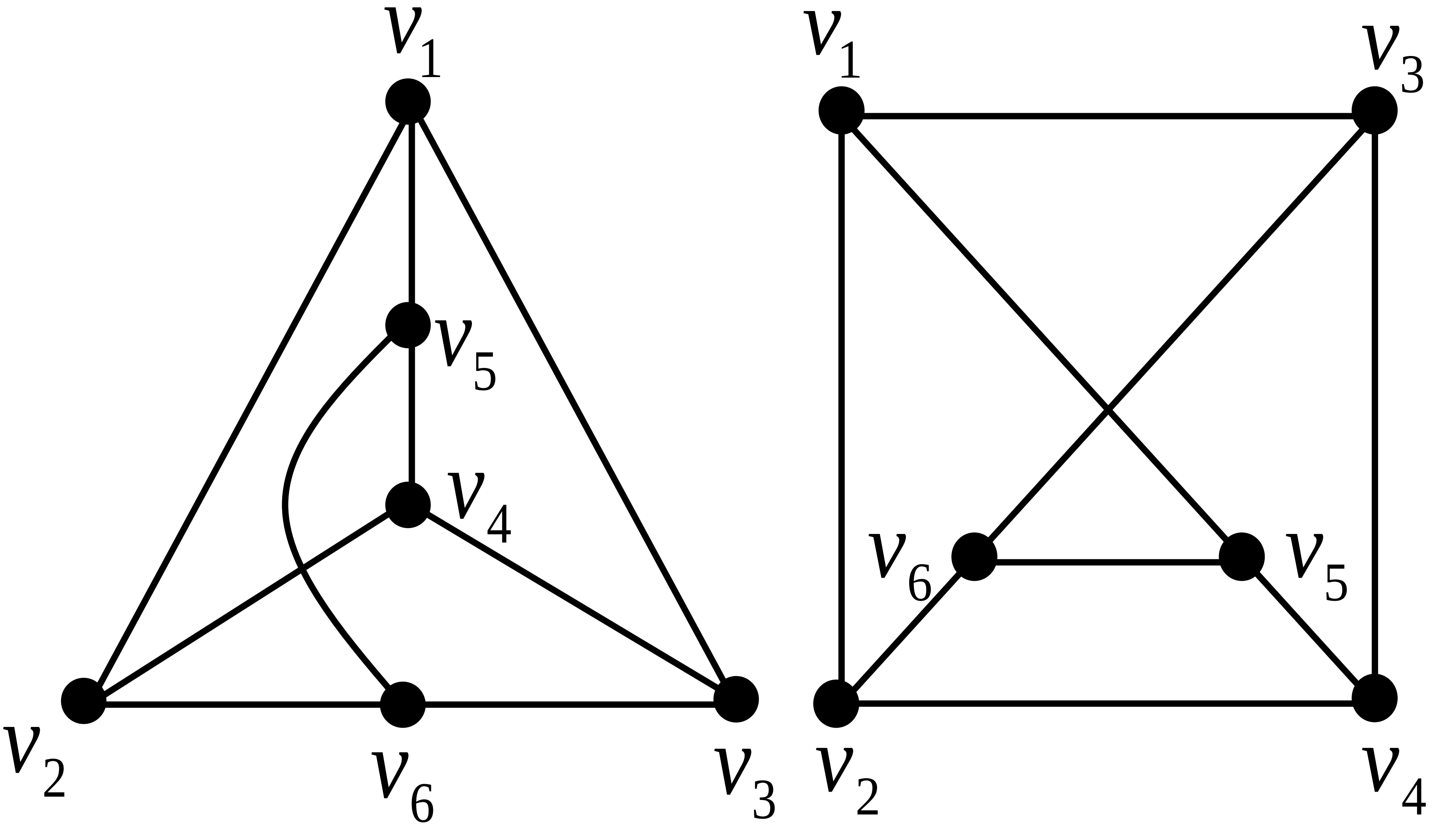


例

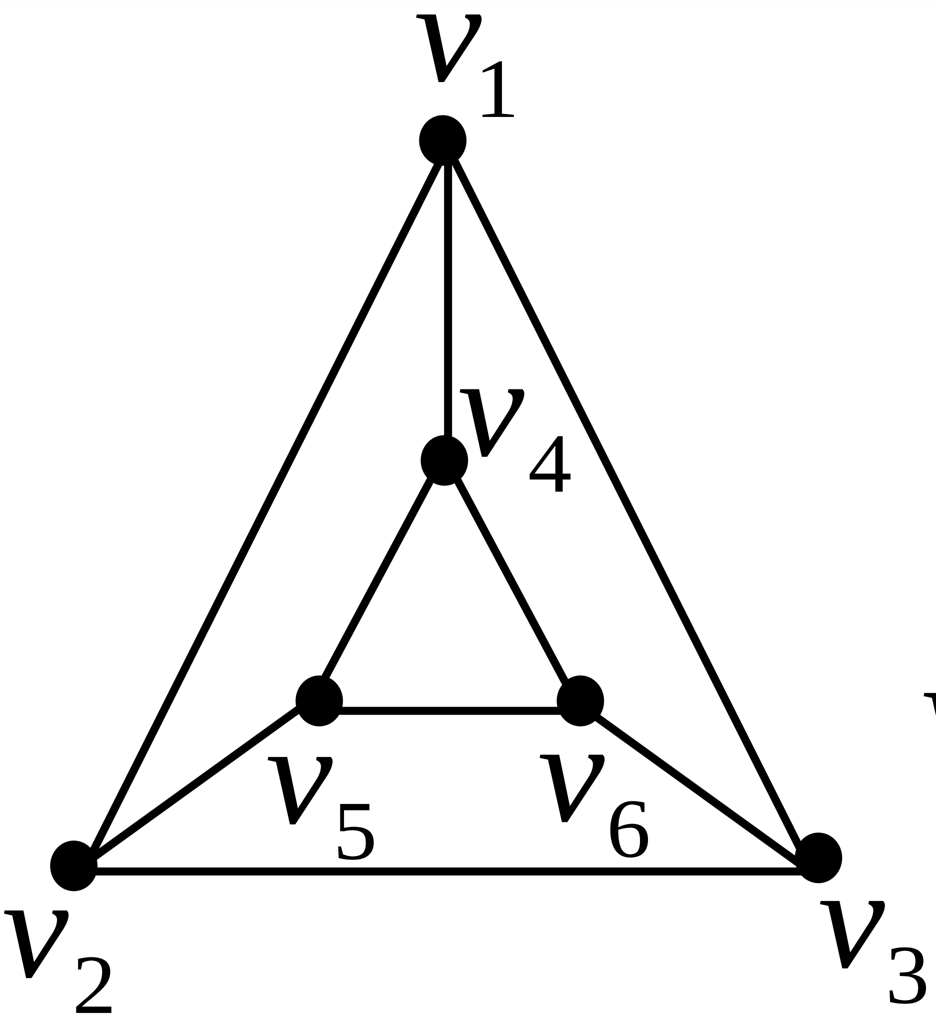


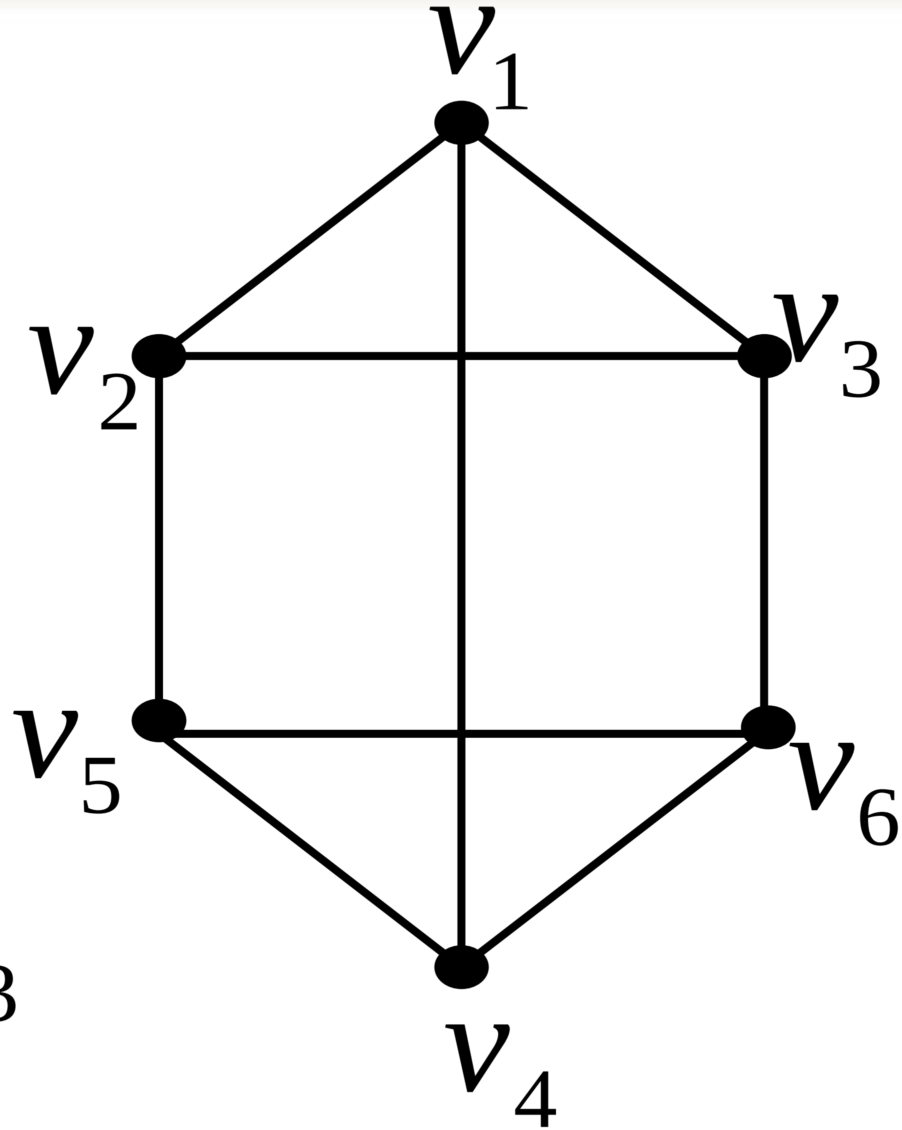


例

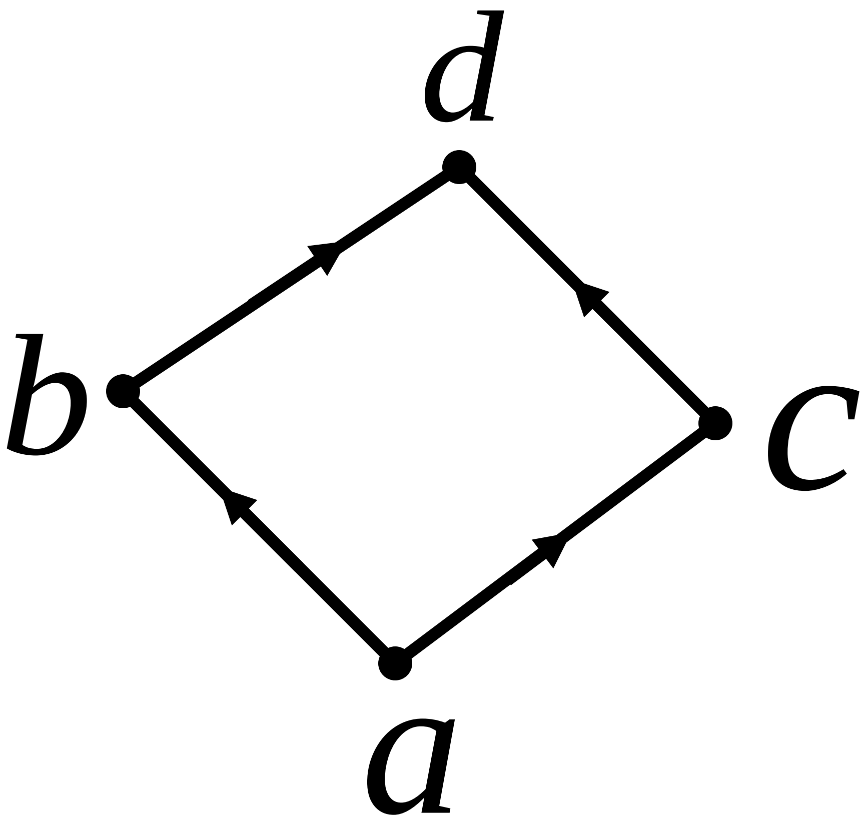


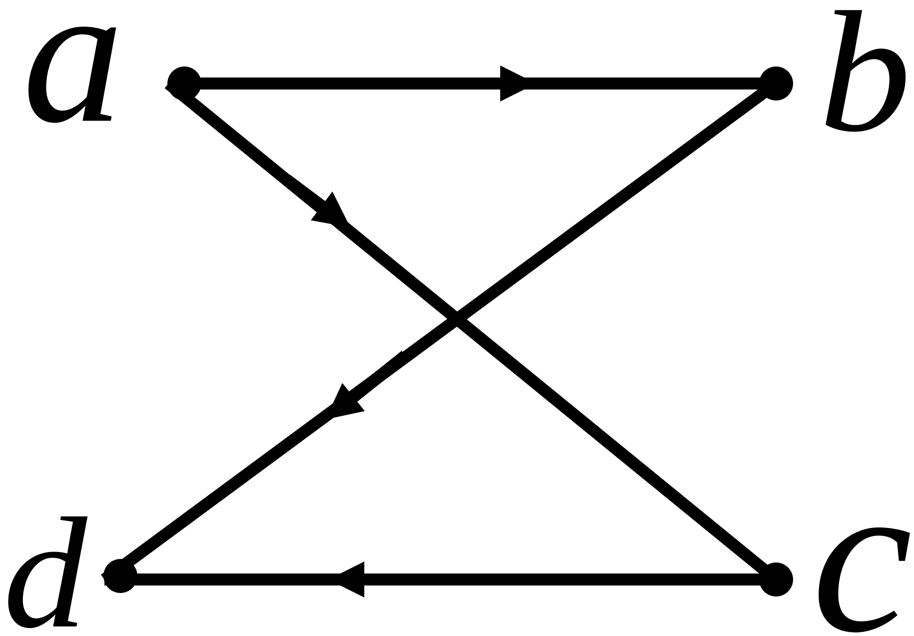
例



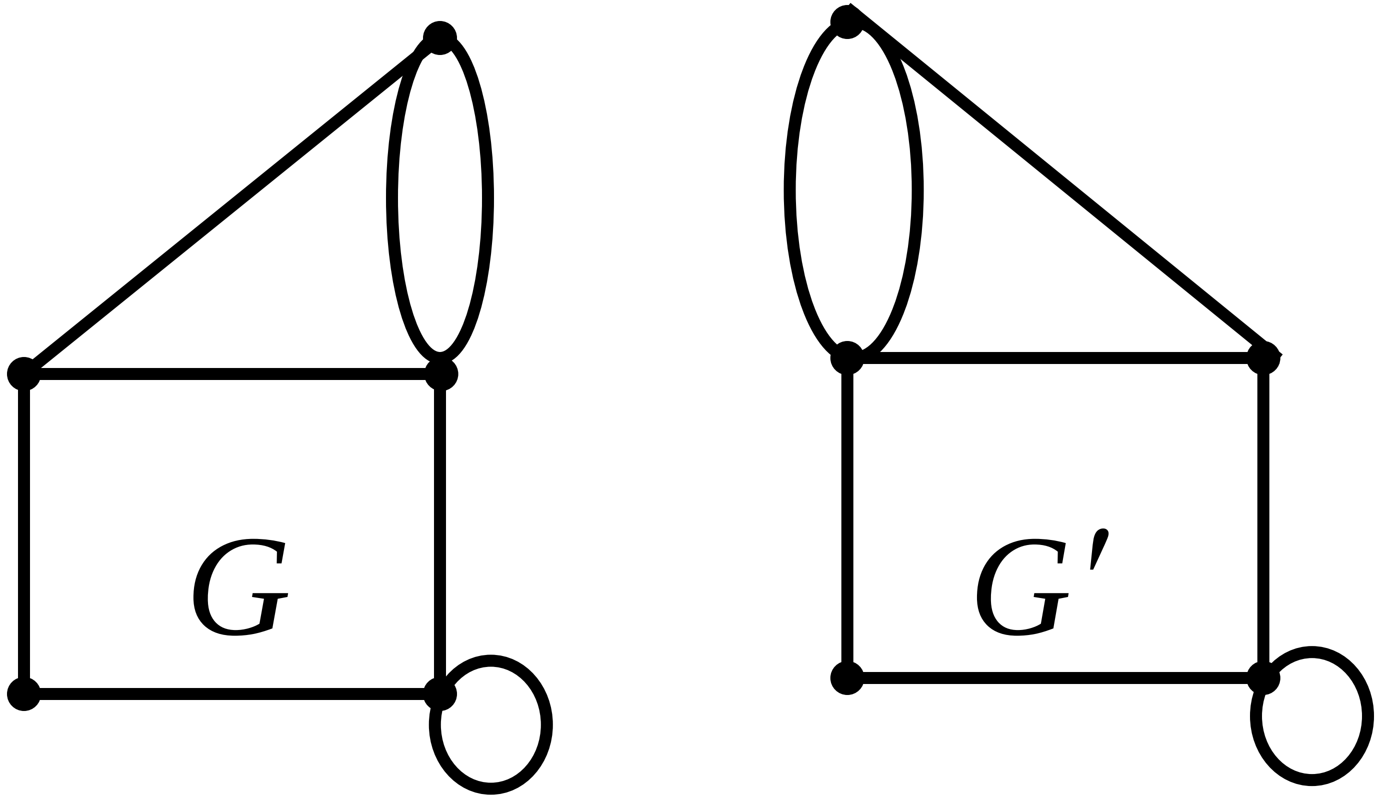


例



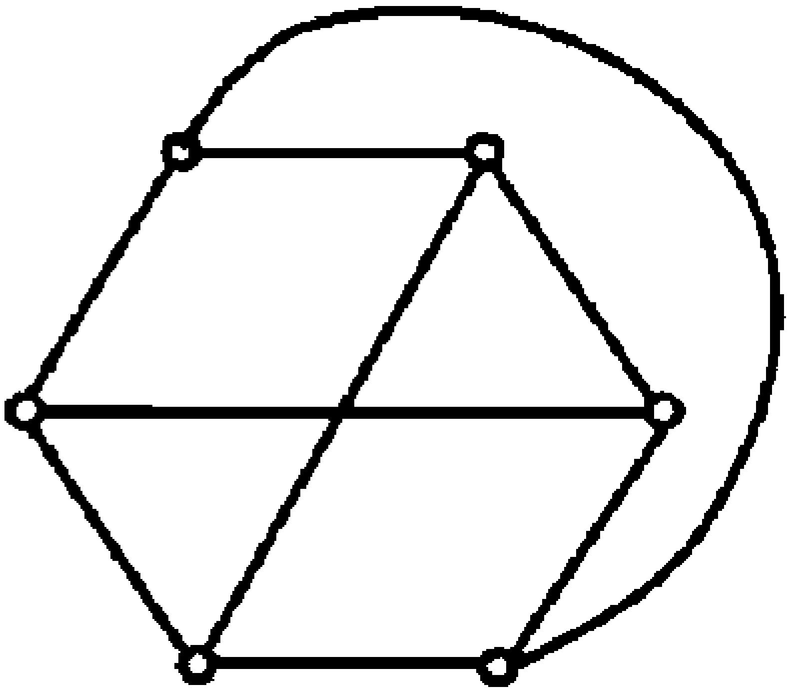


例

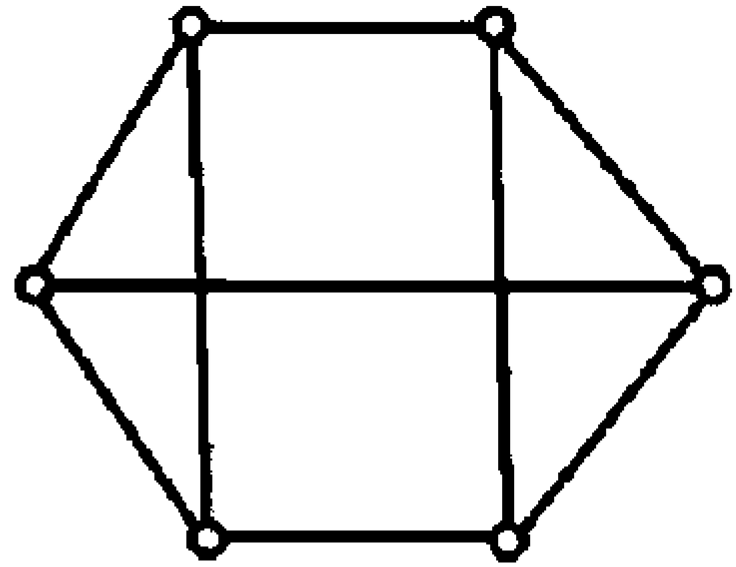


$$G \not\cong G'$$

例



G



G'

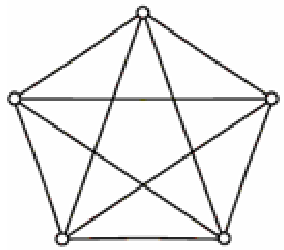
$$G \ncong G'$$

n 阶完全图与竞赛图

定义14.6

(1) n (n≥1) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n

简单性质：$$m=\frac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$$

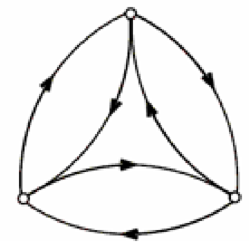


K_5

(2) n (n≥1)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图.

简单性质：

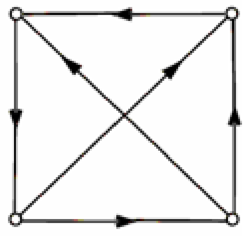
$$m=n(n-1), \Delta=\delta=2(n-1), \Delta^{+}=\delta^{+}=n-1$$



3阶有向完全图

(3) n (n≥1) 阶竞赛图——基图为K_n的有向简单图.

简单性质：$$m=\frac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$$



4阶竞赛图

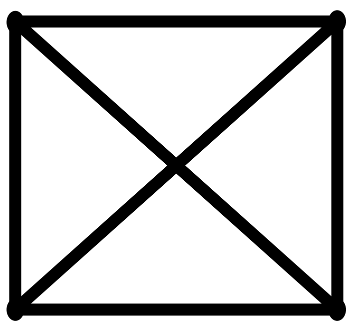
k -正则图

定义14.7 设G为n阶无向简单图，若$\forall v \in V(G)$，均有$d(v)=k$，则称G为k-正则图

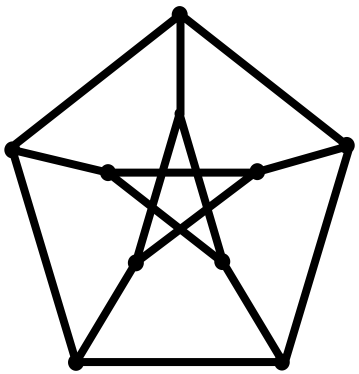
- 简单性质：边数（由握手定理得）：$m = \dfrac{nk}{2}$

实例：

- ✓ n阶零图是 0-正则图
- ✓ K_n是 $(n-1)$-正则图
- ✓ 彼得松图是 3-正则图

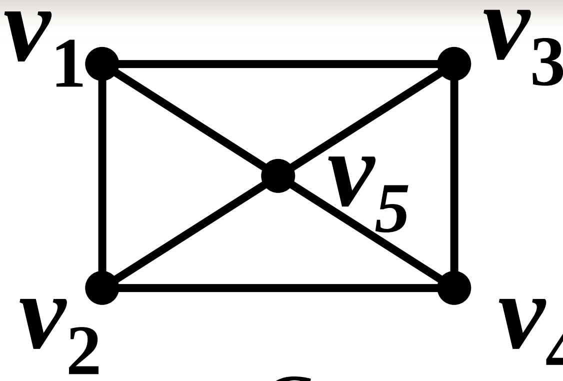


K_4



彼得松图

子图



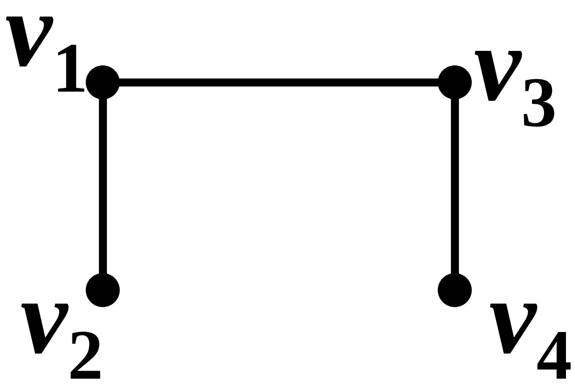
G

定义14.8 $G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$

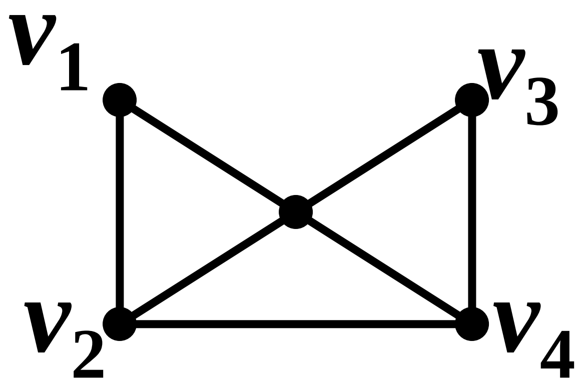
(1) 若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$，称G'为G的子图，记作$G'\subseteq G$，G为G'的母图

(2) 若$G'\subseteq G$且$V'=V$，则称G'为G的生成子图

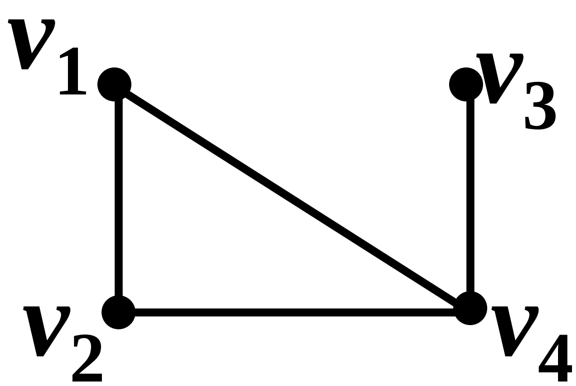
(3) 若$V'\subset V$或$E'\subset E$，称G'为G的真子图



真子图



生成子图



不是子图

子图（续）

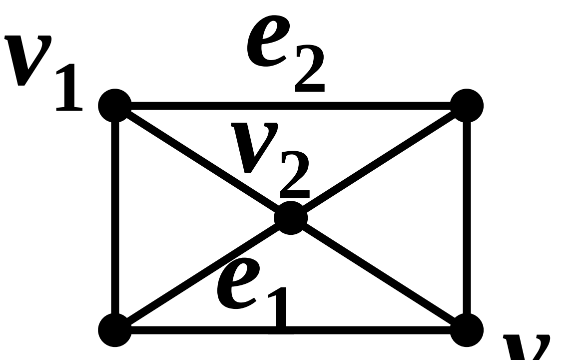
定义14.8 $G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$

(4) V'（$V'\subset V$且$V'\neq\varnothing$）的导出子图，记作$G[V']$

（以G中两个端点都在V'中的边组成边集E'）

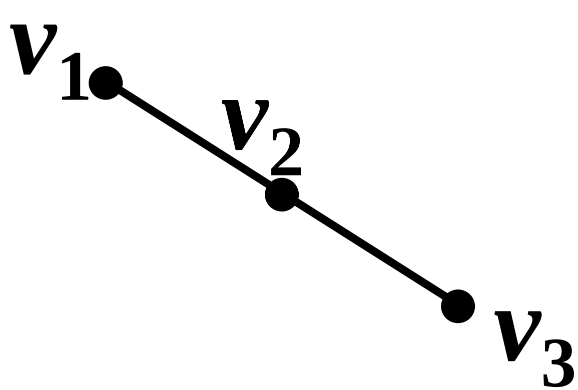
(5) E'（$E'\subset E$且$E'\neq\varnothing$）的导出子图，记作$G[E']$

（以E'中边关联的G中的顶点为顶点集V'）

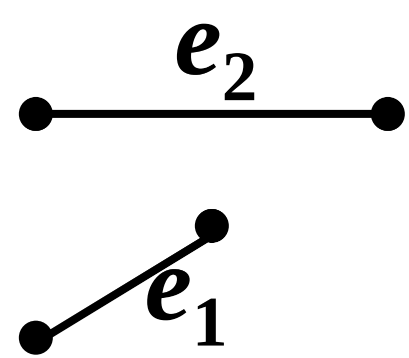


G

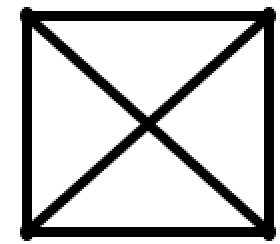
$G[\{v_1, v_2, v_3\}]$



$G[\{e_1, e_2\}]$

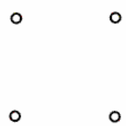
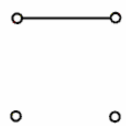
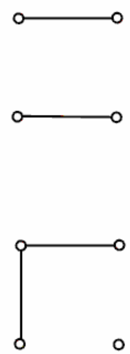
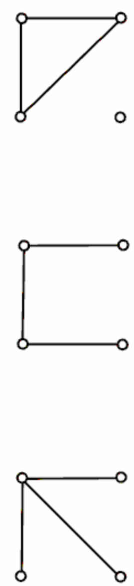
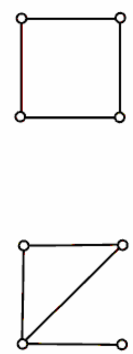
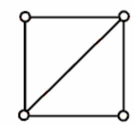
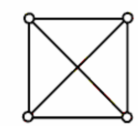


生成子图的实例



K_4

例2 画出K_4的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6
							

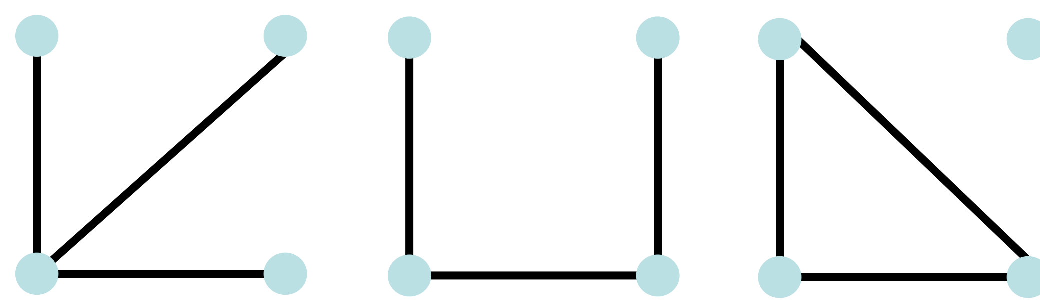
请画出 4 阶 3 条边的所有非同构的无向简单图？

解：

度数之和2*3=6
即将正整数6无序、可重复地拆分成4个非负整数、
每个数均大于等于0且小于等于3，并且奇数的个数为偶数.

则度数列为：

(a) 3,1,1,1
(b) 2,2,1,1
(c) 2,2,2,0
(d) 3,2,1,0 ×
(e) 3,3,0,0 ×



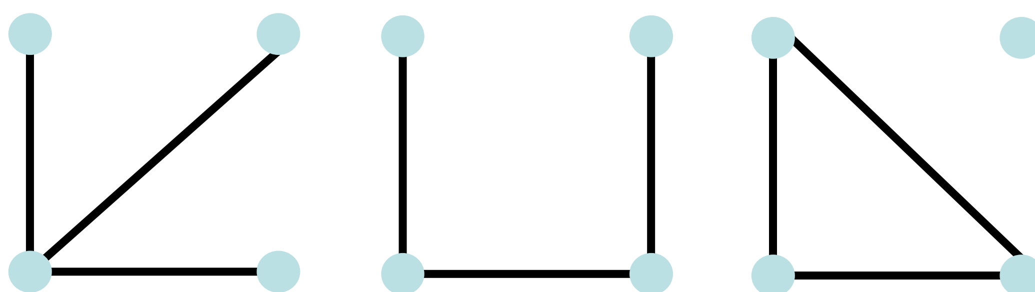
构造*n* 阶 *m* 条边的所有非同构的无(有)向简单图仍是未解决的难题！

补图

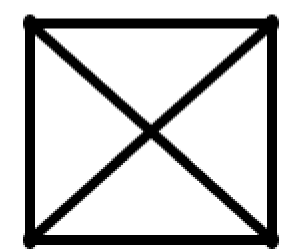
定义14.9 设$G=<V,E>$为n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的**补图**，记作$\overline{G}$.

若$G \cong \overline{G}$ ，则称G是**自补图**.（一个图与其补图同构）

例： 相对于K_4，求下面图中所有图的补图，并指出自补图.



(a)　　(b)　　(c)

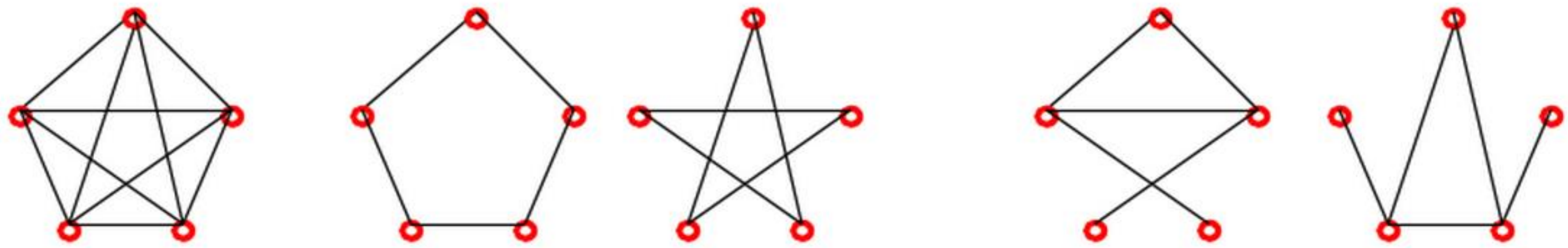


K_4

问： 自补图的边数有何特点？

问题

- 请给出5阶的自补图.



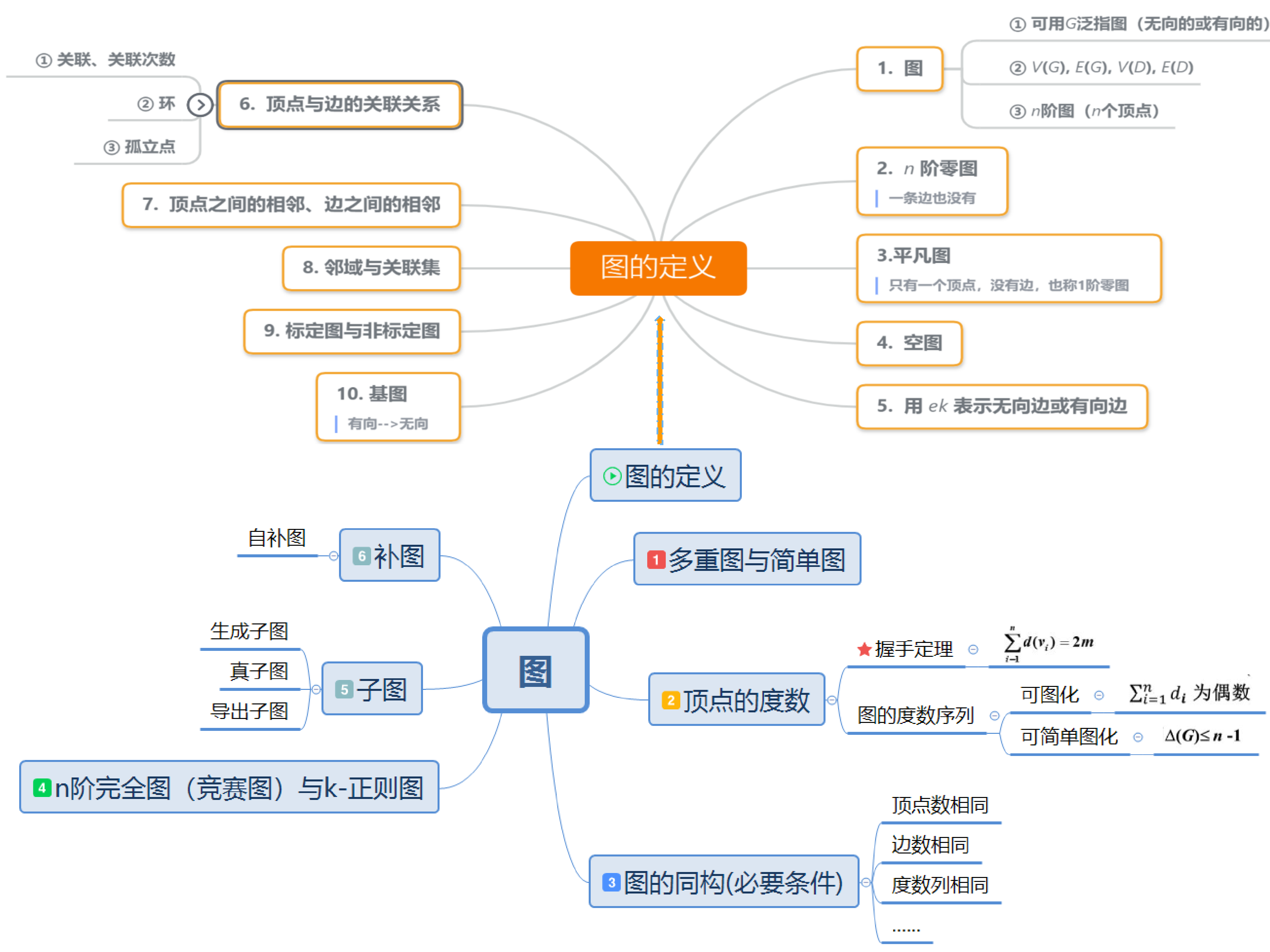
- 有6阶的自补图吗？

没有，因为K_6的边数是15，不是偶数

- 自补图的阶数n有何特点？

n=4k或4k+1（这样能保证其对应的完全图的边数m是偶数）

$$m=\frac{n(n-1)}{2}$$


图的定义
1. 图
① 可用G泛指图（无向的或有向的）
② V(G), E(G), V(D), E(D)
③ n阶图（n个顶点）
2. n 阶零图
一条边也没有
3.平凡图
只有一个顶点，没有边，也称1阶零图
4. 空图
5. 用 ek 表示无向边或有向边
6. 顶点与边的关联关系
① 关联、关联次数
② 环
③ 孤立点
7. 顶点之间的相邻、边之间的相邻
8. 邻域与关联集
9. 标定图与非标定图
10. 基图
有向-->无向
图
图的定义
1 多重图与简单图
2 顶点的度数
握手定理
$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$
图的度数序列
可图化
$\sum_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数
可简单图化
$\Delta(G) \leq n-1$
3 图的同构(必要条件)
顶点数相同
边数相同
度数列相同
……
4 n阶完全图（竞赛图）与k-正则图
5 子图
生成子图
真子图
导出子图
6 补图
自补图

第十四章 图的基本概念

主要内容

- 14.1图
- 14.2通路与回路
- 14.3图的连通性
- 14.4图的矩阵表示
- 14.5图的运算

14.2 通路与回路

定义14.11 给定图$G=\langle V,E\rangle$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列 $\Gamma= v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$， v_{i-1}, v_i 是 e_i 的端点.

(1) 通路与回路：Γ为通路；

若 $v_0=v_l$，Γ为回路，l 为回路长度.

(2) 简单通路与回路：所有边各异，Γ为简单通路，

又若$v_0=v_l$，Γ为简单回路

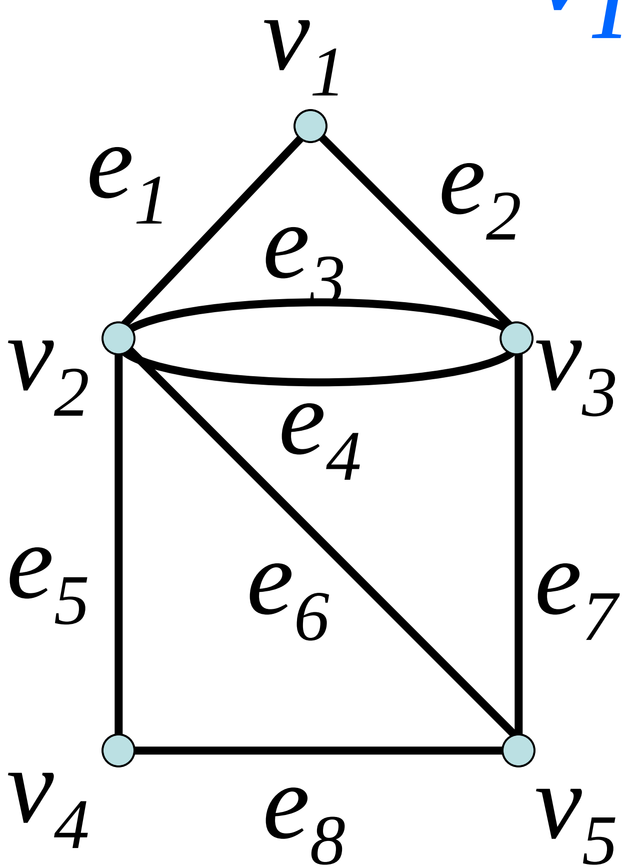
(3) 初级通路(路径)与初级回路(圈)：

Γ中所有顶点（除v_0和v_l可能相同之外）各异且所有边各异，则称Γ为初级通路(路径)，

若又$v_0=v_l$，则称Γ为初级回路(圈)

(4) 复杂通路与回路：有边重复出现

例



$v_1e_2v_3\,e_3v_2\,e_3v_3\,e_4v_2\,e_6v_5\,e_7\,v_3$

通路

$v_5e_8v_4\,e_5v_2\,e_6v_5\,e_7v_3\,e_4\,v_2$

简单通路（边异）

$v_4e_8v_5\,e_6v_2\,e_1v_1\,e_2v_3$

路径（初级通路）

（边异且点异）

$v_2e_1v_1\,e_2v_3e_7v_5e_6\,v_2$

圈（初级回路）

通路和回路

- 通路
  - 简单通路（边异）
  - 初级通路（边异&点异）
    - 路径
  - 复杂通路（有边重复）
- 回路
  - 简单回路（边异）
  - 初级回路（边异&点异）
    - 圈
  - 复杂回路（有边重复）

几点说明

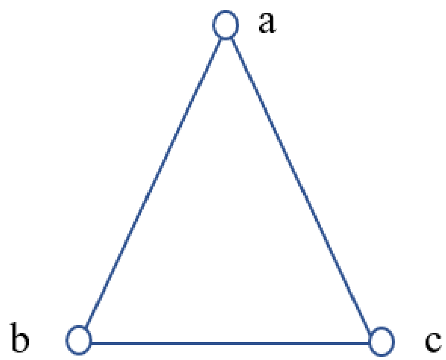
- 环（长为1的圈）的长度为1，两条平行边构成的圈长度为2，无向简单图中，圈长≥3，有向简单图中圈的长度≥2.
- 不同的圈（以长度≥3的为例）

  ① 定义意义下

  无向图：图中长度为l（l≥3）的圈，定义意义下为2l个

  有向图：图中长度为l（l≥3）的圈，定义意义下为l个

  ② 同构意义下：长度相同的圈均为1个



例：

同构意义下，K_3只有一个长为3的圈

定义意义下，K_3有6个长为3的圈

通路与回路的长度

定理14.5 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的通路.

推论 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的初级通路（路径）.

定理14.6 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的回路.

推论 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的简单回路，则一定存在长度小于或等于n的初级回路.

第十四章 图的基本概念

主要内容

- 14.1图
- 14.2通路与回路
- 14.3图的连通性
- 14.4图的矩阵表示
- 14.5图的运算

14.3 图的连通性

无向图的连通性

(1) 顶点之间的连通关系：$G=<V,E>$为无向图

① 若 v_i 与 v_j 之间有通路，则 $v_i \sim v_j$

② ~是V上的等价关系 $R=\{<u,v>|\ u,v \in V$且$u \sim v\}$

(2) G的连通性与连通分支

① 若$\forall u,v\in V$，$u\sim v$，则称G连通

② $V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$，称$G[V_1], G[V_2], \ldots,G[V_k]$为连通分支，其个数 $p(G)=k$ $(k\geq 1)$；

$k=1$，G连通

短程线与距离

(3) 短程线与距离

① u与v之间的短程线：$u\sim v$，u与v之间长度最短的通路

② u与v之间的距离：$d(u,v)$ — 短程线的长度

③ $d(u,v)$的性质：

$d(u,v)\geq 0$, $u\nsim v$时$d(u,v)=\infty$

$d(u,v)=d(v,u)$

$d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$

无向图的连通度

1. 删除顶点及删除边

$G-v$ ——从G中将v及关联的边去掉

$G-V'$——从G中删除V'中所有的顶点

$G-e$ ——将e从G中去掉

$G-E'$——删除E'中所有边

2. 点割集与边割集

定义14.16 $G=\langle V,E\rangle$, $V'\subset V$

V'为**点割集**——$p(G-V')>p(G)$且有极小性

v为**割点**——$\{v\}$为点割集

定义14.17 $G=\langle V,E\rangle$, $E'\subseteq E$

E'是**边割集**——$p(G-E')>p(G)$且有极小性

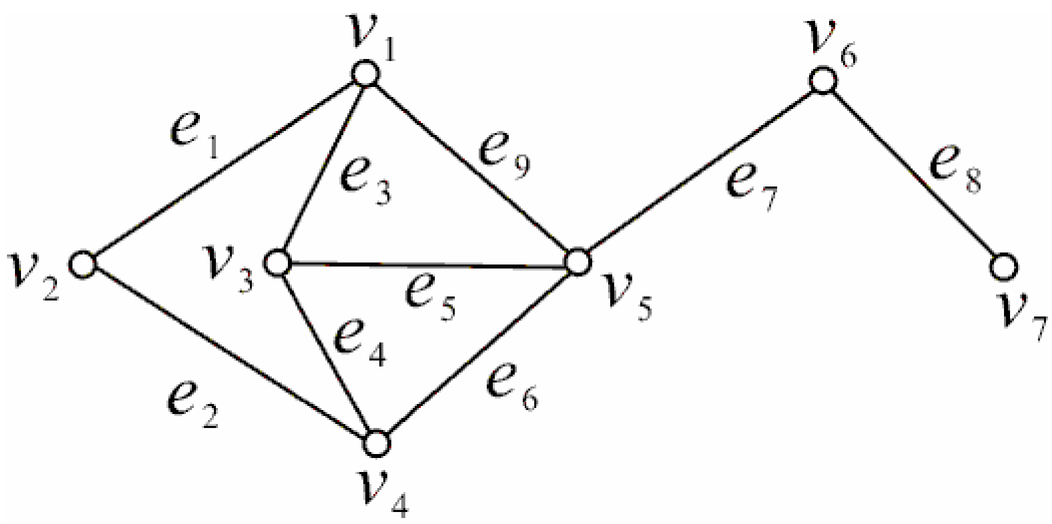
e是**割边**（桥）——$\{e\}$为边割集

点割集与割点

例3 $\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$是点割集，v_6是割点.

$\{v_2,v_5\}$是点割集吗？

$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$ 是边割集吗？



几点说明：

- K_n中无点割集，N_n中既无点割集，也无边割集，其中N_n为n阶零图.
- 若G 连通，E'为边割集，则 $p(G-E')=2$，V'为点割集，则 $p(G-V')\geq 2$

点连通度与边连通度

定义14.18 G为连通非完全图

点连通度— $\kappa(G) = \min\{\, |V'| \mid V'$为点割集 $\}$

规定 $\kappa(K_n) = n-1$

若G非连通，$\kappa(G) = 0$

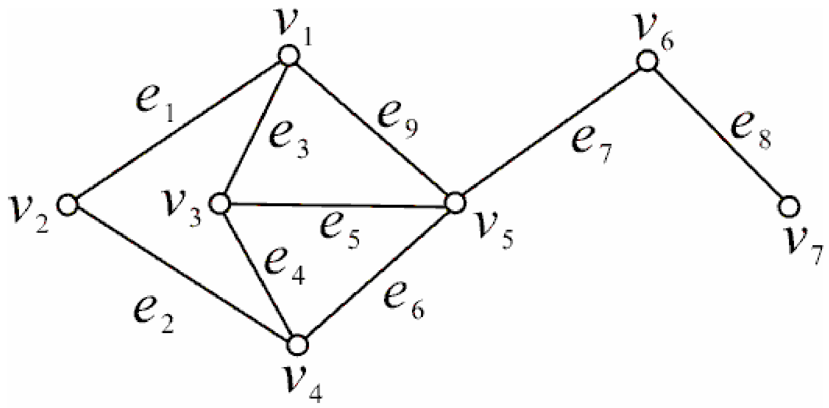
若 $\kappa(G)\geq k$，则称G为 k-连通图

定义14.19 设G为连通图

边连通度——$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E'$为边割集$\}$

若G非连通，则$\lambda(G) = 0$

若$\lambda(G)\geq r$，则称G是 r 边-连通图



图中，$\kappa=\lambda=1$，它是 1-连通图

和 1边-连通图

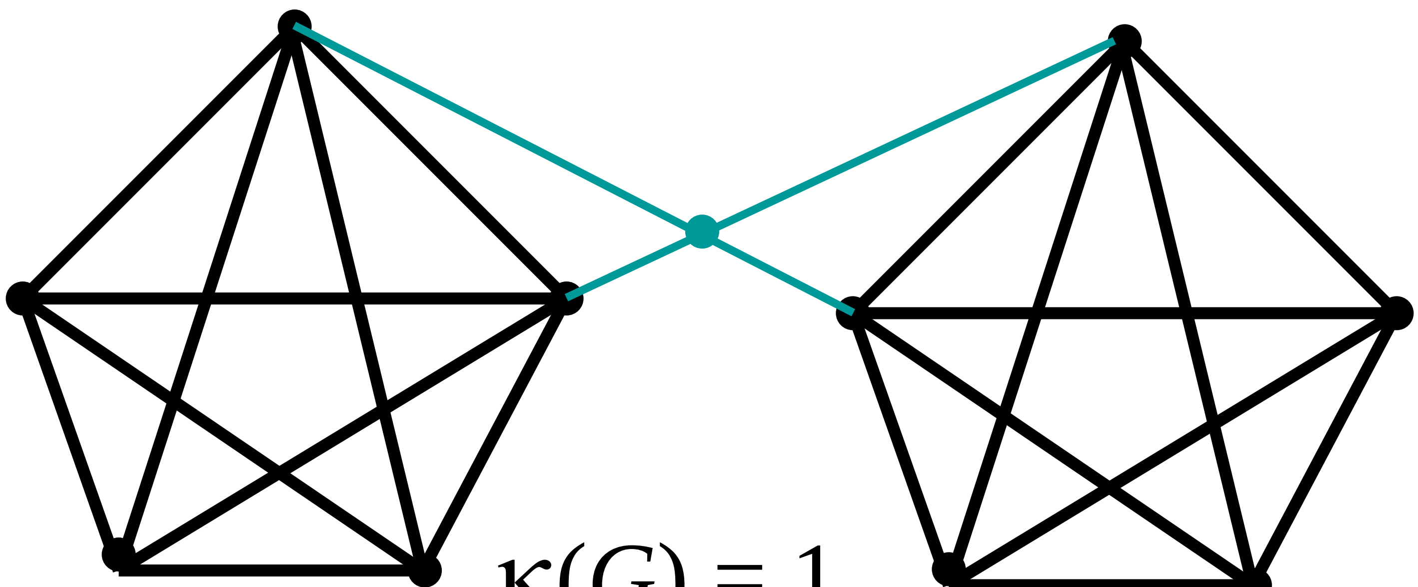
几点说明

- $\kappa(K_n) = \lambda(K_n) = n-1$
- G非连通，则 $\kappa=\lambda=0$
- 若G中有割点，则$\kappa=1$，若有桥，则$\lambda=1$
- 若$\kappa(G)=k$, 则G是1-连通图，2-连通图，…，k-连通图，但不是$(k+s)$-连通图，$s\geq 1$
- 若$\lambda(G)=r$, 则G是1-边连通图，2-边连通图，…，r-边连通图，但不是$(r+s)$-边连通图，$s\geq 1$
- κ, λ, δ之间的关系.

  定理14.7　$\kappa(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$

问题

- 请画出一个κ<λ<δ的无向简单图



$$\kappa(G)=1$$
$$\lambda(G)=2$$
$$\delta(G)=4$$

有向图的连通性

定义14.20 $D=<V,E>$为有向图

$v_i \to v_j$（v_i 可达 v_j）——v_i 到v_j 有通路

$v_i \leftrightarrow v_j$（v_i 与v_j 相互可达）

性质

$\to$ 具有自反性($v_i \to v_i$)、传递性

$\leftrightarrow$ 具有自反性、对称性、传递性

v_i 到v_j 的短程线与距离

类似于无向图中，只需注意距离表示法的不同

(无向图中$d(v_i,v_j)$，有向图中$d<v_i,v_j>$) 及 $d<v_i,v_j>$无对称性

有向图的连通性及分类

定义14.22 $D=<V,E>$为有向图

D弱连通(连通)——基图为无向连通图

D单向连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\to v_j$ 或 $v_j\to v_i$

D强连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\leftrightarrow v_j$

易知，强连通⇒单向连通⇒弱连通

判别法

定理14.8

D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理14.9

D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

扩大路径法

无向图中

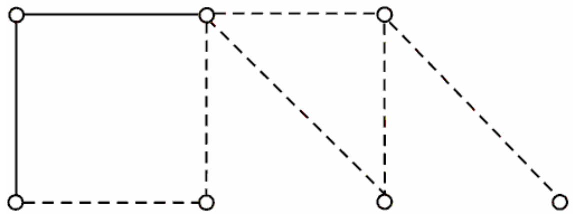
设$G=<V,E>$为 n 阶无向图，$E\neq\varnothing$. 设 Γ_l 为G中一条路径，若此路径的始点或终点与路径外的顶点相邻，就将它们扩到路径中来，继续这一过程，直到最后得到的路径的两个端点不与路径外的顶点相邻为止.

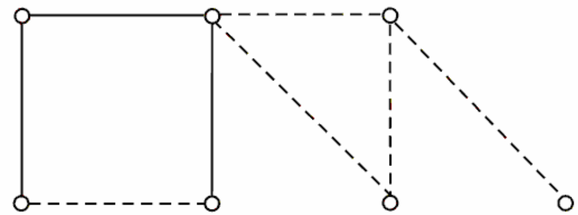
设最后得到的路径为Γ_{l+k}（长度为 l 的路径扩大成了长度为 $l+k$ 的路径），称Γ_{l+k}为“极大路径”，称使用此种方法证明问题的方法为“扩大路径法”.

有向图中类似讨论，只需注意，在每步扩大中保证有向边方向的一致性.

实例

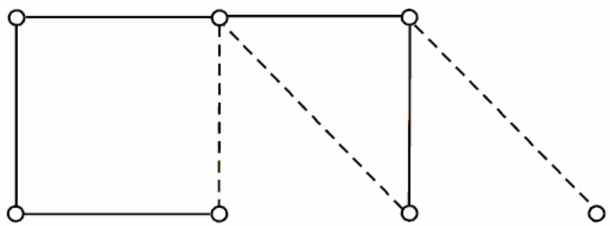
(1)

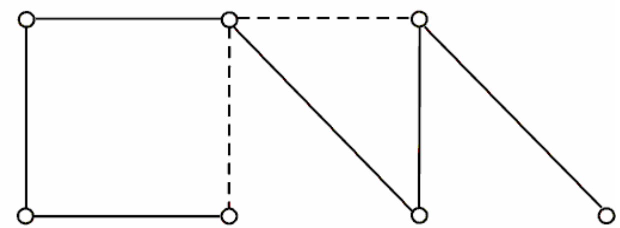




(2)

(3)





(4)

由某条路径扩大出的极大路径不惟一，极大路径不一定是图中最长的路径

上图中，(1)中实线边所示的长为2的初始路径Γ，(2),(3),(4)中实线边所示的都是它扩展成的极大路径.

还能找到另外的极大路径吗？

扩大路径法的应用

例4 设 G 为 n（$n\geq3$）阶无向简单图，$\delta\geq2$，证明G 中存在长度 $\geq\delta+1$ 的圈.

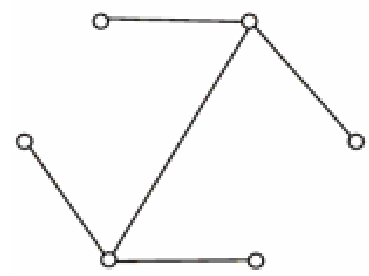
证： 设 $\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$ 是由初始路径 Γ_0 用扩大路径法得到的极大路径，则 $l\geq\delta$（为什么？）.

因为v_0不与 Γ外顶点相邻，又 $d(v_0)\geq\delta$，因而在 Γ上除 v_1外，至少还存在 $\delta-1$个顶点与 v_0相邻.

设 v_x是离 v_0最远的顶点，于是 $v_0v_1\ldots v_xv_0$为 G 中长度 $\geq\delta+1$ 的圈.

二部图

定义14.23 设 $G=<V,E>$为一个无向图，若能将 V 分成 V_1和V_2($V_1 \cup V_2=V$，$V_1 \cap V_2=\varnothing$)，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于V_1，另一个属于V_2，则称 G 为二部图 (或称二分图、偶图等)，称V_1和V_2为互补顶点子集，常将二部图G记为 $<V_1,V_2,E>$.

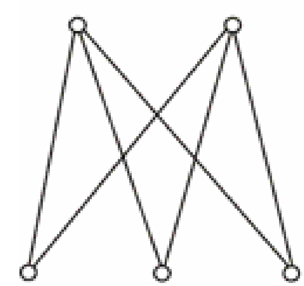


又若G是简单二部图，

V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻，

则称G为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，

其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$.

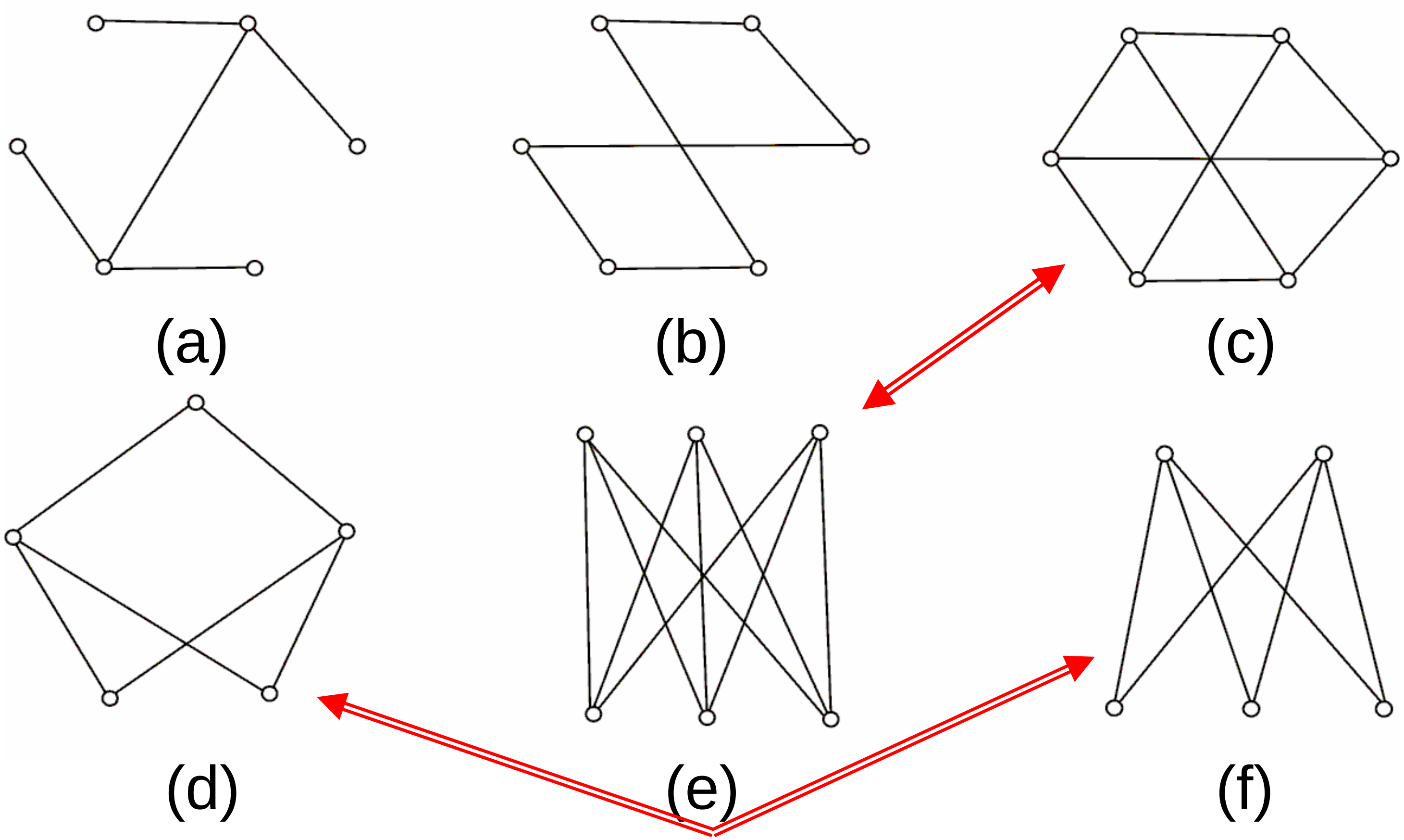


注意，n ($n\geq 2$)阶零图为二部图.

二部图的判别法

定理14.10 无向图*G*=<*V*,*E*>是二部图当且仅当*G*中无奇圈

由定理14.10可知以下各图都是二部图，哪些是完全二部图？哪些图是同构的？



第十四章 图的基本概念

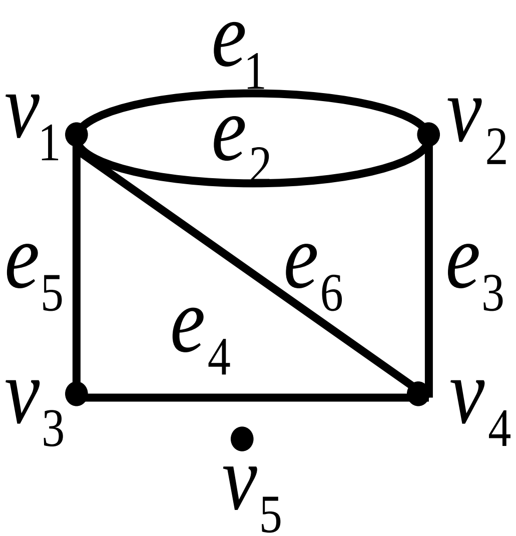
主要内容

- 14.1图
- 14.2通路与回路
- 14.3图的连通性
- 14.4图的矩阵表示
- 14.5图的运算

14.4 图的矩阵表示

无向图的关联矩阵（对图无限制）

定义14.24 无向图$G=<V,E>$，$|V|=n$，$|E|=m$，令 m_{ij}为 v_i 与 e_j 的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的关联矩阵，记为$M(G)$.



$$M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

无向图的关联矩阵的性质

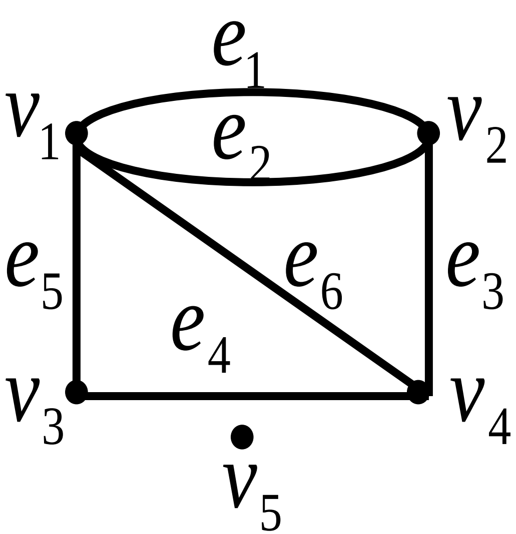
性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad (j = 1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) 平行边的列相同



$$M(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

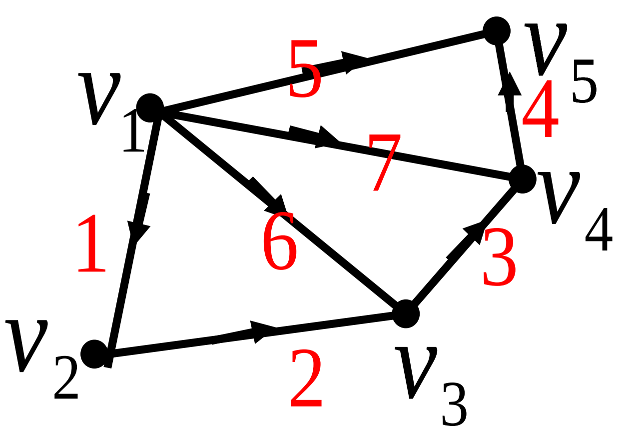
有向图的关联矩阵

有向图的关联矩阵（无环有向图）

定义14.25 有向图$D=<V,E>$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$,令

$$m_{ij}=\begin{cases} 1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点} \\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联} \\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为$M(D)$.



$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \\ M(D)= \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

有向图的关联矩阵的性质

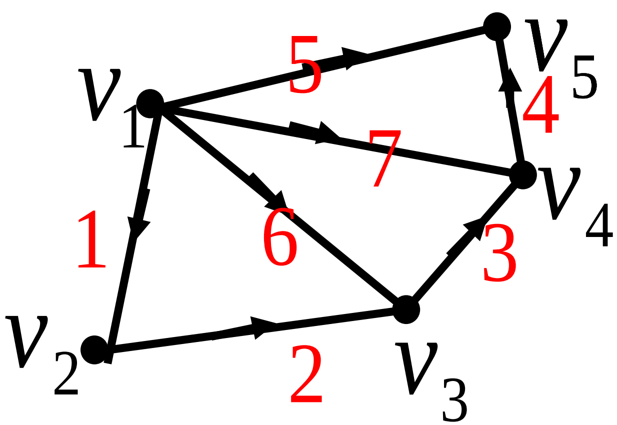
性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} (m_{ij} = 1) = d^{+}(v_i), \quad \sum_{j=1}^{m} (m_{ij} = -1) = d^{-}(v_i), \quad i = 1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 0$

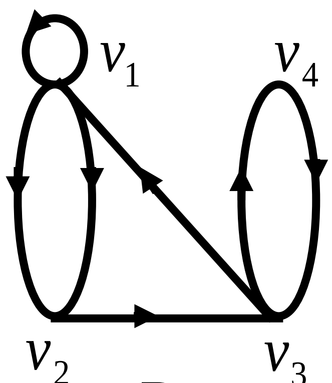
(4) 平行边对应的列相同



$$M(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

有向图的邻接矩阵（无限制）

定义14.26 设有向图$D=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令$a_{ij}^{(1)}$为顶点$v_i$邻接到顶点$v_j$边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$为$D$的**邻接矩阵**，记作$A(D)$，或简记为$A$.



D

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

性质 (1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i),\quad i=1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j),\quad j=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ——— D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ——— D中长度为1的回路数

邻接矩阵的应用

定理14.11 设 A为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为顶点集，则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为D中v_i 到v_j长度为 l 的通路数，其中

$a_{ii}^{(l)}$ 为v_i到自身长度为 l 的回路数，而

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l$（$l\geq1$），则

B_l中元素 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的通路数.

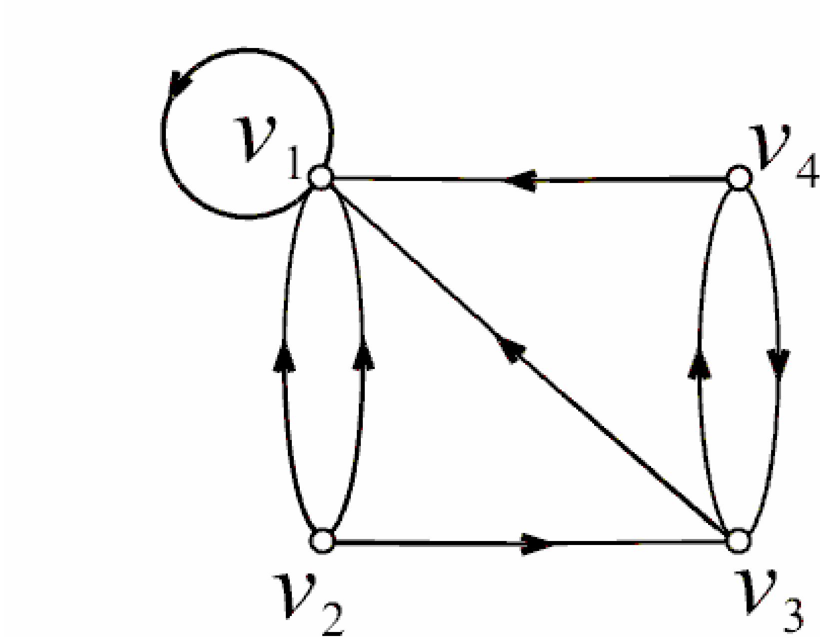
$\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的回路数

实例

例5 有向图D如图所示，求 A, A^2, A^3, A^4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

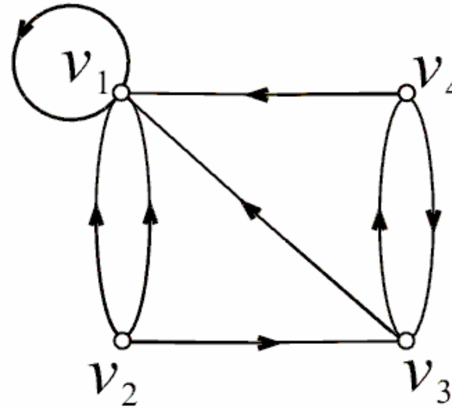
(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



实例求解

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$



(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？

(1) D中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路.

D中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路.

D中长度为3和4的通路分别为14和17条，回路分别为1与3条.

(2) D中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路.

有向图的可达矩阵（无限制）

定义14.27 设$D=\langle V,E\rangle$为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

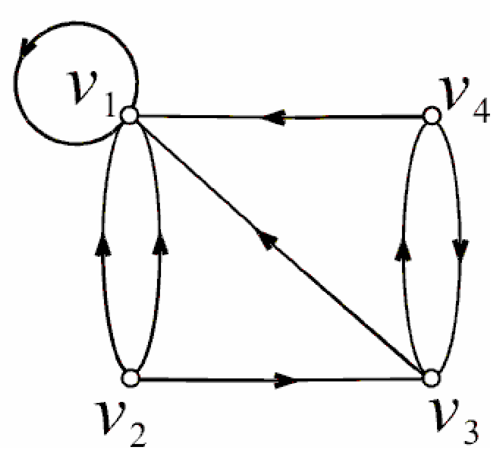
$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

由于$\forall v_i\in V$，$v_i\leftrightarrow v_i$，所以$P(D)$主对角线上的元素全为1.

由定义不难看出, D 强连通当且仅当 $P(D)$为全1矩阵.

下图所示有向图 D 的可达矩阵为



$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$

课堂练习

In graph theory, an adjacency matrix, A, is a way of representing which node...

In graph theory, an adjacency matrix, A, is a way of representing which nodes (or vertices) are connected. For a simple directed graph, each entry, a_{ij} is either 1 (if a direct path exists from node i to node j) or 0 (if no direct path exists from node i to node j). For example, consider the following graph and corresponding adjacency matrix. The entry a_{14} is 1 because a direct path exists from node I to node 4. However, the entry a_{41} is 0 because no path exists from node 4 to node 1. The entry a_{33} is 1 because a direct path exists from node 3 to itself. The matrix $B_k = A + A^2 + \cdots + A^k$ indicates the number of ways to get from node i to node j within k moves (steps).

Three-Click Rule An unofficial, and often contested, guideline for website design is to make all website content available to a user within three clicks. The webpage adjacency matrix for a certain website is given by $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Find B_3. Does this website adhere to the Three-Click Rule?

(b) Which page can be reached the most number of ways from page 1 within three clicks?

第十四章 图的基本概念

主要内容

- **14.1**图
- **14.2**通路与回路
- **14.3**图的连通性
- **14.4**图的矩阵表示
- **14.5**图的运算

图的运算

定义14.27 设图 $G_1=<V_1, E_1>$ 和$G_2=<V_2, E_2>$，

若$V_1\cap V_2=\varnothing$, 则称G_1与G_2是不交的;

若$E_1\cap E_2=\varnothing$, 则称G_1与G_2是边不交的或边不重的.

定义14.28 设$G_1=<V_1, E_1>$和$G_2=<V_2, E_2>$是不含孤立点的两图（同为无向图和有向图）

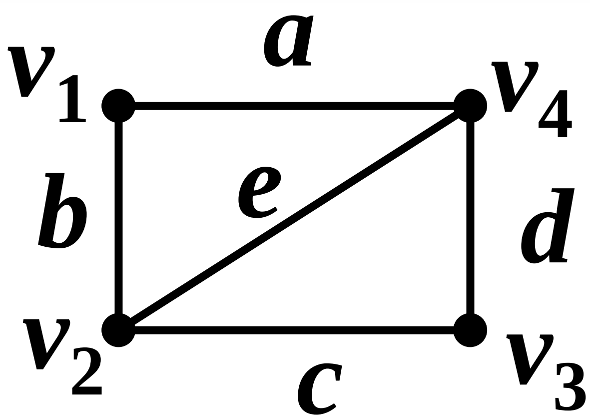
(1) 称以$V_1\cup V_2$为顶点集， 以$E_1\cup E_2$为边集的图为G_1与G_2的并图, 记作$G_1\cup G_2$;

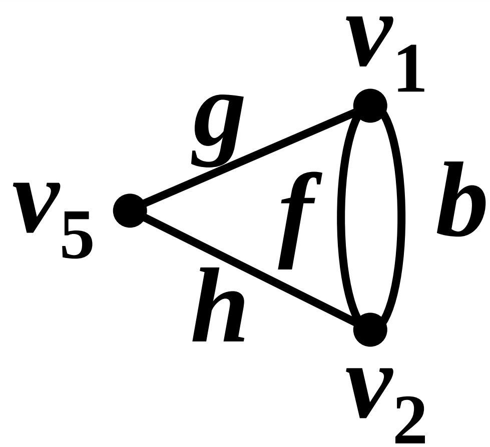
(2) 称以E_1-E_2为边集， 以E_1-E_2中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1 与G_2的差图, 记作G_1-G_2;

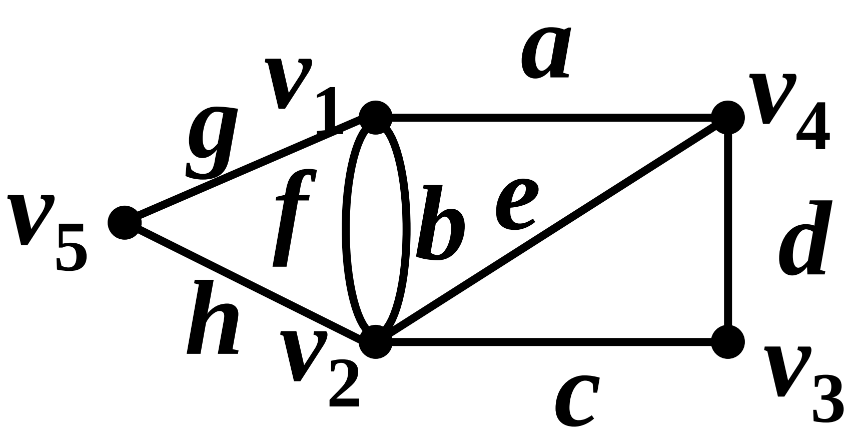
(3) 称以$E_1\cap E_2$为边集， 以$E_1\cap E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的交图, 记作$G_1\cap G_2$;

(4) 称以$E_1\oplus E_2$为边集， 以$E_1\oplus E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的环和, 记作$G_1\oplus G_2$.

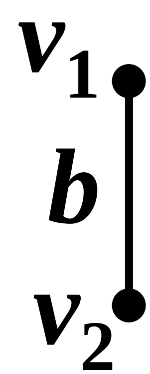
例







$G_1 \cup G_2$



$G_1 \cap G_2$

第十四章 图的基本概念（回顾）

- ch14图的基本概念
  - 14.1图
    - 图的定义
    - 1 多重图与简单图
    - 2 顶点的度数
    - 3 图的同构(必要条件)
    - 4 n阶完全图（竞赛图）、k-正则图
    - 5 子图
    - 6 补图
  - 14.2通路与回路
  - 14.3图的连通性
    - 无向图的连通性
    - 有向图的连通性
    - 二部图 $<V_1,V_2,E>$
  - 14.4图的矩阵表示
    - 无向图的关联矩阵
    - 有向图的关联矩阵
    - 有向图的邻接矩阵
  - 14.5图的运算