

Nociones de movimiento

Movimiento: cambio de posición en el espacio de un cuerpo de acuerdo con un observador. Proviene del latín *motus-us*, participio de *moveo*.

Decimos que un cuerpo está en movimiento con respecto a otro cuando su posición respecto a ese cuerpo cambia con el transcurrir del tiempo (Gutiérrez, 2010). Esta forma de definir el movimiento nos obliga a tomar siempre algún cuerpo (o, en general, un punto) como referencia con respecto al cual analizar el movimiento.

Sistema de referencia: cualquier cuerpo o punto que se selecciona para describir la posición o el movimiento de otros cuerpos (Gutiérrez, 2010).

Movimiento y reposo, entonces, son relativos, porque dependen de dónde se ubique el observador: para dos observadores diferentes un mismo cuerpo puede estar en reposo y en movimiento a la vez. Por tanto, al analizar el movimiento de un cuerpo es necesario indicar en relación con qué otros cuerpos se refiere el movimiento.

La mecánica es la rama de la Física que se encarga del estudio de los cuerpos en movimiento; se divide en cinemática y dinámica, como ya vimos en el bloque anterior.

La cinemática es la parte de la mecánica que estudia los diferentes tipos de movimiento de los objetos sin atender las causas que lo produjeron (Pérez, 2013).

En el siguiente dibujo, puedes observar, con respecto a la casa, se mueve el niño y el perro, mientras que los árboles y las montañas están en reposo; el niño está a la izquierda de la casa.

Con este ejemplo podemos concluir que el movimiento de un cuerpo dependerá de su punto de referencia.

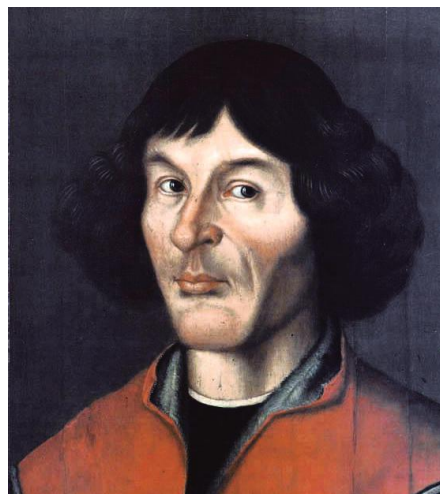


Así, cuando Nicolás Copérnico (1473-1543) construyó su modelo heliocéntrico para explicar el movimiento de los planetas, el Sol y la Tierra, señaló que: “el Sol está en reposo y, los planetas incluyendo a la Tierra, girarán alrededor de éste”, tenía como punto de referencia al sol y por lo tanto la Tierra y los planetas giraban alrededor de él. Pero si su punto de referencia hubiera sido la Tierra, hubiera notado que el Sol gira alrededor de ella. Ambos enunciados son válidos, dependen de dónde se sitúe el observador (Flores et al., 2004).

Casi siempre nuestros estudios del movimiento se hacen considerando a la Tierra como punto de referencia (un observador inmóvil en la superficie de la Tierra). Siempre que utilicemos otro punto de referencia hay que indicarlo expresamente.

“Además, dado que el Sol permanece parado, lo que aparece como movimiento del Sol es debido realmente más bien al movimiento de la Tierra”.

- **Nicolás Copérnico**



Un elemento del movimiento es la trayectoria:

Trayectoria de un cuerpo: línea imaginaria que recorre el cuerpo durante su movimiento. La trayectoria se determina siempre respecto al sistema de referencia.

En esta fotografía podemos observar la trayectoria que van formando los aviones por la estela de humo que dejan detrás de cada uno de ellos.



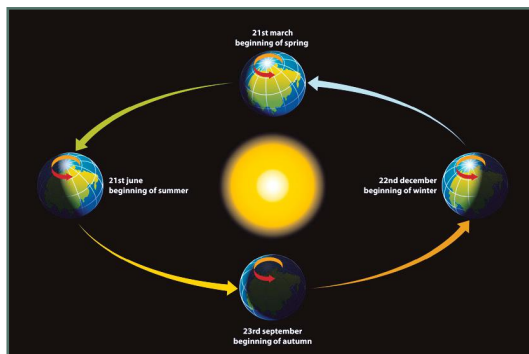
Cuando la trayectoria es una línea recta se dice que el movimiento es rectilíneo. Por ejemplo, en una carrera de 100 m, los competidores corren en línea recta, cada uno por su carril, hasta completar su recorrido.



Cuando la trayectoria es un círculo decimos que el movimiento es circular. Por ejemplo, si hacemos girar un objeto atado a una cuerda, se realiza un movimiento circular.



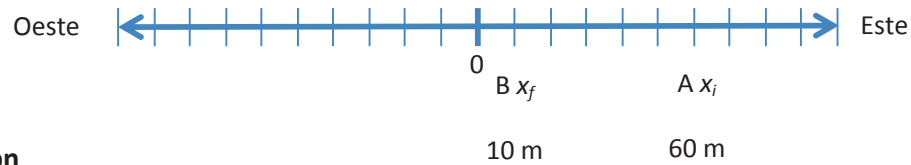
La trayectoria de un cuerpo lanzado con un ángulo y desde una superficie horizontal es una parábola. Por ejemplo, en el fútbol, al realizar un tiro libre por encima de la barrera, hay que pegarle al balón con cierta inclinación para que pueda pasar por encima de la barrera, haciendo el balón un movimiento parabólico.



La Tierra, en su movimiento de traslación alrededor del Sol, describe una elipse y se llama movimiento elíptico.

Ejemplo 2

Determina el desplazamiento del objeto que se mueve desde el punto A hasta el punto B.



Solución

$$\Delta x = x_f - x_i$$

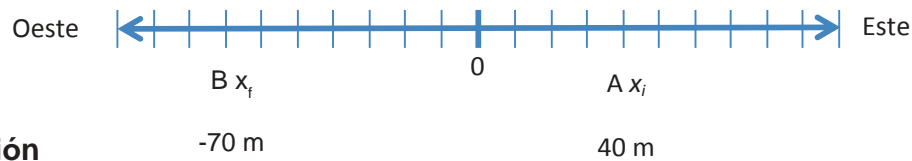
$$\Delta x = 10 \text{ m} - 60 \text{ m}$$

$$\Delta x = -50 \text{ m}$$

Como Δx es negativa, indica que va hacia el oeste.

Ejemplo 3

Determina el desplazamiento del objeto que se mueve desde el punto A hasta el punto B.



Solución

$$\Delta x = x_f - x_i$$

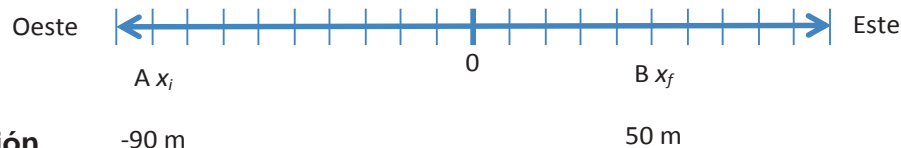
$$\Delta x = -70 \text{ m} - 40 \text{ m}$$

$$\Delta x = -110 \text{ m}$$

Como Δx es negativa, indica que va hacia el oeste.

Ejemplo 4

Determina el desplazamiento del objeto que se mueve desde el punto A hasta el punto B.



Solución

$$\Delta x = x_f - x_i$$

$$\Delta x = 50 \text{ m} - (-90 \text{ m})$$

$$\Delta x = 140 \text{ m hacia el este.}$$

Movimiento en una dimensión

Movimiento rectilíneo uniforme

A menudo, utilizamos indistintamente las palabras rapidez y velocidad. Pero en el estudio de la Física, cada una tiene un concepto en particular.

Rapidez: distancia recorrida por un objeto en cierto tiempo. Es una cantidad escalar, porque se define con una magnitud y una unidad de medida.

Su fórmula es:

$$\text{Rapidez} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}, \text{ esto es, } r = \frac{d}{t}, \text{ y sus unidades son m/s o km/h}$$

Por ejemplo: 15 km/h, 8 m/s.

Velocidad: desplazamiento que experimenta un cuerpo por unidad de tiempo; es una magnitud vectorial que tiene dirección y sentido (Gutiérrez, 2010).

Su fórmula es:

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}}, \text{ esto es, } \vec{v} = \frac{\vec{d}}{t}, \text{ y sus unidades son m/s o km/h.}$$

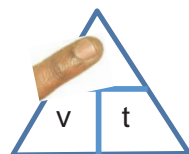
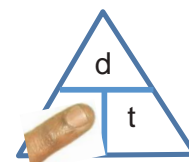
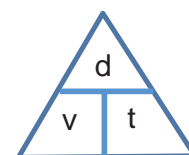
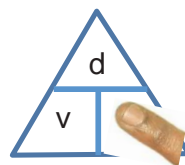
Por ejemplo: 125 km/h hacia México, 10 m/s al Sur.

Esta fórmula la podemos poner en un triángulo para calcular cualquiera de las 3 variables presentes, “tapando” la variable que queramos conocer.

Por ejemplo, si queremos velocidad (v), se tapa la v y queda $v = \frac{d}{t}$.

Si queremos conocer la distancia (d), se tapa la d y queda $d = (v)(t)$.

Si queremos tiempo (t), se tapa la t y queda $t = \frac{d}{v}$.



Analizaremos varios ejercicios de velocidad. Recuerda que las unidades siempre deben estar expresadas en la misma unidad de medida, de no ser así, tienes que realizar las conversiones correspondientes.

Ejemplo 5

Un corredor avanza 2 km en un tiempo de 15 min. Calcula su velocidad en km/h y en m/s.

Datos	Fórmula y despejes	Sustitución
$d = 2 \text{ km}$ $t = 15 \text{ min}$ $v = ?$	$v = -$	$v = \frac{\text{km}}{15 \text{ min}} = 0.1333 \frac{\text{km}}{\text{min}}$ $v = \left(0.1333 \frac{\text{km}}{\text{min}}\right) \left(\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}}\right) = 8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ $v = \left(8 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 2.22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Resultado: El corredor avanza 2 km en 15 min a una velocidad de 8 km/h o 2.22 m/s



Ejemplo 6

Un ciclista puede alcanzar en una bajada una velocidad de hasta 35 km/h. ¿Qué distancia recorre en una pendiente después de 2 min?

Datos	Fórmula y despejes	Sustitución
$v = 35 \text{ km/h}$ $t = 2 \text{ min}$ $d = ?$	$v = -$ $d = vt$	$v = \left(35 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}\right) = 583.3 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ $d = \left(583.3 \frac{\text{m}}{\text{min}}\right) \left(\frac{2 \text{ min}}{1}\right) = 1166.6 \text{ m}$

Resultado: El ciclista recorre 1,166.6 m en 2 min a una velocidad de 35 km/h.

Un auto viaja en una carretera a una velocidad constante de 120 km/h. ¿Cuánto tiempo le tomará llegar al poblado más cercano, que está a 180 km a esa misma velocidad?

Datos	Fórmula y despejes	Sustitución
$v = 120 \text{ km/h}$	$v = -$	$t = \frac{180 \text{ km}}{120 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1.5 \text{ h}$
$d = 180 \text{ km}$		
$t = ?$	$t = -$	

Resultado: Tomará 1 hora y media al auto llegar al pueblo viajando a una velocidad de 120 km/h.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Supongamos que un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta y cada segundo se registra que su velocidad aumenta (o disminuye) en 10 m/s de manera que al segundo 1 su velocidad es de 10 m/s, al segundo 2 es de 20 m/s, al 3^{er} es 30 m/s, al segundo 4 es 40 m/s y por último 5 s = 50 m/s. Con estos valores advertimos que la velocidad está variando en 10 m/s cada 1 s, esto es, que $a = 10 \text{ m/s}^2$

Un movimiento en donde la aceleración de un objeto es constante, se denomina movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (Cuéllar, 2013). Dicho de otro modo, en este tipo de movimiento la velocidad presenta variaciones iguales en tiempos iguales.

Aceleración: es el cambio de velocidad de un objeto o móvil en un intervalo de tiempo dado. Es una cantidad vectorial, porque consta de una magnitud o valor, dirección y sentido.

Su fórmula es:

$$\text{aceleración} = \frac{\text{cambio de velocidad}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{\text{velocidad final} - \text{velocidad inicial}}{\text{tiempo}}, \text{ esto es, } a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

Su unidad es $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, que se deriva de dividir las unidades de velocidad $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$

entre el tiempo (s), es decir $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, donde agregamos un 1 como

denominador de s y aplicando la ley de la herradura $\frac{\text{m}}{\text{s} \cdot \frac{\text{s}}{1}} = \text{m/s}^2$

La velocidad inicial (v_i) del cuerpo se define como la velocidad del móvil al inicio del intervalo de tiempo, y que si el móvil se encuentra en reposo, esta velocidad tiene un valor de cero. La velocidad final (v_f) se define como la velocidad al terminar el intervalo de tiempo.

Se considera que un móvil tiene una aceleración positiva cuando aumenta su velocidad. Si disminuye su velocidad tiene aceleración negativa (desaceleración o frenado). De igual modo se considera que un cuerpo no tiene aceleración ($a=0$) si está inmóvil o si se mueve con velocidad constante ($a = 0$).

Cuando se resuelven problemas donde esté involucrada una aceleración constante, es importante elegir la fórmula correcta y sustituir los datos conocidos. Los problemas se refieren frecuentemente al movimiento de un móvil que parte del reposo o que se detiene después de cierta velocidad.

Las siguientes son las fórmulas más utilizadas en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} \quad a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2d} \quad d = \left(\frac{v_i + v_f}{2} \right) t \quad d = v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

y de aquí se puede despejar cualquier variable según se necesite.

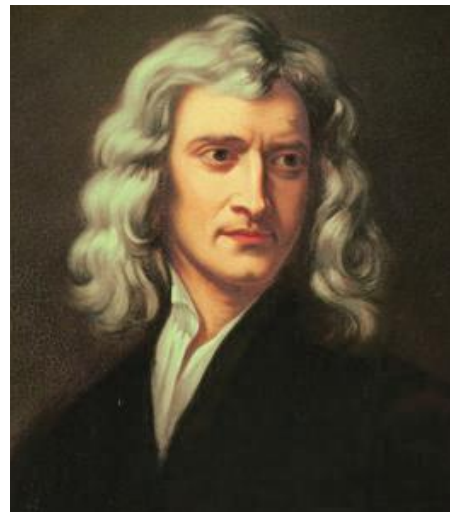
Ejemplo 8

Un autobús viaja en una carretera a una velocidad de 70 km/h y acelera durante 30 segundos hasta llegar a su límite de velocidad, que son 95 km/h. ¿Cuál fue su aceleración?

Datos	Fórmula y despejes	Sustitución
$v_i = 70 \text{ km/h}$ $v_f = 95 \text{ km/h}$ $t = 30 \text{ seg}$ $a = ?$	$a = \frac{v_f - v_i}{t}$	$v_i = \left(70 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) = 19.44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $v_f = \left(95 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) = 26.36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $a = \frac{26.36 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 19.44 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{30 \text{ s}}$ $a = 0.23 \text{ m/s}^2$

Resultado: El autobús tendrá una aceleración de 0.23 m/s^2 en los 30 s

“Lo que sabemos es una gota de agua;
lo que ignoramos es el océano.”
- **Sir Isaac Newton**



Ejemplo 9

Una tren viaja a una velocidad de 32 m/s y se detiene por completo después de haber recorrido 140 m. ¿Cuál fue su aceleración y en cuánto tiempo se detuvo?

Datos

$$v_i = 32 \text{ m/s}$$

$$v_f = 0 \text{ m/s}$$

$$d = 140 \text{ m}$$

$$a = ?$$

$$t = ?$$

Fórmula y despejes

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2d}$$

$$d = \left(\frac{v_i + v_f}{2} \right) t$$

$$t = \frac{d}{\left(\frac{v_i + v_f}{2} \right)}$$

Sustitución

$$a = \frac{\left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(32 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2(140 \text{ m})} = -3.66 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo indica que hay una desaceleración o frenado.

$$t = \frac{140}{\left(\frac{32 \text{ m/s} + 0 \text{ m/s}}{2}\right)} = 8.75 \text{ s}$$

Resultado: El tren bala tuvo una desaceleración de 3.66 m/s² en 8.75 s

Ejemplo 10

Un caballo parte del reposo y alcanza una velocidad de 15 m/s en un tiempo de 8 s. ¿Cuál fue su aceleración y qué distancia recorrió?

Datos

$$v_i = 0 \text{ m/s}$$

$$t = 8 \text{ s}$$

$$v_f = 15 \text{ m/s}$$

$$a = ?$$

$$d = ?$$

Fórmulas y despejes

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

$$d = \left(\frac{v_i + v_f}{2} \right) t$$

Sustitución

$$a = \frac{15 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{8 \text{ s}} = 1.875 \text{ m/s}^2$$

$$d = \left(\frac{0 + 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \right) (8 \text{ s}) = 60 \text{ m}$$

Resultado: El caballo tendrá una aceleración de 1.875 m/s² y recorre 60 m

Ejemplo 11

Una persona viaja en motocicleta a una velocidad de 3 m/s y acelera constantemente a razón de 0.4 m/s². ¿Qué distancia recorrerá después de 1 minuto? ¿Cuál será su velocidad final después de ese tiempo?

Datos

$$v_i = 3 \text{ m/s}$$

$$a = 0.4 \text{ m/s}^2$$

$$d = ?$$

$$t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$v_f = ?$$

Fórmulas y despejes

$$d = v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

$$a t = v_f - v_i$$

$$v_f = a t + v_i$$

Sustitución

$$d = \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(60 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(60 \text{ s})^2 = 900 \text{ m}$$

$$v_f = \left(0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(60 \text{ s}) + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Resultado: Esta persona recorrerá una distancia de 900 m con una velocidad final de 27 m/s

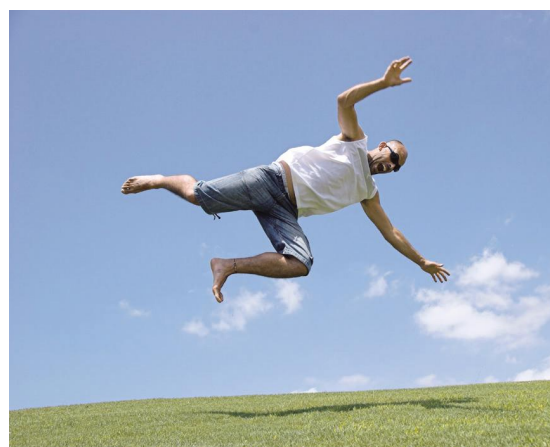
Caída libre

Algo que hemos aprendido desde que éramos niños es que los objetos caen cuando los soltamos. También hemos visto que los objetos no parecen caer siempre de la misma forma, ya que algunos lo hacen más rápido que otros.

Algunas especies de seres vivos han desarrollado, para su supervivencia, estrategias que les permiten caer de forma distinta a otras; por ejemplo, las ardillas voladoras y algunas semillas aprovechan la resistencia del aire para caer con menor rapidez que una piedra.

Si se logra reducir la fricción o fuerza que se opone al movimiento con el medio que los rodea (el aire para los ejemplos anteriores), y mientras no se apliquen otras fuerzas sobre el objeto más que su peso, se dice que éste presenta un movimiento en caída libre. En esas circunstancias, la ardilla voladora y la piedra caerán con la misma rapidez.

Aristóteles decía que los cuerpos más pesados caen primero que los ligeros, y Galileo Galilei decía que los cuerpos ligeros y pesados caen al mismo tiempo. ¿Tú qué piensas?



Al caer un cuerpo libremente, éste adquiere un movimiento acelerado; en condiciones de vacío perfecto todos los cuerpos caen al mismo tiempo, independientemente de su forma y su masa.

Dicha aceleración se llama aceleración de la gravedad y se representa por la letra g . Si la distancia no es grande, esta aceleración permanece constante durante la caída y su valor en la proximidad de la Tierra es 9.806 m/s^2 , que por convención tomaremos como 9.81 m/s^2 .

Puesto que la aceleración gravitacional es constante, se utilizan las mismas ecuaciones del movimiento, pero con la condición de que ya conocemos el valor de la aceleración g , que se sustituye en estas ecuaciones por la variable de la aceleración a .

En los problemas relacionados con caída libre, es importante determinar la dirección: si el movimiento es descendente (hacia abajo), se toma el valor de g como positivo, ya que los cuerpos tienden a caer por el efecto de la gravedad y son atraídos hacia el centro de la Tierra; si el movimiento es ascendente (hacia arriba), se toma el valor de g como negativo, ya que va en sentido contrario al de la gravedad.

Por lo tanto, las fórmulas utilizadas para caída libre quedan de la siguiente manera:

$$d = \left(\frac{v_f}{2} \right) t \quad v_f = v_i + gt \quad d = v_i t + \frac{1}{2}gt^2 \quad 2gh = v_f^2 - v_i^2$$

Es importante resaltar que cuando resolvemos este tipo de ejercicios, si “se suelta” un objeto, no se le está imprimiendo velocidad alguna, por lo que parte del reposo ($v_i = 0$), a menos que se indique que es lanzado con cierta velocidad, que se tomará como la velocidad inicial.

Ejemplo 12

Una persona deja caer una pelota de tenis desde lo alto de un edificio. Calcula su velocidad y posición después de 1, 2, 3 y 4 s, así como la velocidad con la que chocará con el piso.

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
$v_i = 0 \text{ m/s}$ $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ $t = 1, 2, 3, 4 \text{ s}$ $v_f = ?$	$v_f = gt + v_i$ $d = v_i t + \frac{1}{2}gt^2$ Como la piedra se suelta, la velocidad inicial es $v_i = 0$, por lo que las fórmulas se convierten en: $v_f = gt$ $d = \frac{1}{2}gt^2$	Segundo 1 $v_f = (9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}})(1 \text{ s}) = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $d = \frac{1}{2}(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(1 \text{ s})^2 = 4.91 \text{ m}$ Segundo 2 $v_f = (9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}})(2 \text{ s}) = 19.62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $d = \frac{1}{2}(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(2 \text{ s})^2 = 19.62 \text{ m}$ Segundo 3 $v_f = (9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}})(3 \text{ s}) = 29.43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $d = \frac{1}{2}(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(3 \text{ s})^2 = 44.14 \text{ m}$ Segundo 4 $v_f = (9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}})(4 \text{ s}) = 39.24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $d = \frac{1}{2}(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(4 \text{ s})^2 = 78.48 \text{ m}$

Resultado: La pelota recorrerá 4.91 m en 1 s con una v_f de 9.81 m/s, 19.62 m en 2 s con una v_f de 19.62 m/s, 44.14 m en 3 s con una v_f de 29.43 m/s, 78.48 m en 4 s con una v_f de 39.24 m/s.

Ejemplo 13

Un niño deja caer una piedra a un pozo de 20 m de profundidad. Calcula con qué velocidad llegará al fondo si tarda 8 s en hacerlo.

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
$v_i = 0 \text{ m/s}$ $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ $v_f = ?$ $t = 8 \text{ s}$	$v_f = gt + v_i$	$v_f = (9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(8 \text{ s}) + 0 \text{ m/s} = 78.48 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Resultado: La piedra llegará al fondo del pozo con una v_f de 78.48 m/s.

Ejemplo 14

Un niño lanza hacia abajo una piedra con una velocidad de 2 m/s desde lo alto de un árbol de 7 m de altura. Calcula en cuánto tiempo llegará al piso y con qué velocidad lo hará.

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
$v_i = 2 \text{ m/s}$	$2gd = v_f^2 - v_i^2$	
$d = 7 \text{ m}$	$2gd + v_i^2 = v_f^2$	
$g = 9.81 \text{ m/s}^2$	$v_f = \sqrt{2gd + v_i^2}$	$v_f = \sqrt{2\left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(7 \text{ m}) + \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 11.89 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
$t = ?$	$v_f = v_i + gt$	
$v_f = ?$	$v_f - v_i = gt$	
	$t = \frac{v_f - v_i}{g}$	$t = \frac{11.89 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1 \text{ s}$

Resultado: La piedra llegará al piso con una v_f de 11.89 m/s después de 1 s

Tiro vertical

Un movimiento contrario a la caída libre de los cuerpos es el tiro vertical, un movimiento totalmente opuesto y que puede verse cuando un objeto es lanzado hacia arriba, y al medir el tiempo que tarda en llegar a su altura máxima será exactamente el mismo en retornar en caída libre.

Cuando el objeto alcanza su altura máxima, su velocidad final es cero, debido a que se trata de un movimiento uniformemente desacelerado, ya que el factor principal para que el objeto frene paulatinamente es la gravedad, mismo factor que está implícito en la caída libre.



Ejemplo 15

Una bala es disparada hacia arriba con una velocidad de 50 m/s. Calcula su velocidad a los 4 segundos de haber sido disparada, además de la altura máxima que alcanzará y en cuánto tiempo lo hará.

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
$v_i = 50 \text{ m/s}$	$v_f = v_i - gt$	$v_{4s} = (50 \text{ m/s}) - (9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(4 \text{ s}) = 10.76 \text{ m/s}$
$t = 4 \text{ s}$	$v_f - v_i = -gt$	
$g = -9.81 \text{ m/s}^2$	$t = \frac{v_f - v_i}{-g}$	$t = \frac{(0 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - (50 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{-9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5.09 \text{ s}$
$v_{4s} = ?$	$d = \left(\frac{v_i + v_f}{2}\right)t$	$d = \left(\frac{50 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}\right)(5.09 \text{ s}) = 127.25 \text{ m}$
$d_{\text{max}} = ?$		

Resultado: La bala tendrá una velocidad de 10.76 m/s a los 4 s, y alcanzará una altura máxima de 127.25 m en 5.09 s.

Ejemplo 16

Una pelota de béisbol es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un montículo de 6 m con una velocidad de 18 m/s. Calcula:

- El tiempo necesario para que alcance su altura máxima
- La altura máxima que alcanza la pelota
- La velocidad con que pega en el piso

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
$v_i = 18 \text{ m/s}$	$v_f = v_i + gt$	Para el movimiento hacia arriba, la $v_f = 0$ en la altura máxima y g negativa
$d = 6 \text{ m}$	$v_f - v_i = gt$	
$g = -9.81 \text{ m/s}^2$	$t = \frac{v_f - v_i}{-g}$	$t = \frac{0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.83 \text{ s}$
$t = ?$		
$v_f = ?$	$d = v_i t - \frac{1}{2}gt^2$	$d = \left(18 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(1.83 \text{ s}) - \frac{1}{2}\left(-9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(1.83 \text{ s})^2 = 16.5 \text{ m}$
	$2gd = v_f^2 - v_i^2$	Para el movimiento descendente, se suman los 16.5 m y los 6 m del montículo y $v_i = 0$
	$2gd + v_i^2 = v_f^2$	$d = 16.5 \text{ m} + 6 \text{ m} = 22.5 \text{ m}$
	$v_f = \sqrt{2gd + v_i^2}$	
	$t = \frac{v_f - v_i}{g}$	$v_f = \sqrt{2\left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(22.5 \text{ m}) + \left(0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 21.01 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Resultado: La pelota alcanzará una altura máxima de 16.5 m en 1.83 s, y llegó al piso con una velocidad de 21.01 m/s

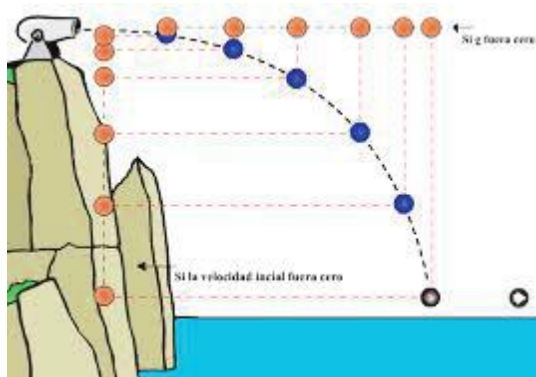
Movimiento en dos dimensiones

Hemos estudiado objetos que siguen un movimiento rectilíneo de manera constante, objetos que son lanzados hacia arriba o hacia abajo, o que se dejan caer desde cierta altura. Ahora estudiaremos los casos cuando los objetos son lanzados libremente, en una dirección que no sea vertical, pero que sí estén sujetos al campo gravitacional.

Cuando un objeto es lanzado hacia arriba y éste no tiene una fuerza de propulsión propia, se le da el nombre de proyectil, y realiza un movimiento denominado tiro parabólico.

Existen dos tipos de tiro parabólico: horizontal y oblicuo. El primero (tiro parabólico horizontal) se caracteriza por la trayectoria curva que sigue un objeto al ser lanzado horizontalmente al vacío. El segundo (tiro parabólico oblicuo) se caracteriza porque la trayectoria que sigue un objeto lanzado forma un ángulo con el eje horizontal (Pérez, 2013).

El movimiento del objeto lanzado, se moverá en direcciones xy, por eso al tratar un problema donde hay tiro parabólico, ya sea horizontal u oblicuo, será indispensable elegir el sistema de coordenadas puesto que el eje y debe ser vertical y positivo.



Tiro parabólico horizontal.



Tiro parabólico oblicuo.

Se utilizarán las mismas fórmulas que en aceleración y con las mismas consideraciones, además de las siguientes fórmulas:

Componentes de la velocidad inicial	Desplazamiento horizontal	Altura máxima
--------------------------------------------	----------------------------------	----------------------

$$v_{ix} = v_i \cos \theta$$

$$v_{iy} = v_i \sin \theta$$

$$x = (v_{ix})t$$

$$h_{\text{máx}} = (v_{iy})t - \frac{1}{2}gt^2$$

Componentes horizontal y vertical de la velocidad:

$$v_x = v_{ix}$$

$$v_y = v_{iy} - gt_{\text{aire}}$$

Tiempo en subir

$$t_{\text{subir}} = \frac{v_{iy}}{g}$$

Tiempo en bajar

$$t_{\text{bajar}} = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Tiempo en el aire

$$t_{\text{aire}} = \frac{2v_{iy}}{g}$$

La rapidez v del proyectil en cualquier instante.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

El ángulo formado con el eje x.

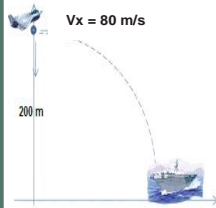
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

Ejemplo 17

Un avión de rescate deja caer un paquete de provisiones de emergencia a un barco que se encuentra parado en medio del océano. El avión vuela horizontalmente a 80 m/s y a una altura de 200 m sobre el nivel del mar. Calcula:

- El tiempo que tardará el paquete en llegar al barco.
- La distancia recorre el paquete desde que es lanzado.
- La velocidad con que el paquete llega al barco

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
$v_x = 80 \text{ m/s}$	$t_{\text{bajar}} = \sqrt{\frac{2y}{g}}$	$t_{\text{bajar}} = \sqrt{\frac{(200 \text{ m})}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 6.39 \text{ s}$
$v_y = 0 \text{ m/s}$	$x = (v_x)t$	$x = (80 \text{ m/s})(6.39 \text{ s}) = 511.2 \text{ m}$
$y = 200 \text{ m}$	$v_y = v_{iy} - gt$	$v_y = (0)(200) - (9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(6.39 \text{ s}) = -62.69 \text{ m/s}$
$g = 9.81 \text{ m/s}^2$	$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	$v = \sqrt{(80 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + (62.69 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} = 101.64 \text{ m/s}$
$t_{\text{bajar}} = ?$		
$x = ?$		
$v = ?$		



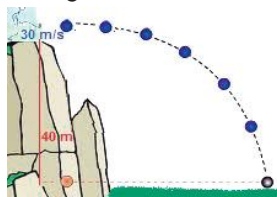
Resultado: El paquete tardará 6.39 s en llegar al barco después de recorrer 511.2 m y llegar al mismo con una velocidad de 101.64 m/s.

Ejemplo 18

Desde lo alto de un cerro que está a 40 m de altura, Martín patea horizontalmente un balón con una velocidad de 30 m/s. Calcula:

- El tiempo que tardará el balón en llegar al piso.
- La distancia recorre el balón desde que es pateado.
- La velocidad con que el balón llega al piso.

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
$v_x = 30 \text{ m/s}$	$t_{\text{bajar}} = \sqrt{\frac{2y}{g}}$	$t_{\text{bajar}} = \sqrt{\frac{(40 \text{ m})}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2.86 \text{ s}$
$v_y = 0 \text{ m/s}$	$x = (v_x)t$	$x = (30 \text{ m/s})(2.86 \text{ s}) = 85.8 \text{ m}$
$y = 40 \text{ m}$	$v_y = v_{iy} - gt$	$v_y = (0)(40) - (9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(2.86 \text{ s}) = -28.06 \text{ m/s}$
$g = 9.81 \text{ m/s}^2$	$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	$v = \sqrt{(30 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + (28.06 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} = 41.08 \text{ m/s}$
$t_{\text{bajar}} = ?$		
$x = ?$		
$v = ?$		



Resultado: El balón tardará 2.86 s en llegar al piso después de recorrer 85.8 m y llegar al mismo con una velocidad de 41.08 m/s.

Ejemplo 19

Un motociclista salta desde una rampa que tiene un ángulo de 65° , a la que llega con una velocidad de 70 km/h, para cruzar el cerro que está frente a él. Calcula:

- La altura máxima que alcanzará el motociclista.
- El tiempo que tardará el motociclista en el aire.
- La distancia recorre el motociclista cuando toca el cerro.
- La velocidad con que el motociclista llega al piso.

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
$\theta = 65^\circ$	$v_i x = v_i \cos \theta$	$v_i = \left(110 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 30.56 \text{ m/s}$
$v_i = 70 \text{ km/h}$	$v_i y = v_i \sin \theta$	$v_i x = (30.56 \text{ m/s})(\cos 65^\circ) = 12.92 \text{ m/s}$
$g = 9.81 \text{ m/s}^2$	$t_{\text{subir}} = \text{—}$	$v_i y = (30.56 \text{ m/s})(\sin 65^\circ) = 27.7 \text{ m/s}$
$h_{\text{max}} = ?$	$h_{\text{máx}} = (v_i y)t - \frac{1}{2}gt^2$	$t_{\text{subir}} = \frac{27.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2.82 \text{ s}$ $t_{\text{aire}} = \frac{2(27.7 \frac{\text{m}}{\text{s}})}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5.65 \text{ s}$
$t_{\text{aire}} = ?$	$x = (v_i x)t_{\text{aire}}$	$h_{\text{max}} = (27.7 \text{ m})(2.82 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(2.82 \text{ s})^2$
$x = ?$	$v_x = v_i x$	$h_{\text{max}} = 39.11 \text{ m}$
$v = ?$	$v_y = v_i y - gt_{\text{aire}}$	$x = (12.92 \text{ m/s})(5.65 \text{ s}) = 73 \text{ m}$
	$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$	$v_x = 12.92 \text{ m/s}$
		$v_y = 27.7 \text{ m/s} - (9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(5.65 \text{ s}) = -27.73 \text{ m/s}$
		$v = \sqrt{(12.92 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + (-27.73 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} = 30.59 \text{ m/s}$

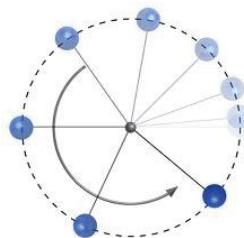


Resultado: El motociclista tardará 2.82 s en alcanzar su altura máxima, que es de 39.11 m, tras recorrer 73 m con una velocidad de 12.92 m/s.

Movimiento circular

Para Cuéllar (2013), cuando una partícula material describe una trayectoria circular respecto a un punto y además desplazamientos angulares iguales en intervalos de tiempo iguales, es decir, con una velocidad angular constante, se desplaza con un movimiento circular uniforme (MCU).

En el MCU, la magnitud de la velocidad (a cuánto se mueve) no cambia (por ser uniforme), pero la dirección de la velocidad varía continuamente (por ser curvilíneo). La velocidad a lo largo de la trayectoria curvilínea se denomina velocidad lineal y se le considera tangente a la trayectoria y, por lo tanto, perpendicular al radio.



Para describir un movimiento circular uniforme, debe considerarse tanto la velocidad angular como la velocidad con la que se desplaza en su trayectoria (velocidad lineal), y el eje de rotación, que es el punto fijo sobre el cual gira un cuerpo alrededor de él. Algunos ejemplos que observamos frecuentemente en nuestra vida son: las manecillas del reloj, el giro de las ruedas de un auto, una honda, entre otros.

En todo movimiento, es importante conocer la velocidad a la que se mueve el cuerpo y la distancia recorrida en ciertos intervalos de tiempo:

$$v = \frac{d}{t}$$

En el movimiento circular uniforme utilizamos dos conceptos de velocidad: uno que indica la distancia recorrida en la unidad de tiempo que mencionamos anteriormente (velocidad lineal v) y el otro referido al ángulo descrito en dicha unidad de tiempo llamado velocidad angular (ω).

La velocidad angular (ω) de un objeto indica qué tan rápidamente gira el vector de posición de un objeto que se desplaza con movimiento circular (Cuéllar, 2013); es el cociente entre el ángulo recorrido y el tiempo que tarda en recorrerlo. Como la velocidad angular nos indica la rapidez con la que gira el cuerpo, entre mayor sea ésta, mayor será el ángulo recorrido.

Como los ángulos se miden en grados y radianes es conveniente recordar sus equivalencias: $1 \text{ rad} = 57.3^\circ$ $2\pi \text{ rad} = 360^\circ = 1 \text{ rev}$ $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

La magnitud de la velocidad angular se calcula con la siguiente fórmula:

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{T} = \frac{\text{Perímetro}}{\text{Periodo}}$$

La velocidad angular se expresa en radianes por segundo (rad/s) o bien en revoluciones por minuto (rpm).

El *perímetro* es la distancia que se recorre a lo largo de la circunferencia, el *periodo* (T) es el tiempo que tarda en recorrerla y se le denomina *revolución* cuando se da una vuelta completa a la circunferencia; es decir, 360° , y al número de revoluciones que el cuerpo realiza en cierto tiempo se le llama *frecuencia*, que se calcula con la fórmula:

$$f = \frac{1}{T}$$

Y se expresa en hertz (hz) que corresponde a una revolución por segundo.

Para calcular la velocidad lineal en los extremos de la circunferencia descrita, tenemos que considerar la velocidad angular y el radio de la circunferencia (R), y se obtiene mediante la fórmula

$$v = \omega R$$

y se expresa en m/s.

En el movimiento circular uniforme, la magnitud de la velocidad de la partícula permanece constante y solamente está cambiando en dirección continuamente. A esta variación de la velocidad en su dirección se le llama *aceleración centrípeta* y se representa por a_c .

Como la aceleración debida al cambio en la dirección de la velocidad apunta hacia el centro de la circunferencia se le denomina *centrípeta* porque va hacia el centro. Por ejemplo: cuando aumentamos vas en una bicicleta y aumentas o disminuyes la velocidad, en las ruedas se manifiesta la aceleración centrípeta porque hubo un cambio de velocidad.

La fórmula para calcular esta aceleración es:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

Un aspecto importante a considerar es el radio, si éste es pequeño, habrá una aceleración centrípeta grande y si el radio es mayor, la aceleración será pequeña.




Ejemplo 20

La rueda de un motor gira con rapidez angular $\omega = 500 \text{ rad/s}$.

a) ¿Cuál es el periodo?

b) ¿Cuál es la frecuencia?

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
$\omega = 500 \text{ rad/s}$	$\omega = \text{—}$	$T = \frac{1}{\omega} = 0.0126 \text{ s}$
$T = \text{¿?}$	$T\omega = 2\pi$	$F = \frac{1}{0.0126 \text{ s}} = 79.57 \text{ rev/s}$
$F = \text{¿?}$	$T = \frac{2\pi}{\omega}$	
	$F = \text{—}$	

Resultado: El motor tendrá un periodo de 0.0126 s y dará 79.57 vueltas (revoluciones) cada segundo.

Ejemplo 21

¿Cuál es la velocidad angular de la manecilla de un reloj que indica las horas? ¿Cuál será la del minutero? ¿Cuál será la del segundero?

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
$T = 12 \text{ h}$	$\omega = \text{—}$	$T = (12 \text{ h})\left(\frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}}\right) = 43,200 \text{ s}$
	$T\omega = 2\pi$	Horario $\omega = \text{—} = \frac{2\pi}{43200 \text{ s}} = 1.45 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$
	$T = \text{—}$	Minutero $\omega = \text{—} = \frac{2\pi}{3600 \text{ s}} = 1.745 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$
	$F = \text{—}$	Segundero $\omega = \text{—} = \frac{2\pi}{60 \text{ s}} = 0.1047 \text{ rad/s}$

Resultado: Las manecillas del reloj tendrán velocidades angulares de $1.45 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$ para el horario, $1.745 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$ para el minutero y 0.1047 rad/s para el segundero.

Ejemplo 22

Un disco gira a razón de tres vueltas en 12 s. ¿Cuál es su frecuencia, su periodo y su velocidad angular?

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
3 revoluciones en 12 s	$F = \text{—}$	$F = \frac{3 \text{ rev}}{12 \text{ s}} = 0.25 \text{ rev/s}$
	$T = \text{—}$	$T = \frac{1}{0.25 \text{ rev/s}} = 4 \text{ s}$
	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{4 \text{ s}} = 1.57 \text{ rad/s}$

Resultado: El disco da $\frac{1}{4}$ de vuelta (0.25) cada s, es decir, cada 4 s da una vuelta, a una velocidad angular de 1.57 rad/s.

Ejemplo 23

En una pista circular de radio 100 m, un auto le da dos vueltas en cada minuto.

- ¿Cuál es, en segundos, el periodo del movimiento del auto?
- ¿Cuál es la distancia que recorre en cada revolución (perímetro)?
- ¿Qué valor tiene la velocidad lineal del vehículo?
- ¿Cuánto vale su aceleración centrípeta?
- ¿Cuál es su velocidad angular?

Datos	Fórmulas y despejes	Sustitución
$R = 100 \text{ m}$	$T = \frac{60 \text{ s}}{\# \text{ de vueltas}}$	$T = \frac{60 \text{ s}}{2 \text{ vueltas}} = 30 \text{ s}$
2 vueltas x min	$P = \frac{2\pi R}{1}$	$P = 100 \text{ m} = 628.32 \text{ m}$
	$v = \frac{2\pi R}{T}$	$v = \frac{628.32 \text{ m}}{30 \text{ s}} = 20.94 \text{ m/s}$
	$a_c = \frac{v^2}{R}$	$a_c = \frac{(20.94 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{100 \text{ m}} = 4.38 \text{ m/s}^2$
	$\omega = \frac{\pi}{T}$	$\omega = \frac{2\pi}{30 \text{ s}} = 0.21 \text{ rad/s}$

Resultado: El auto da una vuelta cada $\frac{1}{2}$ minuto, recorriendo 628.32 m en cada

vuelta a una velocidad de 20.94 m/s o 0.21 rad/s, con una aceleración centrípeta de 4.38 m/s².