第七章 二元关系

- 2集合论
  - ch6 集合代数
    - 6.1集合的基本概念
    - 6.2集合的运算
    - 6.3有穷集的计数
    - 6.4集合恒等式
  - ch7二元关系
    - 7.1有序对与笛卡儿积
    - 7.2二元关系的定义与表示法
    - 7.3关系的运算
    - 7.4关系的性质
    - 7.5关系的闭包
    - 7.6等价关系与划分
    - 7.7偏序关系
  - ch8 函数
    - 8.1 函数的定义与性质
    - 8.2 函数的复合与反函数
    - 8.3 双射函数与集合的基数

第七章 二元关系

主要内容

- 7.1有序对与笛卡儿积
- 7.2二元关系的定义与表示法
- 7.3关系的运算
- 7.4关系的性质
- 7.5关系的闭包
- 7.6等价关系与划分
- 7.7偏序关系

7.1 有序对与笛卡儿积

定义7.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为**有序对**，记作 $\langle x,y \rangle$.

有序对性质:

(1) 有序性 $\langle x,y\rangle \neq \langle y,x\rangle$ （当 $x\neq y$ 时）

(2) $\langle x,y\rangle$ 与 $\langle u,v\rangle$ 相等的充分必要条件是

$$\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle \Leftrightarrow x=u \wedge y=v.$$

笛卡儿积

定义7.2 设A,B为集合，A与B的**笛卡儿积**记作$A\times B$，且

$$A\times B = \{<x,y> \mid x\in A\wedge y\in B\}.$$

例1 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B$

$=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A$

$=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>,<b,3>,<c,3>\}$

$$\boxed{A\times B \neq B\times A}$$

$A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$

$P(A)\times A = \{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

$P(A)\times B = \varnothing$

笛卡儿积的性质

(1) 不适合交换律

$$A\times B \neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

(2) 不适合结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

(3) 对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

(4) 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$$

(5) 若 $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$

性质证明

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times(B\cup C)$$
$$\Leftrightarrow x\in A\land y\in B\cup C$$
$$\Leftrightarrow x\in A\land(y\in B\lor y\in C)$$
$$\Leftrightarrow (x\in A\land y\in B)\lor(x\in A\land y\in C)$$
$$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\lor <x,y>\in A\times C$$
$$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

例2 设 A, B, C, D是任意集合

(1) 证明$A=B,C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B,C=D$? 为什么？

解 (1) 若A, B, C, D都是非空集合

任取$<x,y>$

$<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in D$

$\Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$

否则，显然成立

(2) 不一定.反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

第七章 二元关系

主要内容

- 7.1有序对与笛卡儿积
- 7.2二元关系的定义与表示法
- 7.3关系的运算
- 7.4关系的性质
- 7.5关系的闭包
- 7.6等价关系与划分
- 7.7偏序关系

7.2 二元关系

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个**二元关系**, 简称为关系，记作R.

如果$<x,y>\in R$, 可记作xRy；如果$<x,y>\notin R$, 则记作 $x \not R y$

实例：$R=\{<1,2>,<a,b>\}$, $S=\{<1,2>,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写$1R2$, aRb, $a \not R c$ 等.

*A*到*B*的关系与*A*上的关系

定义7.4

设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做**从A到B的二元关系**，当$A=B$时则叫做**A上的二元关系**.

例3 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, 那么

$R_1=\{<0,2>\}$，$R_2=A\times B$，$R_3=\varnothing$，$R_4=\{<0,1>\}$

R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,

R_3 和 R_4 也是A上的二元关系.

A到B的关系与A上的关系

若$|A|=n$, 则 $|A\times A|=n^2$

问: (1) $A\times A$的子集有多少个？ 2^{n^2}

(2) A上有多少个不同的二元关系? 2^{n^2}

例如 $|A| = 3$, 则 A上有=512个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

定义7.5 设 A 为集合,

(1) $\varnothing$是A上的关系，称为**空关系**

(2) **全域关系** $E_A = \{<x,y>| x\in A \wedge y\in A\} = A\times A$

恒等关系 $I_A = \{<x,x>| x\in A\}$

例如, $A=\{1, 2\}$, 则

$E_A = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$

$I_A = \{<1,1>,<2,2>\}$

小于等于关系 $L_A = \{<x,y>| x,y\in A\wedge x\le y\}$, A为实数子集

整除关系 $D_A = \{<x,y>| x,y\in A\wedge x\text{整除}y\}$, A为非0整数子集

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, 则

$L_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

A上重要关系的实例

包含关系 $R_{\subseteq} = \{<x,y>| x,y \in A \wedge x \subseteq y\}$, A是集合族.

例如:

$B=\{a, b\}$, $A = P(B) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,

则 A上的包含关系是

$$R_{\subseteq} = \{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>, <\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$$

类似的还可以定义:

大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等.

关系的表示

1. 关系矩阵

若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n}$, 其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow < x_i, y_j > \in R.$$

2. 关系图

若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=<A, R>$, 其中$A$为结点集，$R$为边集. 如果$<x_i,x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意：

- 关系矩阵适合表示从A到B的关系或A上的关系（A,B为有穷集）
- 关系图适合表示有穷集A上的关系

实例

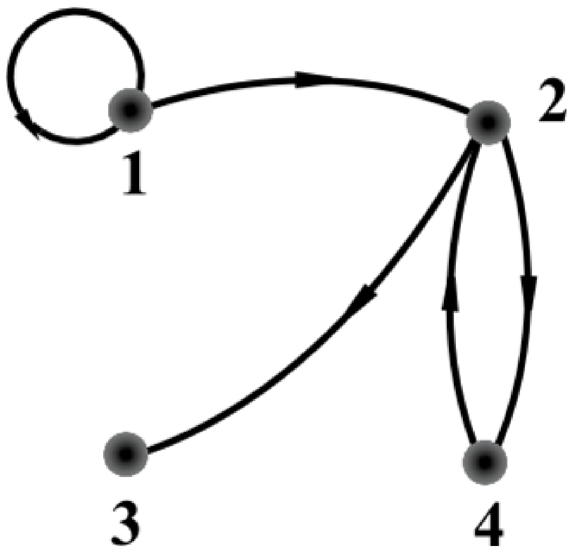
例4

A={1,2,3,4}, R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>},

R的关系矩阵M_R

关系图G_R如下：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



第七章 二元关系

主要内容

7.3 关系的运算

关系的基本运算

定义7.6 关系的定义域、值域与域分别定义为

$$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y\ (\langle x,y\rangle \in R) \}$$

$$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x\ (\langle x,y\rangle \in R) \}$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例5 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

关系运算(逆与复合)

- 逆运算

  例如：整数集合Z上的大于关系

  ➢ 逆关系为 Z上的小于关系

- 复合运算

  例如： F:父子关系

  F = {<老李, 大李>, <大李, 小李>}

  ➢ F ∘ F ：祖孙关系

  B ：兄弟关系 B = {<老李1, 老李>}

  ➢ B ∘ F ：叔侄关系

关系运算(逆与复合)

定义7.7 关系的逆运算

$$R^{-1} = \{ \langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \}$$

定义7.8 关系的复合运算

$$R \circ S = \{ \langle x, z\rangle \mid \exists y\, (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S) \}$$

例6 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$R^{-1} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R \circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

$S \circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

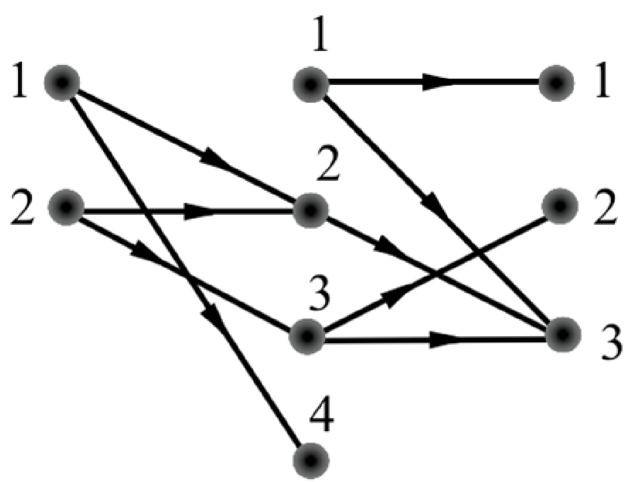
$\boxed{R \circ S \neq S \circ R}$

复合运算的图示法

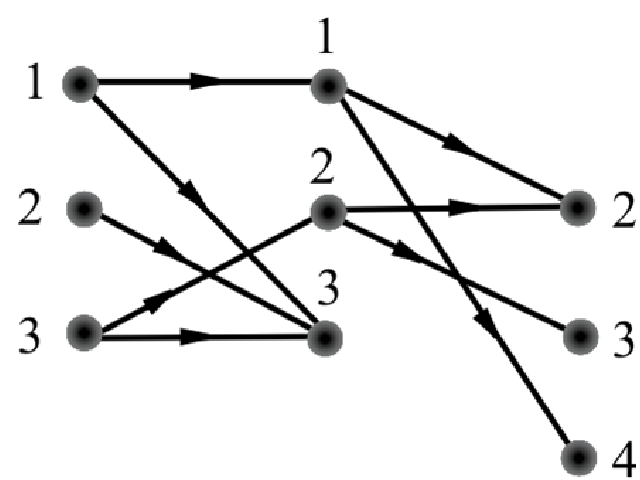
利用图示（不是关系图）方法求复合

$R\circ S$ ={<1,3>, <2,2>, <2,3>}

$S\circ R$ ={<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>}



$R\circ S$



$S\circ R$

R = {<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>}

S = {<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>}

关系运算(限制与像)

定义7.9 设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的限制记作 $R\upharpoonright A$, 其中

$$R\upharpoonright A = \{ <x,y> \mid xRy \land x \in A \}$$

(2) A在R下的像记作$R[A]$, 其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\upharpoonright A)$$

说明:

- R在A上的限制 $R\upharpoonright A$是 R 的子关系，即 $R\upharpoonright A \subseteq R$
- A在R下的像 $R[A]$ 是 $\mathrm{ran}R$ 的子集，即 $R[A] \subseteq \mathrm{ran}R$

实例

例7 设$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$, 则

$R\restriction\{1\} = \{<1,2>,<1,3>\}$

$R\restriction\varnothing = \varnothing$

$R\restriction\{2,3\} = \{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$

$R[\{1\}] = \{2,3\}$

$R[\varnothing] = \varnothing$

$R[\{3\}] = \{2\}$

关系运算的性质

定理7.1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取x,

$$x\in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F) \Leftrightarrow x\in \mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系运算的性质

定理7.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in(F\circ G)\circ H$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\circ G \wedge <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\exists s\,(<x,s>\in F\wedge <s,t>\in G)\wedge <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,s>\in F\wedge <s,t>\in G\wedge <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists s\exists t\,(<x,s>\in F\wedge <s,t>\in G\wedge <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x,s>\in F\wedge \exists t\,(<s,t>\in G\wedge <t,y>\in H))$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x,s>\in F\wedge <s,y>\in G\circ H)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ(G\circ H)$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

证明

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证明：

任取$<x,y>$,

$<x,y>\in(F\circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow <y,x>\in F\circ G$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<y,t>\in F \wedge <t,x>\in G)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in G^{-1} \wedge <t,y>\in F^{-1})$

$\Leftrightarrow <x,y>\in G^{-1}\circ F^{-1}$

所以 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

关系运算的性质

定理7.3 设R为A上的关系, 则

$$R\circ I_A = I_A\circ R = R$$

证　任取$<x,y>$

$$<x,y>\in R\circ I_A$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in R\wedge <t,y>\in I_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in R\wedge t=y\wedge y\in A)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in R$$

关系运算的性质

定理7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H$　　(2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F\cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$　　(4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

只证 (3) 任取$<x,y>$,

$<x,y>\in F\circ(G\cap H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge<t,y>\in G\cap H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge<t,y>\in G\wedge<t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(\,(<x,t>\in F\wedge<t,y>\in G)\wedge(<x,t>\in F\wedge<t,y>\in H)\,)$

$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in F\wedge<t,y>\in G)\wedge\exists t\,(<x,t>\in F\wedge<t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G\wedge<x,y>\in F\circ H$

$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ G\cap F\circ H$

所以有 $F\circ(G\cap H)\subseteq F\circ G\cap F\circ H$

$$\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$$

推广

定理7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R\circ(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n) = R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup\ldots\cup R\circ R_n$$

$$(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)\circ R = R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup\ldots\cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap\ldots\cap R\circ R_n$$

$$(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\circ R\subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap\ldots\cap R_n\circ R$$

关系运算的性质

定理7.5 设F为关系, A, B为集合, 则

(1) $F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

(2) $F[A\cup B] = F[A]\cup F[B]$

(3) $F\upharpoonright(A\cap B) = F\upharpoonright A\cap F\upharpoonright B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

证明

$R \upharpoonright A = \{ <x,y> \mid xRy \wedge x \in A \}$

证 只证 (1) 和 (4).

(1) $F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$

证明：任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y> \in F \upharpoonright (A \cup B) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y> \in F \wedge x \in A \cup B \\
\Leftrightarrow\ & <x,y> \in F \wedge (x \in A \vee x \in B) \\
\Leftrightarrow\ & (<x,y> \in F \wedge x \in A) \vee (<x,y> \in F \wedge x \in B) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y> \in F \upharpoonright A \vee <x,y> \in F \upharpoonright B \\
\Leftrightarrow\ & <x,y> \in F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B
\end{aligned}
$$

所以有$F \upharpoonright (A \cup B) = F \upharpoonright A \cup F \upharpoonright B$.

证明

$R\restriction A = \{ <x,y> \mid xRy \land x \in A \}$

$R[A] = \mathrm{ran}(R\restriction A)$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

证明：任取y,

$y \in F[A\cap B]$

$\Leftrightarrow \exists x (<x,y> \in F \land x \in A\cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x (<x,y> \in F \land x \in A \land x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists x ((<x,y> \in F \land x \in A) \land (<x,y> \in F \land x \in B))$

$\Rightarrow \exists x (<x,y> \in F \land x \in A) \land \exists x (<x,y> \in F \land x \in B)$

$\Leftrightarrow y \in F[A] \land y \in F[B]$

$\Leftrightarrow y \in F[A]\cap F[B]$

所以有$F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$.

$$\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \land \exists x B(x)$$

关系的幂运算

定义7.10

设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

(1) $R^0 = \{ <x,x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1^0 = R_2^0 = I_A$
- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

关系的幂运算的两种求法:

- 关系矩阵法
- 关系图法

用关系矩阵求关系的幂

$$R_2=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$$

$$M_{R_2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

逻辑乘(∧)	逻辑加(∨)
$0\wedge 0=0$	$0\vee 0=0$
$0\wedge 1=0$	$0\vee 1=1$
$1\wedge 0=0$	$1\vee 0=1$
$1\wedge 1=1$	$1\vee 1=1$

$$M_{R_2^{(2)}}=M_{R_2}\circ M_{R_2}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$R_2^{(2)}=\{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$$

上例（续）

$$R_2 = \{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$$

$$R_2^{(2)} = \{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$$

$$M_{R_2^{(3)}} = M_{R_2^{(2)}} \circ M_{R_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

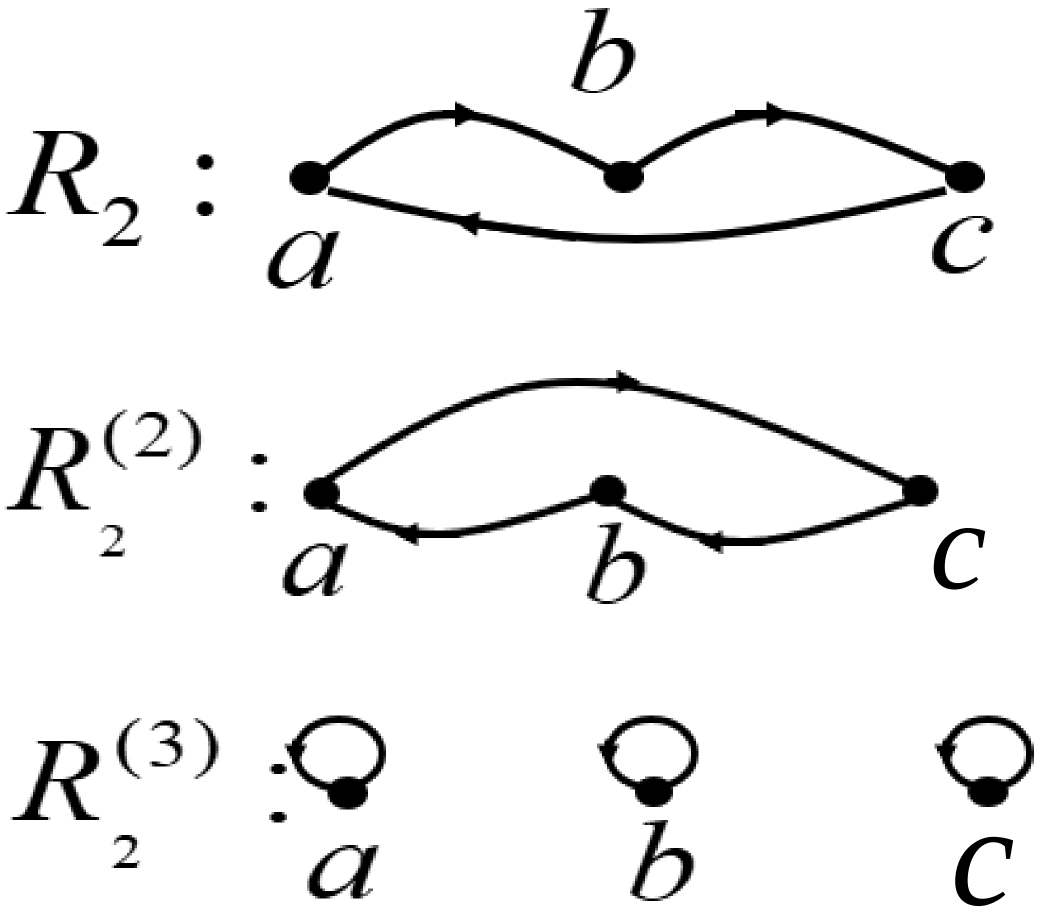
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2^{(3)} = \{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$$

用关系图求关系的幂

$R_2 = \{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$

解：



求关系的幂

例 8 设$A = \{a,b,c,d\}$, $R = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$, 求$R$的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R 与 R^2的关系矩阵分别是:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求关系的幂（续）

R^3和R^4的矩阵是：

$$M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

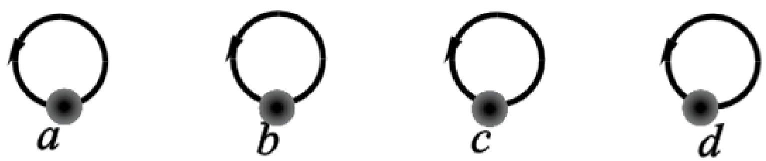
$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

R^0的关系矩阵是

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

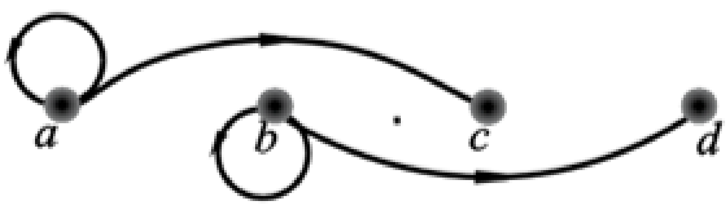
求关系的幂（续）

$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$的关系图如下图所示.

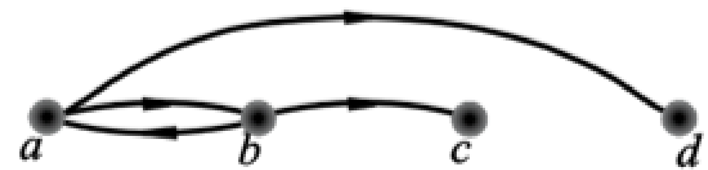


R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

例

已知$X=\{a,b,c\}$　且有

$$R_1=\{<a,b>,<a,c>,<c,b>\}$$

$$R_2=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$$

$$R_3=\{<a,b>,<b,c>,<c,c>\}$$

$$R_4=\{<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$$

求关系的幂。

R1

$$R_1 = \{<a,b>,<a,c>,<c,b>\}$$

$$R_1^{(2)} = \{<a,b>\}$$

$$R_1^{(3)} = \varnothing$$

$$R_1^{(4)} = \varnothing, \cdots$$

$$R_2 = \{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$$

$$R_2^{(2)} = \{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$$

$$R_2^{(3)} = \{<a,a>,<b,b>,<c,c>\} = R_2^{(0)}$$

$$R_2^{(4)} = \{<a,b>,<b,c>,<c,a>\} = R_2$$

$$R_2^{(5)} = R_2^{(2)}, \quad R_2^{(6)} = R_2^{(3)}, \cdots$$

即

$$R_2^{(3k+1)} = R_2^{(1)} = R_2, k = 0,1,\cdots$$

$$R_2^{(3k+2)} = R_2^{(2)}, k = 0,1,\cdots$$

$$R_2^{(3k+3)} = R_2^{(3)}, k = 0,1,\cdots$$

$$R_2^{(3k+i)} = R_2^{(i)}, k = 0,1,\cdots, i = 1,2,3$$

R3

$$R_3 = \{<a,b>,<b,c>,<c,c>\}$$

$$R_3^{(2)} = \{<a,c>,<b,c>,<c,c>\}$$

$$= R_3^{(3)} = R_3^{(4)} = \cdots$$

$$R_4 = \{<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$$

$$R_4^{(2)} = \{<a,a>,<b,b>,<c,c>\} = R_4^{(0)}$$

$$R_4^{(3)} = R_4 = R_4^{(1)}, \cdots$$

$$R_4^{(4)} = R_4^{(0)}, \cdots$$

$$R_4^{(2k+i)} = R_4^{(i)}, k = 0,1,\cdots, i = 0,1$$

对于有穷集 A 和 A 上的关系 R，
R 的不同次幂只有有限个.

幂运算的性质

定理7.6 设 A 为 n 元集, R 是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R 为A上的关系,

由于$|A|=n$, A上的不同关系只有 2^{n^2}个.

列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$

用实例理解关系的幂运算

例 设$A = \{a,b,c\}$ 【$|A| = 3$】

$A\times A = \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$ 【$|A\times A| = 3^2$】

$= \{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>,<b,c>,<c,a>,<c,b>,<c,c>\}$

$P(A\times A)$ 【$|P(A\times A)| = 2^{3^2} = 512$】

$=\{\varnothing, \{<a,a>\},\{<a,b>\},\{<a,c>\},\{<b,a>\},\{<b,b>\},\{<b,c>\},\{<c,a>\},$

$\{<c,b>\},\{<c,c>\}, \{<a,a>,<a,b>\},\{<a,a>,<a,c>\}\ldots,$

$\{<a,a>,<a,b>,<a,c>\}, \ldots, \{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}, \ldots,$

$\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}, \ldots, \{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}, \ldots, A\times A\}$

$R = \{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$ $R^0, R^1, R^2 \mid R^3, R^4, R^5 \mid R^6, R^7, R^8 \mid \ldots\ldots$

$R^2 = \{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$ $R^0, R^1, R^2 \mid R^0, R^1, R^2 \mid R^0, R^1, R^2 \mid \ldots\ldots$

$R^3 = \{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$

进阶例题

设$A = \{a,b,c,d,e,f\}$, $R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle\}$,

则使得 $R^s = R^t$成立的最小自然数s,t $(s < t)$是: (s=1,t=7)

$R = \{ \langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle, \langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle \}$

$R^2 = \{ \langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle, \langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle \}$

$R^3 = \{ \langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle, \langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle \}$

$R^4 = \{ \langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle, \langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle \}$

$R^5 = \{ \langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle, \langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle \}$

$R^6 = \{ \langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle, \langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle \}$

$R^7 = \{ \langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle, \langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle \}$

……

幂运算的性质

定理7.7 设 R 是 A上的关系， $m, n\in$N, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的$m\in$N, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1} ,$$

所以对一切$m,n\in$N 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

证明(续)

(2)) $(R^m)^n = R^{mn}$

证明：对于任意给定的$m \in \mathrm{N}$, 施归纳于n.

若$n=0$, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^n$$

$$= R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切$m,n \in \mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

幂运算的性质

定理7.8 设R是A上的关系,

若存在自然数 s, t $(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$, 则

(1) 对任何 $k\in N$有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i\in N$有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $p = t-s$

(3) 令$S = \{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q\in N$ 有$R^q\in S$

证 (1) $R^{s+k} = R^s\circ R^k = R^t\circ R^k = R^{t+k}$

(2) 对k归纳. 若k=0, 则有 $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$p = t-s$, 则

$$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i}\circ R^p$$

$$= R^{s+i}\circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

证明

(3)令$S = \{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q \in$ N 有$R^q \in$ S

(若存在自然数 s, t ($s<t$) 使得 $R^s=R^t$)

证明： 任取 $q \in$ N,

若 $q < t$, 显然有 $R^q \in S$,

若$q \geq t$, 则存在自然数 k 和 i 使得

$$q = s+kp+i, \text{其中} 0 \leq i \leq p-1.$$

于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而

$$s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$$

从而证明了 $R^q \in S$.

第七章 二元关系

主要内容

- 7.1有序对与笛卡儿积
- 7.2二元关系的定义与表示法
- 7.3关系的运算
- 7.4关系的性质
- 7.5关系的闭包
- 7.6等价关系与划分
- 7.7偏序关系

7.4 关系的性质

1.自反性(reflexive)

2.反自反性(irreflexive)

3.对称性(symmetric)

4.反对称性(antisymmetric)

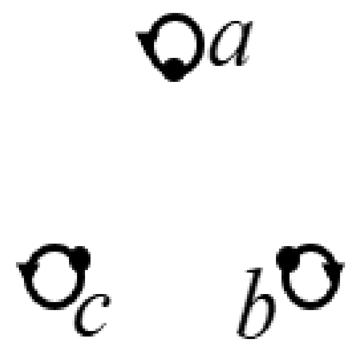
5.传递性(transitive)

自反性与反自反性

定义7.11 设 R 为A上的关系,

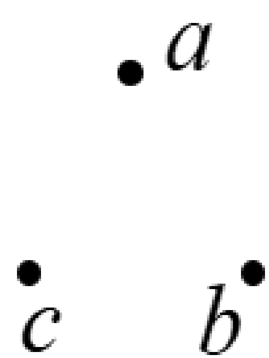
(1) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的.

$$M=\begin{bmatrix}1 & \cdots & \\ & 1 & \\ & \cdots & 1\end{bmatrix}$$



(2) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的.

$$M=\begin{bmatrix}0 & \cdots & \\ & 0 & \\ & \cdots & 0\end{bmatrix}$$



自反性与反自反性

例: 已知X={a,b,c}, 下面关系哪些是自反的?

√ $R_1 = \{\underline{<a, a>}, <a, b>, \underline{<b, b>}, \underline{<c, c>}\}$

× $R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$

× $R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

× $R_4 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

√ $R_5 = \{\underline{<a, a>}, <a, b>, <b, a>, \underline{<b, b>}, \underline{<c, c>}\}$

× $R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

× $R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$

× $R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$

自反性与反自反性

例: 已知X={a,b,c}, 下面关系哪些是反自反的?

× $R_1 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>\}$

× $R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$

× $R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

× $R_4 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

× $R_5 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$

√ $R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

√ $R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$

√ $R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$

自反性与反自反性

实例：

自反：全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反：实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

?

一个关系不是自反的，就一定是反自反的吗？

不一定

已知：$A=\{1,2,3\}$, R_1是A上的关系,

如：$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

既不是自反的也不是反自反的.

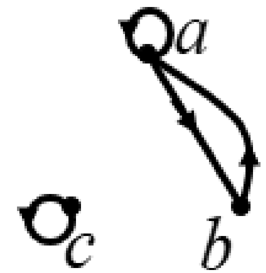
对称性与反对称性

定义7.12 设 R 为 A上的关系,

(1) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge <x,y> \in R \rightarrow <y,x> \in R)$, 则称 R 为 A上 的对称关系.

- A上的全域关系E_A
- 恒等关系I_A
- 空关系$\varnothing$

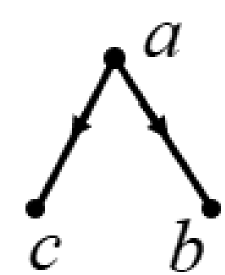
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(2) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge <x,y> \in R \wedge <y,x> \in R \rightarrow x=y)$, 则称 R 为 A上的反对称关系.

- 恒等关系I_A
- 空关系$\varnothing$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



对称性与反对称性

例: 已知X={a,b,c}, 下面关系哪些是对称的?

× $R_1 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>\}$

× $R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$

× $R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

√ $R_4 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

√ $R_5 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$

× $R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

× $R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$

× $R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$

对称性与反对称性

例: 已知X={a,b,c}, 下面关系哪些是反对称的?

√ $R_1 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>\}$

√ $R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$

× $R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

× $R_4 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

× $R_5 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$

√ $R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

√ $R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$

√ $R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$

问题

?

一个关系不是对称的，就一定是反对称的吗？

不一定。

如：A={1, 2, 3}，

S={<1, 2>, <1, 3>, <3, 1>}

则 S 既不是对称的也不是反对称的。

问题

?

有没有一个关系，既是对称的，也是反对称的？

有

$N=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

N即是对称的，也是反对称的。

传递性

定义7.13 设R为A上的关系, 若

$$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\rightarrow\langle x,z\rangle\in R),$$

则称 R 是A上的传递关系.

实例： A上的全域关系 E_A,恒等关系 I_A和空关系 $\varnothing$，小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系

设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

$$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$$

R_1和R_3是A上的传递关系, R_2不是A上的传递关系.

传递性

例: 已知X={a,b,c}, 下面关系哪些是传递的?

√ $R_1 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>\}$

× $R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$

× $R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

× $R_4 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$

√ $R_5 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$

√ $R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$

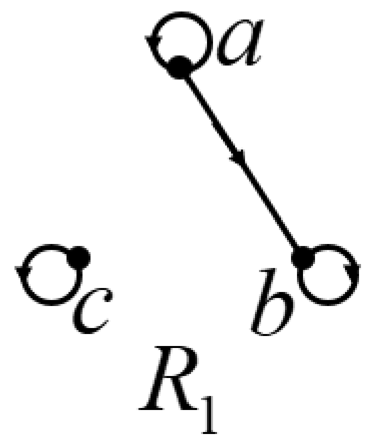
× $R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$

√ $R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$

R1

$$R_1 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, c>\}$$

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

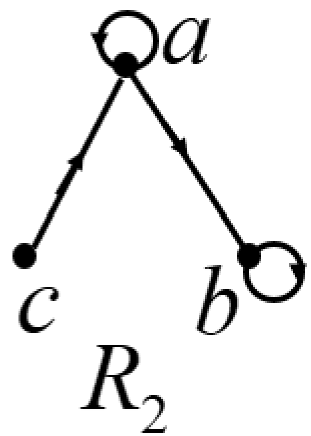


R_1 是自反的、反对称、传递的。

R2

$$R_2 = \{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <c, a>\}$$

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

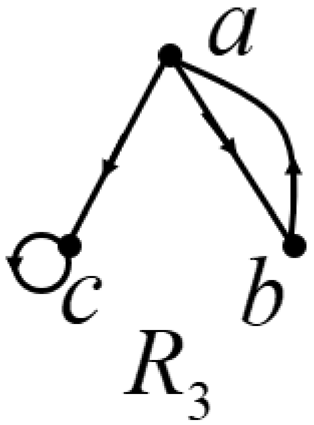


R_2是反对称的。

R3

$$R_3 = \{<a, c>, <a, b>, <b, a>, <c, c>\}$$

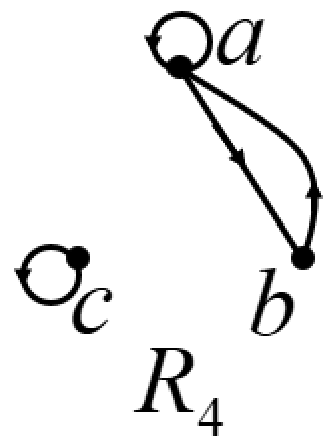
$$M_{R_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



R4

$$R_4 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$$

$$M_{R_4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

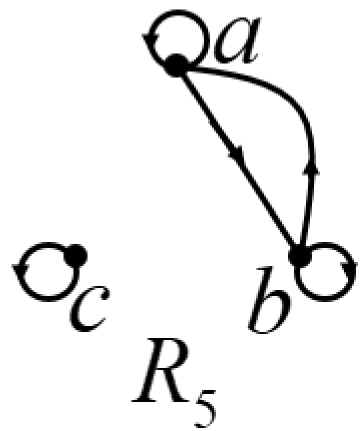


R_4是对称的。

R5

$$R_5 = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>, <c, c>\}$$

$$M_{R_5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

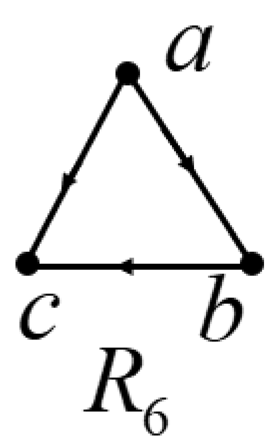


R_5是自反的、对称的、传递的。

R6

$$R_6 = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$$

$$M_{R_6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

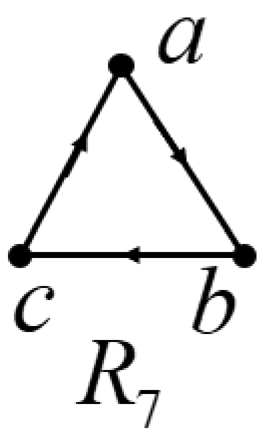


R_6 是反自反的、反对称、传递的。

R7

$$R_7 = \{<a, b>, <b, c>, <c, a>\}$$

$$M_{R_7} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

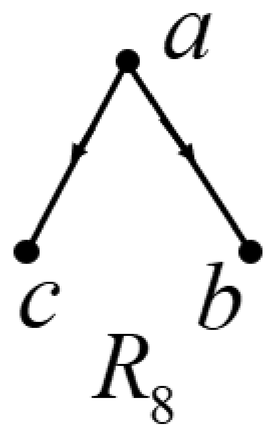


R_7是反自反、反对称的。

R8

$$R_8 = \{<a, b>, <a, c>\}$$

$$M_{R_8} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



R_8 是反自反、反对称、传递的。

总结

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R1	√			√	√
R2				√	
R3					
R4			√		
R5	√		√		√
R6		√		√	√
R7		√		√	
R8		√		√	√

偏序关系

等价关系

设$A = \{1,2,3\}$，R是P(A)上的二元关系，

且$R=\{<a,b> \mid a\cap b\neq\varnothing, a\in \mathrm{P}(A), b\in \mathrm{P}(A)\}$，

则R满足下列哪个性质？

A) 自反性

B) 反自反性

√ C) 对称性

D) 反对称性

关系性质成立的充要条件

定理7.9 设R为A上的关系, 则

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明

证明 只证(1)、(3)、(4)、(5)

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

证明：

必要性：R 在A上自反 $\Rightarrow I_A \subseteq R$

任取$<x,y>$, 有

$$<x,y> \in I_A \Rightarrow x,y \in A \wedge x=y \Rightarrow <x,y> \in R$$

从而证明了$I_A \subseteq R$

充分性：$I_A \subseteq R \Rightarrow R$ 在A上自反

任取x, 有

$$x \in A \Rightarrow <x,x> \in I_A \Rightarrow <x,x> \in R$$

因此 R 在A上是自反的.

证明

(3) R 在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

证明：

必要性：R 在A上对称 $\Rightarrow$ $R=R^{-1}$

任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R \Leftrightarrow <x,y>\in R^{-1}$$

所以 $R = R^{-1}$

充分性：$R=R^{-1} \Rightarrow$ R 在A上对称

任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in R \Rightarrow <y,x>\in R^{-1} \Rightarrow <y,x>\in R$$

所以R在A上是对称的

证明

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

证明：必要性： R 在A上反对称 $\Rightarrow R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

任取$<x,y>$, 有

$$<x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in R\wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge <y,x>\in R \Rightarrow x=y \wedge x,y\in A$$

$$\Rightarrow <x,y>\in I_A$$

这就证明了$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

充分性： $R\cap R^{-1}\subseteq I_A \Rightarrow R$ 在A上反对称

任取$<x,y>$,有

$$<x,y>\in R\wedge <y,x>\in R \Rightarrow <x,y>\in R\wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in I_A \Rightarrow x=y$$

从而证明了R在A上是反对称的.

证明

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明：

必要性： R 在A上传递 $\Rightarrow$ $R \circ R \subseteq R$

任取$<x,y>$有

$<x,y> \in R \circ R$

$\Rightarrow \exists t\,(<x,t> \in R \wedge <t,y> \in R)$

$\Rightarrow <x,y> \in R$

所以 $R \circ R \subseteq R$

充分性： $R \circ R \subseteq R \Rightarrow$ R 在A上传递

任取$<x,y>,<y,z> \in R$, 则

$<x,y> \in R \wedge <y,z> \in R$

$\Rightarrow <x,z> \in R \circ R \Rightarrow <x,z> \in R$

所以 R 在 A上是传递的

关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	M^2中1位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边, 是一对方向相反的边	两点之间有边,是一条有向边	点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边, 则x_i到x_k也有边

关系的性质和运算之间的联系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

若R_1和R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的

证

由R_1和R_2是传递的，可得：

$R_1 \circ R_1 \subseteq R_1$ 和 $R_2 \circ R_2 \subseteq R_2$

$(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2)$

$\subseteq R_1 \circ R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_2 \circ R_2$ 【定理7.4】

$\subseteq R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_2$

$\subseteq R_1 \cap R_2$

第七章 二元关系

主要内容

7.5 关系的闭包

主要内容

- 闭包定义
- 闭包的构造方法

  集合表示

  矩阵表示

  图表示
- 闭包的性质

闭包定义

定义7.14

设R是非空集合A上的关系, R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R\subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有$R'\subseteq R''$

R的自反闭包记作$r(R)$

R的对称闭包记作$s(R)$

R的传递闭包记作$t(R)$

闭包的构造方法

- 集合表示
- 矩阵表示
- 图表示

闭包的构造方法之集合表示

定理7.10 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup R^0$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

说明：对有穷集$A(|A|=n)$上的关系, (3)中的并最多不超过R^n

定义7.14

设R是非空集合A上的关系，R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R'，使得R'满足以下条件：

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有$R' \subseteq R''$

证 只证(1)和(3).

(1) $r(R)=R \cup R^0$

证明：（利用闭包的定义）

1) 由$I_A=R^0 \subseteq R \cup R^0$，知 $R \cup R^0$是自反的，

2) 且满足$R \subseteq R \cup R^0$

3) 设R''是A上包含R的自反关系，则有$R \subseteq R''$和$I_A \subseteq R''$.

从而有$R \cup R^0 \subseteq R''$.

故，$R \cup R^0$满足闭包定义，所以$r(R)=R \cup R^0$.

证明

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

证明：

1) 先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$成立.

为此，只需证明对任意正整数n 有$R^n\subseteq t(R)$. 用归纳法:

当$n=1$时，有$R^1=R\subseteq t(R)$.

假设$R^n\subseteq t(R)$成立, 那么对任意的$<x,y>$

$$<x,y>\in R^{n+1}=R^n\circ R \Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in R^n\wedge<t,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in t(R)\wedge<t,y>\in t(R)) \Rightarrow <x,y>\in t(R)$$

这就证明了$R^{n+1}\subseteq t(R)$.

由归纳法命题得证.

证明

2) 再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots$成立.

由于包含R的传递关系都包含$t(R)$，

为此只须证明$R \cup R^2 \cup \ldots$传递.

任取$<x,y>,<y,z>$, 则

$$<x,y> \in R \cup R^2 \cup \ldots \land <y,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,y> \in R^t) \land \exists s(<y,z> \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\, \exists s\,(<x,z> \in R^t \circ R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\, \exists s\,(<x,z> \in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow <x,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

从而证明了$R \cup R^2 \cup \ldots$是传递的.

闭包的构造方法之矩阵表示

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r , M_s 和 M_t
则

$$M_r=M+E$$

$$M_s=M+M'$$

$$M_t=M+M^2+M^3+\ldots$$

其中，E 是单位矩阵, M'是 转置矩阵，相加时使用逻辑加.

闭包的构造方法之图表示

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t, 则G_r , G_s , G_t 的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新的边:

(1) 考察G 的每个顶点, 若没环就加一个环，得到G_r

(2) 考察G 的每条边, 若有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在G 中加一条 x_j 到 x_i 的反向边，得到G_s

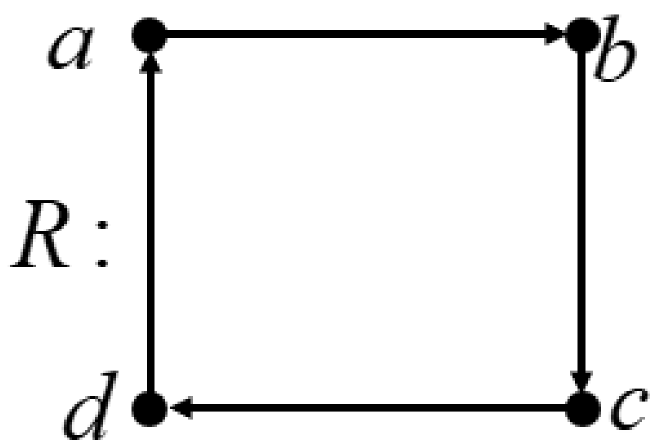
(3) 考察G 的每个顶点 x_i, 找 x_i 可达的所有顶点 x_j (允许$i=j$)，如果没有从 x_i 到 x_j 的边, 就加上这条边, 得到图G_t

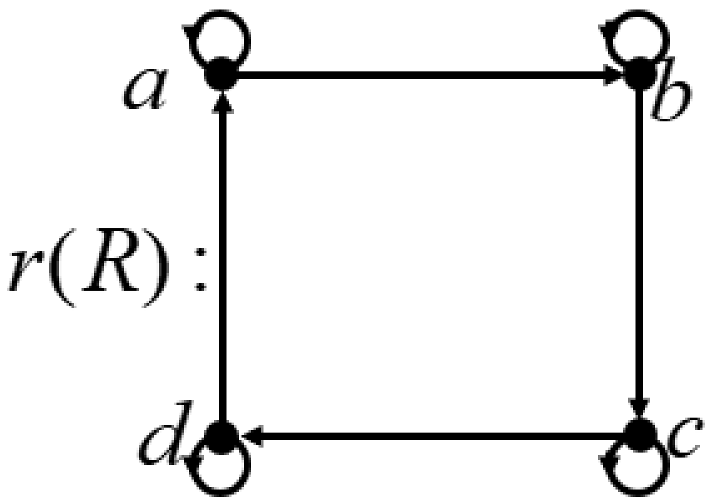
例 已知集合 X 与关系 R,试求 r(R) s(R) t(R)

$$X = \{a, b, c, d\},$$

$$R = \{<a,b>, <b,c>, <c,d>, <d,a>\}$$

解：

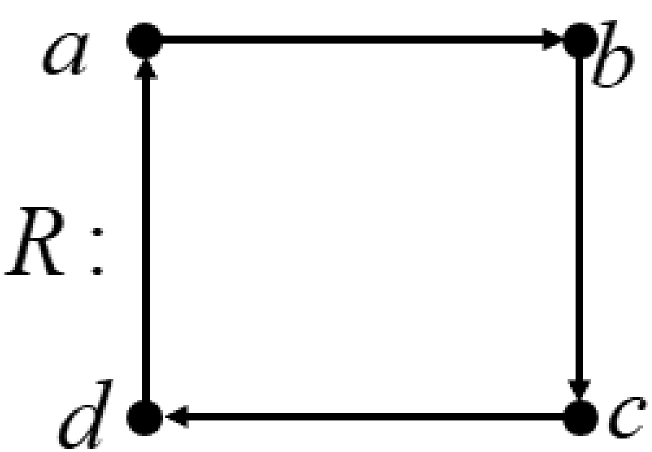


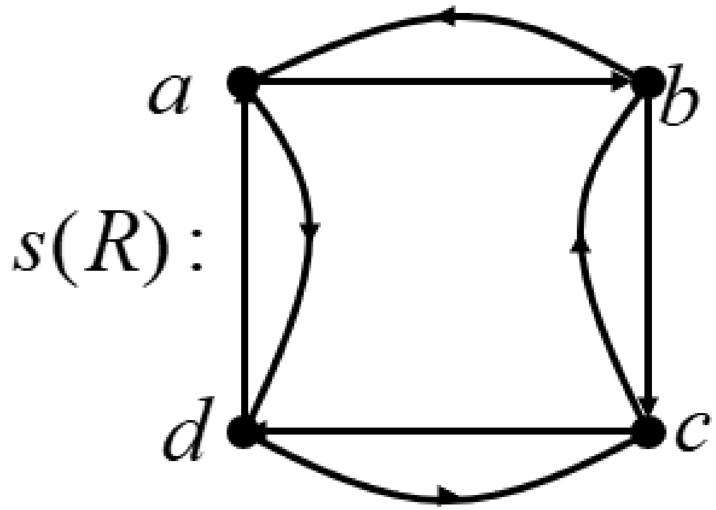


例（续）s(R)

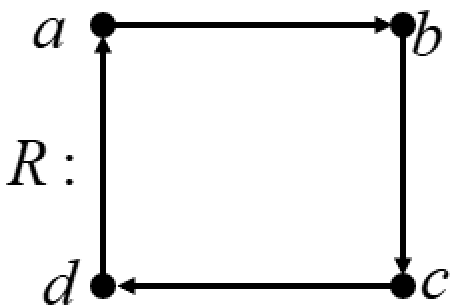
$$X = \{a, b, c, d\},$$

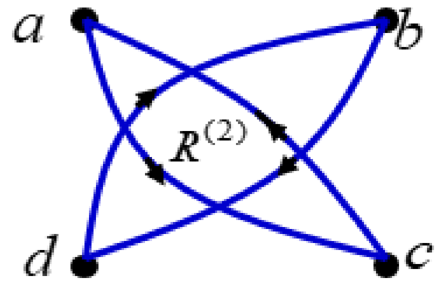
$$R = \{<a,b>, <b,c>, <c,d>, <d,a>\}$$

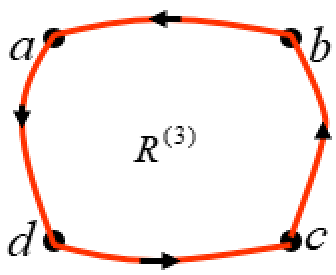


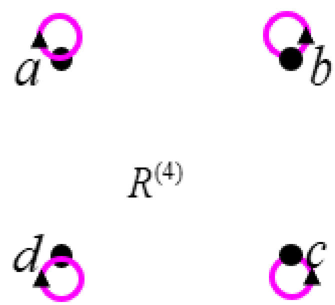


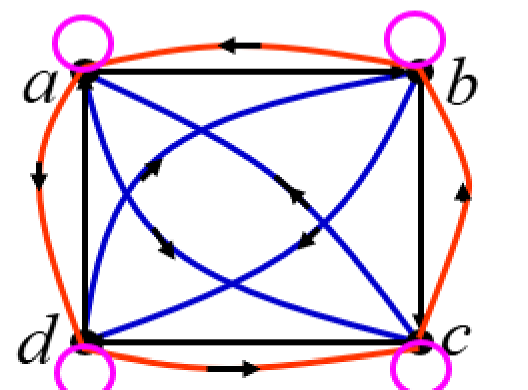
例（续） t(R)











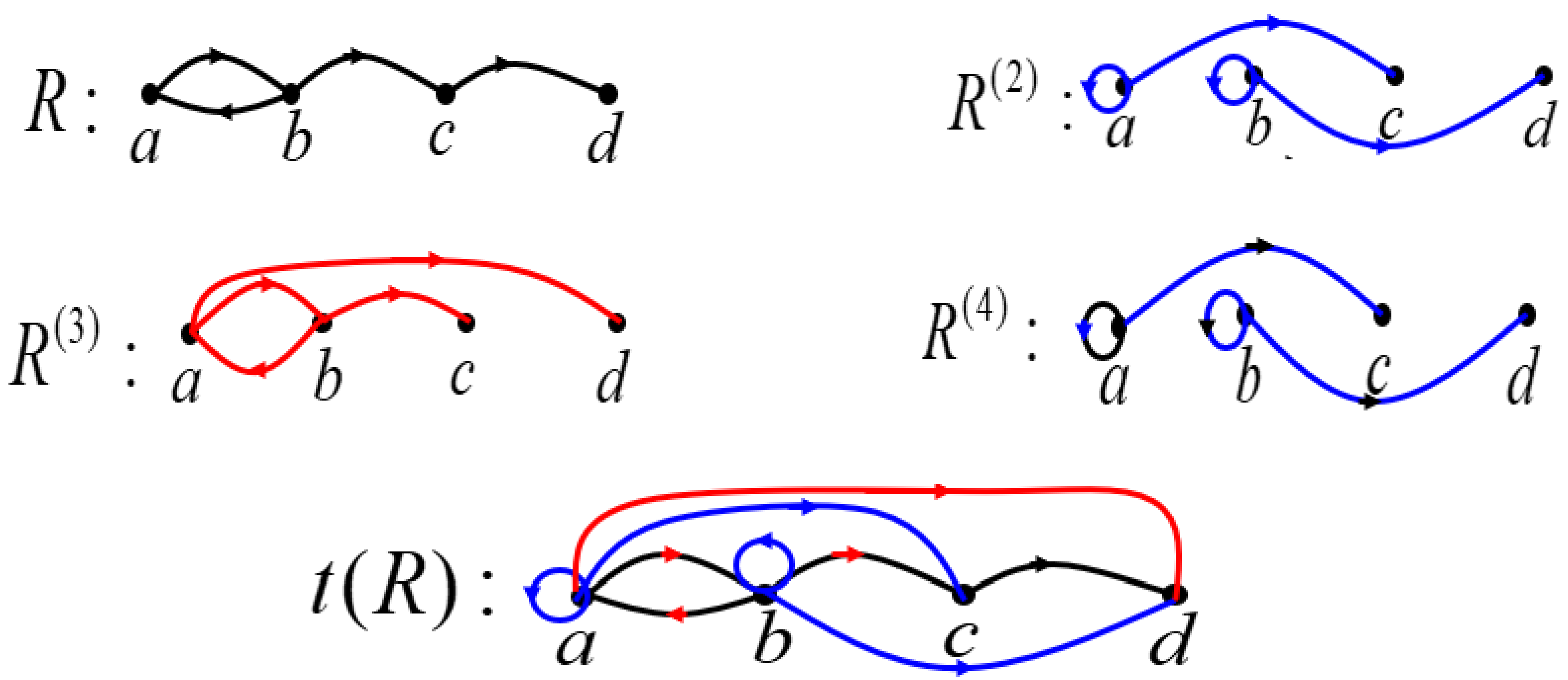
$$t(R) = R \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} \cup R^{(4)}$$

例 已知集合 X 和关系 R, 试求 t(R)

$$X = \{a, b, c, d\},$$

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$$

解： 用关系图

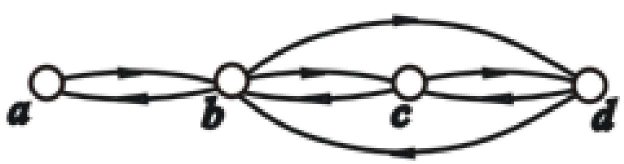


实例

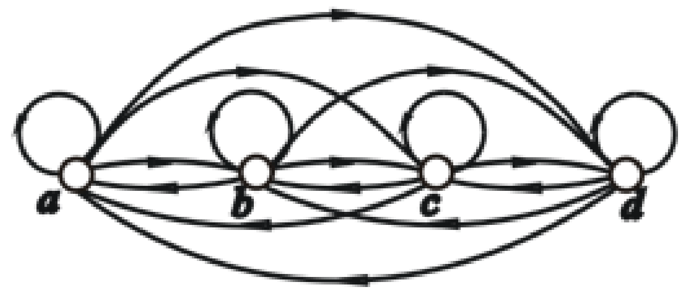
例9 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, R和$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示:

R

$r(R)$

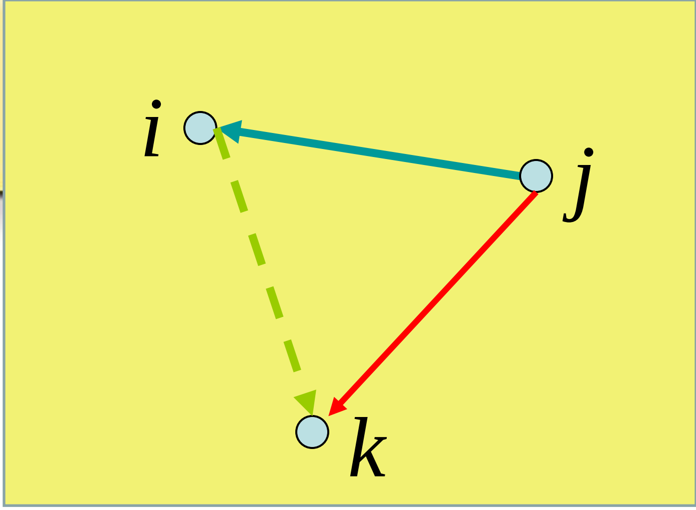


$s(R)$



$t(R)$

Warshall算法



1) 置新矩阵 $A := M$;

2) $i := 1$;

3) 对所有 j,若 $A[j,i] = 1$, 则对 $k = 1,2,\ldots,n$

$$A[j,k] := A[j,k] + A[i,k]$$

$(j\text{行} \leftarrow j\text{行} + i\text{行})$

4) $i := i+1$;

5)若 $i \le n$, 则转3), 否则停止。

例4 用Warshall算法求传递闭包

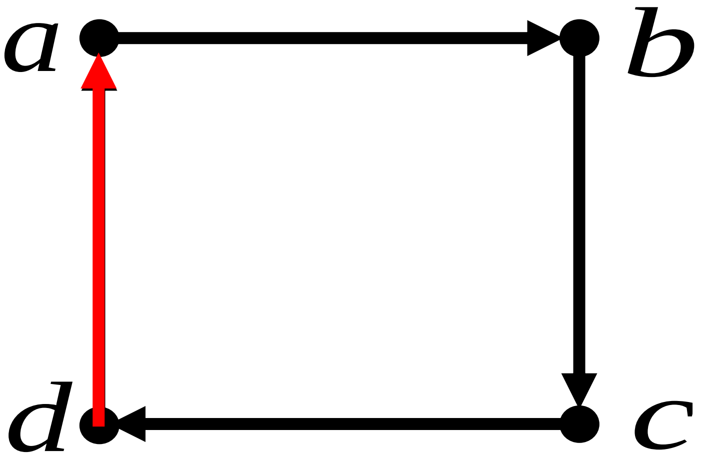
$X=\{a,b,c,d\}$,

$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,a>\}$

$$A=M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

i=1时，j=4

A_{41}=1



例4 用Warshall算法求传递闭包

$X=\{a,b,c,d\},$

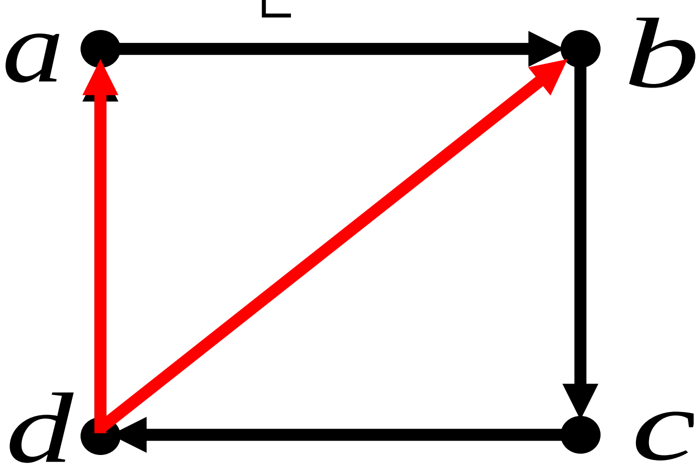
$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,d>,<d,a>\}$

$$A=M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

i=1时， j=4

$A_{41}=1$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

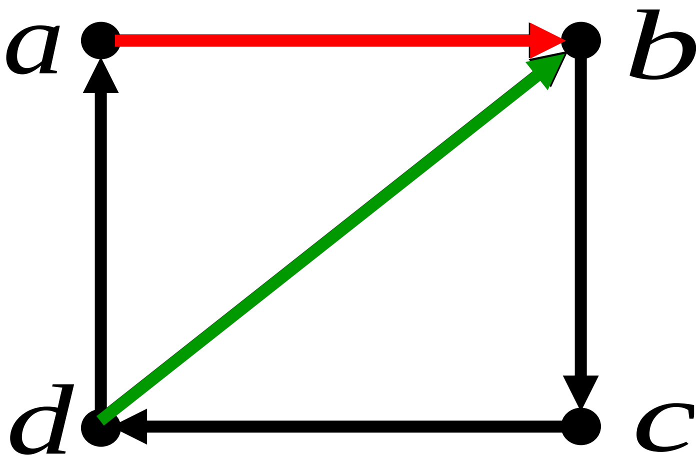


例4（续）

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

i=2时，j=1,4

A_{12} , A_{42}=1

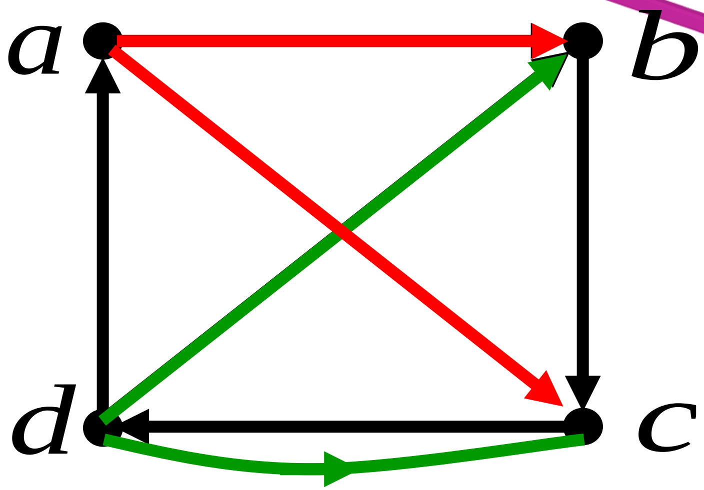


例4（续）

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$$

i=2时，j=1,4

A_{12}，A_{42}=1



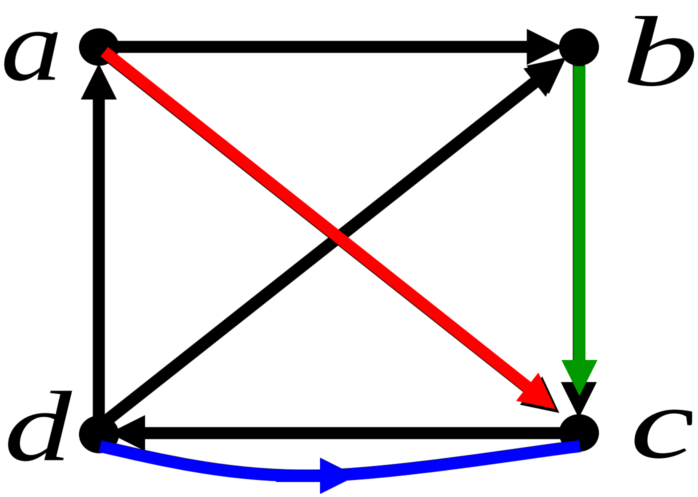
$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

例4（续）

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

i=3时，j=1,2,4

$A_{13}, A_{23}, A_{43}=1$

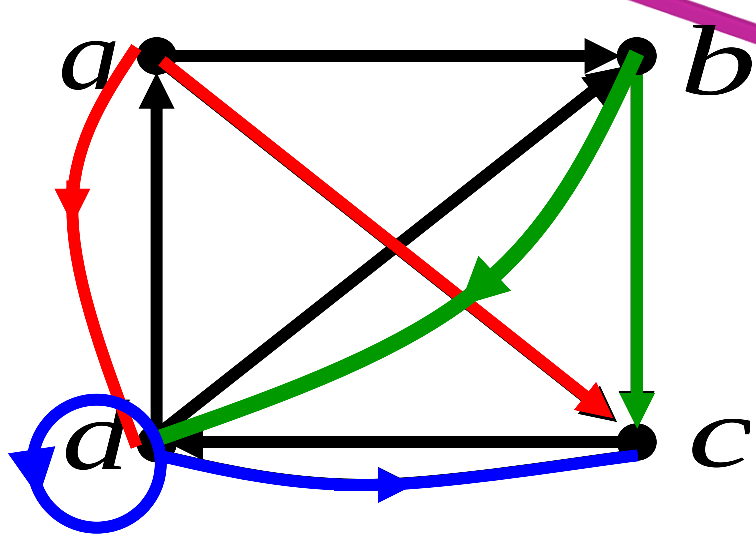


例4（续）

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

i=3时，j=1,2,4

A_{13}, A_{23}, A_{43} =1



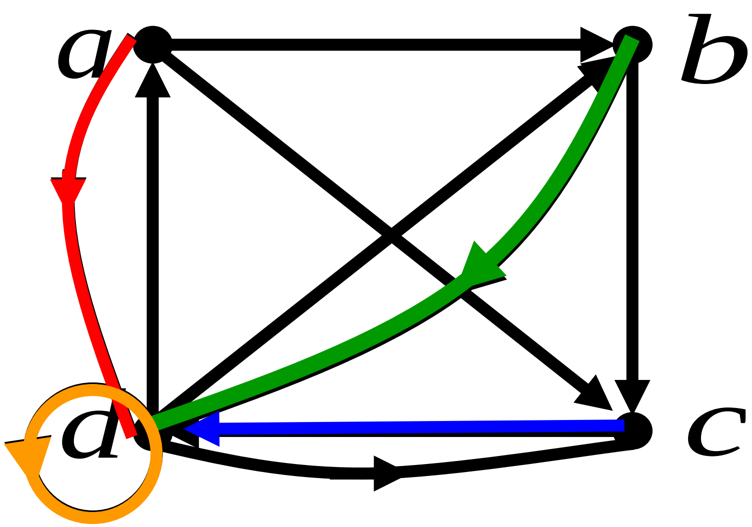
$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

例4（续）

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

i=4时，j=1,2,3,4

A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44}=1

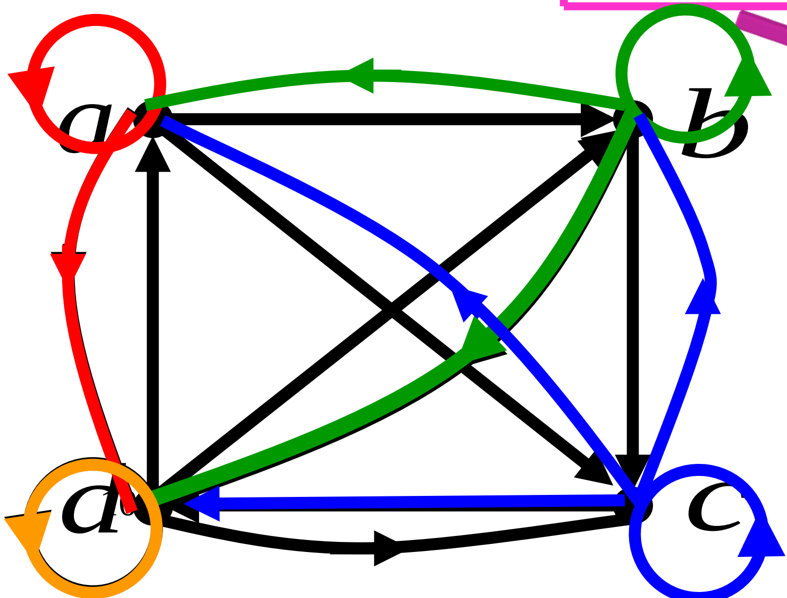


例4（续）

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

i=4时，j=1,2,3,4

A_{14} , A_{24} , A_{34} , A_{44}=1



$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

闭包的性质

定理7.11 设R是非空集合A上的关系, 则

(1) R是自反的当且仅当 $r(R)=R$.

(2) R是对称的当且仅当 $s(R)=R$.

(3) R是传递的当且仅当 $t(R)=R$.

定理7.12 设R_1和R_2是非空集合A上的关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证若 $R_2 \subseteq R_1$, 则 $s(R_2) \subseteq s(R_1)$

证明：

因为 $s(R_1)$ 对称且 $R_1 \subseteq s(R_1)$,

又 $R_2 \subseteq R_1$,

所以 $R_2 \subseteq s(R_1)$;

由 $s(R_2)$ 的定义，$s(R_2)$ 是包含 R_2 的最小的对称关系；

所以 $s(R_2) \subseteq s(R_1)$。

闭包的性质

定理7.13 设R是非空集合A上的关系，

(1) 若R是自反的，则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的

(2) 若R是对称的，则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的

(3) 若R是传递的，则 $r(R)$ 是传递的.

R	r(R)	s(R)	t(R)
自反的	√	√	√
对称的	√	√	√
传递的	√		√

注意：若R是传递的，则$s(R)$不一定是传递的。

如：$A=\{1,2,3\}$ $R=\{<1,2>\}$

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{<1,2>, <2,1>\}$

$s(R)$不是传递的。

闭包的性质

- $rs(R) = sr(R)$
- $rt(R) = tr(R)$
- $st(R) \subseteq ts(R)$

如果需要进行多个闭包运算，比如求*R*的自反、对称、传递的闭包 $tsr(R)$，运算顺序如下：

$$tsr(R) = rts(R) = trs(R)$$

试证性质：$st(R) \subseteq ts(R)$

证明：

若$R_2 \subseteq R_1$, 则 $s(R_2) \subseteq s(R_1)$, $t(R_2) \subseteq t(R_1)$

根据闭包的定义，可得 $R \subseteq s(R)$

所以 $t(R) \subseteq ts(R)$, $st(R) \subseteq sts(R)$

因为对称关系的传递闭包是对称的，

所以$ts(R)$是对称的，

而一个关系R是对称的充要条件是$R=s(R)$,

所以

$sts(R)= ts(R)$,

从而$st(R) \subseteq ts(R)$.

得证.

R	r(R)	s(R)	t(R)
自反的	√	√	√
对称的	√	√	√
传递的	√		√

7.5 关系的闭包（回顾）

主要内容

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
  - 集合表示
  - 矩阵表示
  - 图表示
- 闭包的性质

第七章 二元关系

主要内容

7.6 等价关系与划分

主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

等价关系的定义与实例

定义7.15 设R为非空集合A上的关系.

如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的**等价关系**.

设 R 是一个等价关系, 若$<x,y>\in R$, 称 x等价于y, 记做 $x\sim y$.

在学生的集合中，属于同一个班级的关系；

三角形中的相似关系；

在扑克牌中同花色的关系、同点数的关系等。

等价关系的定义与实例

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系R:

$$R=\{<x,y>|\ x,y\in A\land x\equiv y(\text{mod } 3)\}$$

其中$x\equiv y(\text{mod } 3)$叫做 x与 y 模3相等, 即x除以3的余数与y除以3的余数相等.

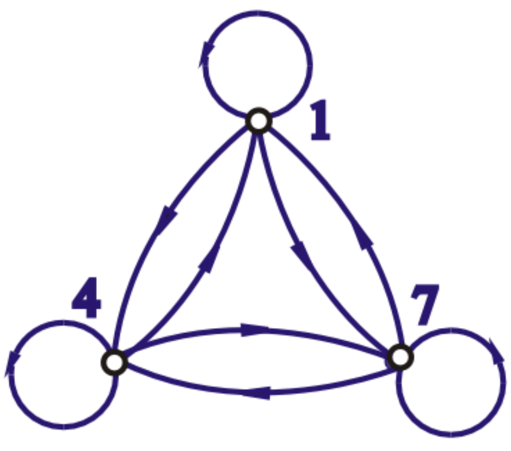
不难验证 R 为A上的等价关系, 因为

(1) $\forall x\in A$, 有 $x\equiv x\ (\text{mod } 3)$

(2) $\forall x,y\in A$, 若$x\equiv y(\text{mod } 3)$, 则有$y\equiv x(\text{mod } 3)$

(3) $\forall x,y,z\in A$, 若$x\equiv y(\text{mod } 3)$, $y\equiv z(\text{mod } 3)$, 则有$x\equiv z(\text{mod } 3)$

等价关系的实例



模 3 等价关系的关系图

等价类定义

定义7.16 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$， 令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \land xRy\}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类, 简称为x的**等价类**, 简记为$[x]$或 $\overline{x}$

实例 $A=\{1, 2, \ldots, 8\}$上模3等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

等价类的性质

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\}=A$

等价类的性质

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

---

(1) 证明:

由等价类的定义, $\forall x \in A$有$[x] \subseteq A$.

又: $x \in [x]$, 即$[x]$非空.

等价类的性质

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

---

(2)证明：任取 $z \in [x]$, 则有

$z \in [x]$

$\Rightarrow \langle x,z \rangle \in R$

$\langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \langle y,x \rangle \in R$

$\langle y,x \rangle \in R \wedge \langle x,z \rangle \in R$

$\Rightarrow \langle y,z \rangle \in R$

从而$z \in [y]$.

综上所述必有 $[x] \subseteq [y]$.

同理可证 $[y] \subseteq [x]$.

这就得到了$[x] = [y]$.

证明

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系，则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\}=A$

---

(3)证明：

假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$,

则存在 $z\in[x]\cap[y]$, 从而有$z\in[x]\wedge z\in[y]$,

即$<x,z>\in R \wedge <y,z>\in R$成立.

根据R的对称性和传递性，必有$<x,y>\in R$,

与 $x \not R y$ 矛盾

证明

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x\in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y\in A$, 如果 xRy , 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y\in A$, 如果 $x\not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x\in A\}=A$

---

(4)证明:

先证$\cup\{[x] \mid x\in A\}\subseteq A$.

任取y, $y\in\cup\{[x] \mid x\in A\}$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge y\in[x])$

$\Rightarrow y\in[x]\wedge[x]\subseteq A$

$\Rightarrow y\in A$

从而有$\cup\{[x] \mid x\in A\}\subseteq A$

再证$A\subseteq\cup\{[x] \mid x\in A\}$.

任取y,

$y\in A$

$\Rightarrow y\in[y]\wedge y\in A$

$\Rightarrow y\in\cup\{[x] \mid x\in A\}$

从而有$\cup\{[x] \mid x\in A\}\subseteq A$成立.

综上所述得$\cup\{[x] \mid x\in A\} = A$.

商集与划分

定义7.17 设 R 为非空集合A上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的**商集**, 记做A/R,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$， A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{8\}\}$$

$$A/E_A = \{\{1,2,\ldots,8\}\}$$

商集与划分

定义7.18 设A为非空集合，若A的子集族$\pi(\pi \subseteq P(A))$满足：

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\cup \pi = A$

则称π是A的一个**覆盖**；

若π还同时满足下面条件：

(3) $\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

则称π是A的一个**划分**，称π中的元素为A的**划分块**.

注意：划分是覆盖的特殊情形

划分实例

例10 设 $A=\{a, b, c, d\}$, 给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$如下:

$\pi_1=\{\{a, b, c\},\{d\}\}$

$\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$

$\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing,\{a, b\}, \{c, d\}\}$

$\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

则 π_1和 π_2是A的划分, 其他都不是A的划分.

π_1, π_2, π_3是A的覆盖.

等价关系与划分

定理7.15 集合A上的一个等价关系R，决定了A的一个划分，该划分就是商集 A/R .

定理7.16 集合A的一个划分, 确定A的元素间的一个等价关系.

（aRb 当且仅当 a 和 b 在同一个分块中）

划分和等价关系在本质上是相同的.

实例

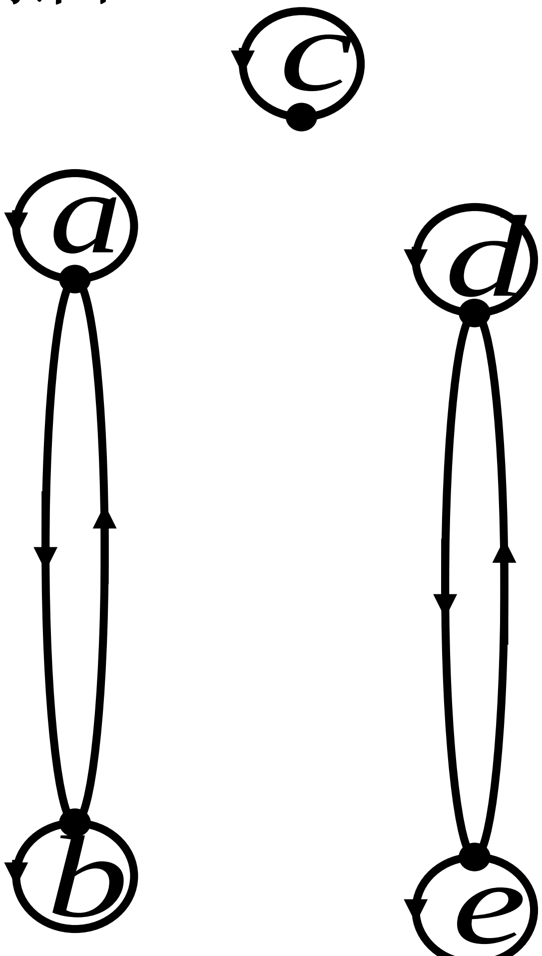
例 已知$X=\{a,b,c,d,e\}$, $C=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$ 试写出由 C 导出的 X 中的等价关系 R ，并给出关系矩阵和关系图.

解:
$$R=\{a,b\}\times\{a,b\}\cup\{c\}\times\{c\}\cup\{d,e\}\times\{d,e\}$$
$$=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<d,e>,<e,d>,<e,e>\}$$

实例（续）

例 已知$X=\{a,b,c,d,e\}$, $C=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$ 试写出由 C 导出的 X 中的等价关系 R ，并给出关系矩阵和关系图.

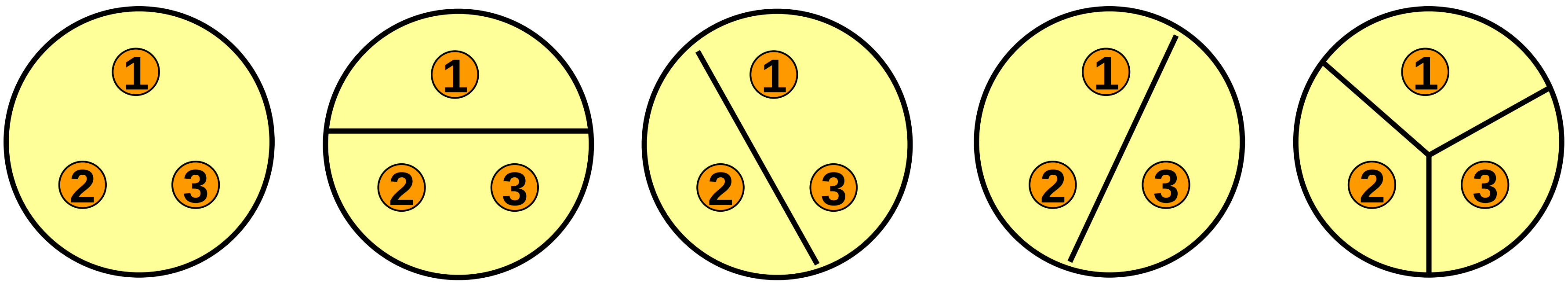
$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$$



实例

例11 给出 $A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系

解 先做出A的划分, 从左到右分别记作 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.



π_1　　π_2　　π_3　　π_4　　π_5

π_1对应 E_A, π_5 对应 I_A, π_2, π_3 和 π_4分别对应 R_2, R_3和 R_4.

$$R_2=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$$

$$R_3=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$$

$$R_4=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$$

例：设A和B是全集E的子集，给出各命题(如下所示)及由这些命题构成的集合$X=\{p,q,r,s,t,u,v,w,y,z\}$.

p: $A\cup B=E$; q: $A\cup B=B$; r: $A\subseteq B$; s: $\sim A\subseteq\sim B$; t: $\sim A\subseteq B$;

u: $\sim B\subseteq\sim A$; v: $A\cap B=\varnothing$; w: $A\cap B=B$; y: $A\subseteq\sim B$; z: $B\subseteq A$

在X上定义等价关系R_1:

$$xR_1y \Leftrightarrow x\text{是}y\text{的充分必要条件}$$

求X关于R_1的商集X/R_1

$$X/R_1=\{\{p,t\},\{q,r,u\},\{s,w,z\},\{v,y\}\}$$

等价关系的证明方法及实例

设R是非空集合A上的二元关系，证明R是等价关系的方法：

1. 证明R在A上自反

   任取x,

   $x\in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x\rangle\in R$

2. 证明R在A上对称

   任取$\langle x,y\rangle$,

   $\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle y,x\rangle\in R$

3. 证明R在A上传递

   任取$\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle$,

   $\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,z\rangle\in R$

因此，R是等价关系.

等价关系的证明方法及实例

例：设R为非空集合A上的自反和传递的关系，

证明：$R\cap R^{-1}$是A上的等价关系

证明：

1. 自反性 任取x，$x\in A$

$\Rightarrow \langle x,x\rangle\in R\wedge\langle x,x\rangle\in R\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R\wedge\langle x,x\rangle\in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x,x\rangle\in R\cap R^{-1}$

2. 对称性 任取$\langle x,y\rangle$，$\langle x,y\rangle\in R\cap R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in R^{-1}\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R^{-1}\wedge\langle y,x\rangle\in R$

$\Rightarrow \langle y,x\rangle\in R\cap R^{-1}$

3. 传递性 任取$\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle$，$\langle x,y\rangle\in R\cap R^{-1}\wedge\langle y,z\rangle\in R\cap R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\in R^{-1}\wedge\langle y,z\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R\wedge\langle x,z\rangle\in R^{-1}$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R\cap R^{-1}$

因此，R是等价关系.

等价关系的证明方法及实例

例：设R是$Z^+\times Z^+$上的二元关系（其中，Z^+表示正整数集），其定义如下：$\forall <x,y>,<u,v>\in Z^+\times Z^+$，

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \text{ 当且仅当 } xv=yu$$

证明：R是一个等价关系.

证明:

1.自反性 $\forall <x,y>\in A$,

因为$xy=yx$, 所以,

$<<x,y>,<x,y>>\in R$.

2.对称性 $\forall <<x,y>,<u,v>>\in R$,

则$xv=yu$, 即$uy=vx$, 所以,

$<<u,v>,<x,y>>\in R$.

3.传递性 $\forall <<x,y>,<u,v>>\in R$, $<<u,v>,<w,s>>\in R$,

则 $xv=yu$, $us=vw$. 因此 $xvus=yuvw$, 即$xs=yw$, 所以,

$<<x,y>,<w,s>>\in R$.

因此，R是等价关系.

7.6 等价关系与划分（回顾）

主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

第七章 二元关系

主要内容

7.7 偏序关系

主要内容

- 偏序关系

  偏序关系的定义

  偏序关系的实例

- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素及其性质

  极大元、极小元、

  最大元、最小元；

  上界、下界、

  最小上界、最大下界.

定义与实例

定义7.19

偏序关系：非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，记作$\preccurlyeq$.

设$\preccurlyeq$为偏序关系, 如果 $\langle x, y\rangle \in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作 x "小于或等于" y.

实例

集合A上的恒等关系 I_A是 A上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

定义7.20 设 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $\forall x,y\in A,\ x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x\neq y$

(2) $\forall x,y\in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

任取元素 x 和 y, 可能有下述几种情况发生:

$x \prec y$ (或 $y \prec x$),　$x=y$,　x与y不是可比的

定义7.21 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $\forall x,y\in A$, x与y都是可比的，则称R为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系,

整除关系不是正整数集合上的全序关系

相关概念

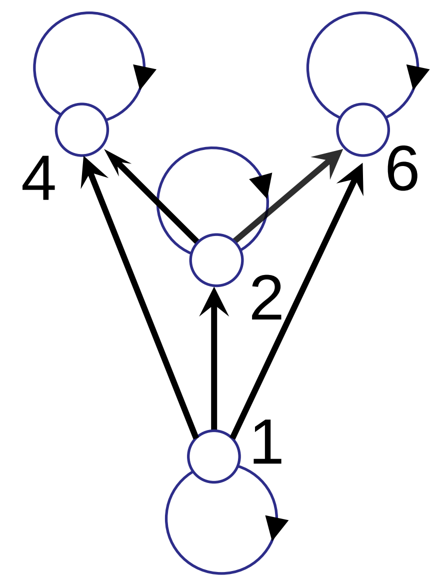
定义7.22 $x,y \in A$, 如果 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$, 则称 y**覆盖**x.

例如:

{1,2,4,6}集合上整除关系,

2覆盖1,

4和6覆盖2，不覆盖1.



偏序集与哈斯图

定义7.23 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做**偏序集**, 记作$<A,\preccurlyeq>$.

实例: $<Z,\le>$,

$<P(A),R_{\subseteq}>$

$<\{1,2,4,6\}, R_{整除}>$

偏序集与哈斯图

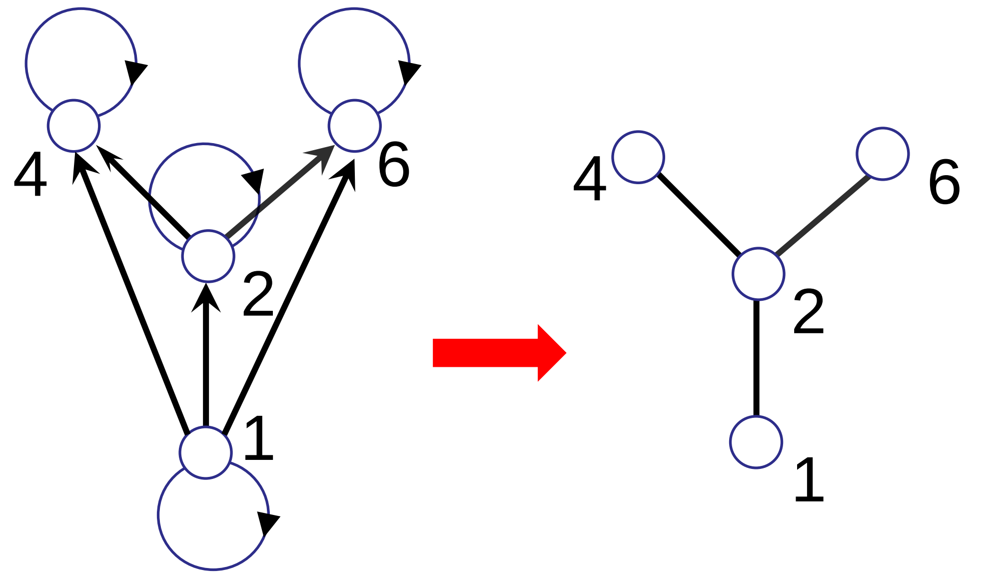
哈斯图: 利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点:

(1) 每个结点没有环;

(2) 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前（省略箭头）;

(3) 具有覆盖关系的两个结点之间连边.

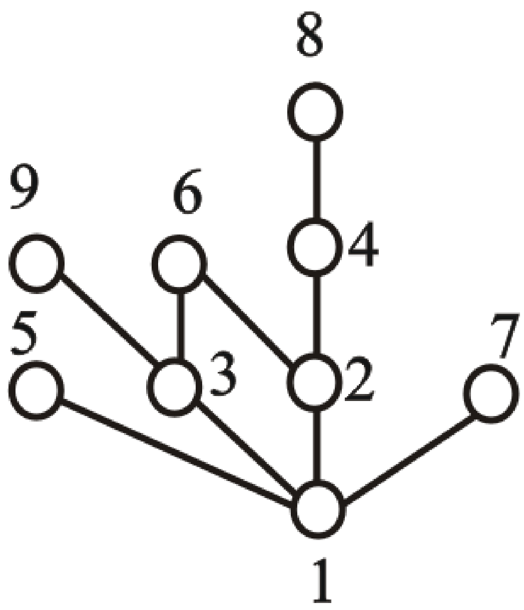


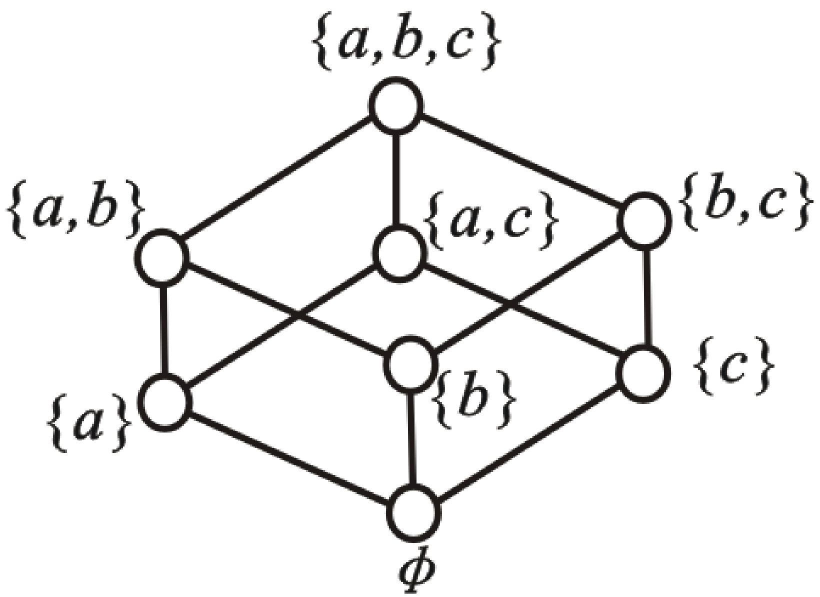
关系图　　　　哈斯图

$<\{1,2,4,6\}, R_{整除}>$

实例

例12 偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}, $R_{整除}$>和<$P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq}$>的哈斯图.





哈斯图与关系图

哈斯图是简化的关系图

(1)自反性：每个顶点都有自回路，省去自回路.

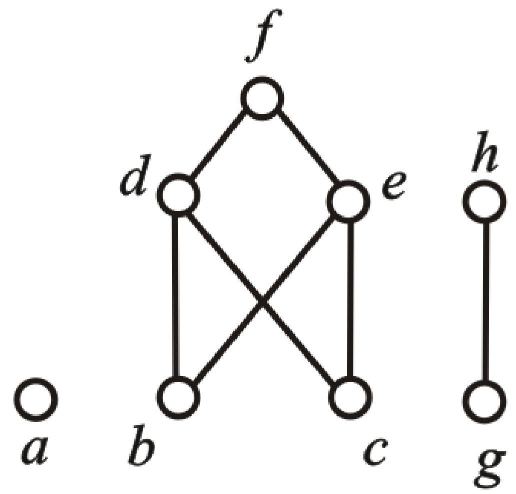
(2)反对称性：从小到大安置顶点，可省略箭头.

(3)传递性：由于有$<a,b>,<b,c> \in R$ 则$<a,c> \in R$，

故只画$<a,b>,<b,c>$对应的边，省略边$<a,c>$.

实例

例13 已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如下图所示, 试求出集合A和关系R的表达式.



解 $A=\{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

偏序集中的特殊元素

定义7.24 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为B的最小元

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为B的最大元

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极小元

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极大元

性质:

(1) 对于有穷集，极小元和极大元一定存在，可能存在多个.

(2) 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.

(3) 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.

(4) 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集中的特殊元素

定义7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$

(1) 若$\forall x(x \in B \to x \preccurlyeq y)$成立, 则称$y$为$B$的上界

(2) 若$\forall x(x \in B \to y \preccurlyeq x)$成立, 则称$y$为$B$的下界

(3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, C的最小元为B的最小上界或上确界

(4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, D的最大元为B的最大下界或下确界

性质:

(1) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在

(2) 下界、上界存在不一定惟一

(3) 下确界、上确界如果存在，则惟一

(4) 集合的最小元是其下确界，最大元是其上确界；反之不对.

实例

例14 设偏序集<A,≼>，求A的极小元、最小元、极大元、最大元，设B={ b,c,d }, 求B的下界、上界、下确界、上确界.

解

极小元：a, b, c, g;

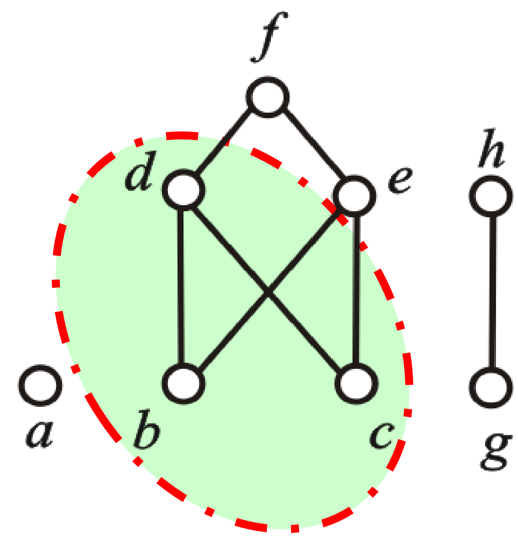
极大元：a, f, h;

没有最小元与最大元.

B的下界和最大下界都不存在;

上界有 d 和 f,

最小上界为 d.



实例

例15 设X为集合, $A=P(X)-\{\varnothing\}-\{X\}$, 且$A\neq\varnothing$. 若$|X|=n$, $n\geq 2$. 问:

(1) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最大元?

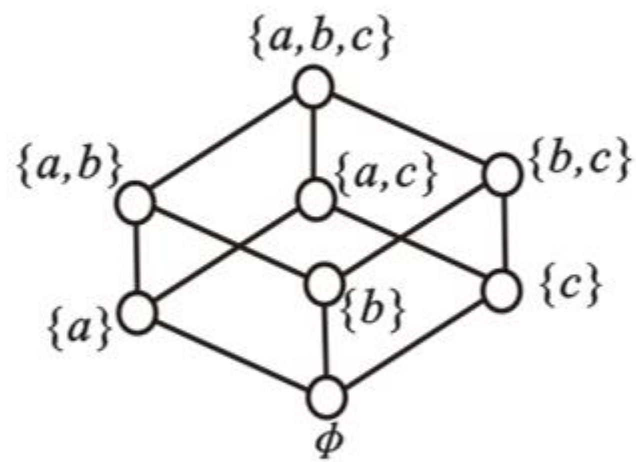
(2) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 是否存在最小元?

(3) 偏序集 $<A, R_{\subseteq}>$ 中极大元和极小元的一般形式是什么? 并说明理由.

解 (1)(2) $<A, R_{\subseteq}>$ 不存在最小元和最大元, 因为$n\geq 2$.

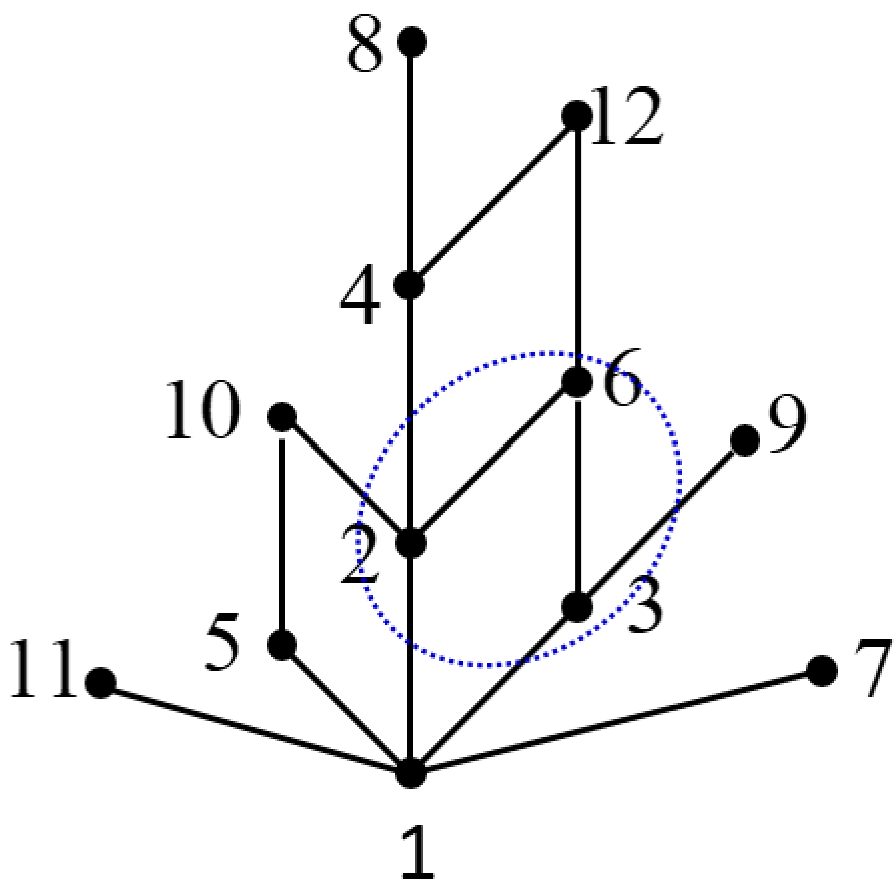
(3) $<A, R_{\subseteq}>$ 的极小元就是 X 的所有单元集, 即$\{x\}$, $x\in X$.

$<A, R_{\subseteq}>$ 的极大元恰好比 X 少一个元素, 即$X-\{x\}$, $x\in X$.



实例：<{1,2,…,12}, $R_{整除}$>

画出哈斯图,并求 $B = \{2,3,6\}$的 上(确)、下(确)界



上界： 6,12

上确界： 6

下(确)界： 1

偏序关系的证明方法及实例

设R是非空集合A上的二元关系，证明R是偏序关系的方法：

1. 证明R在A上自反

   任取x,

   $x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x \rangle \in R$

2. 证明R在A上反对称

   任取$\langle x,y \rangle$,

   $\langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,x \rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x = y$

3. 证明R在A上传递

   任取$\langle x,y \rangle, \langle y,z \rangle$,

   $\langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,z \rangle \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,z \rangle \in R$

因此，R是偏序关系.

例：证明在实数集R上, 小于等于$R_\leq$是偏序关系.

证明：

1. 自反性 任取x, $x \in$ R ,
有$x \leq x$，故
$<x,x> \in R_\leq$

2. 反对称性 任取$<x,y>$，$<x,y> \in R_\leq \wedge <y,x> \in R_\leq$
即$x \leq y$ 且 $y \leq x$，则必有
$x = y$

3. 传递性 任取$<x,y>,<y,z>$，$<x,y> \in R_\leq \wedge <y,z> \in R_\leq$
即$x \leq y$ 且 $y \leq z$，则必有$x \leq z$，即
$<x,z> \in R_\leq$

因此，小于等于$R_\leq$是偏序关系.

偏序关系的证明方法及实例

例：设偏序集$<A,R>$和$<B,S>$，定义$A\times B$上二元关系T:

$$<x,y>T<u,v> \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明：T为偏序关系.

证明：1.自反性 任取$<x,y>$, $<x,y>\in A\times B$

$\Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy$

$\Rightarrow <x,y>T<x,y>$

2.反对称性 任取$<x,y>,<u,v>$, $<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<x,y>$

$\Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$

$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$

$\Rightarrow <x,y>=<u,v>$

3.传递性 任取$<x,y>,<u,v>$, $<w,t>$, $<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<w,t>$

$\Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$

$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$

$\Rightarrow <x,y>T<w,t>$

因此， T为偏序关系.

7.7 偏序关系（回顾）

主要内容

- 偏序关系

  偏序关系的定义

  偏序关系的实例
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素及其性质

  极大元、极小元、

  最大元、最小元；

  上界、下界、

  最小上界、最大下界.

例： 对于偏序集<N, ≤ >，其中N是自然数集合，≤为普通的小于等于关系，对于N的任意非空子集*B*，下面那些命题为真？

① *B*中的极大元一定存在；

√ ② *B*的上确界不一定存在；

③ *B*中的极大元可能多于3个；

√ ④ 如果*y*为*B*的极小元，则*y*也为*B*的最小元；

√ ⑤ 如果*y*为*B*的极小元，则*y*也为*B*的下确界；

√ ⑥ *B*的下界一定存在。

第七章 二元关系（回顾）

主要内容

- 7.1 有序对与笛卡儿积
- 7.2 二元关系的定义与表示法
- 7.3 关系的运算
- 7.4 关系的性质
- 7.5 关系的闭包
- 7.6 等价关系与划分
- 7.7 偏序关系

进阶例题

例：若R是A上的二元关系，则下列阐述中正确的是：

① str(R)一定是A上的等价关系. 反例：R = {<1,3>,<1,2>}

② str(R)一定不是A上的偏序关系.

√ ③ tsr(R)一定是A上的等价关系.

④ tsr(R)一定不是A上的偏序关系.

R	r(R)	s(R)	t(R)
自反的	√	√	√
对称的	√	√	√
传递的	√		√