一 测量与测量误差

3. 统计分布函数和概率

统计分布函数：如果把多次反复测量中的某次结果记为x_i，其出现的次数记为y_i，则$y_i=f(x_i)$就是一个统计分布函数。

- **概率**：如果把测量的总次数记为n，则测量结果出现为x_i的频繁程度就是y_i/n（频率）；当$n\to\infty$ 时，称为概率，记为$P(x_i)$.

$$P(x_i)=y_i(x_i)/n$$

- **概率密度分布函数 f(x)**：如果x_i是一个连续变量x，$P(x)$对x的导数，记为f(x). 物理意义是指单位区间内出现测量结果为x_i的次数。

一 测量与测量误差

随机误差的分布有多种形式，如：

二项式分布、正态分布、均匀分布、三角分布……

不同的分布有不同的分布函数，但是任何分布函数一般都有几个重要的参数，如：

数学期望值$E(x)$，总体平均值m，方差$V(x_i)$，标准偏差（方均根）等

一 测量与测量误差

方差： $V(x)=s^2(x)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$

对于有限次测量，表征测量分散性的参量是标准偏差，它是方差的正平方根

方差的正平方根：贝塞尔公式

$$\sigma(x)=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_i^n(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}$$

算数平均值的实验标准差

$$\sigma(\overline{x})=\frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_i^n(x_i-\overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

一 测量与测量误差

例：在对某长度的测量中，共进行10次测量，各测量值x分别为（6.41， 6.42，6.44， 6.46， 6.48， 6.43，6.45， 6.47， 6.49， 6.45）nm, 试求 $\bar{x}$ S_x $S_{\bar{x}}$

解：
$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}=6.45nm$$

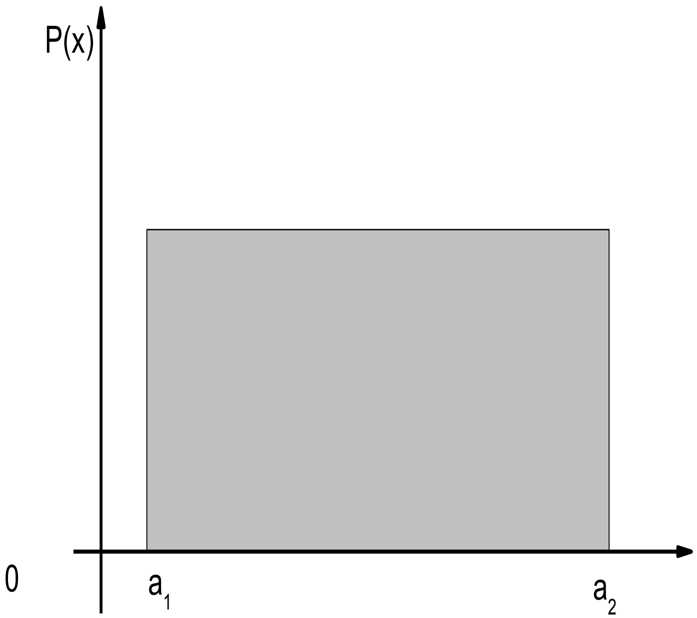
$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2}{10-1}}=\sqrt{\frac{0.006}{9}}=0.026nm$$

$$\sigma(\bar{x})=\frac{S(x)}{\sqrt{n}}=\frac{0.026}{\sqrt{10}}=0.008\mathrm{nm}$$

一 测量与测量误差

关于矩形分布（系统误差）

- 假设有一连续随机变量x，它的概率密度函数在某一有限区间内为常数，在该区间外为 0，即：



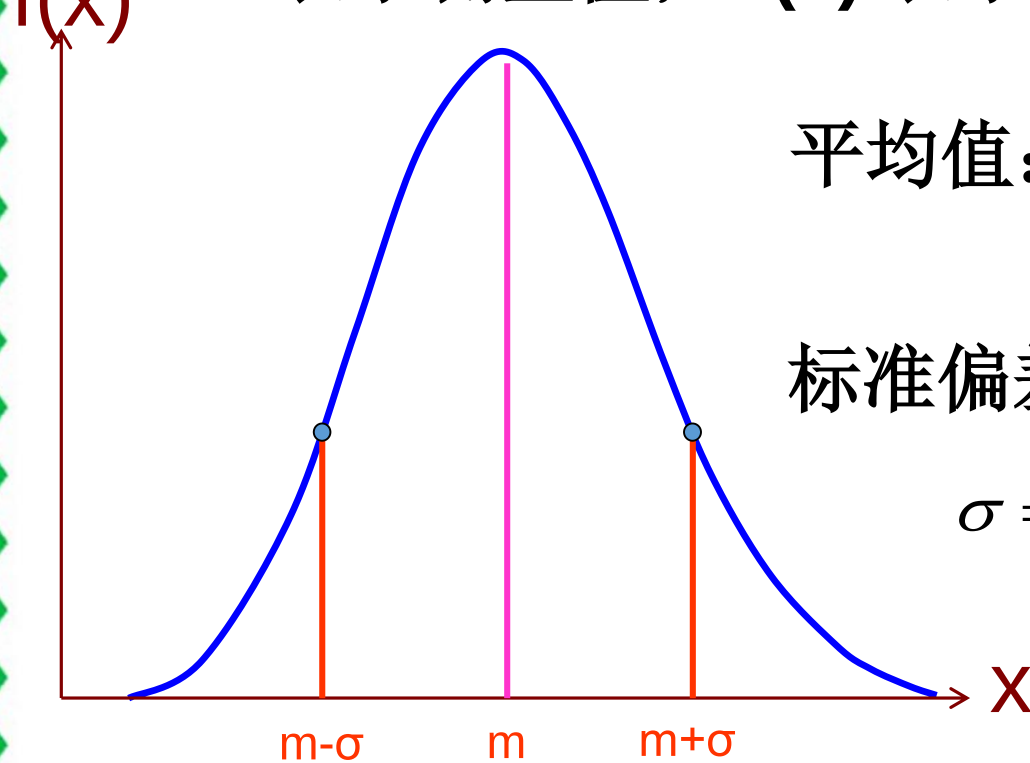
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a_2-a_1}, a_1 \le x \le a_2 \\ 0, \quad x<a_1 \ or \ x>a_2\end{cases}$$

x 服从矩形分布

一 测量与测量误差

正态分布（随机误差） $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$

x 表示测量值； **f(x)** 表示测量值的概率密度

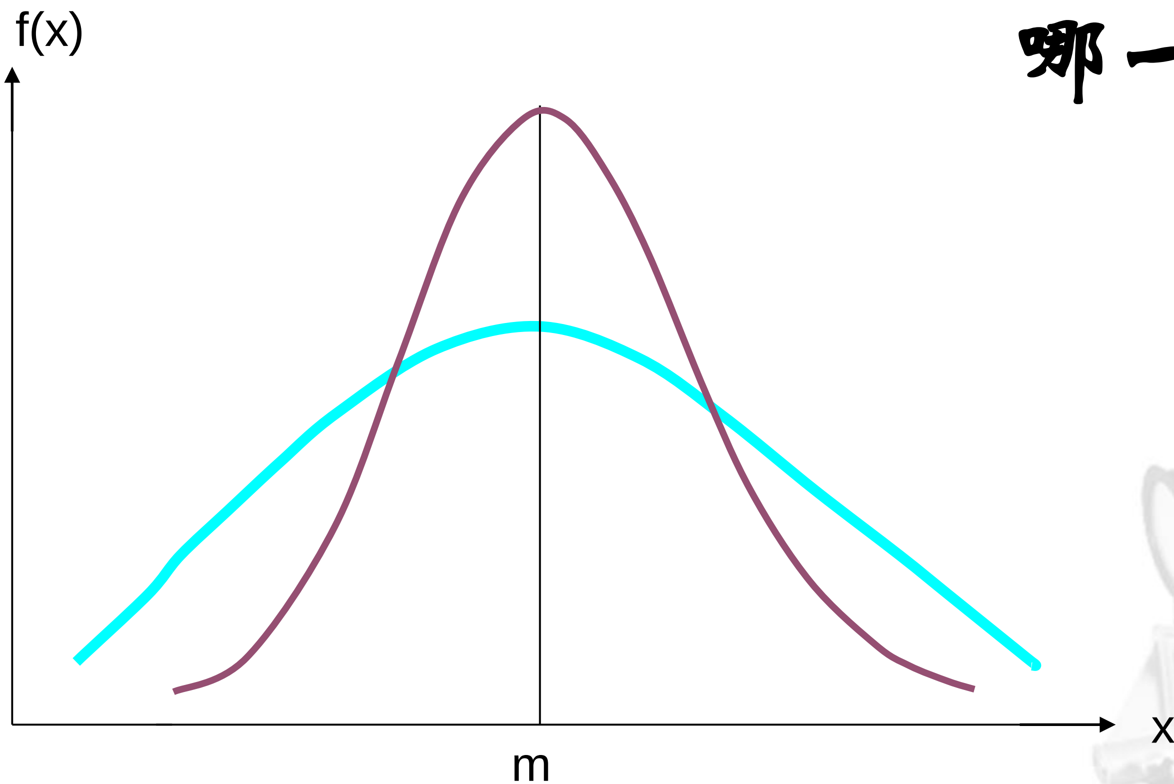


平均值： $$m=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

标准偏差： $$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{n}}$$

一 测量与测量误差

σ与曲线的形状有关



哪一个σ大？

一 测量与测量误差

置信区间与置信概率

概率密度在X轴上的积分（曲线和x轴所围面积）表示随机误差在一定范围（置信区间，半宽=kσ）内的概率P

$$P = \int_{m-k\sigma}^{m+k\sigma} f(x)dx$$

若k=1，即±σ 区间内，*P*=68.3%，
±2σ区间，*P*=95.4%；±3σ区间，*P* = 99.7%；
扩大置信区间，置信概率就会相应提高.

一 测量与测量误差

K 的取值

1.K值与分布形式及概率有关，分布不同或概率不同，K值也不同。

2.正态分布k与概率p的对应关系

概率	68.27	90	95	95.45	99	99.73
包含因子K	1	1.645	1.960	2	2.576	3

3.3σ 准则　　　　$|X_i - m| > 3\sigma$，忽略不计

一 测量与测量误差

t分布

当测量次数很少时（例如，少于10次），测量误差的分布将明显偏离正态分布。这时测量值的随机误差分布将遵从**t分布**，需要对标准偏差进行修正，乘以因子$t_p(n-1)$，在置信概率P及测量次数确定后，可从专门的数学表查到。

实验教学中一般不作此要求，除非实验课老师有要求。

$P=0.683$ 时，不同测量次数下 $t_p(n-1)$ 的值

测量次数 n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
自由度 $\nu=n-1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_{0.683}(n-1)$	1.84	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06

一 测量与测量误差

怎样理解总体平均值和总体标准偏差的意义

总体平均值m是被测物理量真值的最佳估计值。当系统误差小到可以不考虑（忽略）时，m就是真值。

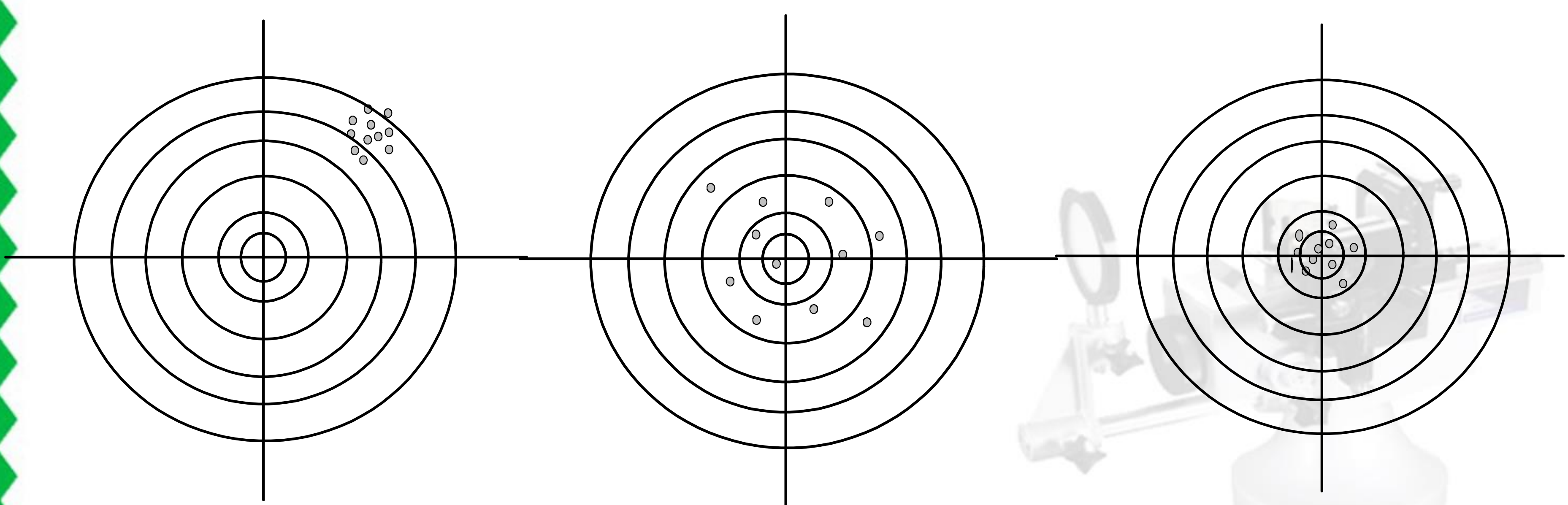
σ是一个有概率意义的参量。它不是测量列中任一次测量的随机误差，而是表征测量分散性的一个参量。

在实际测量中n→∞不可能实现， m 和σ都是理想值；置信概率P = 68.3%也是理想值。

一 测量与测量误差

4. 精密度、正确度、精确度

- 精密度 （Precision）偏离平均值差，随机误差
- 正确度 （Correctness）偏离正确值，系统误差
- 精确度（ Accuracy ）精+真，系统误差+随机误差



(a)精密　　(b)正确　　(c) 精确