第三部分 代数结构

- 3代数结构
  - ch9 代数系统
    - 9.1二元运算及其性质
    - 9.2代数系统
    - 9.3代数系统的同态与同构
  - ch10 群与环
    - 10.1群G的定义与性质
    - 10.2子群H与群G的陪集分解
    - 10.3循环群与置换群
    - 10.4环与域
  - ch11 格与布尔代数
    - 11.1格的定义及性质
    - 11.2分配格、有补格与布尔代数

第十一章 格与布尔代数

- 主要内容
  - 11.1格的定义及性质
  - 11.2分配格、有补格与布尔代数

第十一章 格与布尔代数

- 主要内容
  - 11.1格的定义及性质
  - 11.2分配格、有补格与布尔代数

11.1 格的定义与性质

- 定义11.1 设$<S, \preccurlyeq>$是偏序集，如果$\forall x,y \in S$，$\{x,y\}$都有最小上界（上确界）和最大下界（下确界），则称S关于偏序$\preccurlyeq$作成一个格.
  - 求$\{x,y\}$ 最小上界和最大下界看成 x 与 y 的二元运算$\vee$和$\wedge$，称为保联和保交.
- 通常把在偏序关系的基础上定义的格称为偏序格.

定义7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$ 【回看】

(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立, 则称$y$为$B$的上界

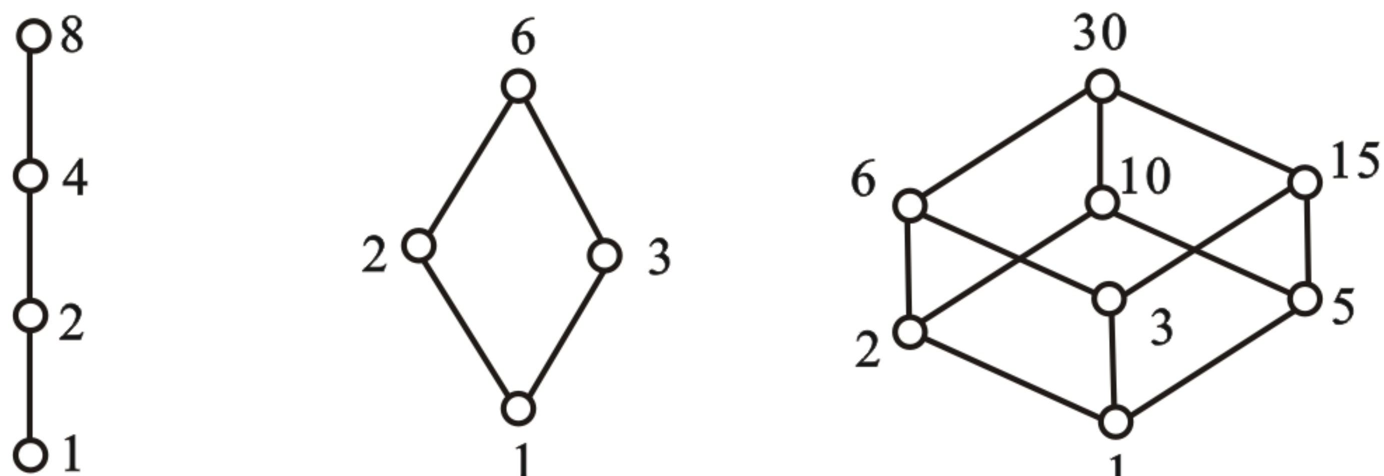
(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立, 则称$y$为$B$的下界

(3) 令$C=\{y \mid y$为B的上界$\}$, C的最小元为B的最小上界或上确界

(4) 令$D=\{y \mid y$为B的下界$\}$, D的最大元为B的最大下界或下确界

实例

- **例1** 设n是正整数，S_n是n的正因子的集合. D为整除关系，则偏序集$<S_n, D>$构成格，称为正因子格. $\forall x,y\in S_n$，$x\vee y$是lcm(x,y)，即x与y的最小公倍数. $x\wedge y$是gcd(x,y)，即x与y的最大公约数.



(S_8,D) (S_6,D) (S_{30},D)

实例

例2 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) $<P(B),\subseteq>$，其中$P(B)$是集合B的幂集.

(2) $<Z,\leq>$，其中Z是整数集，≤为小于或等于关系.

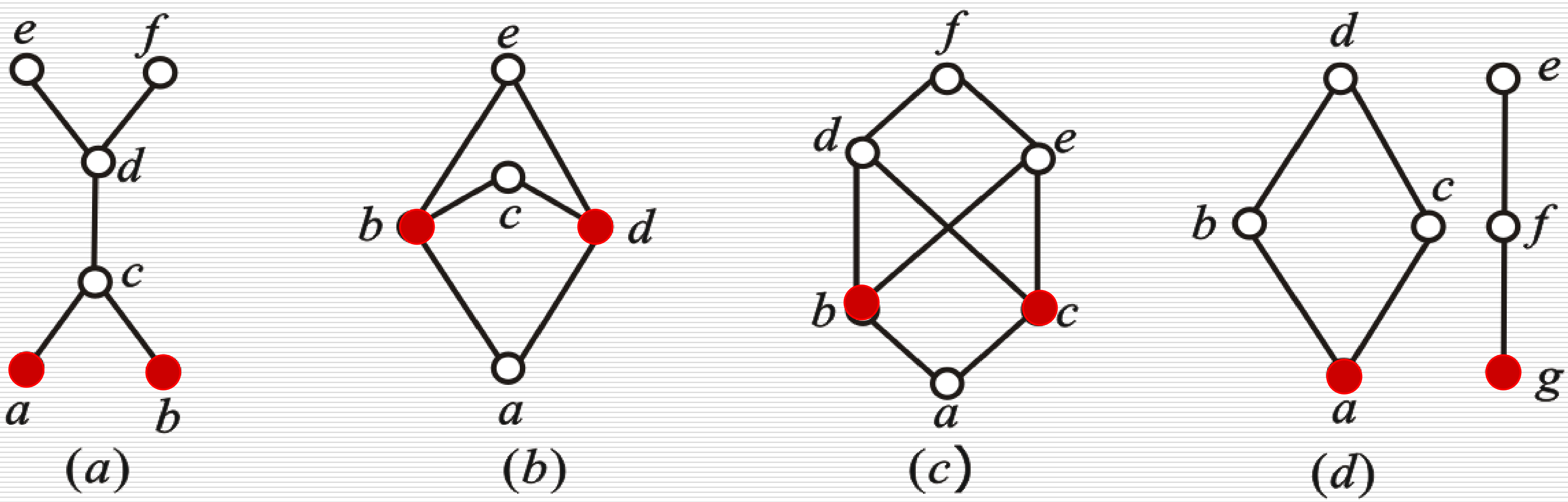
- 解：

(1)是格. $\forall x,y\in P(B)$，$x\vee y$就是$x\cup y$，$x\wedge y$就是$x\cap y$. 称为幂集格.

(2) 是格. $\forall x,y\in Z$，$x\vee y=\max(x,y)$，$x\wedge y=\min(x,y)$.

实例

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.判断这些偏序集是否构成格，并说明理由



答：都不是格. 都可以找到两个结点缺少最大下界或最小上界。

补充：由B生成的子群

- 设G为群，任取两个子群H_1和H_2，一般来说$H_1 \cup H_2$不是G的子群，而只是G的子集。
- 设B是G的子集，将G的所有包含B的子群的交记作$<B>$，即：

$$<B> = \cap\{ H \mid B \subseteq H \wedge H \le G \}$$

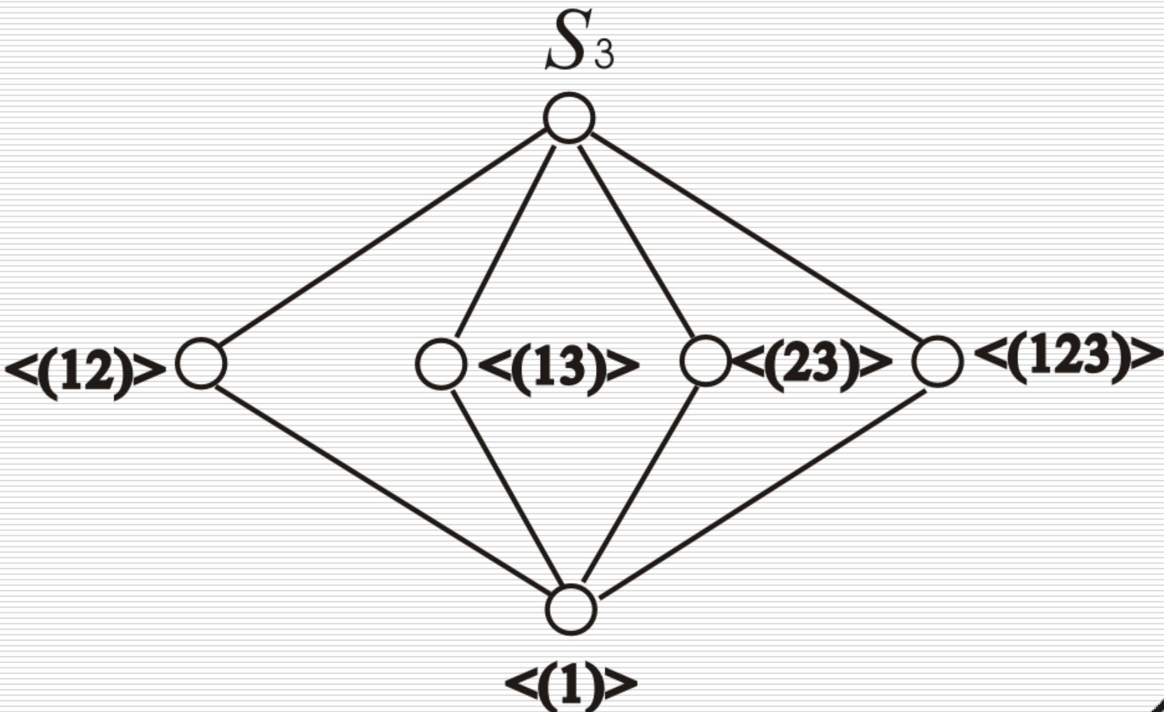
易见$<B>$是G的子群，称为由B生成的子群

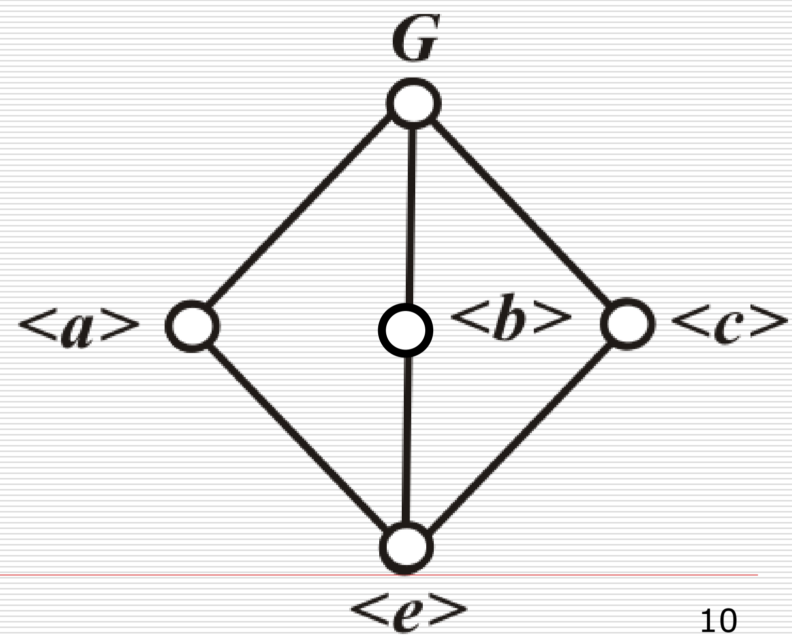
【回看】设G是群，H,K是G的子群. 则
(1) $H \cap K$也是G的子群
(2) $H \cup K$是G的子群当且仅当 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$

实例：子群格

- 例3 设G是群，$L(G)$是G 的所有子群的集合.
  即 $$L(G) = \{ H \mid H \le G \},$$
  对任意的$H_1, H_2 \in L(G)$，$H_1 \cap H_2$是G 的子群，$\langle H_1 \cup H_2 \rangle$是由$H_1 \cup H_2$生成的子群（即包含着$H_1 \cup H_2$的最小子群）.
- 在$L(G)$上定义包含关系$\subseteq$，则$L(G)$关于包含关系构成一个格，称为G的子群格.
  在 $L(G)$中，
  $$H_1 \wedge H_2 \text{ 就是 } H_1 \cap H_2$$
  $$H_1 \vee H_2 \text{ 就是 } \langle H_1 \cup H_2 \rangle$$

实例：子群格





格的性质：对偶原理

- 定义11.2 设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题. 令 f^* 是将 f 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题. 称 f^* 为 f 的对偶命题.
- 例如, 在格中令 f 是 $(a \vee b) \wedge c \preccurlyeq c$

  f^* 是 $(a \wedge b) \vee c \succcurlyeq c$

格的性质：对偶原理

- **格的对偶原理** :设 f 是含有格中元素以及符号$=,\preccurlyeq,\succcurlyeq,\vee$和$\wedge$等的命题. 若 f 对一切格为真, 则 f 的对偶命题 f^*也对一切格为真.
- 例如, 如果对一切格L都有 $\forall a,b\in L,\ a\wedge b\preccurlyeq a$, 那么对一切格$L$都有 $\forall a,b\in L,\ a\vee b\succcurlyeq a$
- 注意：对偶是相互的，即 $(f^*)^*=f$

格的性质：算律

- **定理11.1** 设$<L, \preccurlyeq>$是格, 则运算$\vee$和$\wedge$适合交换律、结合律、幂等律和吸收律, 即

(1) $\forall a,b \in L$ 有

$$a \vee b = b \vee a,\ \ a \wedge b = b \wedge a$$ （交换律）

(2) $\forall a,b,c \in L$ 有

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$ （结合律）

(3) $\forall a \in L$ 有

$$a \vee a = a,\ \ a \wedge a = a$$ （幂等律）

(4) $\forall a,b \in L$ 有

$$a \vee (a \wedge b) = a,\ \ a \wedge (a \vee b) = a$$ （吸收律）

定理11.1的证明

(1)交换律的证明：

$a\vee b$是$\{a, b\}$的最小上界, $b\vee a$是$\{b, a\}$的最小上界.

由于$\{a, b\} = \{b, a\}$, 所以 $a\vee b = b\vee a$.

由对偶原理, $a\wedge b = b\wedge a$.

(2)结合律的证明：

由最小上界的定义有: $(a\vee b)\vee c \succcurlyeq a\vee b \succcurlyeq a$ (1)

$(a\vee b)\vee c \succcurlyeq a\vee b \succcurlyeq b$ (2)

$(a\vee b)\vee c \succcurlyeq c$ (3)

由式(2)和(3)有 $(a\vee b)\vee c \succcurlyeq b\vee c$ (4)

由式(1)和(4)有 $(a\vee b)\vee c \succcurlyeq a\vee(b\vee c)$

同理可证 $(a\vee b)\vee c \preccurlyeq a\vee(b\vee c)$

根据反对称性 $(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c)$

由对偶原理 $(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$

定理11.1的证明

(3)幂等律的证明：

显然 $a \vee a \succcurlyeq a$,

又由 $a \preccurlyeq a$，可得 $a \vee a \preccurlyeq a$

根据反对称性有$a \vee a = a$

由对偶原理, $a \wedge a = a$ 得证.

(4)吸收律的证明：

显然 $a \vee (a \wedge b) \succcurlyeq a$ (5)

又由 $a \preccurlyeq a$, $a \wedge b \preccurlyeq a$ 可得

$a \vee (a \wedge b) \preccurlyeq a$ (6)

由式(5)和(6) 可得 $a \vee (a \wedge b) = a$

根据对偶原理 $a \wedge (a \vee b) = a$

格作为代数系统的定义

- 定理11.2 设$<S,*,\circ>$是具有两个二元运算的代数系统, 若对于$*$和$\circ$运算适合交换律、结合律、吸收律, 则可以适当定义S中的偏序 $\preccurlyeq$,使得$<S,\preccurlyeq>$ 构成格, 且$\forall a,b\in S$ 有

$$a\wedge b = a*b, \quad a\vee b = a\circ b$$

- 证明省略.
- 根据定理11.2, 可以给出格的另一个等价定义:

定义11.3 设$<S, *, \circ>$是代数系统, $*$和$\circ$是二元运算, 如果$*$和$\circ$满足交换律、结合律和吸收律, 则$<S, *,\circ>$构成格.

补充：引理

引理 设$<S, *, \circ>$是代数系统, $*$和$\circ$是二元运算, 如果$*$和$\circ$都满足吸收律, 则$*$和$\circ$都满足幂等律.

- 证明：对任意$a \in S$,

$$a*a$$
$$= a*(a \circ (a*a)) \quad // \text{吸收律}$$
$$= a$$

同理可证 $a \circ a = a$

格的性质：序与运算的关系

- **定理11.3** 设L是格, 则$\forall a,b \in L$有

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

证 (1) 先证 $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge b = a$

由 $a \preccurlyeq a$ 和 $a \preccurlyeq b$ 可知 a 是$\{ a,b \}$的下界, 故 $a \preccurlyeq a \wedge b$.

显然有$a \wedge b \preccurlyeq a$. 由反对称性得 $a \wedge b = a$.

(2) 再证 $a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b = b$

根据吸收律有 $b = b \vee (b \wedge a)$

由 $a \wedge b = a$ 和上面的等式得 $b = b \vee a$, 即 $a \vee b = b$.

(3) 最后证 $a \vee b = b \Rightarrow a \preccurlyeq b$

由 $a \preccurlyeq a \vee b$ 得 $a \preccurlyeq b$

格的性质：保序

- **定理11.3** 设L是格, $\forall a,b,c,d \in L$，若$a \preccurlyeq b$ 且 $c \preccurlyeq d$, 则 $a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$, $a \vee c \preccurlyeq b \vee d$

证明： $a \wedge c \preccurlyeq a \preccurlyeq b$, $a \wedge c \preccurlyeq c \preccurlyeq d$

因此 $a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$. 同理可证 $a \vee c \preccurlyeq b \vee d$

例4 设L是格, 证明$\forall a,b,c \in L$有

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

证明：由 $a \preccurlyeq a$, $b \wedge c \preccurlyeq b$ 得 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq a \vee b$ //定理11.3

由 $a \preccurlyeq a$, $b \wedge c \preccurlyeq c$ 得 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq a \vee c$ //定理11.3

从而得到 $a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

注意：一般说来, 格中的$\vee$和$\wedge$运算并不互相满足分配律.

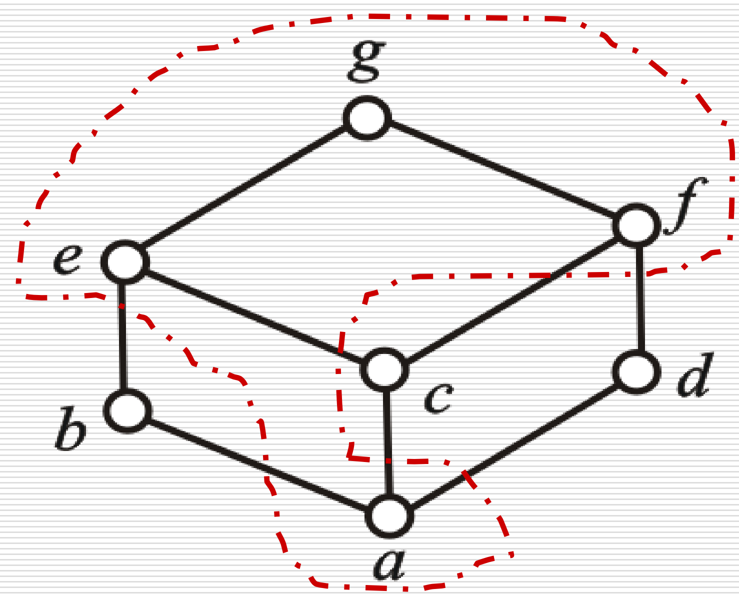
子格

- **定义11.4** 设$<L,\wedge,\vee>$是格, S是L的非空子集, 若S关于L中的运算$\wedge$和$\vee$仍构成格, 则称S是L的子格。

例5 设格L如图所示. 令

$S_1=\{a, e, f, g\}$,

$S_2=\{a, b, e, g\}$



S_1不是L的子格, 因为$e, f\in S_1$

但 $e\wedge f = c\notin S_1$.

S_2是L的子格.

11.1格的定义及性质（回顾）

- 11.1格的定义及性质
  - 定义：偏序集中的任意两个元素都有最小上界和最大下界
  - 性质
    - 对偶性
    - 算律
      - 交换律
      - 结合律
      - 吸收律
      - 幂等律
    - $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$
    - 若$a \preccurlyeq b$ 且 $c \preccurlyeq d$,
      则 $a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d, a \vee c \preccurlyeq b \vee d$
  - 子格

第十一章 格与布尔代数

- 主要内容
  - **11.1格的定义及性质**
  - **11.2分配格、有补格与布尔代数**

11.2 分配格、有补格与布尔代数

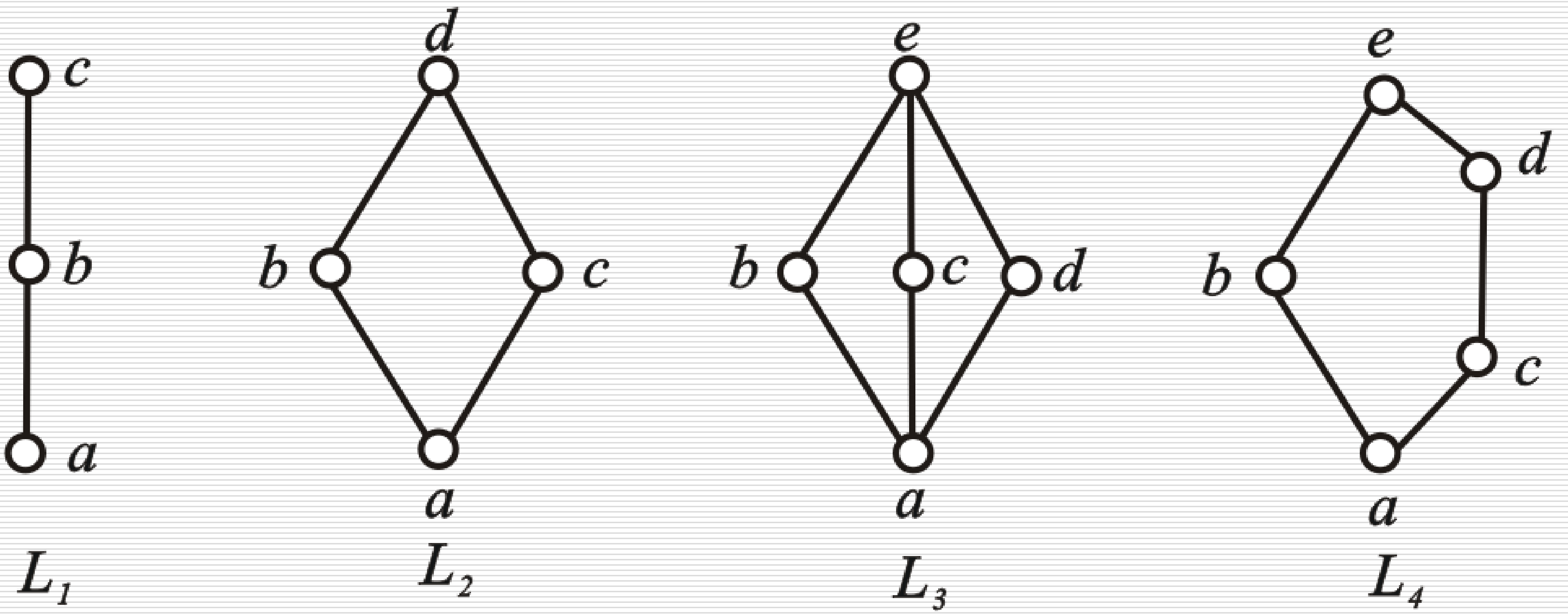
- **定义11.5** 设$<L,\wedge,\vee>$是格, 若$\forall a,b,c\in L$,有

$$a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

则称L为分配格.

实例



- L_1 和 L_2 是分配格, L_3 和 L_4不是分配格.
- 称 L_3为钻石格, L_4为五角格.

分配格的判别及性质

- **定理11.5** 设L是格, 则L是分配格当且仅当L不含有与钻石格或五角格同构的子格.

  【证明省略.】

- **推论**

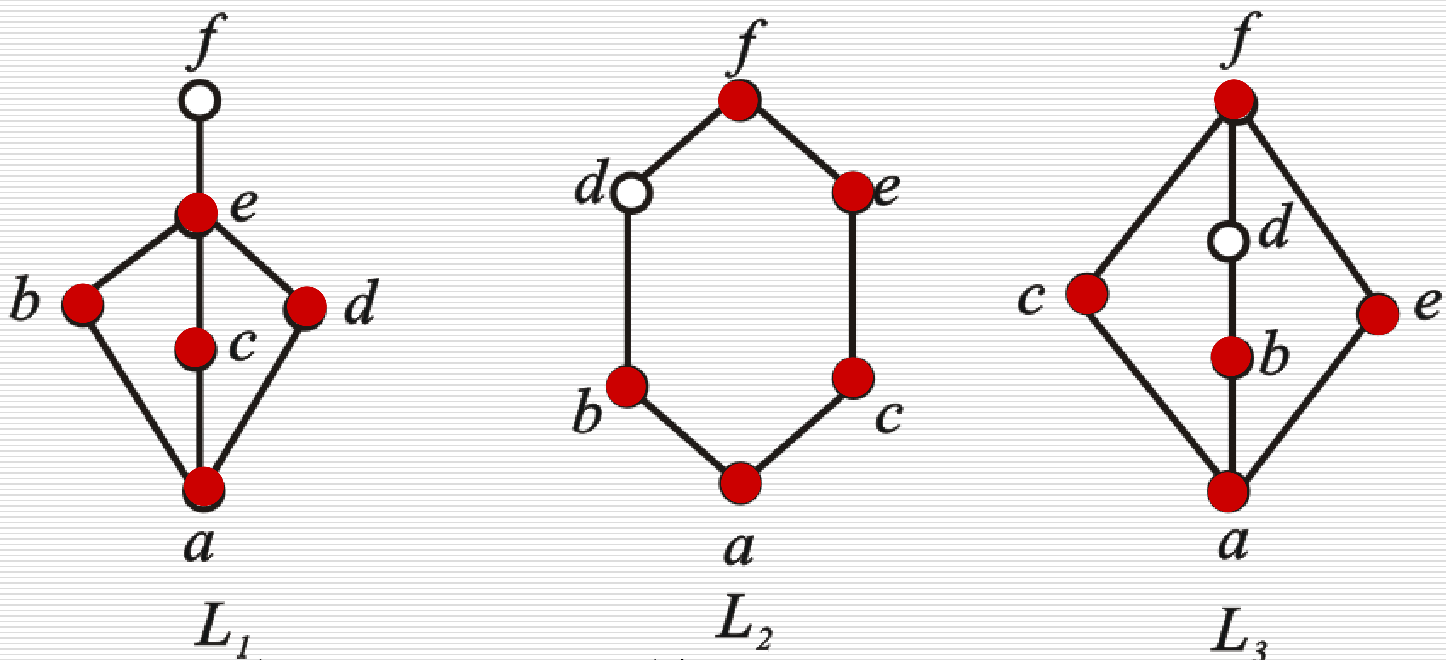
  (1) 小于五元的格都是分配格.

  (2) 任何一条链都是分配格.

若 <A, ≼>是一个偏序集，　【回看】
在A的一个子集中，如果每两个元素都是有关系的，则称这个子集为链；
在A的一个子集中，如果每两个元素都是无关的，则称这个子集为反链；
约定，若A的子集只有单个元素，则这个子集既是链又是反链。

实例

- **例6** 说明图中的格是否为分配格, 为什么?



- **解:** 都不是分配格.

  L_1 和L_3存在同构于钻石格的子格,

  L_2存在同构于五角格的子格

全上界、全下界

- 定义11.6 设L是格,
  - (1) 若存在$a\in L$使得$\forall x\in L$有 $a \preccurlyeq x$, 则称a为L的全下界
  - (2) 若存在$b\in L$使得$\forall x\in L$有 $x \preccurlyeq b$, 则称b为L的全上界
- 说明:
  - 格L若存在全下界或全上界, 一定是惟一的.
  - 一般将格L的全下界记为0, 全上界记为1.

有界格

- **定义11.7** 设L是格,若L存在全下界和全上界,则称L 为有界格, 一般将有界格L记为$<L,\wedge,\vee,0,1>$.

- **定理11.6** 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格, 则$\forall a\in L$有$a\wedge 0 = 0$, $a\vee 0 = a$, $a\wedge 1 = a$, $a\vee 1 = 1$

注意

- 有限格$L=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$是有界格，$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$是$L$的全下界，$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$是$L$的全上界.
- 0是关于$\wedge$运算的零元，$\vee$运算的单位元；1是关于$\vee$运算的零元，$\wedge$运算的单位元.
- 对于涉及到有界格的命题，如果其中含有全下界0或全上界1，在求该命题的对偶命题时，必须将0替换成1，而将1替换成0.

有界格中的补元

- 定义11.8 设<L,∧,∨,0,1>是有界格, $a\in L$, 若存在$b\in L$ 使得

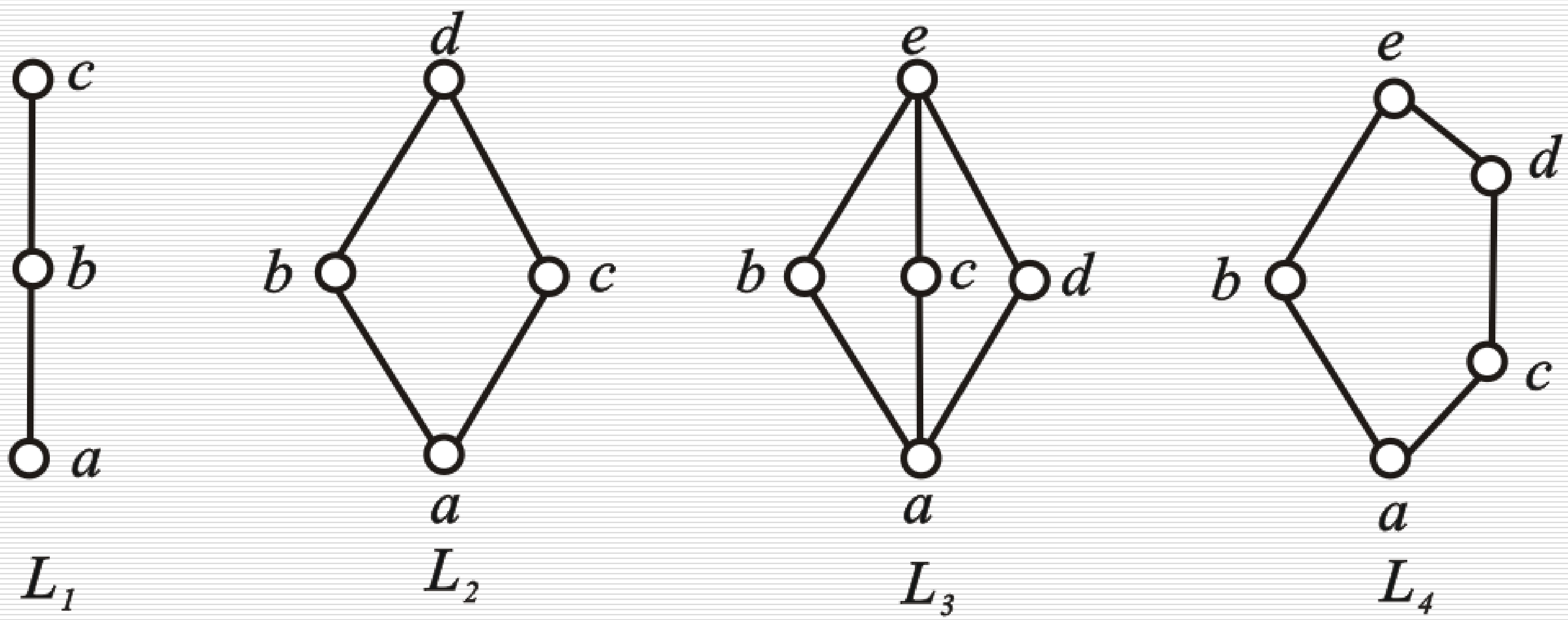
$$a\wedge b = 0 \text{ 和 } a\vee b = 1$$

成立, 则称b是a的补元.

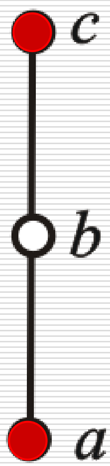
- 注意：若b是a的补元, 那么a也是b的补元. a和b互为补元.

实例

- 例7 考虑下图中的格. 针对不同的元素，求出所有的补元.

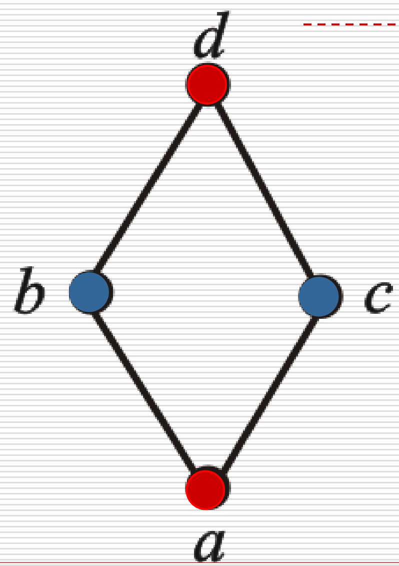


实例解答



L_1

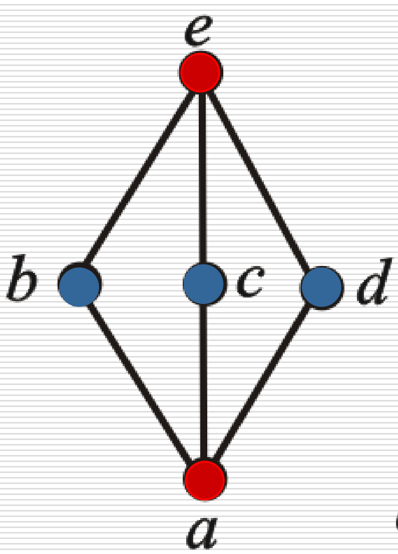
- (1) L_1中 a 与 c 互为补元, 其中 a 为全下界, c为全上界, b 没有补元.



L_2

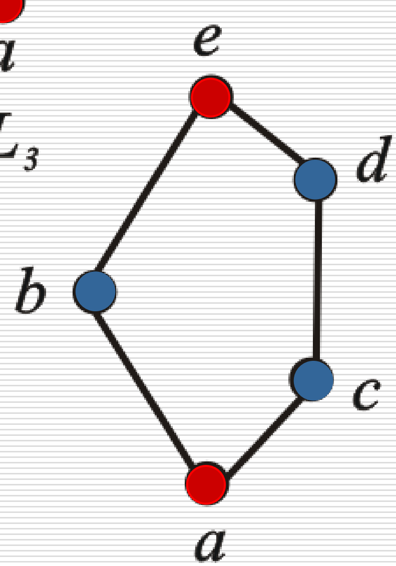
- (2) L_2中 a 与 d 互为补元, 其中 a 为全下界, d 为全上界, b与 c 也互为补元.

实例解答



L_3

- (3) L_3中a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d； c 的补元是 b 和 d ; d 的补元是 b 和 c； b, c, d 每个元素都有两个补元.



L_4

- (4) L_4中 a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d； c 的补元是 b； d 的补元是 b .

有界分配格的补元惟一性

- **定理11.7** 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界分配格. 若L中元素 a 存在补元, 则存在惟一的补元.

- 证 假设 c 是 a 的补元, 则有

$$a\vee c = 1,\ a\wedge c = 0,$$

又知 b 是 a 的补元, 故

$$a\vee b = 1,\ a\wedge b = 0$$

从而得到 $a\vee c = a\vee b$, $\underline{a\wedge c = a\wedge b}$,

由于L是分配格, 故

$$b = b\wedge(a\vee b) = b\wedge(a\vee c) = \underline{(b\wedge a)}\vee(b\wedge c)$$

$$c = (a\vee c)\wedge c = (a\vee b)\wedge c = \underline{(a\wedge c)}\vee(b\wedge c)$$

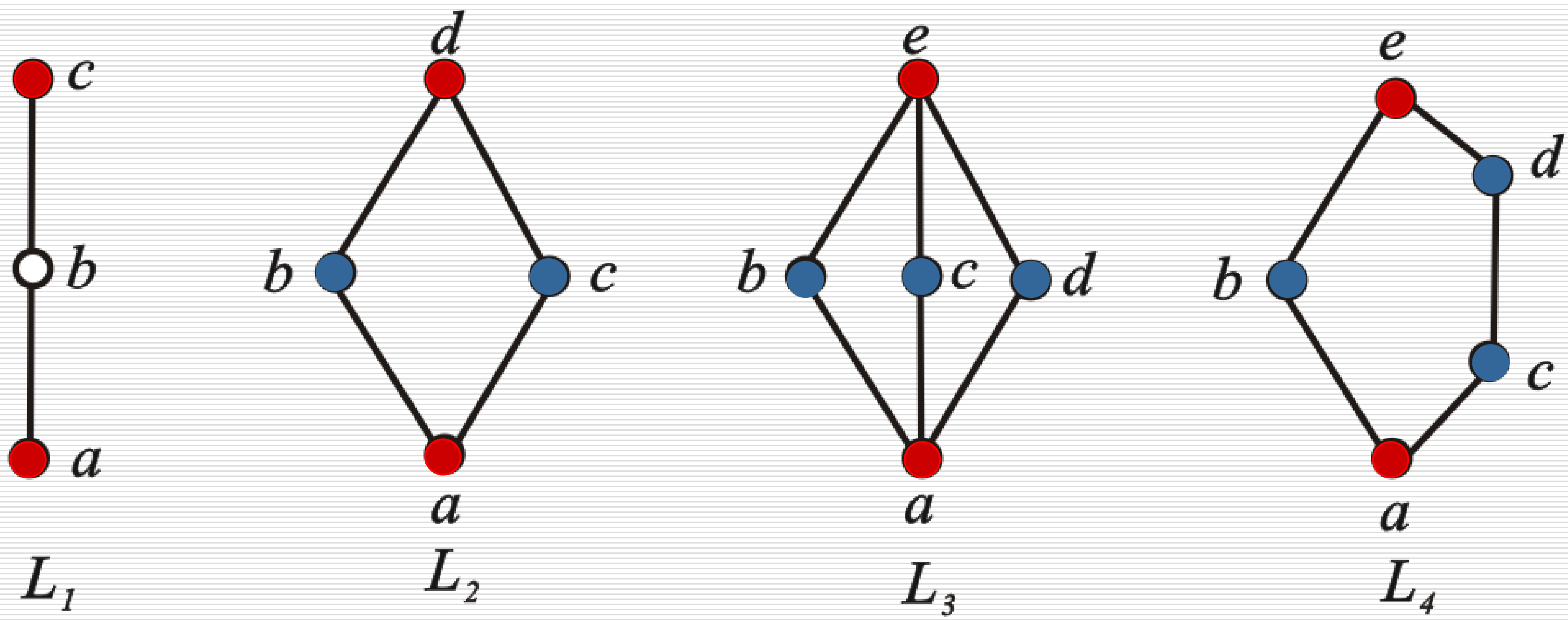
故，$b = c$

有界分配格的补元惟一性

- 注意:
  - 在任何有界格中, 全下界**0**与全上界**1**互补. 对于一般元素, 可能存在补元, 也可能不存在补元. 如果存在补元, 可能是惟一的, 也可能是多个补元.
  - 但是，对于有界分配格, 如果元素存在补元, 一定是惟一的.

有补格的定义

- **定义11.9** 设<L,∧,∨,0,1>是有界格，若L中所有元素都有补元存在, 则称L为有补格.

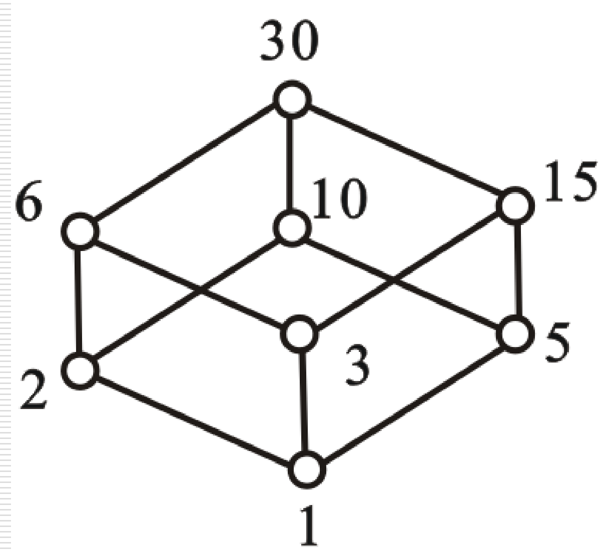


- 图中的L_2, L_3和L_4是有补格, L_1不是有补格.

布尔代数的定义

- **定义11.10** 如果一个格是有补分配格, 则称它为布尔格或布尔代数. 布尔代数标记为 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$, $'$为求补运算.

例8 设 $S_{30}=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ 是30的正因子集合, gcd表示求最大公约数的运算, lcm表示求最小公倍数的运算。问: $<S_{30}$, gcd, lcm$>$是否构成布尔代数? 为什么?



(S_{30},D)

实例解答

- 解　(1) 不难验证S_{30}关于gcd 和 lcm 运算构成格. (略)

(2) 验证分配律 $\forall x, y, z \in S_{30}$ 有

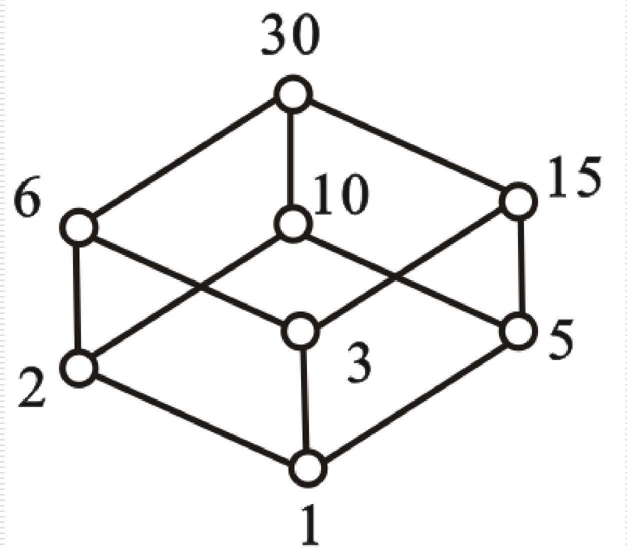
gcd(x, lcm(y, z)) = lcm(gcd(x, y), gcd(x, z))

(3) 验证它是有补格:

1为全下界, 30为全上界;

1和30、 2和15、 3和10、5和6互为补元。

从而证明了<S_{30}, gcd, lcm>为布尔代数.



(S_{30},D)

实例：集合代数

- 例9 设B为任意集合, 证明B的幂集格$<P(B), \cap, \cup, \sim, \varnothing, B>$构成布尔代数, 称为集合代数.

- 证 (1) $P(B)$关于$\cap$和$\cup$构成格, 因为$\cap$和$\cup$运算满足交换律, 结合律和吸收律.

(2) 由于$\cap$和$\cup$互相可分配, 因此$P(B)$是分配格.

(3) 全下界是空集$\varnothing$, 全上界是B.

(4) 根据绝对补的定义, 取全集为B, $\forall x \in P(B)$, $\sim x$是x的补元.

从而证明$P(B)$是有补分配格, 即布尔代数.

布尔代数的性质

- **定理11.8** 设<B, $\wedge$, $\vee$, $'$, 0, 1>是布尔代数, 则
  (1) $\forall a \in B$, $(a')' = a$.
  (2) $\forall a,b \in B$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$
  （德·摩根律）
- 证 (1)即证： a'的补元是a
  $(a')'$是a'的补元, a也是a'的补元.
  由补元惟一性得$(a')'=a$.

证明（续）

- 证(2)： $\forall a,b \in B$,

$$(a\wedge b)' = a'\vee b', \quad (a\vee b)' = a'\wedge b'$$

证明：

$(a\wedge b)\vee(a'\vee b')$

$= (a\vee a'\vee b')\wedge(b\vee a'\vee b')$

$= (1\vee b')\wedge(a'\vee 1)$

$= 1\wedge 1$

$= 1$

$(a\wedge b)\wedge(a'\vee b')$

$= (a\wedge b\wedge a')\vee(a\wedge b\wedge b')$

$= (0\wedge b)\vee(a\wedge 0)$

$= 0\vee 0$

$= 0$

$a'\vee b'$是$a\wedge b$的补元,

根据补元惟一性有$(a\wedge b)' = a'\vee b'$,

同理可证 $(a\vee b)' = a'\wedge b'$.

- 注意：德摩根律对有限个元素也是正确的.

布尔代数作为代数系统的定义

- 定义11.11 设$\langle B, *, \circ \rangle$是代数系统, $*$和$\circ$是二元运算. 若$*$和$\circ$运算满足:

(1) 交换律, 即$\forall a,b \in B$有$a*b = b*a$, $a \circ b = b \circ a$

(2) 分配律, 即$\forall a,b,c \in B$有

$$a*(b \circ c) = (a*b) \circ (a*c), \quad a \circ (b*c) = (a \circ b) * (a \circ c)$$

(3) 同一律, 即存在$0,1 \in B$, 使得$\forall a \in B$有

$$a * 1 = a, \ a \circ 0 = a$$

(4) 补元律, 即$\forall a \in B$, 存在 $a' \in B$ 使得

$$a * a' = 0, \ a \circ a' = 1$$

则称 $\langle B, *, \circ \rangle$是一个布尔代数.

实例：命题代数

- 例10 设S为命题集合, 证明$<S, \wedge, \vee, \neg, 0, 1>$构成布尔代数, 称为命题代数.
- 证明：

(1) 交换律：$\wedge$和$\vee$满足交换律

(2) 分配律：$\wedge$和$\vee$互相可分配

(3) 同一律：存在$0,1\in S$, 使得$\forall a\in S$有

$$a\wedge 1 = a,\ a\vee 0 = a$$

(4) 补元律, $\forall a\in S$, 存在 $a'\in S$ 使得

$$a\wedge a' = 0,\ a\vee a' = 1$$

综上所述：$<S, \wedge, \vee, \neg, 0, 1>$构成布尔代数

有限布尔代数的结构

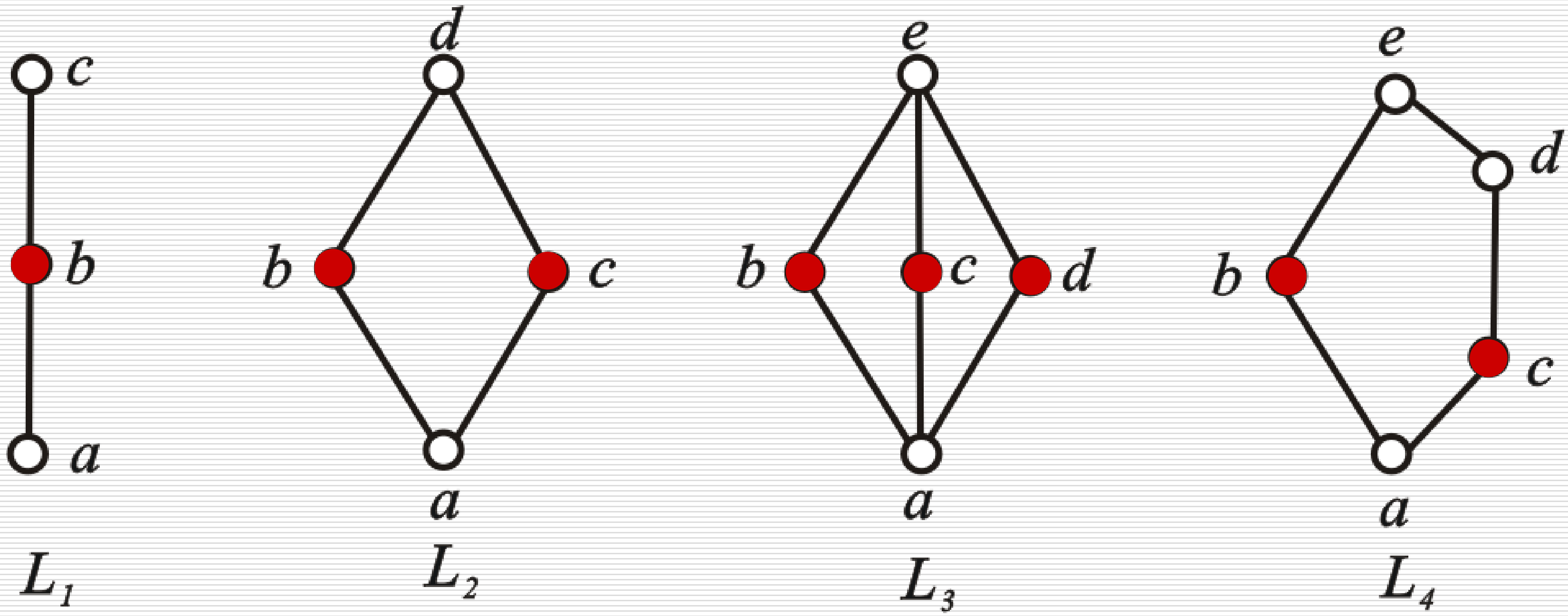
- **定义11.12** 设 L 是格, $0 \in L$, 若 $\forall b \in L$ 有

$$0 \prec b \preccurlyeq a \Leftrightarrow b = a$$

则称 a 是 L 中的原子.

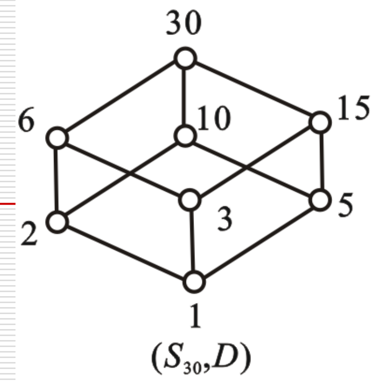
- **例11**
  - (1) L是正整数 n 的全体正因子关于整除关系构成的格, 则L的原子恰为n的全体素因子.
  - (2) 若L是B的幂集, 则L的原子就是B中元素构成的单元集

实例



- (3) 图中L_1的原子是b, L_2的原子是b, c, L_3的原子是b,c 和 d, L_4的原子是b,c.

有限布尔代数的表示定理



- **定理11.9** (有限布尔代数的表示定理)

  设B是有限布尔代数, A是B的全体原子构成的集合，则B同构于A的幂集代数$P(A)$.

  例：原子的集合A = {2,3,5}.
  幂集 $P(A)$={∅,{2},{3},{5},{2,3},{2,5},{3,5},{2,3,5}}.

- **推论1** 任何有限布尔代数的基数为2^n, $n \in$ N.

  证明 设B是有限布尔代数，A是B的所有原子构成的集合, 且 $|A| = n$, $n \in N$. 由定理11.9得 $B \cong P(A)$, 而 $|P(A)| = 2^n$, 所以$|B| = 2^n$.

- **推论2** 任何等势的有限布尔代数都是同构的.

有限布尔代数的表示定理

- 结论：
  - 有限布尔代数的基数都是2的幂,
  - 对于任何自然数n, 仅存在一个2^n元的布尔代数.

实例

- 例12 $<S_{30}$, gcd, lcm$>$是布尔代数. 它的原子是 2, 3和5, 因此原子的集合A = {2,3,5}.

幂集 $P(A)=\{\varnothing,\{2\},\{3\},\{5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,5\},\{2,3,5\}\}$.

幂集代数是$<P(A),\cap,\cup>$.

- 令 $f: S_{30} \to P(A)$,

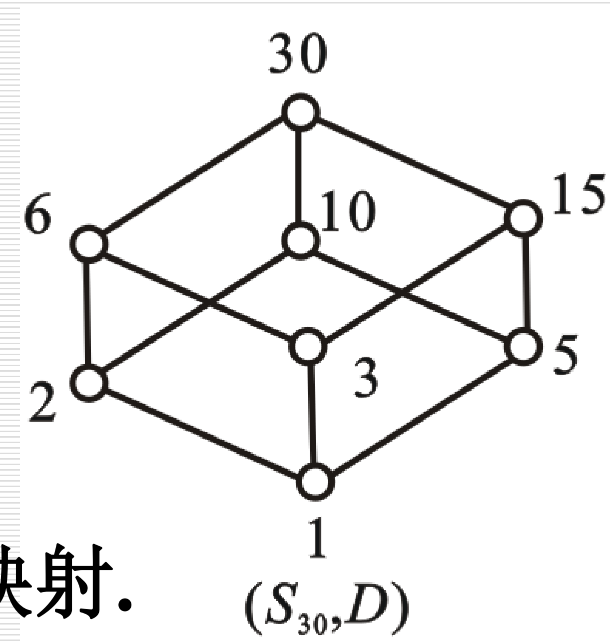
$f(1) = \varnothing$, $f(2) = \{2\}$,

$f(3) = \{3\}$, $f(5) = \{5\}$,

$f(6) = \{2,3\}$, $f(10) = \{2, 5\}$,

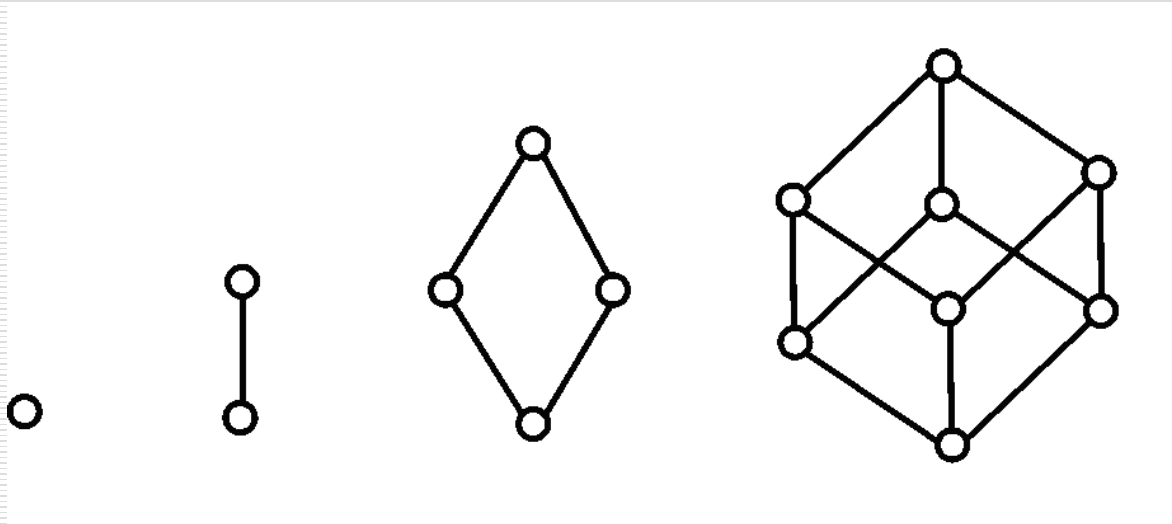
$f(15) = \{3, 5\}$, $f(30) = A$,

f 就是从S_{30}到幂集$P(A)$ 的同构映射.



实例

- 下图给出了 1 元, 2 元, 4 元和 8 元的布尔代数.



11.2分配格、有补格与布尔代数（回顾）

- 11.2分配格、有补格与布尔代数
  - 分配格
    - 钻石格, 五角格不是分配格
  - 有补格
    - 全上界、全下界
    - 有界格
      - $\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$
    - 有补格：有界格的所有元素都有补元
  - 布尔代数
    - 有补分配格

第十一章 格与布尔代数（回顾）

- 主要内容
  - **11.1格的定义及性质**
  - **11.2分配格、有补格与布尔代数**

第三部分 代数结构（回顾）

- 3代数结构
  - ch9 代数系统
    - 9.1二元运算及其性质
    - 9.2代数系统
    - 9.3代数系统的同态与同构
  - ch10 群与环
    - 10.1群G的定义与性质
    - 10.2子群H与群G的陪集分解
    - 10.3循环群与置换群
    - 10.4环与域
  - ch11 格与布尔代数
    - 11.1格的定义及性质
    - 11.2分配格、有补格与布尔代数