UE Statistiques 2 : Généralités sur les probabilités

Vincent Brée

ISA BTP

Table des matières

1 Notion de variable aléatoire à densité

1.1 Rappels

Définition

Une variable aléatoire réelle est une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

où $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ (discrète ou non). On appelle fonction de répartition de X, et on note F_x, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) \in \mathbb{R}.$$

1.2 Densité

Définition

Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et soit F_X sa fonction de répartition.
On dit que X est une variable aléatoire réelle à densité s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :
• f_X est à valeurs positives ou nulles ;
• f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = 1$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$.

La fonction f_X est appelée densité de la variable aléatoire X.

Remarque : Le vocabulaire est important. Pour une même variable aléatoire à densité, il peut exister plusieurs densités.
Remarque : Une variable aléatoire X n'admet qu'une seule fonction de répartition.

Propriété

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :
- f est à valeurs positives ou nulles ;
- f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre infini de points ;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Alors f est appelée une densité de probabilité.
En effet, il existe alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et une VAR X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, tels que f soit une densité de la variable X.

Complément 1

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

définit une densité de probabilité.

1.3 Fonction de répartition

Propriété

Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X, et si f est une densité de X, alors :
- F est continue sur $\mathbb{R}$;
- F est de classe $\mathscr{C}^1$, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- En tout point x où F est dérivable, on a $F'(x) = f(x)$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Si :
- F est continue sur $\mathbb{R}$;
- F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de point.

Alors X est une variable aléatoire à densité.
De plus, si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Complément 2

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} \text{ si } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

Montrer que X est une variable aléatoire à densité dont on déterminera la densité.

Propriété

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si F vérifie les propriétés suivantes :
(i) F est continue sur $\mathbb{R}$
(ii) F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points ;
(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$;
(iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
(v) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et il existe une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ dont F est la fonction de répartition.
De plus, X est alors une variable aléatoire à densité, et si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Complément 3

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{1-\sqrt{-x}}{2} \text{ si } x \in [-1;0[\\ \dfrac{1+\sqrt{x}}{2} \text{ si } x \in [0;1] \\ 1 \text{ si } x \in]1;+\infty[\end{cases}$.

Montrer que X est une variable aléatoire à densité dont on déterminera la densité.

1.4 Fonction de répartition et calculs de probabilités

Propriété

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.

1. Pour tout réel a, $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

2. Pour tout réel x, $\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ et $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X \geqslant x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

3. Pour tous réels $a \leqslant b$,

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque : Ici, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$ contrairement aux variables aléatoires discrètes. Ainsi, lorsqu'une question demande de déterminer la loi de la variable aléatoire X, il faudra :

- soit donner la fonction de répartition de X ;
- soit donner une densité de la variable aléatoire.

Définition

Des variables aléatoires à densité $X_1, \ldots, X_n$ sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sont dites indépendantes lorsque, pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$:

$$\mathbb{P}((X_1 \leqslant x_1) \cap (X_2 \leqslant x_2) \cap \ldots \cap (X_n \leqslant x_n)) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1)\mathbb{P}(X_2 \leqslant x_2) \ldots \mathbb{P}(X_n \leqslant x_n).$$

2 Moments d'une variables aléatoire à densité

2.1 Espérance

Définition

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, on dit que X admet une espérance notée $\mathbb{E}[X]$ définie par :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t.$$

Complément 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) \text{ si } x \in [0;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X, puis déterminer si X admet une espérance.

Définition

Si X est une VAR telle que $\mathbb{E}[X] = 0$, on dit que X est une variable centrée.

Propriété

Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors, pour tous réels a et b, la variable $aX + b$ admet également une espérance et on a l'égalité :

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b.$$

Propriété

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité admettant une espérance. Alors $X + Y$ est une variable aléatoire à densité, alors elle admet une espérance et

$$\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y].$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité f.
Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors la variable $g(X)$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

En particulier, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}[X^2]=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$.

2.2 Variance et écart-type

Définition

Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable aléatoire $(X-\mathbb{E}[X])^2$ admet une espérance, on appelle variance de X le réel :

$$\mathbb{V}[X]=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2$$

Propriété

Soit Xune variable aléatoire à densité admettant une variance. lors, pour tous réels a et b, la variable $aX+b$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X).$$

Définition

Si X admet une variance, on a $\mathbb{V}[X]\geqslant 0$.

On appelle écart-type de X le réel :

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}[X]}.$$

3 Lois usuelles

3.1 Loi uniforme

Définition

Soient a et b deux réels tels que $a<b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a,b]$ lorsqu'elle admet pour densité la fonction f définie par

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} \text{ si } t\in[a,b]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a,b]$. Alors la fonction de répartition F de X vérifie :

$$\forall x\in\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\leqslant a\\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a<x<b\\ 1 \text{ si } x\geqslant b\end{cases}$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a,b]$. Alors $\mathbb{E}[X]=\dfrac{a+b}{2}$ et $\mathbb{V}[X]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

3.2 Loi exponentielle

Définition

Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsqu'elle admet comme densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors la fonction de répartition F de X vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{V}[X] = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

3.3 Loi normale

3.3.1 Loi normale centrée réduite

Définition

On dit que X suit la loi normale centrée réduite lorsqu'elle admet comme densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

On note $\mathcal{N}(0;1)$ la variable aléatoire centrée réduite.

Remarque : On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$.

Remarque : On ne connaît PAS de primitive de cette fonction f. On ne peut donc pas trouver d'expression de la fonction de répartition de la variable aléatoire centrée réduite. On la notera Φ dans la suite du document.

Propriété

Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité, suivant une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. Alors Φ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Alors $\mathbb{E}[X] = 0$ et $Var[X] = 1$.

table loi normale.png

3.3.2 Loi normale : cas général

Définition

On dit que X suit une loi normale de paramètres m et σ^2 lorsqu'elle admet comme densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres m et σ^2. Alors $\mathbb{E}[X] = m$ et $Var[X] = \sigma^2$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire et $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$.

X suit la loi normale de paramètres m et σ^2 si, et seulement si, X^* suit la loi normale centrée réduite.

4 Exercices

4.1 Exercice 1

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{1/3} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire Y.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable Y.
3. Calculer l'espérance de la variable Y.
4. Calculer $\mathbb{P}(0,488 \leqslant Y \leqslant 1,2)$.

4.2 Exercice 2

Une station service est approvisionnée en essence une fois par semaine. Son volume de vente hebdomadaire, en milliers de litres, est une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{4}(1-x^4) & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité sur $[0,+\infty[$.
2. Quelle est la probabilité que le stock hébdonadaire soit épuisé avant la fin de la semaine si le réservoir à une capacité de 500ℓ ? 800ℓ ?
3. Quelle capacité doit avoir le réservoir pour que la probabilité d'épuiser l'approvisionnement d'une semaine soit inférieure ou égale à 0,01 ?

4.3 Exercice 3

Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station 14. Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0;6]$. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

4.4 Exercice 4

On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre $0,1$.

1. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 2 ans de durée de vie.
2. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.
3. On considère une une voiture qui a duré déjà 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?
   Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans.

4.5 Exercice 5

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

   On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

   Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

   (a) Déterminer la valeur de λ.

   (b) Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

   (c) Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à $0,8$.
   On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.
   On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

   (a) Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $\mathbb{E}[Y]$ et son écart-type $\sigma(Y)$.

   (b) Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$. Calculer la probabilité p_1 de l'événement $\{Z \leqslant 71\}$.

   (c) On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \leqslant 70)$ de l'événement $\{Z \leqslant 70\}$.
   Le restaurant a reçu 81 réservations.
   Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?