计算理论

林永钢

教材:

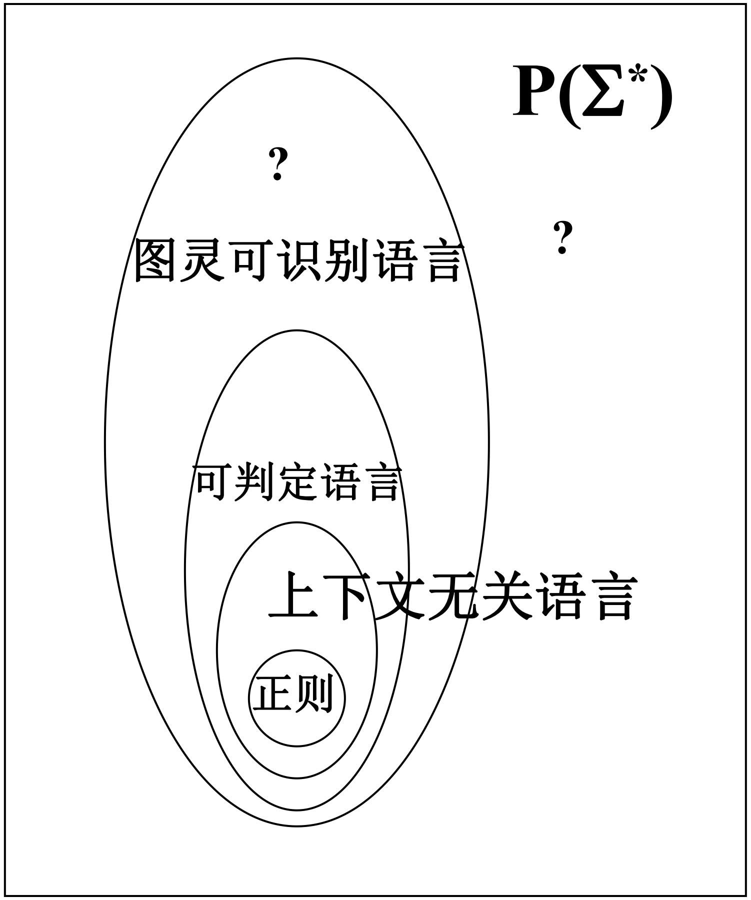
[S] 唐常杰等译, Sipser著, 计算理论导引, 机械工业.

参考资料:

[L] Lewis等著, 计算理论基础, 清华大学.

计算理论
第二部分 可计算理论

第4章 可判定性



可判定=有算法

- A_{TM} 图灵可识别 非图灵可判定
- A_{TM}的补 非图灵可识别
- 可判定问题举例
- 不可判定问题举例

Church-Turing 论题

1930’s人们开始考虑算法的精确定义

- 1900年巴黎世界数学家大会, Hilbert问题
- 1933, Kurt Gödel, 递归函数
- 1936, Alonzo Church, λ-calculus
- 1936, Alan Turing, 判定图灵机(判定器)
- Church 和 Turing 证明这三种定义等价
- 计算机能力的极限
- 即使未来几年量子计算机制造成功,
  人们能解决的问题类并不会变大

一些自然构造的问题

停机问题:

Halt = { <M,x> | 图灵机M在串x上会停机 }　　不可判定

成员测试:

A_{DFA} = {<B,w>|B是DFA,w是串,B接受w}　　可判定

A_{CFG} = {<B,w>|B是CFG,w是串,B派生w}　　可判定

A_{TM} = {<M,w>|M是一个TM,且接受w}　　不可判定

空性质测试: E_{DFA} = {<A>|A是DFA,L(A)=∅}　　可判定

E_{CFG} = {<G>|G是CFG,L(G)=∅}　　可判定

E_{TM} = {<M>|M是TM,L(M)=∅}　　不可判定

等价性质测试:

EQ_{DFA} = {<A,B>|A和B都是DFA,且L(A)=L(B)}　可判定

EQ_{CFG} = {<A,B>|A和B都是CFG,且L(A)=L(B)}　不可判定

A_{DFA}={<B,w>|DFA B接受串w}可判定

证明:如下构造A_{DFA}的判定器:

M="对于输入<B,w>,其中B是DFA,w是串:

1)在输入w上模拟B.

2)如果模拟以接受状态结束,则接受;

如果以非接受状态结束,则拒绝."

$L(M) = A_{DFA}$. 将B视为子程序或实现细节:

- 检查输入. ((p,q,…)(a,…)((p,a,q),…)(q_0)(F), w)
- 模拟. 初始,B的状态是 q_0,读写头位于w的最左端,

  状态的更新由B的转移函数决定.

A_{NFA}={<B,w>|NFA B接受串w}可判定

思路1: 直接模拟NFA?

思路2: 先将NFA转换成DFA.

证明:如下构造A_{NFA}的判定器:

N="在输入<B,w>上,其中B是NFA,w是串:

1)将NFA B转换成一个等价的DFA C.

2)在输入<C,w>上运行A_{DFA}的判定器M.

3)如果M接受,则接受,否则拒绝."

运行TM M: M作为子程序加进N的设计中.

$L(N) = A_{NFA}$.

空性质测试

定理: E_{DFA}={<A>|A是DFA,L(A)=∅}可判定.

证明: 若A为一个DFA, 则

L(A)≠∅ ⇔ 存在从起始状态到某接受状态的路径.

T="对于输入<A>, 其中A是一个DFA:

1)标记起始状态.

2)重复下列步骤,直到没有新标记出现.

3) 对任一未标记状态, 若有从已标记状态到它的转移, 则将它标记.

4)如果无接受状态被标记,则接受;否则拒绝."

$L(T) = E_{DFA}$.

TM成员测试A_{TM}

A_{TM}={<M,w>|M是一个TM,且接受w}

定理 A_{TM}是不可判定的.

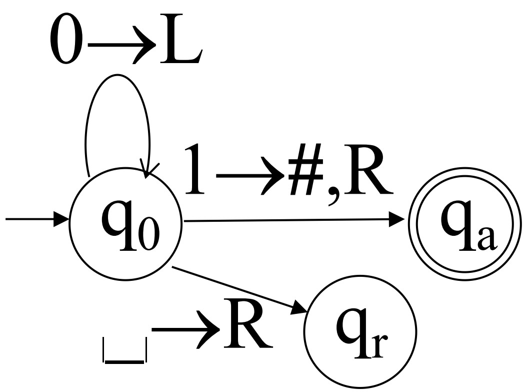
命题 A_{TM}是图灵可识别的.

U="对于输入<M,w>,其中M是TM, w是串：

1) 在输入w上模拟M;

2) 若M进入接受状态,则接受;

若M进入拒绝状态,则拒绝."



T

1. $L(U) = A_{TM}$.

2. U不是判定器, 在<T,01>上运行U不停机.

定理 A_{TM}不可判定

A_{TM}={<M,w>|M是一个TM,且接受w}

证明:假设A_{TM}可判定, 且设H是其判定器, 构造

D=“对于输入<M>,其中M是TM:

1)在串<M, <M>>上运行H.

2)若H接受(<M, <M>>), 则(D)拒绝(<M>);

若H拒绝(<M, <M>>), 则(D)接受(<M>).”

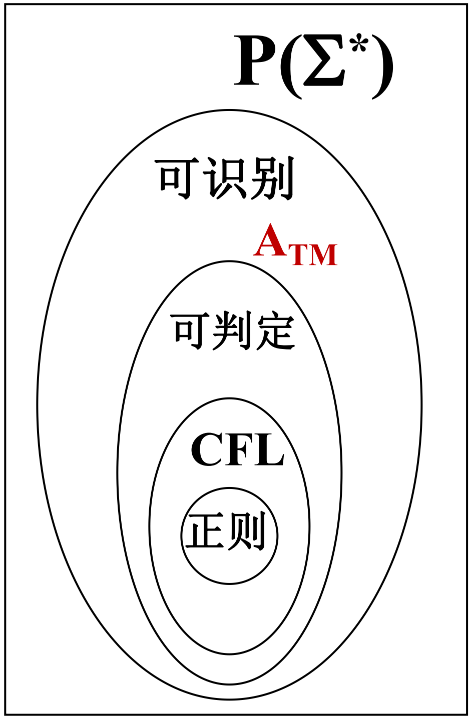
D接受<D>

? ⇔ <D,<D>>∈A_{TM}

? ⇔ H接受<D,<D>>

? ⇔ D拒绝<D>

矛盾, 所以A_{TM}不存在判定器.



定理: A_{TM}的补不是图灵可识别的

定理: 若A和A的补都是图灵可识别, 则A图灵可判定

证明: 设图灵机T和Q分别识别A和A的补, 构造R:

R= “ 对于输入x, x是串,

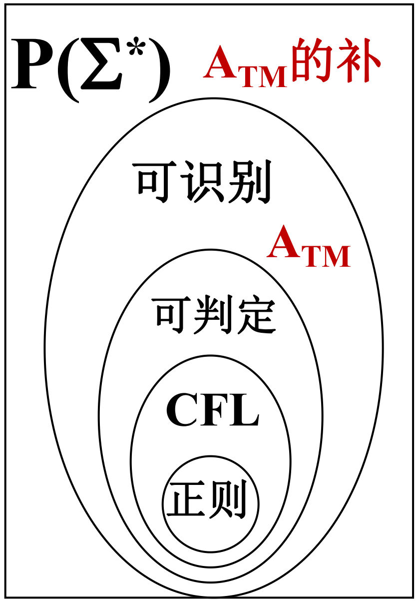
1. 在x上同步模拟T和Q, 直到有一个接受,
2. 若T接受x, 则接受; 若Q接受x, 则拒绝.”

$x\in A \Rightarrow$ T接受$x \Rightarrow$ R接受x

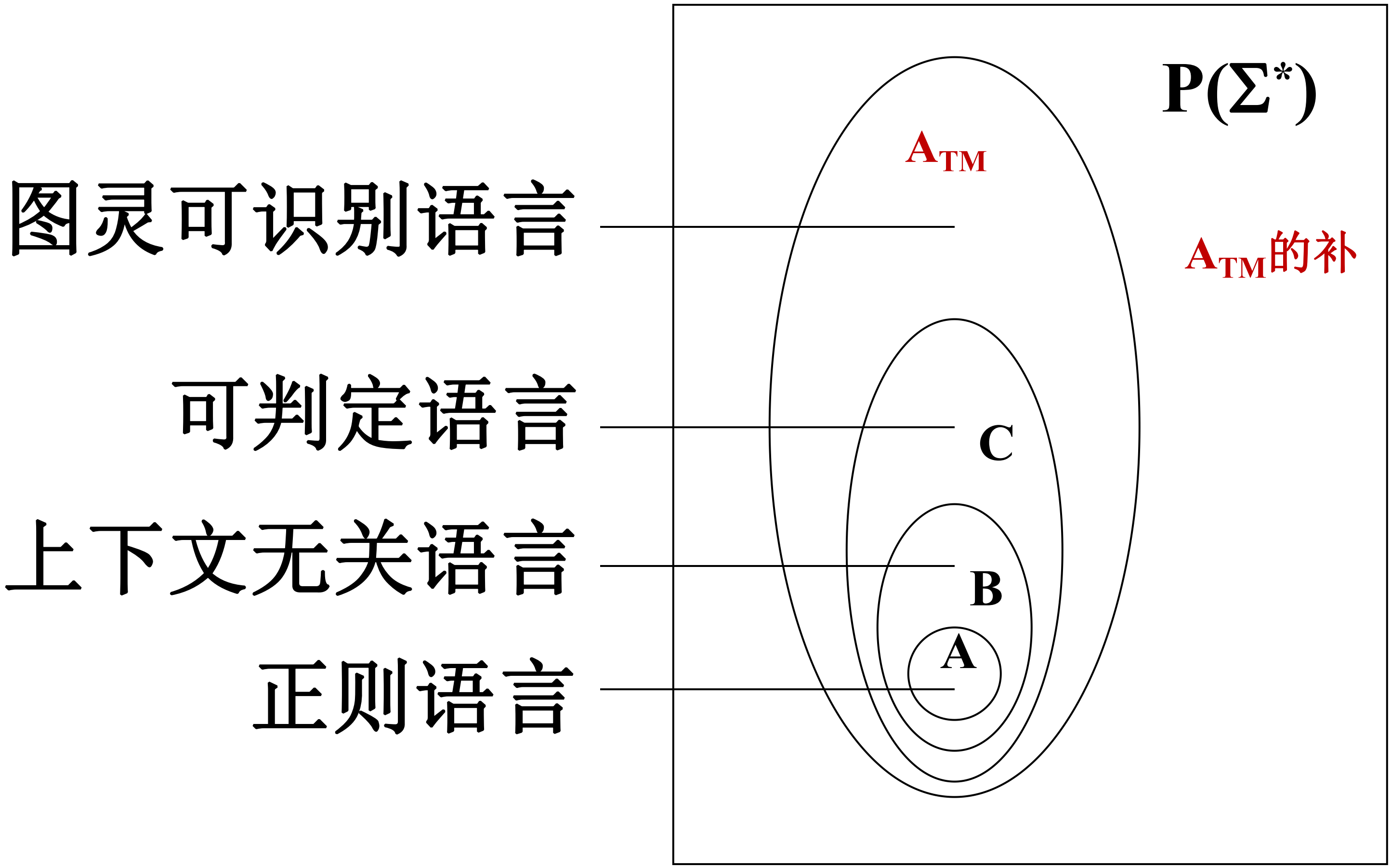
$x\notin A \Rightarrow$ Q接受$x \Rightarrow$ R拒绝x

1. R是判定器 2. R的语言是A.

推论: A_{TM}的补不是图灵可识别的.



各语言类之间的关系

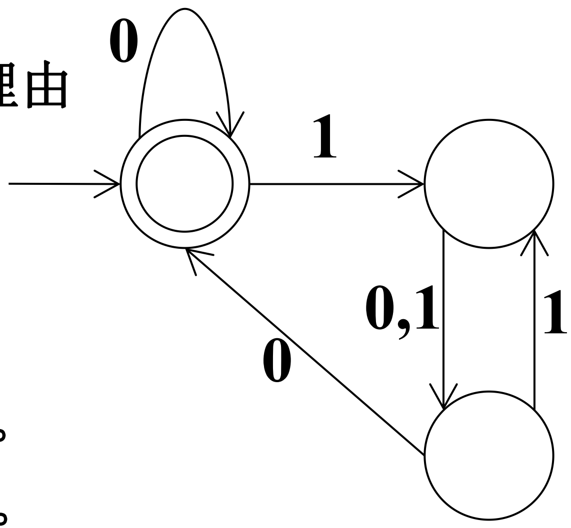


$\Sigma=\{0,1\}$, $A=\{0w1 : w\in\Sigma^*\}$ 正则语言

$B=\{0^n1^n : n\geq 0\}$ 上下文无关语言

$\Sigma=\{0\}$，$C=\{0^k:k=2^n,n\geq 0\}$ 图灵可判定语言

计算理论第4章作业



4.1 对于右图所示的DFA M, 回答下列问题，并说明理由

a. $<M,0100> \in A_{DFA}$?　b. $<M,011> \in A_{DFA}$?

c. $<M> \in A_{DFA}$?

e. $<M> \in E_{DFA}$?　　f. $<M,M> \in EQ_{DFA}$?

4.2 考虑一个DFA和一个正则表达式是否等价的问题。

将这个问题描述为一个语言并证明它是可判定的。

4.3 设 $ALL_{DFA} = \{<A> \mid A$是一个识别Σ^*的DFA$\}$.

证明ALL_{DFA}可判定.

4.15 设$A = \{<R> \mid R$是一个正则表达式，

其所描述的语言中至少有一个串w以111为子串$\}$.

证明A是可判定的。

不可判定问题举例

Hilbert第十问题: “多项式是否有整数根”有没有算法?

1970’s 被证明不可判定 (没有判定器, 即没有算法)

M = “对于输入 “p”, p是k元多项式,

1. 取k个整数的向量x (绝对值和从小到大)

2. 若p(x) = 0, 则停机接受.

3. 否则转1. ”

这个图灵机对输入 $p(x,y) = x^2+y^2-3$ 不停机

对比: 一个可判定问题

一元多项式是否有整数根?

M = "对于输入 "p", k次1元多项式p(x),

1. 计算解的绝对值上界N
2. 对所有$|x|\le N$
3. 若$p(x) = 0$, 则停机接受.
4. 停机拒绝. "

结论: $|x_0| < kc_{max} / |c_1|$

例如: $2x^3 + 3x^2 - 7x + 11 = 0$