第13讲 10-1~10-6 频率响应

多频正弦稳态电路 谐振

第十章　频率响应
多频正弦稳态电路

§10-2 再论阻抗和导纳

基本元件的阻抗：$Z_R = R$， $Z_L = j\omega L$， $Z_C = -j\dfrac{1}{\omega C}$

单口网络的阻抗： $Z(j\omega) = R(\omega) + j\,X(\omega)$

电阻分量

电抗分量

频率的量变可引起电路的质变，如：

RLC串联电路阻抗 $Z = R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}$

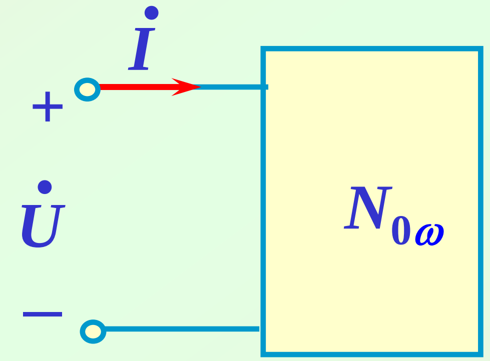
当 $\omega < \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 时，电路呈容性；

当 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 时，电路呈阻性；

当 $\omega > \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 时，电路呈感性。

Z 可看作激励电流$1\angle 0^\circ$A所产生的电压响应。

$$Z(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

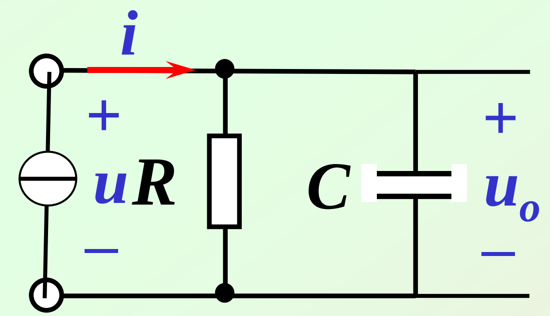


频率响应：电路响应与激励频率的关系

$$Z(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)=|Z(\mathrm{j}\omega)|\angle\varphi_Z(\omega)$$

$$\left.\begin{array}{ll}|Z(\mathrm{j}\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)} & \text{—— 幅频特性}\\ \varphi_Z(\omega)=\arctan\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)} & \text{—— 相频特性}\end{array}\right\}\text{频率响应}$$

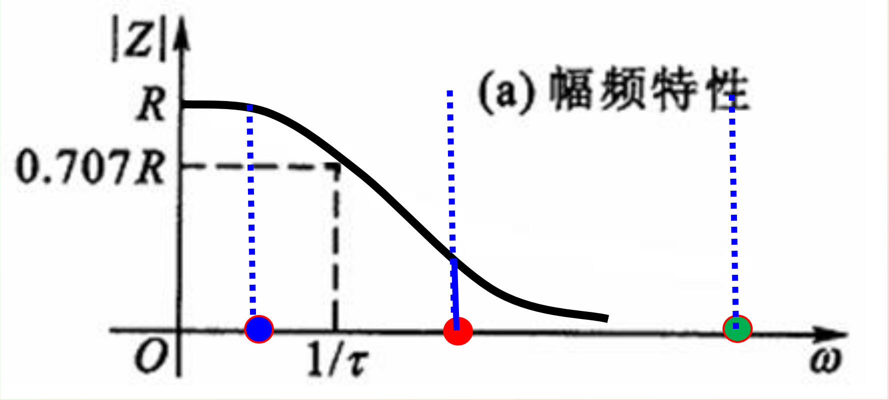
例 求下图所示RC并联电路的输入阻抗，并绘出它的幅频特性和相频特性曲线。



解：输入阻抗为

$$Z(\mathrm{j}\omega)=\frac{R\times\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{R}{1+\mathrm{j}\omega RC}=\frac{R(1-\mathrm{j}\omega RC)}{1+(\omega RC)^2}\Omega$$

幅频特性为：$|Z|=\dfrac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$



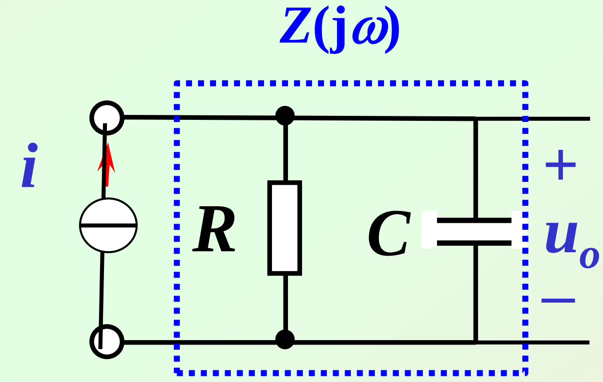
$\omega=0$时，$|Z|=R$；

$\omega\to\infty$时，$|Z|\to 0$

$\omega=\dfrac{1}{RC}=\dfrac{1}{\tau}$时，$|Z|=\dfrac{R}{\sqrt{2}}=0.707R$

对不同频率的信号电流，输出电压只含直流和低频信号。

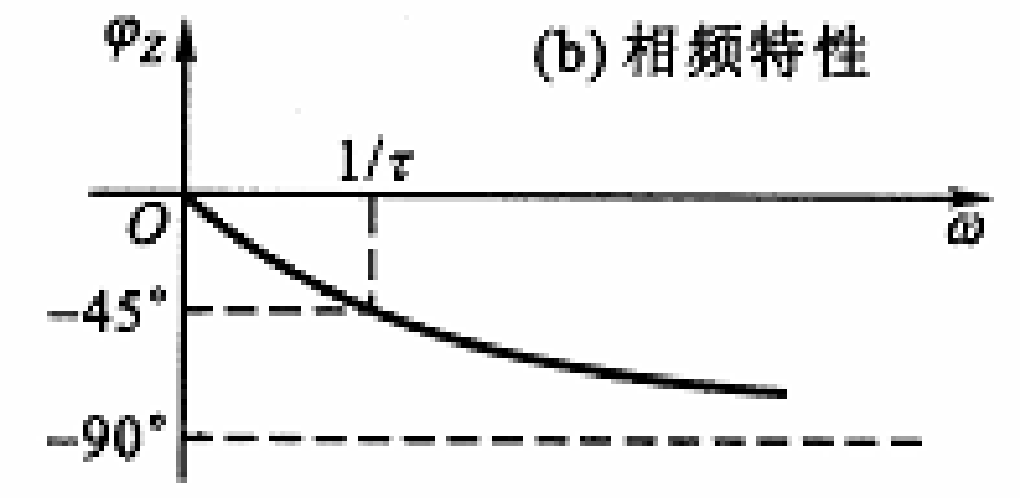
相频特性为：$\varphi_Z = -\arctan(\omega RC)$



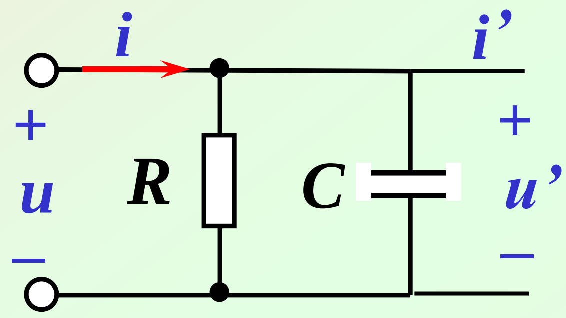
$\omega=0$时，$\varphi_Z = 0$ ；

$\omega\to\infty$时， $\varphi_Z \to -\dfrac{\pi}{2}$ ；

$\omega = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{\tau}$ 时，$\varphi_Z = -\dfrac{\pi}{4}$



容性电路的电压总是滞后于电流的。



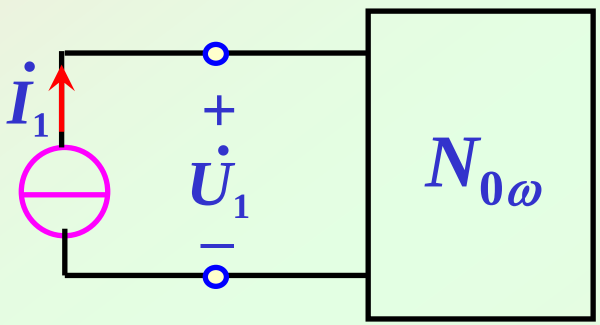
$$Z(j\omega) = \frac{u}{i}$$

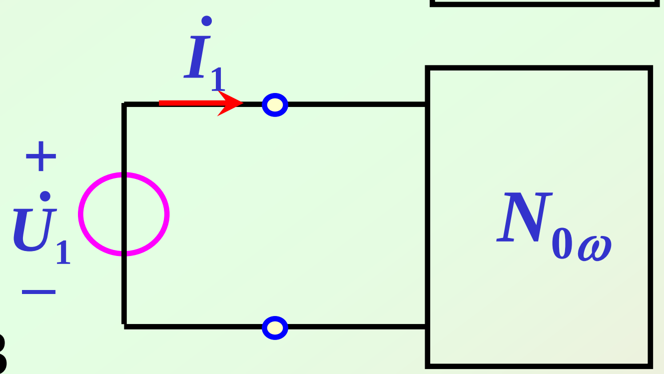
§10-3 正弦稳态网络函数

1.网络函数： 单一激励时，响应相量与激励相量之比。

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\text{响应相量}}{\text{激励相量}}$$

2.策动点函数： 同一端口上响应相量与激励相量的比称为策动点函数或称驱动点函数。



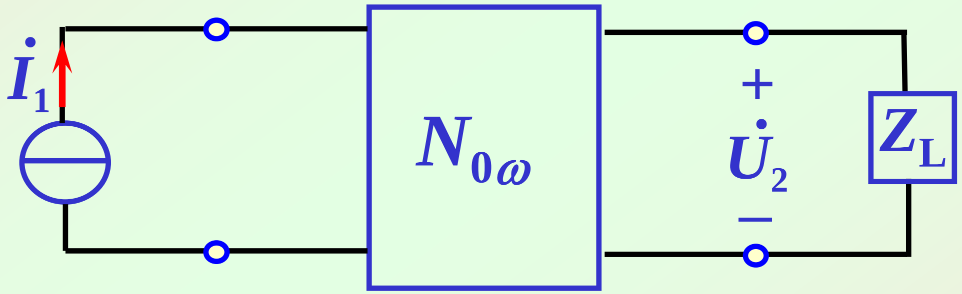


$$\left.\begin{array}{c} Z(j\omega)=\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \\ \text{策动点阻抗} \\ \\ Y(j\omega)=\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \\ \text{策动点导纳} \end{array}\right\}\text{策动点函数}$$

3.转移函数：不同端口上响应相量与激励相量之比称为转移函数。

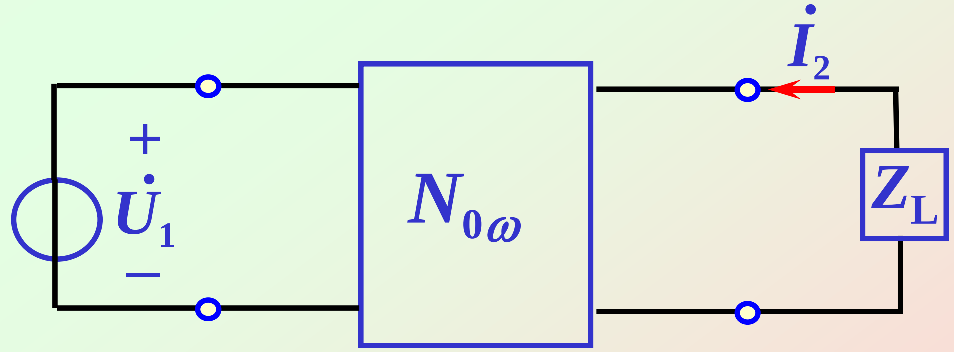
(1) 转移阻抗

$$Z_T(j\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}$$



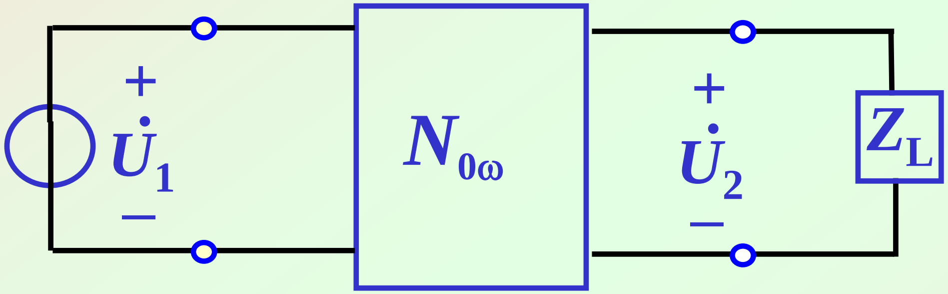
(2) 转移导纳

$$Y_T(j\omega)=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}$$



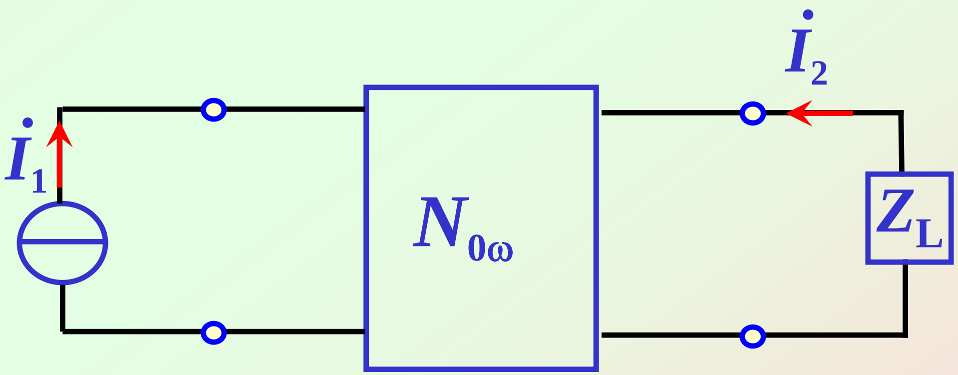
(3) 电压转移函数

$$A_u(j\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$$



(4) 电流转移函数

$$A_i(j\omega)=\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$$

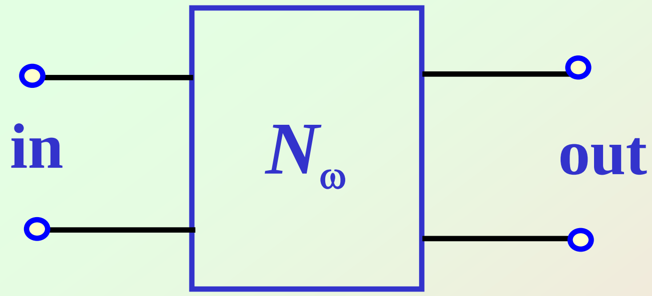


4. 网络函数的求法

根据相量模型，可选择用串联分压，并联分流，支路电流法，节点分析法，网孔分析法，叠加原理，戴维南定理和诺顿定理等等各种方法。

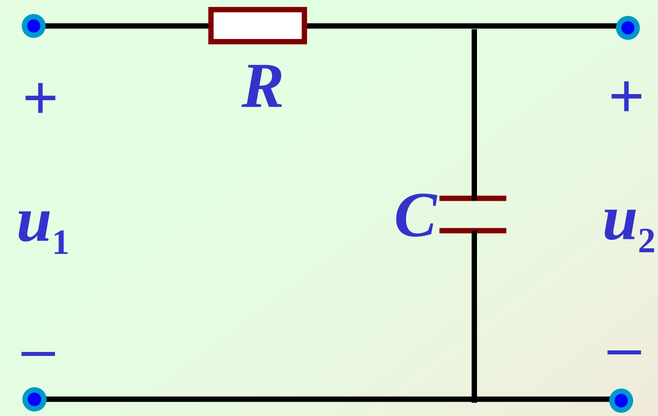
5. 滤波电路

有选择地使某一段频率范围的信号通过或者抑制的四端网络。



低通滤波电路

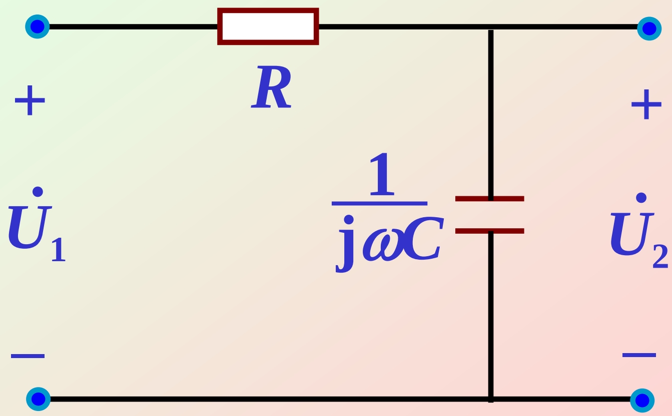
低通滤波电路可使低频信号较少损失地传输到输出端，高频信号得到有效抑制。



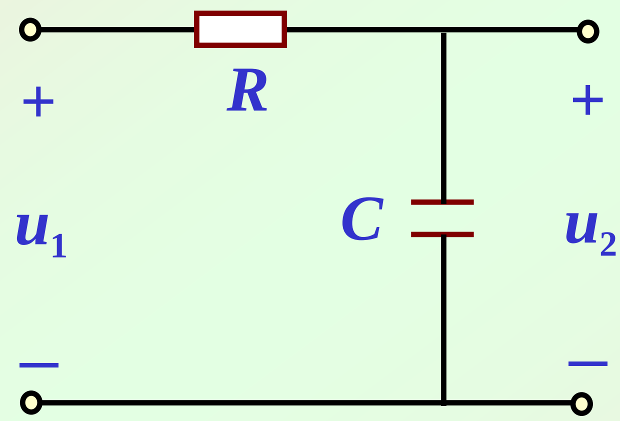
电压转移函数

$$H_u=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega CR}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\angle-\arctan(\omega CR)$$



幅频特性 $|H_u| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}$



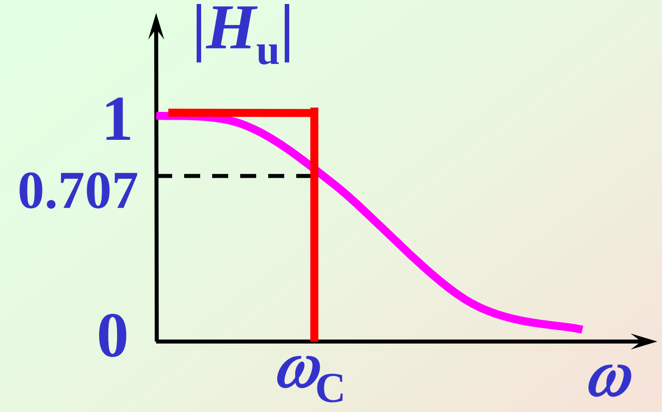
$\omega = 0$时，$|H_u| = 1$，$U_2 = U_1$

$\omega = \infty$时，$|H_u| = 0$，$U_2 = 0$

当$\omega = \omega_C = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{\tau}$时,

$$|H_u| = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

功率与电压平方成正比，功率将降低$\dfrac{1}{2}$，ω_C称为半功率点频率。

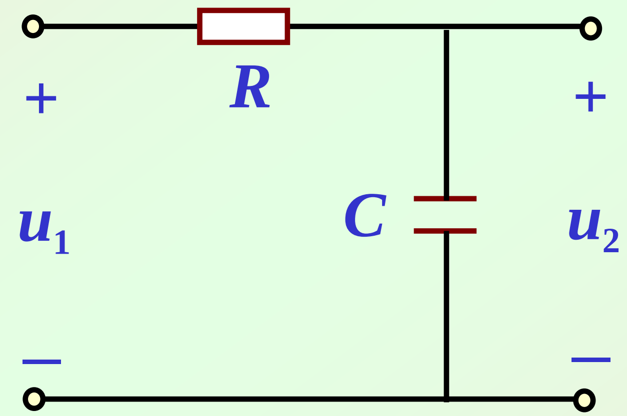


（a）幅频特性曲线

幅频特性曲线表明此*RC* 电路具有低通特性。

工程上ω_C 称为截止频率，$0 \sim \omega_C$为低通网络的通频带。

$$H_u = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \angle -\arctan(\omega CR)$$



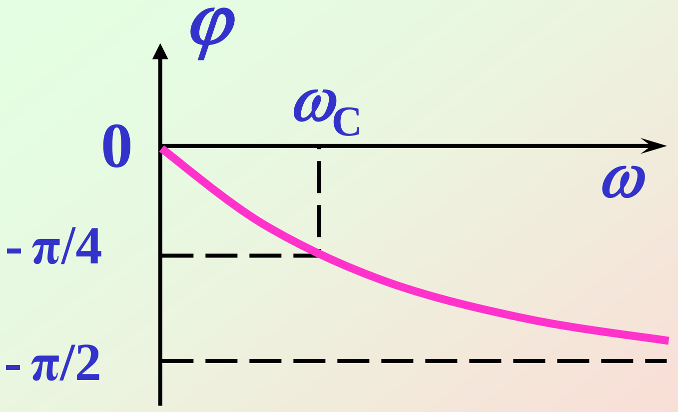
相频特性 $\varphi = -\arctan(\omega CR)$

$\omega = 0$ 时，$\varphi = 0$

$\omega = \infty$ 时，$\varphi = -90^\circ$

$\omega = \omega_C = \dfrac{1}{RC}$ 时，$\varphi = -45^\circ$

输出电压总是滞后于输入电压的，这一*RC*电路又称为滞后网络。



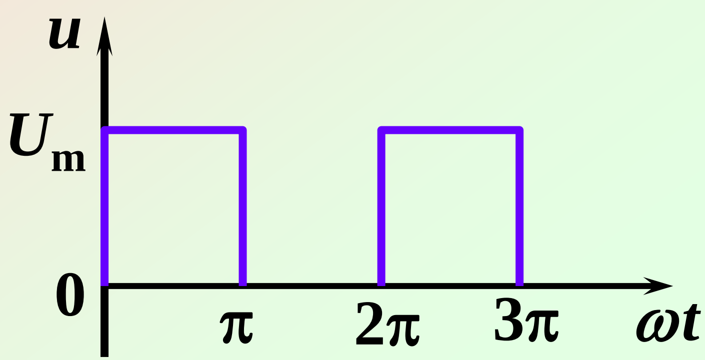
(b) 相频特性曲线

§10-4 正弦稳态的叠加

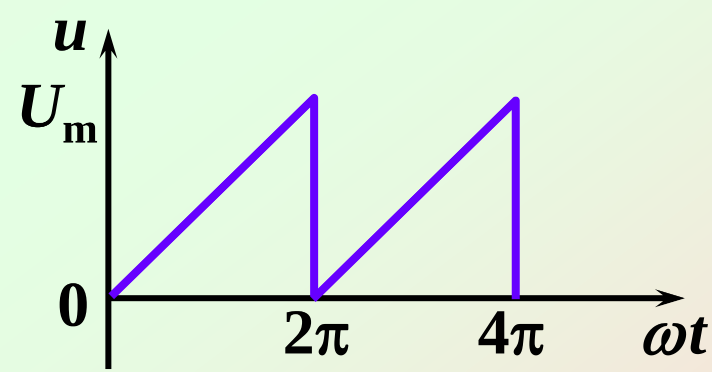
一. 多频正弦激励

1.多个不同频率的正弦激励

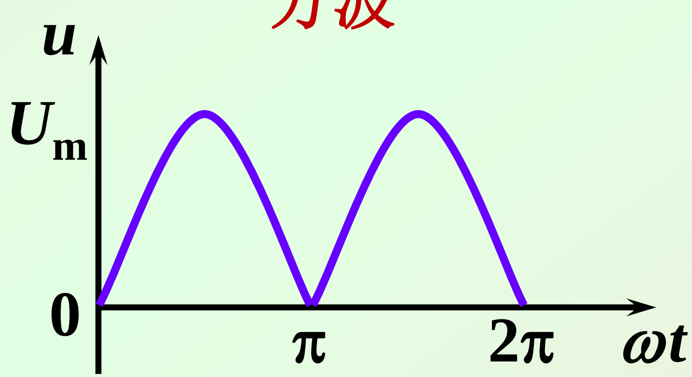
2.非正弦周期激励



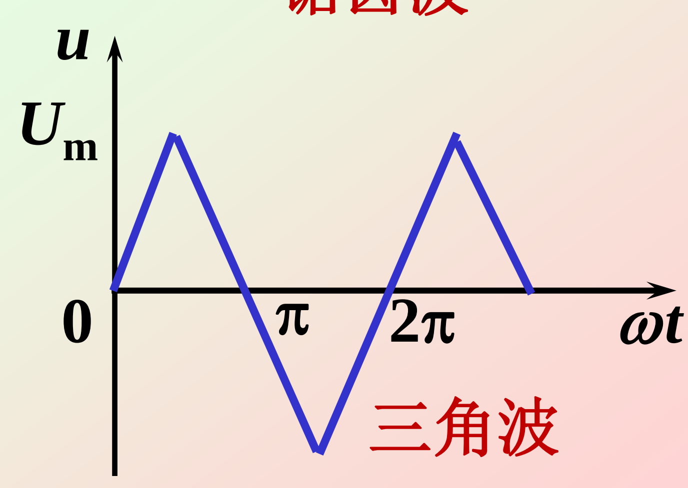
方波



锯齿波



正弦整流全波



三角波

傅氏分解

设周期函数为 $f(\omega t)$, 其角频率为 ω,若该周期函数满足狄里赫利条件，则可以分解为下列傅里叶级数：

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m}\cos(\omega t+\psi_1) + A_{2m}\cos(2\omega t+\psi_2)+ \cdots\cdots$$

$$= A_0+\sum_{k=1}^{\infty} A_{km}\cos(k\omega t+\psi_k)$$

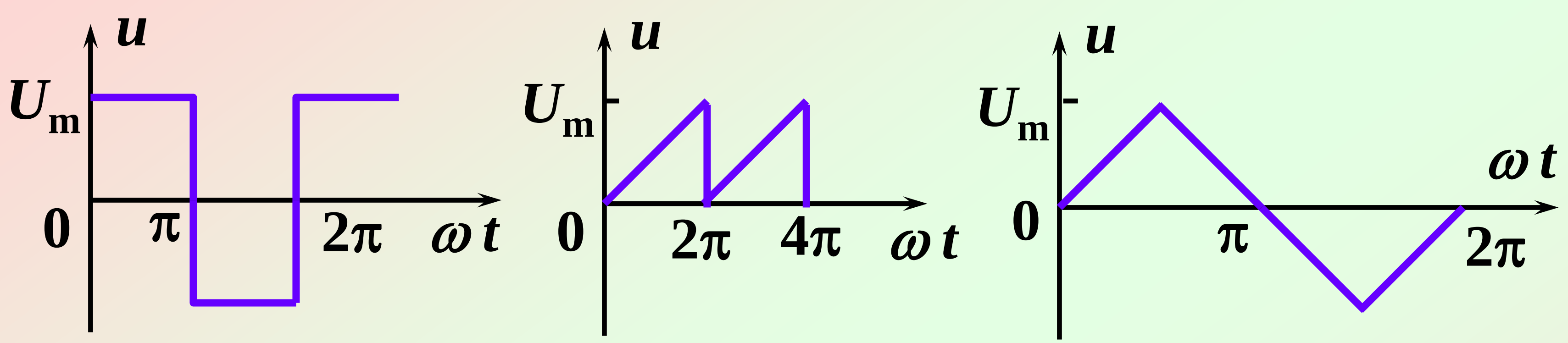
A_0： 直流分量

$A_{1m}\cos(\omega t+\psi_1)$： 基波或一次谐波

$A_{km}\cos(k\omega t+\psi_k)$： k次谐波 (k >1)

非正弦周期激励→多个不同频率的正弦激励

非正弦周期电压的傅里叶级数的展开式



矩形波　　锯齿波　　三角波

矩形波电压　$u=\dfrac{4U_m}{\pi}(\sin\omega t+\dfrac{1}{3}\sin 3\omega t+\dfrac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots)$

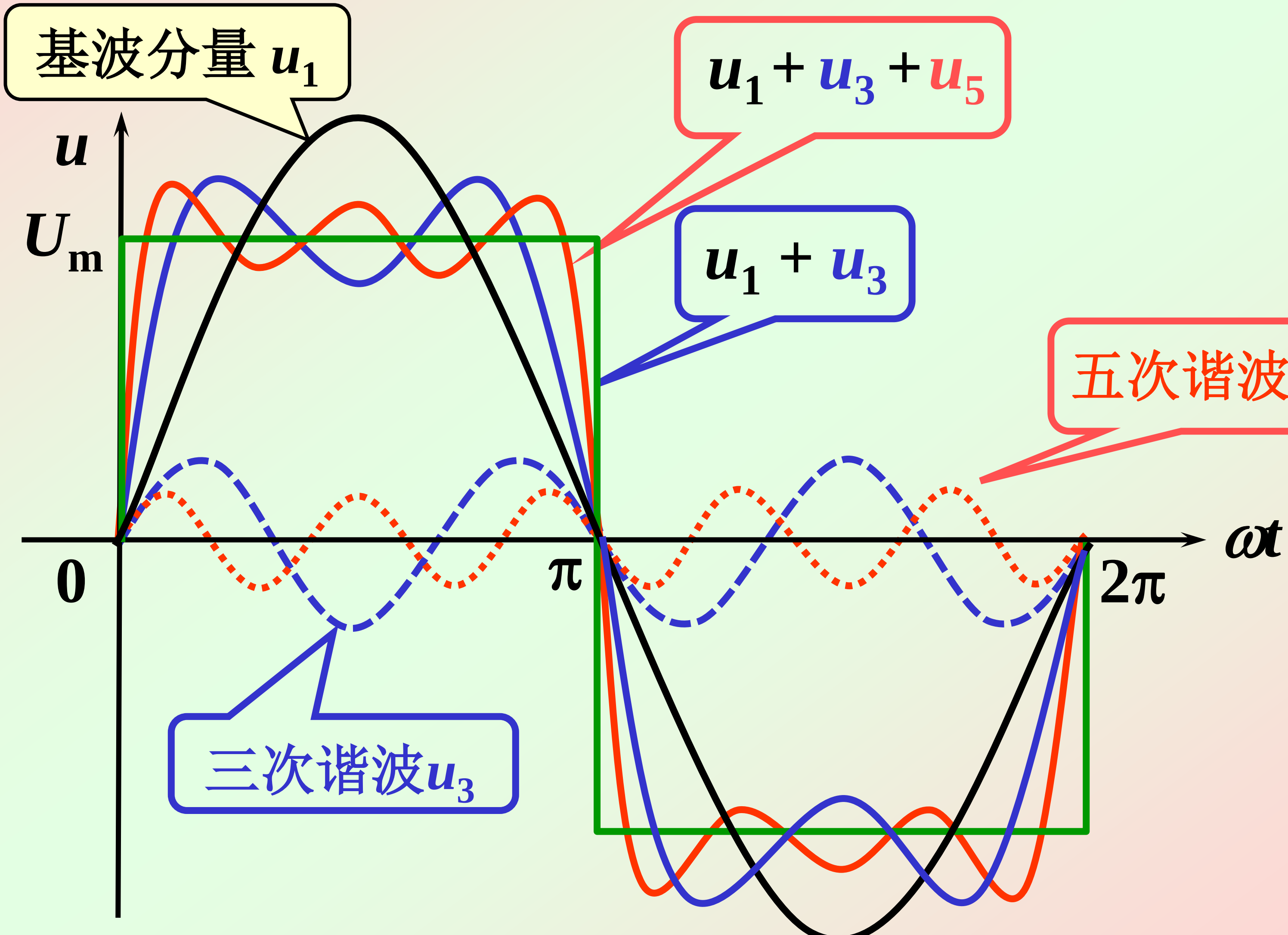
矩齿波电压　$u=U_m(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\sin\omega t-\dfrac{1}{2\pi}\sin 2\omega t-\dfrac{1}{3\pi}\sin 3\omega t-\cdots)$

三角波电压　$u=\dfrac{8U_m}{\pi^2}(\sin\omega t-\dfrac{1}{9}\sin 3\omega t+\dfrac{1}{25}\sin 5\omega t-\cdots)$

可看出傅里叶级数具有收敛性。

例如，矩形波电压可以分解为：

$$u(t)=\frac{4U_m}{\pi}(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\cdots)$$



二. 非正弦周期信号的有效值

依据周期电流有效值定义：$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$

若某一非正弦周期电流可分解成傅里叶级数

$$i(t)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos(k\omega t+\varphi_k)$$

$$=I_0+I_{1m}\cos(\omega t+\varphi_1)+I_{2m}\cos(2\omega t+\varphi_2)+\cdots$$

$$i^2(t)=[I_0+I_{1m}\cos(\omega t+\varphi_1)+I_{2m}\cos(2\omega t+\varphi_2)+\cdots]^2$$

上式展开后只有三种可能形式：

I_0^2 ； $I_0 I_{nm}\cos(n\omega t+\varphi_n)$ $n=1,2,\cdots$ ；

$I_{nm}\cos(n\omega t+\varphi_n)I_{rm}\cos(r\omega t+\varphi_r)$ $r, n=1,2,\cdots$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{T}\int_0^T I_0^2 = I_0^2 \\ \dfrac{1}{T}\int_0^T I_0 I_{nm}\cos(n\omega t+\varphi_n) = 0 \quad n=1,2,\cdots; \\ \dfrac{1}{T}\int_0^T I_{nm}\cos(n\omega t+\varphi_n)\, I_{rm}\cos(r\omega t+\varphi_r)\,dt \\ =\dfrac{1}{T}\int_0^T I_{nm}I_{rm}\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(n\omega t+r\omega t+\varphi_n+\varphi_r\right)+\cos\left(n\omega t-r\omega t+\varphi_n-\varphi_r\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}I_{nm}^2, & n=r \\ 0, & n\neq r \end{cases} \end{cases}$$

$$\therefore\ I=\sqrt{I_0^2+\frac{1}{2}I_{1m}^2+\frac{1}{2}I_{2m}^2+\cdots}$$

非正弦周期电流的有效值为 $I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\cdots}$

非正弦周期电压的有效值为 $U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+\cdots}$

若某一非正弦周期电流可分解成傅里叶级数

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos(k\omega t + \varphi_k)$$

$$= I_0 + I_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1) + I_{2m}\cos(2\omega t + \varphi_2) + \cdots$$

$$\therefore\ I = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}I_{1m}^2 + \frac{1}{2}I_{2m}^2 + \cdots}$$

非正弦周期电流的有效值为 $I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots}$

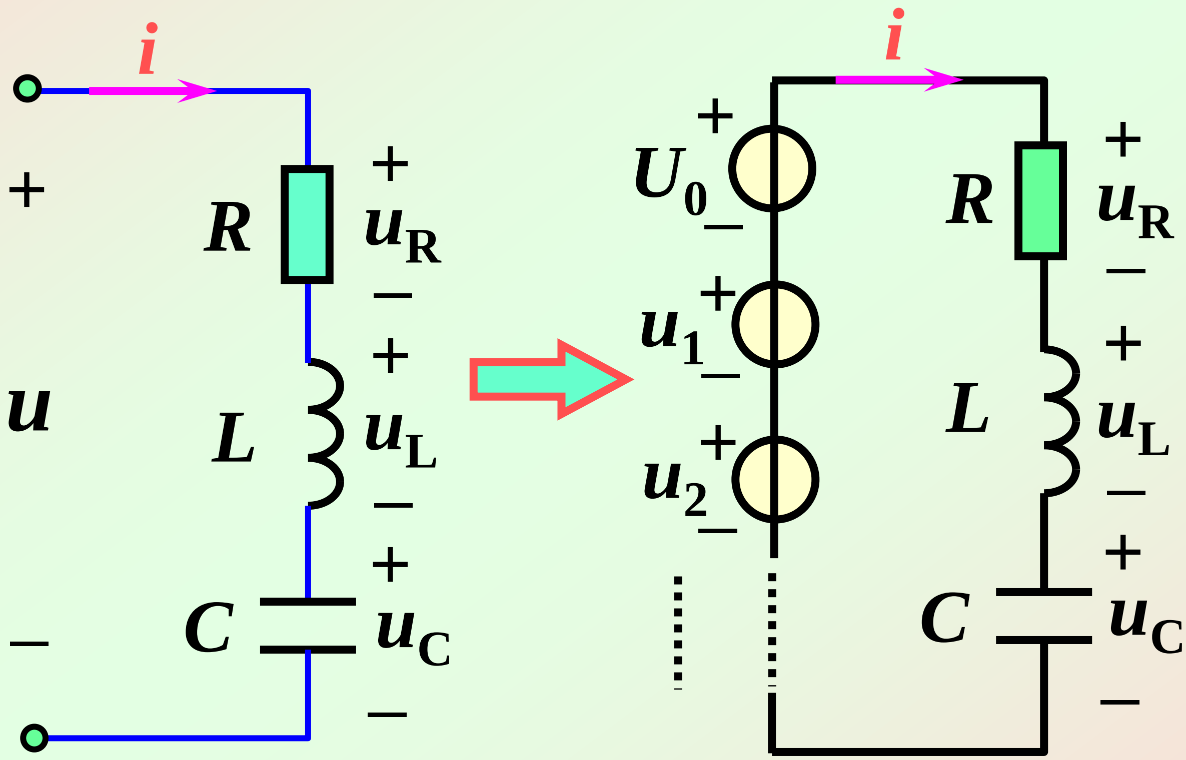
非正弦周期电压的有效值为 $U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots}$

三. 正弦稳态的叠加

设非正弦周期电压 u 可分解成傅里叶级数

$$u = U_0 + U_{1m}\cos(\omega t+\psi_1) + U_{2m}\cos(2\omega t+\psi_2) + \cdots\cdots$$

则u的作用等同于一个直流电压源及一系列不同频率的正弦电压源串联起来共同作用于电路。

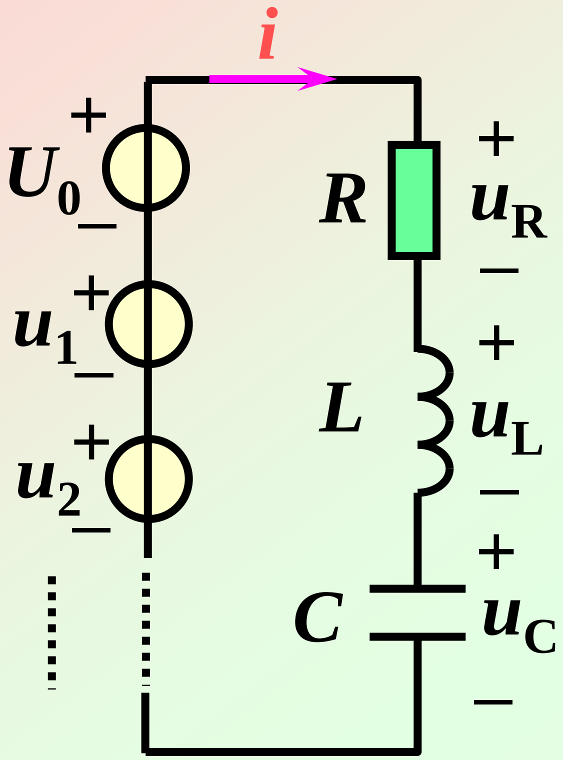


$u_1=U_{1m}\cos(\omega t+\psi_1)$

$u_2=U_{2m}\cos(2\omega t+\psi_2)$

⋮

正弦稳态电路的叠加原理

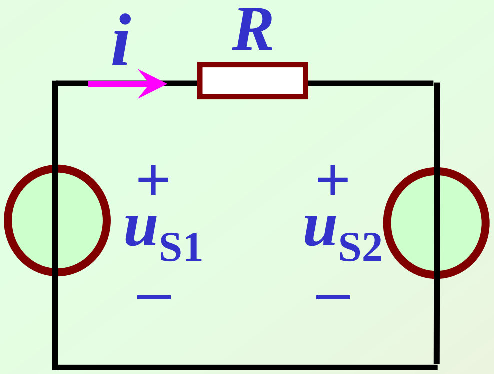


由多个正弦电源和线性元件组成的线性时不变电路中，任一元件的**电流或电压**的稳态响应可以看成是每一个独立源单独作用于电路时，在该元件上产生的电流或电压的和。

具体运用：对每一频率的正弦电源可应用相量分析法求解，然后在时域叠加。

§10-5 平均功率的叠加

设u_{s1}和u_{s2}为两个任意波形的电压源



当u_{s1}单独作用时，流过R的电流为$i_1(t)$

u_{s2}单独作用时，流过R的电流为$i_2(t)$

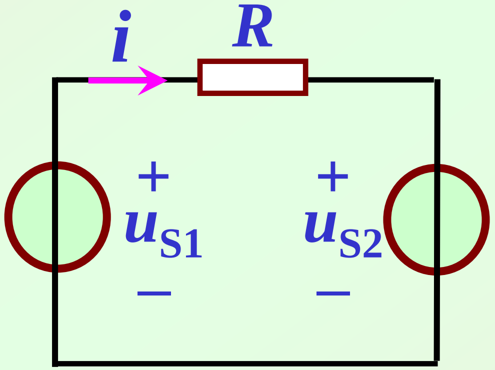
依据叠加原理　$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$

电阻消耗的瞬时功率

$$p(t) = Ri^2(t) = R(i_1+i_2)^2 = Ri_1^2 + Ri_2^2 + 2R\,i_1 i_2 = p_1 + p_2 + 2R\,i_1 i_2$$

式中p_1、p_2分别为u_{s1}、u_{s2}单独作用时，电阻所消耗的瞬时功率。一般情况下，$i_1 i_2 \neq 0$，因此　$p \neq p_1 + p_2$.

叠加原理一般不适用于瞬时功率的计算



$$p(t) = p_1+p_2+2Ri_1i_2$$

如果$p(t)$是周期函数，其周期为T，则其平均功率为：

$$P = \frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} (p_1+p_2+2Ri_1i_2)\mathrm{d}t$$

$$= P_1+P_2+\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} 2Ri_1i_2\mathrm{d}t$$

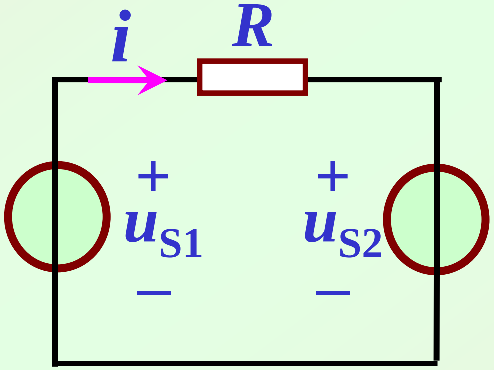
P_1、P_2分别为u_{s1}、u_{s2}单独作用时，电阻所消耗的平均功率。一般情况下，$\int_0^{\mathrm{T}} i_1i_2\neq 0$，因此 $P\neq P_1+P_2$.

叠加原理一般不适用于平均功率的计算

在正弦稳态下

u_{s1}单独作用时 $i_1(t) = I_{1m}\cos(\omega_1 t + \psi_1)$

u_{s2}单独作用时 $i_2(t) = I_{2m}\cos(\omega_2 t + \psi_2)$



电阻消耗的瞬时功率

$$p(t) = i^2R = (i_1 + i_2)^2R = [I_{1m}\cos(\omega_1 t + \psi_1) + I_{2m}\cos(\omega_2 t + \psi_2)]^2R$$

若$\omega_1 \neq \omega_2$, 且$\omega_2 = r\omega_1$，r为有理数, 则 $p(t)$存在一个最小公周期T，且$T = mT_1 = nT_2$， m、n 均为正整数，则平均功率为

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T [I_{1m}\cos(\omega_1 t + \psi_1) + I_{2m}\cos(\omega_2 t + \psi_2)]^2R\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T I_{1m}^2\cos^2(\omega_1 t + \psi_1)R\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T I_{2m}^2\cos^2(\omega_2 t + \psi_2)R\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{1}{T}\int_0^T 2I_{1m}I_{2m}\cos(\omega_1 t + \psi_1)\cos(\omega_2 t + \psi_2)R\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2I_{1m}I_{2m}\cos(\omega_1 t+\psi_1)\cos(\omega_2 t+\psi_2)R\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases} I_{1m}I_{2m}\cos(\psi_1-\psi_2)R\ , & \omega_1=\omega_2 \\ 0 & \omega_1\neq\omega_2 \end{cases}$$

（1）若$\omega_1\neq\omega_2$，则

$$P=\frac{1}{2}I_{1m}{}^2R+\frac{1}{2}I_{2m}{}^2R=I_1{}^2R+I_2{}^2R=P_1+P_2$$

（2）若$\omega_1=\omega_2$，则

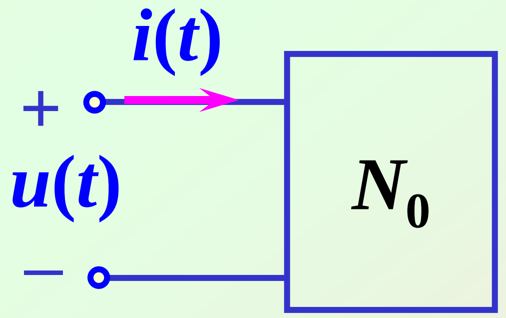
$$P=\frac{1}{2}I_{1m}{}^2R+\frac{1}{2}I_{2m}{}^2R+I_{1m}I_{2m}\cos(\psi_1-\psi_2)R$$

多个不同频率的正弦电流或电压产生的平均功率满足叠加原理；同频则不满足叠加原理。

推广至任意满足狄里赫利条件的非正弦周期激励

设 $u(t)=U_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_{km}\cos(k\omega t+\psi_{uk})$

相应地 $i(t)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_{km}\cos(k\omega t+\psi_{ik})$



则平均功率

$$P=U_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}U_kI_k\cos\varphi_k \qquad (\varphi_k=\psi_{uk}-\psi_{ik})$$

$$=P_0+P_1+P_2+\cdots\cdots$$

$$=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P_k$$

结论：非正弦周期电源电路中的平均功率等于恒定分量和各正弦谐波分量的平均功率之和。

例1 试分别求以下三种情况R的平均功率，已知R=100Ω。

(1) $u_{S1}(t)=100\cos(314t+60^\circ)$V, $u_{S2}(t)=50\cos(314t)$V；

(2) $u_{S1}(t)=100\cos(314t+60^\circ)$V, $u_{S2}=50$V；

(3) $u_{S1}(t)=100\cos(314t+60^\circ)$V，$u_{S2}(t)=50\cos(471t)$V。

解： (1) $u_{S1}(t)=100\cos(314t+60^\circ)$V, $u_{S2}(t)=50\cos(314t)$V

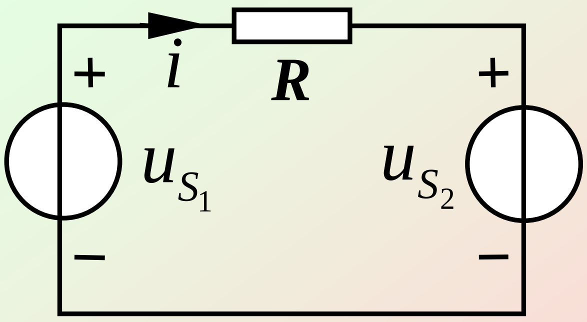
同频电压，平均功率不满足叠加定理

$$\dot{U}_1=\frac{100}{\sqrt{2}}\angle 60^o V=\frac{50}{\sqrt{2}}+j\frac{50\sqrt{3}}{\sqrt{2}}V$$

$$\dot{U}_2=\frac{-50}{\sqrt{2}}\angle 0^o V=\frac{-50}{\sqrt{2}}V$$

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2=j\frac{50\sqrt{3}}{\sqrt{2}}V$$

$$P=\frac{U^2}{R}=\frac{50^2\times 3/2}{100}W=37.5W$$



(2) $u_{S1}(t)=100\cos(314t+60^\circ)\text{V}$, $u_{S2}=50\text{V}$；

频率不同，可用叠加原理计算平均功率

u_{S1}单独作用时 $$P_1=\frac{U_{S_1}^2}{R}=\frac{(100/\sqrt{2})^2}{100}=50\text{ W},$$

u_{S2}单独作用时 $$P_2=\frac{U_{S_2}^2}{R}=\frac{50^2}{100}=25\text{ W},$$

故得 $$P=P_1+P_2=75\text{ W}$$

(3) $u_{S1}(t)=100\cos(314t+60^\circ)\text{V}$，$u_{S2}(t)=50\cos(471t)\text{V}$

频率不同，其比值471/314=1.5为有理数

u_{S1}单独作用时 $$P_1=\frac{(100/\sqrt{2})^2}{100}=50\text{ W},$$

u_{S2}单独作用时 $$P_2=\frac{(50/\sqrt{2})^2}{100}=12.5\text{ W},$$

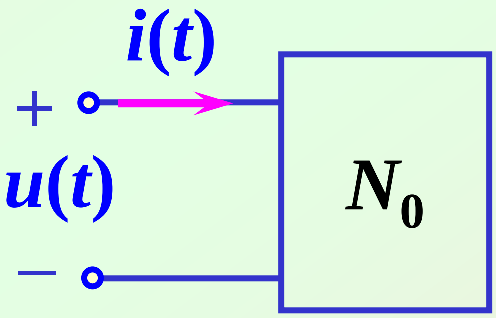
故得 $$P=P_1+P_2=62.5\text{ W}$$

例2： 已知：$u = 15 + 10\cos\omega t + 5\cos 3\omega t$ V，

$i = 2 + 1.5\cos(\omega t - 30^\circ)$ A

求：(1) 电路消耗的功率；

(2) 电压、电流有效值。



解： (1) $P = P_0 + P_1 + P_3$

$$= 15\times 2 + \frac{1}{2}\times 10\times 1.5\cos 30^\circ + 0 = 33.75 \text{ W}$$

(2) $U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2}$

$$= \sqrt{15^2 + \frac{1}{2}(10^2 + 5^2)} = 17 \text{ V}$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2} = \sqrt{2^2 + \frac{1}{2}1.5^2} = 2.26 \text{ A}$$

例3： 已知图中方波周期电压 u 的幅值 $U_m = 20\text{V}$，频率 $f = 50\text{Hz}$，试求：u_R、U_R、P 。

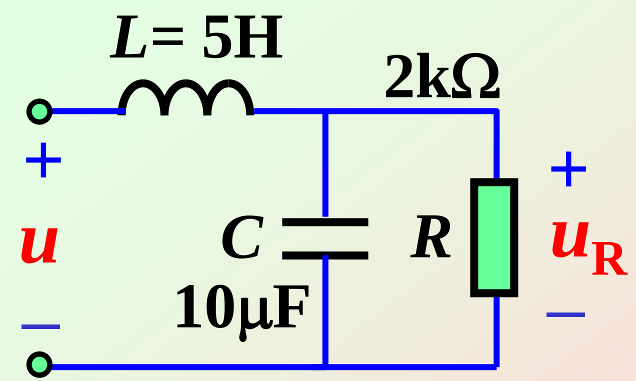
解： 方波周期电压u的傅里叶级数展开式为

$$u = 10 + 12.73\sin\omega t + 4.24\sin 3\omega t + \cdots\cdots \text{ V}$$

$$= 10 + 12.73\cos(\omega t + 90°) + 4.24\cos(3\omega t + 90°) + \cdots \text{ V}$$

$$= U_0 + u_1 + u_3 + \cdots\cdots \text{ V}$$

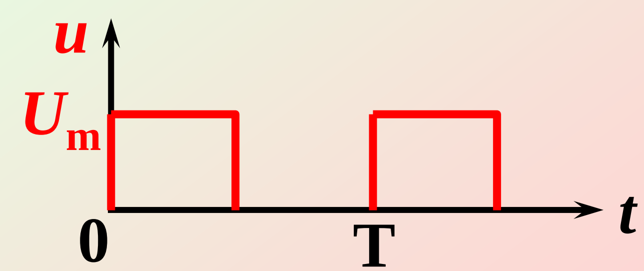
式中 $\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s}$



(1) 直流分量 U_0单独作用时

电感L视为短路，电容C视为开路

$$\therefore u_{R0} = U_0 = 10\text{V}$$



(2) 基波分量 u_1单独作用时

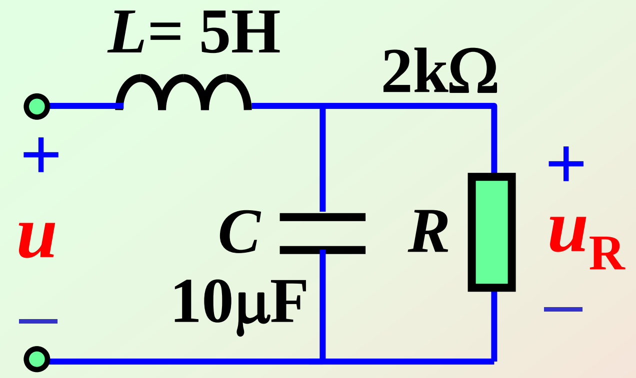
$$j\omega L = j314 \times 5 = j1570\ \Omega$$

$$Z_{RC1}=\frac{R/j\omega C}{R+1/j\omega C}=\frac{R}{1+j\omega CR}=314.5\angle{-80.95^\circ}\ \Omega$$

$$\dot{U}_{R1m}=\frac{Z_{RC1}\dot{U}_{1m}}{Z_{RC1}+j\omega L}=\frac{314.5\angle{-80.95^\circ}}{1260\angle 87.75^\circ}\times j12.73$$

$$=3.18\angle{-78.7^\circ}\ \text{V}$$

$$u_{R1}=3.18\cos(314t-78.7^\circ)\ \text{V}$$



(3)三次谐波分量u_3单独作用时

$$j3\omega L=j3\times 314\times 5=j4710\ \Omega$$

$$Z_{RC3}=\frac{R/j3\omega C}{R+1/j3\omega C}=\frac{R}{1+j3\omega CR}=106\angle{-86.96^\circ}\ \Omega$$

$$\dot{U}_{R3m}=\frac{Z_{RC3}\dot{U}_{3m}}{Z_{RC3}+j3\omega L}=\frac{106\angle{-86.96^\circ}}{4604\angle 89.93^\circ}\times j4.24\quad=0.1\angle{-86.9^\circ}\ \text{V}$$

$$u_{R3}=0.1\cos(942t-86.9^\circ)\ \text{V}$$

瞬时值：

$$u_R = u_{R0} + u_{R1} + u_{R3} + \cdots\cdots$$

$$= 10 + 3.18\cos(314t - 78.7°) + 0.1\cos(942t - 86.9°) + \cdots\cdots \text{ V}$$

因为谐波的频率越高，幅值越小，通常可取前几项来计算有效值。

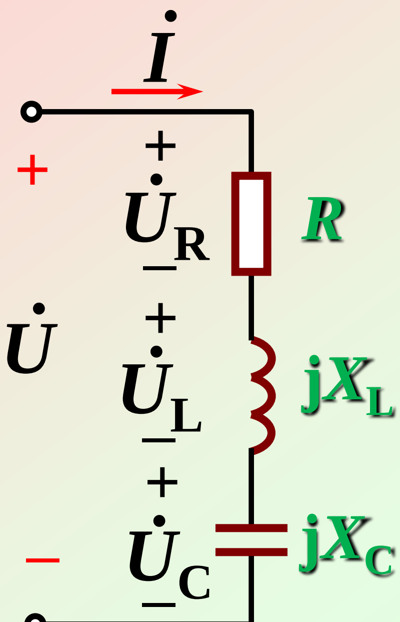
有效值：$U_R = \sqrt{U_{R0}^2 + U_{R1}^2 + U_{R3}^2}$

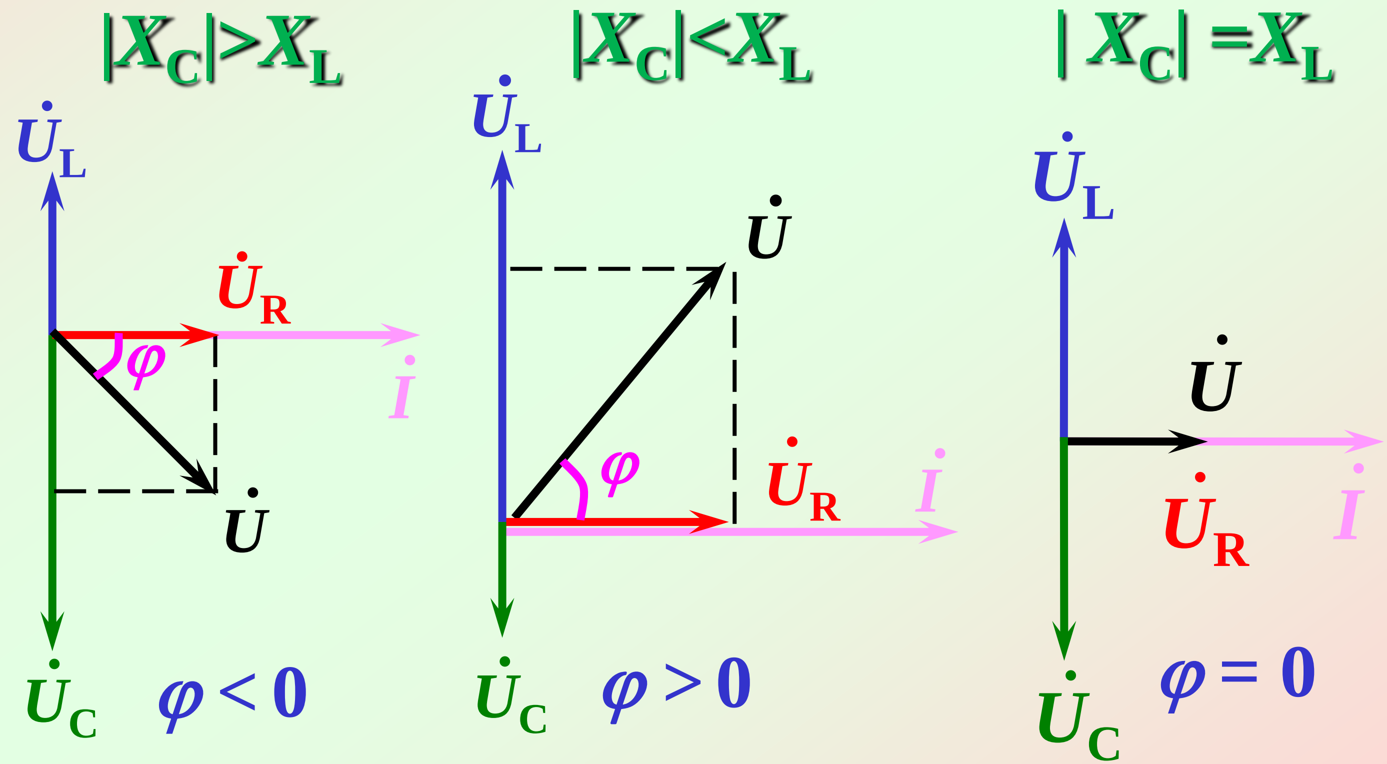
$$= \sqrt{10^2 + \frac{1}{2}(3.18^2 + 0.1^2)} = 10.25 \text{ V}$$

有功功率：$P = P_R = U_R^2/R = 0.053 \text{ W}$

§ 10-6 RLC 电路的谐振

10.6.1 串联谐振

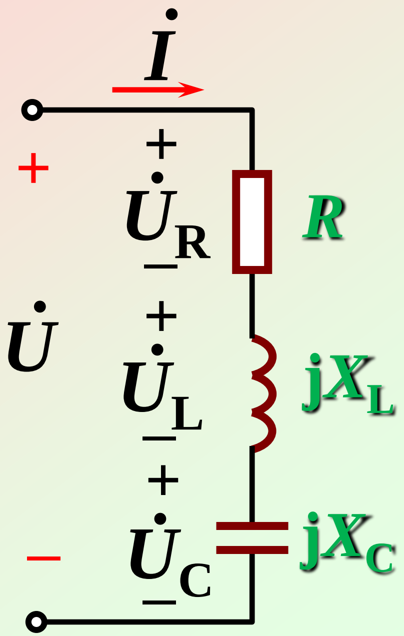




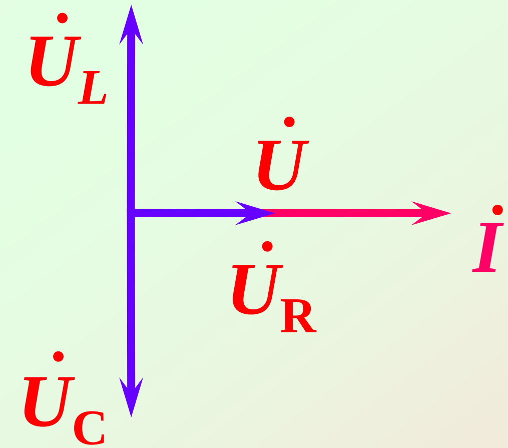
$U_C > U_L$ $U_C < U_L$ $U_C = U_L$

串联谐振

谐振: 在具有电感和电容的电路中，若调节电路的参数或电源的频率，**使输入阻抗为纯电阻**即电压与电流同相, 则称电路发生了谐振现象。



$$Z = R + jX = R + j(X_L + X_C)$$



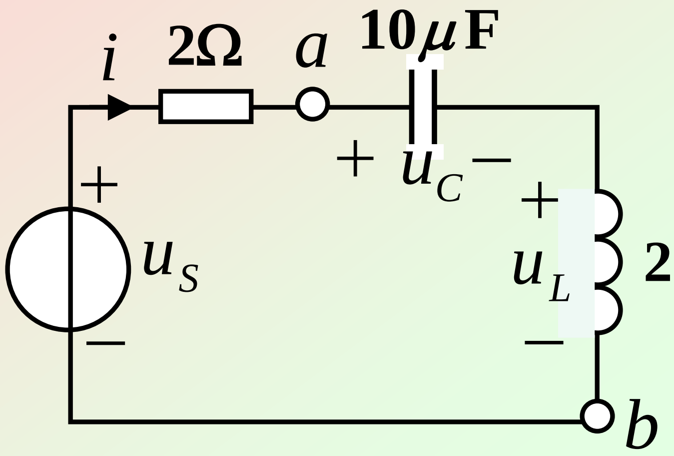
串联谐振条件

$$X_L = -X_C \text{ 或 } \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

串联谐振频率

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \qquad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

例：R、L、C串联电路，已知R=2Ω、L= 25mH、C= 10μF，电源电压 $u_S = 10\sqrt{2}\cos(\omega t)\,\text{V}$，求电路谐振频率及谐振时电容、电感电压有效值。



解：串联谐振角频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2000\ \text{rad/s}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10}{2} = 5\text{A}$$

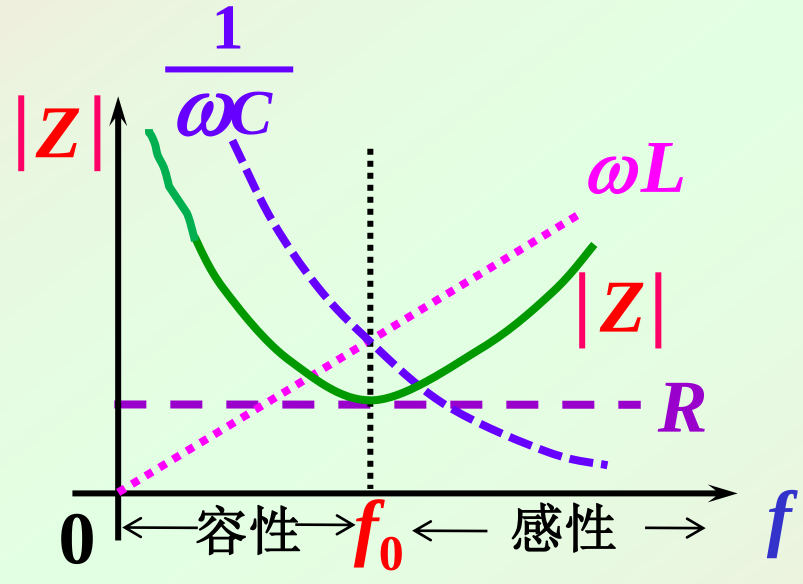
$$U_L = \omega_0 L I = 2000 \times 0.025 \times 5 = 250\text{V} >> 10\text{V}$$

$$U_C = \frac{I}{\omega_0 C} = 5/(2000 \times 10 \times 10^{-6}) = 250\text{V}$$

极性与电感电压相反

串联谐振电路的特征

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$



RLC串联电路输入阻抗幅频特性曲线

(1) 阻抗模最小，为 $|Z| = R$。电路电流最大，为U/R。

(2) 电路呈电阻性,电感和电容串联相当于短路。

(3) 电感和电容两端电压大小相等相位相反。串联谐振又称电压谐振.

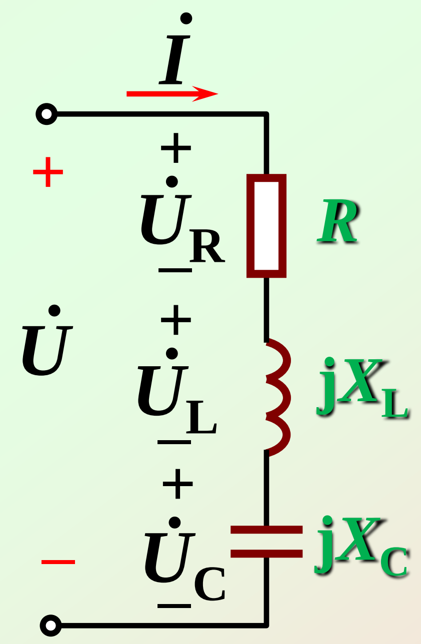
当$X_L=|X_C|> R$时，分电压大于总电压（超高压）

(4) 有功功率 $P = UI\cos\varphi = UI = I^2R$

无功功率 $Q = UI\sin\varphi = 0$

串联谐振电路的品质因数Q

定义为串联谐振时动态元件的电压与激励电压之比，用于表明电路谐振的程度，无量纲。



$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{\omega_0 LI}{RI} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$Q = \frac{U_C}{U} = \frac{I/\omega_0 C}{IR} = \frac{1}{\omega_0 CR}$$

由 $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 得 $\boxed{Q = \dfrac{\sqrt{LC}}{CR} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

可见品质因数Q完全由电路的元件参数所决定。

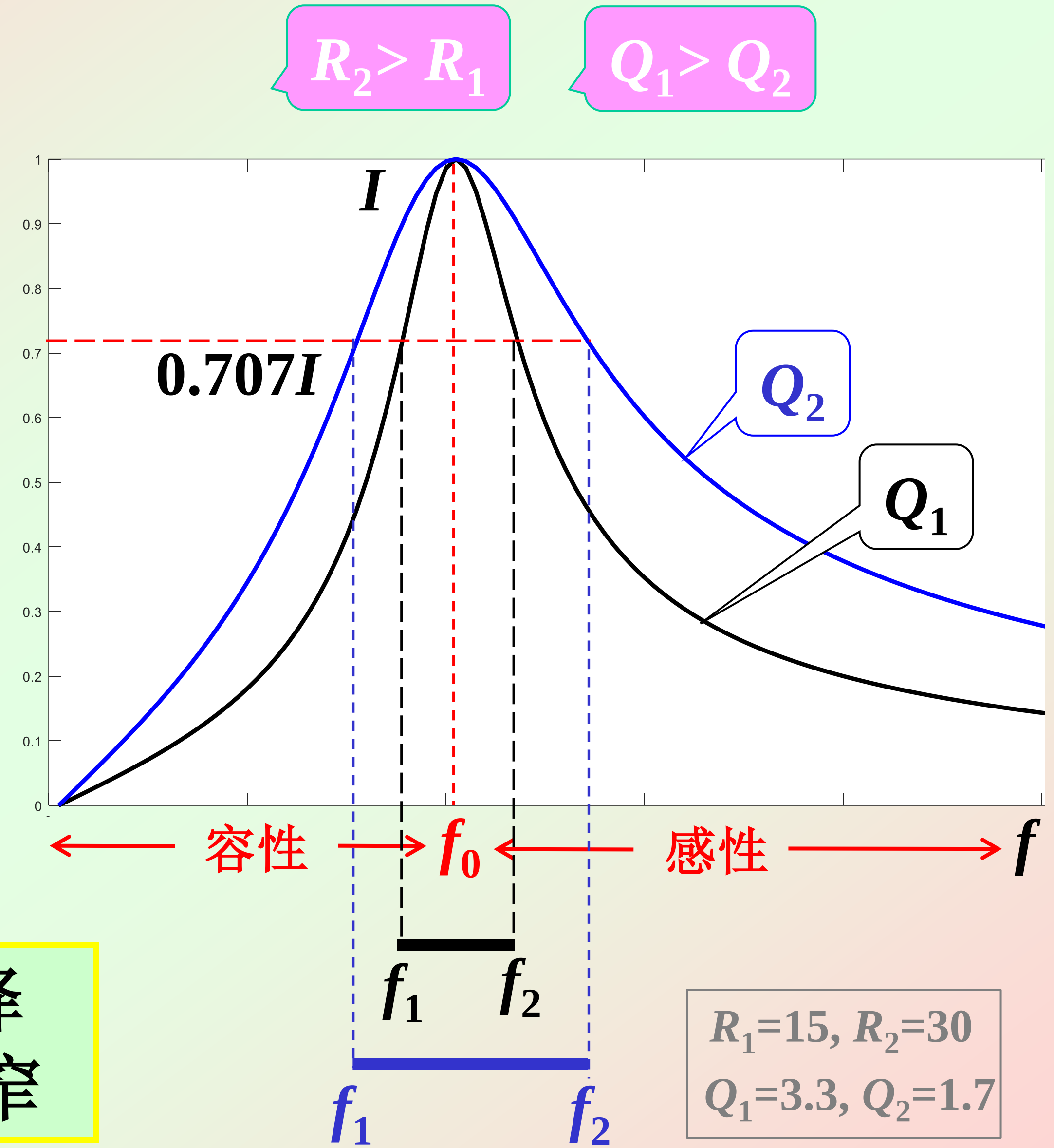
$$U_C = U_L = QU_R = QU$$

串联谐振曲线 (电流幅频特性)

$$I=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

通频带 $BW_f=f_2-f_1$



Q值越大，电路的选择性就越强，通频带越窄

实际中要综合考虑选择性和通频带

计算通频带 $BW_f = f_2 - f_1$

$$I_0 = \frac{U}{R}, \quad I = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U}{\sqrt{2}R}$$

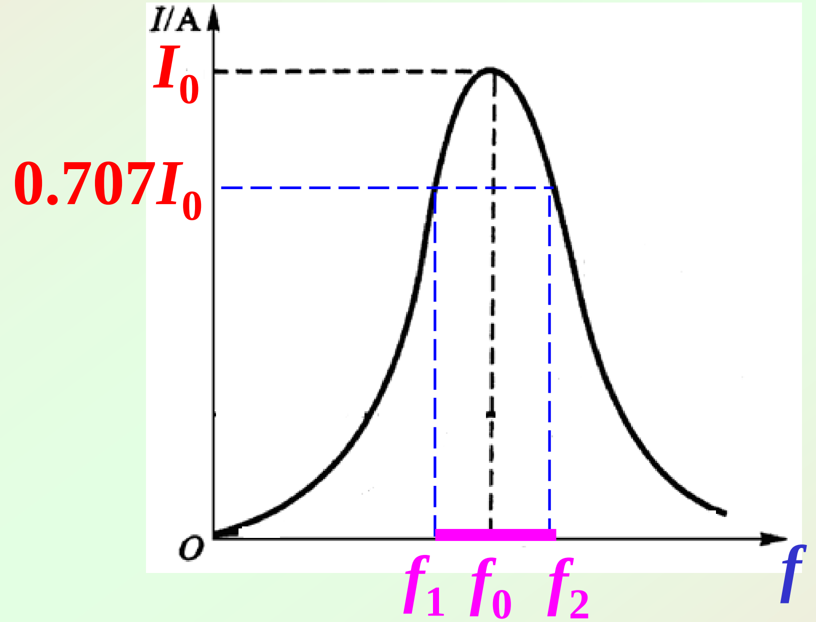
$$\therefore \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R$$

解之舍掉负值得

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm \frac{R}{L} + \sqrt{(\frac{R}{L})^2 + \frac{1}{LC}}}{2}$$

$$BW_\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$



$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$$BW_\omega = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$BW_f = \frac{R}{2\pi L} = \frac{f_0}{Q}$$

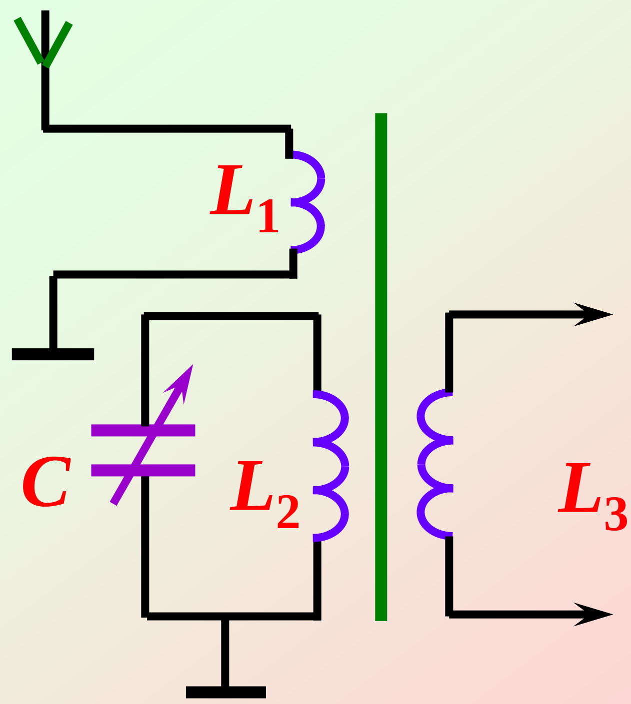
例： 图示电路中, 电感L_2=250μH, 其导线电阻 R=20Ω。

1. 如果天线上接收的信号有三个，其频率分别为：

$f_1=820\times10^3$ Hz、$f_2=620\times10^3$ Hz、$f_3=1200\times10^3$ Hz。

要收到 $f_1=820\times10^3$ Hz信号节目, 电容器的电容C应调节到多大?

2. 如果接收的三个信号幅值均为10μV，在电容调变到对 f_1发生谐振时，在L_2中产生的三个信号电流各是多少毫安？对频率为 f_1的信号在电感L_2上产生的电压是多少伏?

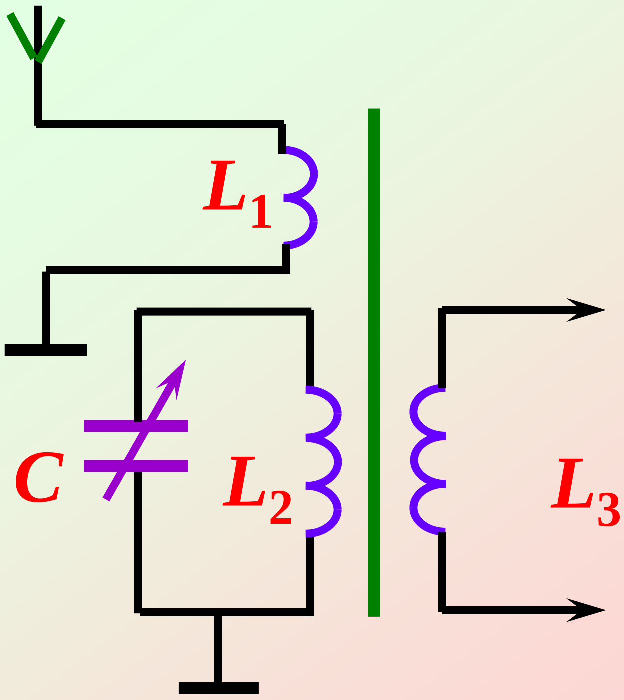


电感L_2= 250μH，其导线电阻R = 20Ω。

解：1. 要收听频率为f_1 = 820×10^3 Hz信号的节目应该使谐振电路对f_1发生串联谐振，即

$$\omega_1 L_2 = \frac{1}{\omega_1 C}$$

$$\therefore C = 150\ \text{pF}$$

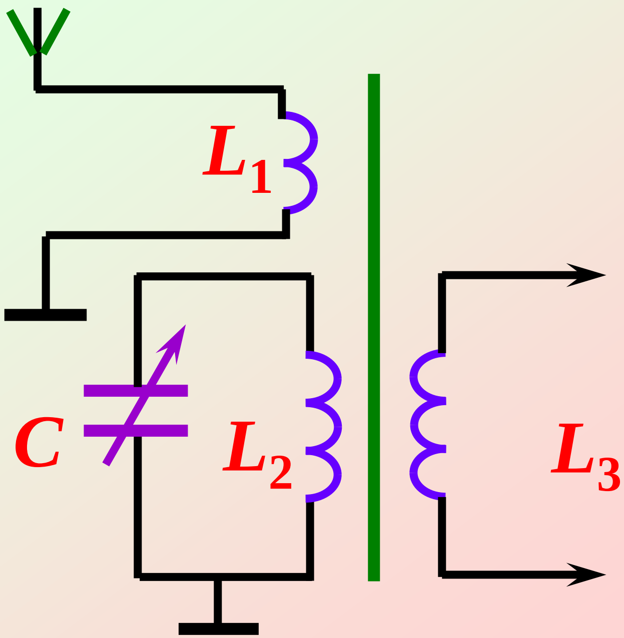


2. 当C=150pF, L_2=250μH时，L_2-C 电路对三种信号的电抗值不同, 如下表所示

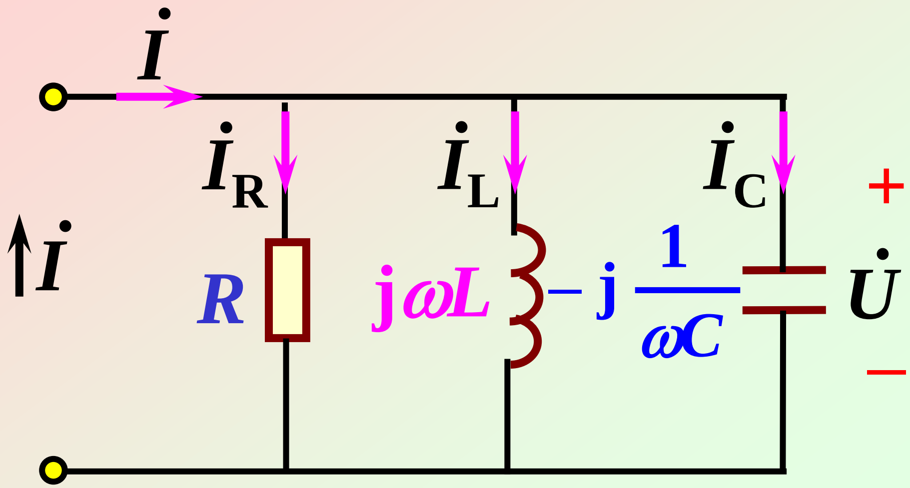
f /Hz	820×10^3	620×10^3	1200×10^3
X_L / Ω	1290	1000	1890
X_C / Ω	–1290	– 1660	– 885
$\|Z\|$ / Ω	20	660	1000
$I=\dfrac{U}{\|Z\|}$ / μA	0.5	0.015	0.01
$U_L = X_L I$ / μV	645	15	18.9

接收的三个信号幅值均为10μV

其它频率在电感上的电压不到 20 μV，而对 f_1 信号则放大了64.5 倍！



10.6.2 并联谐振



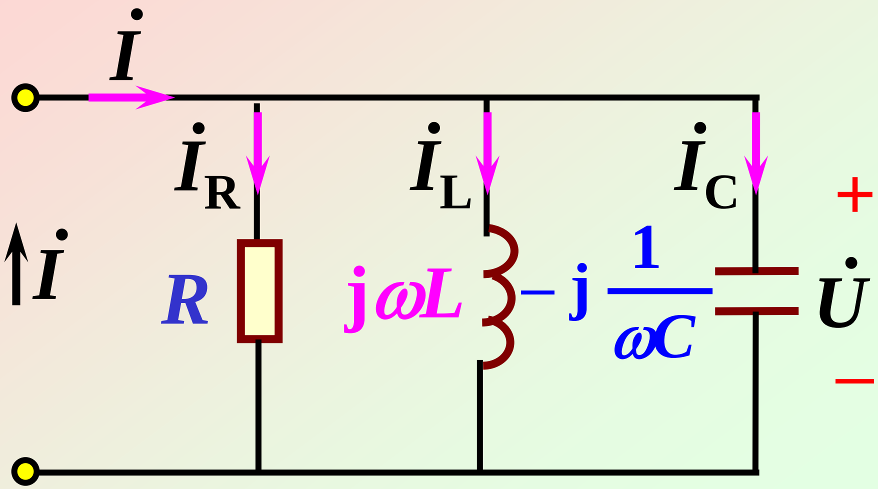
$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$U = I\frac{1}{|Y|} = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

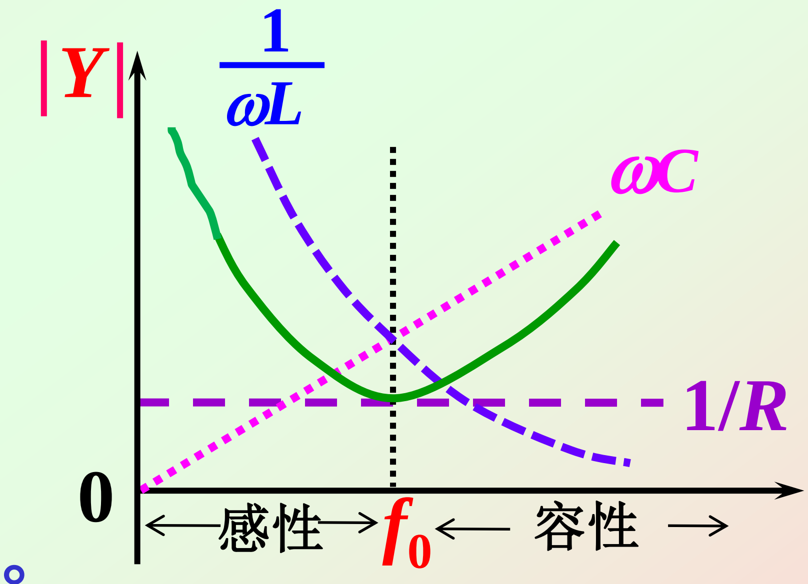
RLC并联谐振条件： $\omega C = \dfrac{1}{\omega L}$

并联谐振频率 $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ $\boxed{f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$

并联谐振电路的特征



$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$



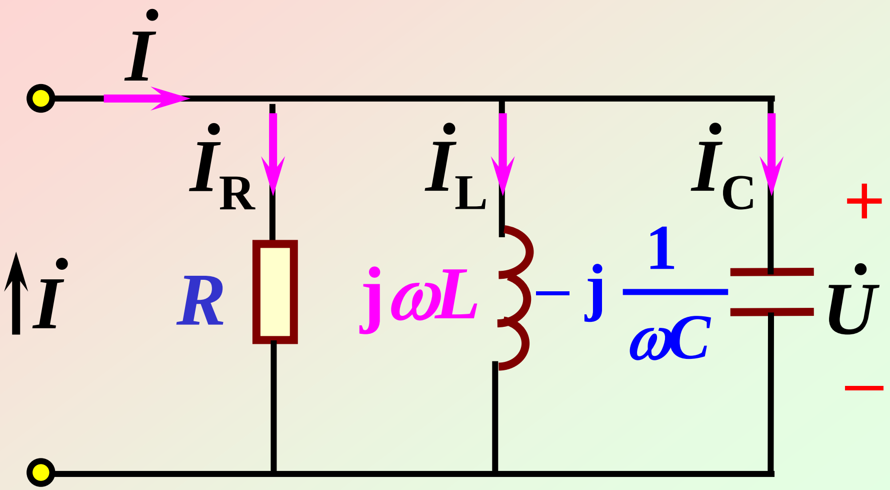
并联谐振时，电路呈电阻性，

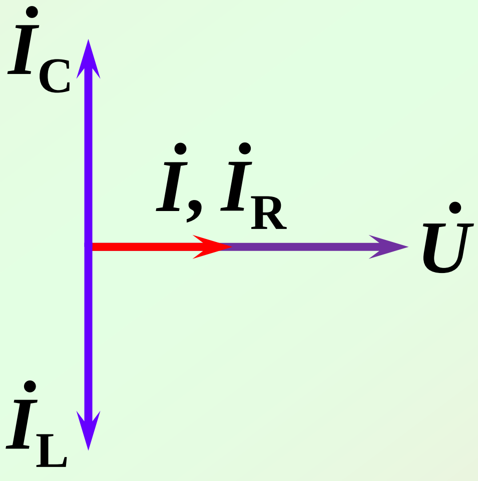
$|Y|$最小，$|Z|=R$ 最大，U最大。

$$U_0 = I R$$

RLC并联电路输入导纳幅频特性曲线

并联谐振电路的特征





并联谐振电
流相量图

支路 I_L或 I_C大小相等，$I_L=\dfrac{IR}{\omega L}$

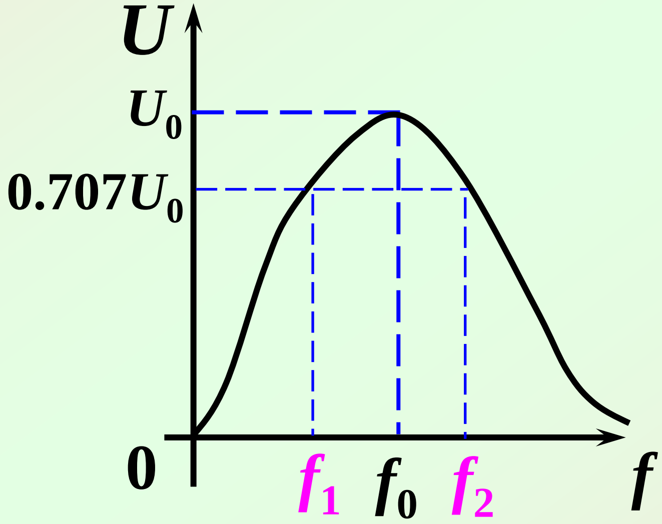
方向相反，且可能会大于总电

流 $I\rightarrow$超高电流。

并联谐振又称电流谐振，电感并联电容相当于开路。

并联谐振曲线
(电压幅频特性)

$$U = I\frac{1}{|Y|} = I\frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$



并联谐振电路的品质因数

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{U_0/\omega_0 L}{U_0/R} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$Q = \frac{I_C}{I} = \frac{U_0\omega_0 C}{U_0/R} = \omega_0 CR = \frac{\omega_0 C}{G}$$

通频带 $BW_\omega = \frac{G}{C} = \frac{\omega_0}{Q}$

例： *GLC*并联电路中，已知R=1kΩ、L= 0.5H、C = 50μF，求此电路的谐振频率 f_0，谐振时的品质因数 Q。若外施电流源电流有效值为10mA，试求：各支路电流和电压的有效值。

解： 并联谐振频率

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{0.5\times5\times10^{-6}}}=31.85\text{ Hz}$$

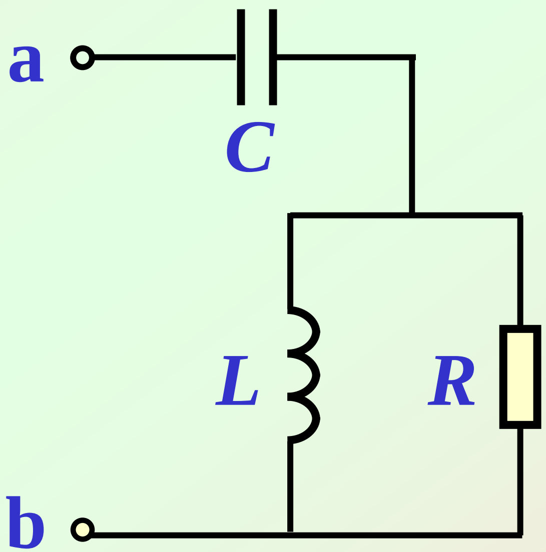
品质因数 $Q=\dfrac{R}{2\pi f_0 L}=\dfrac{1000}{2\pi\times31.85\times0.5}=10$

$$I_{\mathrm{L}}=I_{\mathrm{C}}=QI=10\times10=100\,\mathrm{mA}$$

$$I_R=I=10\,\mathrm{mA},\quad U=1\mathrm{k}\Omega\times10\,\mathrm{mA}=10\,\mathrm{V}$$

例： 求电路的谐振角频率。

解： 写出阻抗的表达式



$$Z = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} + \frac{R \times \mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L}$$

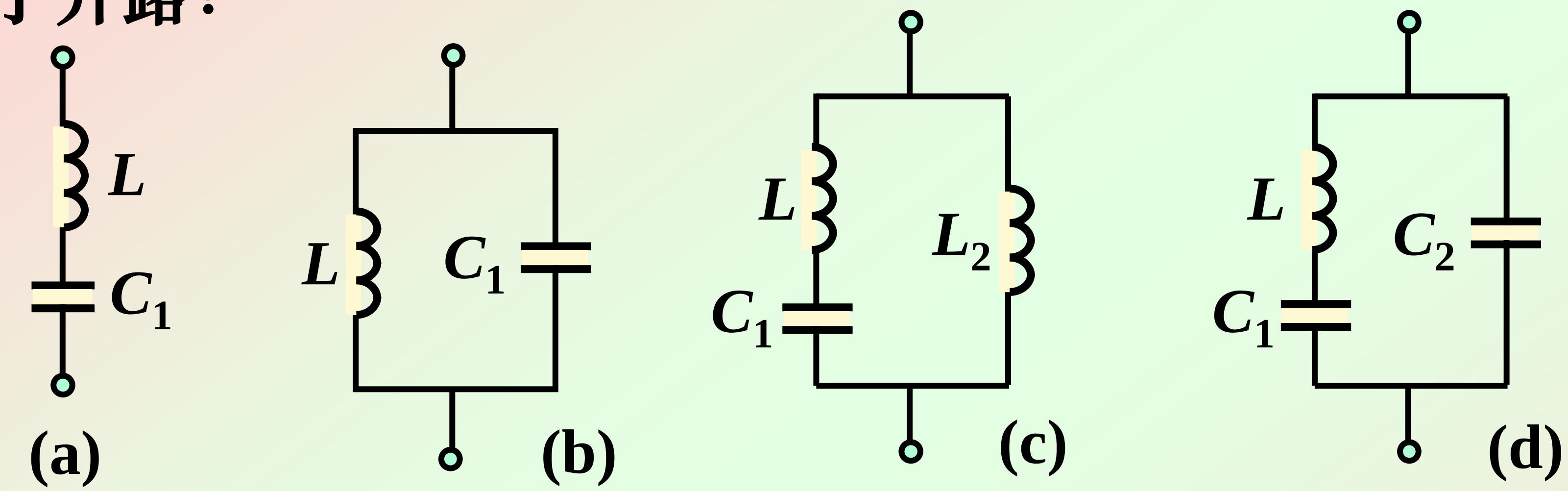
$$= -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} + \frac{\mathrm{j}\omega L R^2 + (\omega L)^2 R}{R^2 + (\omega L)^2}$$

令虚部为零

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{\omega L R^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

有 $\omega_0 = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 LC - L^2}}$ rad/s

例4 当 $\omega=\omega_1=\dfrac{1}{\sqrt{LC_1}}$ 时，哪些电路相当于短路，哪些相当于开路?



解:

(a) 串联谐振 —短路

(b) 并联谐振— 开路

(c) 短路

(d) 短路

第十章　小结

1. 频率响应

$$Z(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)=|Z(\mathrm{j}\omega)|\angle\varphi_Z(\omega)$$

$$|Z(\mathrm{j}\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}$$ —— 幅频特性

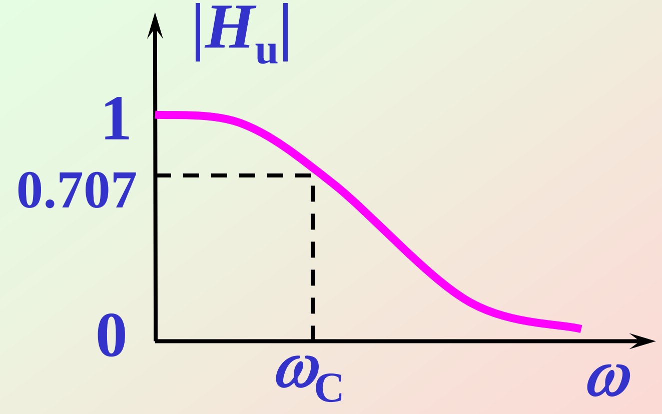
$$\varphi_Z(\omega)=\arctan\frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$ —— 相频特性

2.网络函数

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\text{响应相量}}{\text{激励相量}}=|H(\mathrm{j}\omega)|\angle\varphi(\omega)$$

3.低通滤波电路

ω_C半功率点频率



4.非正弦周期激励可通过傅氏分解用多个不同频率的正弦激励表示。

$$i(t)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\cos(k\omega t+\varphi_k)$$

5.非正弦周期电流的有效值为 $I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\cdots}$

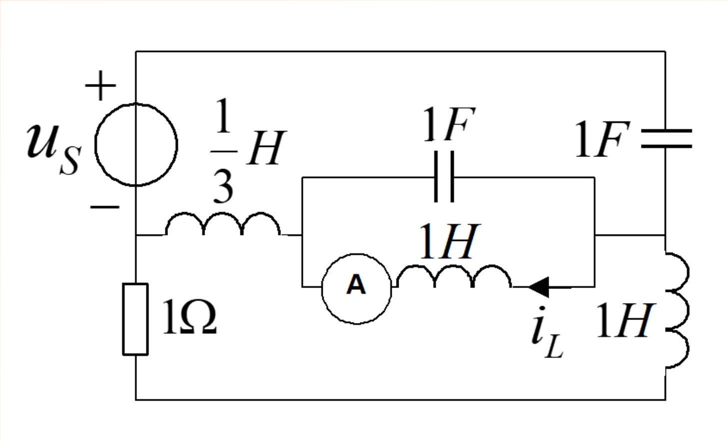
6. 正弦稳态电路的叠加原理：电流和电压满足叠加原理

7.多个不同频率的正弦电流或电压产生的平均功率满足叠加原理；同频则不满足叠加原理。

8.非正弦周期电源电路中的平均功率等于恒定分量和各正弦谐波分量的平均功率之和。

	串联谐振(电压谐振)	并联谐振(电流谐振)
谐振频率	$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
谐振电路特征	阻抗模最小；电流最大；电感和电容电压大小相等，相位相反；串联的电感电容相当于短路	导纳模最小；电流最小；电感和电容电流大小相等，方向相反；并联的电感电容相当于开路
品质因数	$Q=\dfrac{\omega_0 L}{R}=\dfrac{1}{\omega_0 CR}=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$	$Q=\dfrac{R}{\omega_0 L}=\omega_0 CR=R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$
通频带宽	$BW_\omega=\dfrac{R}{L}=\dfrac{\omega_0}{Q}$	$BW_\omega=\dfrac{G}{C}=\dfrac{\omega_0}{Q}$

如图所示正弦稳态电路中，已知$u_S(t)=\sin t+3\cos 2t$ V 求电流表读数(有效值)。



解：基波$\cos(t-90^{\circ})$单独作用时，并联1F和1H发生并联谐振，串联的1F和1H发生串联谐振

$$\dot{I}_L^{(1)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\angle-90^{\circ}\times(1+j)}{j}=1\angle-135^{\circ}\ \mathrm{A}$$

$3\cos 2t$ 单独作用时，并联1F和1H和1/3H发生串联谐振

$$\dot{I}_L^{(2)}=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}\angle 0}{-j\frac{1}{2}}\times\frac{-j\frac{1}{2}}{j2-j\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\angle-90^{\circ}\ \mathrm{A}$$

$$Z=\frac{1}{j2-j\frac{1}{2}}+j\frac{2}{3}=0\Omega$$

电流表读数为 $I_L=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}\mathrm{A}$