概率论与数理统计

第13讲

数学期望的定义、随机变量函数的数学期望

一. 数学特征

分布函数能够完整地描述随机变量的统计特性，但在一些实际问题中，分布函数不容易确定。

如，某厂生产的一批电子元件的寿命的精确分布不容易确定。

在某些实际问题中，有时不需要全面考查随机变量的变化规律，即没有必要知道随机变量的概率分布。

评定某企业的经营能力时，只要知道该企业年平均赢利水平；

考察一射手的水平，既要看他的平均环数是否高，还要看弹着点的范围是否小，即数据的波动是否小。

一. 数学特征

可以看出，平均盈利水平、平均环数、数据的波动大小等，都是与随机变量有关的某个数值，能清晰地描述随机变量在某些方面的重要特征，这些数值称为随机变量的数字特征.

另外，对于一些常见分布，其中的参数恰好是分布的数字特征。也就是说，只要确定了分布的数字特征，就能够完全确定该概率分布。因此研究随机变量的数字特征在理论和实践上都具有重要的意义。

引例：射击问题. 某射击手在同样的条件下，对靶子相继射击90次，（每次射击命中的环数是一随机变量）。射中次数记录如下

命中环数X	0	1	2	3	4	5
命中次数n_i	2	13	15	10	20	30
频率n_i/n	2/90	13/90	15/90	10/90	20/90	30/90

试问：该射手每次射击平均命中靶多少环?

解：平均命中环数 $=\dfrac{\text{射中靶的总环数}}{\text{射击次数}}=\dfrac{0\times2+1\times13+2\times15+3\times10+4\times20+5\times30}{90}$

二. 离散型随机变量的数学期望

平均命中环数 $=0\times\frac{2}{90}+1\times\frac{13}{90}+2\times\frac{15}{90}+3\times\frac{10}{90}+4\times\frac{20}{90}+5\times\frac{30}{90}=\sum_{i=0}^{5} i\cdot\frac{n_i}{n}=3.37$

以频率为权的加权平均

$\sum_{i=0}^{5} i\cdot\frac{n_i}{n}$ 中，i 表示随机变量X可能的取值，i=0,1,2,3,4,5，

$\frac{n_i}{n}$ 表示事件$\{X=i\}$发生的频率，i=0,1,2,3,4,5，

由频率的稳定性知，当n 很大时，事件$\{X=i\}$发生的频率稳定于事件$\{X=i\}$发生的概率p_i。

$$\sum_{i=0}^{5} i\cdot\frac{n_i}{n} \text{ 稳定于 } \sum_{i=0}^{5} i\cdot p_i$$

为常数，是以概率为权的加权平均

二. 离散型随机变量的数学期望

定义1 设X是离散型随机变量，其分布律为：$P\{X=x_k\}=p_k$，$k=1, 2, \ldots$

如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称它为X的数学期望，简称期望，

(Expected value, Mean, Expectation, Mathematical Expectation)

又称均值，记为$E(X)$。即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

若$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$ 发散，则称X的数学期望不存在。

二. 离散型随机变量的数学期望

注：1. 随机变量X的数学期望完全是由它的概率分布确定的，不应受X的可能取值的排列次序的影响，因此要求级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛。

$$(1)\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\cdots \to \ln 2$$

$$(2)\quad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\cdots \to \frac{1}{2}\ln 2$$

2.若随机变量X的可能取值为有限个，设为x_i，$i=1,2,\ldots,n$，则EX肯定存在。即

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

3.$E(X)$是一个实数，而非随机变量，它是X的取值以概率为权的加权平均，与一般的算术平均值不同，它从本质上体现了随机变量X取可能值的真正的平均值。

假设

X	1	2
P	0.02	0.98

随机变量X的算术平均值为 $\dfrac{1+2}{2}=1.5$

随机变量X的数学期望为 $E(X)=1\times0.02+2\times0.98=1.98$

当随机变量X是等概率分布时，X的期望值与算术平均值相等。

4. 由于数学期望是由随机变量的分布完全决定的，因此，我们也常常说某分布的数学期望，某密度的数学期望等。

二. 离散型随机变量的数学期望

例2.1654年职业赌徒德·梅尔向法国数学家帕斯卡提出一个使他苦恼很久的分赌本问题：甲、乙两赌徒赌技相同，各出赌注50法郎，每局中无平局。他们约定，谁先赢三局，则得到全部100法郎的赌本。当甲赢了2局，乙赢了1局时，因故要中止赌博。现问这100法郎如何分才算公平?

解：假如比赛继续进行下去，直到结束为止。则需要2局。

这时，可能的结果为：甲甲，甲乙，乙甲，乙乙。

即：甲赢得赌局的概率为3/4，而乙赢的概率为1/4。

二. 离散型随机变量的数学期望

设X、Y分别表示甲和乙得到的赌金数。则分布律分别为：

X	0	100
P	1/4	3/4

Y	0	100
P	3/4	1/4

$E(X)=0\times 1/4+100\times 3/4=75$　　$E(Y)=0\times 3/4+100\times 1/4=25$

即甲、乙应该按照3：1的比例分配全部的赌本。

这就是数学期望的这个名词的由来，这个词源自赌博，听起来不大通俗化，不如均值形象易懂，本不是一个很恰当的命名，但它在概率中已经源远流长，获得了大家的公认，也就站住了脚。

二. 离散型随机变量的数学期望

例3.按规定，某公交车站每天8点至9点和9点至10点都恰有一辆车到站，各车到站的时刻是随机的，且各车到站的时间是相互独立的，其规律为

到站时刻	8:10/9:10	8:30/9:30	8:50/9:50
概率	0.2	0.4	0.4

某乘客8:20到站，求他候车时间的数学期望。

解：设乘客的候车时间为X。则X可能的取值为：10, 30, 50, 70, 90

X=10意味着8:00—9:00的车是8:30到达的。即：$P\{X=10\}=0.4$

同理 $P\{X=30\}=0.4$

二. 离散型随机变量的数学期望

到站时刻	8:10/9:10	8:30/9:30	8:50/9:50
概率	0.2	0.4	0.4

某乘客8:20到站。

解:X=50意味着8:00-9:00的车是8:10到站，且9:00-10:00的车是9:10到站的。

即 $P\{X=50\}=0.2\times0.2=0.04$

同理 $P\{X=70\}=0.2\times0.4=0.08$　$P\{X=90\}=0.2\times0.4=0.08$

于是候车时间X的分布列为

X	10	30	50	70	90
P	0.4	0.4	0.04	0.08	0.08

从而该乘客候车时间的数学期望为

$$E(X)=10\times0.4+30\times0.4+50\times0.04+70\times0.08+90\times0.08=30.8$$

例4. 设随机变量X服从参数为p的0−1分布，求EX。

解：易知X的分布律为

X	0	1
P	q	p

则：$E(X)=0\times P\{X=0\}+1\times P\{X=1\}=P\{X=1\}=p$

例5.设随机变量$X\sim b(n,p)$，求EX。

解：X的分布律为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\dots,n$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{n}k\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$\overset{i=k-1}{=}np\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i![(n-1)-i]!}p^i(1-p)^{(n-1)-i}=np\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i p^i(1-p)^{(n-1)-i}$$

$$=np[p+(1-p)]^{n-1}=np$$

例6.设随机变量$X\sim P(\lambda)$，求EX。

解：X的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$

则 $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}kP\{X=k\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}k\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$

例7. 设随机变量X服从参数为p的几何分布，求EX。

解：X的分布律为 $P\{X=k\}=q^{k-1}p,\quad k=1,2,\ldots.\quad p+q=1$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot pq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}$$

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'$$

$$=p\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

三. 连续型随机变量的数学期望

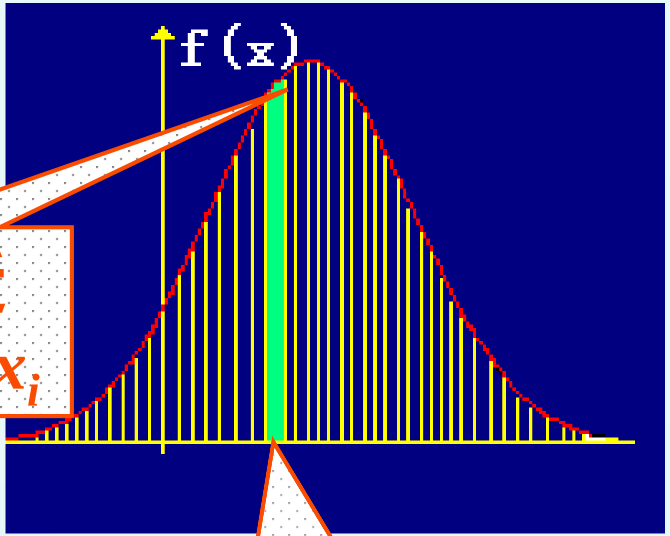
设X是连续型随机变量，密度函数为$f(x)$。

问题：如何寻找一个体现随机变量平均值的量。将X离散化。

在数轴上取等分点：… $x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$，

$x_{i+1} - x_i = \Delta x$， $i=0,\pm1,\dots$，并设x_i都是$f(x)$的连续点。

则 $P\{x_i \le X < x_{i+1}\} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx f(x_i)\Delta x$



阴影面积近似为 $f(x_i)\Delta x_i$

小区间$[x_i, x_{i+1})$

定义一个离散型随机变量X^*如下：

$$X^* = x_i \text{ 当且仅当 } x_i \le X < x_{i+1}$$

则其分布律为 $P\{X^* = x_i\} = P\{x_i \le X < x_{i+1}\} \approx f(x_i)\Delta x$

三. 连续型随机变量的数学期望

对于X^*，当$\sum_i x_i P\{X^*=x_i\}$ 绝对收敛时，其数学期望存在，且

$$E(X^*)=\sum_i x_i P\{X^*=x_i\}\approx\sum_i x_i f(x_i)\Delta x$$

当分点越来越密，即$\Delta x\to 0$时，可以认为$E(X^*)\to E(X)$

即有：$EX=\lim\limits_{\Delta x\to 0} EX^*=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum_i x_i f(x_i)\Delta x_i=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

定义2 设X是连续型随机变量，其密度函数为$f(x)$，如果$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$绝对收敛。

则称$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$的值为$X$的数学期望，记为$E(X)$。

即 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

如果积分$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx$发散，则称随机变量$X$的数学期望不存在。

例8. 设随机变量$X \sim U(a, b)$，求$E(X)$。

解：X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

X 的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

数学期望位于区间(a, b)的中点。

例9. 设随机变量X服从参数为λ的指数分布，求$E(X)$。

解：X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0\ , & x\le 0\end{cases}$

X 的数学期望为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx=\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$

$$=-\int_0^{\infty} xde^{-\lambda x}=-[xe^{-\lambda x}\mid_0^{\infty}-\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx]=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\mid_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

例10. 设$X\sim N(\mu, \sigma^2)$，求$E(X)$。

解：X的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu$$

被积函数为奇函数，故此项积分为0

$N(0,1)$的密度函数的归1性，积分为1

注 意

不是所有的随机变量都有数学期望

例如：Cauchy分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<+\infty$$

但 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx$ 发散

故其数学期望不存在。

三. 连续型随机变量的数学期望

定理1 设连续型随机变量 X 的数学期望存在，概率密度 $f(x)$ 关于 μ 对称，即有$f(\mu+x)=f(\mu-x)$。则$E(X)=\mu$。

证明： 令 $g(t)=tf(t+\mu)$。

由于 $g(-t)=-tf(-t+\mu)=-tf(t+\mu)=-g(t)$ 所以$g(t)$是奇函数。

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu+\mu)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)f(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}\mu f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)f(x-\mu+\mu)dx+\mu\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}tf(t+\mu)dt+\mu\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)dt+\mu=\mu$$

利用定理1可以给出一些随机变量的数学期望。

如：均匀分布$U(a, b)$的密度函数关于区间(a, b)的中点 $\frac{a+b}{2}$ 对称，

所以其期望为 $\frac{a+b}{2}$

而正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的密度关于其第一个参数μ对称，所以其期望为μ.

四. 随机变量函数的数学期望

在实际应用中，有时候已知随机变量X的分布，而我们需要计算的不是X的期望，而是X的某个函数$Y=g(X)$的期望，那么应该如何计算呢?

一种很自然的方法是，利用X与Y之间的函数关系以及X的分布，把随机变量Y的概率分布求出，然后根据Y的分布，按照数学期望的定义计算EY。

例11. 某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式，记该种电器的使用寿命为X(以年计)，规定：

$X\le 1$, 一台付款1500元；　$1<X\le 2$, 一台付款2000元

$2<X\le 3$, 一台付款2500元；　$X>3$, 一台付款3000元

设X服从指数分布，且平均寿命为10年，求该商店一台电器的平均收费。

解：设该商店一台电器的收费为Y。　要求$E(Y)$

易知，X的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{10}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

四. 随机变量函数的数学期望

$P\{Y=1500\}=P\{X\leq 1\}=F(1)=1-e^{-0.1}=0.0952$

$P\{Y=2000\}=P\{1<X\leq 2\}=F(2)-F(1)=0.0861$

$P\{Y=2500\}=P\{2<X\leq 3\}=F(3)-F(2)=0.0779$

$P\{Y=3000\}=P\{X>3\}=1-F(3)=0.7408$

即得Y的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000
P	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

所以Y的期望为

$$E(Y)=1500\times 0.0952+2000\times 0.0861+2500\times 0.0779+3000\times 0.7408=2732.15$$

例12. 有n个相互独立工作的电子装置，它们的寿命X_k $(k=1,2,\ldots,n)$服从同一指数分布，其概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知常数，若将这n个电子装置串联联接成整机，设整机的寿命为Z。求整机寿命（以小时计）Z的数学期望。

解：易知$X_k\ (k=1,2,\ldots,n)$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

由于n个电子装置串联成整机，所以整机寿命与n个电子装置的寿命的关系为：

$$Z=\min(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$$

从而Z的分布函数为 $F_Z(z)=1-[1-F(z)]^n=\begin{cases}1-e^{-nz/\theta}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

那么Z的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta}e^{-nz/\theta}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

于是，Z的数学期望为 $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_Z(z)dz=\int_0^{+\infty}\dfrac{nz}{\theta}e^{-nz/\theta}dz=\dfrac{\theta}{n}$

使用上述方法必须先求出随机变量X的函数$g(X)$的分布，有时这一步骤是比较复杂的。

同时，数学期望仅仅是随机变量的一个数字特征，也就是一个局部信息，而概率分布是全部信息，如果为了求一个局部信息，而要先求出全部信息，显得有些“小题大做”。

那么是否可以不先求$g(X)$的分布而只根据X的分布求得$E[g(X)]$呢？**定理2和定理3指出，答案是肯定的。**

定理2 设X是一个随机变量，$Y=g(X)$是X的函数。

(1) 设X为离散型随机变量，且其分布律为$P\{X=x_i\}=p_i$，$i=1, 2,\dots$.

若$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则Y的数学期望存在，且

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

(2) 设X为连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，若$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，

则Y的数学期望存在，且

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

四. 随机变量函数的数学期望

例13.设离散型随机变量 X 的概率分布如下表所示，求 $Y=X^2$ 的期望。

X	-1	0	1
P	1/4	1/2	1/4

解: 根据定理2，取$g(x)=x^2$，所以有

$$E(Y) = g(-1)\times0.25 + g(0)\times0.5 + g(1)\times0.25$$

$$= (-1)^2\times0.25 + 0^2\times0.5 + 1^2\times0.25=0.5$$

例14.设随机变量$X \sim B(n, p), Y = e^{aX}$，求$EY$。

解：因为 X 的分布律为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n$

所以有 $E(Y)=\sum_{k=0}^{n} e^{ak} P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{n} e^{ak} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^a p)^k (1-p)^{n-k}$$

$$=[pe^a+(1-p)]^n$$

例15.设随机变量$X \sim U(0,\pi)$, $Y=\sin X$，求$E(Y)$。

解：因为 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 1/\pi, & 0<x<\pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

所以有 $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\, f(x)dx=\int_{0}^{\pi}\sin x\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}$

例16. 在随机服务系统中，等待时间可以认为服从指数分布。现已知人们在某银行办理业务的等待时间X（单位：分钟）服从期望为15的指数分布。某人到银行办理业务，由于办理银行业务后还需要去办另外一件事情，故此人先等待，如果20分钟后没有等到自己办理业务就离开银行。设此人在银行的实际等待时间为Y，求此人实际等待时间的平均值。

解：易知Y和X的关系为$Y=min(X,20)$。

X的密度函数为 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad Y=min(X,20)。$$

由定理2知

$$E(Y)=E(\min(X,20))=\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,20)f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\min(x,20)\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}dx$$

$$=\int_{0}^{20}x\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}dx+\int_{20}^{+\infty}20\times\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}dx=15(1-e^{-\frac{4}{3}})\approx 11.04$$

注意：可以证明实际等待时间Y不是连续型随机变量，从而Y没有密度函数，故不能先求分布函数，然后用分布函数的导数的积分的方法求EY。

定理3 设（X,Y）为二维随机变量，$Z=g(X,Y)$是（X,Y）的函数。

（1）设(X, Y)为二维离散型随机变量，其联合分布律为

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\},\quad i,j=1,2,\cdots$$

若$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$绝对收敛，则$Z=g(X,Y)$的数学期望存在，且

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

四. 随机变量函数的数学期望

定理3 设（X,Y）为二维随机变量，$Z=g(X,Y)$是（X,Y）的函数。

（2）设(X, Y)为二维连续型随机变量，其联合密度为 $f(x, y)$，若

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

绝对收敛，则$Z=g(X,Y)$的数学期望存在，且

$$EZ=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

例17. 设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布如下表所示，求$Z=X^2+Y$的期望。

Y \ X	1	2
1	1/8	1/4
2	1/2	1/8

解: 根据定理3，取$g(x,y)=x^2+y$，所以有

$$E(Z)=g(1,1)\times\frac{1}{8}+g(1,2)\times\frac{1}{2}+g(2,1)\times\frac{1}{4}+g(2,2)\times\frac{1}{8}$$

$$=(1^2+1)\times\frac{1}{8}+(1^2+2)\times\frac{1}{2}+(2^2+1)\times\frac{1}{4}+(2^2+2)\times\frac{1}{8}=\frac{17}{4}$$

例18.设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $E(X+Y)$, $E(Y/X)$

解: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{4}xdx\int_0^1(1+3y^2)dy=\frac{4}{3}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^2\frac{1}{4}xdx\int_0^1 y(1+3y^2)dy=\frac{5}{8}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}xdx\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}(1+3y^2)dy=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{6}$

四. 随机变量函数的数学期望

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$E(X+Y)$, $E(Y/X)$

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=E(X)+E(Y)=\frac{4}{3}+\frac{5}{8}=\frac{47}{24}$$

$$E(\frac{Y}{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{x}f(x,y)dxdy=\int_0^2\frac{1}{2}dx\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}(1+3y^2)dy=\frac{5}{8}$$

例19. 设随机变量(X,Y)的概率密度是 $f(x,y)=\begin{cases}1/2, & 0\le x\le 1, 0<y<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

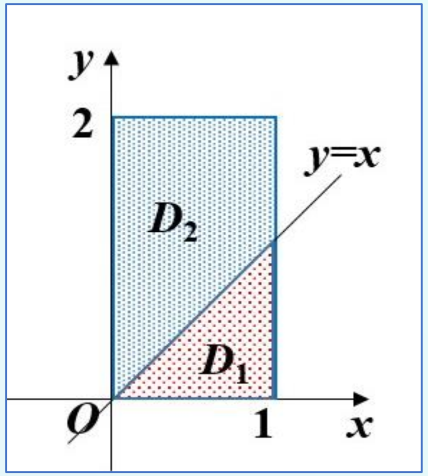
令$Z=\min\{X,Y\}$。 求EZ。

解：记密度函数$f(x,y)$的非0区域为$D=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0<y<2\}$

则有$D=D_1\cup D_2$。

其中$D_1=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0<y<x\}$，$D_2=\{(x,y): 0\le x\le 1, x<y<2\}$。

而在区域D_1上，$\min\{x,y\}=y$，**在区域D_2上，**$\min\{x,y\}=x$。



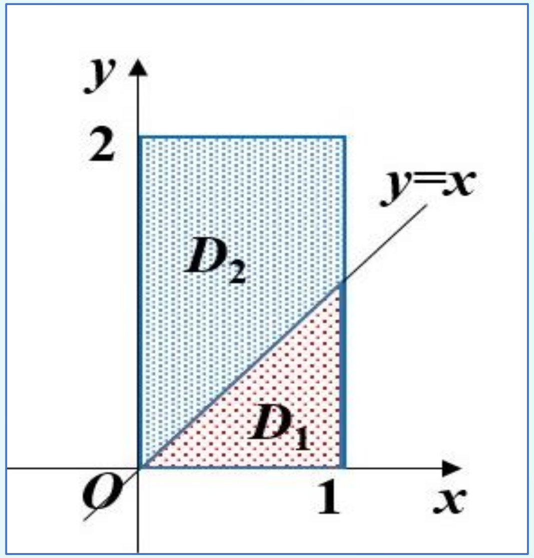
四. 随机变量函数的数学期望

所以有

$$EZ=\iint_{D}\min(x,y)f(x,y)dxdy=\iint_{D_1}\min(x,y)f(x,y)dxdy+\iint_{D_2}\min(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{D_1}yf(x,y)dxdy+\iint_{D_2}xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1dx\int_0^x y\frac{1}{2}dy+\int_0^1dx\int_x^2 x\frac{1}{2}dy=\frac{5}{12}$$



$D_1=\{(x,y):0\le x\le 1,0<y<x\}$,

$D_2=\{(x,y):0\le x\le 1,x<y<2\}$

例20. 设随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda},m=0,1,\cdots,n;n=0,1,\cdots$$ **求$E(XY)$。**

解： $$E(XY)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}mnP\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}mn\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}n\lambda^n\sum_{m=1}^{n}m\frac{p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}=e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda^n p}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-1)!\,p^{m-1}(1-p)^{n-m}}{(m-1)!(n-m)!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda^n p}{(n-1)!}\sum_{m=1}^{n}C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}(1-p)^{n-m}=e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda^n p}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}C_{n-1}^{j}p^{j}(1-p)^{n-1-j}$$

四. 随机变量函数的数学期望

$$= e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda^{n}p}{(n-1)!}[p+(1-p)]^{n-1} = pe^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\lambda^{n}}{(n-1)!}$$

$$= pe^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1+1)\lambda^{n}}{(n-1)!} = pe^{-\lambda}[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\lambda^{n}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n}}{(n-1)!}]$$

$$= pe^{-\lambda}[\lambda^{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}]$$

$$= pe^{-\lambda}[\lambda^{2}e^{\lambda}+\lambda e^{\lambda}] = \lambda(\lambda+1)p$$

作业： 2,8,12,18,21,26

第13讲

谢谢聆听