概率论与数理统计

第 11 讲

独立性、二维离散型变量函数的分布

一. 随机变量的独立性

二维随机变量（X，Y）的联合分布可以唯一的确定其边缘分布，反之不一定成立，这主要是因为随机变量X和Y之间可能存在某种关系，而两个边缘分布不能体现这种关系，所以一般情况下，由边缘分布不能确定联合分布。

那么，当X和Y之间没有任何关系的时候，自然就可以认为由边缘分布能够唯一的确定联合分布，这时，称X和Y是相互独立。

两事件A,B独立的定义是：若$P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件A,B独立。将事件独立性推广到随机变量

一. 随机变量的独立性

定义1 设二维随机变量（X，Y）的联合分布函数为$F(x,y)$，$F_X(x)$和$F_Y(y)$分别为其边缘分布函数，若对于任意实数 x, y，有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量X和Y相互独立，简称X和Y独立。

例1.一电子元件由两个部件构成，以X，Y分别表示两个部件的寿命（单位：千小时）。已知X和Y的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

判断X与Y是否独立?

解： $F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$\therefore\ \forall x,y\in R,\ \ F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ **所以X与Y相互独立。**

当利用独立性的定义判断两个随机变量不独立时，只需证明存在一对实数x_0, y_0，使得

$$F(x_0, y_0) \neq F_X(x_0)F_Y(y_0)$$

例2.设连续型随机变量X的概率密度为$f_X(x), -\infty<x<\infty$，令$Y=|X|$。问X与Y是否相互独立。

解：设(X,Y)的联合分布函数表示为$F(x,y)$。

易知 必存在常数$a>0$，使得 $0<P\{X\leq a\}<1$

所以有 $F(a,a)=P\{X\leq a, |X|\leq a\} = P\{|X|\leq a\} > P\{X\leq a\}P\{|X|\leq a\}=F_X(a)F_Y(a)$

故X与Y不相互独立。

若二维随机变量(X, Y)相互独立，则有如下结论

1.对任意的实数$a<b, c<d$

$$P\{a < X \le b, c < Y \le d\} = P\{a < X \le b\}P\{c < Y \le d\}$$

2.对任意的实数a，b

$$P\{X > a, Y > b\} = P\{X > a\}P\{Y > b\}$$

二. 离散型随机变量的独立性

定理1 若(X, Y)为二维离散型随机变量，且其联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots$$

则X和Y相互独立的充分必要条件是对任意的x_i, y_j，都有

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}, i, j = 1, 2, \cdots$$

即 $$p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}, i, j = 1, 2, \cdots$$

也可以说，二维离散型随机变量独立的充要条件是联合分布律等于边缘分布律的乘积。

二. 离散型随机变量的独立性

由此定理可知，当X与Y独立时，由边缘分布律可以唯一的确定联合分布律。

同时，只要存在某个数对 (x_{i_0}, y_{j_0}) 有

$$P\{X = x_{i_0}, Y = y_{j_0}\} \neq P\{X = x_{i_0}\}P\{Y = y_{j_0}\}$$

则可以判定X与Y不独立。

例3 已知X、Y的联合分布为

X \ Y	-1	0
1	0.08	0.12
2	0.32	0.48

判断X与Y是否相互独立。

解：将X和Y的边缘分布律写在联合分布律的两侧，有

X \ Y	-1	0	
1	0.08	0.12	0.2
2	0.32	0.48	0.8
	0.4	0.6	

$$P\{X=1,Y=-1\}=0.08=0.2\times0.4=P\{X=1\}P\{Y=-1\}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=0.12=0.2\times0.6=P\{X=1\}P\{Y=0\}$$

$$P\{X=2,Y=-1\}=0.32=0.8\times0.4=P\{X=2\}P\{Y=-1\}$$

$$P\{X=2,Y=0\}=0.48=0.8\times0.6=P\{X=2\}P\{Y=0\}$$

所以X与Y互相独立。

例4.设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P	0.3	0.7

Y	2	4
P	0.6	0.4

求随机向量 (X, Y) 的联合分布律。

解：因为 X 与 Y 相互独立，所以 $P\{X=x_i, Y=y_j\} = P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$

所以 $P\{X=1,Y=2\}= P\{X=1\}P\{Y=2\}=0.3\times0.6=0.18$

$P\{X=1,Y=4\}=P\{X=1\}P\{Y=4\} =0.3\times0.4=0.12$

$P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2\} =0.7\times0.6=0.42$

$P\{X=3,Y=4\}=P\{X=3\}P\{Y=4\}=0.7\times0.4=0.28$

例4.设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P	0.3	0.7

Y	2	4
P	0.6	0.4

求随机向量(X, Y)的联合分布律。

所以(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

二. 离散型随机变量的独立性

$X \backslash Y$	2	4	$P_{\cdot j}$
1	0.3×0.6	0.3×0.4	0.3
3	0.7×0.6	0.7×0.4	0.7
$P_{i\cdot}$	0.6	0.4	

即：随机向量(X, Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

例5 设A、B是两个随机事件，按如下方式定义随机变量X和Y，

$$X=\begin{cases}1, & 若A发生\\ 0, & 若A不发生\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & 若B发生\\ 0, & 若B不发生\end{cases}$$

证明：X、Y相互独立的充要条件是随机事件A和B相互独立。

证明：必要性。

若X与Y互相独立，则有 $P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}$

即有 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

所以事件A和B互相独立。

二. 离散型随机变量的独立性

$$X=\begin{cases}1, & 若A发生\\0, & 若A不发生\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & 若B发生\\0, & 若B不发生\end{cases}$$

证明：充分性。

若随机事件A和B相互独立，则由事件的独立性知，

$\bar{A}$ 与B，A与$\bar{B}$，$\bar{A}$ 与$\bar{B}$ 相互独立

所以有
$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=P(A)P(B)=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}$$
$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=P\{X=1\}\cdot P\{Y=0\}$$
$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=P\{X=0\}\cdot P\{Y=1\}$$
$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}$$

故X与Y相互独立。

此例说明随机事件独立性和随机变量独立性的关系。即，由独立的事件可以得到独立的随机变量，反之亦然。

三. 连续型随机变量的独立性

定理2 若(X, Y)为二维连续型随机变量，联合密度函数为$f(x,y)$， 则X, Y相互独立的充分必要条件是对任意的实数x和y，有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

也就是说连续型随机变量独立的充要条件是联合密度函数等于边缘密度函数的乘积。

易知在独立时，由边缘密度函数可以唯一地确定联合密度函数。

当然严格地说定理2的结论是在“几乎处处”意义下成立的。

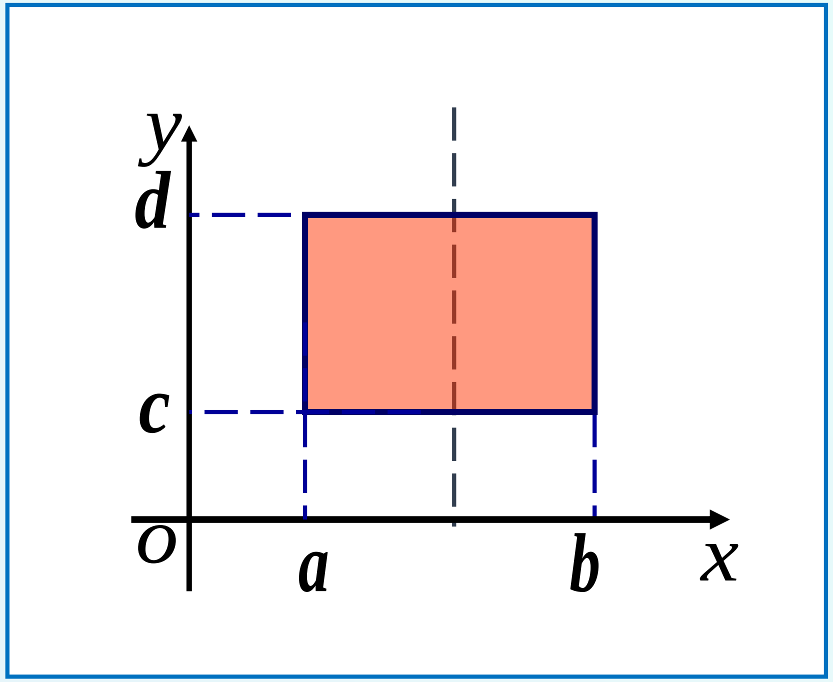
例6.设(X,Y)在矩形$D=\{(x,y)|a<x<b,c<y<d\}$上服从均匀分布，证明随机变量X、Y相互独立。

解：易知，(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a<x<b,c<y<d\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

易求得边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

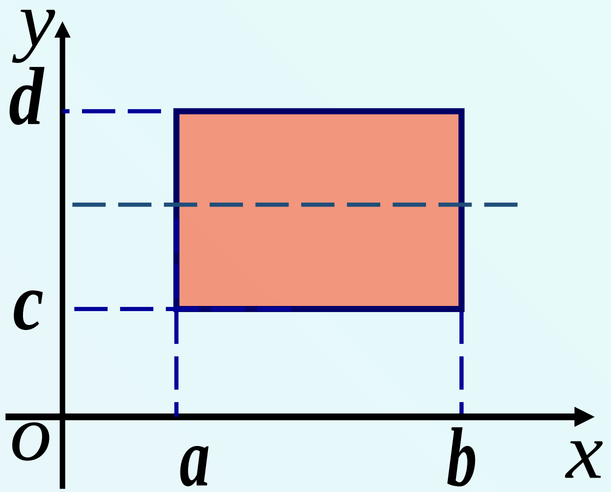


三. 连续型随机变量的独立性

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a<x<b, c<y<d\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, & c<y<d\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



对任意的x和y，有$f(x, y) = f_X(x)\ fY(y)$

即：随机变量X和Y是相互独立的。

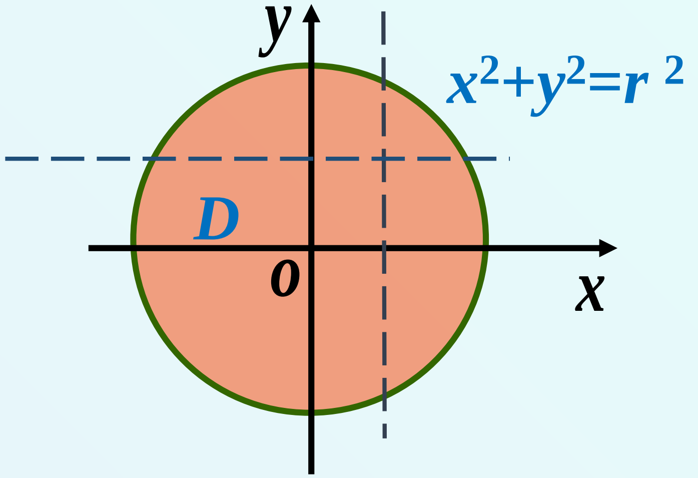
矩形区域上均匀分布的边缘分布仍是一维均匀分布且互相独立。

例7.设(X,Y)在圆域$D=\{(x, y)|\ x^2+y^2\le r^2\}$上服从均匀分布。判断$X$与$Y$是否相互独立。

解：易知(X, Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} 1/\pi r^2, (x,y)\in D \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, -r\le x\le r \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, -r\le y\le r \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$$



易知在区域D上$f(x, y)\neq f_X(x)\, f_Y(y)$ 所以X、Y不相互独立。

例8. 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$ 则X,Y相互独立的充要条件为$\rho=0$。

证明：由二维正态分布的性质知：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

必要性

$\because$ X和Y独立 $\therefore$对任何实数x, y有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

取$x=\mu_1$，$y=\mu_2$，则有 $\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$ $\therefore\sqrt{1-\rho^2}=1$ 故$\rho=0$。

充分性

当$\rho=0$时

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

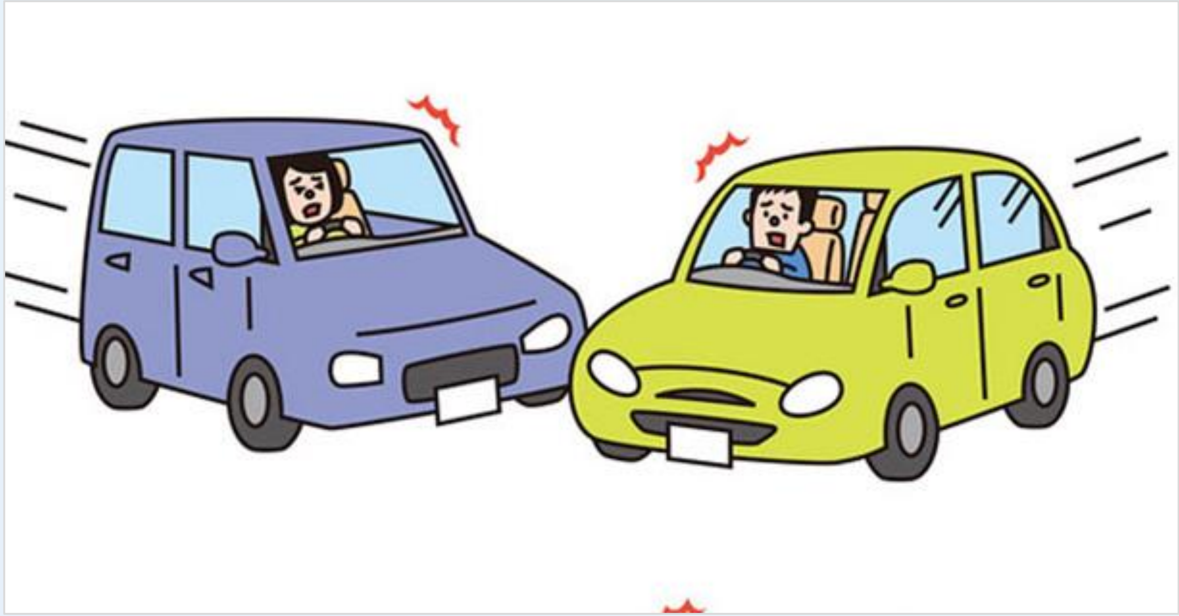
即有：$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 所以：X与Y互相独立。

三. 连续型随机变量的独立性

随机变量的独立性反映了它们各自的取值互不影响或者互相有非常小的影响（有影响的概率为零），在理论研究中，需要利用独立性的定义、定理1或定理2来判断随机变量的独立性。

然而在实际问题中，与随机事件的独立性一样，往往不是先用数学定义来验证它们的独立性，而是先从随机变量产生的实际背景出发判断它们是独立的（或者其相依性很微弱时，可以近似的认为它们是独立的），然后再利用独立性的性质和有关定理来解决实际问题。

三. 连续型随机变量的独立性



例如，在一个城市中相距很远的两个十字路口在某个时间段内发生交通事故的次数；在一大批电子产品中，随机地取两件的寿命等。

四. 推广到n维随机变量

1. 一般地，设E是一个随机试验，样本空间为$S=\{\omega\}$，$X_1=X_1\{\omega\}$，$X_2=X_2\{\omega\}$，…，$X_n=X_n\{\omega\}$是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个n维向量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$叫做n维随机向量或n维随机变量。

即：X_i：$S \rightarrow R$

$$\omega \rightarrow X_i(\omega)$$

注意：n维随机变量是定义在同一个样本空间上的随机变量。

2. 设$(X_1, X_2, \ldots X_n)$为n维随机变量，对任意的实数$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$，称$n$元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\left\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\right\}$$

为n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots X_n)$的联合分布函数。

3.边缘分布函数

设$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的分布函数为$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，则$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的任意$k(1\leq k \leq n)$维边缘分布函数就可以唯一确定。

例如，$(X_1, X_2, \ldots X_n)$关于X_1, 关于(X_1,X_2)的边缘分布函数分别为

$$F_{X_1}(x_1)=F(x_1,\infty,\infty,\cdots,\infty) \qquad F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2,\infty,\cdots,\infty).$$

4.相互独立性

若对所有的$x_1, x_2, \ldots, x_n$有：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称$X_1, X_2, \ldots, X_n$是相互独立的。

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \cdots$为随机变量序列，若其中任意$k$个随机变量是相互独立的，则称此序列为相互独立的随机变量序列。

随机向量相互独立性：

设F_1, F_2, F 依次为随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$，$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$，$(X_1, X_2, \ldots, X_m, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$的分布函数，若对所有$x_1, x_2, \ldots, x_m$，$y_1, y_2, \ldots, y_n$有：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

则称$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$相互独立。

四. 推广到n维随机变量

我们有如下结论：

（1）若两组随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$相互独立，则$X_i(i=1, 2, \ldots, m)$和$Y_j(j=1, 2, \ldots, n)$相互独立；

（2）若两组随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$和$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$相互独立，h, g是两个连续函数，则$h(X_1, X_2, \ldots, X_m)$和$g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$相互独立.

五. 二维离散型随机变量函数的分布

设 (X, Y) 是二维随机变量，$z=g(x, y)$ 是一个已知的二元函数，如果当 (X, Y) 取值为 (x, y) 时，随机变量 Z 取值为 $z=g(x, y)$，则称 Z 是二维随机变量 (X, Y) 的函数，记作 $Z=g(X, Y)$ 。

问题：

当随机变量 X, Y 的联合分布已知时，如何求出它们的函数 $Z=g(X, Y)$ 的分布?

五. 二维离散型随机变量函数的分布

如果(X,Y)是离散型随机变量，若$Z=g(X,Y)$也是离散型随机变量，此时只需求出Z的分布律。当(X,Y)可能的取值比较少时，可以将Z的取值一一列出，然后再合并整理即可求出Z的分布律，通常将(X,Y)的联合分布律表示为如下形式。

(X,Y)	(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	$\cdots$	(x_i, y_j)	$\cdots$
Z	$g(x_1, y_1)$	$g(x_1, y_2)$	$\cdots$	$g(x_i, y_j)$	$\cdots$
P	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$

当 $g(x_1, y_1)$，$g(x_1, y_2)$，$\cdots$，$g(x_i, y_j)$，$\cdots$中有某些值相等时，则把那些相等的值分别合并，并把对应的概率相加即可。

例9.已知 (X, Y) 的联合分布律，见右表，求

（1）$Z_1=X+Y$ 的分布律；

（2）$Z_2=X-Y$ 的分布律。

$X \backslash Y$	0	1	3
−1	1/8	0	3/8
2	2/8	2/8	0

解：由 (X,Y) 的分布律可得：

(X,Y)	(−1,0)	(−1,1)	(−1,3)	(2,0)	(2,1)	(2,3)
$X+Y$	−1	0	2	2	3	5
$X-Y$	−1	−2	−4	2	1	−1
P	1/8	0	3/8	2/8	2/8	0

去掉概率为0的值，并将相同函数值对应的概率求和，从而得到：

五. 二维离散型随机变量函数的分布

(X,Y)	$(-1,0)$	$(-1,1)$	$(-1,3)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,3)$
$X+Y$	-1	0	2	2	3	5
$X-Y$	-1	-2	-4	2	1	-1
P	1/8	0	3/8	2/8	2/8	0

(1) $Z_1=X+Y$ 的分布律为

$Z_1=X+Y$	-1	2	3
P	1/8	5/8	2/8

(2) $Z_2=X-Y$ 的分布律为

$Z_2=X-Y$	-4	-1	1	2
P	3/8	1/8	2/8	2/8

五. 二维离散型随机变量函数的分布

一般地，如果 (X, Y) 的概率分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i, \ j=1, \ 2, \cdots$$

记 $z_k(k=1,2,\ldots)$ 为 $Z=g(X,Y)$ 的所有可能的取值，则 Z 的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=P\{g(X,Y)=z_k\}=\sum_{g(x_i,y_j)=z_k} P\{X=x_i, Y=y_j\}, \quad k=1, \ 2, \cdots$$

例10.若X和Y相互独立，分别服从参数为λ_1和λ_2的泊松分布，证明 $Z=X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布。

证明： 首先写出 X 和 Y 的分布律

$$P\{X=i\}=\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1},\quad i=1,\ 2,\cdots \qquad P\{Y=j\}=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!},\quad j=1,\ 2,\cdots$$

易知 Z 的可能的取值为0,1,2….

于是

$$P\{Z=r\}=P\{X+Y=r\}=\sum_{i=0}^{r}P\{X=i,Y=r-i\}=\sum_{i=0}^{r}P\{X=i\}P\{Y=r-i\}$$

五. 二维离散型随机变量函数的分布

$$P\{Z=r\}=\sum_{i=0}^{r}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{r-i}}{(r-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{i!(r-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{r-i}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}C_r^i\lambda_1^i\lambda_2^{r-i}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^r}{r!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

即 $Z=X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布 $P(\lambda_1+\lambda_2)$。

称性质“同一类分布的独立随机变量和的分布仍属于此类分布”为此类分布具有可加性(再生性)。上例说明泊松分布具有可加性。

例11.设 X 和 Y 相互独立，$X\sim b(n, p)$，$Y\sim b(m, p)$，求 $Z=X+Y$ 的分布。

解：首先写出 X 和 Y 的分布律为

$P\{X=i\}=C_n^i p^i(1-p)^{n-i}$，$i=1, 2,\cdots,n$ $P\{Y=j\}=C_m^j p^j(1-p)^{m-j}$，$j=1, 2,\cdots,m$

易知 Z 的可能的取值为$0,1,2\ldots, n+m$。于是，对任意的 k，$0\le k\le n+m$

$$P\{Z=k\}=P\{X+Y=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\}$$

由于 $i>n$ 时，$\{X=i\}$ 为不可能事件，所以只需考虑 $i\le n$；

同时$k-i>m$时，$\{Y=k-i\}$为不可能事件，所以只需考虑$i\ge k-m$。

因此，令 $a=\max(0,k-m),b=\min(n,k)$

五. 二维离散型随机变量函数的分布

$$P\{Z=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\}=\sum_{i=a}^{b}P\{X=i,Y=k-i\}=\sum_{i=a}^{b}P\{X=i\}P\{Y=k-i\}$$

$$=\sum_{i=a}^{b}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}C_m^{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)}=p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=a}^{b}C_n^iC_m^{k-i}$$

$$=C_{n+m}^k p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=a}^{b}\frac{C_n^iC_m^{k-i}}{C_{n+m}^k}=C_{n+m}^k p^k(1-p)^{n+m-k}$$

利用超几何分布分布律的归一性得 $\sum_{i=a}^{b}\frac{C_n^iC_m^{k-i}}{C_{n+m}^k}=1$ **即** $X+Y\sim b(n+m,p)$。

按二项分布的直观背景

X表示在n次独立重复试验中事件A出现的次数，每次试验中A出现的概率为p。

Y表示在m次独立重复试验中事件A出现的次数，每次试验中A出现的概率为p。

故$Z=X+Y$表示在$n+m$次独立重复试验中事件A出现的次数，于是 $Z\sim b(n+m,p)$。

此例说明在参数 p 相同的情况下，二项分布具有可加性。

作业： 19,22,23,24,31,34

第 11 讲

谢谢聆听