



第二章 网孔分析和节点分析

2-1 网孔分析法

2-2 节点分析法

2-3 含运算放大器的电阻电路

2-4 电路的对偶性



支路分析法

对含 b 条支路， n 个节点的电路

	电路变量	KVL	KCL	VCR	方程总数
2b支路法	$i_1, \dots, i_b; u_1, \dots, u_b$	$b-n+1$	$n-1$	b	$2b$
1b支路电流法	i_1, \dots, i_b	$b-n+1$	$n-1$	0	b
1b支路电压法	u_1, \dots, u_b	$b-n+1$	$n-1$	0	b

问题：能否使所需的联立方程总数再进一步减少呢？



如何减少方程的数量？

(1) 支路电流受KCL约束，可选取适当的一组电流而不是全部支路电流作为求解变量。→ 网孔电流法

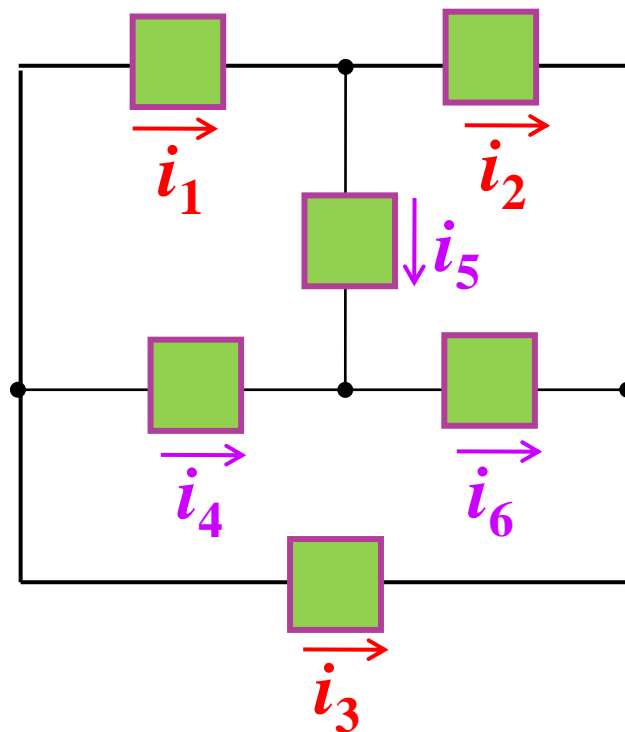
$$i_4 = -i_1 - i_3$$

$$i_5 = i_1 - i_2$$

$$i_6 = -i_3 - i_2$$

(2) 支路电压受KVL约束，可选取适当的一组电压而不是全部支路电压作为求解变量。

→ 节点电压法



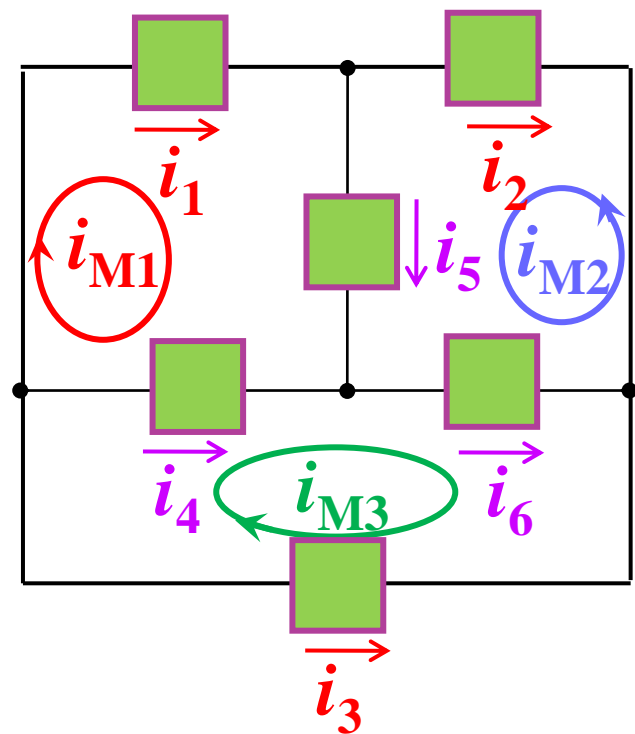
§ 2-1 网孔分析法 (网孔电流法)

网孔电流: 是一种沿着网孔边界流动的假想电流, 是一组完备的独立变量。符号 i_{M1} , 简化为 i_1 。

完备性: 各支路电流可由网孔电流的线性组合求得。

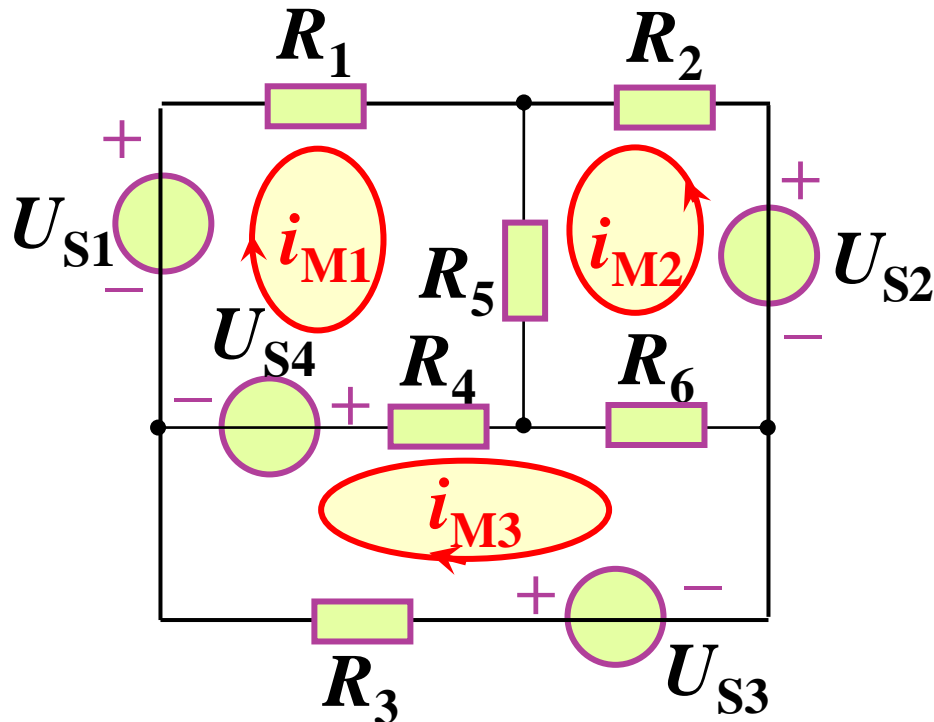
独立性: 网孔电流从一个节点流入又从这个节点流出, 不受 KCL 的约束, 不能互求。

基本思想: 以网孔电流为未知变量结合支路的 VCR 列写所有网孔的 **KVL** 方程 (网孔方程)。



网孔电流法的一般步骤：

- (1) 选定 $b-n+1$ 个网孔, 标明各网孔电流及方向;
- (2) 对每一个网孔, 以网孔电流的参考方向为回路绕行方向, 写KVL方程;



$$\text{网孔1: } R_1 i_{M1} + R_5 (i_{M1} + i_{M2}) + R_4 (i_{M1} - i_{M3}) + u_{S4} - u_{S1} = 0$$

$$\text{网孔2: } R_2 i_{M2} + R_5 (i_{M2} + i_{M1}) + R_6 (i_{M2} + i_{M3}) - u_{S2} = 0$$

$$\text{网孔3: } R_3 i_{M3} + R_4 (i_{M3} - i_{M1}) + R_6 (i_{M3} + i_{M2}) - u_{S4} - u_{S3} = 0$$

- (3) 解方程组求出各网孔电流, 则各支路电流、电压可求。

整理网孔方程得：

$$(R_1 + R_4 + R_5)i_{M1} + R_5 i_{M2} - R_4 i_{M3} = u_{S1} - u_{S4}$$

$$R_5 i_{M1} + (R_2 + R_5 + R_6)i_{M2} + R_6 i_{M3} = u_{S2}$$

$$-R_4 i_{M1} + R_6 i_{M2} + (R_3 + R_4 + R_6)i_{M3} = u_{S4} + u_{S3}$$

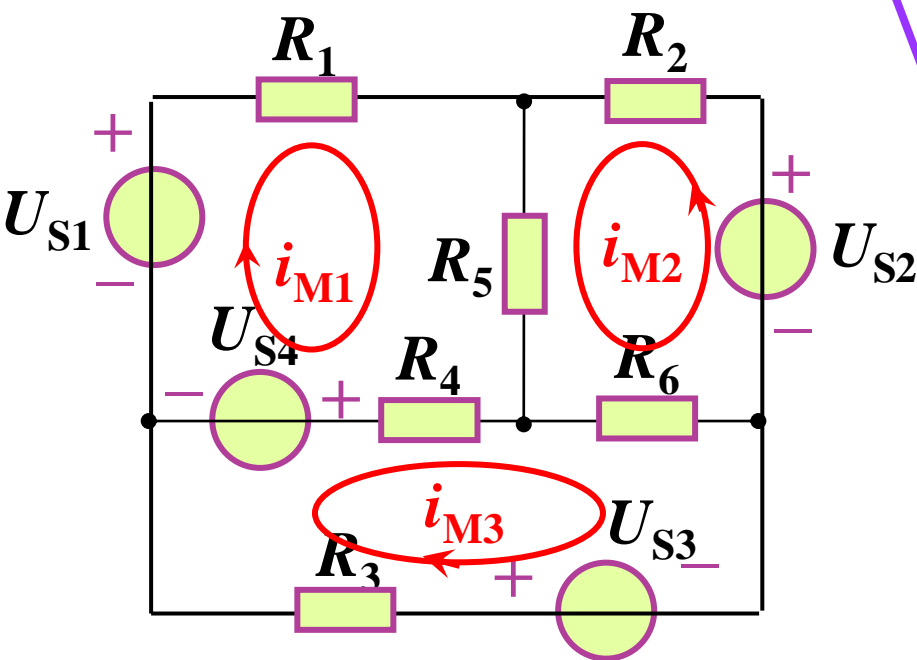
令 $R_{11} = R_1 + R_4 + R_5$ —— 网孔1的自电阻。

令 $R_{12} = R_{21} = R_5$ —— 网孔1和2间公共支路的电阻(互电阻)。

令 $u_{S11} = u_{S1} - u_{S4}$ —— 网孔1中所有独立电压源电压升的代数和。

$$\begin{cases} R_{11} i_{M1} + R_{12} i_{M2} + R_{13} i_{M3} = u_{S11} \\ R_{21} i_{M1} + R_{22} i_{M2} + R_{23} i_{M3} = u_{S22} \\ R_{31} i_{M1} + R_{32} i_{M2} + R_{33} i_{M3} = u_{S33} \end{cases}$$

可根据克莱姆法则求解。



推广到有 m 个网孔仅含电阻、独立电压源的电路

$$R_{11}i_{M1} + R_{12}i_{M2} + \cdots + R_{1m}i_{Mm} = u_{S11}$$

$$R_{21}i_{M1} + R_{22}i_{M2} + \cdots + R_{2m}i_{Mm} = u_{S22}$$

...

$$R_{m1}i_{M1} + R_{m2}i_{M2} + \cdots + R_{mm}i_{Mm} = u_{Smm}$$

其中 R_{kk} : 第 k 个网孔的自电阻(为正), $k = 1, 2, \cdots, m$

R_{jk} : 第 j 个网孔和第 k 个网孔的互电阻

{	+: 电流方向相同
	-: 电流方向相反
	0: 无关

Tips: 若各网孔电流的参考方向一律设为顺时针或逆时针方向, 则互阻总为负值。

u_{Skk} : 第 k 个网孔中所有电压源电压升的代数和。



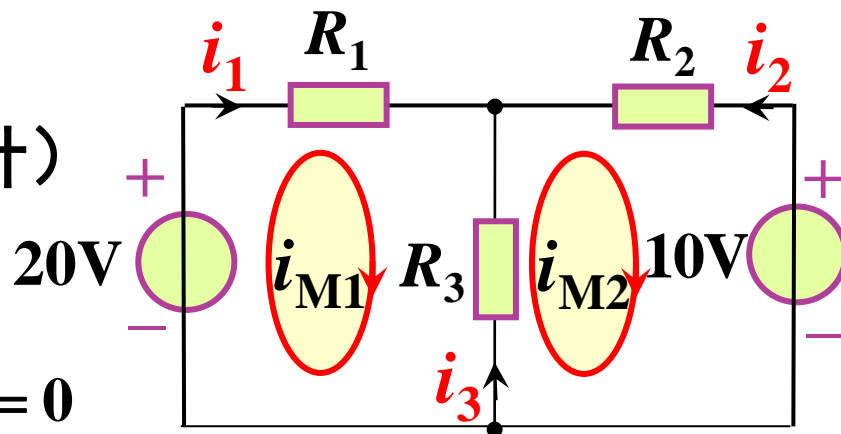
例 用网孔电流法求各支路电流。已知 $R_1=5\Omega$, $R_2=10\Omega$, $R_3=20\Omega$ 。

解: (1) 设网孔电流 (顺时针)

(2) 列 KVL 方程

$$\begin{cases} R_1 i_{M1} + (i_{M1} - i_{M2}) R_3 - 20 = 0 \\ R_2 i_{M2} + 10 + (i_{M2} - i_{M1}) R_3 = 0 \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} R_{11} i_{M1} + R_{12} i_{M2} = u_{S11} \\ R_{21} i_{M1} + R_{22} i_{M2} = u_{S22} \end{cases}$$



$$\begin{cases} 25 i_{M1} - 20 i_{M2} = 20 \\ -20 i_{M1} + 30 i_{M2} = -10 \end{cases}$$

对称阵

(3) 求解网孔方程, 得 i_{M1} , i_{M2}

(4) 求各支路电流: $i_1 = i_{M1}$, $i_2 = -i_{M2}$, $i_3 = i_{M2} - i_{M1}$



特殊情况1：电路中含有独立电流源

(1) 独立电流源处于边界支路上

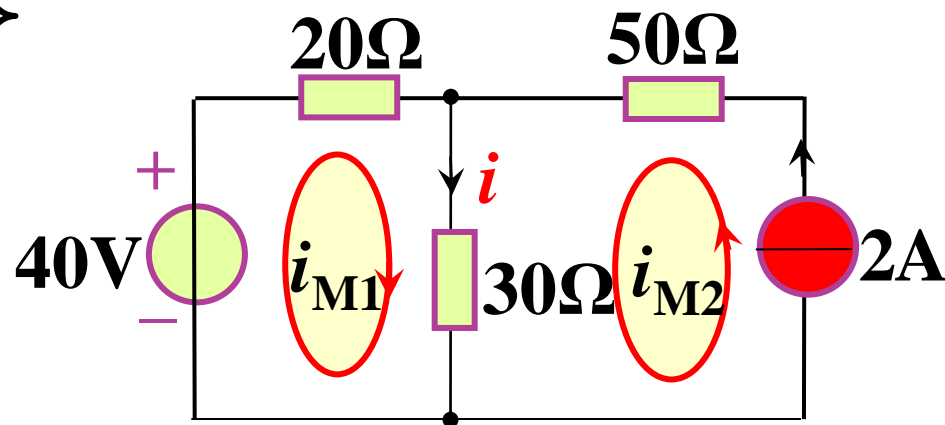
例 试求流经 30Ω 电阻的电流 i 。

解：如图设网孔电流，则有：

$$\left. \begin{array}{l} i_{M2}=2 \\ \text{网孔1: } 50i_{M1}+30i_{M2}=40 \end{array} \right\}$$

$$i_{M1}=-0.4 \text{ A}$$

$$i=i_{M1}+i_{M2}=1.6 \text{ A}$$

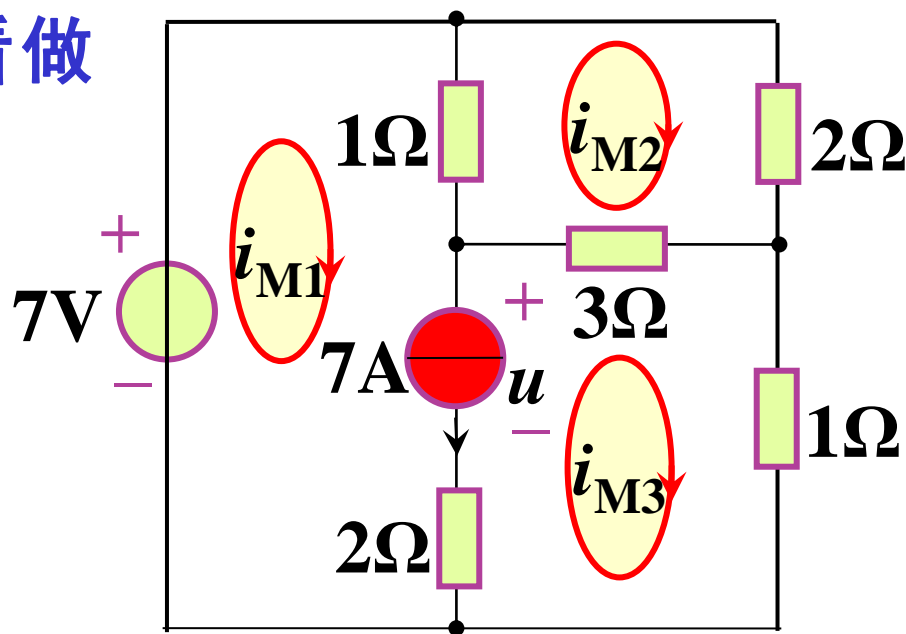


(2) 独立电流源处于公共支路上

例 试列该电路网孔方程。

解1: (1) 引入电流源的端电压变量 u ，将独立电流源看做独立电压源；

$$\begin{cases} 3i_{M1} - i_{M2} - 2i_{M3} = 7 - u \\ -i_{M1} + 6i_{M2} - 3i_{M3} = 0 \\ -2i_{M1} - 3i_{M2} + 6i_{M3} = u \\ i_{M1} - i_{M3} = 7 \end{cases}$$



(2) 增加网孔电流和电流源电流的关系方程。

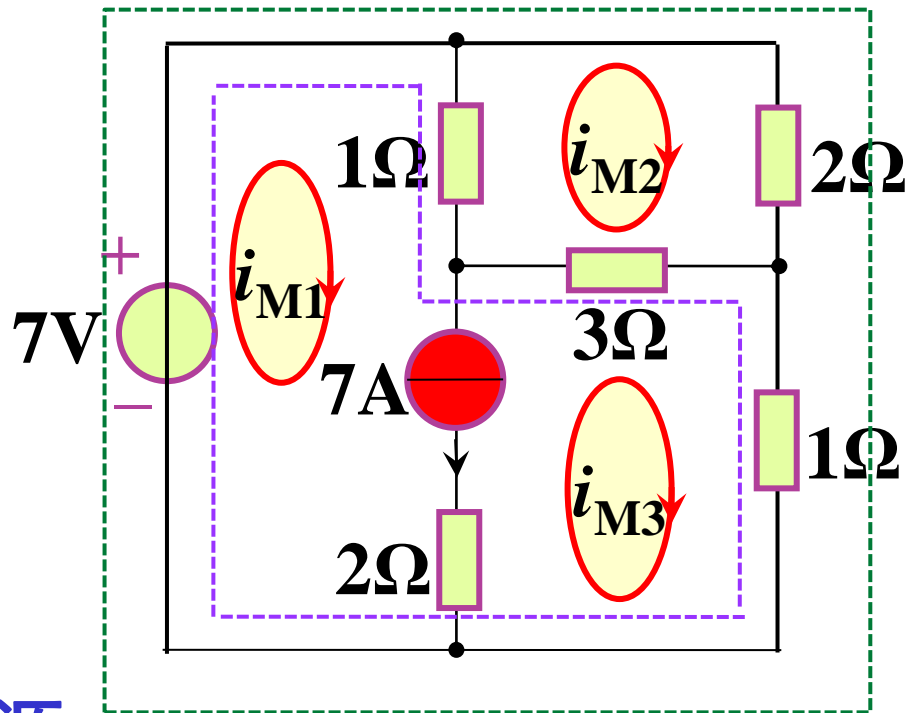
超网孔：把两个及以上含有公共支路的网孔组成的回路称为超网孔。

解决电流源(或受控电流源)处于公共支路的情形。

解2：

(1)列写超网孔方程

$$\begin{cases} -i_{M1} + 6i_{M2} - 3i_{M3} = 0 \\ 2i_{M2} + i_{M3} = 7 \\ i_{M1} - i_{M3} = 7 \end{cases}$$



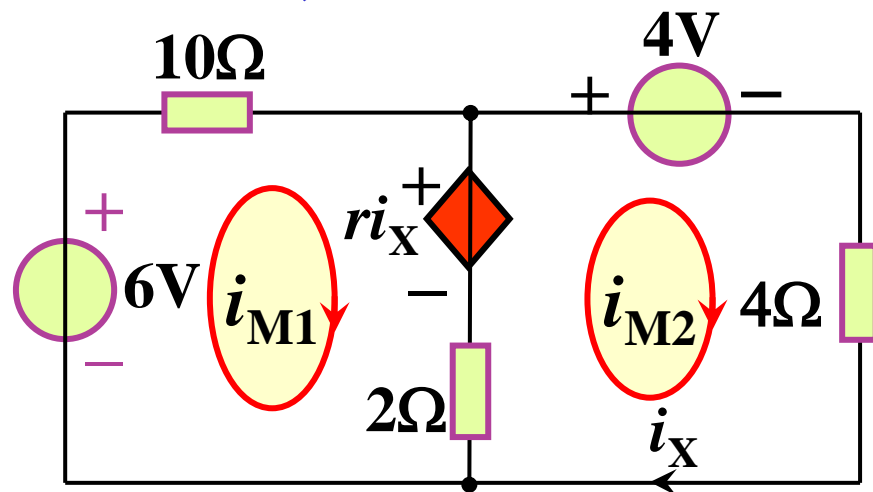
(2)增加网孔电流和电流源电流的关系方程。

特殊情况2：电路中含有受控源

例 用网孔分析法求含有受控电压源电路中的 i_X ($r=8\Omega$)

解：(1) 将CCVS看作独立源建立方程；

$$\begin{cases} 12i_{M1} - 2i_{M2} = 6 - 8i_X \\ -2i_{M1} + 6i_{M2} = 8i_X - 4 \\ i_X = i_{M2} \end{cases}$$



(2) 找出受控源的控制量和网孔电流关系。

$$\begin{cases} 12i_{M1} + 6i_{M2} = 6 \\ -2i_{M1} - 2i_{M2} = -4 \end{cases}$$



此时系数矩阵一般不对称。



思考：含受控电流源如何处理？





应用网孔电流法应注意：

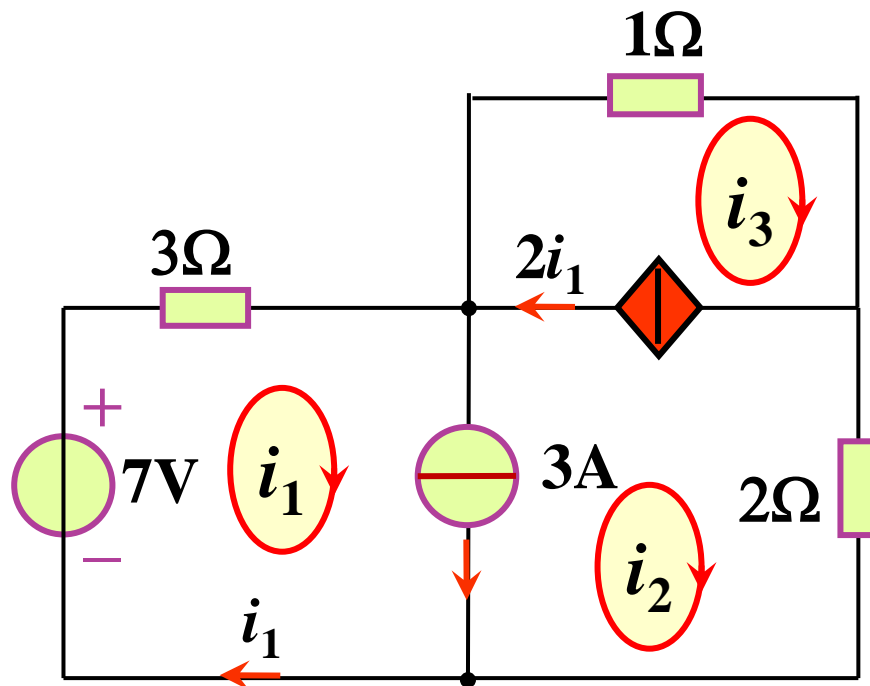
- (1) 网孔电流是一个**假想**的电流，实际并不存在；
- (2) 网孔方程的本质为KVL方程；
- (3) 网孔方程右端为网孔中**独立电压源电压升**的代数和；
- (4) 需列 $m=b-n+1$ 个网孔方程，仅适用于平面电路；
- (5) 含独立电流源的处理：**列写超网孔KVL方程，增加网孔电流和电流源电流的关系方程；**
- (6) 含受控源的处理：**将受控源看作独立源建网孔方程，增加受控源的控制量和网孔电流关系的方程。**



课堂练习

列网孔电流方程组求 i_1

$$\begin{cases} 3i_1 + 2i_2 + i_3 = 7 \\ i_1 - i_2 = 3 \\ i_3 - i_2 = 2i_1 \end{cases}$$



§ 2-2 节点分析法 (节点电压法)

电路的参考点：可以任意选取。工程上，一般选机壳、大地或元件的公共端作参考点，也称为“地”、“零点”。

1. 节点电压：指电路中任一节点至参考节点间的电压降。符号为 u_{N1} ，简化为 u_1 。

完备性：如果各节点电压一旦求出，则各个支路电压就可求得。

独立性：由KCL知任意 $n-1$ 个节点是独立的，因此 $n-1$ 个节点电压彼此独立无关。



2.节点分析法

基本思想：以节点电压为未知量，结合支路VCR列**KCL**方程，进而求得电路响应的分析方法。

方程个数： $n-1$ 个

一般步骤：

- (1)选定一个合适的参考节点；
- (2)对其余 $n-1$ 个节点结合VCR列写KCL方程；
- (3)求解上述方程，则所有支路电压、电流可求。



节点方程的建立

KCL方程 (假设流出节点为正)

节点1:

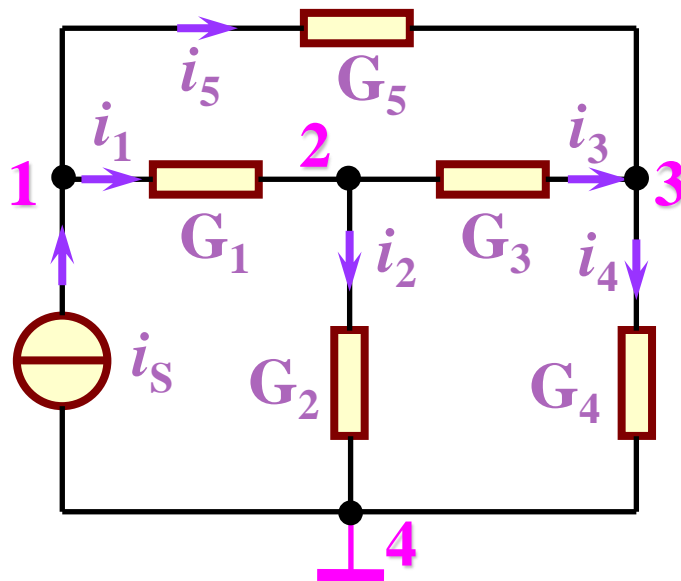
$$(u_1 - u_3)G_5 + (u_1 - u_2)G_1 - i_s = 0$$

节点2:

$$(u_2 - u_3)G_3 + (u_2 - u_1)G_1 + u_2 G_2 = 0$$

节点3:

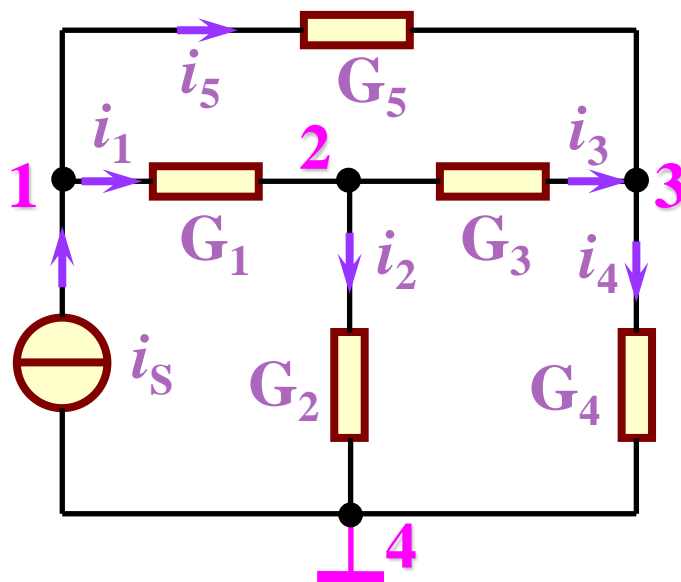
$$(u_3 - u_2)G_3 + (u_3 - u_1)G_5 + u_3 G_4 = 0$$



整理得

节点1:
$$\frac{(G_1 + G_5)u_1}{G_{11}} - \frac{G_1u_2}{G_{12}} - \frac{G_5u_3}{G_{13}} = \frac{i_s}{i_{S11}}$$

$$\begin{cases} G_{11} = G_1 + G_5 \text{ 为节点1的自电导} \\ G_{12} = G_{21} = -G_1 \text{ 为1, 2两节点的互电导} \\ i_{S11} = i_s \text{ 为流进节点1的电流源的电流} \end{cases}$$



节点2:

$$-G_1u_1 + (G_1 + G_2 + G_3)u_2 - G_3u_3 = 0$$

节点3:

$$-G_5u_1 - G_3u_2 + (G_3 + G_4 + G_5)u_3 = 0$$

$$\begin{aligned} G_{11}u_1 + G_{12}u_2 + G_{13}u_3 &= i_{S11} \\ G_{21}u_1 + G_{22}u_2 + G_{23}u_3 &= i_{S22} \\ G_{31}u_1 + G_{32}u_2 + G_{33}u_3 &= i_{S33} \end{aligned}$$



推广到具有 n 个独立节点的电阻电路

$$G_{11}u_1 + G_{12}u_2 + \cdots + G_{1n}u_n = i_{S11}$$

$$G_{21}u_1 + G_{22}u_2 + \cdots + G_{2n}u_n = i_{S22}$$

.....

$$G_{n1}u_1 + G_{n2}u_2 + \cdots + G_{nn}u_n = i_{Snn}$$

其中 G_{kk} : 第 k 个节点的自电导(为正), $k = 1, 2, \cdots, n$

G_{jk} : 第 j 个节点和第 k 个节点的互电导(为负或0)

i_{Skk} : 流进第 k 个节点的所有电流源电流的代数和。



特殊情况1：电路中含有独立电压源

例1：求图示电路中 I_1 及 I_2 。

解1： 选1为参考点，则 $U_2=1V$

$$\text{节点3: } (1/3+1/4)U_3 - (1/4)U_2 = 12$$

$$\therefore U_3 = 21V$$

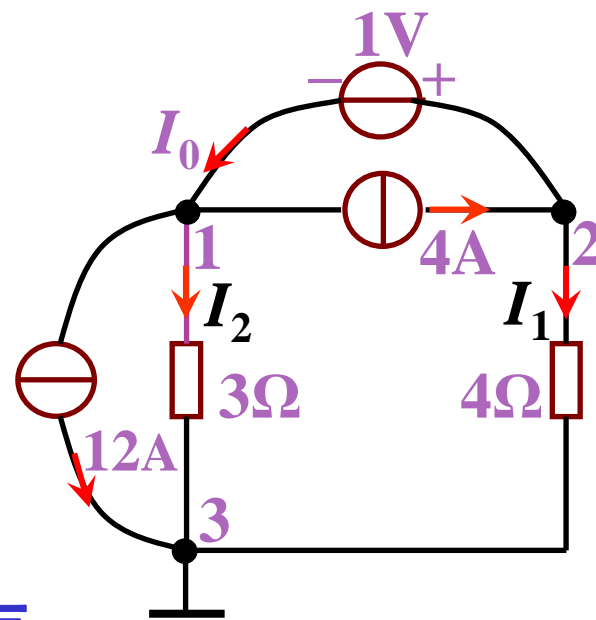
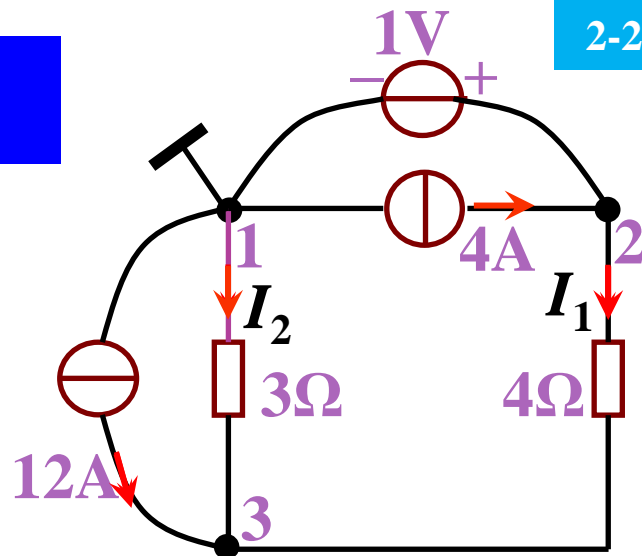
$$I_1 = (U_2 - U_3) / 4 = -5A$$

$$I_2 = -(U_3 / 3) = -7A$$

解2： 选3为参考点， U_1, U_2, I_0

注意电压源支路有电流，需设一电流列方程，再增加辅助方程。

原则： 尽量选电压源负端为参考点



超节点：把两个及以上的节点间电路看作为一个超节点。

解决电压源(或受控电压源)支路电流未知的情形。

解3：选3为参考点

列超节点KCL方程

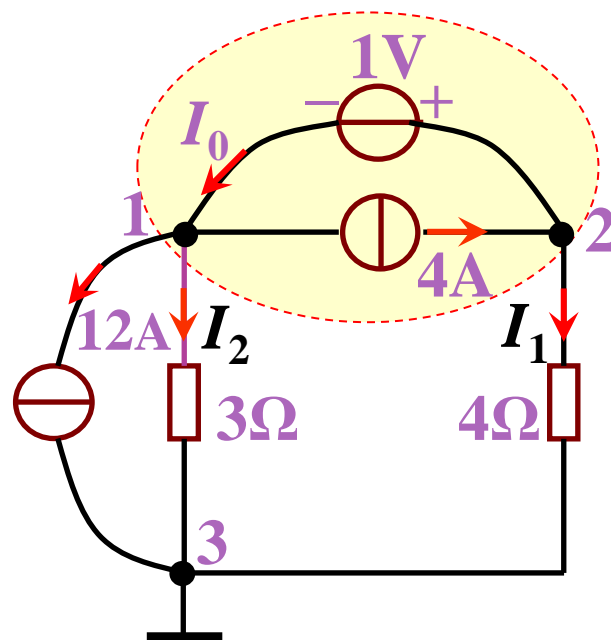
$$(1/3) U_1 + (1/4) U_2 = -12$$

列节点电压和电压源之间关系方程

$$U_2 - U_1 = 1$$

解得： $U_1 = -21\text{V}$, $U_2 = -20\text{V}$

$$I_1 = U_2 / 4 = -5\text{A}, I_2 = U_1 / 3 = -7\text{A}$$



超节点23:

$$[(7+3)U_2 + (5+2)U_3] - (7+2)U_1 = 0$$

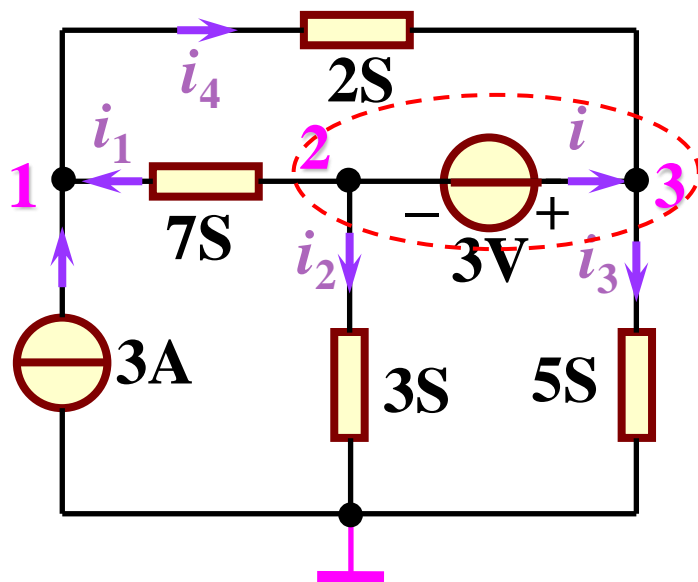
$$\text{即: } -9U_1 + 10U_2 + 7U_3 = 0$$

节点1:

$$(7+2)U_1 - 7U_2 - 2U_3 = 3$$

附加方程:

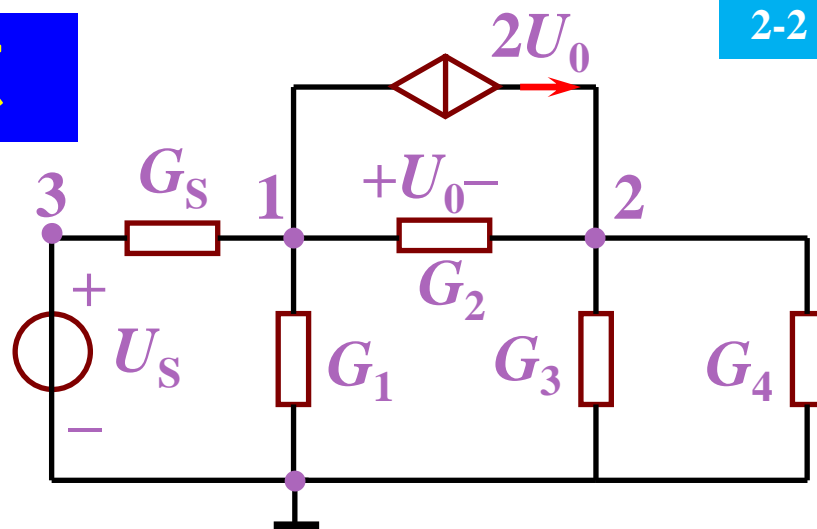
$$U_3 - U_2 = 3$$



特殊情况2：电路中含有受控源

例2 试列写图示电路的节点方程组。

解：



$$\text{节点1: } (G_s + G_1 + G_2)U_1 - G_2U_2 - G_sU_s = -2U_0$$

$$\text{节点2: } -G_2U_1 + (G_2 + G_3 + G_4)U_2 = 2U_0$$

$$\text{辅助方程: } U_0 = U_1 - U_2$$

结论：受控源与独立源一样对待，但要找出控制量与节点电压的关系。



特殊情况3：电路中含有电流源串联电阻

解：

节点2：

$$-2 \times 4 + \underline{(2 + 4)} U_2 - 4U_4 = 1$$

节点3：

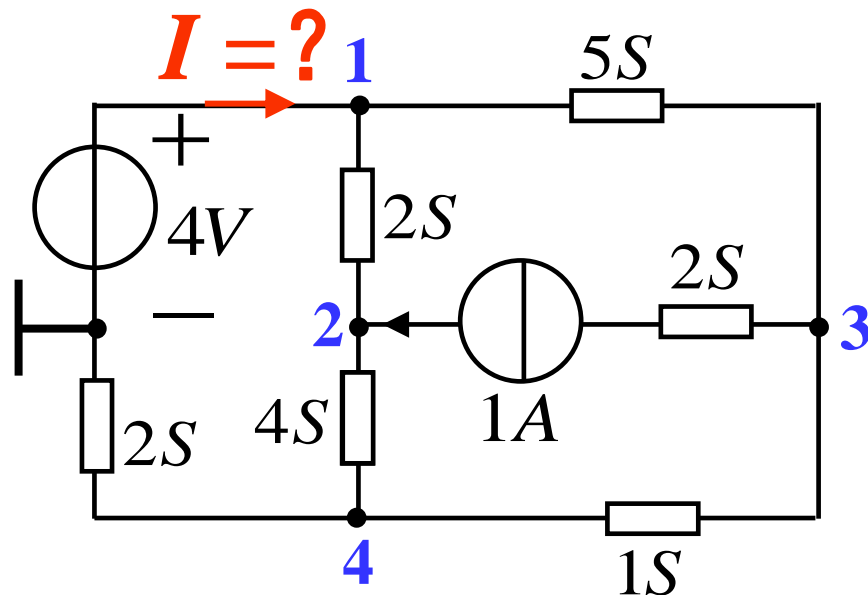
$$-5 \times 4 + \underline{(5 + 1)} U_3 - U_4 = -1$$

节点4：

$$-4U_2 - U_3 + (4 + 1 + 2)U_4 = 0$$

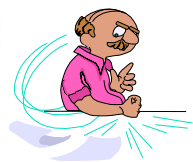
解得： $U_4 = 2.2V$

$\rightarrow I = 4.4A$



注意：与电流源串联的电阻不计入自电导和互电导。





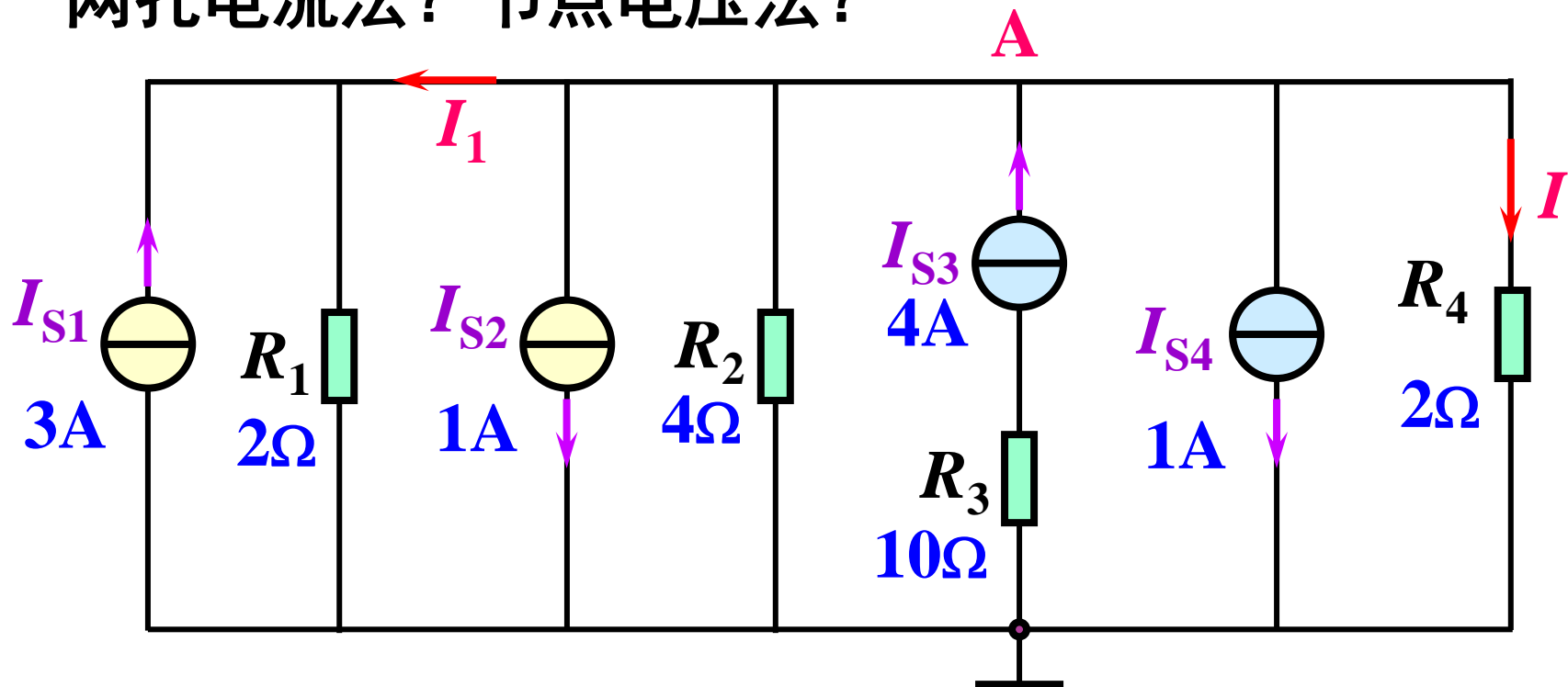
应用节点电压法应注意:

- (1) 自电导为**正**，互电导为**负**，方程右端为**流入节点电流源**的代数和；
- (2) 可适用于平面电路和非平面电路；
- (3) 含独立电压源的处理：**尽量选电压源负端为参考点，否则整个支路作为超节点列KCL方程，增加节点电压与电压源关系的方程；**
- (4) 含受控源的处理：**将受控源看作独立源建节点方程，增加受控源的控制量和节点电压关系的方程。**
- (5) 注意电流源串联支路的处理。



例：求 I 和 I_1 。

网孔电流法？节点电压法？



解：节点电压法

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) U_A = I_{S1} - I_{S2} + I_{S3} - I_{S4} \Rightarrow U_A = 4V$$

$$I = U_A / R_4 = 2A, \quad I_1 = U_A / R_1 - I_{S1} = 2 - 3 = -1A$$



小结

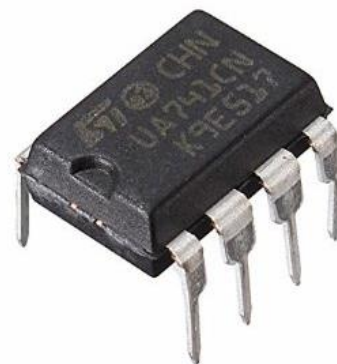
	网孔电流法	节点电压法
求解变量	网孔电流	节点电压
列写方程依据	KVL	KCL
独立方程个数	$b-n+1$	$n-1$
适用电路	平面电路, 含电压源, 网孔数量少	平面和非平面, 含电流源, 节点数量少



§ 2-3 含运算放大器的电阻电路

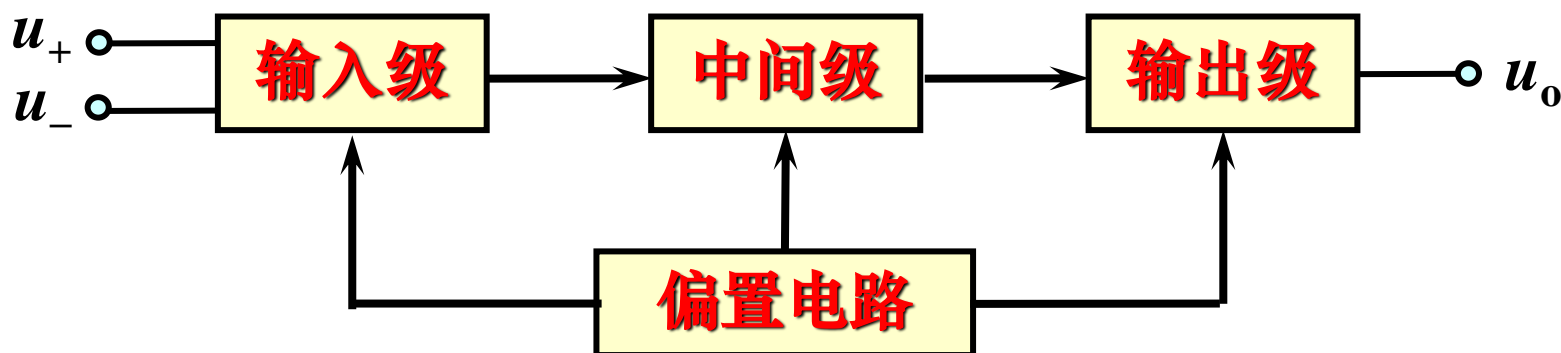
1. 运算放大器

简称运放或集成运放，是一种模拟集成电路，是具有很高开环电压放大倍数的放大器。早期实现各种数学运算，现在广泛用于各种电子系统。

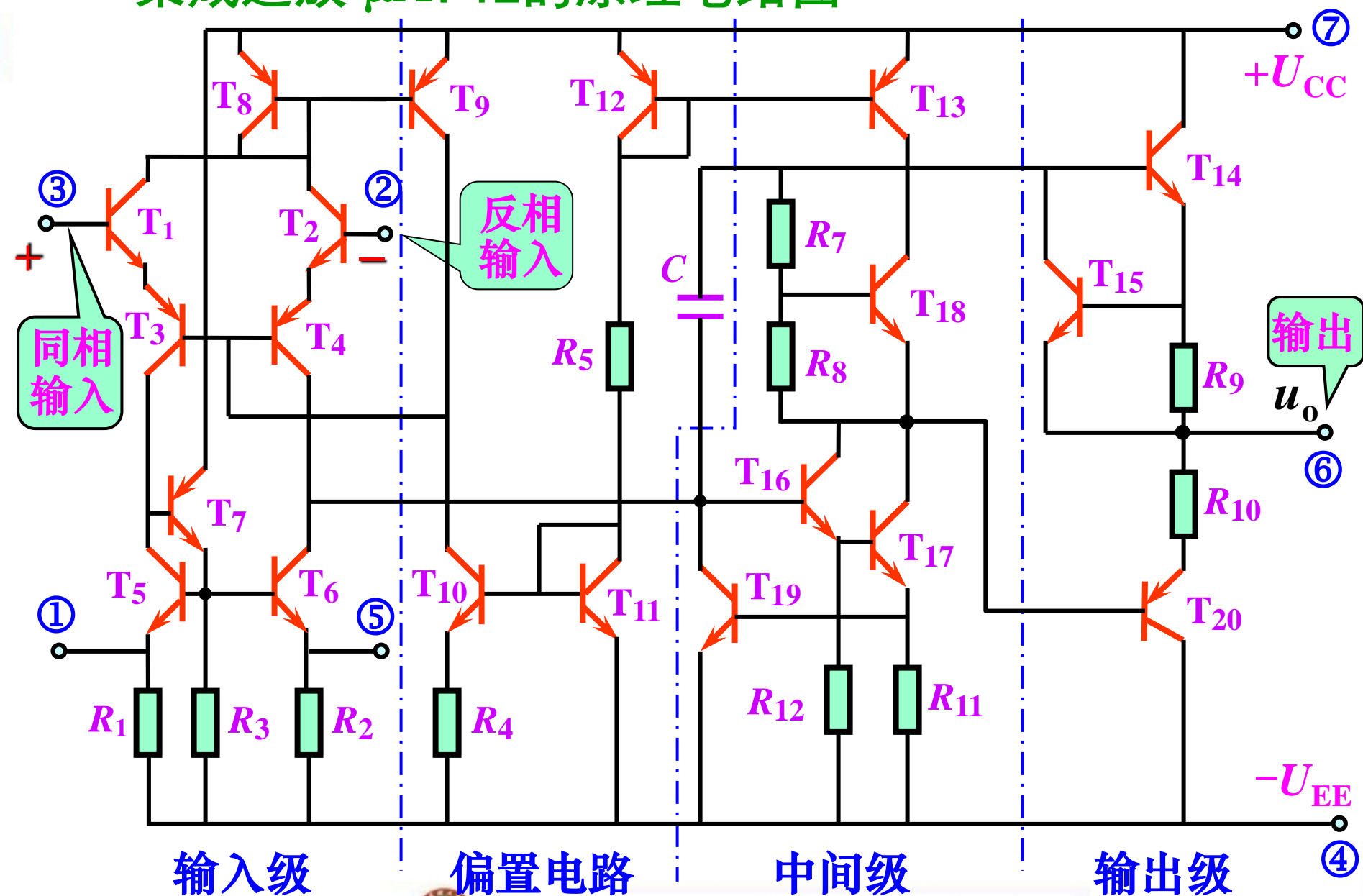


$\mu A741$

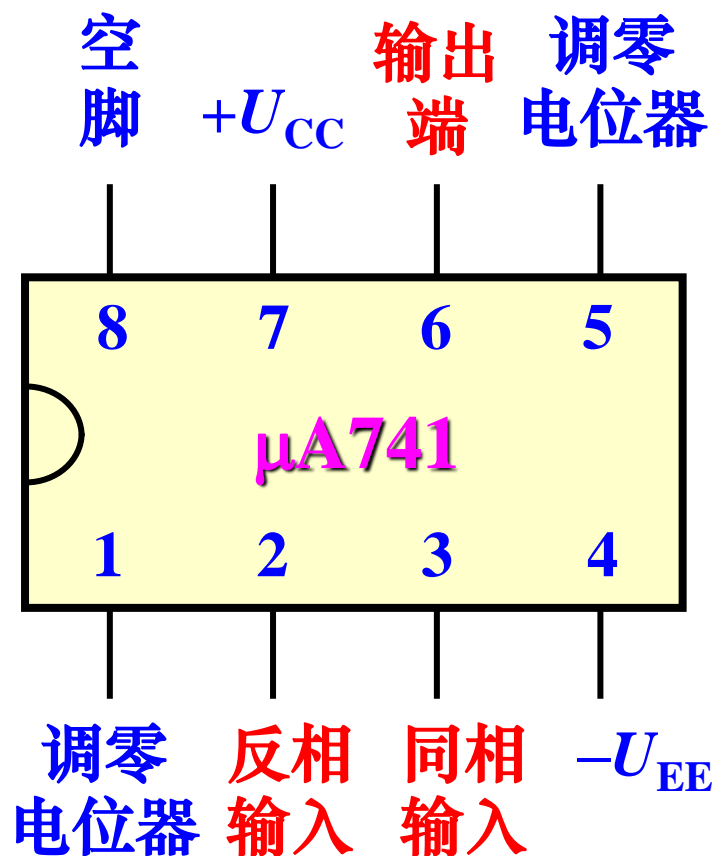
- 集成运放的内部电路结构框图



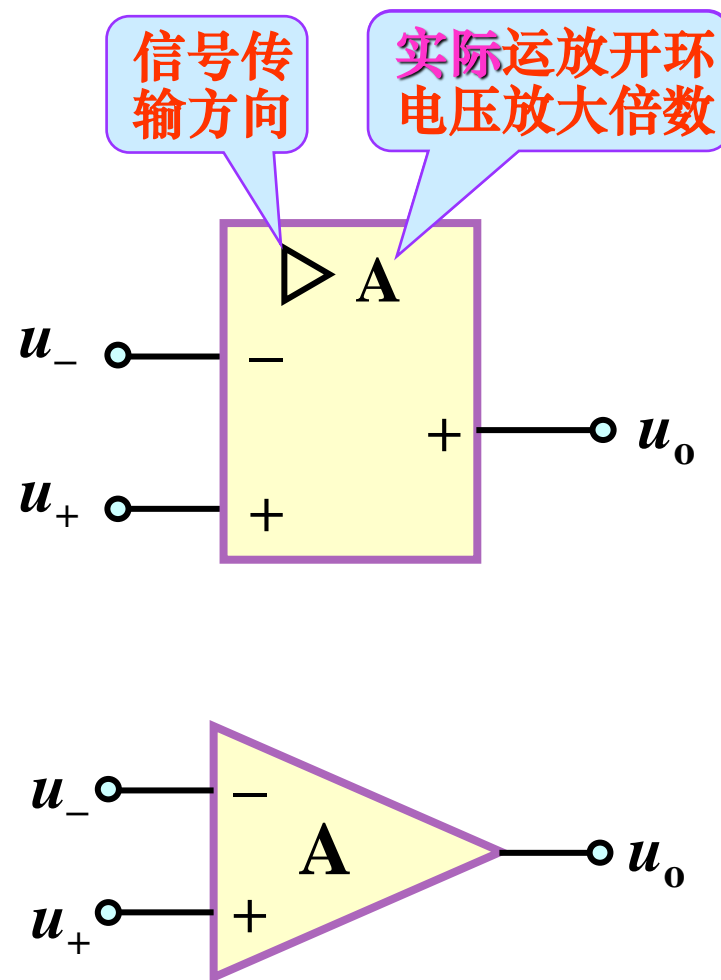
集成运放 $\mu A741$ 的原理电路图



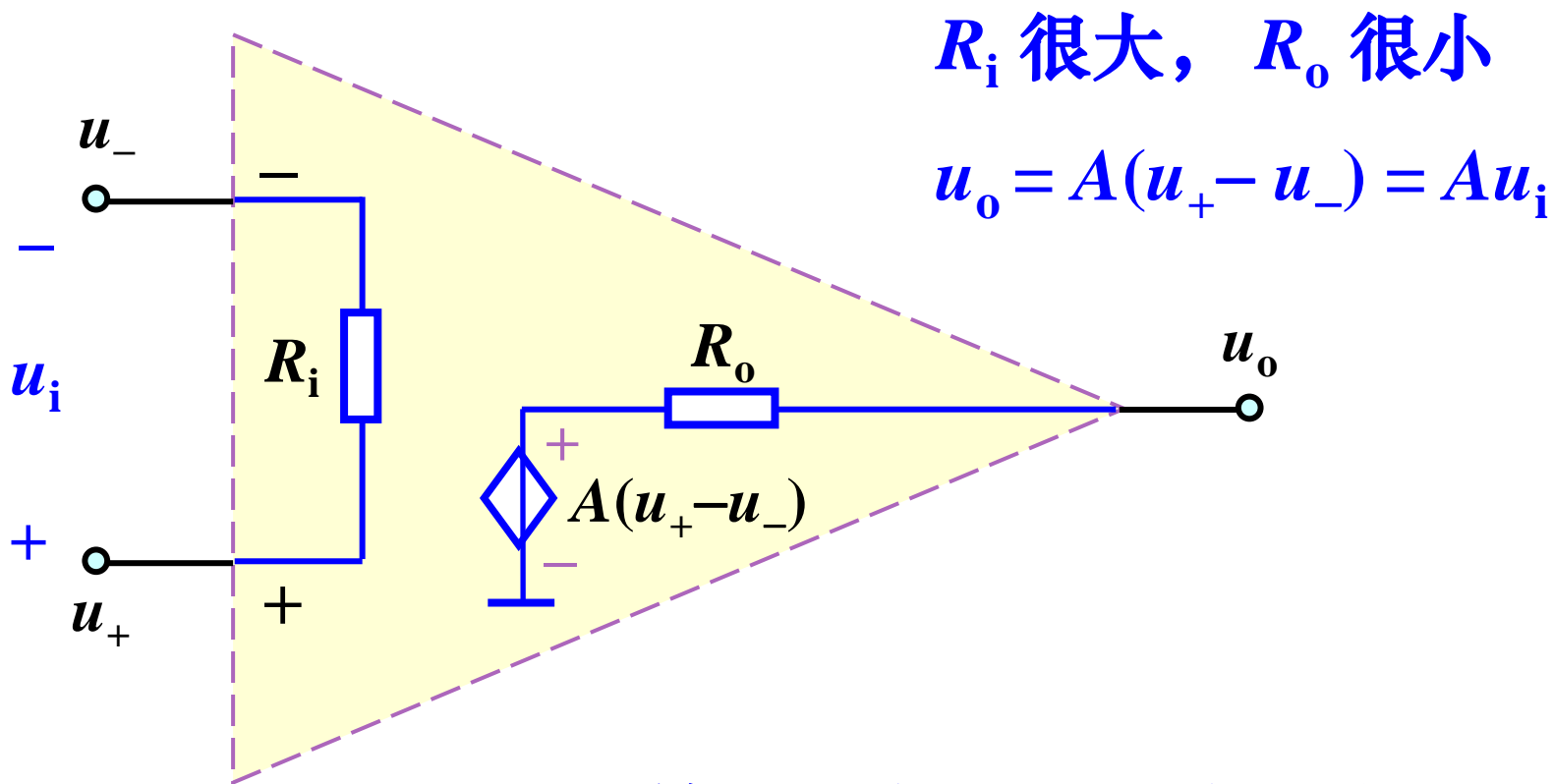
- $\mu A741$ 的引脚排列



- 运放的电路符号



- 线性运放的电路模型



运放工作在线性区时可看做一个电压控制的电压源(VCVS)

- 集成运放的主要参数

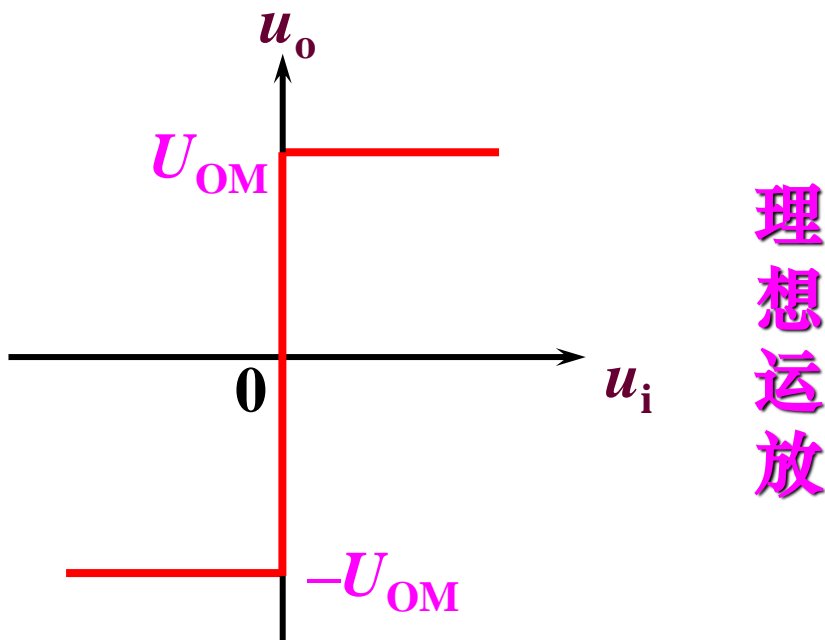
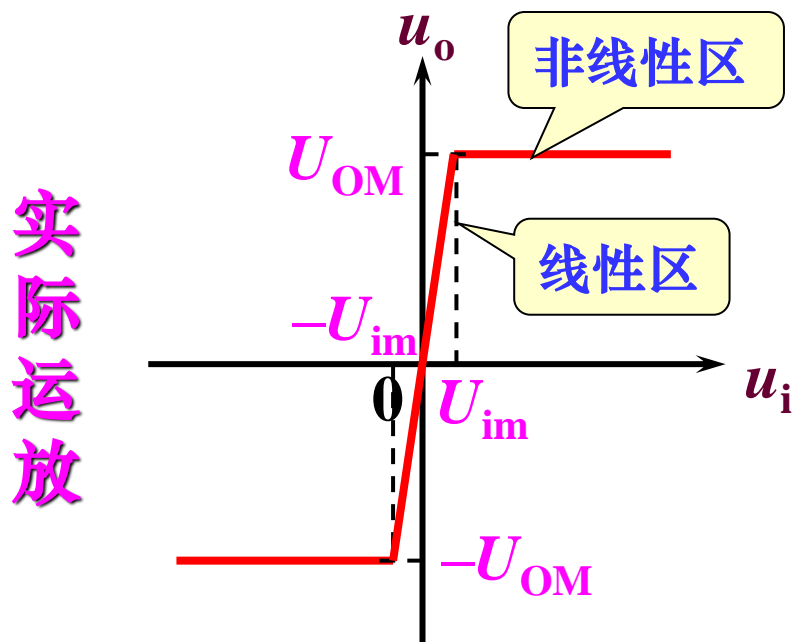
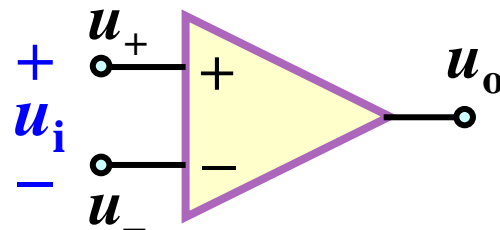
指标参数	实际值	理想值
开环电压放大倍数 A_{uo}	$> 10^4$	∞
开环差模输入电阻 r_{id}	$> 10^5 \Omega$	∞
开环输出电阻 r_o	$< 10^2 \Omega$	0
最大输出电压 U_{OM}	$U_{CC} - (1 \sim 2) V$	U_{CC}
通频带 f_{BW}	$< 10 MHz$	∞

理想运放的参数是一组理想化的参数。



2. 运放的电压传输特性

定义： $u_o = f(u_i)$ ，其中 $u_i = u_+ - u_-$



在开环条件下，运放的线性区非常窄， U_{im} 为 μV 量级。

运放工作在线性区的条件是加入深度负反馈。

3. 运放工作在线性区的分析依据

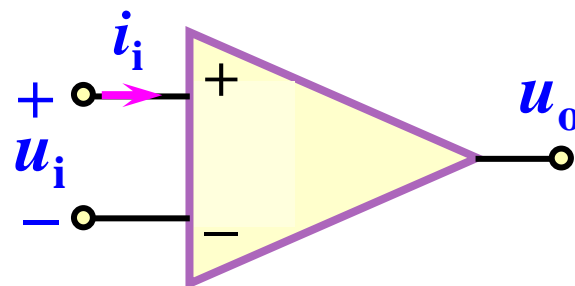
(1) “虚断路”原则

$$i_i = \frac{u_i}{R_i}$$

理想运放 $R_i \rightarrow \infty$

有 $i_+ = i_- = 0$

相当于两输入端之间断路。



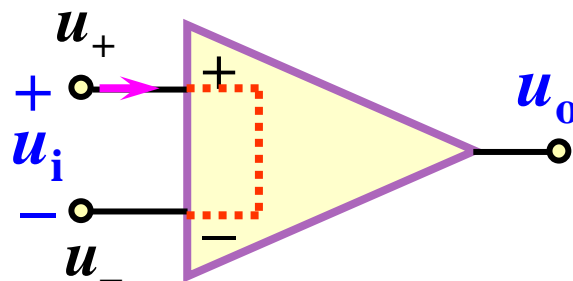
(2) “虚短路”原则

$$\begin{aligned} u_i &= u_+ - u_- \\ &= u_o / A_{uo} \end{aligned}$$

理想运放 $A_{uo} \rightarrow \infty$

有 $u_i \approx 0$, 即 $u_+ = u_-$

相当于两输入端之间短路。



4. 含运放电路的分析举例

节点电压法特别适合含运放的电路

- 反相比例器

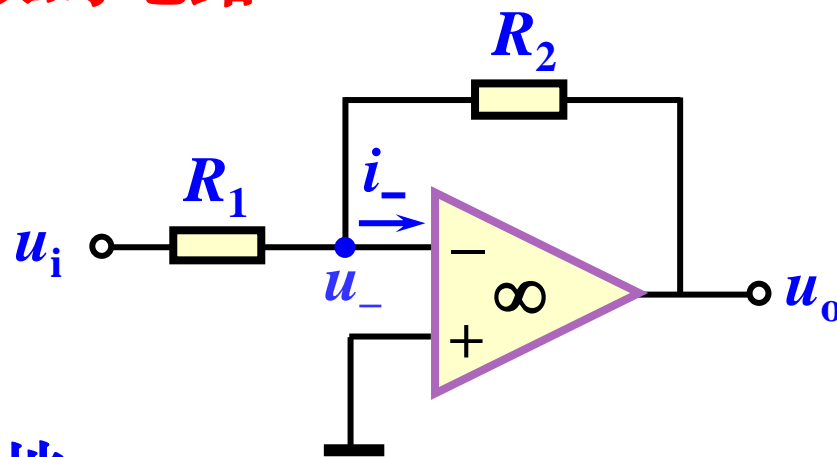
由虚短路: $u_+ = u_-$

由虚断路: $i_- = 0$

$u_+ = 0, u_- = u_+ = 0 \rightarrow$ 虚地

节点方程:
$$\frac{u_- - u_i}{R_1} + \frac{u_- - u_o}{R_2} + i_- = 0$$

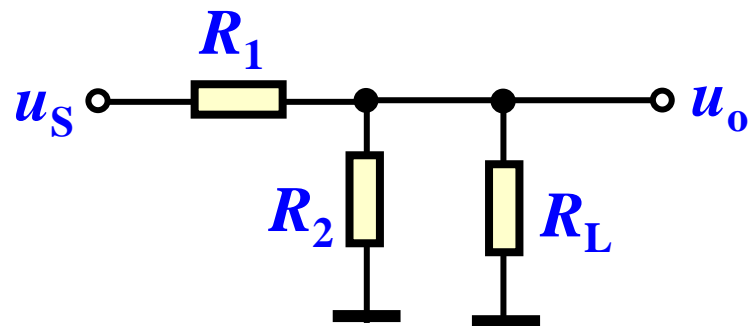
得输出与输入的关系:
$$u_o = -\frac{R_2}{R_1} u_i$$



电压跟随器

负载效应： u_o 随 R_L 变化而变化

$$u_o = \frac{R_2 // R_L}{R_1 + R_2 // R_L} u_S$$

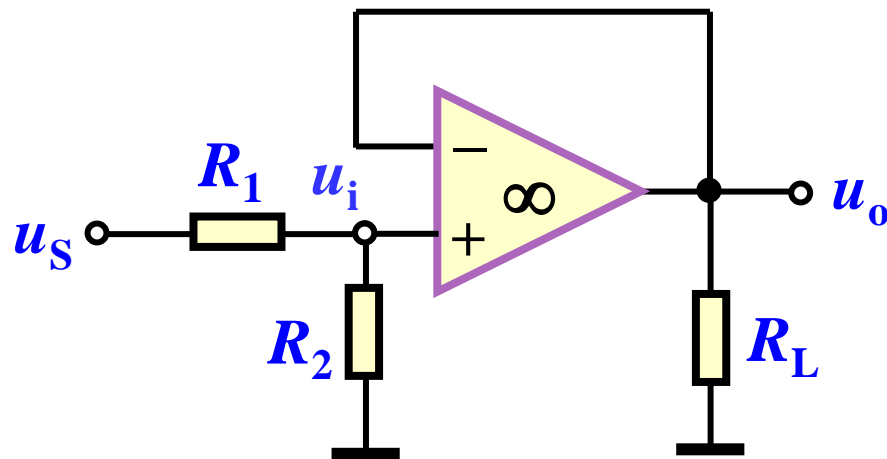


电压跟随器：

虚短 $\rightarrow u_+ = u_- \rightarrow u_o = u_i$

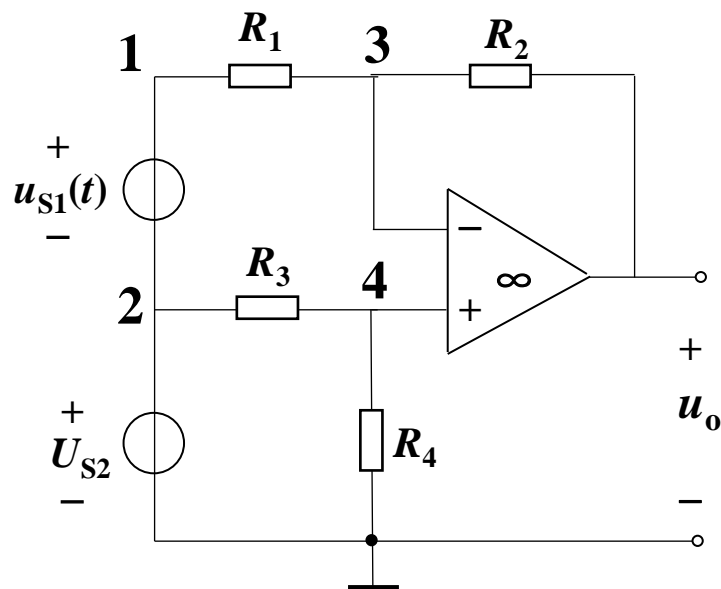
加入电压跟随器，有

$$u_o = u_i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_S$$



加入电压跟随器可克服“负载效应”，具有隔离电路的作用。

例 由理想运算放大器构成的电路如图所示，已知正弦电源 $u_{s1}(t) = 4\cos 6t \text{ mV}$ ，直流电源 $U_{s2} = 6 \text{ mV}$ ， $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ， $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ， $R_3 = 16 \text{ k}\Omega$ ， $R_4 = 8 \text{ k}\Omega$ ，试求 $u_o(t)$ 。



解： $u_1 = U_{s2} + u_{s1} = 6 + 4\cos 6t \text{ (mV)}$

$$u_2 = U_{s2} = 6 \text{ mV}$$

虚短： $u_- = u_+$

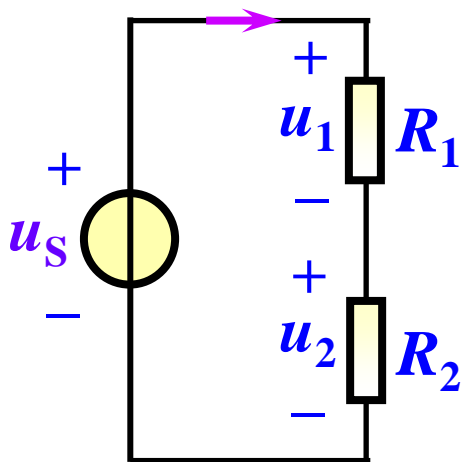
节点3： $-\frac{1}{R_1}u_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_- - \frac{1}{R_2}u_o = 0$

节点4： $-\frac{1}{R_3}u_2 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_+ = 0$

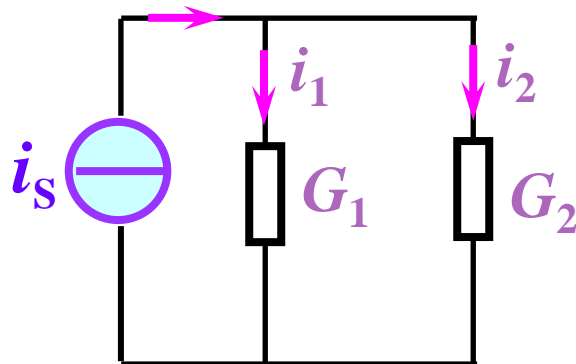
$$\begin{aligned} u_o &= -\frac{R_2}{R_1}u_1 + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)\frac{R_4}{R_3 + R_4}u_2 \\ &= -U_{s2} - 2u_{s1} = -6 - 8\cos 6t \text{ (mV)} \end{aligned}$$



§ 2-4 电路的对偶性



$$\text{分压: } u_1 = u_S \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



$$\text{分流: } i_1 = i_S \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

如果把电压 u 和电流 i 互换，把电阻 R 和电导 G 互换，把电压源 u_S 和电流源 i_S 互换，则上述对应关系可以彼此转换。这些互换元素称为**对偶元素**（对偶量）。

电路的一些对偶量

电压	电流	网孔电流	节点电压
电阻	电导	电压源	电流源
短路	开路	电荷	磁链
KCL	KVL	电感	电容
串联	并联	CCVS	VCCS



■ 电路方程可通过对偶量转换得到

(a) 电阻 R 的VCR \leftrightarrow 电导 G 的VCR

$$u = Ri \leftrightarrow i = Gu$$

(b) CCVS的VCR \leftrightarrow VCCS的VCR

$$u_2 = ri_1 \leftrightarrow i_2 = gu_1,$$

(c) 网孔方程 \leftrightarrow 节点方程

$$R_{k1}i_1 + R_{k2}i_2 + \cdots + R_{km}i_m = u_{Sk m}$$

$$G_{k1}u_1 + G_{k2}u_2 + \cdots + G_{km}u_m = i_{Sk m}$$



第二章 小结

重点掌握

- 网孔分析法
- 节点分析法及在含运放电路中的应用
- 适用电路及特殊情况处理



第二章 作业

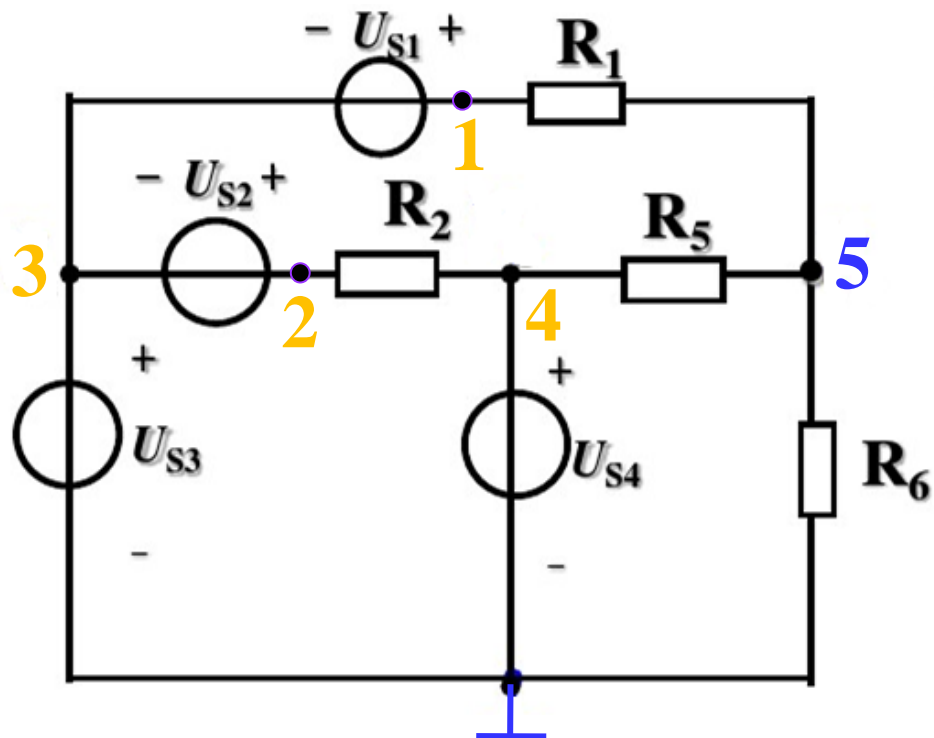
P101-104: 2-9, 2-15
2-20, 2-22, 2-23

- 要求:
1. 独立完成;
 2. 画电路图, 标方向;
 3. 写清分析过程、结果、标注单位。



课堂练习

列节点方程组



节点5:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) U_5 - \frac{1}{R_5} U_{S4} - \frac{1}{R_1} (U_{S1} + U_{S3}) = 0$$

