第6章　一阶电路

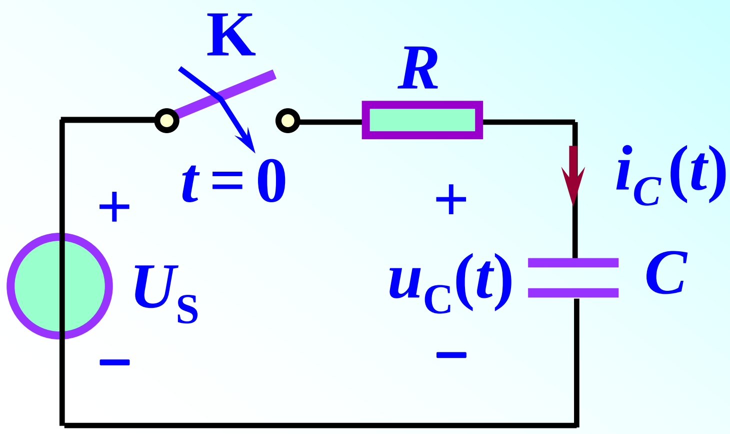
第六章 一阶电路

一阶线性微分方程：$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} + p(t)\boxed{y} = q(t)$

定义： 能用一阶微分方程描述的电路称为**一阶电路**。

(first order circuit)

本章重点讨论直流激励下的线性时不变一阶电路的动态分析。



描述线性时不变一阶电路的微分方程是线性、常系数一阶微分方程。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + py = q$$

（p, q为常数）

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{RC\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}}} + \boxed{u_C(t)} = U_S$$

6-7 稳态(steady state)和瞬态(transient state)

1. 换路： 电路中电源的接入、消失或变动及电路参数和电路结构的改变都称为换路。

2. 换路定律： $u_C(t_0+\Delta t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} i_C(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

在换路瞬间，若电容电流 i_C有界，则电容电压 u_C不能跃变；

若电感电压 u_L有界，则电感电流 i_L不能跃变。

设电路在 $t=0$ 时刻换路，则换路定律可表述为：

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)\ ,\quad i_L(0_+)=i_L(0_-)$$

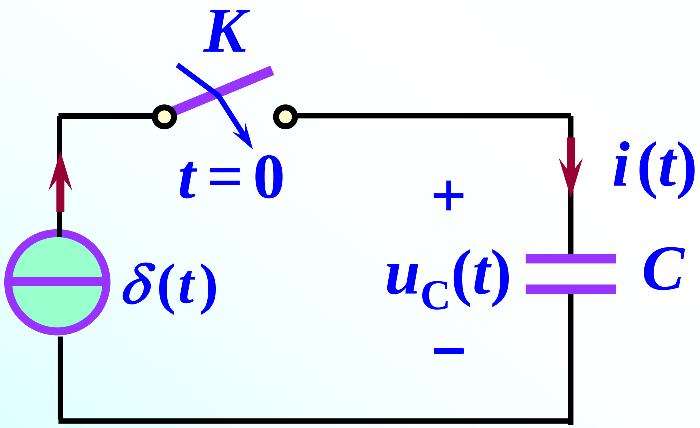
$t=0_-$ 表示换路前瞬间，$t=0_+$ 表示换路后瞬间。

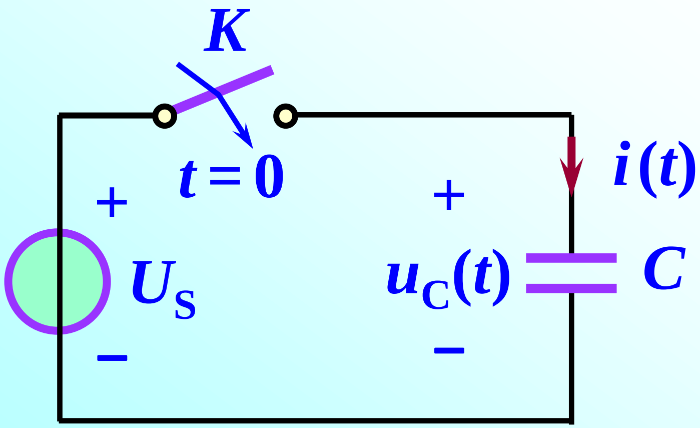
注意

1. 换路定律只适用于状态变量 u_C 和 i_L；

2. 非状态变量 i_C, u_L, i_R和 u_R可能发生跃变。

状态变量什么时候会跃变?





电容电流 i_C无界(电感电压 u_L无界)

(1)激励为冲激电流源(电压源)

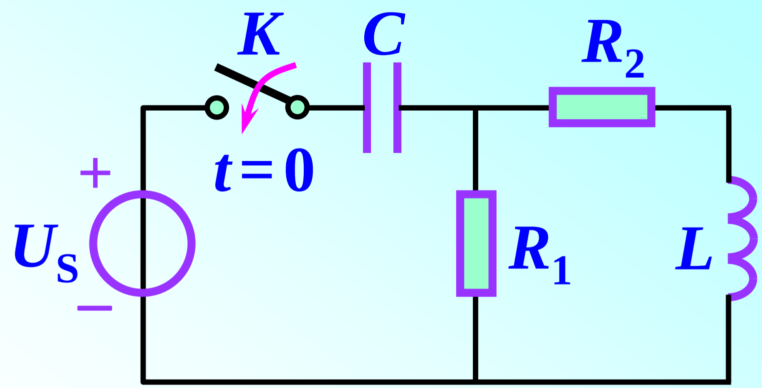
$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

(2)强制换路

K闭合瞬间，由KVL

$$u_C(0_+)=U_S$$

例 已知：$i_L(0_-)=0$，$u_C(0_-)=0$，试求：开关K闭合瞬间，电路中各电压、电流的初始值。



解：

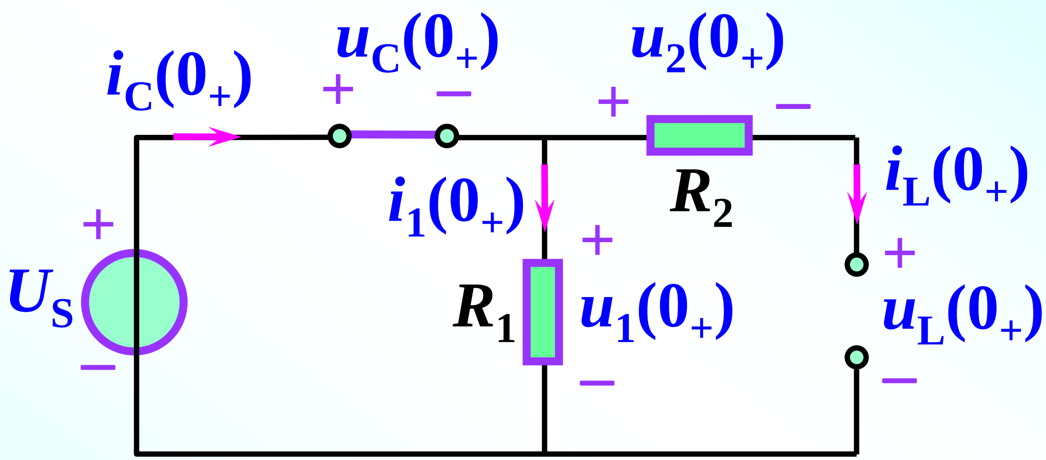
$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$$

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$$

$$i_C(0_+)=i_1(0_+)=\frac{U_S}{R_1}$$

$$u_2(0_+)=0$$

$$u_L(0_+)=u_1(0_+)=U_S$$

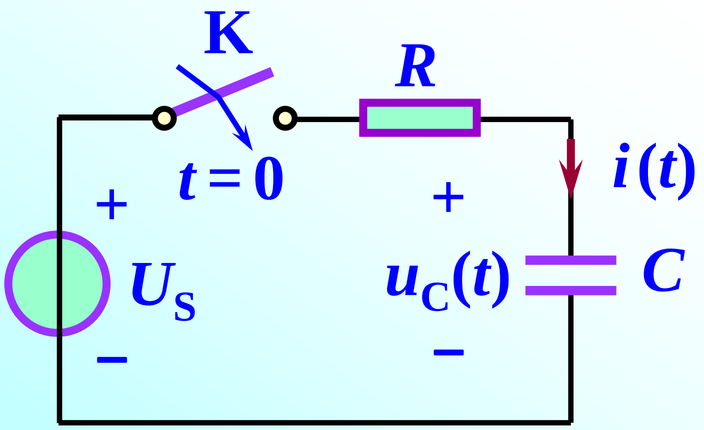


$t=0_+$时的等效电路

3. 稳态 —电路变量不随时间而变，或为随时间而变的周期量

直流稳态 — 电路的电压、电流为常量；

交流稳态 — 电路的电压、电流瞬时值为随时间而变的周期量。



K闭合前稳态：

$i(t)=0$

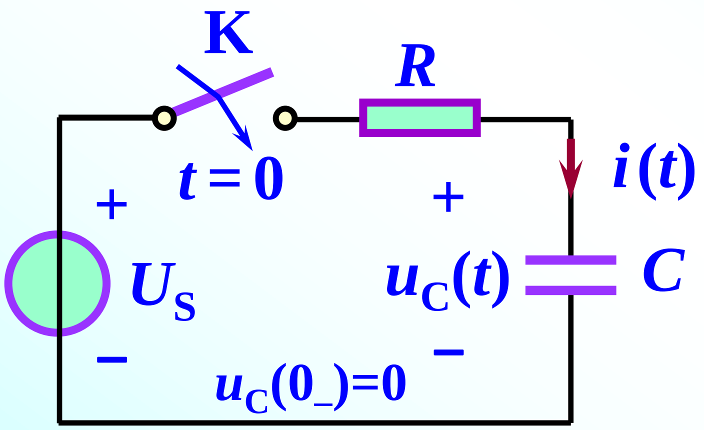
$u_C(t)=0$（假设电容未充过电）

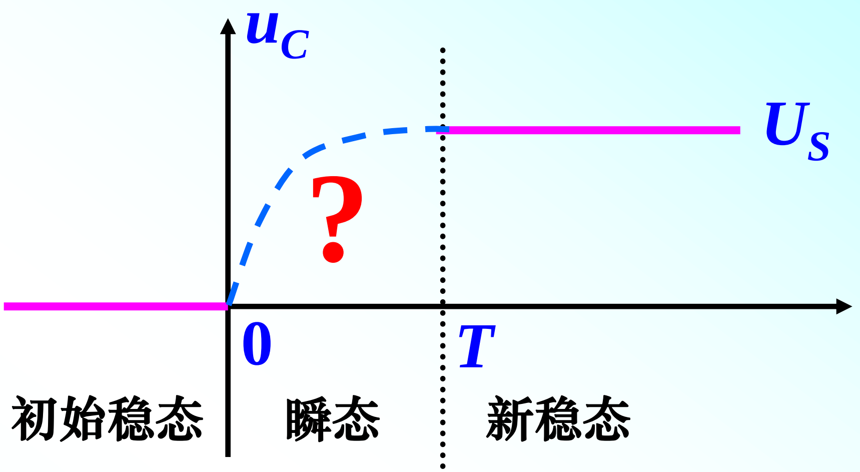
K闭合很长一段时间后稳态：

$i(t)=0$

$u_C(t)=U_S$

4. 瞬态—又称为暂态、非稳态，是电路从一个稳态到另一个稳态之间的过渡过程, 电路不处于稳态即处于瞬态。





电路产生瞬态过程的原因和条件

原因： 在换路瞬间储能元件C或L的能量不能跃变，即能量的储存和释放需要一定的时间来完成。

条件：（1）电路含有储能元件 C 或 L且储能发生变化;

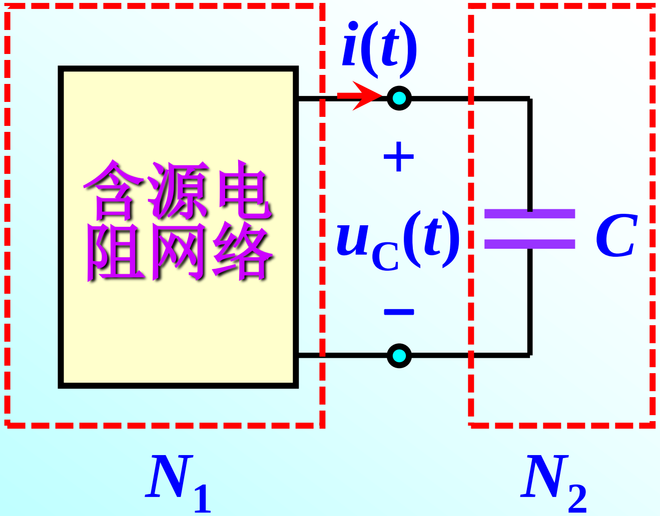
（2）电路发生换路。

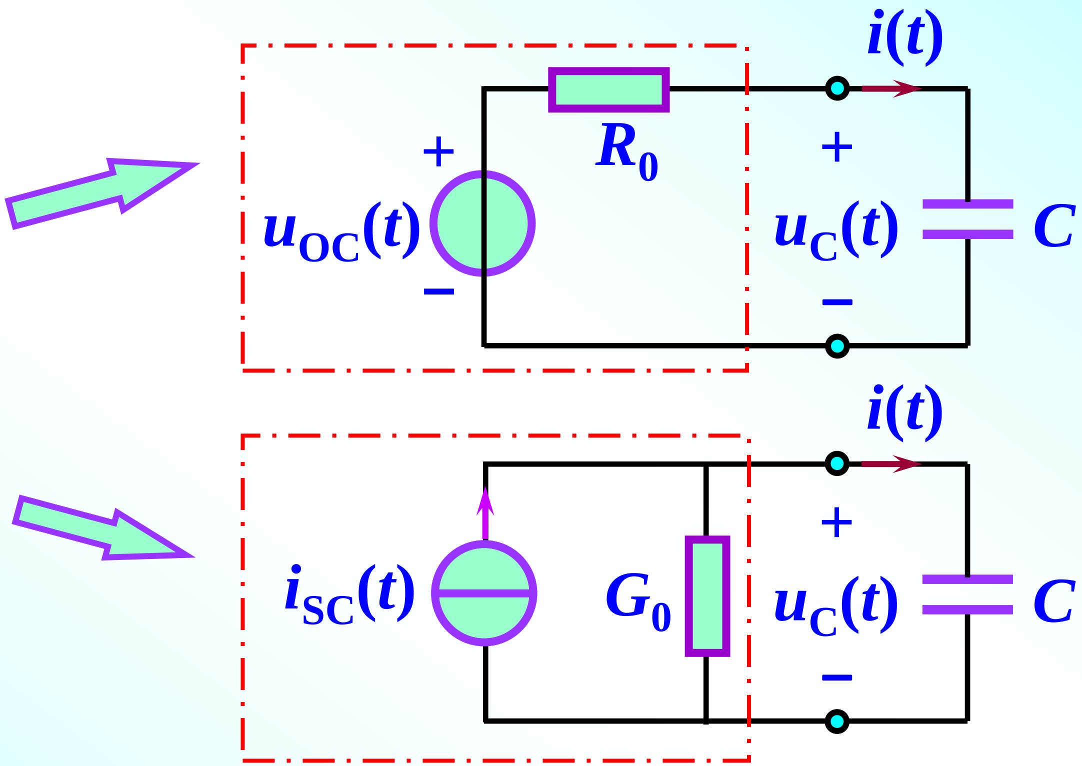
5. 稳态分析和瞬态分析的区别

稳　　态	瞬　　态
换路发生很长时间后	换路刚刚发生
I_L、 U_C 不变	i_L 、 u_C 随时间变化
代数方程组描述电路	微分方程组描述电路

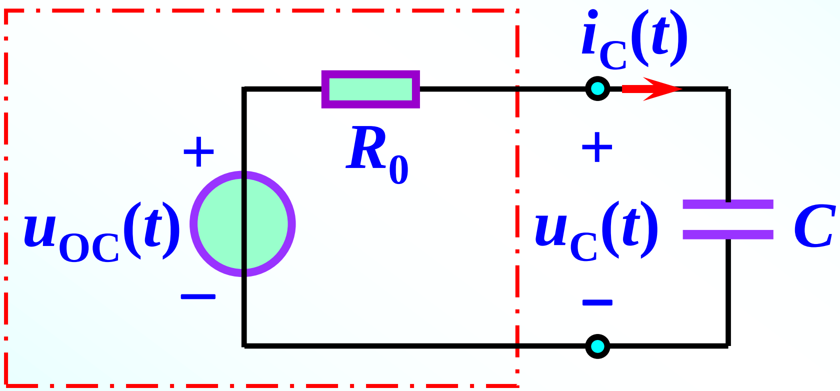
§6-1 分解方法在动态电路分析中的应用

分解一阶电路：含源线性电阻网络和动态元件





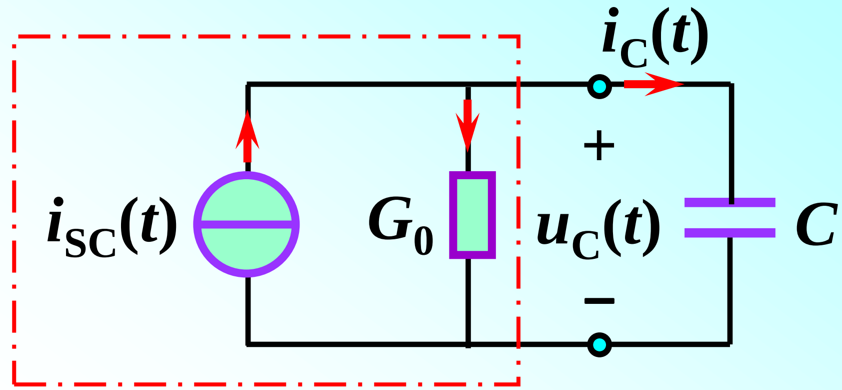
戴维南等效电路



$$\begin{cases} R_0\, i_C(t) + u_C(t) = u_{OC}(t) \\ i_C(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$\boxed{R_0 C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = u_{OC}(t)}$$

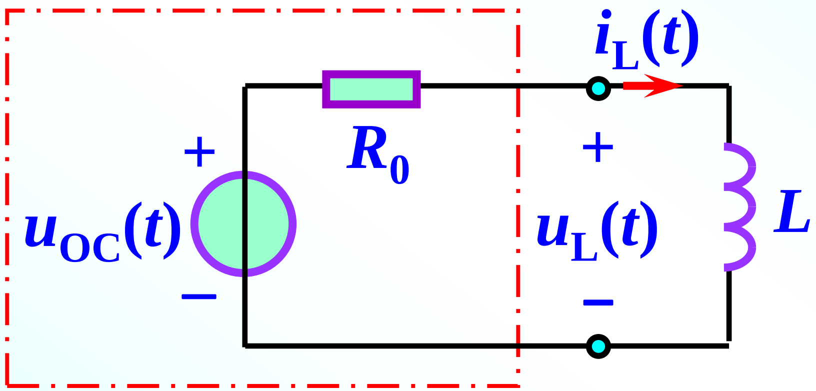
诺顿等效电路

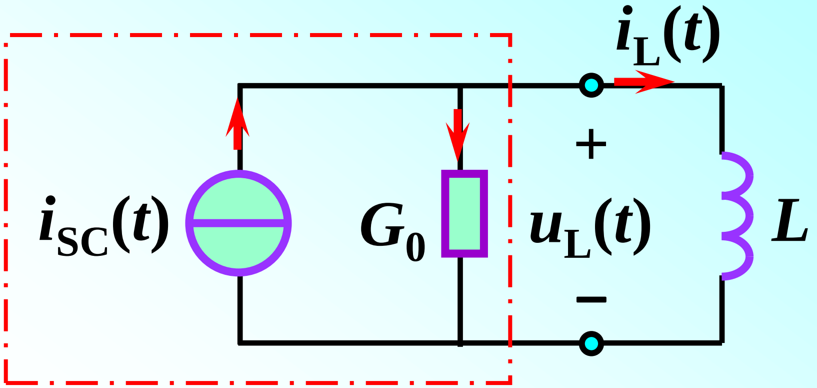


$$\begin{cases} i_C(t) + G_0\, u_C(t) = i_{SC}(t) \\ i_C(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$\boxed{C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + G_0\, u_C(t) = i_{SC}(t)}$$

电感





$$\begin{cases} R_0 i_L(t) + u_L(t) = u_{OC}(t) \\ u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}\,t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_L(t) + G_0 u_L(t) = i_{SC}(t) \\ u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}\,t} \end{cases}$$

$$L\frac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}\,t} + R_0 i_L(t) = u_{OC}(t)$$

$$G_0 L\frac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}\,t} + i_L(t) = i_{SC}(t)$$

电容 $$R_0 C \frac{\mathrm{d}\, u_C(t)}{\mathrm{d}\, t} + u_C(t) = u_{OC}(t)$$

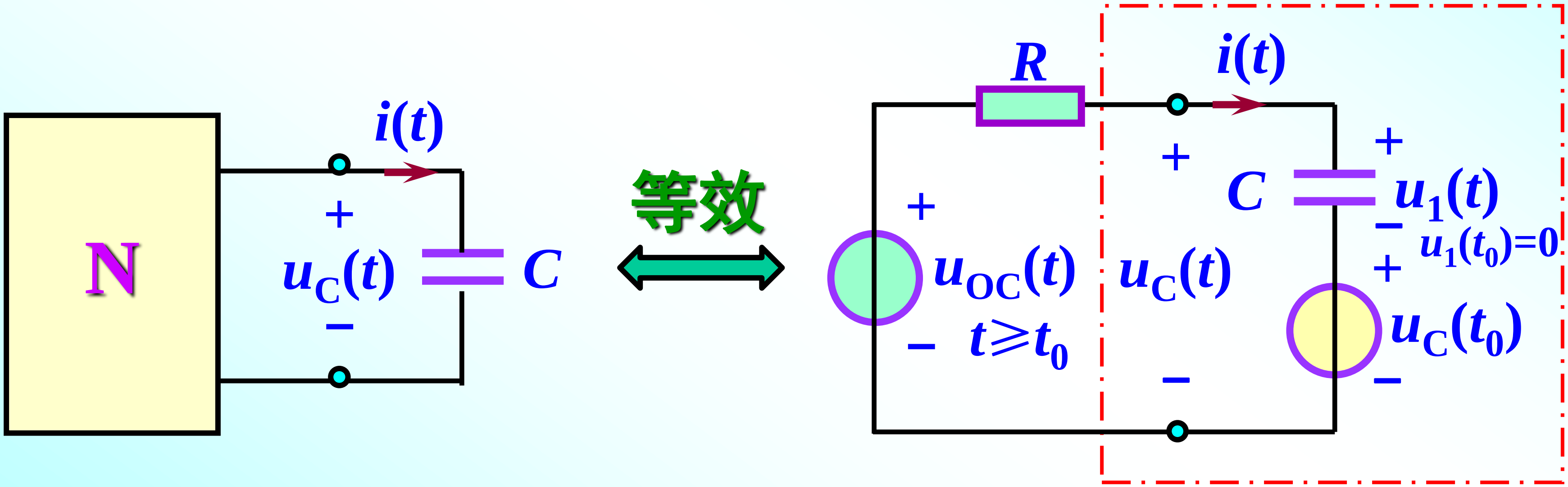
电感 $$G_0 L \frac{\mathrm{d}\, i_L(t)}{\mathrm{d}\, t} + i_L(t) = i_{SC}(t)$$

- 给定初始条件$u_C(t_0)$或 $i_L(t_0)$则可求出$u_C(t)$或 $i_L(t)$。
- 用电压源$u_C(t)$或电流源 $i_L(t)$去置换电容或电感，则原电路变换成一个电阻电路。

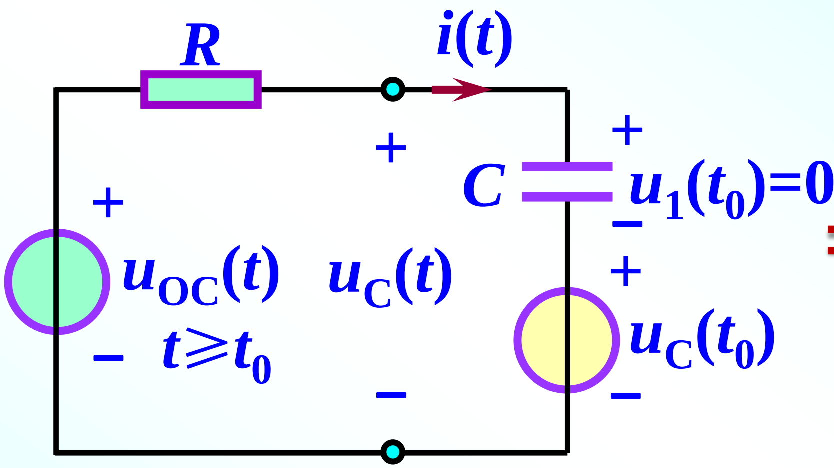
如何求$u_C(t)$？

设电容在$t=t_0$时刻与含源单口网络连接

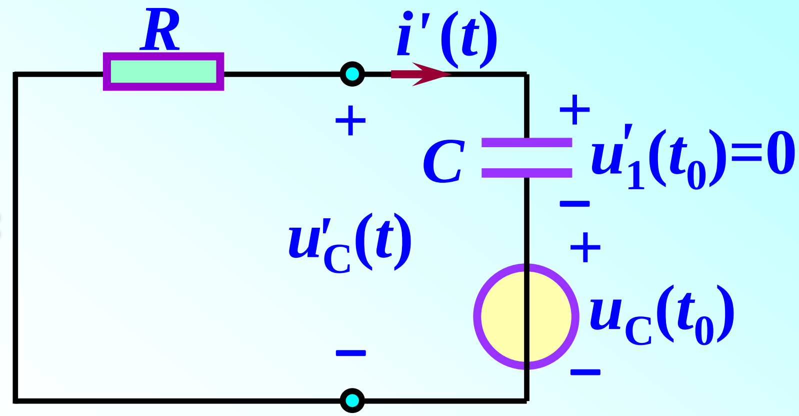
$$u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)\,\mathrm{d}\xi = u_C(t_0)+u_1(t) \quad t\geqslant t_0$$



初始值为$u_C(t_0)$的电容

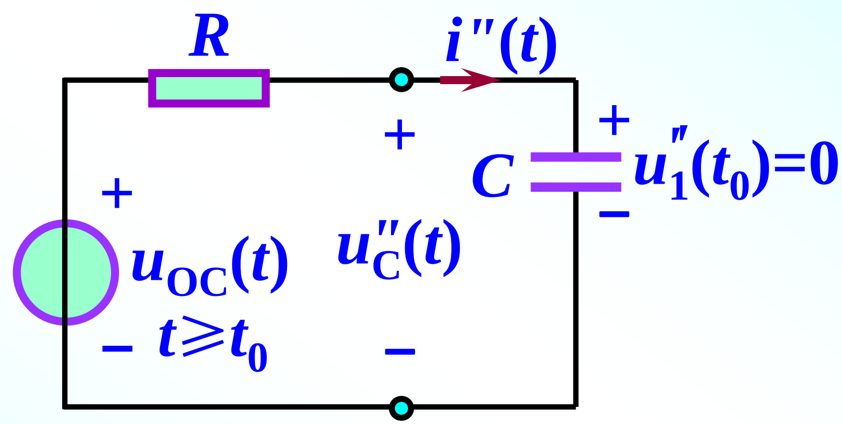


=



零输入响应

+



零状态响应

全响应：$u_C(t)=u_C'(t)+u_C''(t)$

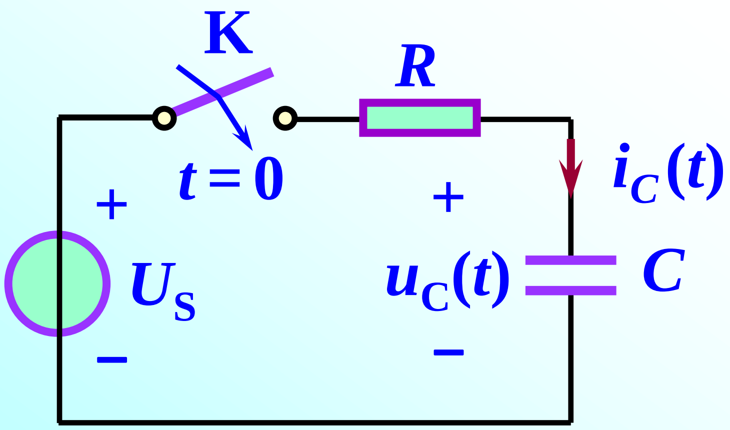
零输入响应： 在$t \geqslant t_0$时，在零输入情况下，仅由非零初始状态引起的响应。

零状态响应： 在$t \geqslant t_0$时，在零初始状态下，仅由电路的输入引起的响应。

6-2 零状态响应 (zero state response)

在动态元件零初始状态下，仅由电路的输入（激励）引起的响应。

一、RC 电路的零状态响应



取 $t_0=0$，激励为直流电压源U_S。

零状态响应的条件：

（1） $u_C(0)=0$；

（2） $t=0$ 时，加入电源 U_S。

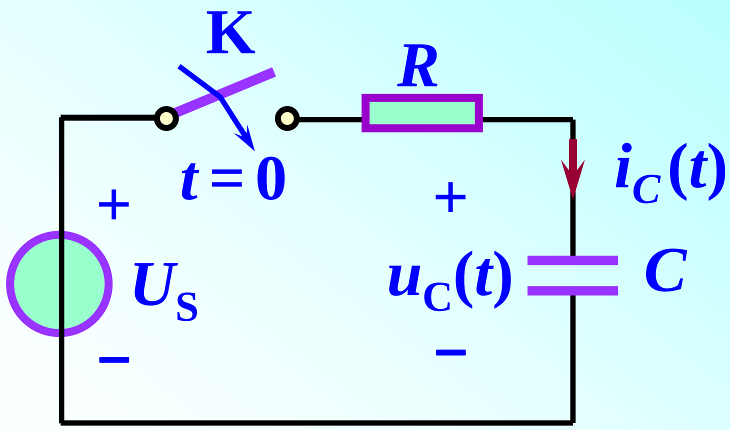
由换路定律：

$$u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

1. 响应的物理分析

$t=0_+$ 时， $u_C(0_+) = u_C(0_-)=0$

$i_C(0_+)=U_S/R$



$t>0$ 时，

$$i_C(t)=\frac{U_S-u_C(t)}{R}=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}>0$$

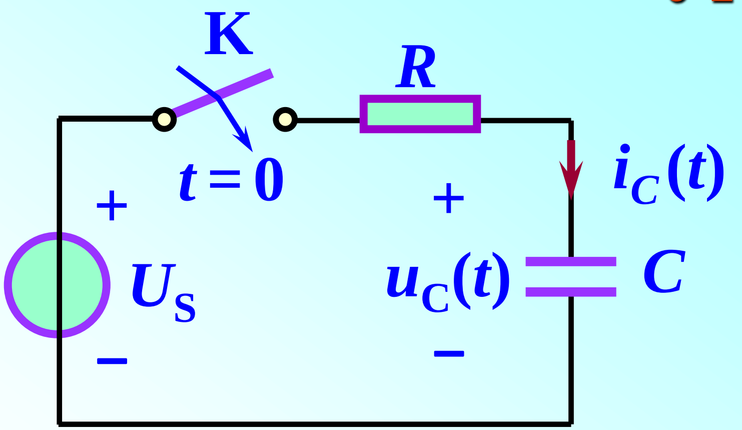
$t\to\infty$时，

$$u_C(\infty)=U_S$$

$$i_C(\infty)=C\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t\to\infty}=0$$

t	$t<0$	$t=0$	$t>0$	$t\to\infty$
u_C	0	0	↑	U_S
i_C	0	U_S/R	↓	0

2. 响应的数学分析



$$RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=U_S \quad t\geq 0$$

初始条件：$u_C(0)=0$

解： $$\frac{du_C}{dt}=\frac{U_S-u_C}{RC}\Rightarrow -\frac{d(U_S-u_C)}{U_S-u_C}=\frac{1}{RC}dt$$

两边积分得：$$-\ln(U_S-u_C)=\frac{1}{RC}t+K\rightarrow u_C(t)=U_S-e^{-K}e^{-t/RC}$$

由初始条件 $u_C(0)=0$ 有：$e^{-K}=U_S$

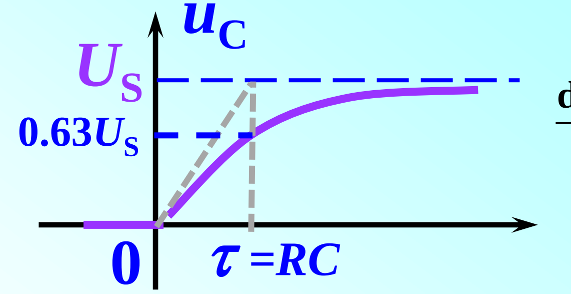
$$\therefore u_C(t)=U_S(1-e^{-t/RC}) \qquad t\geqslant 0$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=\frac{U_S}{R}e^{-t/RC} \qquad t>0$$

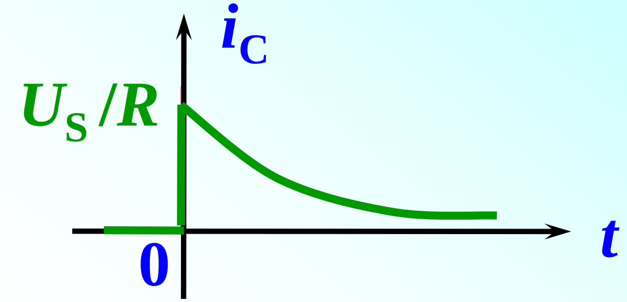
3. 响应的波形

$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-t/RC}) \qquad t \geqslant 0$$

$$i_C(t) = \frac{U_S}{R} e^{-t/RC} \qquad t > 0$$



$$\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{U_S}{RC}$$



t	u_C/U_S (%)
τ	63.2
2τ	86.5
3τ	95.02
4τ	98.17
5τ	99.326
6τ	99.909

$u_C(t)$ 的波形是按指数规律上升，最终趋于**稳态值**$u_C(\infty)=U_S$，其变化快慢取决于**时间常数**$\tau = RC$。

工程上，$t=(4\sim5)\tau$时，电容的充电过程基本结束。

4. 能量分析

在 C 充电到 U_S 时的储能为： $W_C = \frac{1}{2}CU_S^2$

在 C 充电过程中 R 消耗的总能量：

$$W_R = \int_0^\infty i_C^2(t)\cdot R\,dt = \int_0^\infty \left(\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 R\,dt = \int_0^\infty \frac{U_S^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$

$$= \frac{U_S^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)e^{-\frac{2t}{RC}}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{2}CU_S^2$$

电源提供的总能量： $W = W_C + W_R = CU_S^2$

5. 其它响应

利用置换定理可求出电路中其它电压、电流的表达式。

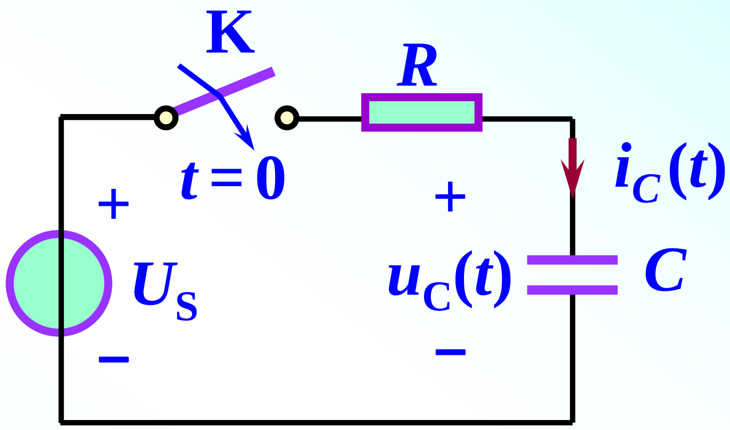
状态变量的概念

在电路及系统理论中，状态变量是指一组最少的变量。若已知它们在 t_0 时刻的数值（即初始状态），连同电路在$t \geq t_0$ 时的输入，即可确定$t \geq t_0$ 时电路的任意变量的数值（即电路响应）。如：$u_C(t)$、$i_L(t)$。

假设以$i_C(t)$作为求解变量

$$Ri_C(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\zeta)d\zeta = U_S \quad t \geq 0$$

$$i_C(0) = 0$$



解： 开关闭合瞬间，$i_C(0)$跃变为

$$i_C(0_+) = \frac{U_S - \boxed{u_C(0_+)\ ?}}{R}$$

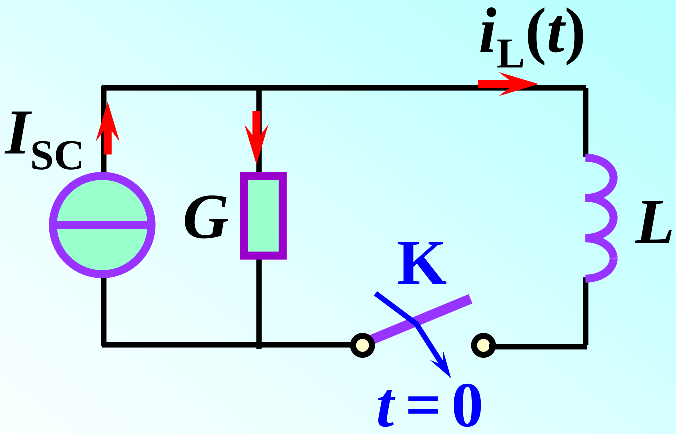
$i_C(t)$不是状态变量；一般不宜以非状态变量作为求解变量。

二、RL 电路的零状态响应

电感的初始状态： $i_L(0)=0$

由换路定律： $i_L(0_+)=i_L(0_-)$

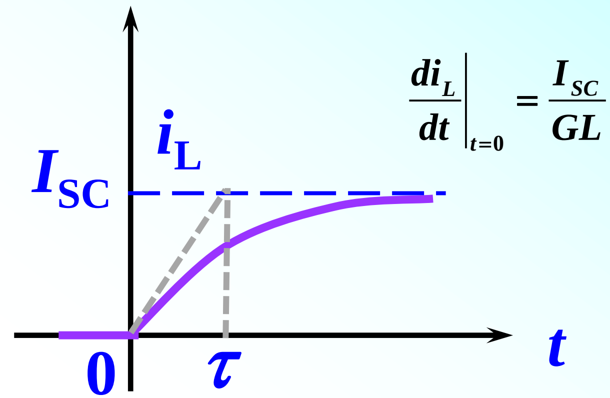
$$GL\frac{d\,i_L(t)}{d\,t}+i_L(t)=I_{SC}$$

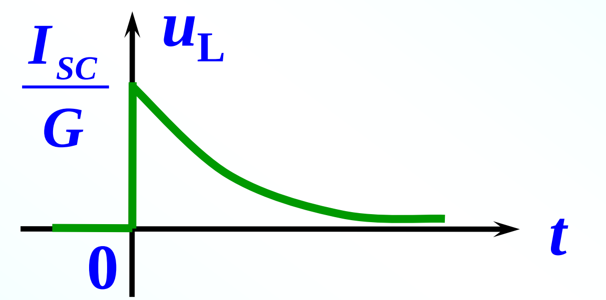


解得电感的响应为

$$i_L(t)=I_{SC}\,(1-e^{-\frac{t}{GL}})\qquad t\geqslant 0$$

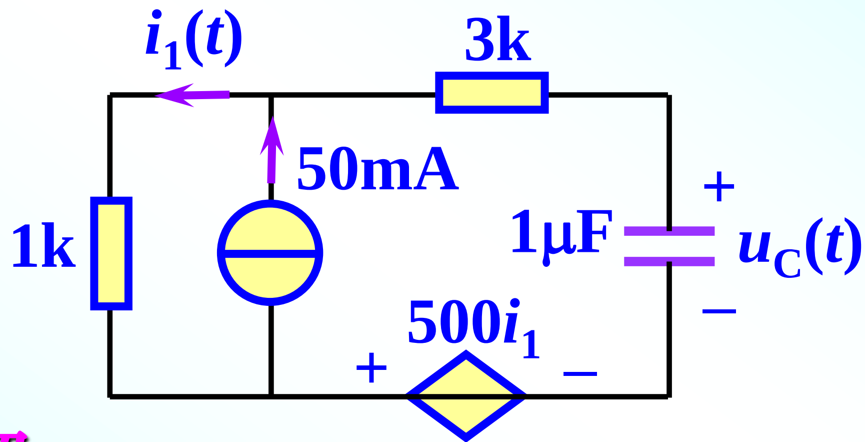
$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=\frac{I_{SC}}{G}e^{-\frac{t}{GL}}\qquad t>0$$

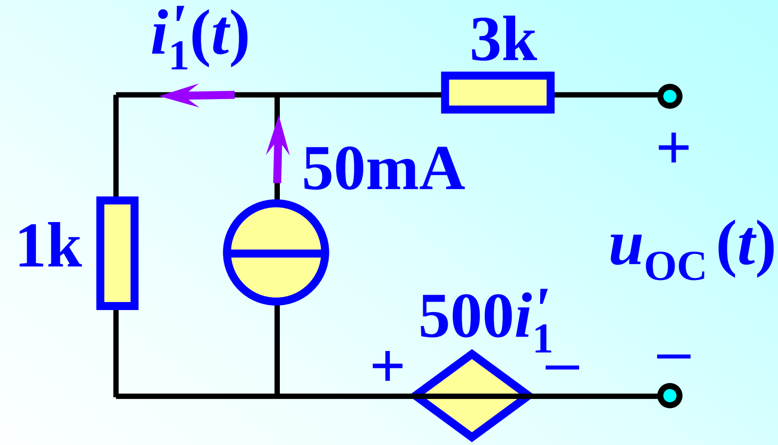




电流稳态值 $i_L(\infty)=I_{SC}$	时间常数 $\tau=GL=L/R$

例1 电容0时刻接入电路，已知$u_C(0)=0$，求：$i_1(t)$ $(t>0)$。



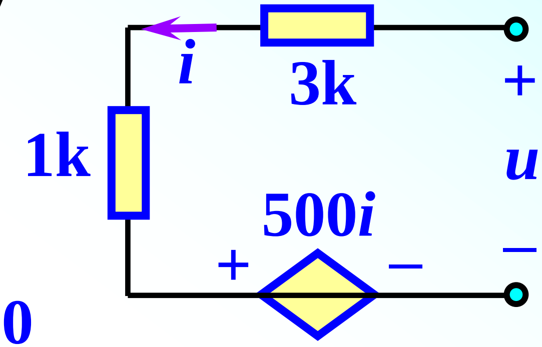


解：

$$u_{OC}=10^3\times 50\text{mA}+500\times 50\text{mA}=75\text{V}$$

$$u=i\cdot 4\text{k}+500\,i=4500\,i$$

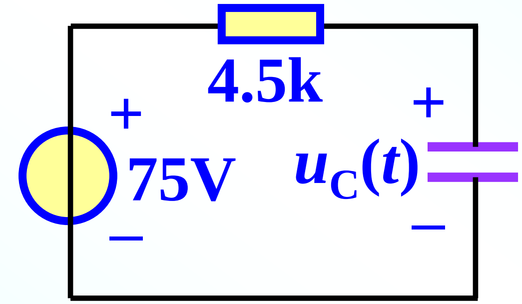
$$R_0=u/i=4.5k\Omega\,,\ \tau=R_0C=4.5\text{ ms}$$



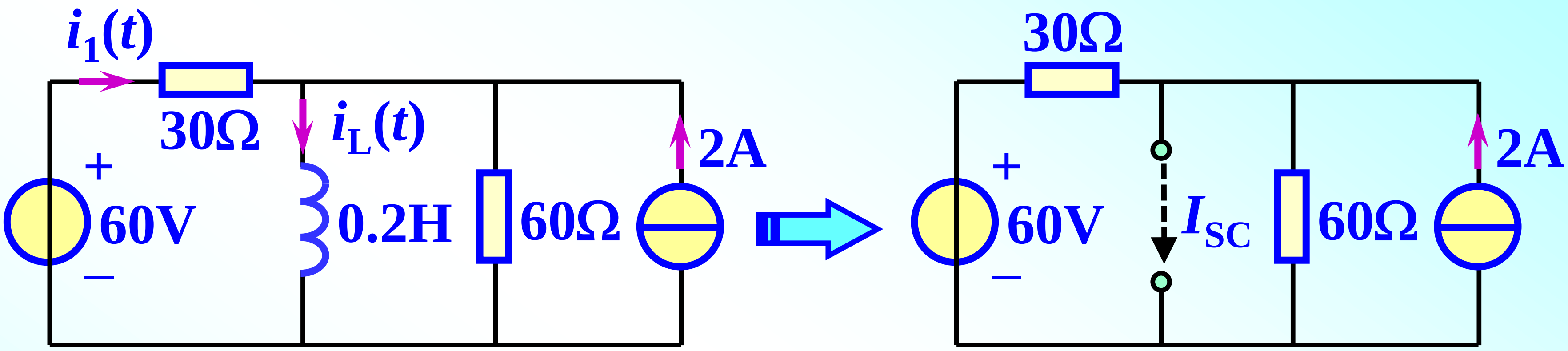
$$u_C(t)=U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=75\,(1-e^{-\frac{t}{4.5\times10^{-3}}})\text{V}\qquad t\geq 0$$

$$i_C(t)=\frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{75}{4.5k}e^{-\frac{t}{4.5\times10^{-3}}}\ \text{A}\qquad t>0$$

$$i_1(t)=50mA-i_C(t)=0.05-\frac{1}{60}e^{-\frac{t}{4.5\times10^{-3}}}\ \text{A}\qquad t>0$$



例2 电感0时刻接入电路，已知 $i_L(0)=0$。求 $i_L(t)$、$i_1(t)$ $(t>0)$。



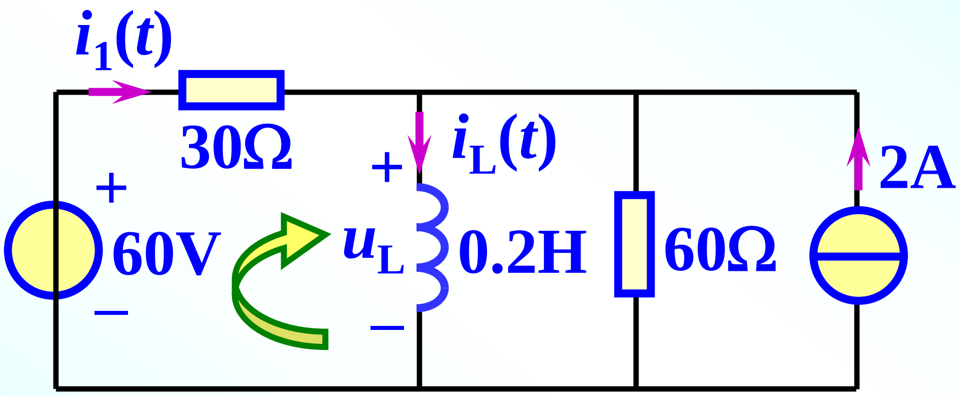
解：(1) 求 $i_L(t)$ $(t\geq 0)$

$$I_{SC}=\frac{60\text{V}}{30\Omega}+2\text{A}=4\text{A},$$

$$R_0=30\,//60=20\,\Omega,\qquad \tau=\frac{L}{R_0}=\frac{1}{100}s$$

$$i_L(t)=I_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=4\,(1-e^{-100t})\,\text{A}\quad (t\geq 0)$$

(2) 求 $i_1(t)$ $(t \geq 0)$



$$i_L(t) = 4(1-e^{-100t})\ \text{A} \qquad t \geq 0$$

由电感VCR $$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = 80e^{-100t}\text{A} \qquad t > 0$$

由KVL $$30\,i_1(t) + u_L(t) - 60 = 0$$

$$i_1(t) = \frac{60 - u_L(t)}{30} = \frac{60 - 80\,e^{-100t}}{30} = 2 - \frac{8}{3}\,e^{-100t}\ \text{A} \qquad t > 0$$

例3 RC定时器 最简单的定时器由一个电容、一个电阻、直流电源和开关串联组成。设电压源电压为200V，R=27MΩ，C=10μF。设$u_C(0)=0$，开关闭合，计时开始，问电容电压显示为51.84V时，经历了多长时间?

解： 稳态值$u_C(\infty)=200\text{V}$，

时间常数$\tau = RC=270\text{s}$，

开关闭合后，电容电压由零开始按指数规律增长。

$$u_C(t) = 200(1 - e^{-\frac{t}{270}})\,\text{V}$$

当$u_C(t) = 51.84$ 时，$t=81\text{s}$.

此定时器最大定时时长：$\approx 5\tau = 1350\text{s}$

零状态响应小结

1. 恒定输入下一阶电路的零状态响应

一阶电路	零状态响应	时间常数
RC电路	$u_C(t)=U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})\quad t\geq 0$	$\tau=RC$
RL电路	$i_L(t)=I_S(1-e^{-\frac{R}{L}t})\quad t\geq 0$	$\tau=\frac{L}{R}$

2. 状态变量 $u_C(t)$、$i_L(t)$ 的零状态响应由零向稳态值按指数规律上升，τ越小上升越快。当电路达到直流稳态时，电容相当于开路，电感相当于短路。

3. 求出 $u_C(t)$、$i_L(t)$，根据置换定理，电容(电感)用电压值为 $u_C(t)$的电压源(电流值为 $i_L(t)$ 的电流源)置换，在置换后的电路中求其它支路的电压、电流。

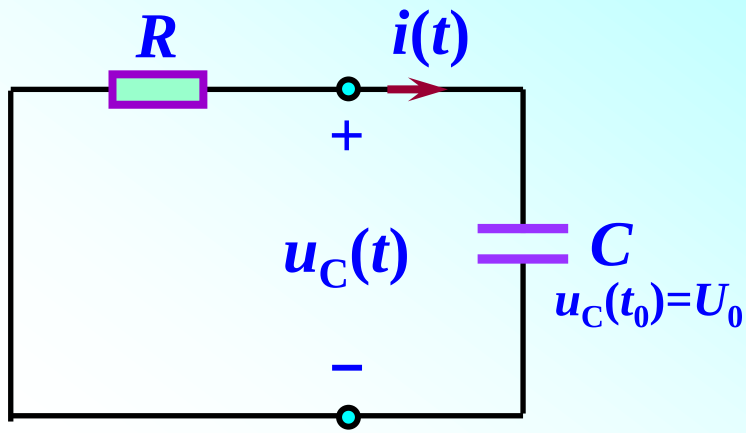
4. 一阶电路的零状态响应是输入的线性函数。输入扩大 a 倍，零状态响应也扩大 a 倍，如有多个电压源作用，也可用叠加定理来求零状态响应。

$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad i_L(t) = I_S(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

5. 求解直流激励下一阶电路零状态响应$u_C(t)$、$i_L(t)$ 时，可不列微分方程，直接使用结论。对非直流激励或非渐进稳定电路，则需列微分方程求解 。

6-4 零输入响应

零输入响应： 在零输入情况下(无外加独立源)，仅由动态元件非零初始状态引起的响应。



一、RC 电路的零输入响应

1. 响应的形式

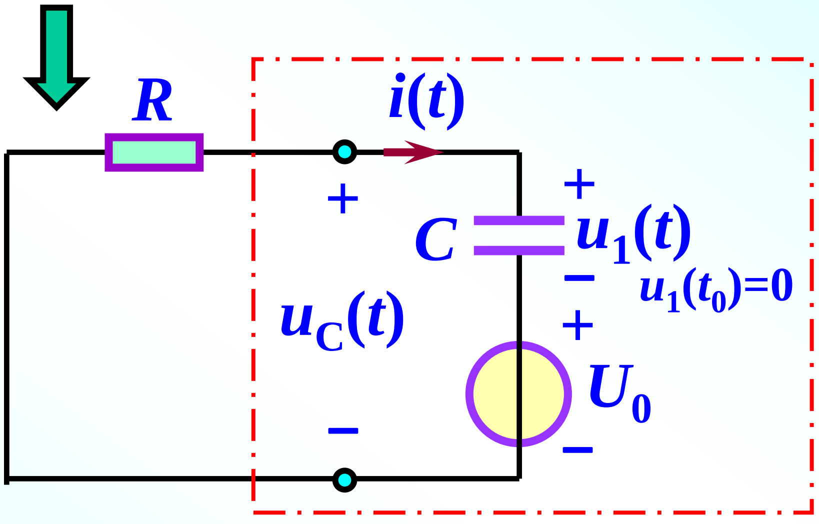
令 $t_0=0$，电路初始条件为

$$u_C(0)=U_0$$

方法1： 把$u_1(t)$看做独立电压源$-U_0$作用下的零状态响应。

$$\therefore\quad u_1(t)=-U_0(1-e^{-t/RC})\qquad t\geqslant 0$$

$$\text{则}\ u_C(t)=u_1(t)+U_0=U_0e^{-t/RC}\qquad t\geqslant 0$$



初始值为U_0的电容

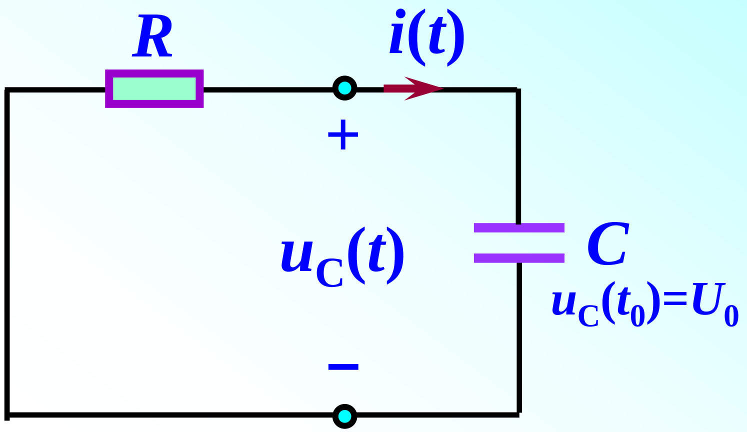
方法2：列写微分方程并求解

根据KVL有

$$R \cdot i(t) + u_C(t) = 0$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = 0$$

初始条件：$u_C(0) = U_0$



解得：

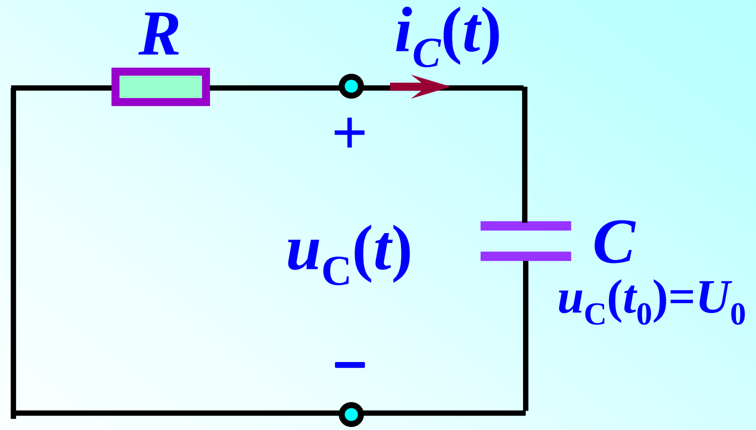
$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geqslant 0$$

2. 响应的波形

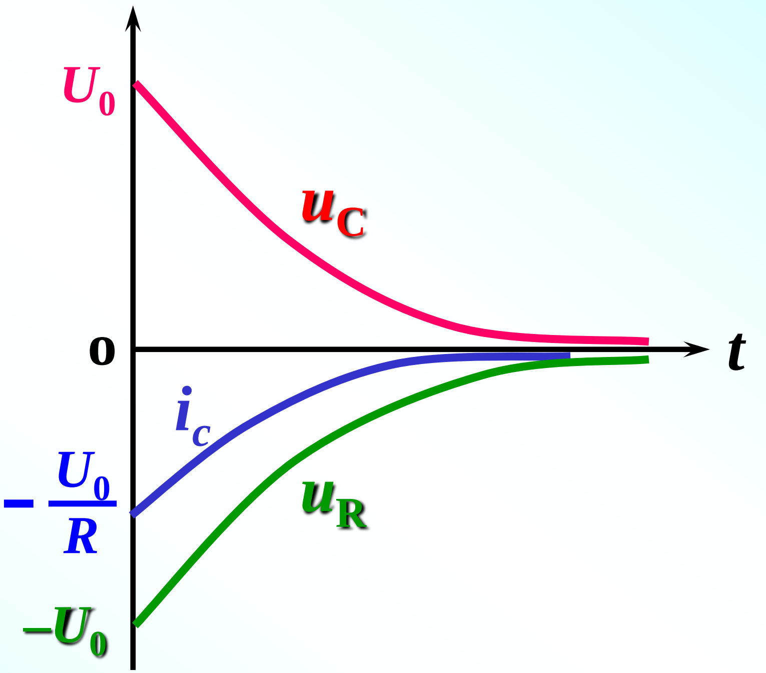
$$u_C(t)=U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geqslant 0$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=-\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t>0$$

$$u_R(t)=-u_C(t)=-U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t>0$$



各个响应 $u_C(t)$、$i(t)$、$u_R(t)$ 的波形均为按指数规律衰减的曲线，其衰减的快慢取决于电路参数 RC 的乘积，与初始值 U_0 的大小无关。

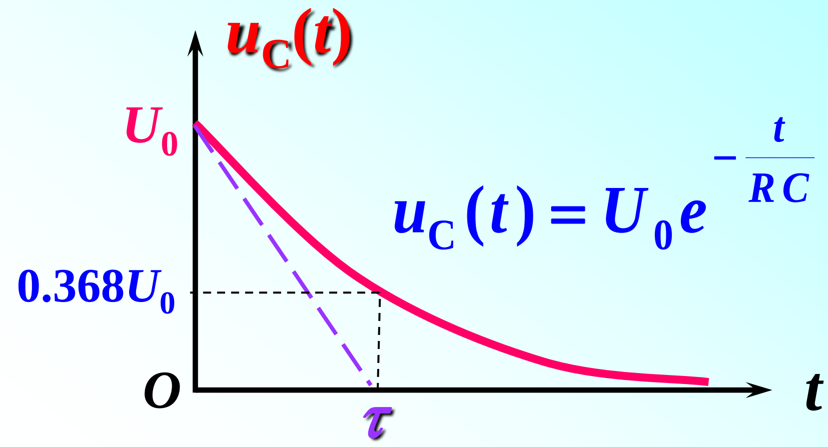


响应随时间变化的曲线

3. 时间常数

时间常数 $\tau = RC$

t	$u_C/U_0(\%)$
τ	36.8
2τ	13.5
3τ	4.98
4τ	1.83
5τ	0.674
6τ	0.0912
7τ	0.00454
8τ	3.72×10^{-42}



$$u_C(\tau) = U_0 e^{-\frac{\tau}{RC}} = U_0 e^{-1} = 0.368U_0$$

时间常数 τ 越大，衰减越慢；

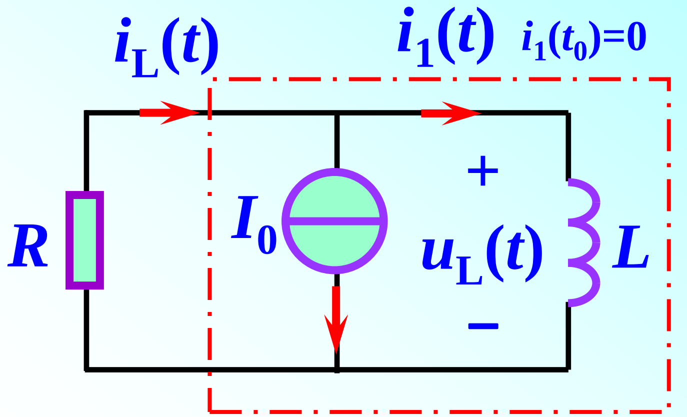
时间常数 τ 越小，衰减越快。

在工程上，通常认为 $t \geq (4\sim5)\tau$ 时，电容放电过程基本结束。

二、RL电路的零输入响应

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\xi)\,\mathrm{d}\xi = I_0 + i_1(t) \quad t \geqslant t_0$$

初始值 $i_L(t_0) = I_0$的电感可等效为初始电流为零的电感与电流源 I_0 的并联。



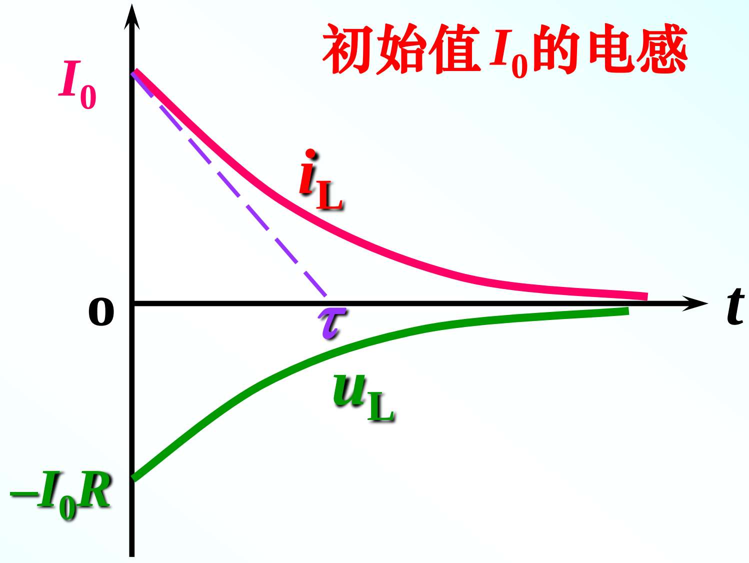
初始值I_0的电感

$$i_1(t) = -I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad t \geqslant 0$$

$$i_L(t) = I_0 + i_1(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geqslant 0$$

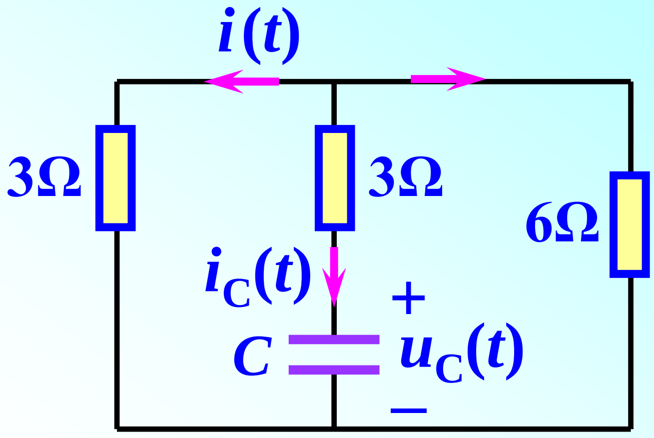
$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}\,t} = -R\,I_0\,e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0$$

RL电路的时间常数 $\tau = L/R$



响应随时间变化的曲线

例1 电路在0时刻闭合，已知：$C=0.01\text{F}$，$u_C(0)=15\text{V}$，求：$u_C(t)$，$i(t)$ （$t>0$）



解： $u_C(0_+)=u_C(0)=15\text{V}$

$$R_0=\frac{3\times 6}{3+6}+3=2+3=5\ \Omega$$

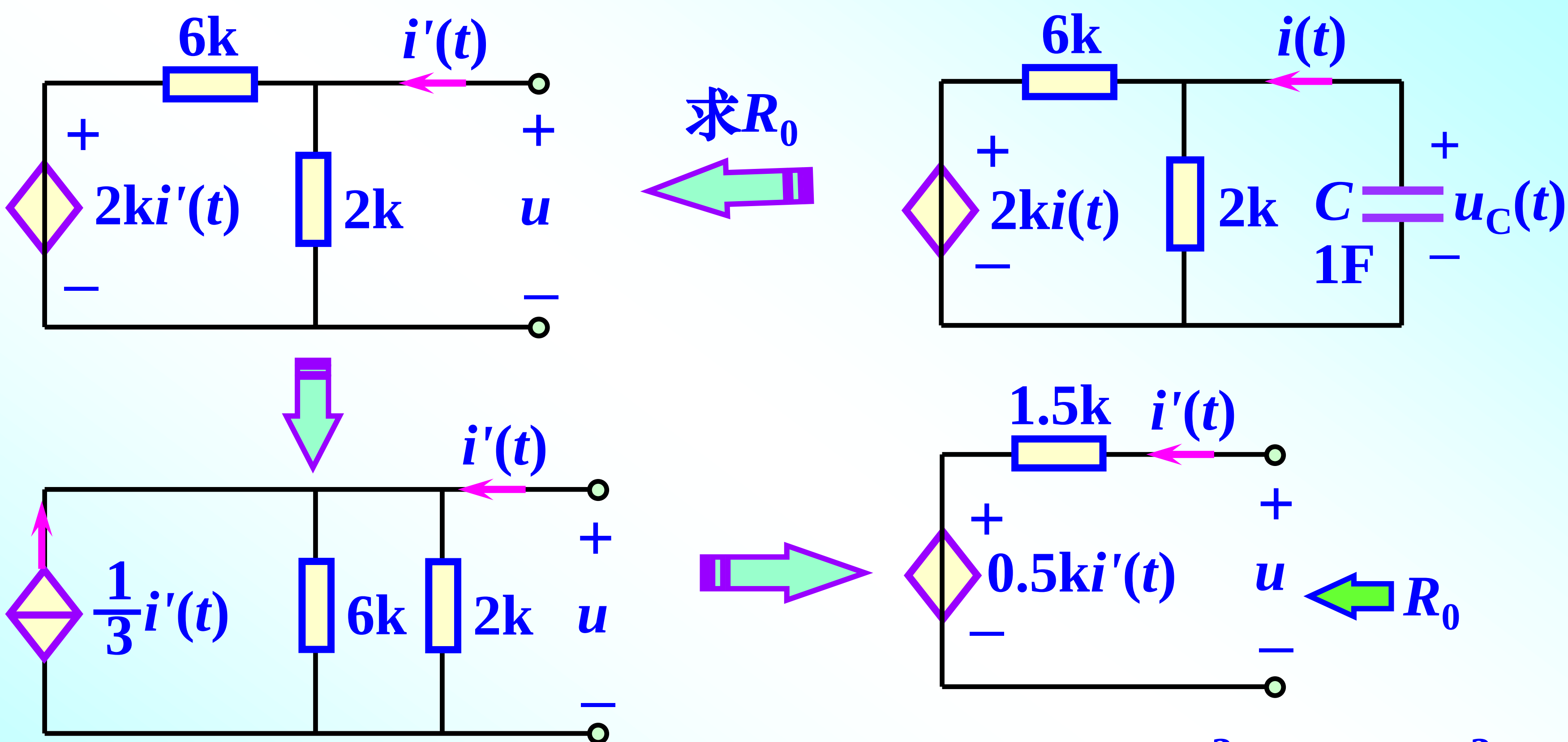
$$\tau=R_0C=5\times 0.01=0.05\ \text{s}$$

$$u_C(t)=u_C(0)\,e^{-t/\tau}=15\,e^{-20t}\ \text{V}\qquad t\geq 0$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-3\,e^{-20t}\ \text{A}\qquad t>0$$

由分流规则： $$i(t)=-\frac{2i_C(t)}{3}=2\,e^{-20t}\ \text{A}\qquad t>0$$

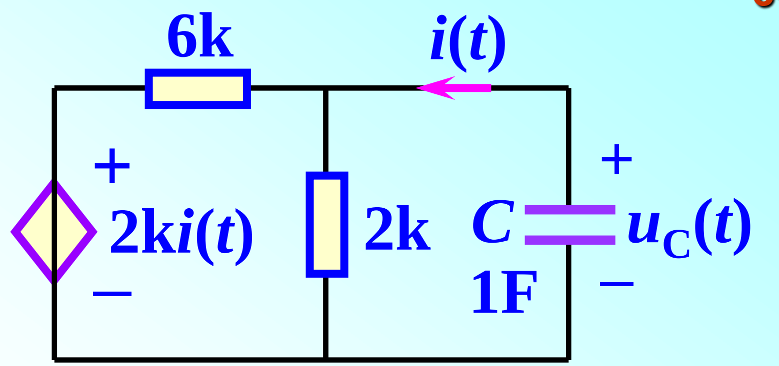
例2 电路0时刻闭合，已知：$u_C(0)=6V$，求 $i(t)$，$t>0$。



$$6k\ //\ 2k=\frac{2\times 6}{2+6}=1.5\,k\Omega$$

$$u=(1.5+0.5)\times 10^3 i'=2\times 10^3 i'$$

$$R_0=\frac{u}{i'}=2\times 10^3\ \Omega$$



$$R_0 = 2\times 10^3\ \Omega$$

$$\tau = R_0 C = 2\times 10^3\ \text{s}$$

$$u_C(t) = u_C(0)e^{-t/\tau} = 6e^{-0.0005t}\ \text{V} \qquad t \ge 0$$

$i(t)$与$u_C(t)$为非关联方向

$$\therefore i(t) = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 3e^{-0.0005t}\ \text{mA} \qquad t > 0$$

零输入响应小结

1. 一阶电路的零输入响应

一阶电路	零输入响应	时间常数
*RC*电路	$u_C(t)=U_0e^{-\frac{t}{RC}} \quad t\geq 0$	$\tau=RC$
*RL*电路	$i_L(t)=I_0e^{-\frac{R}{L}t} \quad t\geq 0$	$\tau=\frac{L}{R}$

2. 零输入响应是依靠动态元件的初始储能进行的，若电路中存在耗能元件，则零输入响应按指数规律衰减并终将为零，其中包括状态变量和非状态变量的响应。衰减的快慢由时间常数τ决定：τ越小，衰减越快。

3. 求出 $u_C(t)$ 或 $i_L(t)$ 再根据置换定理，用电压为$u_C(t)$ 的电压源置换电容，用电流值为$i_L(t)$的电流源置换电感，在置换后的电路中求其它电压和电流；

4. 一阶电路的零输入响应代表了电路的固有性质，称为固有响应，$s = -1/\tau$ 称为固有频率(即特征方程的特征根)；

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=0$$ 特征方程：$RC\times s+1=0 \Rightarrow s=-\dfrac{1}{RC}=-\dfrac{1}{\tau}$

5. 线性一阶电路的零输入响应是初始状态的线性函数，即初始状态增大 a 倍，零输入响应也增大 a 倍。

$$u_C(t)=U_0e^{-\frac{t}{RC}} \qquad i_L(t)=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

知识回顾

一阶电路	零状态响应	时间常数
RC电路	$u_C(t)=U_S(1-e^{-t/\tau})\quad t\geq 0$	$\tau=RC$
RL电路	$i_L(t)=I_S(1-e^{-t/\tau})\quad t\geq 0$	$\tau=L/R$

全响应

零状态响应 $y(t)=y(\infty)(1-e^{-t/\tau})\quad t\geqslant 0$ 　$y(\infty)$: 稳态值

— 响应形式只适用于状态变量$u_C(t)$和$i_L(t)$。

一阶电路	零输入响应	时间常数
RC电路	$u_C(t)=U_0e^{-t/\tau}\quad t\geq 0$	$\tau=RC$
RL电路	$i_L(t)=I_0e^{-t/\tau}\quad t\geq 0$	$\tau=L/R$

零输入响应 $y(t)=y(0_+)e^{-t/\tau}\quad t\geqslant 0$ 　$y(0_+)$: 初始值

— 响应形式适用于状态变量和非状态变量。

§6-5 线性动态电路的叠加原理

线性一阶电路的叠加原理包含三点:

(1) 全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

(2) 零输入响应线性

零输入响应 $y'(t) = y(0_+)\,e^{-t/\tau} \qquad t \geqslant 0$

— 对于一阶电路，指响应与初始状态的比例性。

(3) 零状态响应线性

零状态响应 $y''(t) = y(\infty)\,(1 - e^{-t/\tau}) \qquad t \geqslant 0$

— 指响应对某一激励的比例性、对多个激励的叠加性。

非零初始状态全响应

$$y(t)=y'(t)+y''(t)=y(0_+)\,e^{-t/\tau}+y(\infty)\,(1-e^{-t/\tau})$$

例如：$u_C(t)=U_0\,e^{-t/\tau}+U_S\,(1-e^{-t/\tau})$

- 全响应与激励无比例性：

  当U_S增大一倍，$u_C(t)$不随之增大一倍

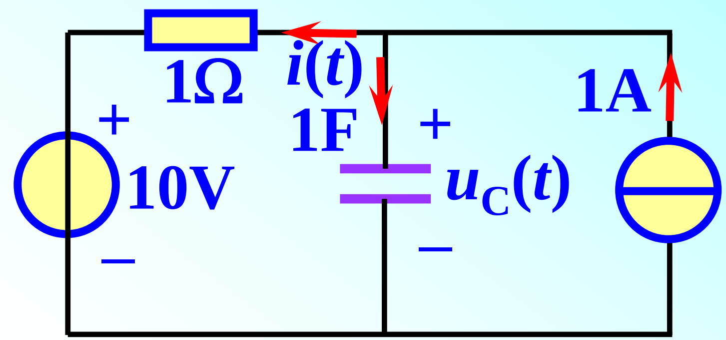
- 全响应与多个激励不满足叠加原理：

  当U_{S1}和U_{S2}同时作用时，$u_C(t)$不等于U_{S1}和U_{S2}单独作用下响应之和。

对非零初始状态电容和电感，其全响应与激励不呈线性关系。

多个激励作用时，全响应不满足叠加原理

例 各电源在 $t=0$ 时接入，$u_C(0)=1\text{V}$，求 $u_C(t)\ (t>0)$



解： 除电容外，戴维南等效电路

$u_{OC}=1+10=11\text{V}$， $R_0=1\Omega$

$\tau=R_0C=1\ \text{s}$

	零输入响应	零状态响应	全响应
电压源单独作用	e^{-t}	$10(1-e^{-t})$	$10-9e^{-t}$
电流源单独作用	e^{-t}	$1(1-e^{-t})$	-
两源同时作用	e^{-t}	$11(1-e^{-t})$	$11-10e^{-t}$

叠加 $=11-9e^{-t}$

$\neq 11-10e^{-t}$

原因：零输入响应重复叠加

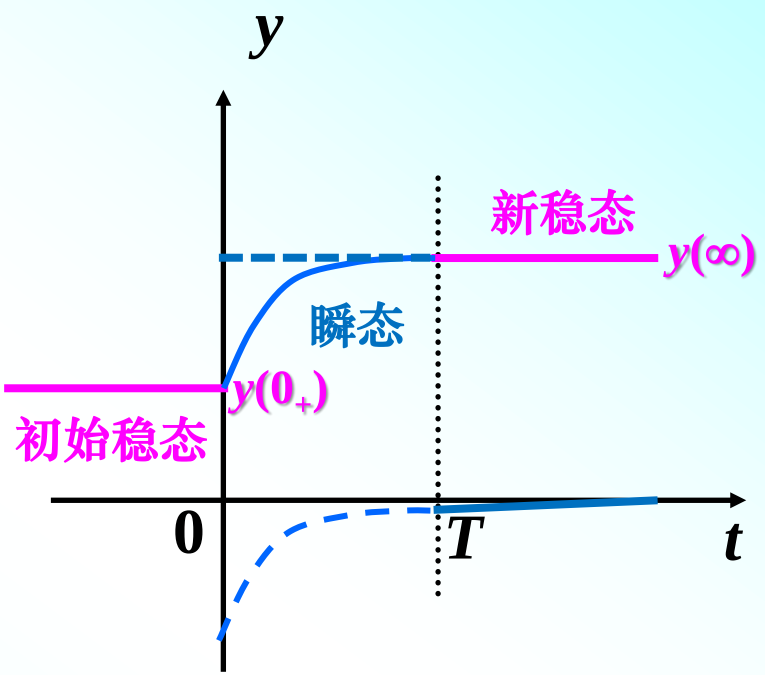
§6-6 三要素法

全响应 =零输入响应 + 零状态响应

$$y(t) = y'(t) + y''(t) = y(0_+)\, e^{-t/\tau} + y(\infty)\,(1- e^{-t/\tau}) \quad t > 0$$

整理得

$$y(t) = \underbrace{y(\infty)}_{\text{稳态响应}} + \underbrace{[\, y(0_+) - y(\infty)\,]\, e^{-t/\tau}}_{\text{瞬(暂)态响应}}$$



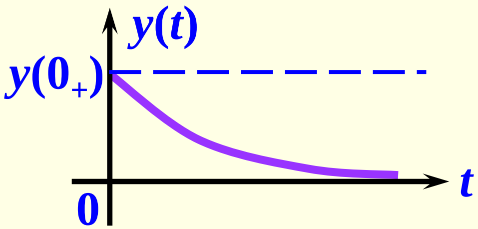
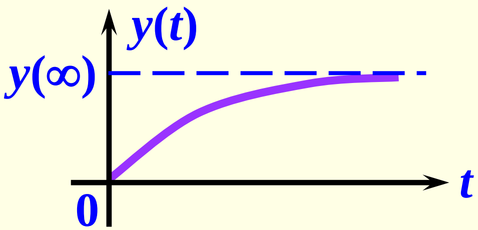
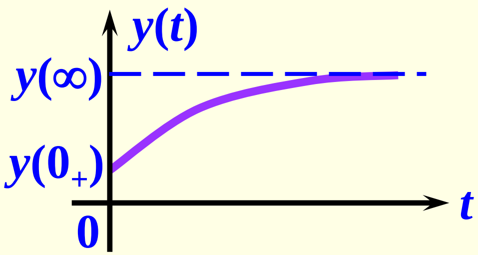
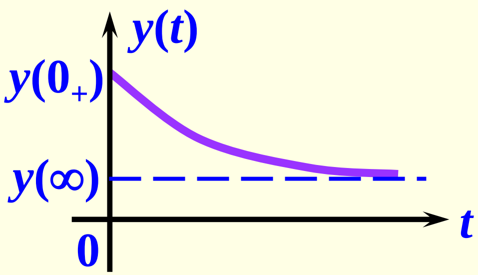
三要素：初始值 $y(0_+)$、稳态值 $y(\infty)$、时间常数τ

三要素法：对于直流激励下的一阶电路, 全响应为

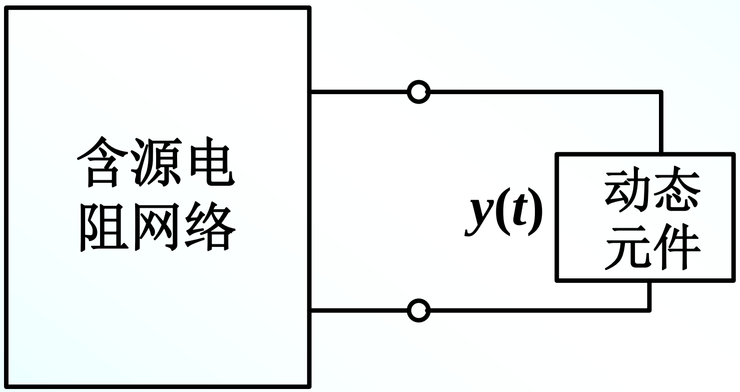
$$y(t) = y(\infty) + [\, y(0_+) - y(\infty)\,]\, e^{-t/\tau} \quad t > 0$$

适应于：状态变量和非状态变量。

全响应波形

<table>
<tr><td>零输入响应</td><td>$y(t)=y(0_+)e^{-t/\tau}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>零状态响应
(状态变量)</td><td>$y(t)=y(\infty)(1-e^{-t/\tau})$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>全响应
$y(\infty)>y(0_+)$</td><td>$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]e^{-t/\tau}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>全响应
$y(\infty)<y(0_+)$</td><td>$y(t)=y(\infty)+[y(0_+)-y(\infty)]e^{-t/\tau}$</td><td>
</td></tr>
</table>

三要素公式证明



设电容电压或电感电流全响应为$y(t)$，求任意支路的电压或电流$x(t)$ =?

解： 动态元件用值为 $y(t)$的电压源或电流源置换。

设含源电阻网络中所有独立源一起作用时在所求支路产生的响应为X，并设独立源$y(t)$单独作用时的网络函数为H_0, 则

$$x(t) = H_0 y(t) + X = H_0\left[y(\infty) + \left[y(0_+) - y(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}}\right] + X$$

$$= \underbrace{H_0 y(\infty) + X}_{x(\infty)} + \left[\underbrace{H_0 y(0_+) + X}_{x(0_+)} - \underbrace{H_0 y(\infty) - X}_{x(\infty)}\right]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\therefore\quad x(t) = x(\infty) + \left[x(0_+) - x(\infty)\right]e^{-\frac{t}{\tau}},\quad t > 0$$

一阶电路的数学模型是一阶线性微分方程：

$$a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+by=c$$

其解一般形式为： $y(t)=\underbrace{y^*(t)}_{\text{特解（稳态解）}}+\underbrace{Ae^{-t/\tau}}_{\text{通解（瞬态解）}}$

令 $t=0_+$，则 $y(0_+)=y^*(0_+)+A$

$$\Rightarrow \quad A=y(0_+)-y^*(0_+)$$

$$\therefore \quad y(t)=y^*(t)+\left[y(0_+)-y^*(0_+)\right]e^{-t/\tau}$$

直流激励时： $y^*(t)=y^*(0_+)=y(\infty)$

$$\therefore \quad y(t)=y(\infty)+\left[y(0_+)-y(\infty)\right]e^{-t/\tau}$$

利用三要素法求解一阶动态电路的步骤

1. 求初始值 $y(0_+)$

（1）画出 $t = 0_-$ 时的等效电路: C-开路, L-短路, 求 $u_C(0_-)$, $i_L(0_-)$;

（2）画出 $t = 0_+$ 时的等效电路:

C — 用电压值等于 $u_C(0_+)$ 的电压源置换

L — 用电流值等于 $i_L(0_+)$ 的电流源置换

（3）在 $t = 0_+$ 的等效电路中求初始值 $y(0_+)$;

2. 求稳态值 $y(\infty)$

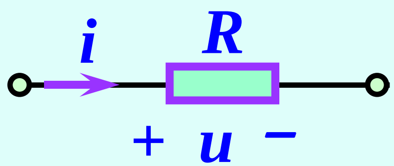
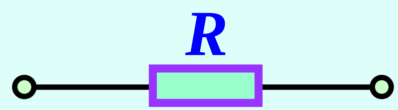
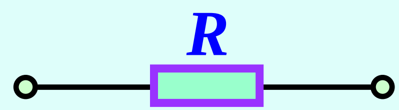
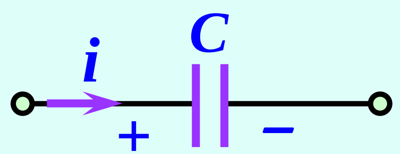
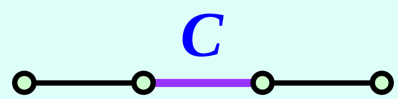
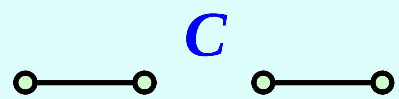
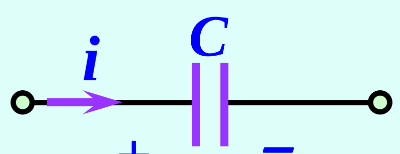
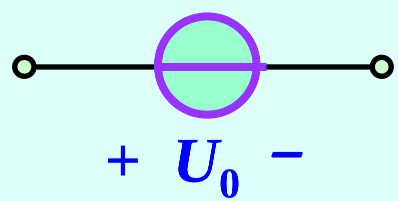
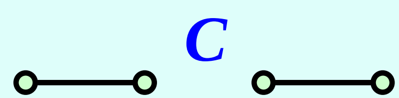
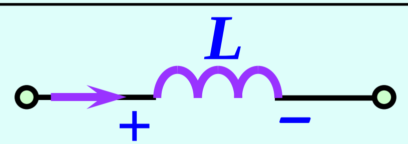
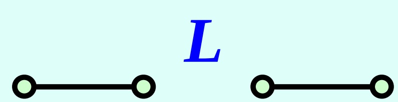
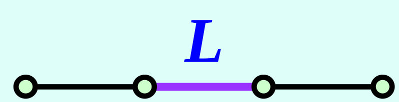
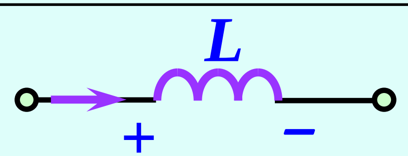
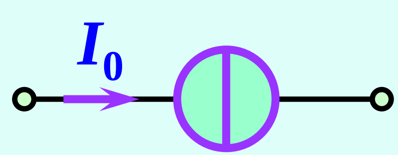
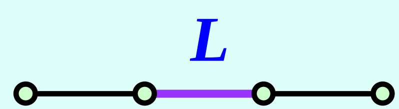
画出 $t \to \infty$ 时的等效电路: C-开路、L-短路，求稳态值 $y(\infty)$;

3. 求时间常数 τ

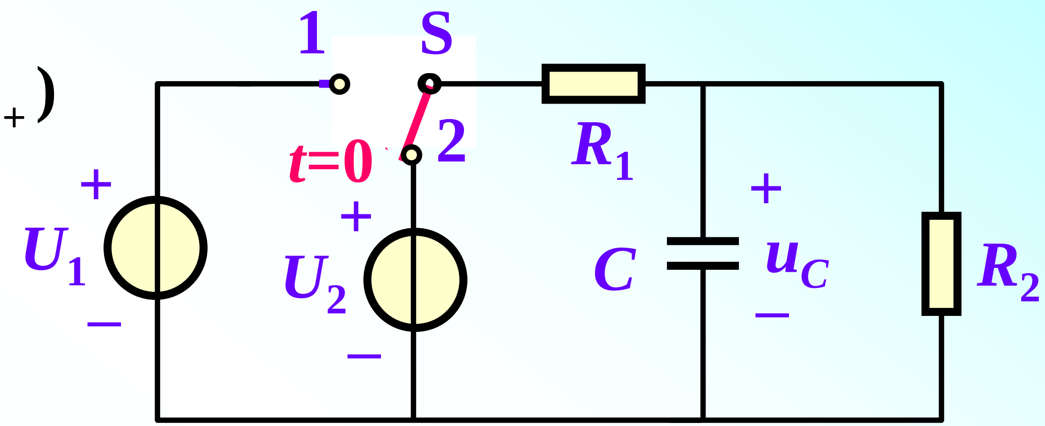
（1）求从动态元件两端看进去戴维南等效电阻 R_0;

（2） RC 电路： $\tau = R_0 C$; RL 电路： $\tau = L/R_0 = G_0 L$.

元件的等效电路汇总

电路元件	$t=0_+$	$t=0_-$, $t\to\infty$
		
 $u_C(0)=0$		
 $u_C(0)=U_0$		
 $i_L(0)=0$		
 $i_L(0)=I_0$		

例1 在下图中，已知U_1= 3V，U_2= 6V，R_1= 1kΩ，R_2= 2kΩ，C = 3μF，t < 0时电路已处于稳态。用三要素法求 $t \geq 0$ 时的 $u_C(t)$，并画出变化曲线。



解：

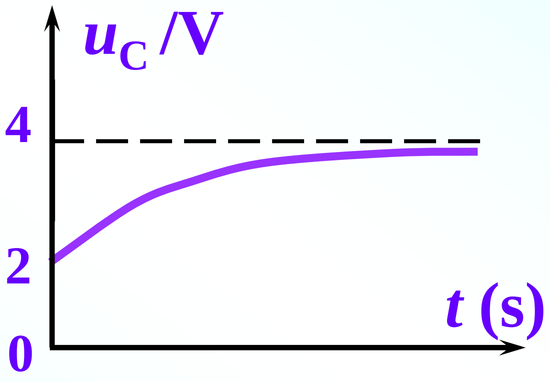
$$u_C(0_-) = \frac{R_2 \cdot U_1}{R_1 + R_2} = 2\,\text{V} = u_C(0_+)$$

$$u_C(\infty) = \frac{R_2 \cdot U_2}{R_1 + R_2} = 4\text{V}$$

$$\tau = (R_1 // R_2) \cdot C = \frac{2}{3} \times 3 = 2\ \text{ms}$$

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = 4 - 2e^{-500t}\ \text{V} \qquad t \geqslant 0$$



$u_C(t)$的变化曲线

全响应的两种分解方式

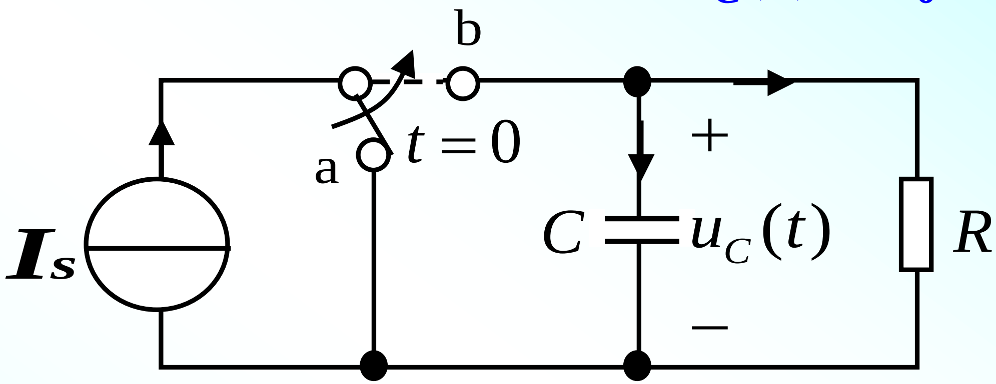
$$\overbrace{\underbrace{y(t) = y(0_+)\, e^{-t/\tau}}_{\text{零输入响应}} \underbrace{- y(\infty)\, e^{-t/\tau}}_{\text{零状态响应}}}^{\text{(固有响应) 瞬态响应}} \underbrace{+\, y(\infty)}_{} \quad \text{(强迫响应) 稳态响应}$$

零输入响应和瞬态响应都具有 $Ke^{-t/\tau}$ 形式，

零输入响应系数，$K = y(0_+)$

瞬态响应系数，$K = y(0_+) - y(\infty)$

例2：电流源与RC电路相接，$u_C(0)=U_0$



$$u_C(0_+)=U_0$$

$$u_C(\infty)=RI_S, \tau=RC$$

$$u_C(t)=RI_S+\left(U_0-RI_S\right)e^{-t/\tau}$$

若$I_S=0$,上式变为$u_{C1}(t)=U_0\,e^{-t/\tau}$ —零输入响应

若U_0=0,上式变为$u_{C2}(t)=RI_S(1-e^{-t/\tau})$ —零状态响应

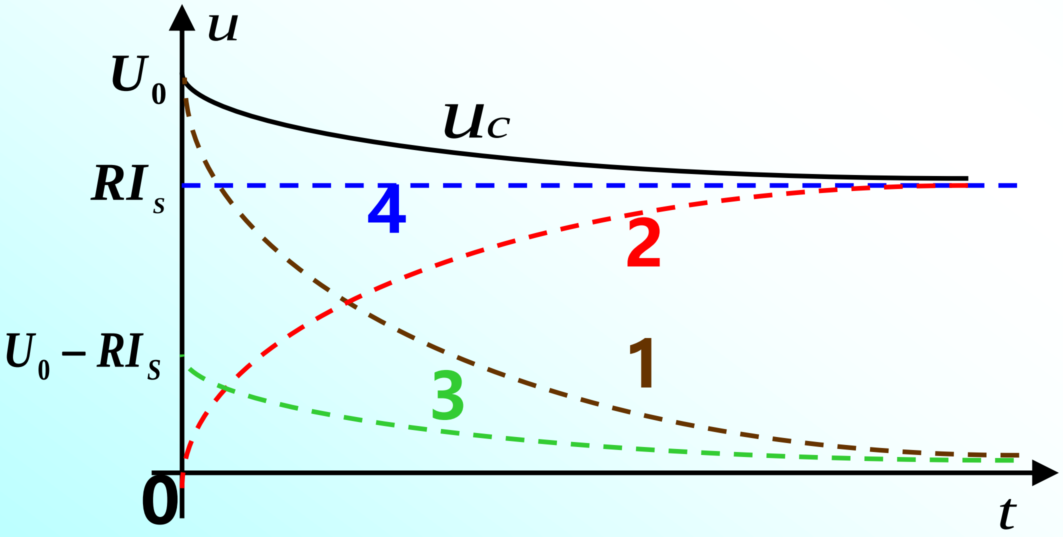
$$u_C(t)=U_0e^{-t/\tau}+RI_S(1-e^{-t/\tau})=(U_0-RI_S)e^{-t/\tau}+RI_S \quad t\geq 0$$

零输入响应+零状态响应

固有响应 + 强迫响应

(暂态响应)+(稳态响应)

全响应u_C的两种分解方式:



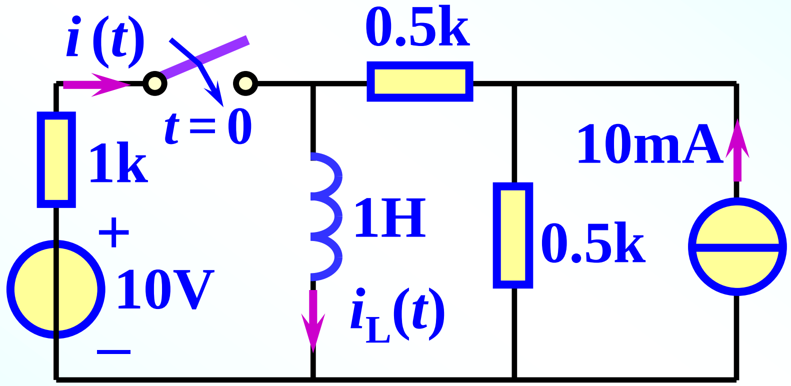
(1)零输入响应

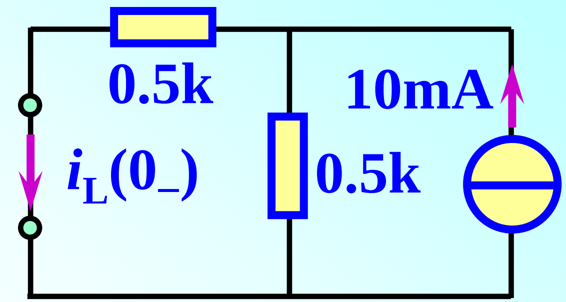
(2)零状态响应

(3)固有响应（暂态响应）

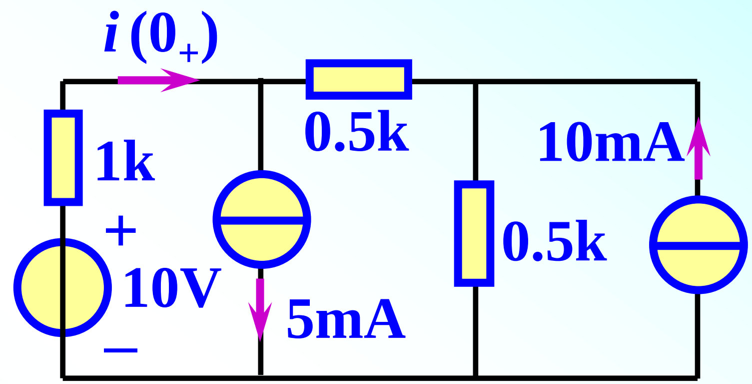
(4)强制响应（稳态响应）

例3 求图示电路中 $t\geq 0$ 时 1k 电阻中的电流 $i(t)$ 。





$t=0_-$



$t=0_+$

三要素法

(1) 求$i_L(0_+)$、$i(0_+)$

根据换路定律

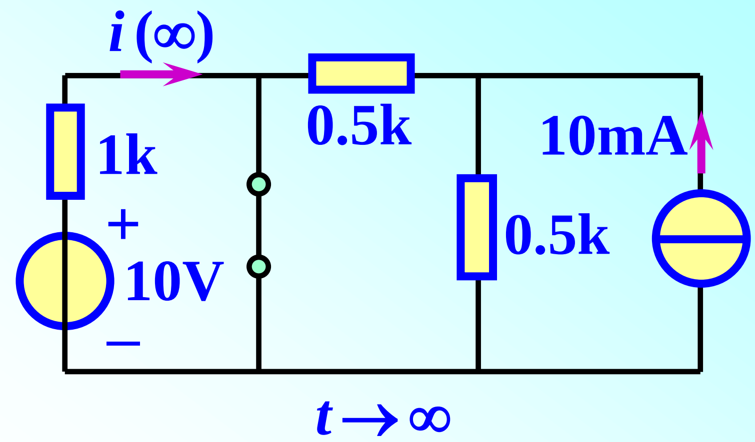
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 10/2 = 5\ \text{mA}$$

用 5mA 电流源置换电感，得 $t=0_+$ 时的等效电路如图。

利用电源等效得

$$i(0_+) = \frac{10\text{V}}{(1+1)k\Omega} = 5\ \text{mA}$$

$i\,(0_+) = 5\ \mathrm{mA}$



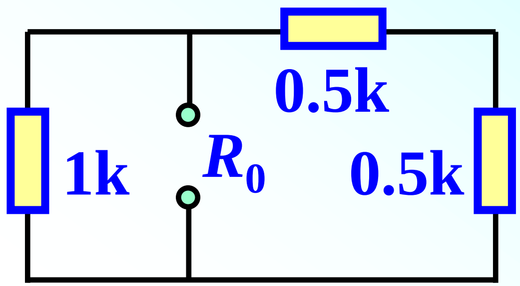
(2) 求 $i\,(\infty)$

$$i\,(\infty) = 10/10^3 = 10\mathrm{mA}$$

(3) 求 τ

$$R_0 = 1\ //\ 1 = 0.5\ \mathrm{k}\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{1}{0.5}\ \mathrm{ms} = 2\ \mathrm{ms}$$

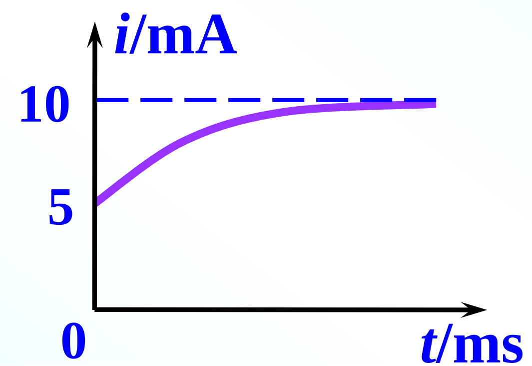


(4) 求全响应

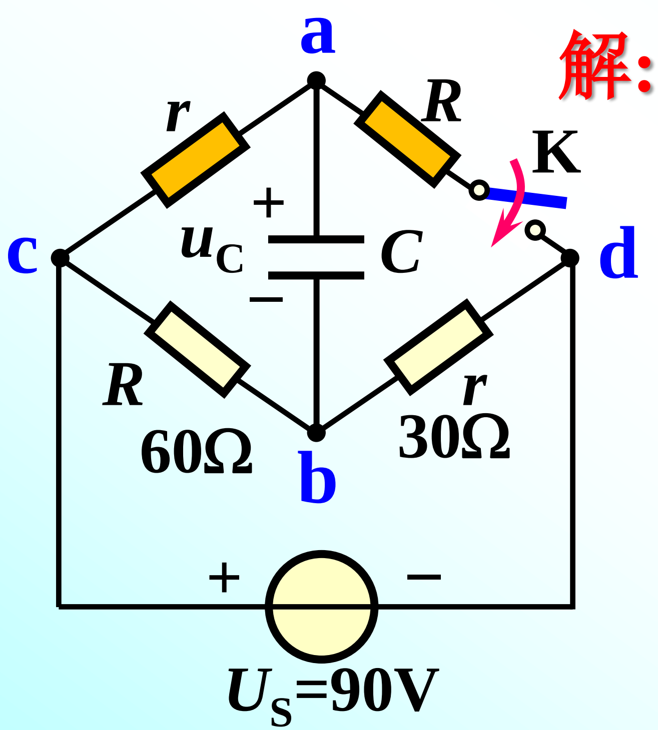
$$i\,(t) = i\,(\infty) + [\,i\,(0_+) - i\,(\infty)\,]\,e^{-t/\tau}$$

$$= 10 + (\,5 - 10\,)\,e^{-t/\tau}\ \mathrm{mA}$$

$$= 10 - 5\,e^{-500t}\ \mathrm{mA} \qquad t > 0$$



例4 图示电路中，开关K闭合前，电路已处于稳态，$C = 10\mu F$, $t = 0$时，将开关K 闭合，经 0.4ms 再将 K 打开，试求 $t \geq 0$ 时的 $u_C(t)$，画出变化曲线。



解:

(1) $$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{R\cdot U_S}{R+r} = 60V$$

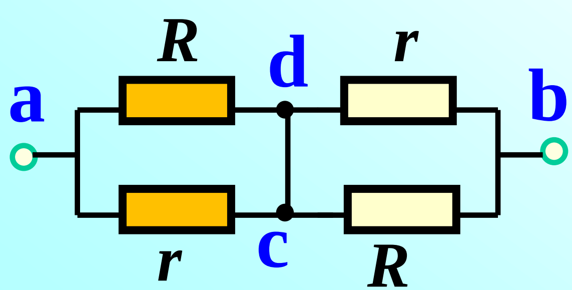
$$u_C(\infty) = \frac{R\cdot U_S - r\cdot U_S}{R+r} = 30V$$

$$\tau = 2(R//r)\cdot C = 0.4\ ms$$

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$$u_C(t) = 30\ (1 + e^{-2500t})\ V$$

$(0 \leqslant t \leqslant 0.4ms)$



(2) $u_C\,(0.4ms) = 30\ (1 + e^{-1}) = 41V$

即为第二个暂态过程的初始值。

$u_C(0.4\text{ms}) = 41\text{V}$ $\quad$ $u_C(\infty) = 60\text{V}$

$\tau' = (r + R//r) \cdot C = 0.5\ \text{ms}$

$$u_C(t) = 60 + (41 - 60)\, e^{-2000(t - 0.4\times 10^{-3})}$$

$$= 60 - 19\, e^{-2000t + 0.8}\ \text{V} \qquad (t \geq 0.4\text{ms})$$

$$u_C(t) = \begin{cases} 30(1 + e^{-2500t})\ \text{V} & 0 \leqslant t \leqslant 0.4\text{ms} \\ 60 - 19\, e^{-2000t + 0.8}\ \text{V} & 0.4\text{ms} \leqslant t < \infty \end{cases}$$

注意二次换路

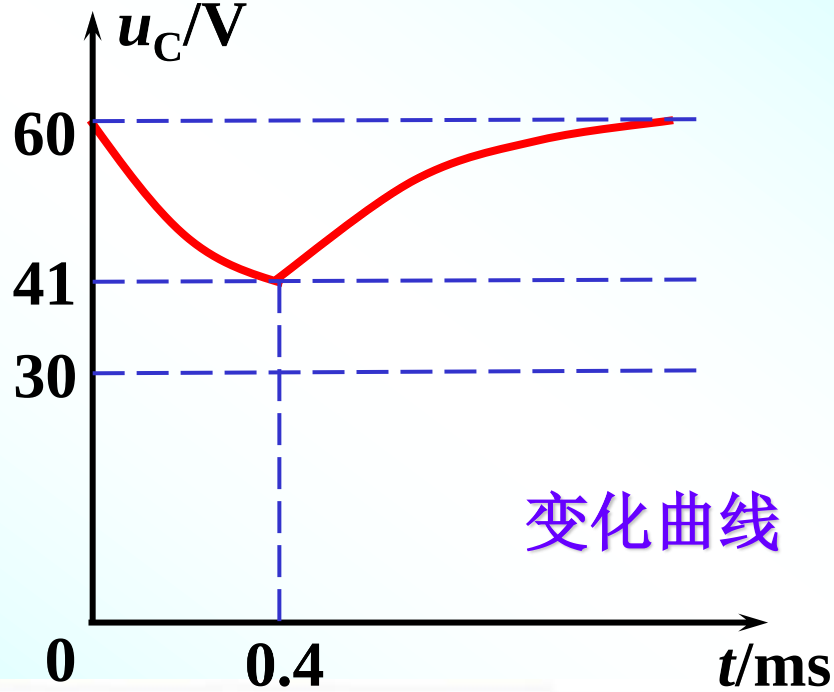
(设在t_1时二次换路)

(1) τ变化为τ_1;

(2) 二次换路后初值 $f(t_{1+})$;

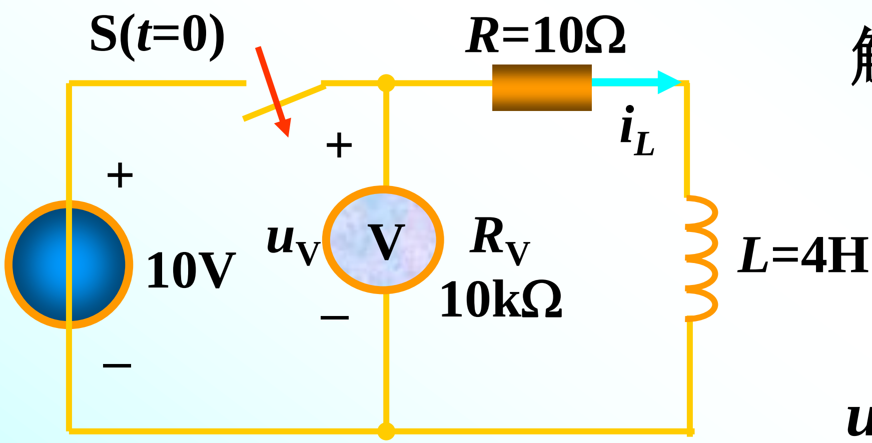
(3)指数形式$e^{-\frac{t - t_1}{\tau_1}}$;

(4) 写成分段函数。



工程实际中在切断电容或电感电路时会出现过电流或过电压现象。

例：t =0时, 打开开关S，求u_V。电压表量程：50V。



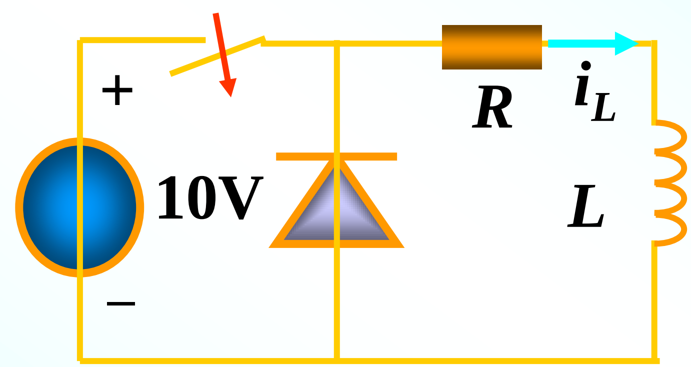
解：$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1\text{ A}$

$$i_L = e^{-t/\tau} \qquad t > 0$$

$$\tau = \frac{L}{R + R_V} \approx \frac{4}{10000}\text{s} = 4\times 10^{-4}\text{s}$$

$$u_V = -R_V i_L = -10000e^{-2500t}\text{V} \qquad t > 0$$

$u_V(0_+)$=－10000V会造成电压表及开关损坏。一般会接一个二极管保护。

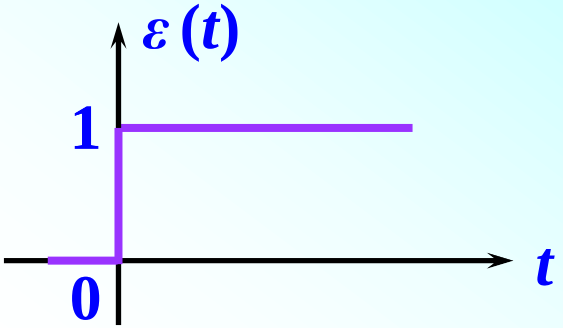


§ 6-3 阶跃响应 冲激响应

一、阶跃响应

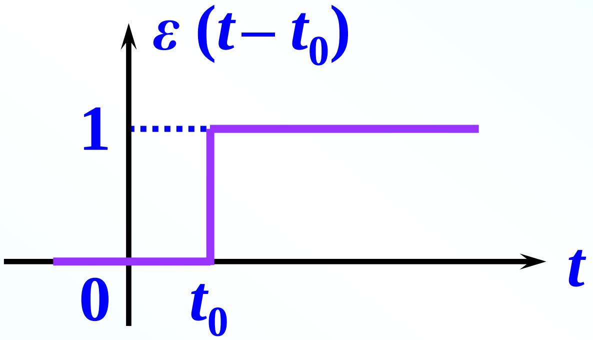
1. 单位阶跃函数

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

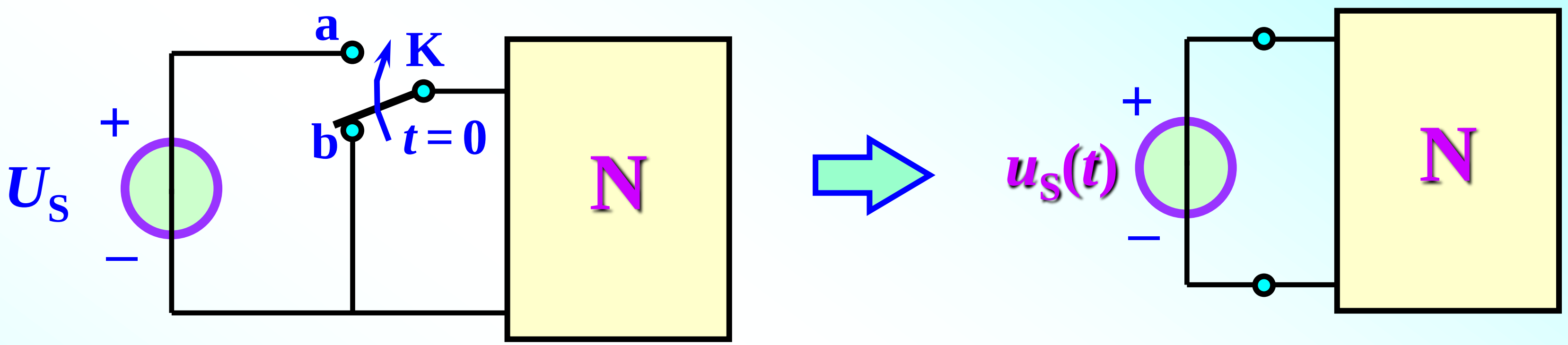


延时单位阶跃函数

$$\varepsilon(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$



2. 用单位阶跃函数表示电源接入



$u_S(t) = \varepsilon(t)U_S$

若在 $t = 0$ 时，开关K由位置 $b \rightarrow a$，可表示为阶跃函数与电源的乘积 $u_S(t) = \varepsilon(t)U_S$

若电源在 $t = t_0$ 时接入电路，可表示为

$$\begin{cases} u_S(t) = U_S\,\varepsilon(t-t_0) \\ i_S(t) = I_S\,\varepsilon(t-t_0) \end{cases}$$

若任一信号在 $t=0$时接入电路，

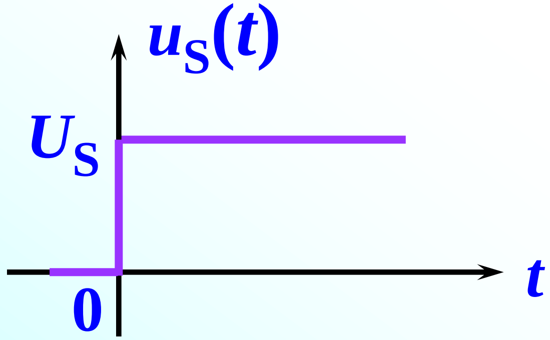
可表示为： $u_S(t) = f(t)\varepsilon(t)$

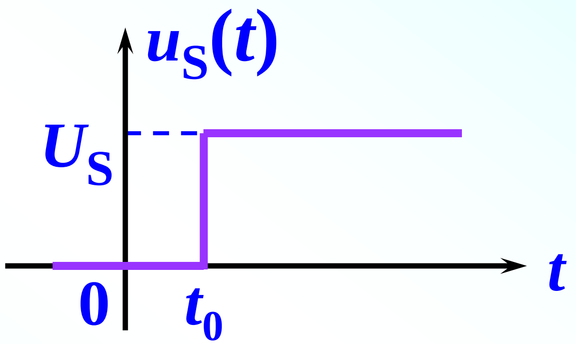
3. 阶跃信号和阶跃响应

- **阶跃信号**

$u_S(t) = U_S\,\varepsilon(t)$　　阶跃信号

$u_S(t) = U_S\,\varepsilon(t - t_0)$　　延时阶跃信号





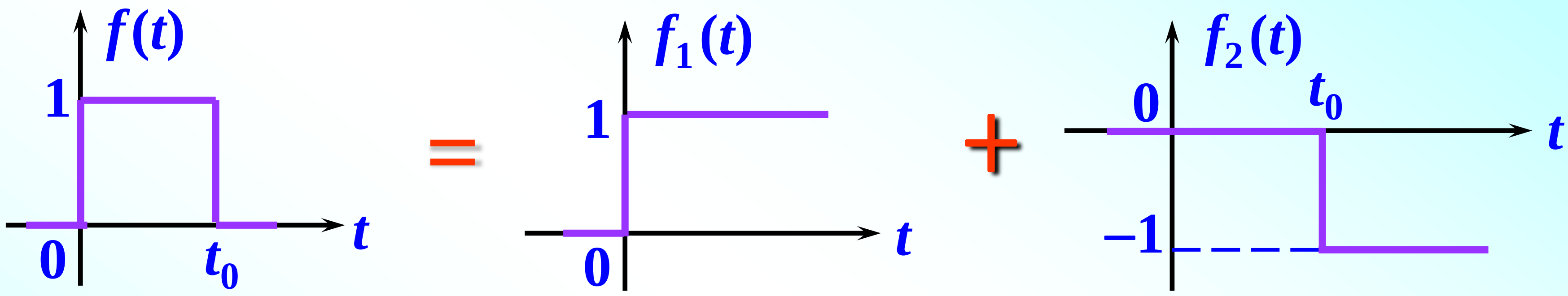
- **阶跃响应**

单位阶跃信号作用下的零状态响应称为单位阶跃响应 $S(t)$，延时单位阶跃信号作用下的阶跃响应为 $S(t-t_0)$。

北京理工大学电工电子实验教学中心

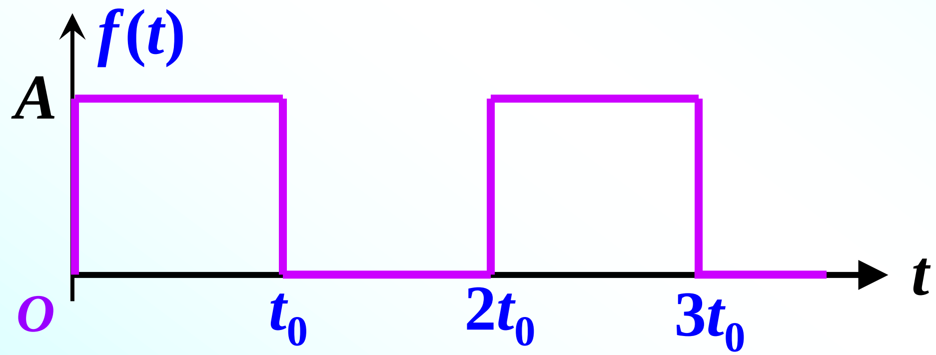
4. 分段常量信号

可将分段常量信号表示为一系列阶跃信号之和，例如：

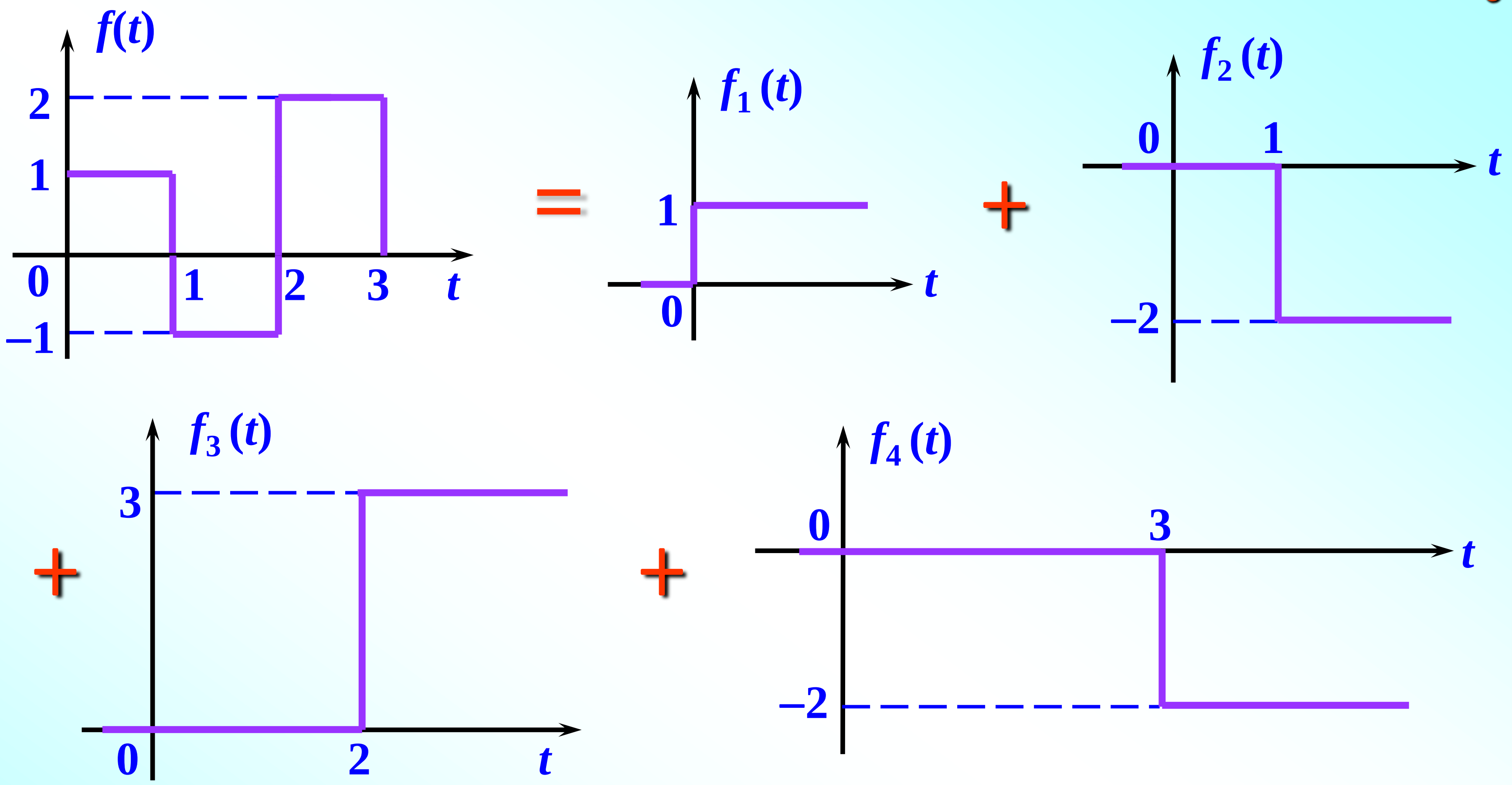


脉冲信号 $f(t)=f_1(t)+f_2(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$

脉冲串（方波）



$$f(t)=A\varepsilon(t)-A\varepsilon(t-t_0)+A\varepsilon(t-2t_0)-A\varepsilon(t-3t_0)+\cdots$$



$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + f_4(t)$$

$$= \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1) + 3\varepsilon(t-2) - 2\varepsilon(t-3)$$

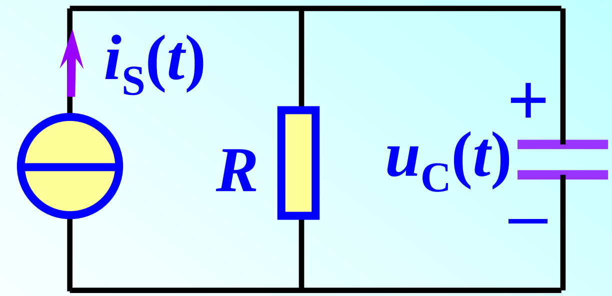
5. 分段常量信号作用下一阶电路的求解

方法1. 把分段常量信号分解为若干个阶跃信号之和，各阶跃信号分量单独作用于电路，由叠加定理求出电路的零状态响应。如果初始状态不为零，再加上零输入响应（只加一次）。

方法2. 把分段常量信号作用于电路的时间分为若干个子区间，每一区间内输入信号为一常量。用三要素法求每一子区间的响应，即按时间分段求解。

在求解过程中，注意每一子区间初始值的计算。

例 已知：$i_S(t)$ 作用于电路，$u_C(0)=0$。求：$u_C(t)$ $t\geq 0$。



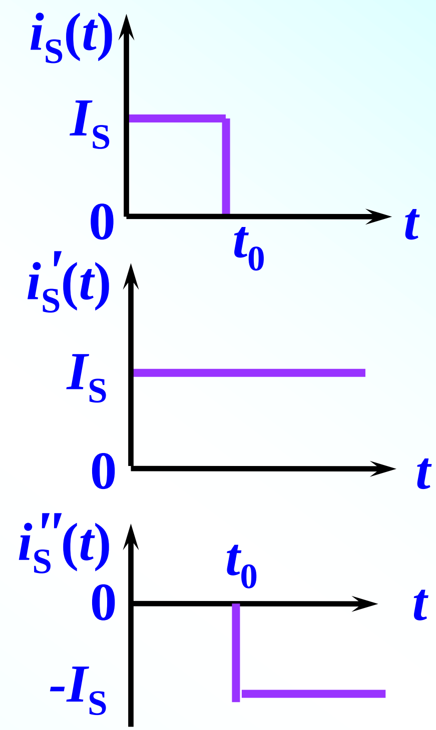
方法1：把 $i_S(t)$ 分解成两项

$$i_S(t)=i_S'(t)+i_S''(t)$$

$$=I_S\varepsilon(t)-I_S\varepsilon(t-t_0)$$

$i_S'(t)=I_S\varepsilon(t)$ 阶跃信号

$i_S''(t)=-I_S\varepsilon(t-t_0)$ 延时阶跃信号



$i_S'(t)$ 单独作用所产生的响应(零状态响应)

$$u_C'(t)=RI_S\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)\varepsilon(t)$$

$i_S''(t)$ 单独作用所产生的响应(零状态响应)

$$u_C''(t)=-RI_S\left(1-e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}\right)\varepsilon(t-t_0)$$

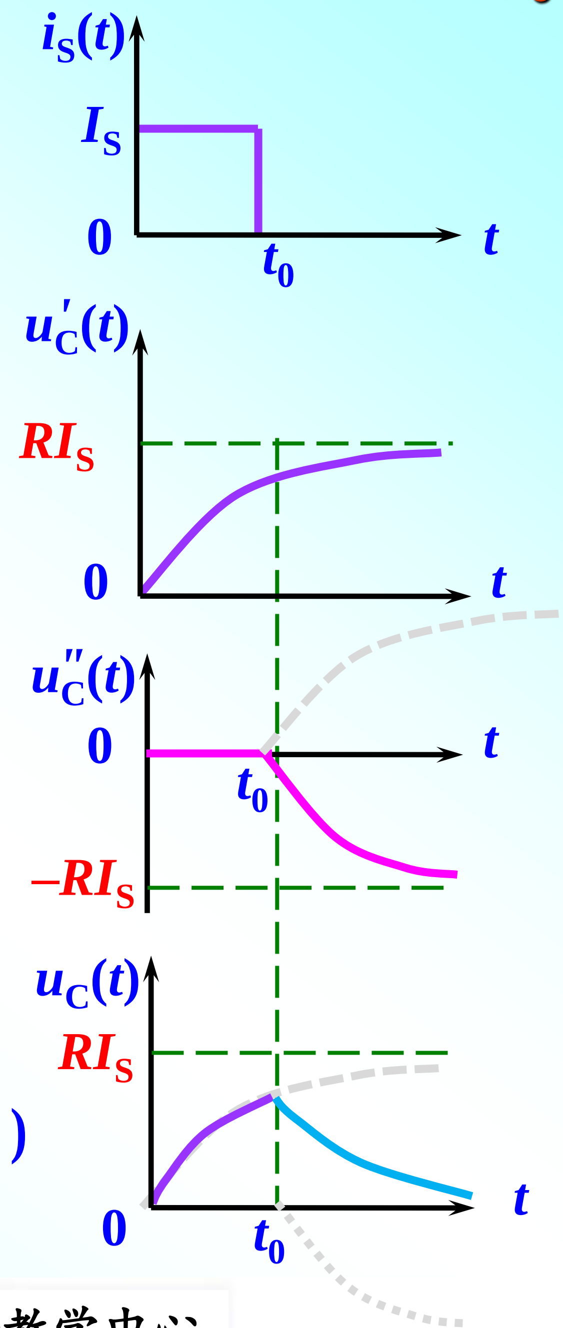
$$i_S(t)=I_S\varepsilon(t)-I_S\,\varepsilon(t-t_0)$$

$$u'_C(t)=RI_S\,(1-e^{-\frac{1}{RC}t})\,\varepsilon(t)$$

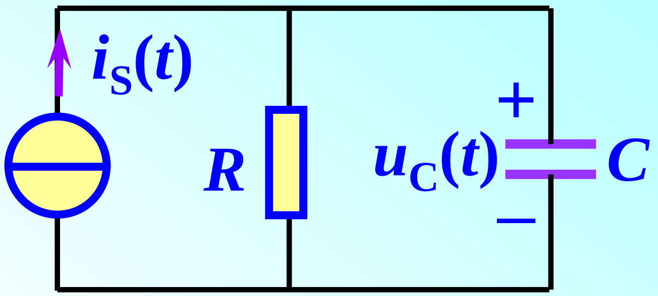
$$u''_C(t)=-RI_S\left(1-e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}\right)\varepsilon(t-t_0)$$

$$u_C(t)=u'_C(t)+u''_C(t)$$

$$=RI_S(1-e^{-\frac{1}{RC}t})\varepsilon(t)-RI_S\left(1-e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}\right)\varepsilon(t-t_0)$$



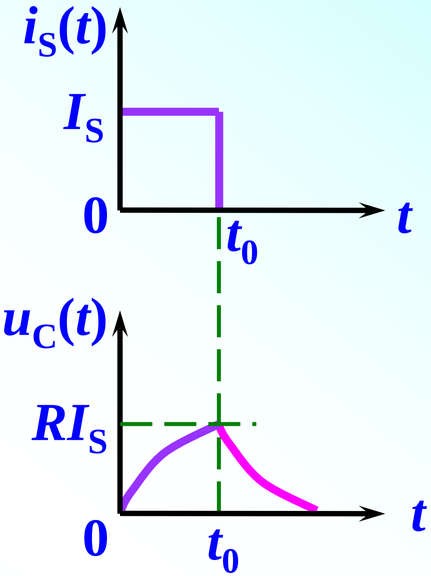
方法2：分段求解



在 $0 \le t \le t_0$ 时求零状态响应

$$u'_C(t) = RI_S\,(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

在 $t > t_0$ 时求零输入响应



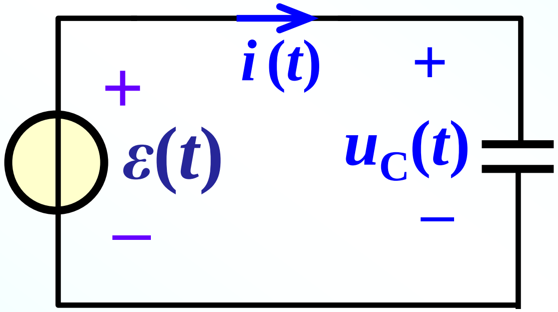
初始值 $u_C(t_0) = RI_S\,(1 - e^{-\frac{1}{RC}t_0})$

$$u''_C(t) = RI_S(1 - e^{-\frac{1}{RC}t_0})\; e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

用分段函数表示为：

$$u_C(t) = \begin{cases} RI_S\,(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) & 0 \le t \le t_0 \\ RI_S(1 - e^{-\frac{1}{RC}t_0})\; e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} & t > t_0 \end{cases}$$

二、冲激响应



电容电压的跃变

已知$C=1\text{F}$，$u_C(0_-)=0$

0时刻电容电压跃变为 $u_C(0_+)=1$

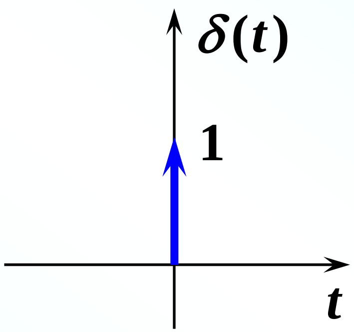
$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\ ?$$

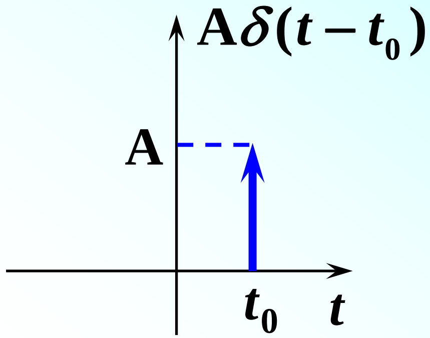
1. 单位冲激函数

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

(1) 当 $t\neq 0$ 时，$\delta(t)=0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1$.





有向线段的长度代表 δ 函数的积分值，称为**冲激强度**。

取样性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(0)\delta(t)\,\mathrm{d}t=f(0)$

2. 单位冲激响应$h(t)$

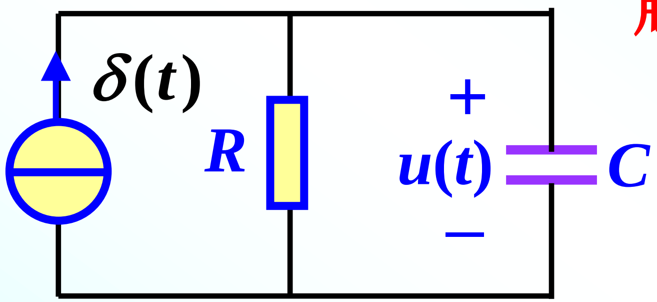
单位冲激输入作用下的零状态响应称为单位冲激响应，常记作$h(t)$。

$$\varepsilon(t) \xrightarrow{\text{零状态}} s(t)$$

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\text{零状态}} h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

- 求单位冲激响应（电压或电流）可先求单位阶跃响应，再通过微分得到所求

例：$u(0\_) = 0$，求电容电压的单位冲激响应$h(t)$。



解1 电容电压的单位阶跃响应为

$$s(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

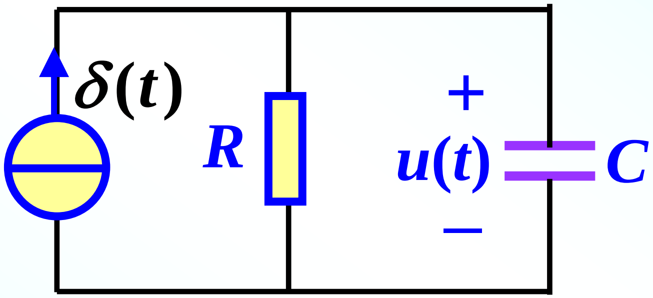
$$h(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\varepsilon(t) - e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\right]$$

$$= R\left[\delta(t) - \delta(t)e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)\right]$$

$$= R\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

- 在t =0时刻，在冲激电流作用下电容电压由 0 跃变为$1/C$ V。



解2

$$C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{u(t)}{R}=\delta(t)$$

- t 从0_-到 0_+时刻，

$u(t)$为有限值→电阻电流积分为0

$$\int_{0_-}^{0_+}C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\int_{0_-}^{0_+}\frac{u(t)}{R}\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

$$C\left[u(0_+)-u(0_-)\right]=1\Rightarrow u(0_+)=\frac{1}{C}\ (\mathrm{V})$$

- $t>0$之后，零输入响应

$$u(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}(\mathrm{V})$$

$$h(t)=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)(\mathrm{V})$$

本章作业

P272-279：6-1，6-8，6-23

6-33，6-41，6-42，6-46

要求：做每一题时：

1. 画电路图；

2. 写清分析过程。

第六章 小结

1. 定义：一阶电路，零状态响应，零输入响应，

阶跃响应，脉冲响应，稳态，瞬态，

瞬态响应(固有响应), 稳态响应(强迫响应)

2. 动态电路的分析方法：分解方法 ▲

3. 动态电路的叠加原理：三方面 ▲

4. 三要素法 ▲▲▲

可求零状态响应，零输入响应，全响应