§3.3 带度量的向量空间

在解析几何中，对平面上的有向线段 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 可做**点乘**运算：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$$

其中，$<\vec{a},\vec{b}>$表示有向线段 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，$|\vec{a}|$ 和 $|\vec{b}|$分别为有向线段 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的长度。利用点乘可得：

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}},\quad \cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

取定平面直角坐标系$\{O;\vec{i},\vec{j}\}$后，设

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j},\quad \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$$

则易得

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

在几何中，$|\vec{a}|$与 $<\vec{a},\vec{b}>$均有直观的几何意义。但对一般的n元实向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n),\ \boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$$

则无法直接讨论它们的长度与夹角。我们仿照点乘的坐标运算法，把

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{b}_n$$

当作向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的“点乘”，就可反向引入向量的长度与夹角的概念。

一、向量的内积

定义 设 $\boldsymbol{V}$ 是**实向量空间**。任取 $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，设

$$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**内积** $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 规定为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{b}_n$$

设

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{a}_n)^{\mathrm{T}},\ \ \boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{b}_n)^{\mathrm{T}},$$

则

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$$

性质 设 $\boldsymbol{V}$ 是实向量空间。对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{V}$ 及 $\boldsymbol{k}\in\mathrm{R}$，均有

（1）$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$

（2）$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$

（3）$(\boldsymbol{k\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{k}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

（4）$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geq 0$，且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$

定义 3.3.2 定义了内积运算的实向量空间称为 **Euclid 空间**，简称为**欧氏空间**。

二、向量的度量

定义 3.3.3 设 $\boldsymbol{V}$ 是欧氏空间，任取 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**长度** $|\boldsymbol{\alpha}|$规定为

$$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$$

注意:

(1) $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\theta} \Rightarrow |\boldsymbol{\alpha}|>0$；

(2) $|\boldsymbol{\alpha}|=1 \Rightarrow$ 称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为**单位向量**；

（3）$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\theta} \Rightarrow \dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$是单位向量（称上述过程为对$\boldsymbol{\alpha}$ **单位化**）；

(4) $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{\boldsymbol{a}_1^2 + \boldsymbol{a}_2^2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n^2}$$

定理 3.3.1 设$\boldsymbol{V}$是欧氏空间，则对任意$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$均有

$$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leq |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$$

上式称为 **Cauchy-Schwarz 不等式**。

证 (1) $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta}$，结论成立；

(2) $\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\theta}$，对任意实数$\boldsymbol{x}$，均有

$$(\boldsymbol{\alpha} + x\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} + x\boldsymbol{\beta}) \geq 0$$

即

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})x^2 + 2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})x + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$$

因 $\boldsymbol{x}^2$的系数大于零，故

$$[2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})]^2 - 4(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \leq 0$$

即

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2 \le (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) = |\boldsymbol{\alpha}|^2|\boldsymbol{\beta}|^2$$

于是

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})| \le |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$$

定义 3.3.4 设 $\boldsymbol{V}$ 是欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$，且 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 均不是零向量，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**夹角** $<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}>$ 规定为

$$\cos<\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}> = \frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}$$

这里 $0 \le \ <\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}> \ \le \pi$。

定义 3.3.5 若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与向量 $\boldsymbol{\beta}$ **正交**，记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$。

例 3.3.1 设 $\boldsymbol{A}\in\mathrm{R}^{m\times n}$，则对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 与任意 $\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})$，均有 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$。

性质 3.3.2 设 $\boldsymbol{V}$ 是欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 中任意两个向量，则有

（1）**三角不等式**：$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \le |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|$

（2）**勾股定理**：若$\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$，则

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2$$

三、标准正交基

定义 3.3.6 设 $\boldsymbol{V}$ 是欧氏空间,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m}}$是 $\boldsymbol{V}$ 中 m 个**非零向量**。若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m}}$两两正交，则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m}}$是**正交向量组**。由单位向量构成的正交向量组称为**标准正交向量组**。

例 在欧氏空间 $\mathrm{R}^{\boldsymbol{n}}$中，自然基是标准正交向量组。

例 在欧氏空间 $\mathrm{R}^{\boldsymbol{n}}$中，单位向量本身也是标准正交向量组。

定理 3.3.2 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m}}$是欧氏空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个正交向量组，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m}}$线性无关。

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m}}$是正交向量组，令

$$\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{\theta}$$

两边同时与 $\boldsymbol{\alpha}_1$做内积，得

$$(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m,\alpha_1)=(\theta,\alpha_1)$$

$$\Rightarrow\ k_1(\alpha_1,\alpha_1)+k_2(\alpha_2,\alpha_1)+\cdots+k_m(\alpha_m,\alpha_1)=0$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交，故

$$(\alpha_2,\alpha_1)=0,\ \cdots,\ (\alpha_m,\alpha_1)=0$$

于是

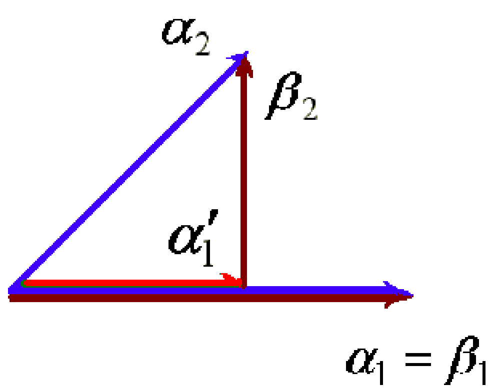
$$k_1(\alpha_1,\alpha_1)=0$$

又 $\alpha_1\neq\theta$，故 $(\alpha_1,\alpha_1)>0$。由此得 $k_1=0$。

同理可证 $k_2=\cdots=k_m=0$。所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,$ α_m线性无关。

设 α_1,α_2线性无关，令

$\beta_1=\alpha_1,\ \alpha_1'+\beta_2=\alpha_2,$



则

$$\alpha_1'\,//\,\alpha_1\ \Rightarrow\ \alpha_1'=k_1\alpha_1$$

$$\Rightarrow\ \beta_2=\alpha_2-k_1\alpha_1=\alpha_2-k_1\beta_1$$

因要求 $\beta_2\perp\beta_1$，故

$$0=(\beta_2,\beta_1)=(\alpha_2-k_1\beta_1,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_1)-k_1(\beta_1,\beta_1)$$

又 $\beta_1=\alpha_1\neq\theta$，故 $(\beta_1,\beta_1)>0$。从上式解得

$$k_1=\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}$$

已知 α_1,α_2线性无关，故 $\beta_2\neq\theta$。于是 β_1,β_2是正交向量组。

令 $\eta_1=\dfrac{1}{|\beta_1|}\beta_1$，$\eta_2=\dfrac{1}{|\beta_2|}\beta_2$，则 η_1,η_2是标准正交向量组， 而且，

$$\{\alpha_1\}\cong\{\eta_1\}，\{\alpha_1,\alpha_2\}\cong\{\eta_1,\eta_2\}$$

定理 3.3.3 设 V 是欧氏空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是 V 中 m 个线性无关的向量，则 V 中存在 m 个标准正交的向量 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m$，并且

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_i\}\cong\{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_i\}$$
$$i=1,2,\ldots,m$$

Schmidt 正交化方法:

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

1. 正交化：

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

2. 单位化：

$$\eta_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1,\quad \eta_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2,\quad \eta_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3$$

例 已知R^3中的

$$\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,0,0)$$

求三个标准正交的向量。

解 1. 正交化

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,1,0)-\frac{2}{3}(1,1,1)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$=(1,0,0)-\frac{1}{3}(1,1,1)-\frac{1/3}{6/9}(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0);$$

2. 单位化

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_3|}\boldsymbol{\beta}_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$即为所求的一个标准正交向量组。

定义 3.3.7 设 $\boldsymbol{V}$ 是欧氏空间，则 $\boldsymbol{V}$ 中由正交向量组构成的基称为**正交基**，$\boldsymbol{V}$ 中由标准正交向量组构成的基称为**标准正交基**。

例 欧氏空间 R^{n}的自然基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\ldots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$即是标准正交基。

定理 3.3.4 设 $V \subseteq \mathrm{R}^n$是欧氏空间，且 $V \neq \{\theta\}$，则 V 一定存在标准正交基。

例 已知欧氏空间 R^3 中的两个标准正交向量 $\eta_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \eta_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$，把$\eta_1, \eta_2$扩充为 R^3的标准正交基。

解 1. 把 η_1, η_2扩充为 R^3的一个基：

取向量 $\alpha_3 = (0,0,1)$，易证 η_1, η_2, α_3线性无关，因此它们是 R^3的一个基。

2. 把 η_1, η_2, α_3化为 R^3的一个正交基：

令

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \eta_1)}{(\eta_1, \eta_1)}\eta_1 - \frac{(\alpha_3, \eta_2)}{(\eta_2, \eta_2)}\eta_2 \\ &= (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ &= (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\end{aligned}$$

则 η_1, η_2, β_3两两正交，且无零向量，因此它们是R^3的一

个正交基。

3. 把 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$化为 R^3的一个标准正交基：

令

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_3|}\boldsymbol{\beta}_3=(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}})$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$即为 R^3的一个标准正交基。

四、正交矩阵

定义 3.3.8 设$\boldsymbol{A}\in\mathrm{R}^{n\times n}$，若$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，则称$\boldsymbol{A}$是**正交矩阵**。

显然，正交矩阵 $\boldsymbol{A}$满足 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$为正交矩阵，

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}$$

为$\boldsymbol{A}$的列向量组。

由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ 得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}]$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{n}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{i}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{j}}=\begin{cases}1, & \boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\\ 0, & \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}\end{cases}$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{i}}\in\mathrm{R}^{\boldsymbol{n}}$（欧氏空间），且

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ni} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_i,\ \boldsymbol{\alpha}_j)$$ （$\boldsymbol{\alpha}_i$与$\boldsymbol{\alpha}_j$的内积）

故有

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是 R^n中的标准正交向量组。

定理 3.3.5 设 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{R}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$是正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$的列（行）向量组是标准正交的。

例 设 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_3 - 2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha} = (\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$。证明：$\boldsymbol{B}$是正交矩阵。

证明：（法一）

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}_3-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9}\\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$\because$ $\boldsymbol{B}$的列向量组标准正交,

$\therefore$ $\boldsymbol{B}$是正交矩阵。

（法二）$\because$ $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}$

$$=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}-(2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}$$

$$=\boldsymbol{I}-2(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}$$

$$=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^2$$

$$=\boldsymbol{I}^2-2\boldsymbol{I}(2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})+(2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^2$$

$$=\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+4(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^2$$

又 $(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^2=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\ =\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}$，而

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\left(\frac{2}{3},\ \ \frac{1}{3},\ \ \frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=1$$

故 $(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^2=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$。所以

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{I}$$

于是，$\boldsymbol{B}$ 是正交矩阵。

例 3.3.6 设 $\boldsymbol{A} \in \mathrm{R}^{n\times n}$，证明：若 $\boldsymbol{A}$可逆，则 $\boldsymbol{A}$可表示为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$$

其中 $\boldsymbol{Q}$是 n 阶正交矩阵，$\boldsymbol{R}$是 n 阶可逆上三角阵。上式称为实方阵$\boldsymbol{A}$的**正交分解**。

小结： 1）重点；2）难点；3）注意点。

作业： 习题：**P164** 17, 19,21, 24, 29