第二部分 集合论


离散数学
1数理逻辑
ch1命题逻辑的基本概念
ch2命题逻辑的等值演算
ch3命题逻辑的推理理论
ch4一阶逻辑的基本概念
ch5一阶逻辑的等值演算和推理
2集合论
ch6 集合代数
ch7二元关系
ch8 函数
3代数结构
ch9 代数系统
ch10 群与环
ch11 格与布尔代数
4图论
ch14图的基本概念
ch15欧拉图&哈密顿图
ch16 树
ch17平面图
ch18支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

第二部分 集合论

- 2集合论
  - ch6 集合代数
    - 6.1集合的基本概念
    - 6.2集合的运算
    - 6.3有穷集的计数
    - 6.4集合恒等式
  - ch7二元关系
    - 7.1有序对与笛卡儿积
    - 7.2二元关系的定义与表示法
    - 7.3关系的运算
    - 7.4关系的性质
    - 7.5关系的闭包
    - 7.6等价关系与划分
    - 7.7偏序关系
  - ch8 函数
    - 8.1 函数的定义与性质
    - 8.2 函数的复合与反函数
    - 8.3 双射函数与集合的基数

第六章 集合代数

主要内容

- 集合的基本概念

  属于、包含

  幂集、空集

  文氏图等

- 集合的基本运算

  并、交、补、差等

- 集合恒等式

  集合运算的算律、恒等式的证明方法

6.1 集合的基本概念

1. 集合定义

集合没有精确的数学定义

理解：由一些个体构成的整体称为集合，称这些个体为集合的元素

常见的数集：N, Z, Q, R, C 等分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合

2. 集合表示法

枚举法----通过列出全体元素来表示集合

谓词表示法----通过谓词概括集合元素的性质

实例：

枚举法 自然数集合 N={0,1,2,3,…}

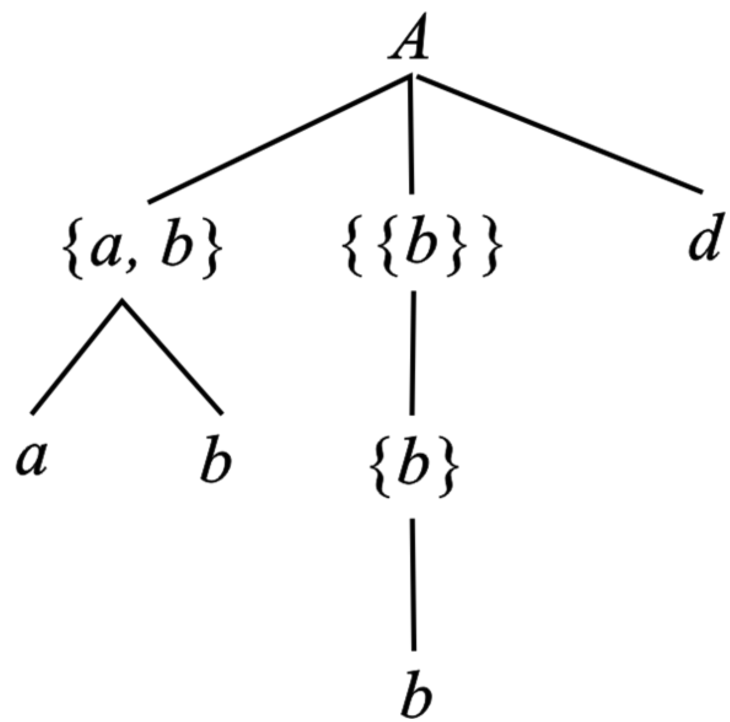
谓词法 $S=\{ x \mid x \in R \wedge x^2-1=0\}$

元素与集合

1. 集合的元素具有的性质
   无序性：元素列出的顺序无关
   相异性：集合的每个元素只计数一次
   确定性：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素
   任意性：集合的元素也可以是集合

2. 元素与集合的关系
   隶属关系：$\in$或者$\notin$

3. 集合的树型层次结构



$d \in A$, $a \notin A$

集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq, =, \nsubseteq, \neq, \subset, \not\subset$

定义6.1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

定义6.2 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

定义6.3 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

注意 $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

实例

$$\{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}$$

$$\{a,b\} \subset \{a,b,c\}$$

$$\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c\}$$

$$\{a,b,c\} \not\subset \{a,b,c\}$$

$$\{a,b\} \not\subseteq \{a,c,d,e\}$$

空集、全集和幂集

定义6.4 空集 $\varnothing$：不含有任何元素的集合

实例： $\{ x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \}$

定理6.1 空集是任何集合的子集。

证 对于任意集合A，

$$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \to x \in A) \Leftrightarrow T \text{ (恒真命题)}$$

推论 $\varnothing$是唯一的

例 判断下列集合间的关系

1. $\varnothing$与 $\{\varnothing\}$的关系

- $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$

2. $\varnothing$与$\varnothing$的关系

- $\varnothing \subseteq \varnothing$
- $\varnothing \supseteq \varnothing$
- $\varnothing = \varnothing$

3. $\{\varnothing\}$与$\{\{\varnothing\}\}$的关系

- $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$

空集、全集和幂集

定义6.5 幂集：$P(A)=\{ x \mid x \subseteq A \}$

实例： $P(\{a,b\})=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

计数：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

$$S_1 = \{a\},$$
$$P(S_1) = \{\varnothing, \{a\}\} = \{\varnothing, S_1\}$$

$$S_3 = \{a, b, c\}$$
$$P(S_3) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

例 (续)

$$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

$$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$P(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) =$$

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

幂集中元素的个数

$$S_3 = \{a, b, c\}$$

$$P(S_3) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

将 S_3 的子集分类:

0元子集: $\varnothing$ $\quad C_3^0$

1元子集: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ $\quad C_3^1$

2元子集: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ $\quad C_3^2$

3元子集: $\{a, b, c\}$ $\quad C_3^3$

幂集中元素的个数（续）

$S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

将 S 的子集分类:

0元子集: $\varnothing$ $\quad C_n^0$

1元子集: $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$ $\quad C_n^1$

2元子集: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}$ $\quad C_n^2$

3元子集: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \ldots,$

$\{n-2, n-1, n\}$ $\quad C_n^3$

n元子集: $\{1, 2, \ldots, n\}$ $\quad C_n^n$

$$|P(S)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

幂集中元素的个数（续）

$$|P(S)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

因为 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k}$

令 $x = y = 1$, $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

如果有限集合 A 有 n 个元素，则其幂集有 2^n 个元素。

空集、全集和幂集

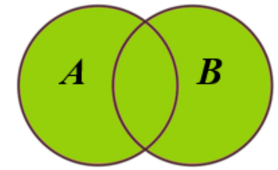
定义6.6 全集 E：包含了所有集合的集合

全集具有相对性：与问题有关，不存在绝对的全集

6.2 集合的运算

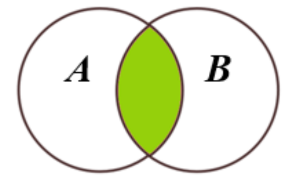
初级运算

集合的基本运算有



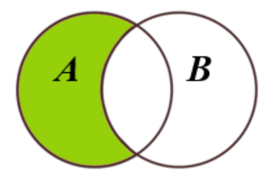
$A \cup B$

定义6.7 并 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



$A \cap B$

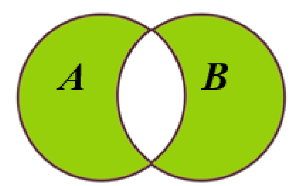
交 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



$A-B$

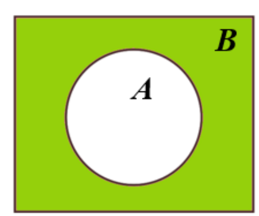
相对补 $A-B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

定义6.8 对称差 $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$



$A \oplus B$

定义6.9 绝对补 $\sim A = E-A$



$\sim A$

几点说明

- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \}$

  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{ x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n \}$

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

- $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$

广义运算

1. 集合的广义并与广义交

定义6.10 广义并： 设A为集合，A中的元素的元素构成的集合

$$\cup A = \{\, x \mid \exists z\,(\, z \in A \wedge x \in z\,)\}$$

广义交： 设A为非空集合，A中的所有元素的公共元素构成的集合

$$\cap A = \{\, x \mid \forall z\,(\, z \in A \rightarrow x \in z\,)\}$$

实例

$\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$

$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$

$\cup\{\{a\}\}=\{a\}$， $\cap\{\{a\}\}=\{a\}$

关于广义运算的说明

2. 广义运算的性质

(1) $\cup\varnothing=\varnothing$，$\cap\varnothing$无意义

(2) 广义运算减少集合的层次（括弧减少一层）

(3) 广义运算的计算：一般情况下可以转变成初级运算

$$\cup\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$$

$$\cap\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$$

3. 引入广义运算的意义

可以表示无数个集合的并、交运算，例如

$$\cup\{\{x\} \mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$$

这里的 **R** 代表实数集合.

运算的优先权规定

一类运算：广义并，广义交，幂集，绝对补，
运算由右向左进行

二类运算：初级运算$\cup$, $\cap$, $-$, $\oplus$，优先顺序由括号确定

混合运算：一类运算优先于二类运算

例1 $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$，计算$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$.

解：

$$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$$
$$=\cap\{a,b\}\cup(\cup\{a,b\}-\cup\{a\})$$
$$=(a\cap b)\cup((a\cup b)-a)$$
$$=(a\cap b)\cup(b-a)=b$$

有穷集合元素的计数

1. 文氏图法

2. 包含排斥原理

定理6.2 设集合S上定义了n条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集A_i, 那么集合中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}|=|S|-\sum_{1\le i\le n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

推论 S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\ldots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

实例

例2 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个？

解 方法一：文氏图

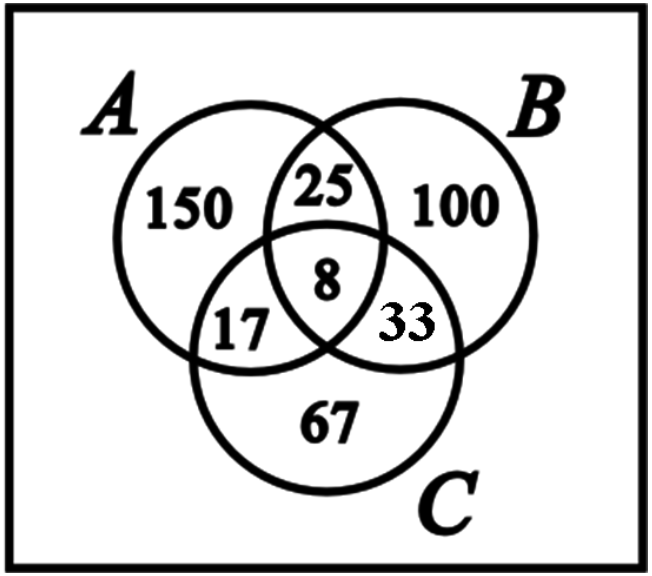
定义以下集合：

$S=\{ x \mid x \in Z \wedge 1 \le x \le 1000\}$

$A=\{ x \mid x \in S \wedge x$可被5整除$\}$

$B=\{ x \mid x \in S \wedge x$可被6整除$\}$

$C=\{ x \mid x \in S \wedge x$可被8整除$\}$



画出文氏图，然后填入相应的数字，解得

$N=1000-(200+100+33+67)$

$=600$

实例

方法二

$|S| = 1000$

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200,\ \ |B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166,\ \ |C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$

$|A\cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$

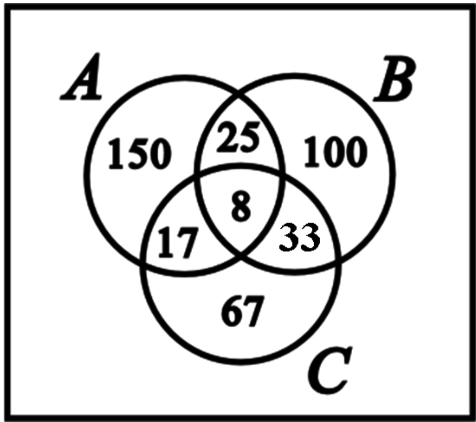
$|A\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$$

$$= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$$



6.3 集合恒等式

集合算律

1. 只涉及一个运算的算律：

交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

集合算律

2． 涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=$ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=$ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)$ $=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

集合算律

3. 涉及补运算的算律：

DM律，双重否定律

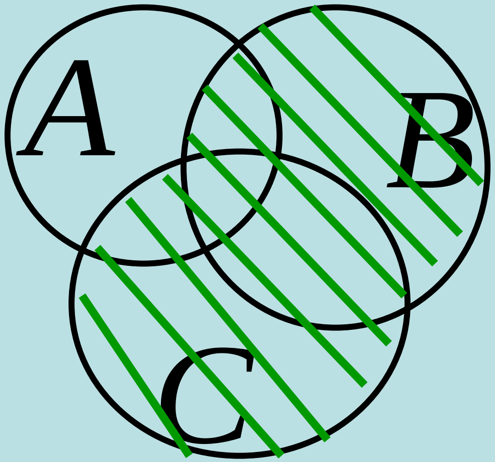
	$-$	$\sim$
D.M律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

集合算律

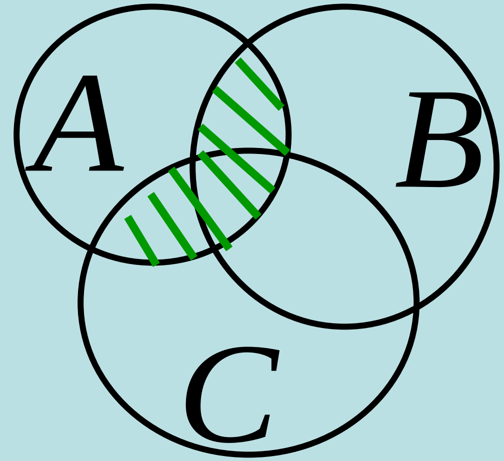
4. 涉及全集和空集的算律：
补元律、零律、同一律、否定律

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap{\sim}A=\varnothing$	$A\cup{\sim}A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	${\sim}\varnothing=E$	${\sim}E=\varnothing$

试证 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

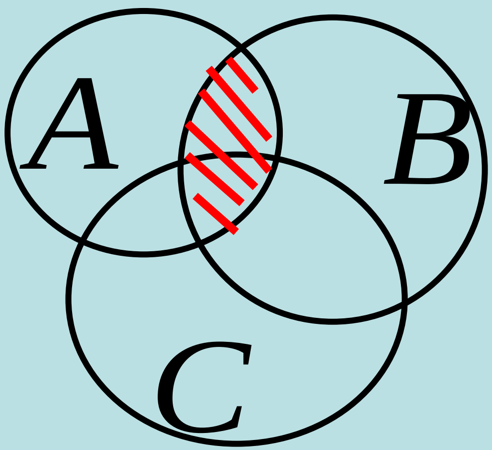


$B \cup C$

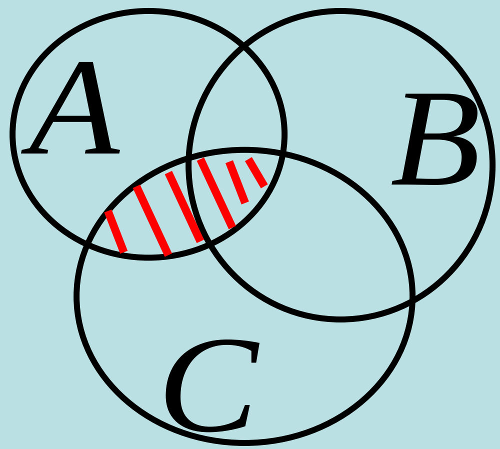


$A \cap (B \cup C)$

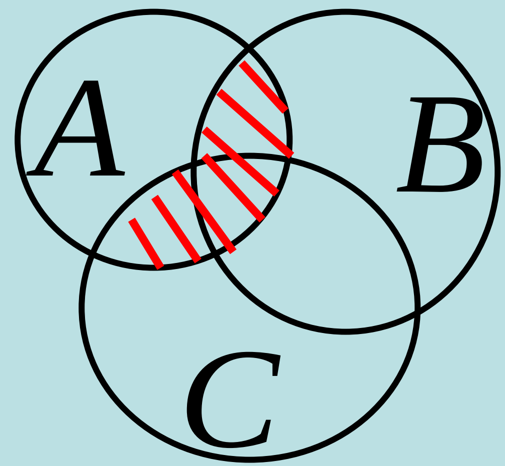
文氏图相等



$A \cap B$

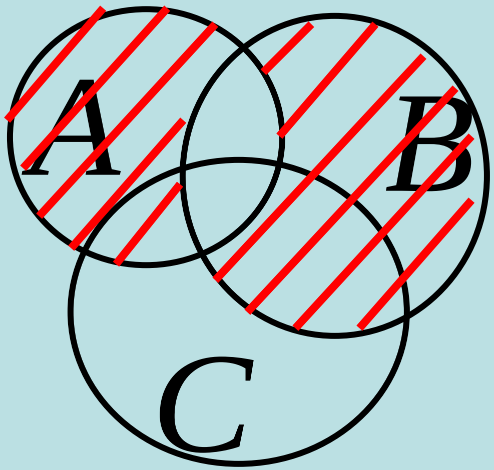


$A \cap C$

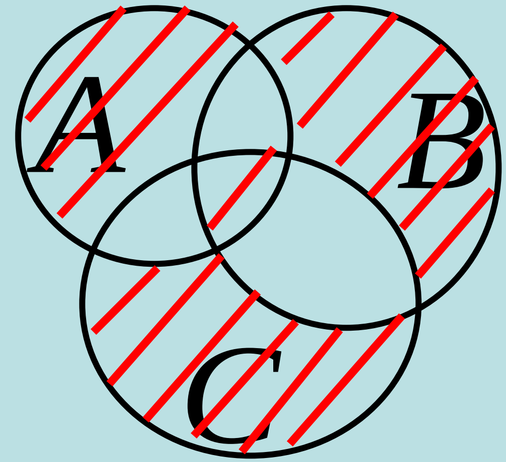


$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

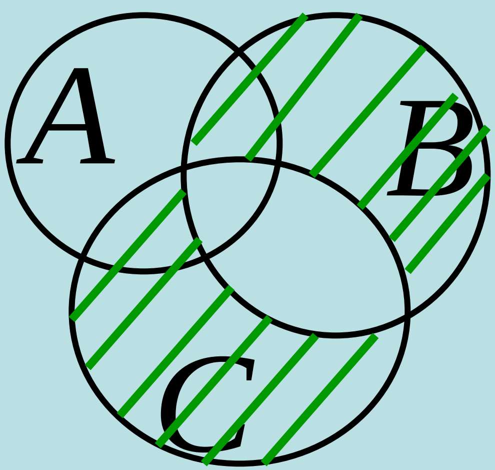
试证 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$



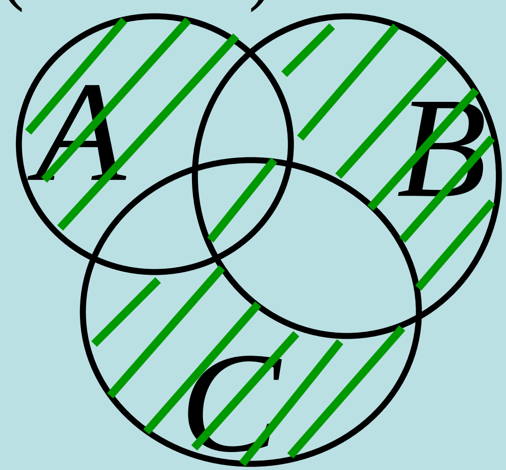
$A \oplus B$



$(A \oplus B) \oplus C$



$B \oplus C$



$A \oplus (B \oplus C)$

文氏图相等

集合证明题

证明方法：命题演算法、等式置换法

命题演算证明法的书写规范 (以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证$X\subseteq Y$

任取x， $x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$

(2) 证$X=Y$

方法一 分别证明 $X\subseteq Y$ 和 $Y\subseteq X$

方法二

任取x，$x\in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的

集合等式的证明

方法一：命题演算法

例3 证明$A\cup(A\cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$$
\begin{aligned}
& x\in A\cup(A\cap B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\vee x\in A\cap B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge x\in E)\vee(x\in A\wedge x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(x\in E\vee x\in B) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A
\end{aligned}
$$

因此得 $A\cup(A\cap B) = A$.

集合等式的证明

方法一：命题演算法

例4 证明 $A-B = A\cap\sim B$

证 任取x,

$$
\begin{aligned}
& x\in A-B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge x\notin B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge x\in\sim B \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\cap\sim B
\end{aligned}
$$

因此得 $A-B = A\cap\sim B$

等式置换法

方法二：等式置换法

例5 假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立，证明吸收律.

证 $A\cup(A\cap B)$

$= (A\cap E)\cup(A\cap B)$ （同一律）

$= A\cap(E\cup B)$ （分配律）

$= A\cap(B\cup E)$ （交换律）

$= A\cap E$ （零律）

$= A$ （同一律）

包含等价条件的证明

例6 证明 $A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

①　②　③　④

证明思路:

- 确定问题中含有的命题：本题含有命题 ①, ②, ③, ④
- 确定命题间的关系（哪些命题是已知条件、哪些命题是要证明的结论）：本题中每个命题都可以作为已知条件，每个命题都是要证明的结论
- 确定证明顺序：①⇒②，②⇒③，③⇒④，④⇒①
- 按照顺序依次完成每个证明（证明集合相等或者包含）

证明

证明 $A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

① ② ③ ④

证 ①⇒②

任取x，

$x\in A \Rightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in A\cup B \Rightarrow x\in B$（因为 $A\cup B=B$ ）

综合上述②得证.

②⇒③

显然$A\cap B\subseteq A$， 下面证$A\subseteq A\cap B$

任取x，

$x\in A \Rightarrow x\in A\wedge x\in A \Rightarrow x\in A\wedge x\in B \Rightarrow x\in A\cap B$（因为 $A\subseteq B$ ）

综合上述③得证.

证明（续）

证明 $A\cup B=B \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

① ② ③ ④

③$\Rightarrow$④

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么知道$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

综合上述④得证.

④$\Rightarrow$①

$$A\cup B = (A-B)\cup B = \varnothing\cup B = B \text{ (因为}A-B=\varnothing\text{)}$$

综合上述①得证.

第六章 集合代数（回顾）

主要内容

- 集合的基本概念

  属于、包含

  幂集、空集

  文氏图等
- 集合的基本运算

  并、交、补、差等
- 集合恒等式

  集合运算的算律、恒等式的证明方法