ADS - Serie 4

Aufgabe 4.2 Speicheraufwand Mergesort

Vor.: Sei $M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ mit:

$$M(n) = \begin{cases} 0 & : \text{ falls } n = 1 \\ n + M(\lceil n/2 \rceil) & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Beh.: Es gilt: $2(n-1) \quad \leq \quad M(n) \quad \leq \quad 2(n-1) + \lceil \log_2 n \rceil$

Bew Teil 1.: Induktion über $l \in \mathbb{N}$. Erst $2(n-1) \ \leq \ M(n)$

IA.: l = 1

$$2(n-1) = 2(1-1) = 2 \cdot 0 = 0 \quad \leq \quad M(1) = M(n)$$

IV.: Sei $l \in \mathbb{N}$ und es gelte für alle $n \in \{1, \dots l\}$: $\quad 2(n-1) \ \leq \ M(n)$

IS.: zz. Die Aussage gilt für $l+1$. $\big(2((l+1)-1) \quad \leq \quad M(l+1) \big)$

Nebenbeh.(*): $1 \leq \lceil (l+1)/2 \rceil \leq l$

Bew.:

$$1 \ \leq \ \lceil (1+1)/2 \rceil \ \leq \ \lceil (l+1)/2 \rceil \ \leq \ \lceil (l+l)/2 \rceil \ \leq \ \lceil 2l/2 \rceil \ \leq \ l$$

Mit (*) darf die IV bei $\lceil (l+1)/2 \rceil$ angewendet werden.

$$\begin{aligned} M(l+1) &= (l+1) + M(\lceil (l+1)/2 \rceil) && \text{Def. von } M \\ &\geq (l+1) + 2(\lceil (l+1)/2 \rceil - 1) && \text{IV und (*)} \\ &= l + 1 + 2\lceil (l+1)/2 \rceil - 2 \\ &= l - 1 + \lceil (l+1) \rceil \\ &= l - 1 + l + 1 \\ &= 2l \\ &= 2(l+1-1) \\ &= 2((l+1)-1) \end{aligned}$$

Also gilt $2(n-1) \quad \leq \quad M(n)$.

Bew Teil 2.: nun $M(n) \ \leq \ 2(n-1) + \lceil \log_2 n \rceil$

IA.: l = 1

$$M(l) = M(1) = 0 \ \leq \ 0 + 0 = 2(1-1) + \lceil \log_2 1 \rceil = 2(l-1) + \lceil \log_2 l \rceil$$

IV.: Sei $l \in \mathbb{N}$ und es gelte für alle $n \in \{1, \dots l\}$: $M(n) \ \leq \ 2(n-1) + \lceil \log_2 n \rceil$.

IS.: zz.: $M(l+1) \quad \leq \quad 2((l+1)-1) + \lceil \log_2 (l+1) \rceil$.

$$
\begin{aligned}
M(l+1) &= (l+1) + M(\lceil (l+1)/2 \rceil) && \text{Def. von } M \\
&\leq (l+1) + 2(\lceil (l+1)/2 \rceil - 1) + \lceil \log_2 \lceil (l+1)/2 \rceil \rceil && \text{IV und (*)} \\
&\leq l + 1 + \lceil l+1 \rceil - 2 + \lceil \log_2 (l+1) \rceil - 1 && \text{Hinweis} \\
&= 2l - 1 + \lceil \log_2 (l+1) \rceil \\
&\leq 2l + \lceil \log_2 (l+1) \rceil \\
&= 2((l+1)-1) + \lceil \log_2 (l+1) \rceil
\end{aligned}
$$

Also gilt $M(n) \ \leq \ 2(n-1) + \lceil \log_2 n \rceil$.