第八章
交流动态电路 相量法

作业

8–4 8–12 8-15 8-18 8-23 8-26 8-28 8-37

练习

8–10 8-13 8-16 8-24 8-25 8-33 8-36 8-44

目　录

§8-1　正弦激励的过渡过程和稳态

一、正弦电压与电流

1、正弦电压与电流定义

随时间按正弦（余弦）规律变化的电压和电流

2、正弦电压和电流的三个要素

$$i\,(\mathrm{t}) = I_{\mathrm{m}}\cos(\omega \mathrm{t} + \phi)$$

- 角频率　ω
- 幅值　I_{m}
- 初相位 ϕ

（1）频率f、周期T、角频率ω的关系

角频率$\omega=2\pi/T = 2\pi f$

（2）相位差

$$i_1 = I_{1m}\cos(\omega t + \varphi_{i1})$$

$$i_2 = I_{2m}\cos(\omega t + \varphi_{i2})$$

相位差$\varphi = (\omega t+\varphi_{i1}) - (\omega t+\varphi_{i2}) = \varphi_{i1}-\varphi_{i2}$

(3) 幅值与有效值

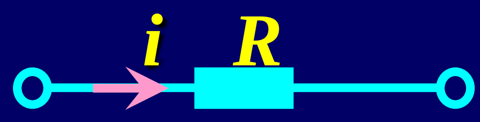
瞬时值：
用小写字母表示，如 i、u

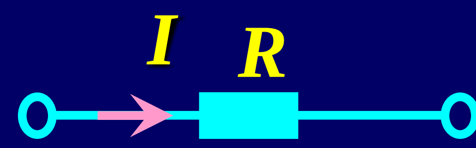
幅值：
用大写字母加下标表示，如I_{m}、U_{m}

有效值 （ §8-12 ）

从电流的热效应来规定的。

如果周期电流i通过电阻R时在一个周期T内消耗的电能与某直流电流I通过R在T内消耗的电能相等，则将这一直流电流的数值I定义为周期电流i的有效值。





i - 周期电流

R在一个周期T内消耗的能量

$$w = \int_0^T p\,dt$$

$$= \int_0^T i^2 R\,dt = R\int_0^T i^2\,dt$$

I − 直流电流

$$P = I^2 R$$

R在时间T内消耗的能量

$$w = I^2 R T$$

若 $I^2 R T = R\int_0^T i^2\,dt$　　则 $I^2 = \dfrac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$$

有效值（方均根值）

对于正弦电流 $i(t)=I_m cos(\omega t+\Phi_i)$

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2\cos^2(\omega t+\phi_i)dt}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}I_m^2[\cos 2(\omega t+\phi_i)+1]\,dt}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}I_m\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [\cos 2(\omega t+\phi_i)+1]\,dt}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}I_m\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T 1\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T \cos 2(\omega t+\phi_i)\,dt}$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}I_m \qquad U=\frac{1}{\sqrt{2}}U_m$$

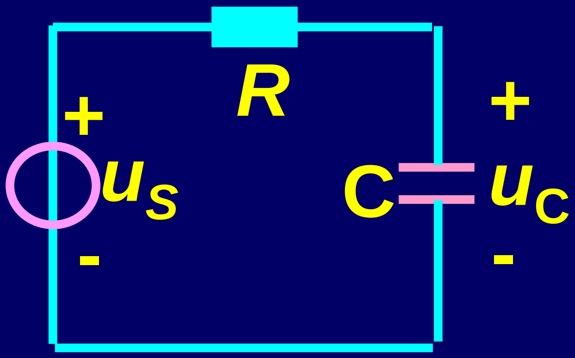
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}I_m=0.707I_m \qquad =\frac{1}{\sqrt{2}}U_m=0.707U_m$$

二、正弦激励下电路的响应：

1 例题： t≥0时, us作用于电路, $u_c(0)=0$, $u_s=U_{sm}\cos(\omega t+\psi)$

求： $u_c(t)$， t≥0

解：
$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_{sm}\cos(\omega t+\psi)$$



$$u_c(t)=u_{ch}(t)+u_{cp}(t)$$

$$u_c=\underbrace{u_c(0)e^{-\frac{t}{RC}}-\frac{U_{sm}}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}}\cos\psi\, e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{瞬态响应}}+\underbrace{\frac{U_{sm}}{\sqrt{1+R^2\omega^2C^2}}\cos[\omega t+\psi-\arctan(\omega CR)]}_{\text{稳态响应}}$$

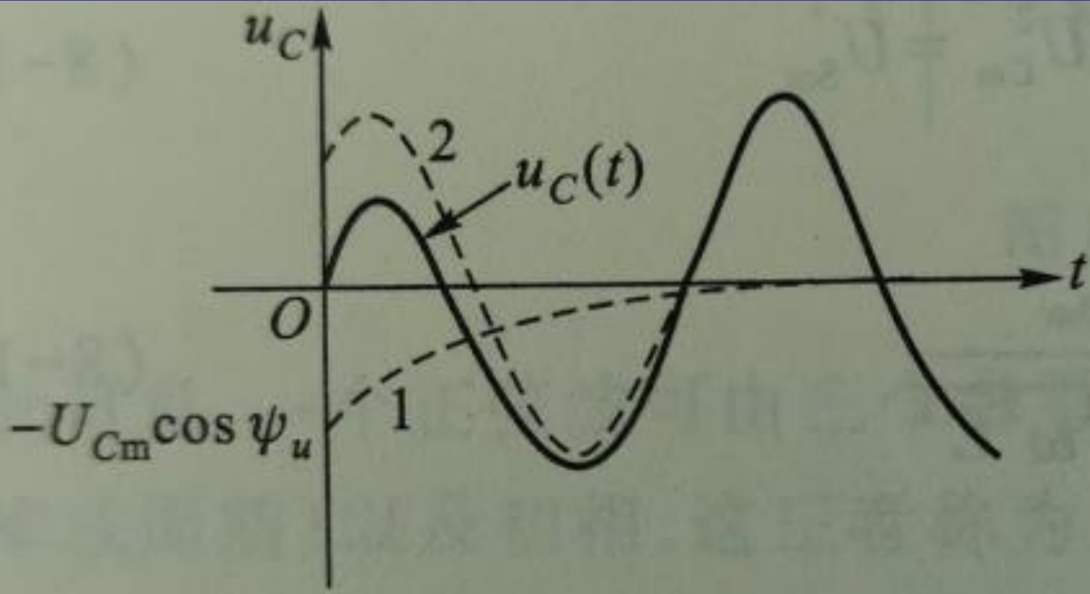


图 8-5　图 8-3RC 电路的响应

$u_C(t)$,$u_C(0)=0$

曲线 1——瞬态响应分量；

曲线 2——稳态响应分量

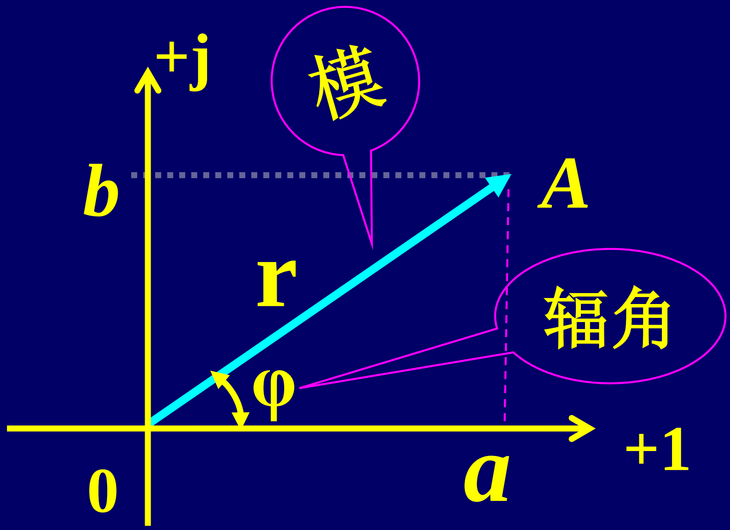
2 正弦稳态响应：

线性非时变渐进稳定电路，在正弦激励作用下，当电路进入稳态后，其响应是与输入同频率的正弦波，即电路的特解，叫正弦稳态响应。用相量法求解。

条件： 1. 线性、非时变、渐进稳定电路。
2. 单一频率下的正弦激励。
3. 求的是稳定状态下的响应。

§8-3 §8-4 复数 相量

一、复数



欧拉公式:

$$\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi}$$

复数的几种形式:

$$\left.\begin{aligned} A &= a + jb \\ &= r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \end{aligned}\right\}$$ 代数式

$= re^{j\varphi}$ ------指数式

$= r\angle\varphi$ ---极坐标、模和辐角形式

二. 相量

（1）欧拉公式及应用

① $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

若 $\theta = \omega t + \Phi$

则 $e^{j(\omega t+\Phi)} = \cos(\omega t+\Phi) + j\sin(\omega t+\Phi)$

$I_m e^{j(\omega t+\Phi)} = I_m\cos(\omega t+\Phi) + j I_m\sin(\omega t+\Phi)$

（2）正弦信号与相量的关系

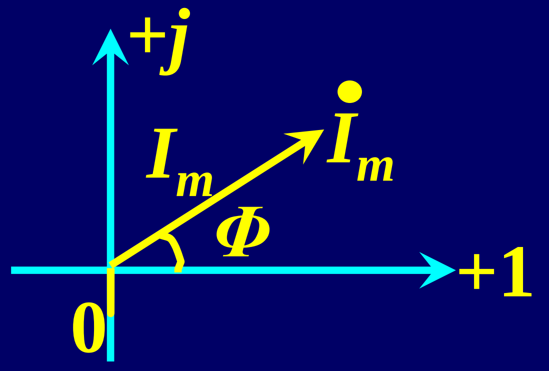
设： $i(t) = I_m\cos(\omega t+\Phi)$

则: $i(t) = I_m\cos(\omega t+\Phi) = \mathrm{Re}[I_m e^{j(\omega t+\Phi)}]$

$= \mathrm{Re}(I_m e^{j\Phi} e^{j\omega t}) = \mathrm{Re}[(I_m e^{j\Phi}) e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}]$

$\dot{I}_m = I_m e^{j\Phi}$ ------ 振幅相量（最大值相量）

模I_m是电流i的最大值，
幅角Φ是正弦电流的初相。



I_m
Φ
构成i的两个要素

正弦交流电路的特解是与输入同频率的正弦波，频率是已知的，此时特解可以由幅值和初相位两个特征量来确定。

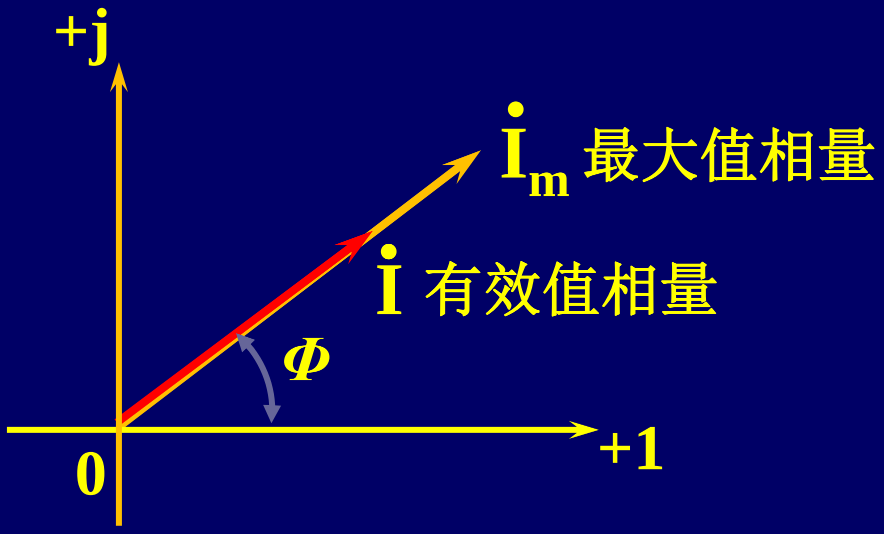
用$\dot{I}_m$表示正弦电流 $i = I_m \cos(\omega t + \Phi)$

（1）最大值相量:

$$\dot{I}_m = I_m \angle \Phi = I_m\cos\Phi + j\,I_m\sin\Phi$$

（2）有效值相量:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} \qquad \dot{I} = I\angle\Phi = I\cos\Phi + jI\sin\Phi$$



三、 正弦量与相量的相互转换

相量与正弦信号一一对应，已知正弦信号可以找到表示它的相量；已知相量可以找到它所代表的正弦信号。二者不相等。

例1：已知u=311cos(100πt+30°) V，写出此电压的最大值相量、有效值相量

解：

最大值相量 $\dot{U}_m = 311\angle 30° \text{ V}$

有效值 $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{311}{\sqrt{2}} = 220\text{V}$

有效值相量 $\dot{U} = 220\angle 30° \text{ V}$

例8-3 已知$\dot{U}_m=50\angle{-30^\circ}$ V，f=50Hz

写出所代表的正弦电压

解：$\omega=2\pi f=100\pi$ rad/s

$u(t)=50\cos(100\pi t-30^\circ)$ V

四 相量图-----按照正弦量的大小和相位关系画出的相量的图形

注意

只有正弦量才能用相量表示；

只有同频率的正弦量才能画在同一相量图上；

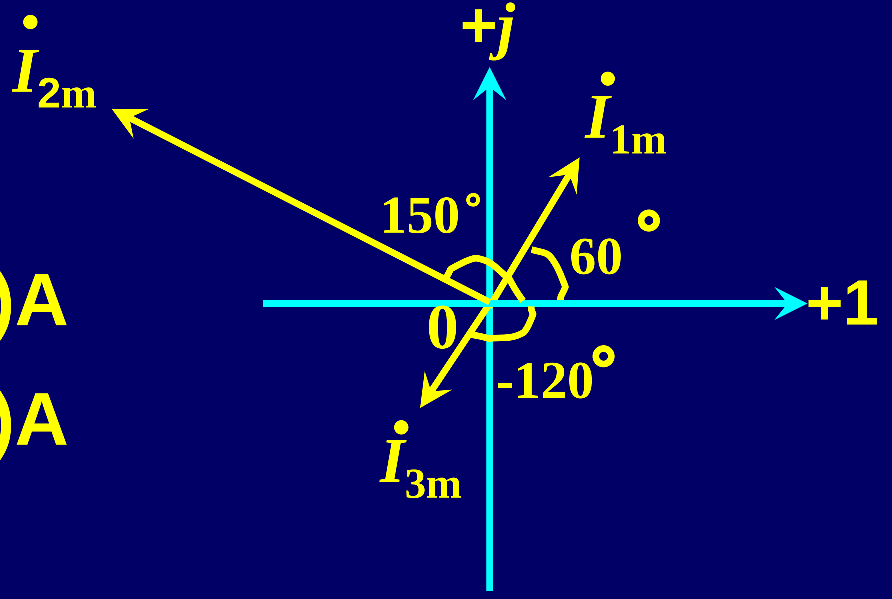
例8-2

$i_1(t)=5\cos(314t+60°)$A

$i_2(t)=-10\sin(314t+60°)$A

$i_3(t)=-4\cos(314t+60°)$A

写出相量，绘相量图



解： $\dot I_{1m}=5\angle 60°$ A

$i_2(t)=-10\sin(314t+60°)=10\cos(314t+60°+90°)$

$\dot I_{2m}=10\angle 150°$ A

$i_3(t)=-4\cos(314t+60°)=4\cos(314t-120°)$ A

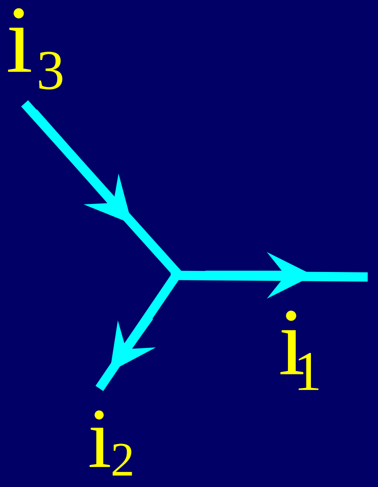
$\dot I_{3m}=4\angle -120°$ A

五 相量法在正弦量计算中的优势：

例8-5：

$i_1 = 10\cos(\omega t + 60^{\circ})A$, $i_2 = 5\sin(\omega t)A$

求：i_3



解：用相量法简单很多

$$\dot{I}_{1m} = 10\angle 60^{\circ} = 5 + j5\sqrt{3}\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{2m} = 10\angle -90^{\circ} = -j5\ \text{A}$$

$$\dot{I}_{3m} = \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} = 5 + j3.66$$

$$= 6.2\angle 36.2^{\circ}$$

$$i_3(t) = 6.2\cos(\omega t + 36.2^{\circ})A$$

§8-5　相量的线性性质 基尔霍夫定律的相量形式

定理1：$\mathrm{Re}[A(t)+B(t)]=\mathrm{Re}[A(t)]+\mathrm{Re}[B(t)]$

（$A(t)$、$B(t)$是t的复值函数）

定理2：若 $\mathrm{Re}[Ae^{j\omega t}]= \mathrm{Re}[Be^{j\omega t}]$，则A=B。

（A，B为复数。）

反之，若A=B，则在所有时刻均有

$\mathrm{Re}[Ae^{j\omega t}]= \mathrm{Re}[Be^{j\omega t}]$。

基尔霍夫定律的相量形式

一. KCL

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \qquad i_k(t)=I_{km}\cos(\omega t+\Phi_{ki}) = Re[\dot{I}_{km}e^{j\omega t}]$$

$$\sum_{k=1}^{n} Re[\dot{I}_{km}e^{j\omega t}]=0 \qquad Re[\sum_{k=1}^{n}\dot{I}_{km}e^{j\omega t}]=0 = Re[0\,e^{j\omega t}]$$

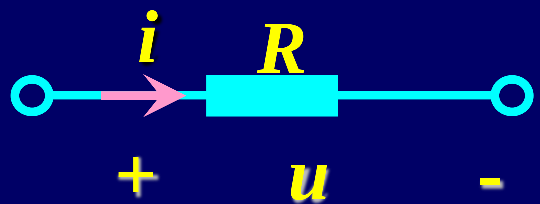
$$\sum_{k=1}^{n}\dot{I}_{km}=0 \qquad \sum_{k=1}^{n}\dot{I}_{k}=0$$

二. KVL

$$\sum_{K=1}^{n}\dot{U}_{km}=0 \qquad \sum_{K=1}^{n}\dot{U}_{k}=0$$

§8-6 三种基本电路元件伏安关系的相量形式

一. 电阻元件



瞬时值关系: $u=Ri$

设$u(t)=U_m\cos(\omega t+\Phi_u)$

$i(t)=I_m\cos(\omega t+\Phi_i)$

$U_m=RI_m$

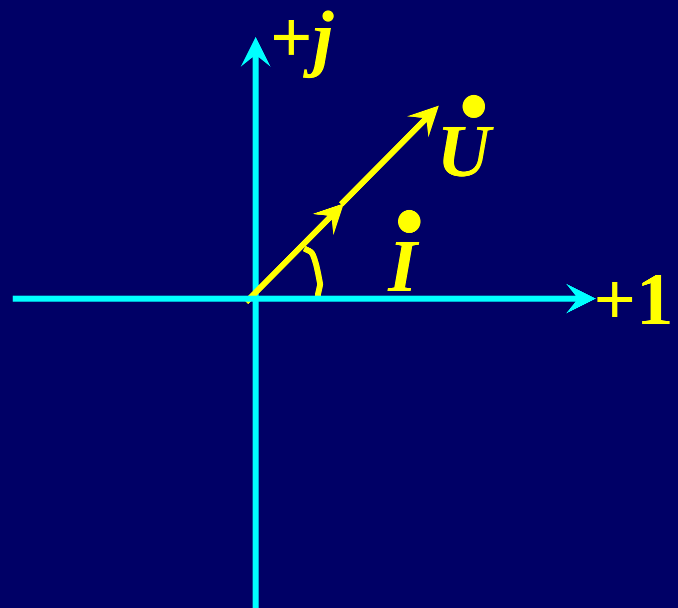
$\Phi_u=\Phi_i$

最大值相量关系:

$$\dot{U}_m=U_m\angle\Phi_u$$

$$=RI_m\angle\Phi_i$$

$$=R\dot{I}_m$$



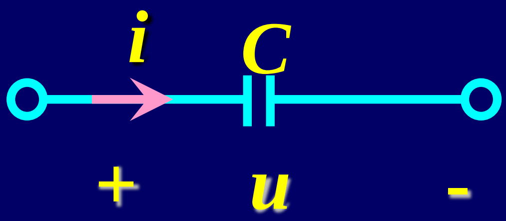
有效值相量关系

$$\dot{U}=R\dot{I}$$

$U=RI$ 模的关系

$\Phi_u=\Phi_i$ 幅角相等

二. 电容元件



设$u(t)=U_m\cos(\omega t+\Phi_u)$

$i(t)=I_m\cos(\omega t+\Phi_i)$

瞬时值关系:

$$i(t)=C\frac{du_c}{dt}$$

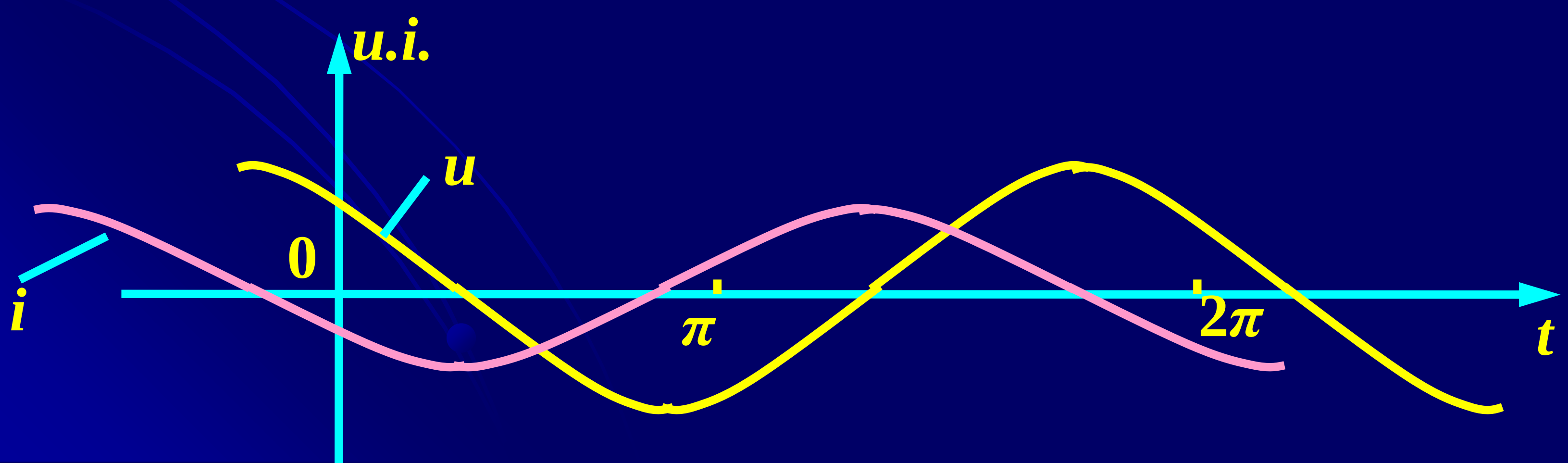
$$I_m\cos(\omega t+\Phi_i)=C\frac{d}{dt}U_m\cos(\omega t+\Phi_u)$$

$$= -\omega CU_m\sin(\omega t+\Phi_u)$$

$$= -\omega CU_m\cos(\omega t+\Phi_u-90^\circ)$$

$$=\omega CU_m\cos(\omega t+\Phi_u+90^\circ)$$

$I_m=C\omega U_m$ $\quad\Phi_i=\Phi_u+90^\circ$



最大值相量关系:

$$\dot{I}_m = I_m \angle \Phi_i$$

$$= C\omega U_m \angle \Phi_u + 90°$$

$$= C\omega\, U_m \angle \Phi_u \cdot 1\angle 90°$$

$$= C\omega\, \dot{U}_m \cdot 1\angle 90°$$

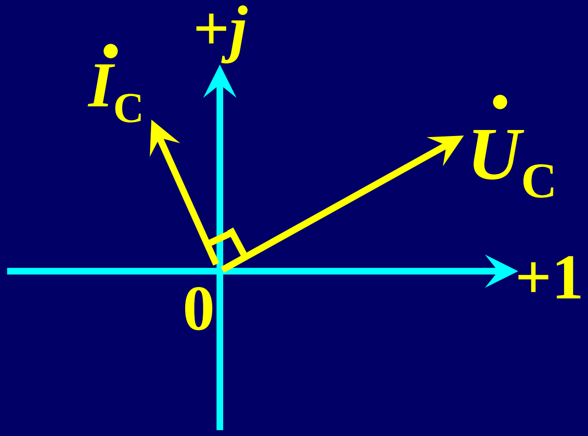
$$= j\omega C \dot{U}_m$$

有效值相量关系式:

$$\dot{I} = j\omega C \dot{U}$$

$$I = \omega C U$$

$$\Phi_i = \Phi_u + 90°$$

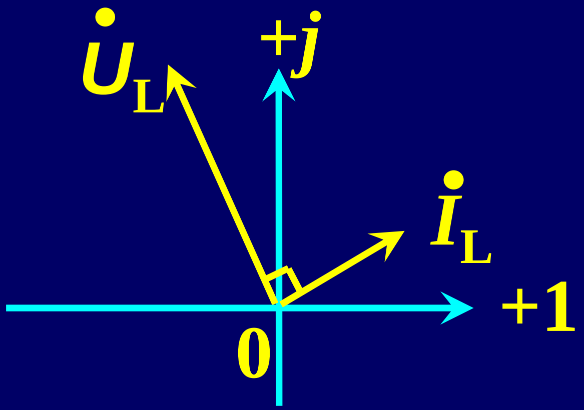


三. 电感元件

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L$$

$$U = \omega L I$$

$$\Phi_u = \Phi_i + 90°$$



§ 8-7 阻抗 导纳

一.阻抗

无源网络的阻抗= $\dfrac{\text{电压相量}}{\text{电流相量}}$

$Z = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + jX$　　单位是Ω

R:　$Z_R = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = R$

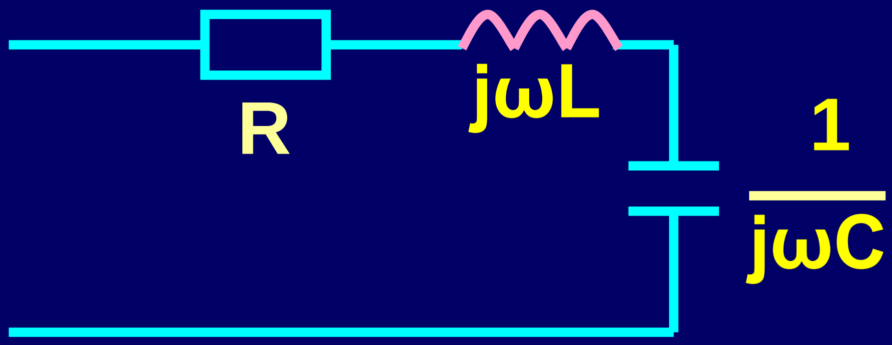
C:　$Z_c = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = \dfrac{1}{j\omega C} = -j\dfrac{1}{\omega C} = jX_c$　　$X_c = -\dfrac{1}{\omega C}$ 容抗

L:　$Z_L = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = j\omega L = jX_L$　　$X_L = \omega L$　感抗

多元件串联总阻抗：

$$Z=\sum_{k=1}^{n} Z_k$$

例如：串联网络：



$Z=Z_R+Z_L+Z_C$

$= R+j\omega L-j\dfrac{1}{\omega C}$

$=R+jX=|Z|\angle\theta_z$

θ_z 的范围在±90º之间

阻抗角反应电路的性质：

θz>0：感性

θz<0：容性

θz=0：纯阻性

对于并联网络具有类似的结论。

二. 导纳

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{\dot{I}}{\dot{U}}=G+jB$$ 单位 西门子(s)

R: $$Y_R=\frac{1}{R}=G$$

C: $Y_c=j\omega C=jB_c$

$B_c=\omega C$ 容纳

L: $$Y_L=\frac{1}{j\omega L}=-j\frac{1}{\omega L}=j\,B_L$$

$$B_L=-\frac{1}{\omega L}$$ 感纳

元件并联总导纳 $$Y=\sum_{k=1}^{n}Y_k$$

§8-8　相量模型

1. 电路模型：由理想元件组成的电路图，反映电压、流、时间之间的关系，也称**时域模型**。

2. 相量模型：各元件都用阻抗或导纳表示，电压、电流用相量表示叫**相量模型**。
各元件阻抗是频率的函数，也称**频域模型**

3 模型变换方法：

$R \longrightarrow Z_R$、Y_R

$C \longrightarrow Z_C$、Y_C

$L \longrightarrow Z_L$、Y_L

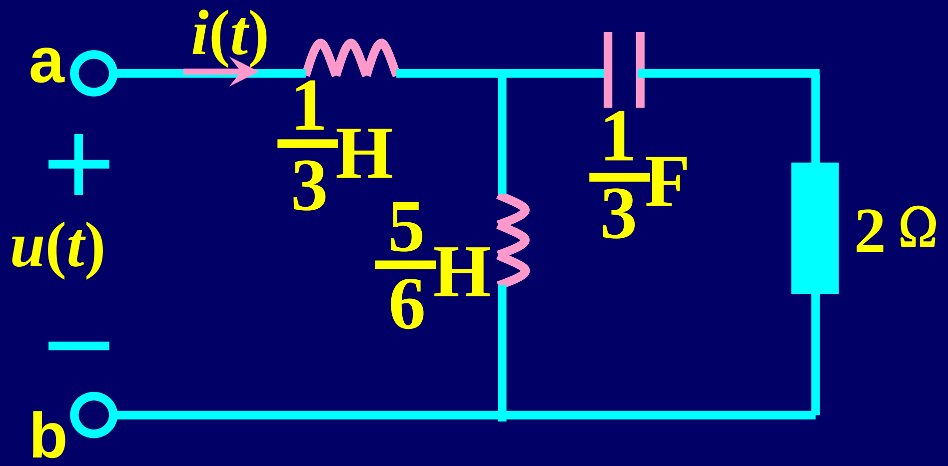
$u \longrightarrow \dot{U}$　　$i \longrightarrow \dot{I}$

电路模型 ⟶ 相量模型（频域模型）

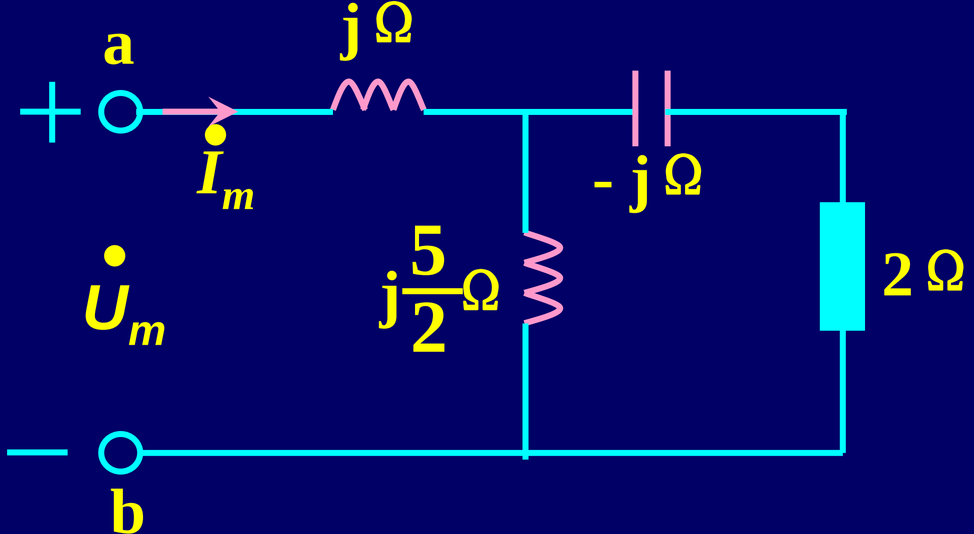
当电路模型转换为相量模型后，所有的计算方法和直流电路完全一样。

§ 8-9 正弦稳态混联电路的分析

补充例1：正弦稳态电路中$i(t)=\cos(3t+45^\circ)$A, 求$u(t)$

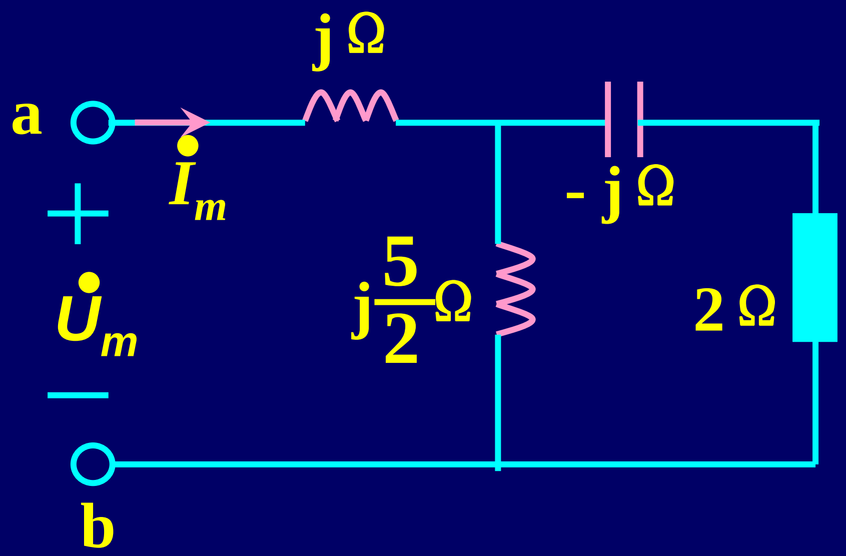


解：(1) 相量模型：



(2)求$\dot{U}_m$

已知 $\dot{I}_m = 1\angle 45^\circ$ A



$$Z_{ab} = j + \frac{(2-j)j\frac{5}{2}}{(2-j)+j\frac{5}{2}} = j + \frac{\frac{5}{2}+j5}{2+j\frac{3}{2}} = j + \frac{5+j10}{4+j3} = j+2+j$$

$$= 2+j2 = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ\ \Omega$$

$$\dot{U}_m = Z_{ab}\dot{I}_m = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ \times 1\angle 45^\circ = 2\sqrt{2}\angle 90^\circ\ \text{V}$$

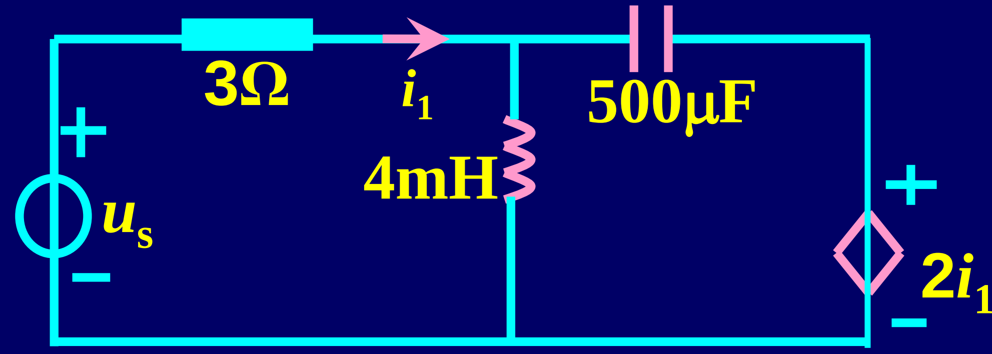
$$u(t) = 2\sqrt{2}\cos(3t+90^\circ)\text{V}$$

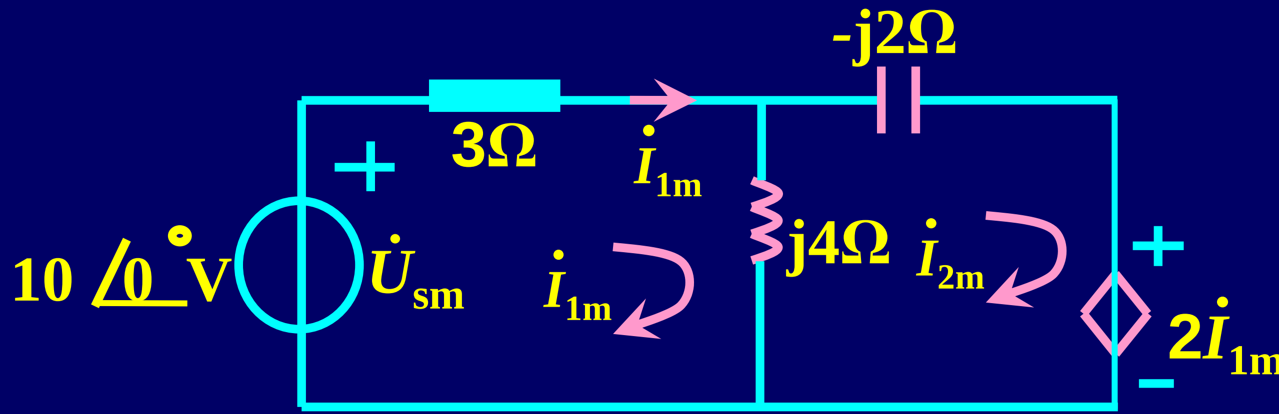
§8-10 相量模型的网孔分析法和节点分析法

将电路模型转为相量模型后，直流电路的网孔法、节电法可移植到正弦稳态电路。

例8-15. 网孔法求电流i_1，已知$u_s(t)=10\cos(10^3 t)$ V

解：网孔法



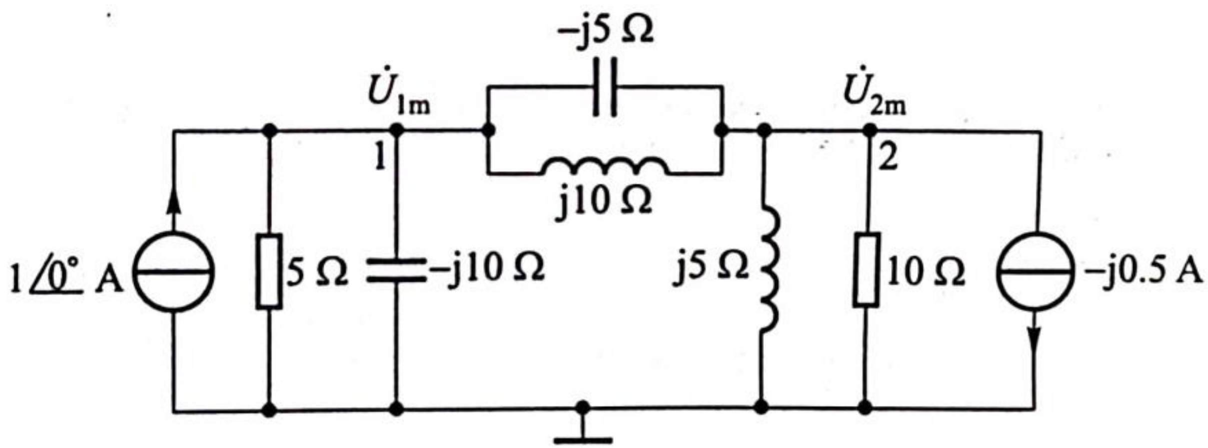


$$\begin{cases} (3+j4)\dot{I}_{1m}-j4\dot{I}_{2m}=10\angle 0^\circ \\ -j4\dot{I}_{1m}+(j4-j2)\dot{I}_{2m}=-2\dot{I}_{1m} \end{cases}$$

解出：$\dot{I}_{1m}=1.24\angle 29.7^\circ$ A

$i_1(t)=1.24\cos(10^3 t+29.7^\circ)$ A

例8-16. 图中两个电流源均为最大值相量，列节点方程组。



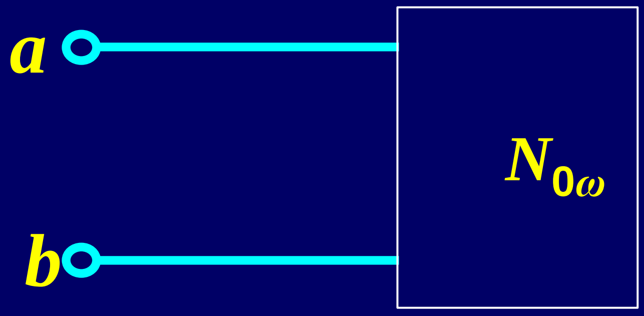
解：

节点1：$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{-j10}+\frac{1}{j10}+\frac{1}{-j5}\right)\dot{U}_{1m}-\left(\frac{1}{-j5}+\frac{1}{j10}\right)\dot{U}_{2m}=1\angle 0^\circ \mathrm{A}$

节点2：$-\left(\frac{1}{-j5}+\frac{1}{j10}\right)\dot{U}_{1m}+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{j5}+\frac{1}{j10}+\frac{1}{-j5}\right)\dot{U}_{2m}=-(-j0.5)$

§ 8-11 相量模型的等效

一.正弦稳态无源单口网络的等效:



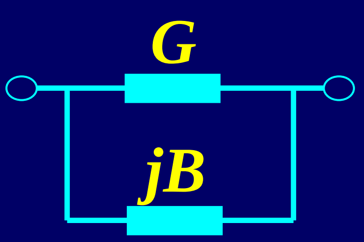
$$Z_{ab}(j\,\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$$

$$Y_{ab}(j\,\omega)=G(\omega)+jB(\omega)$$

正弦稳态下无源单口网络的输入阻抗，由于ω不同，Z有不同的值，无法找到一个适合所有频率的等效电路.

但在某一特定频率下可找到无源单口网络的等效电路，有两种，即串联模型和并联模型。二者可相互转化。

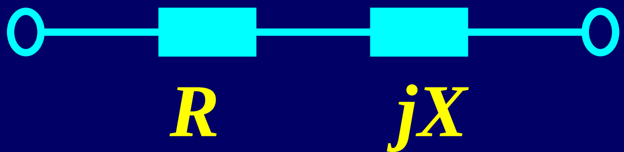
$$Z=R+jX$$

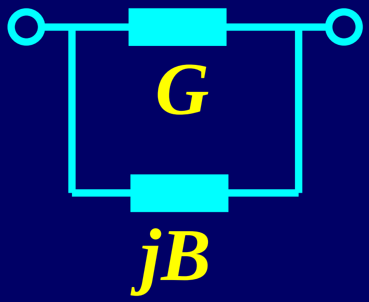


$$Y=G+jB$$

两种等效电路的关系：

（1）已知串联 ⟶ 求并联





$Z=R+jX$

$Y=G+jB$

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{R+jX}=\frac{R-jX}{R^2+X^2}$$

$$=\frac{R}{R^2+X^2}-j\frac{X}{R^2+X^2}=G+jB$$

（2）已知并联 ⟶ 求串联

$$Y=G+jB$$

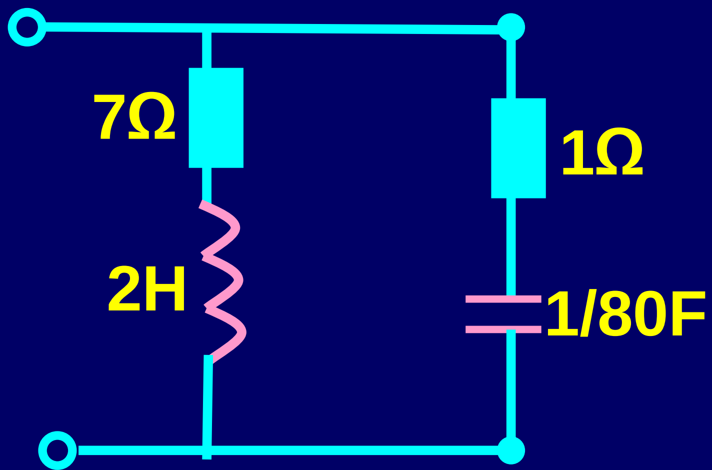
$$Z=\frac{1}{Y}=\frac{1}{G+jB}=\frac{G-jB}{G^2+B^2}$$

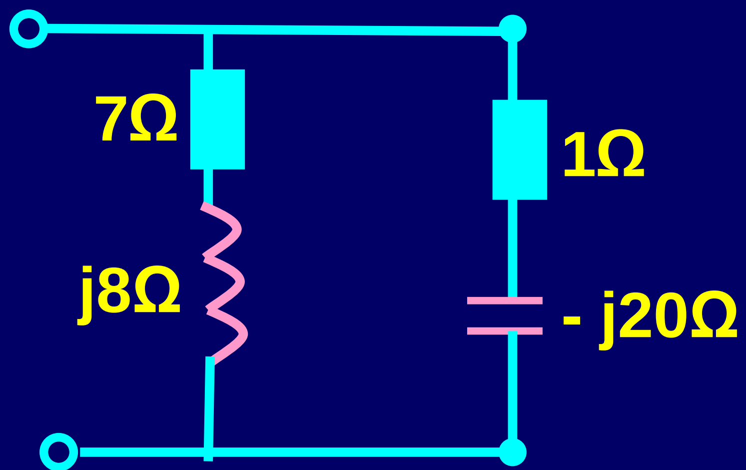
$$=\frac{G}{G^2+B^2}-j\frac{B}{G^2+B^2}=R+jX$$

$$R\neq\frac{1}{G}\qquad X\neq\frac{1}{B}$$

阻抗与导纳互为倒数

例8-18. 求下图网络在ω=4rad/s时的等效相量模型。

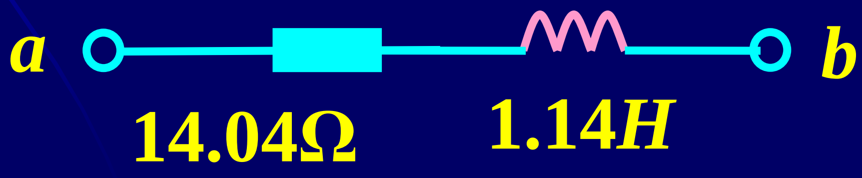




解:(1) 串联等效电路的求法:

Z=（7+j8)(1−j20)/(7+j8+1−j20）=（14.04+j4.56）Ω

串联等效电路为:



(2) 并联等效电路的求法：

Y=1/（14.04+j4.56）= 0.0644-j0.0209 s

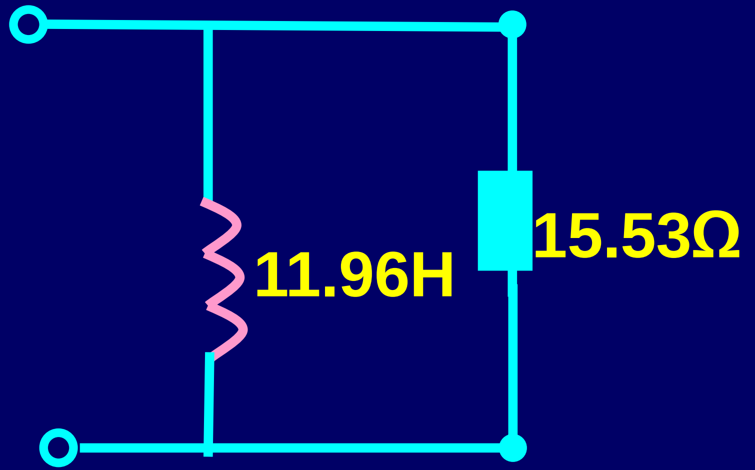
0.0644 s 对应的电阻为：

R = 1/0.0644 =15.53Ω

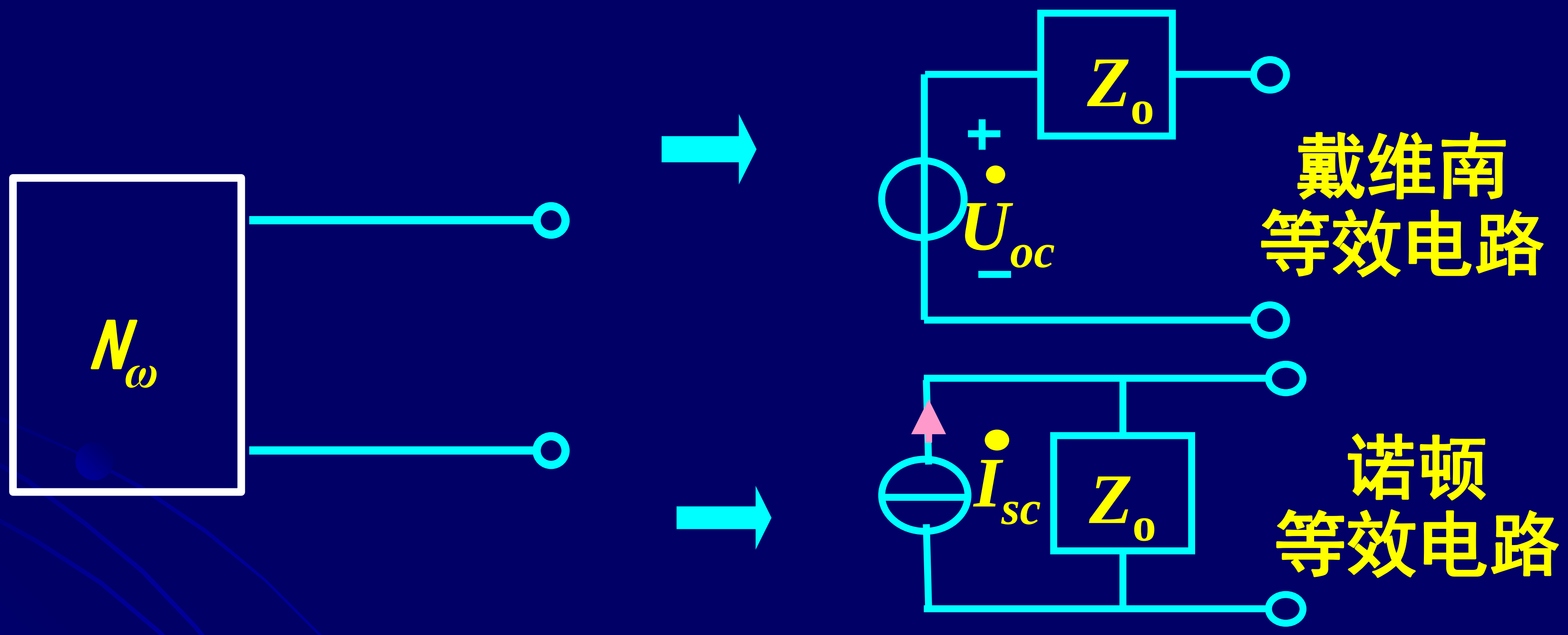
-j0.0209 s 对应的电感为：

L = 1/4×0.0209 =11.96 H

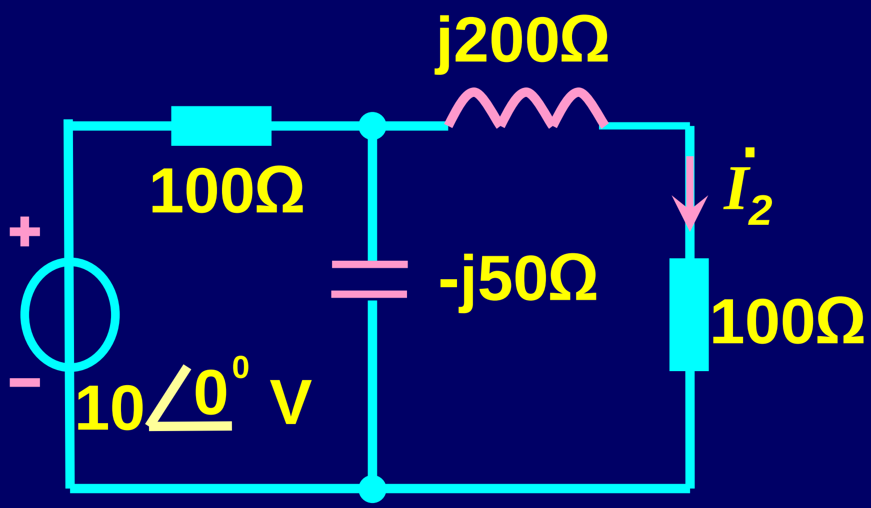
并联等效电路为：



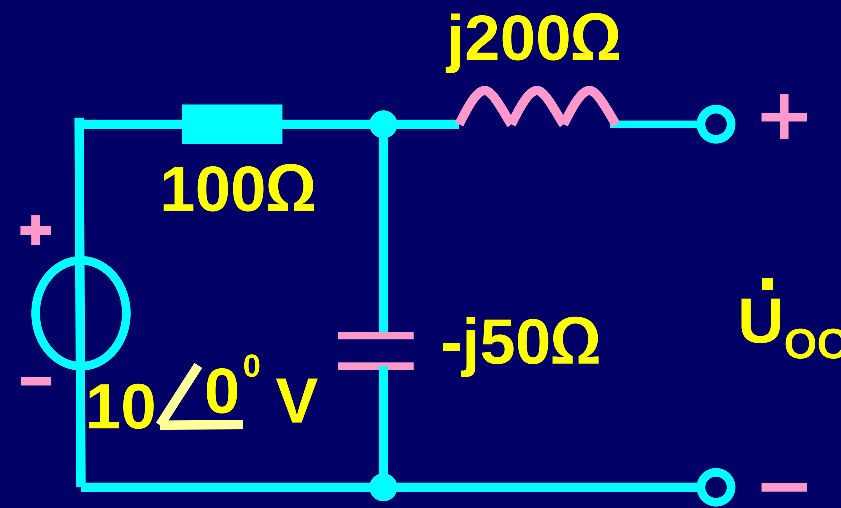
二. 正弦稳态含源单口网络的等效



例8-19：用戴维南等效电路求下图中电流$\dot{I}_2$



解（1）求相量 $\dot{U}_{OC}$



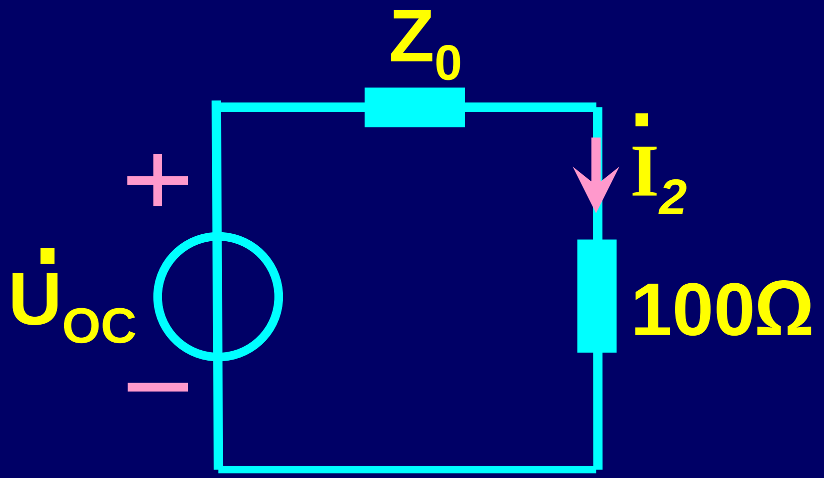
$$\dot{U}_{OC}=10\angle 0^0\frac{-j50}{100-j50}=10\frac{-j}{2-j}=10\frac{\angle -90^0}{2.24\angle -26.6^0}$$

$$=4.47\angle -63.4^0 \text{ V}$$

（2）求Z_0

$$Z_0=j200+100//(-j50)=20+j160\ \Omega$$

(3) 画等效电路求解。

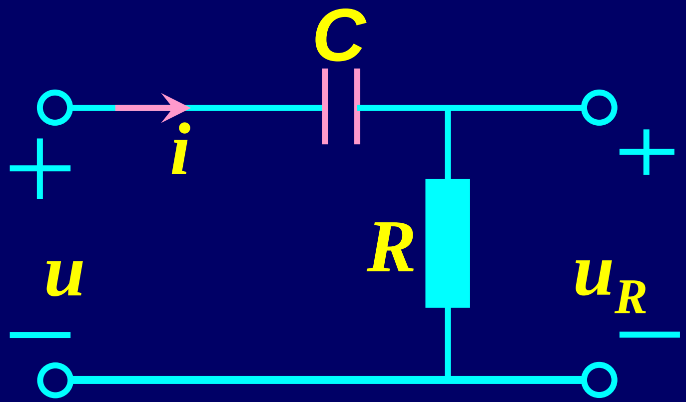


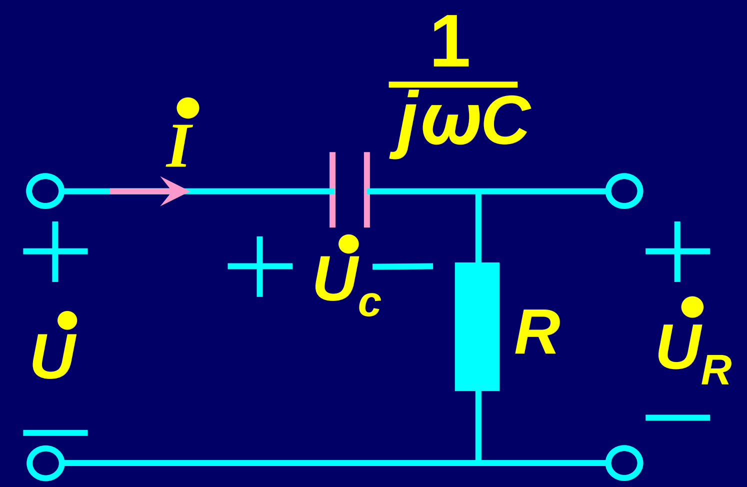
$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}_{OC}}{Z_0+100}=\frac{4.47\angle -63.4^0}{200\angle 53.13^0}=0.0224\angle -116.53^0\ \text{A}$$

§8-13　相量图法

相量图解法

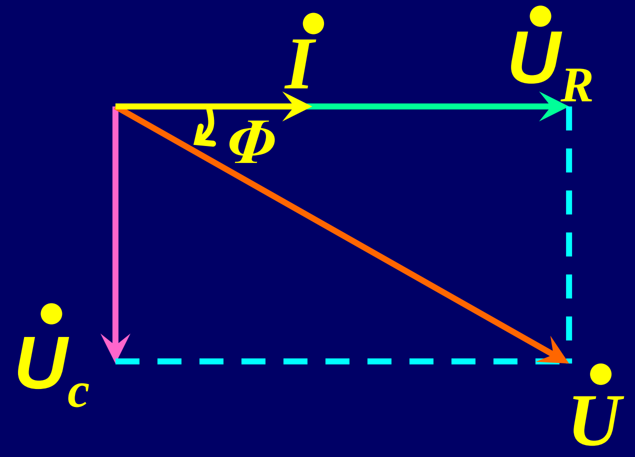
1. 串联（例题8-22）





以电流为参考相量

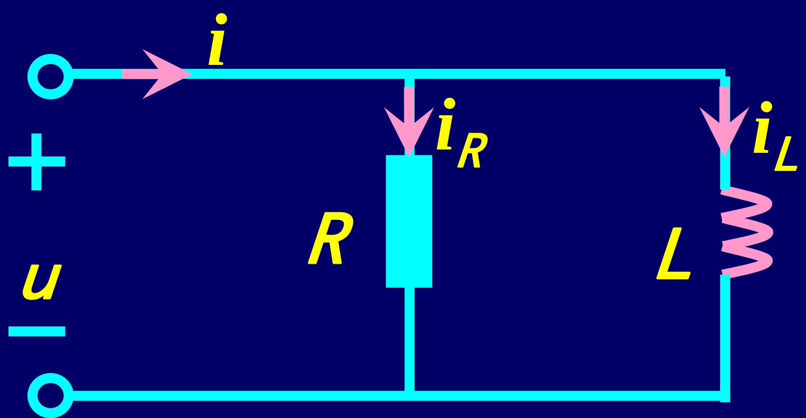
$$U_R = IR \qquad U_c = \frac{I}{\omega C}$$

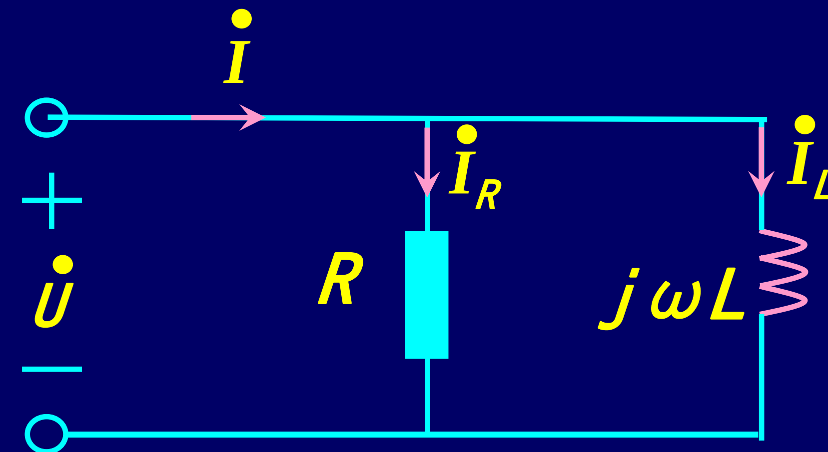


$$U = \sqrt{U_c^2 + U_R^2} = I\sqrt{\frac{1}{(\omega C)^2} + R^2}$$

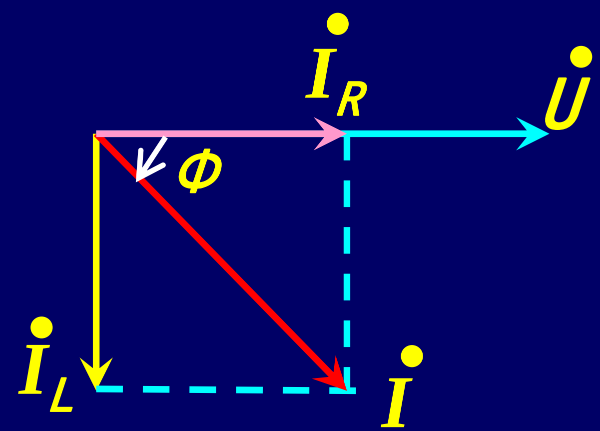
$$\phi = arctg\frac{U_C}{U_R} = arctg\frac{1}{\omega CR}$$

2. 并联：





以电压为参考相量

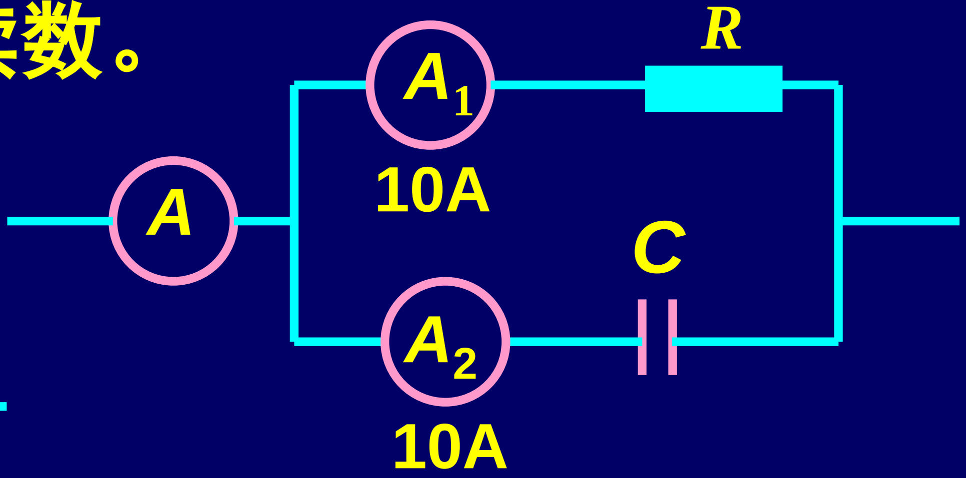


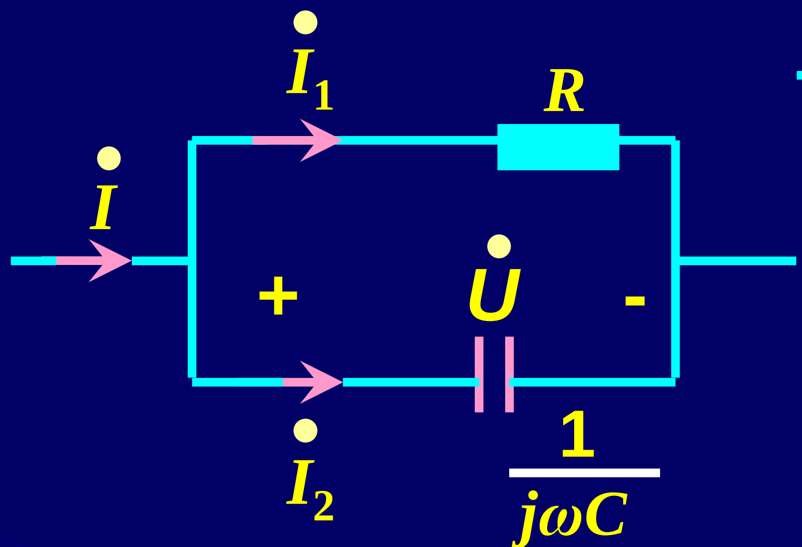
$$I^2 = I_R^2 + I_L^2 = \left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{\omega L}\right)^2$$

$$I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(\omega L)^2}}$$

$$\phi = arctg\,\frac{R}{\omega L}$$

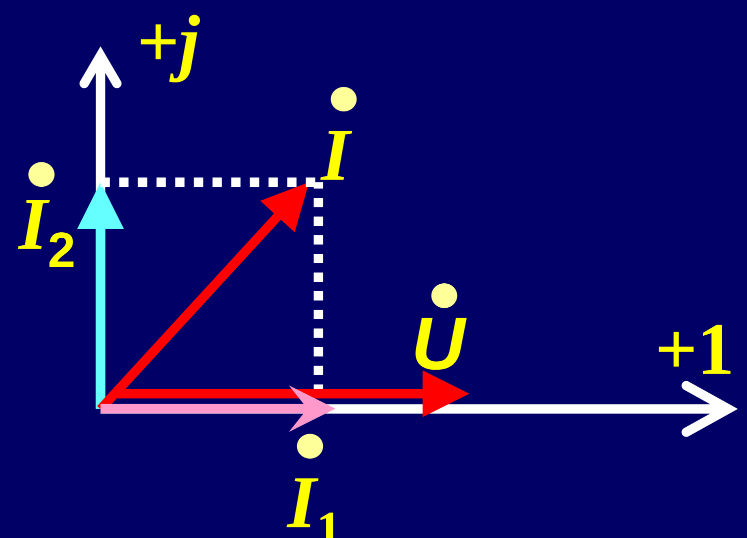
例8-23：正弦稳态电路，各表的指示均为有效值，求表A的读数。





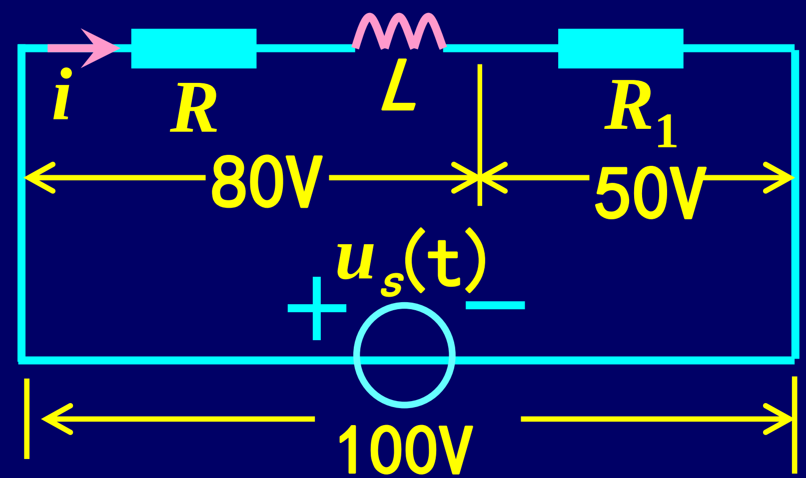
解：以$\dot{I}_1$为参考相量

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2$$



$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2}=10\sqrt{2}\text{ A}$$

例8-25：正弦稳态电路，各电压均为有效值。电源角频率314rad/s，R_1=25Ω。求R、L



解：以回路电流*i*为参考相量。

I=50/25=2A

Δ AOB：$80^2=100^2+50^2-2\times100\times50\cos\phi$

$\cos\phi=0.61$

Δ AOC：OC =100cosϕ=61V

BC =11V　R=11÷2=5.5Ω

Δ ABC：$\omega LI=\sqrt{80^2-11^2}=79.24V$

L= 79.24/(2×314)=126mH