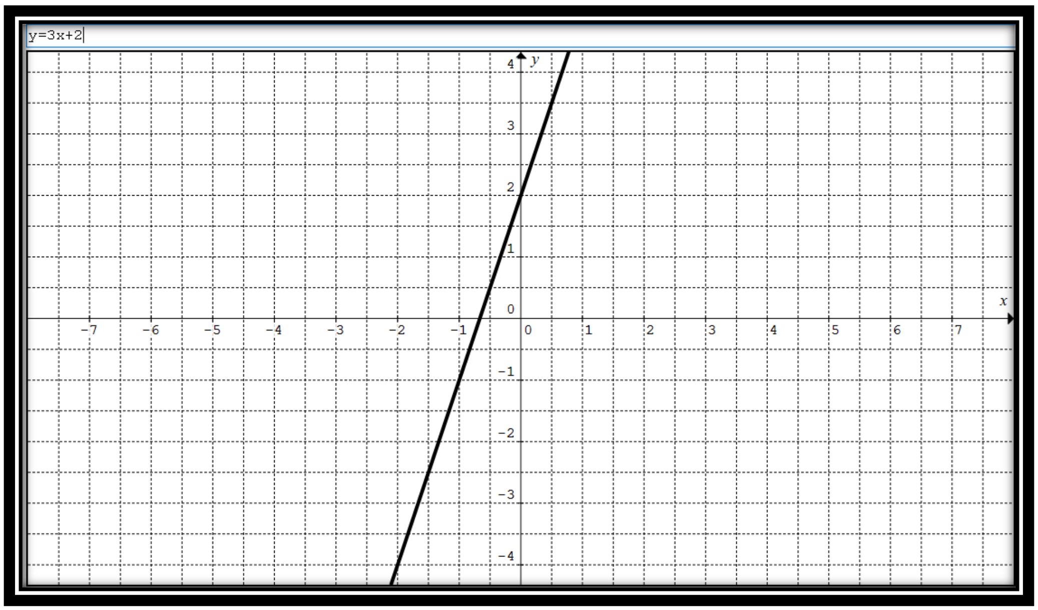
Matemáticas I
Introducción

Unidad 4	ECUACIONES CUADRÁTICAS

¿Qué es una ecuación cuadrática?

Una ecuación cuadrática es cuando igualamos a cero la función cuadrática y podemos calcular los valores de la incógnita que permiten dar solución a la ecuación.

Al graficar una expresión igualada a "y" le damos el nombre de función matemática.
Por ejemplo:
$y = 3x + 2$ Es una ecuación lineal o de primer grado (el mayor exponente para la variable "x" es uno)
Gráficamente una función lineal se ve de la siguiente forma

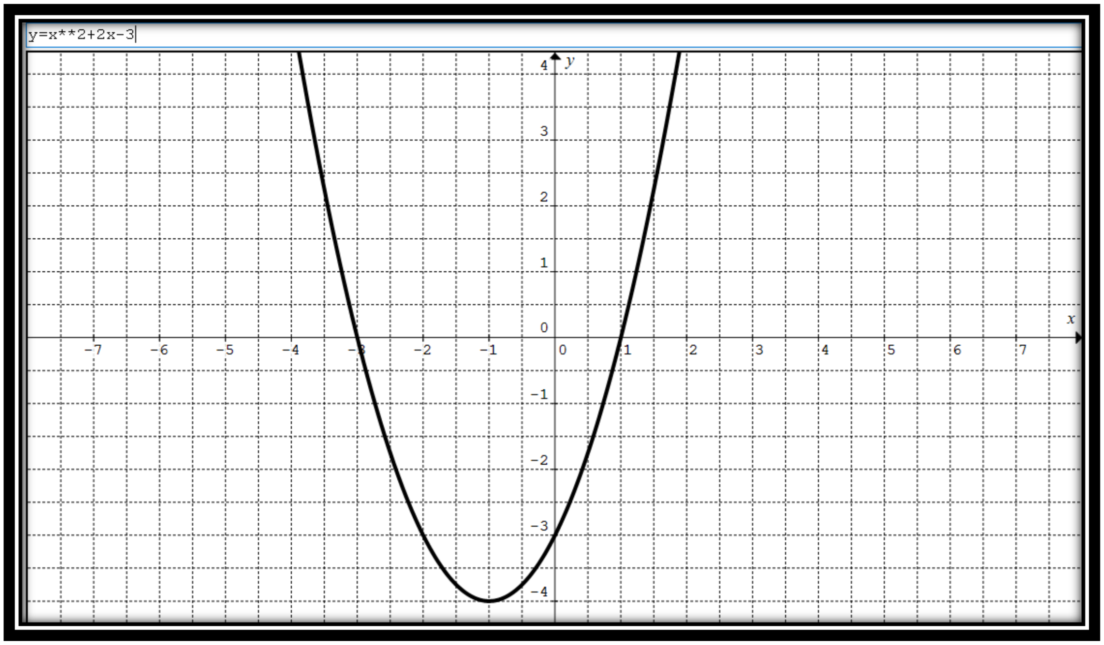


La anterior función la podemos convertir en una ecuación al reacomodar cada uno de los términos $-3x + y = 2$, en donde cada par ordenado en la recta será una solución para la ecuación (soluciones infinitas)

Las funciones cuadráticas o de segundo grado son nombradas así debido a que el máximo exponente en la variable independiente "x" es 2.

$$y = x^2 + 2x - 3$$

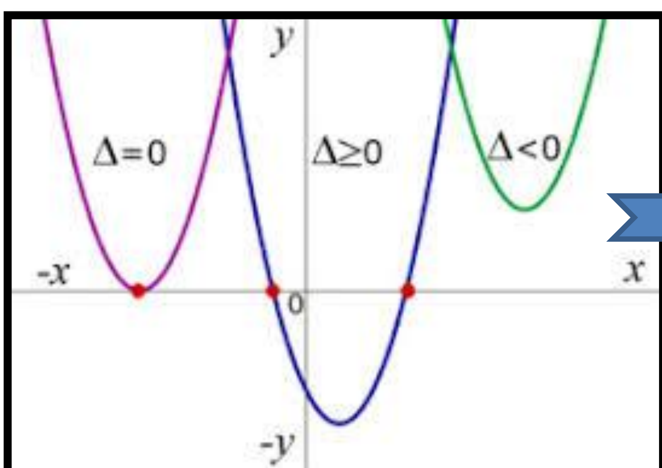
La grafica de una función cuadrática es una parábola.



Las funciones cuadráticas se conviertes en ecuación cuando una función la igualamos a cero.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas pueden tener una o dos soluciones llamadas raíces.



Los puntos rojos en cada parábola representan las soluciones de la ecuación

Cuando una parábola no toca o cruza el eje “x” significa que no existen soluciones reales

¿Cómo saber cuántas soluciones tiene una ecuación cuadrática?

Para reconocer el número de soluciones que tiene una ecuación cuadrática usamos la discriminante

- **El discriminante**

En la fórmula cuadrática, la expresión bajo el signo de la raíz cuadrada, $b^2 - 4ac$ se conoce como el **discriminante.**

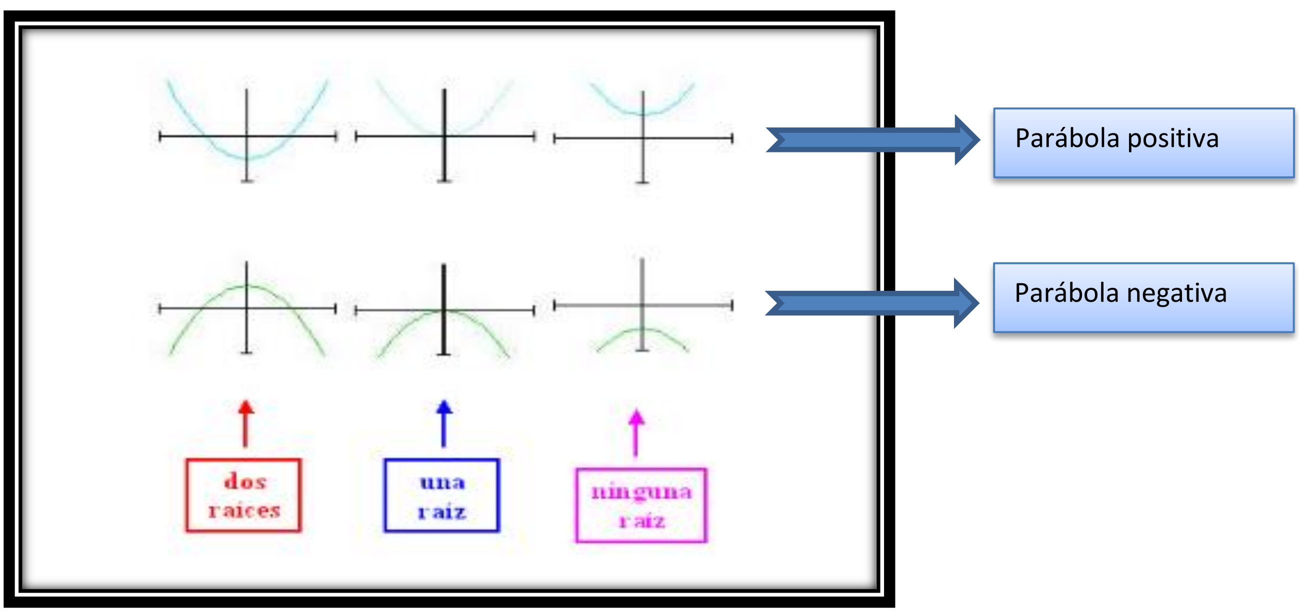
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El signo del discriminante puede ser usado para encontrar el número de soluciones de las ecuaciones cuadráticas correspondientes.

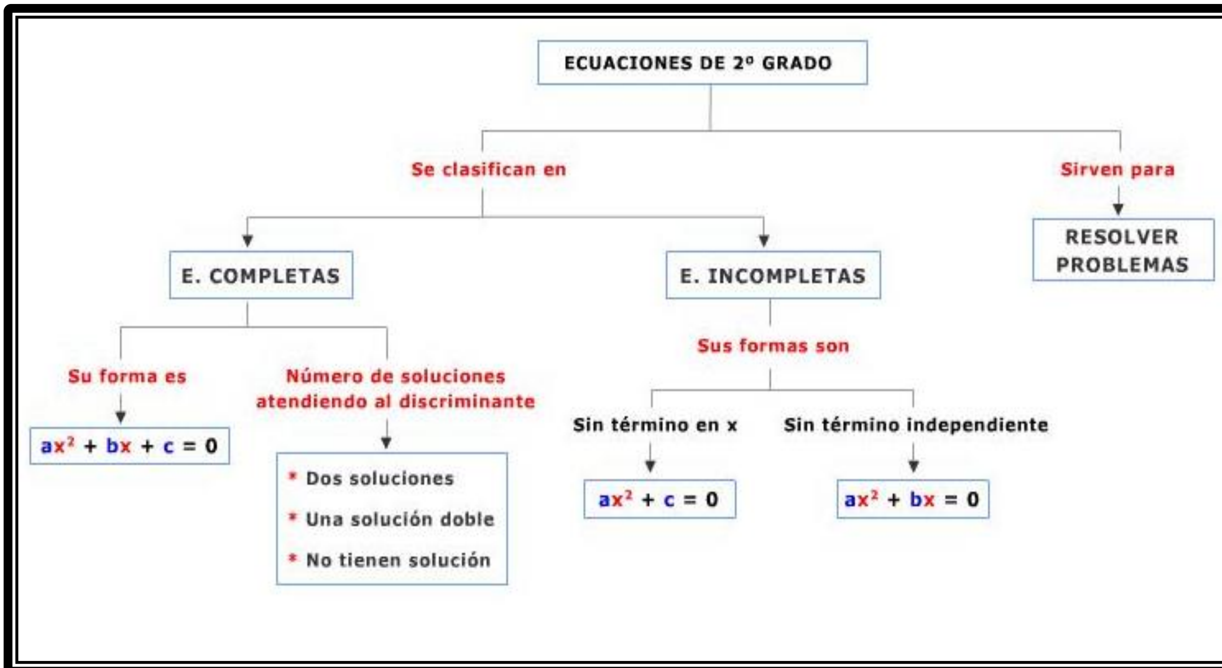
- Si el discriminante, $b^2 - 4ac$ es negativo, entonces no hay soluciones reales de la ecuación. (Necesita de números complejos para manejar este caso adecuadamente.
- Si el discriminante es cero, hay únicamente una solución.
- Si el discriminante es positivo, significa que obtiene dos soluciones

Las soluciones de la ecuación corresponden a las intercepciones en *x* de la parábola

$$y = ax^2 + bx + c$$



Clasificación de ecuaciones cuadráticas



Elementos de una función cuadrática

a) Concavidad:

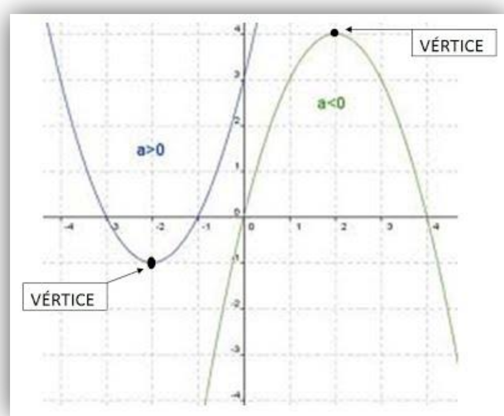
1. La concavidad nos indica si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo sus ramas, si el coeficiente "a" es mayor que cero (positivo), la parábola abre hacia arriba, si el coeficiente "a" es menor que cero (negativo), la parábola abre hacia abajo.

*Parábola positiva

$a > 0$ (Abre hacia arriba)

*Parábola negativa

$a < 0$ (Abre hacia abajo)



b) Raíces:

Las raíces de una función cuadrática son los valores de "x" cuando la función es igual a cero. En otras palabras son los valores de donde la parábola intersecta el eje x, también puedes encontrar las raíces con el nombre de soluciones o ceros. Generalmente para encontrar las raíces, podemos factorizar la función o bien utilizar la fórmula de Baskara (fórmula general), que tiene la siguiente forma.

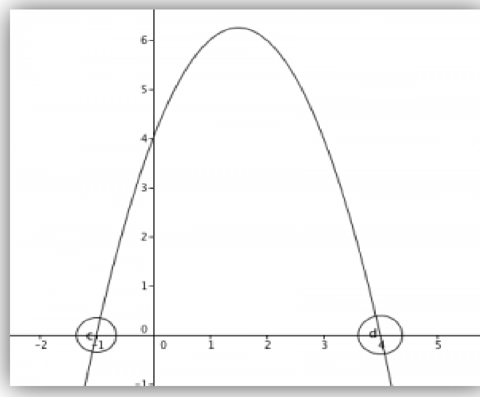
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplo:

Buscaremos las raíces de la función $y = -x^2 - 3x + 4$

Las soluciones de la ecuación cuadrática serán

$x = -1 \qquad x = 4$

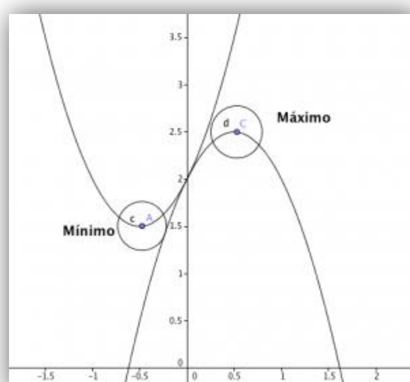


c) Vértice:

El vértice es un punto de la parábola máximo o mínimo en la función. Diremos que el vértice es máximo si la parábola tiene concavidad hacia abajo y diremos que el vértice es mínimo siempre y cuando la parábola tenga concavidad hacia arriba.

La fórmula para encontrar las coordenadas del vértice es la siguiente:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

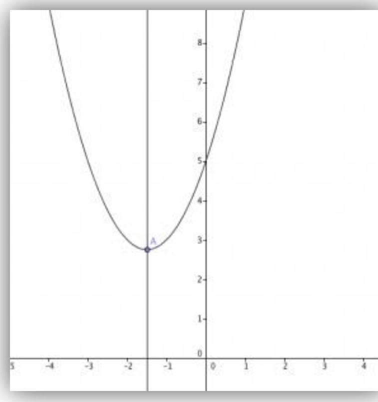


d) Eje de Simetría:

El eje de simetría es una recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, por tanto es única y dividirá en dos partes iguales a la parábola como una simetría axial.

El eje de simetría se representa por la recta

$$x = \frac{-b}{2a}$$



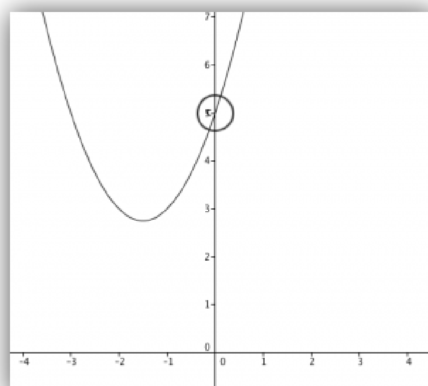
d) Corte en el eje y:

El corte con el eje y está determinado por el coeficiente “c”, el punto de intersección será el punto (0, c).

En una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

El termino independiente “c” indica la coordenada en el eje de las ordenadas por donde pasa la parábola



Para poder hacer una correcta gráfica de una parábola se deberá contemplar todos los elementos antes mencionados, así se logrará realizar un completo bosquejo de la función cuadrática.

Ejercicios de ejemplos:

Identifica las características de la parábola de la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$

1. El coeficiente del termino cuadrático es positivo ($a = 1$), por lo tanto se trata de una parábola positiva que abre hacia arriba

2. Si aplicamos la discriminante, $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$,se puede concluir la cantidad de soluciones para la Ecuación

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \qquad a = 1 \quad b = 6 \quad c = 5$$

$6^2 - 4(1)(5)$
$36 - 20 = 16$
$16 > 0$ La ecuación tiene 2 soluciones

3. La parábola corta en el eje "y" en el 5 $\quad c = 5$

4. El eje de simetría corta el eje de las abscisas (eje x) en el punto $x = (-3,0)$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(1)} = -3$$

5. El vértice de la parábola se encuentra en el punto más bajo de la parábola con coordenadas (x, y)

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-6}{2(1)}, \frac{4(1)(5) - 6^2}{4(1)}\right) = \left(\frac{-6}{2}, \frac{-16}{4}\right) = (-3, -4)$$

$$V = (-3, -4)$$

6. Las raíces de la ecuación se pueden determinar utilizando el método de factorización

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$(x + 1)(x + 5)$$

$$x + 1 = 0 \qquad x + 5 = 0$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = -5$$

Para graficar podemos utilizar cualquier graficador y comprobar los datos anteriores