

Mathématiques générales deuxième année

RELATIONS BINAIRES

Version enseignant

Mourad ABOUZAIID
mourad.abouzaid@univ-pau.fr
Bureau n°243 - ISALAB

**ISANUM 2° année
2025-2026**

Dernière compilation : 10 septembre 2025

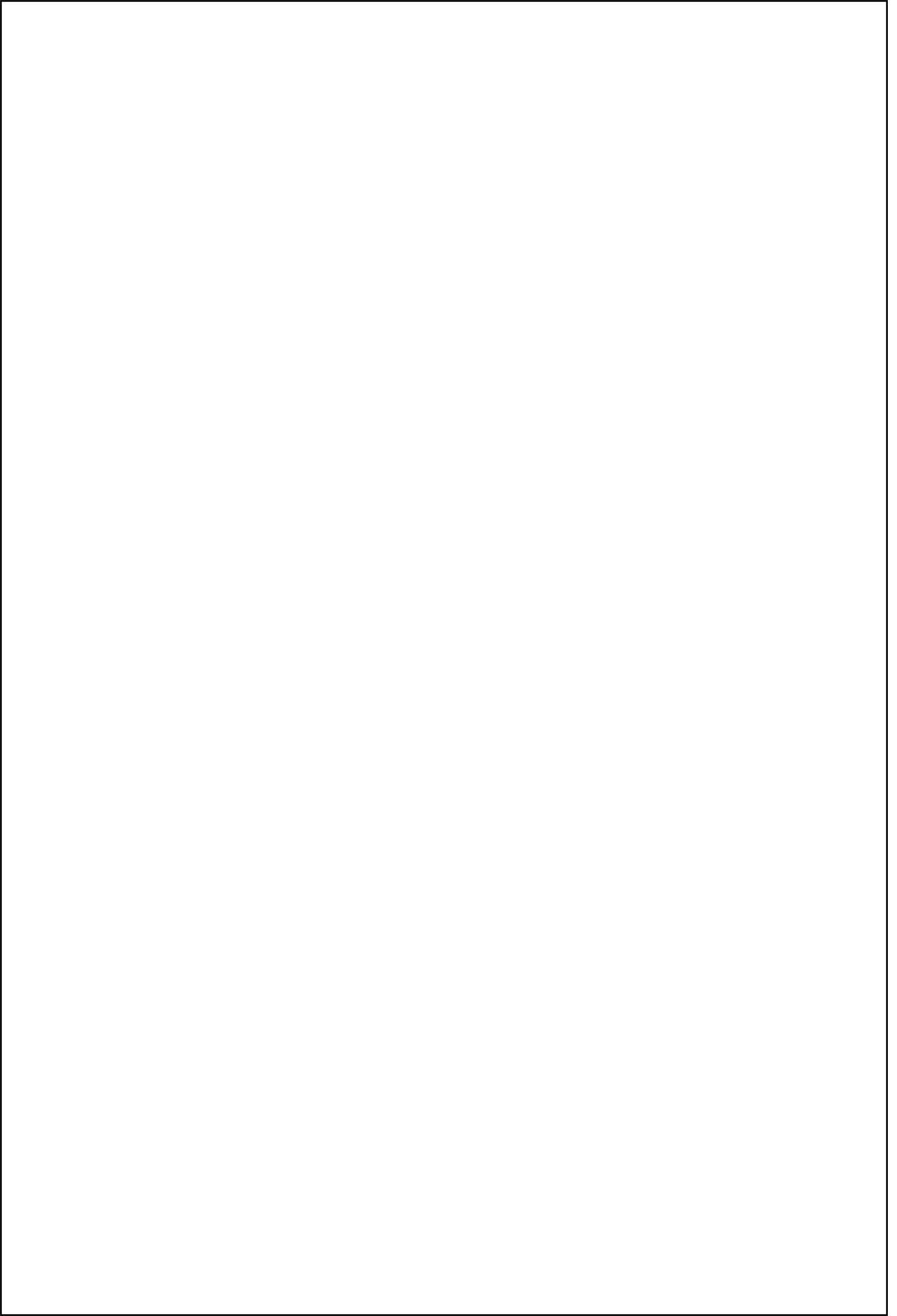
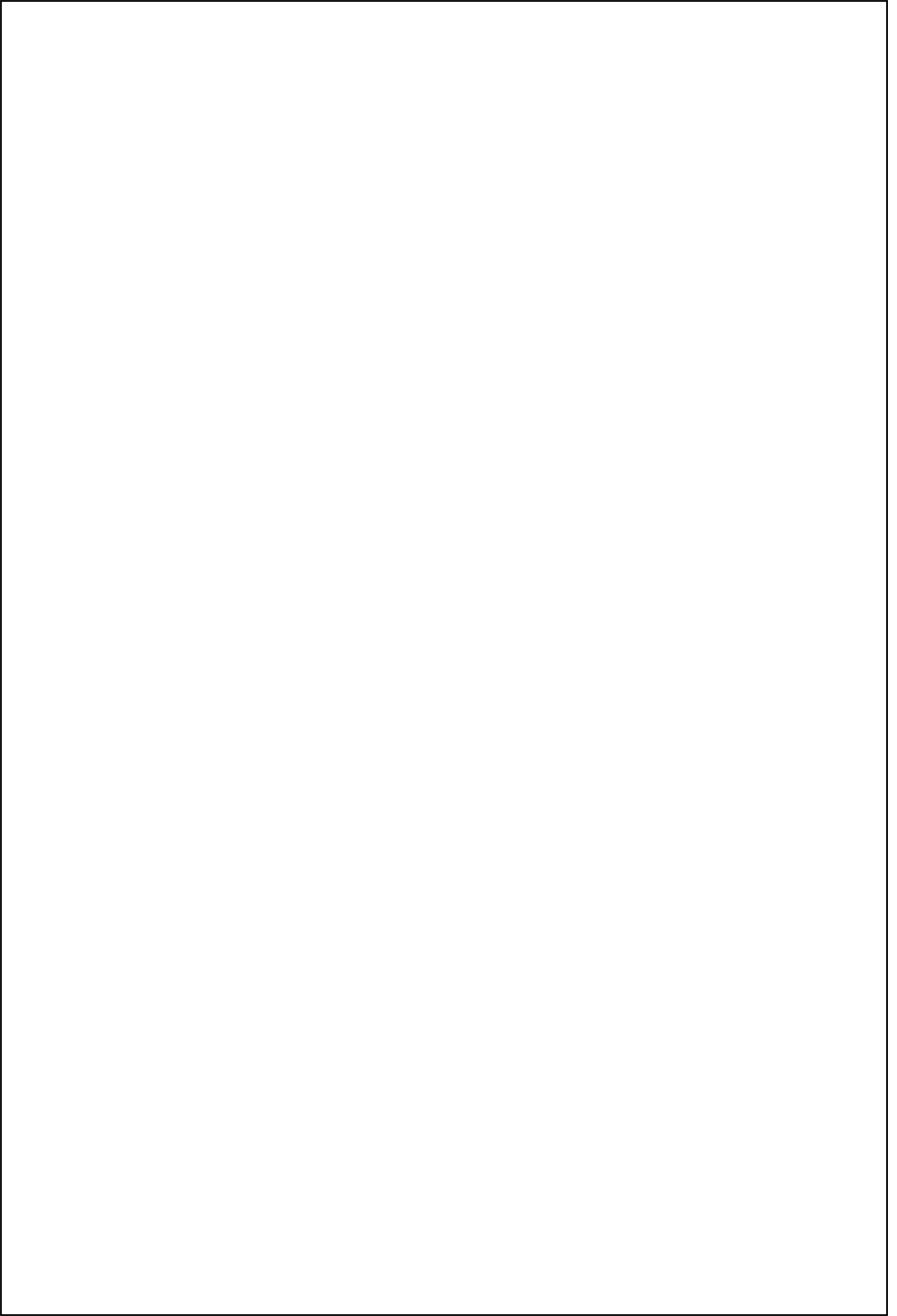


Table des matières

1	Théorie élémentaire des ensembles (rappels)	5
1.1	Définitions	5
1.2	Inclusion, intersection, réunion	5
1.3	Le complémentaire	11
1.4	Produit cartésien d'ensembles	11
2	Fonctions et applications	15
2.1	Définitions	15
2.2	Représentations graphiques	17
2.3	Image directe, image réciproque	17
2.4	Fonctions composées	19
2.5	Quelques fonctions particulières	21
2.6	Injection, surjection, bijection	23
2.7	Applications et cardinaux	29
3	Relations binaires	31
3.1	Définition	31
3.2	Représentations graphiques	33
3.3	Propriétés des relations binaires	35
3.4	Relations d'ordre	37
3.5	Relations d'équivalence	41



Introduction

En mathématiques, un ensemble désigne une collection d'objets possédant (ou non) des propriétés en commun.

La théorie des ensembles a pour objet l'étude de ces ensembles d'objets et de leurs propriétés, indépendamment de la nature des objets qu'ils contiennent.

1 Théorie élémentaire des ensembles (rappels)

1.1 Définitions

Dans un ensemble mathématiques E , les objets sont appelés *ses éléments*. Pour noter qu'un objet x est un élément de l'ensemble E (ou que x appartient à E), on note

$$x \in E$$

Pour signifier que x n'appartient pas à E , on note

$$x \notin E$$

Dans un ensemble E , on considère également ses *parties*, ou *sous-ensembles*. Ce sont les ensembles qui sont constitués d'éléments de E . Ainsi, A est une partie de E si et seulement si

$$\forall x \in A, \quad x \in E$$

On note alors $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

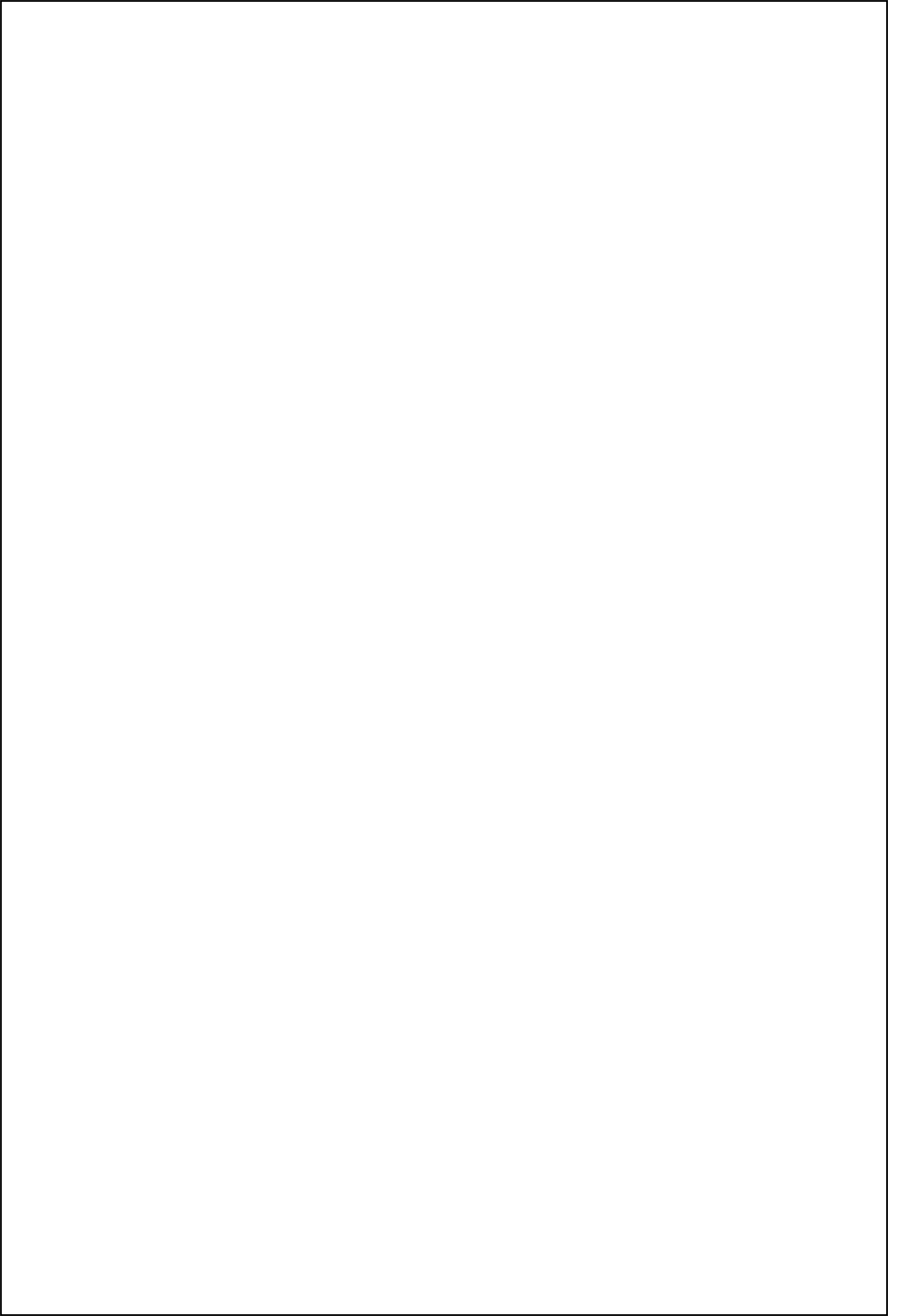
Notes :

- $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles.
- Pour tout ensemble E non vide, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ contient au moins deux éléments : E et \emptyset .
- Deux parties A et B de E sont égales si elle contiennent exactement les mêmes éléments.

Enfin, si E est un ensemble fini, on appelle *cardinal* de E le nombre d'éléments qu'il contient. On le note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$. On verra que l'on peut également définir le cardinal d'un ensemble infini.

1.2 Inclusion, intersection, réunion

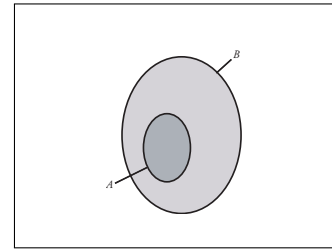
Soit E un ensemble. Dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$, on peut définir une relation et des opérations sur les objets de $\mathcal{P}(E)$, les parties de E .



1.2.1 L'inclusion

Soient A et B deux parties de E . On dit que A est inclus dans B (ou que B contient A) si tous les éléments de A sont également dans B . On le note $A \subset B$. Ainsi,

$$(A \subset B) \iff (\forall x \in A, x \in B)$$



Note : deux ensembles A et B sont égaux s'ils chacun est inclus dans l'autre :

$$(A = B) \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

1.2.2 L'intersection et l'union

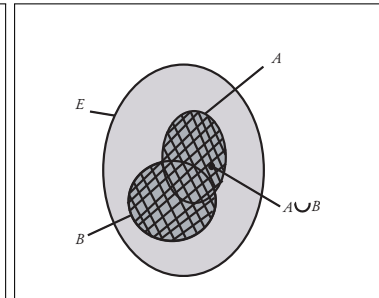
Soient E un ensemble et A et B deux parties de E .

- L'*union* (ou *réunion*) des ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A **ou** à B . On le note $A \cup B$:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Note : on a toujours

$$A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad B \subset A \cup B$$



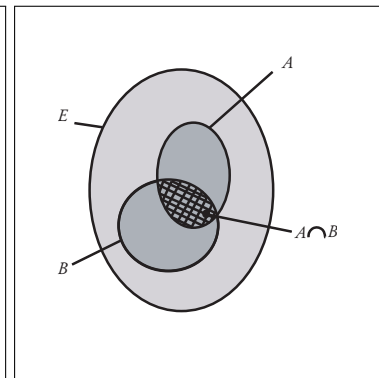
- L'*intersection* des ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments appartenant à la fois à A **et** à B . On le note $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Notes :

- A et B sont dits *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.
- On a toujours

$$A \cap B \subset A \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B$$

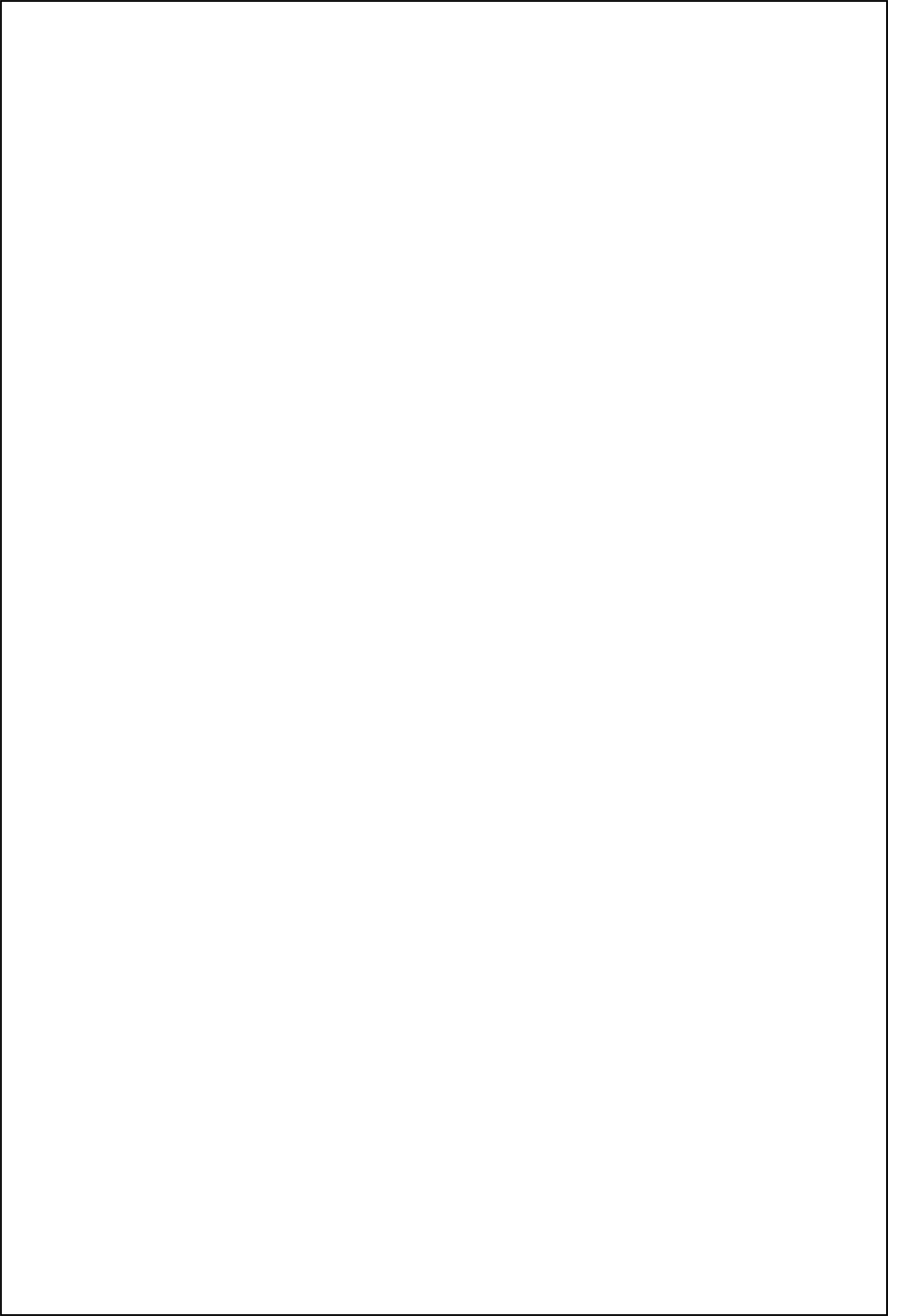


Note : à l'image des opérations bien connues dans les nombres réels, ces opérations respectent certaines règles de calcul. Ainsi, on peut montrer que les opérations \cap et \cup sont

- *commutatives* :

$$\forall A, B \subset E, \quad A \cup B = B \cup A \quad \text{et} \quad A \cap B = B \cap A$$

- *associatives* :



$$\forall A, B, C \subset E, \quad \begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

- *distributives l'une sur l'autre :*

$$\begin{aligned} \forall A, B, C \subset E, \quad A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \forall A, B, C \subset E, \quad A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Exercice : observer les différentes propriétés ci-dessus sur un diagramme de Venn (ou un diagramme "en patates").

Note : l'associativité permet en particulier d'étendre ces opérations à des familles de sous-ensembles. Ainsi, si A_1, A_2, \dots, A_n sont des parties d'un ensemble E , on note

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

l'ensemble des éléments de E appartenant à l'un des A_i .

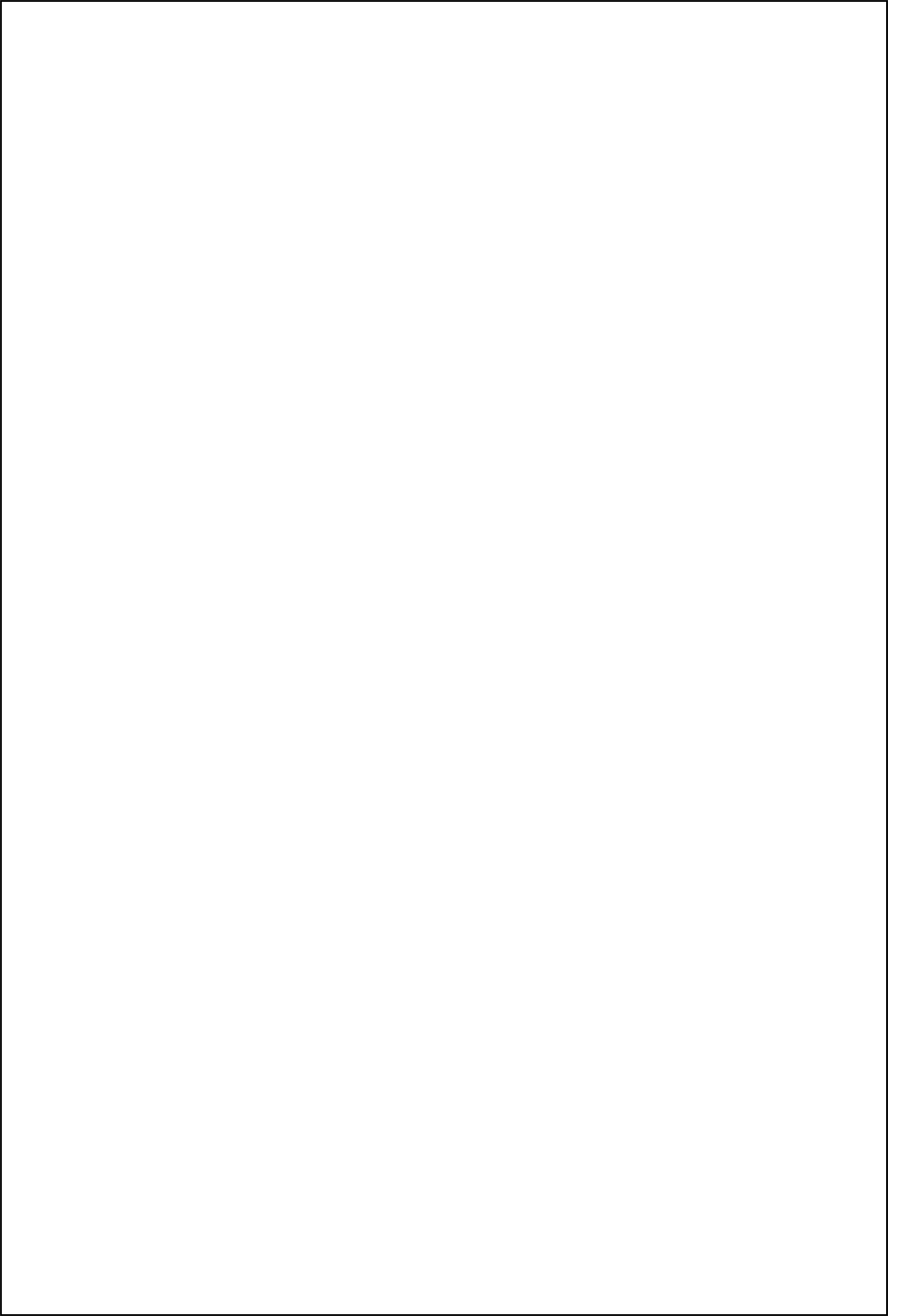
et on note

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

l'ensemble des éléments de E appartenant à chacun des A_i .

On peut alors définir la notion de partition d'un ensemble E : une famille A_1, A_2, \dots, A_n de parties de E forme une *partition* de E si et seulement si

$$\begin{cases} \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \\ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E \end{cases}$$



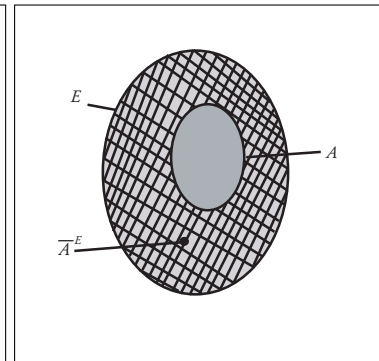
1.3 Le complémentaire

- Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à l'ensemble A . On le note \overline{A}^E :

$$\overline{A}^E = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Note : on a toujours

$$A \cap \overline{A}^E = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \overline{A}^E = E$$



À partir de ces opérations de base, il est possible de définir d'autres opérations dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$. Ainsi,

- on appelle *différence* l'opération

$$B \setminus A = B \cap \overline{A}$$

qui désigne l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A .

- la différence symétrique désignant les éléments de A ou-exclusif B :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Exercice : illustrer les deux opérations ci-dessus par des diagrammes de Venn.

1.4 Produit cartésien d'ensembles

À partir de deux ensembles E et F donnés, on peut construire l'ensemble produit $E \times F$ qui est l'ensemble des couples (e, f) tels que e est un élément de E et f est un élément de F :

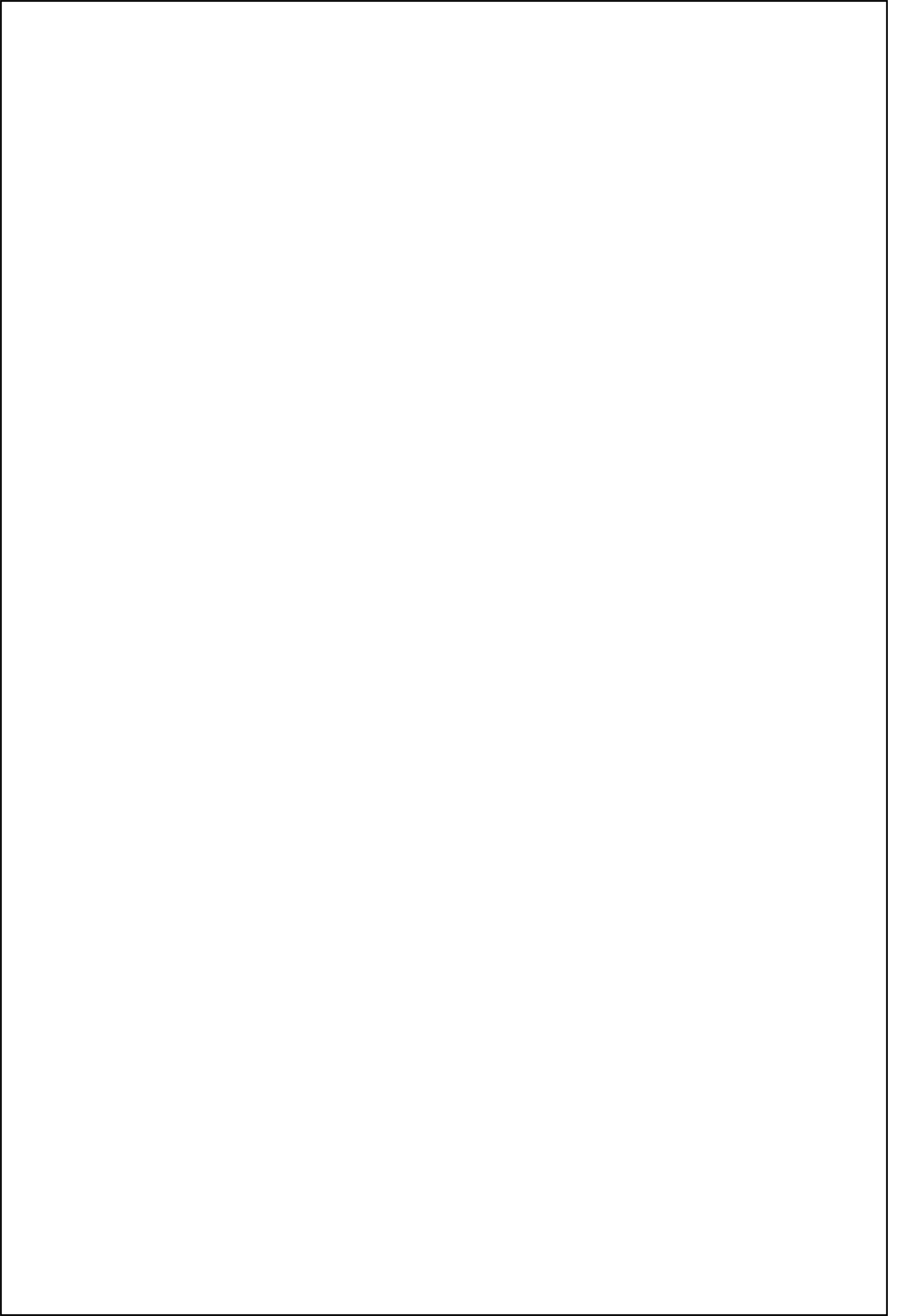
$$E \times F = \{(e, f), e \in E, f \in F\}$$

Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$, l'ensemble produit $E \times F$ est l'ensemble

$$E \times F = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Note : dans un couple (e, f) , l'ordre est fondamental. Ainsi, $(e, f) \neq (f, e)$. Autrement dit, le produit cartésien n'est pas commutatif :

$$E \times F \neq F \times E$$



Si les deux ensembles E et F sont donnés sous forme étendue ($E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et $F = \{b_1, \dots, b_m\}$), le produit cartésien $E \times F$ peut être représenté par le diagramme cartésien ci-contre. (Les éléments de l'ensemble $E \times F$ sont les cases du tableau.)

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\hspace{1.5cm}}^F \\
 \begin{array}{c|c|c|c|c}
 \times & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\
 \hline
 a_1 & & & \cdots & \\
 a_2 & & & \cdots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_n & & & \cdots &
 \end{array}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. E$$

D'après le tableau ci-dessus, on voit que si E et F sont deux ensembles finis, alors

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

On peut généraliser ce que l'on vient de voir à plus de deux ensembles. Ainsi, l'on note E_1, E_2, \dots, E_n n ensembles, on peut construire le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ dont les éléments sont tous les n -uplets (e_1, e_2, \dots, e_n) tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $e_i \in E_i$:

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(e_1, \dots, e_n) / e_i \in E_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Si tous les ensembles E_i sont un même ensemble E , on note

$$E^n = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}} = \{(e_1, \dots, e_n), e_i \in E\}$$

Cas particuliers : les ensembles $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$

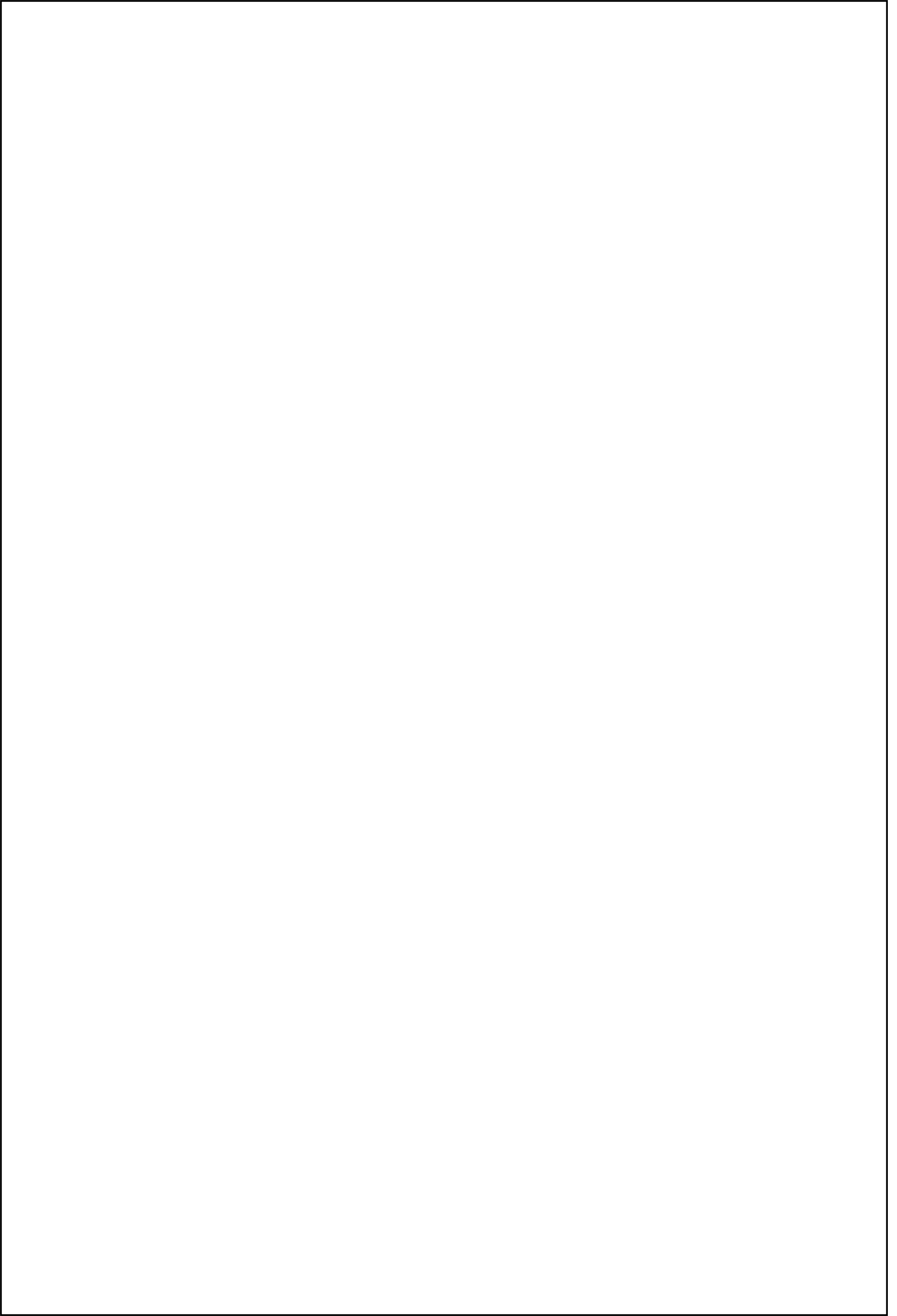
D'après ce que l'on vient de voir, on peut définir l'ensemble \mathbb{R}^2 des couples de réels :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Si l'on munit le plan d'un repère, on peut alors représenter tout élément (x, y) de \mathbb{R}^2 par le point de coordonnées x et y dans ce repère. Cela nous donne une représentation graphique de \mathbb{R}^2 (et de tous ses sous ensembles).

De même, l'ensemble $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ peut être représenté par l'espace 3D, muni d'un repère.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut définir l'ensemble $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble joue un rôle très particulier en mathématiques. On sera amenés à le retrouver dans la suite.



2 Fonctions et applications

2.1 Définitions

Soient E et G deux ensembles. Une fonction de E dans G est une opération qui permet d'associer à chaque de E au plus un élément G .

Une application de E dans G est une fonction qui associe exactement un élément de G à chaque élément de E .

Définitions

Soient E et G deux ensembles et f une fonction de E dans G .

- L'ensemble E est appelé *la source de f* .
- L'ensemble G est appelé *le but de f* .
- Si f associe un élément $y \in G$ à un élément $x \in E$, on note $y = f(x)$.
 - L'élément $y \in G$ est alors *l'image de x par f* .
 - L'élément $x \in E$ est alors *un antécédent de y par f* .
- Le sous ensemble \mathcal{D}_f de E formé des éléments admettant une image par f est appelé *le domaine de définition de f* .
- l'ensemble \mathcal{G}_f des couples de la forme $(x, f(x))$ est appelé *le graphe de f* .
C'est un sous ensemble du *produit cartésien $E \times G$* .

Selon la nature des ensembles E et G , il existe différentes façons de définir une fonction f de E dans G .

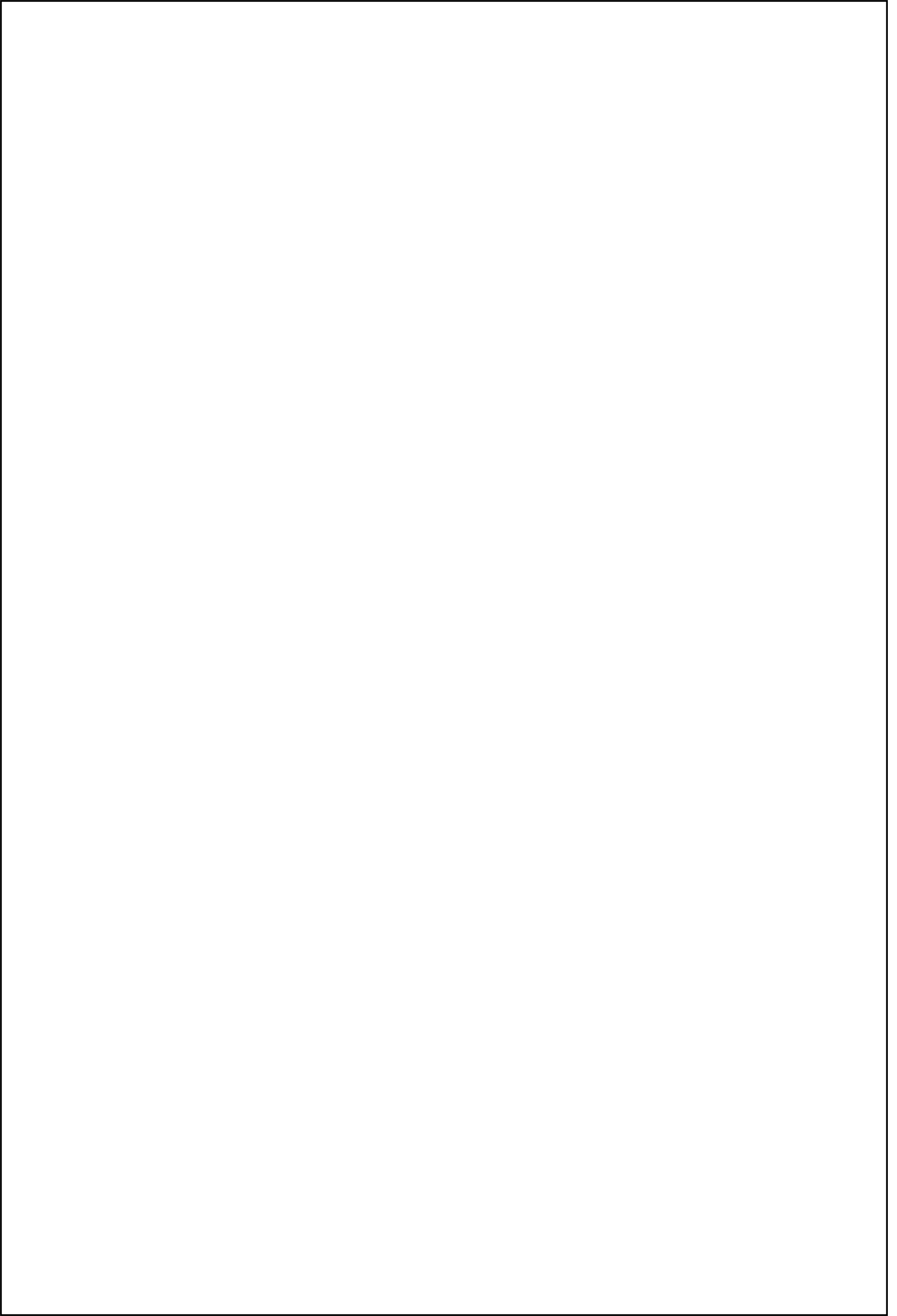
Ainsi, si E est un ensemble fini, on peut donner explicitement l'image par f de chaque éléments de E admettant une image (sous la forme d'une table, par exemple).

Dans certains cas, il est également possible de donner la forme générique de l'image $f(x)$ d'un élément $x \in E$ quelconque. On note alors

$$\begin{array}{ccc} f & : & E \longrightarrow G \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Formellement, on note $\mathcal{F}(E, G)$ ou G^E l'ensemble des fonctions de E dans G . Dans cet ensemble, deux fonctions f_1 et f_2 sont égales si et seulement si

$$\mathcal{D}_{f_1} = \mathcal{D}_{f_2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathcal{D}_{f_1}, f_1(x) = f_2(x)$$



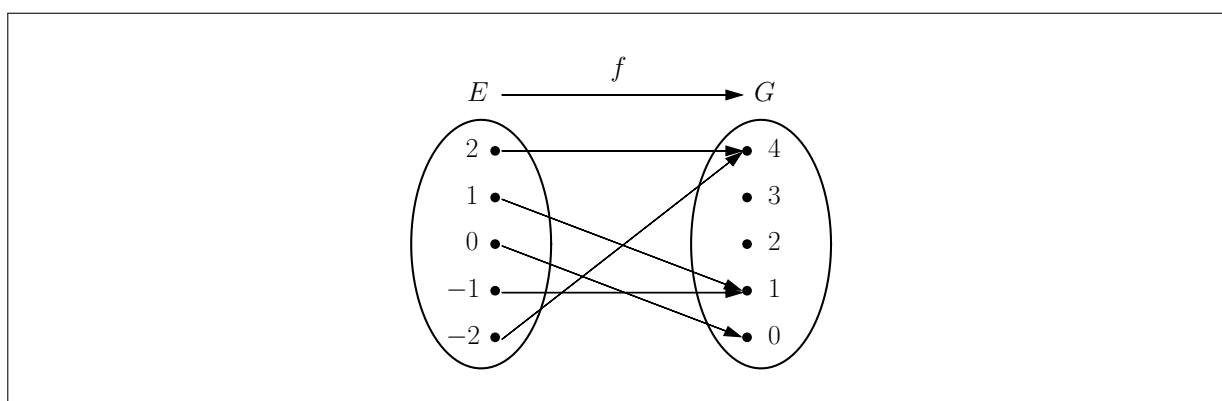
2.2 Représentations graphiques

Selon la nature des ensembles E et G , il existe différentes représentations graphiques possibles.

Ainsi, si E et G sont des ensembles finis, on peut représenter une fonction de E dans G sous forme d'ovales distincts. Leurs éléments respectifs sont alors des points de ces ovales et les associations $x \mapsto f(x)$ sont représentées par des flèches reliant chaque x à $f(x)$. On parle alors de diagramme sagittal.

Exemple : construire le diagramme de Venn de la fonction

$$\begin{array}{ccc} f : & \{-2, -1, 0, 1, 2\} & \longrightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ & x & \longmapsto x^2 \end{array}$$



Dans le cas particulier où E et G sont des parties de \mathbb{R} , on peut également représenter une fonction f dans le plan muni d'un repère, l'ensemble E étant représenté en abscisses, l'ensemble G en ordonnées.

Dans ce cas, le graphe de f apparaît alors sous la forme d'une courbe, reliant les points de coordonnées $(x, f(x))$.

2.3 Image directe, image réciproque

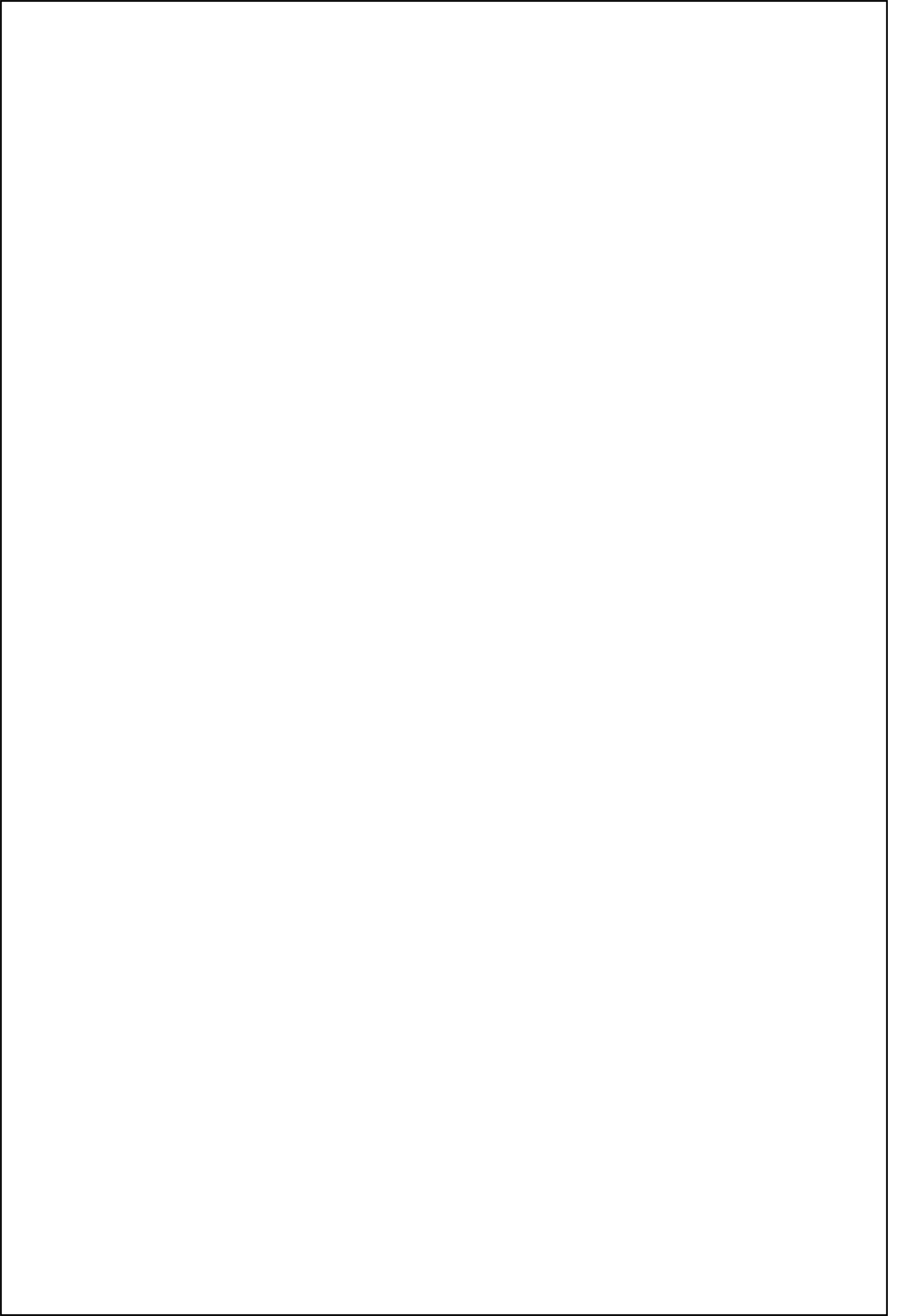
Une fonction f entre deux ensembles E et G mettant en relations les éléments de E et ceux de G , elle met également en relation les parties de ces ensembles.

Définition (Image directe)

Soient E et G deux ensembles et f une application de E dans G . Pour toute partie $A \subset E$, on appelle *image directe de A par f* le sous ensemble $f(A)$ de G défini par

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in G \mid \exists x \in A \mid y = f(x)\}$$

Note : dans ce contexte, l'ensemble $f(E)$ est également appelé *l'image de E* et également noté $\text{Im}(f)$.



Exemple : Soient $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et f la fonction de E dans G définie par

$$\begin{array}{ccc} f & : & E \longrightarrow G \\ & & x \longmapsto x^2 \end{array}$$

- L'image de f est

$$\text{Im}(f) = \{0, 1, 4\}$$

- L'image directe du sous-ensemble $A = \{-2, 0, 2\}$ est

$$f(A) = \{0, 4\}$$

Définition (Image réciproque)

Soient E et G deux ensembles et f une fonction de E dans G . Pour toute partie $B \subset G$, on appelle *image réciproque de B par f* le sous ensemble $f^{-1}(B)$ de E défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Exemple : Soient $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et f la fonction de E dans G définie par

$$\begin{array}{ccc} f & : & E \longrightarrow G \\ & & x \longmapsto x^2 \end{array}$$

- Les images réciproques de chacun des singletons de G sont

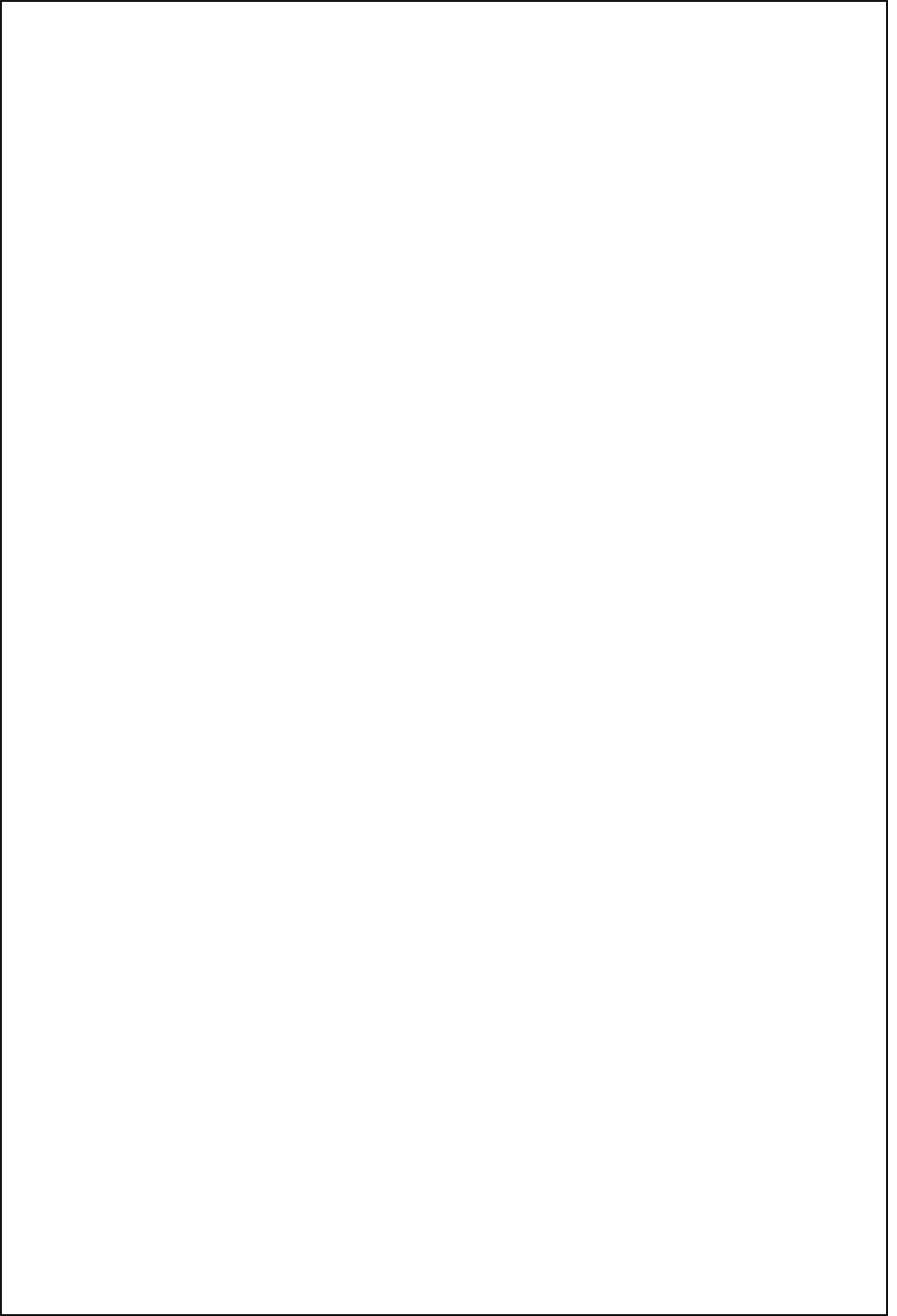
$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) &= \{0\}, & f^{-1}(\{1\}) &= \{-1, 1\}, & f^{-1}(\{2\}) &= \emptyset, \\ f^{-1}(\{3\}) &= \emptyset, & f^{-1}(\{4\}) &= \{-2, 2\} \end{aligned}$$

- L'image réciproque de $B = \{0, 1, 2\} \subset G$:

$$f^{-1}(B) = \{-1, 0, 1\}$$

2.4 Fonctions composées

La notion de fonctions composées formalise l'idée consistant à appliquer successivement plusieurs fonctions à un même ensemble de départ. Ainsi,



Définition (fonctions composées)

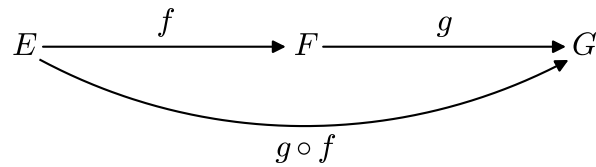
Soient E , F et G trois ensembles et soient

$$f : E \rightarrow F \quad \text{et} \quad g : F \rightarrow G$$

deux fonctions vérifiant $\text{Im}(f) \subset \mathcal{D}_g$. On appelle *fonction composée de f et g* la fonction notée $g \circ f$ de E dans G définie par

$$\begin{aligned} g \circ f &: E \longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

que l'on peut résumer par le diagramme ci-dessous.



2.5 Quelques fonctions particulières

Définition (fonctions constantes)

Soient E et G deux ensembles. Une application de E dans G est dite constante si son image est réduite à un singleton. Autrement dit, f est une application constante de E dans F si et seulement si

$$\exists c \in F \mid \forall x \in E, f(x) = c$$

Définition (fonction identité)

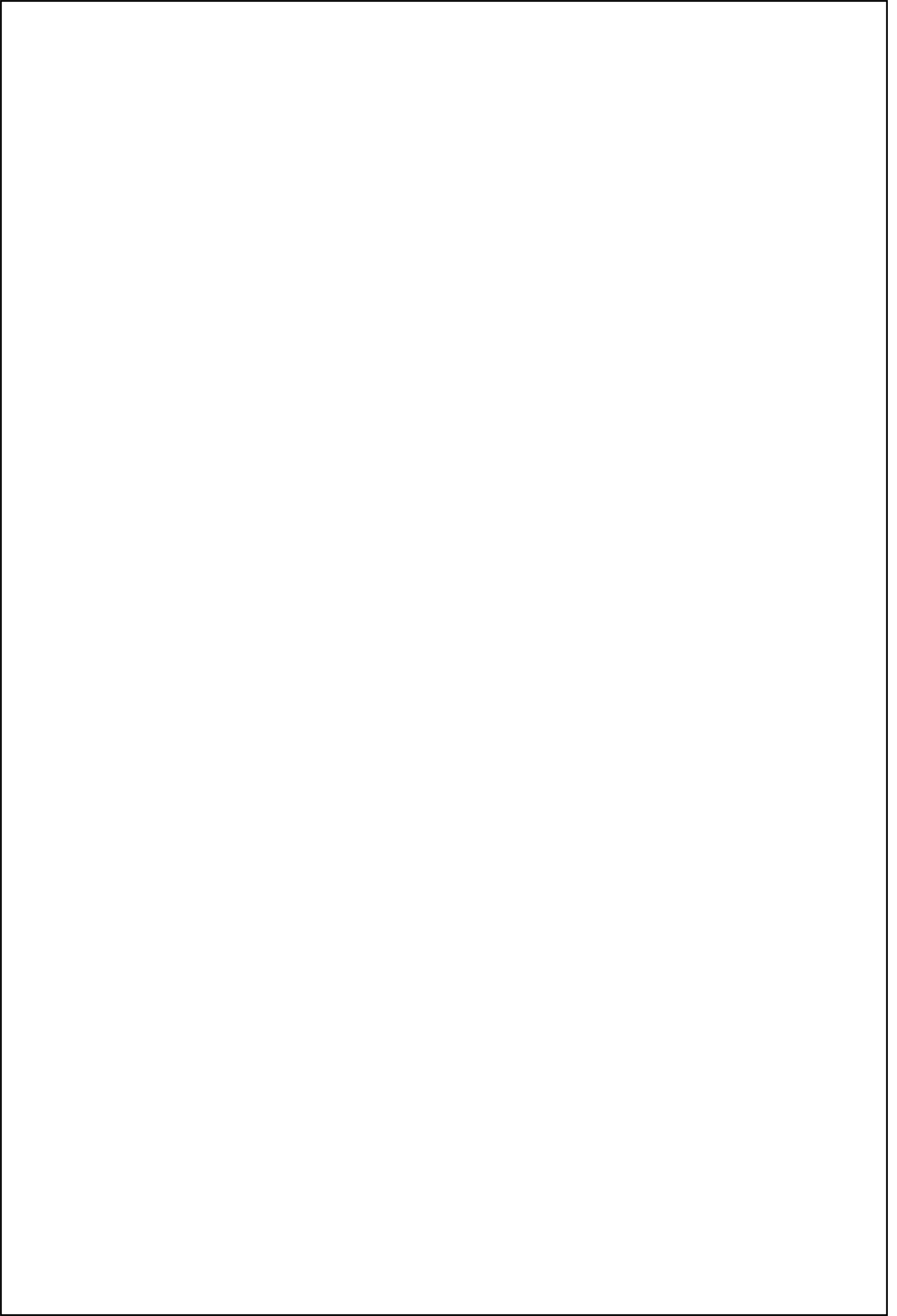
Soient E un ensemble. On appelle *application identité de E* la fonction de E dans E , notée Id_E et définie par

$$\begin{aligned} \text{Id}_E &: E \longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Définition (projections canoniques)

Soient E_1, E_2, \dots, E_n n ensembles. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on appelle i -ième projection canonique l'application π_i définie par

$$\begin{aligned} \pi_i &: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \longrightarrow E_i \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto x_i \end{aligned}$$



Définition (composées itérées)

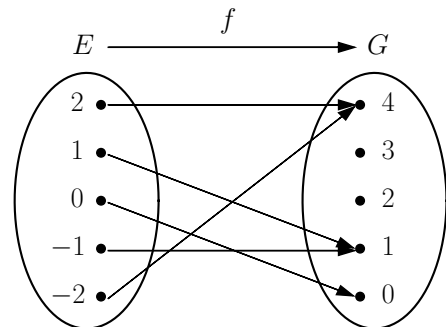
Soient E un ensemble et f une application de E dans E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle n -ième composée de f la fonction notée f^n et définie par

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \quad \text{si } n \neq 0 \quad \text{et} \quad f^0 = \text{Id}_E$$

2.6 Injections, surjections, bijections

Concernant la fonction évoquée plus haut et dont le diagramme sagittal est reproduit ci-contre, on peut faire plusieurs remarques :

- Il y a des éléments de G qui ne sont pas atteints : **2** et **3**.
- Il y a des éléments de G qui sont atteints plusieurs fois : **1** et **4**.



Ces remarques sont à l'origine des définitions ci-dessous, qui permettent de caractériser certaines propriétés éventuelles des fonctions étudiées.

Définition (application injective)

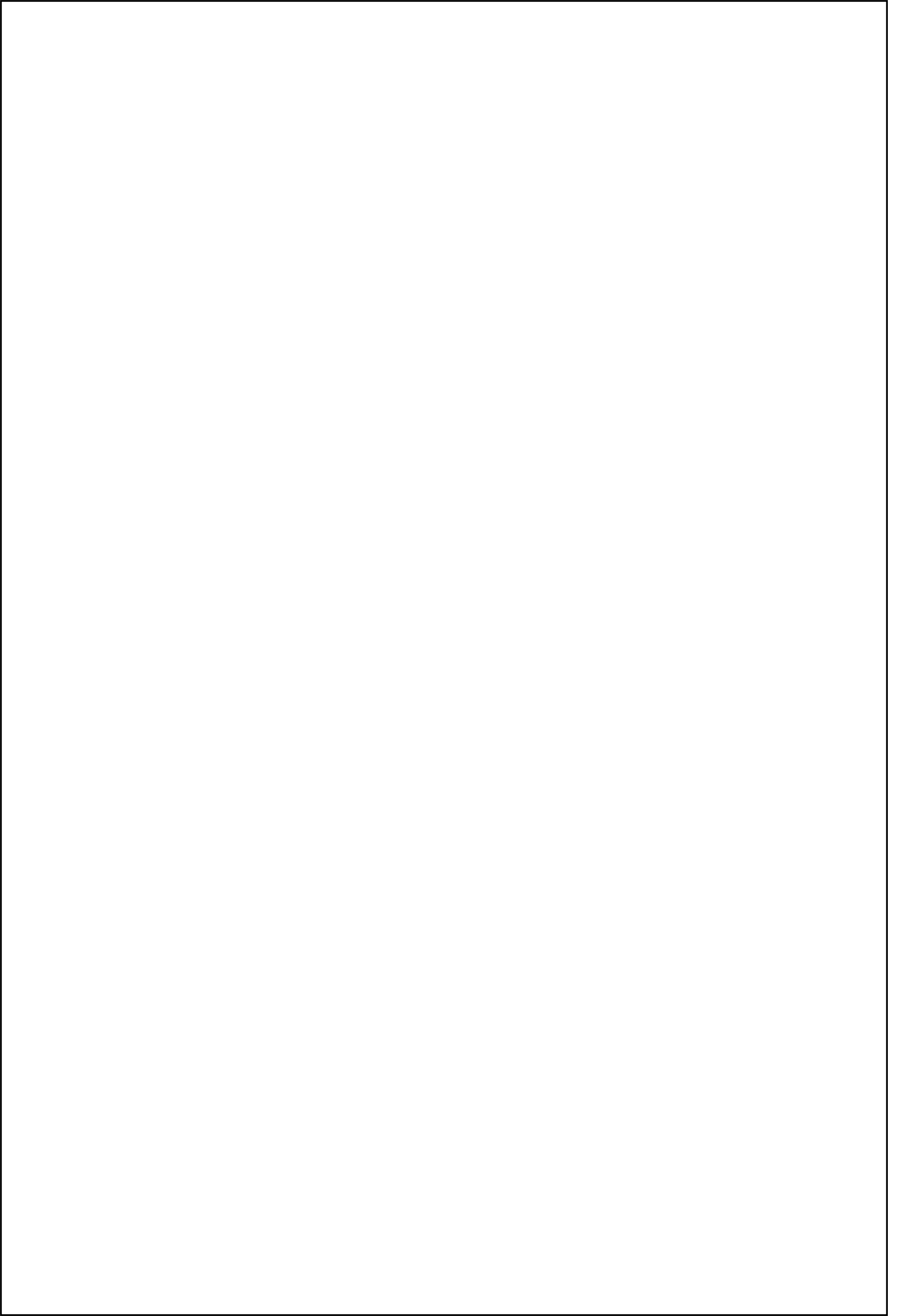
Une application $f : E \rightarrow G$ est dite *injective* si deux éléments distincts de E ont leurs images différentes (i.e. “toutes les images sont différentes”).

Autrement dit, f est injective si

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

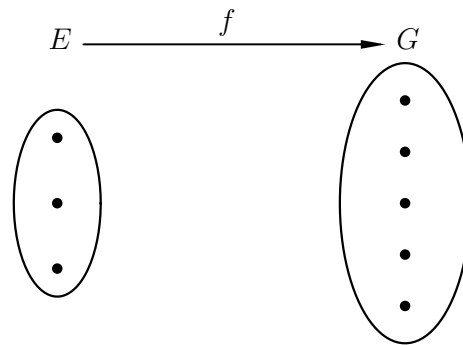
Note : on préfère en général travailler avec la *contraposée* de cette définition :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$



Exemples :

- Construire une application injective de E dans G sur le diagramme sagittal ci-contre.



- L'application étudiée en exemple n'est pas injective car $f(-1) = f(1)$.
- L'application

$$\begin{array}{lcl} s_1 & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto \sin(x) \end{array}$$

n'est pas injective, car $s_1(0) = s_1(\pi)$
mais l'application

$$\begin{array}{lcl} s_2 & : & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x \longmapsto \sin(x) \end{array}$$

est injective.

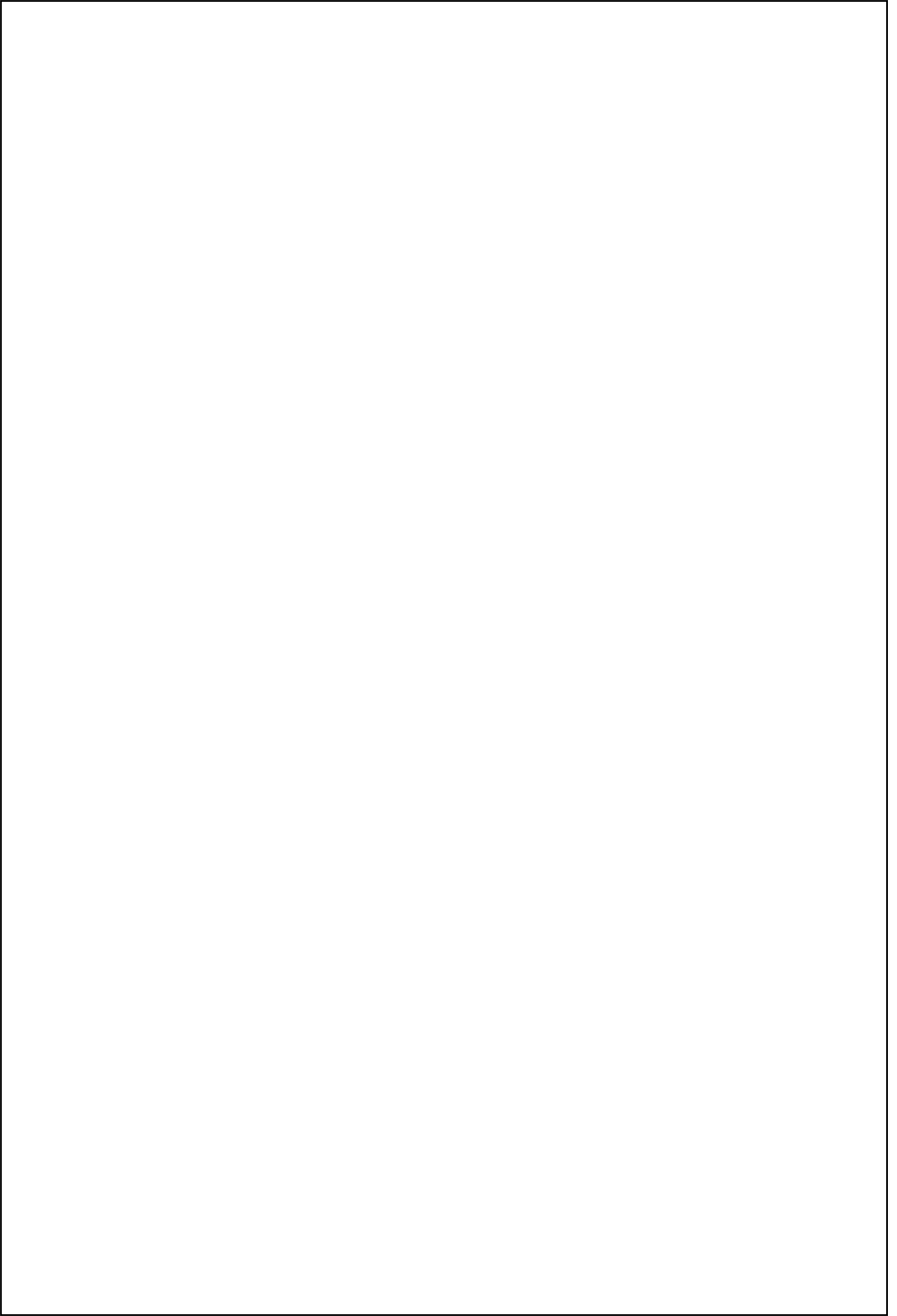
Exercice : illustrer le dernier exemple par un dessin.

Définition (application surjective)

Une application $f : E \rightarrow G$ est *surjective* si tout élément de G est l'image par f d'un élément de E .

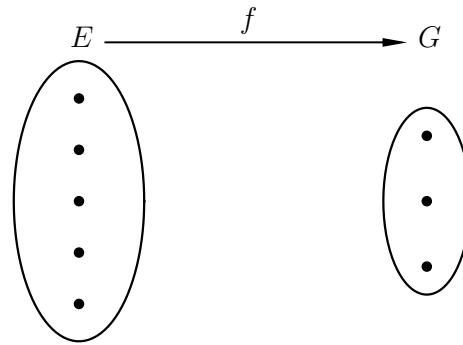
Ainsi, $f : E \rightarrow G$ est surjective si et seulement si

$$\forall y \in G, \exists x \in E / y = f(x)$$



Exemples :

- Construire une application surjective sur le diagramme sagittal ci-contre.



- La fonction étudiée en exemple n'est pas surjective car $2 \in G$ n'est l'image d'aucun élément de E .
- La fonction

$$\begin{aligned} s_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(x) \end{aligned}$$

n'est pas surjective, car $2 \in \mathbb{R}$ n'est le sinus d'aucun angle.
mais la fonction

$$\begin{aligned} s_3 : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \sin(x) \end{aligned}$$

est surjective.

Exercice : illustrer le cas ci-dessus par un dessin.

Définition (application bijective)

Une application $f : E \rightarrow G$ est *bijjective* si elle est à la fois injective et surjective.

On peut montrer que cela se traduit par la proposition suivante :

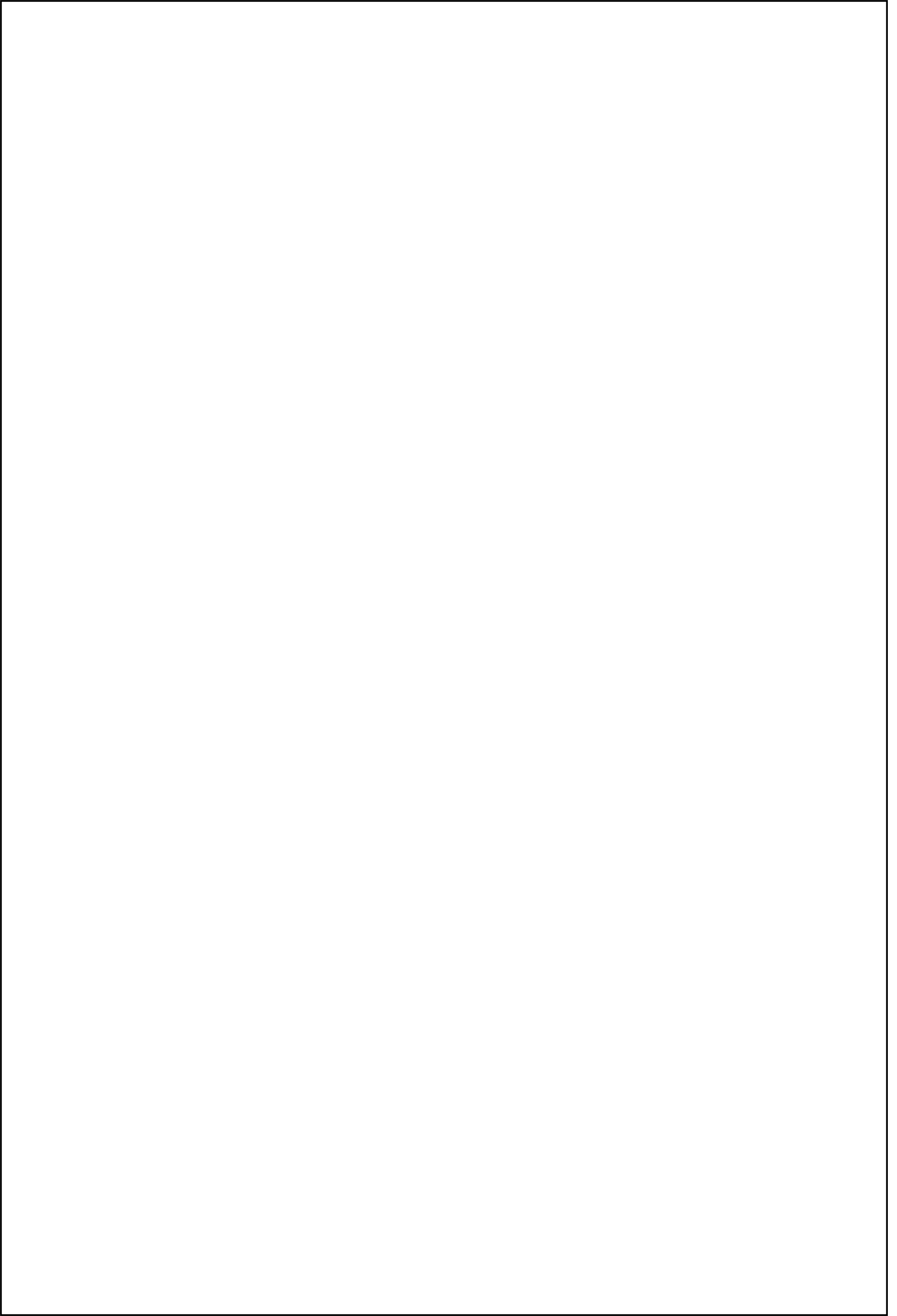
Proposition

Une application $f : E \rightarrow G$ est bijective si et seulement si

$$\forall y \in G, \exists ! x \in E \mid y = f(x)$$

Ainsi, si f est une fonction bijective de $E \rightarrow G$, chaque élément de G admet un et un seul antécédent par f dans E . On peut donc considérer l'application de $G \rightarrow E$ qui à chaque élément de G associe cet unique antécédent.

Cette application est appelée *l'application réciproque de f* . Elle est notée f^{-1} et par construction, on a



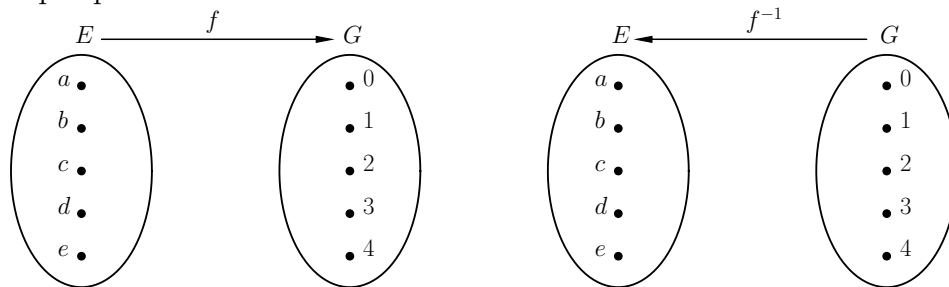
$$\forall x \in E, \quad f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in G, \quad f \circ f^{-1}(y) = y$$

ou encore

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_G$$

Exemples :

- Sur les diagrammes ci-dessous, construire une bijection de E dans G puis sa bijection réciproque.



- La fonction

$$q : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+ \\ x \longmapsto x^2$$

est bijective et sa bijection réciproque est

$$q^{-1} : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}_*^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x}$$

- La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ est une bijection.
Sa bijection réciproque est la fonction $\ln : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$

2.7 Applications et cardinaux

Si E et G sont des ensembles finis, le caractère injectif ou surjectif d'une application de E dans G nous renseigne sur les cardinaux de chacun de ces ensembles.

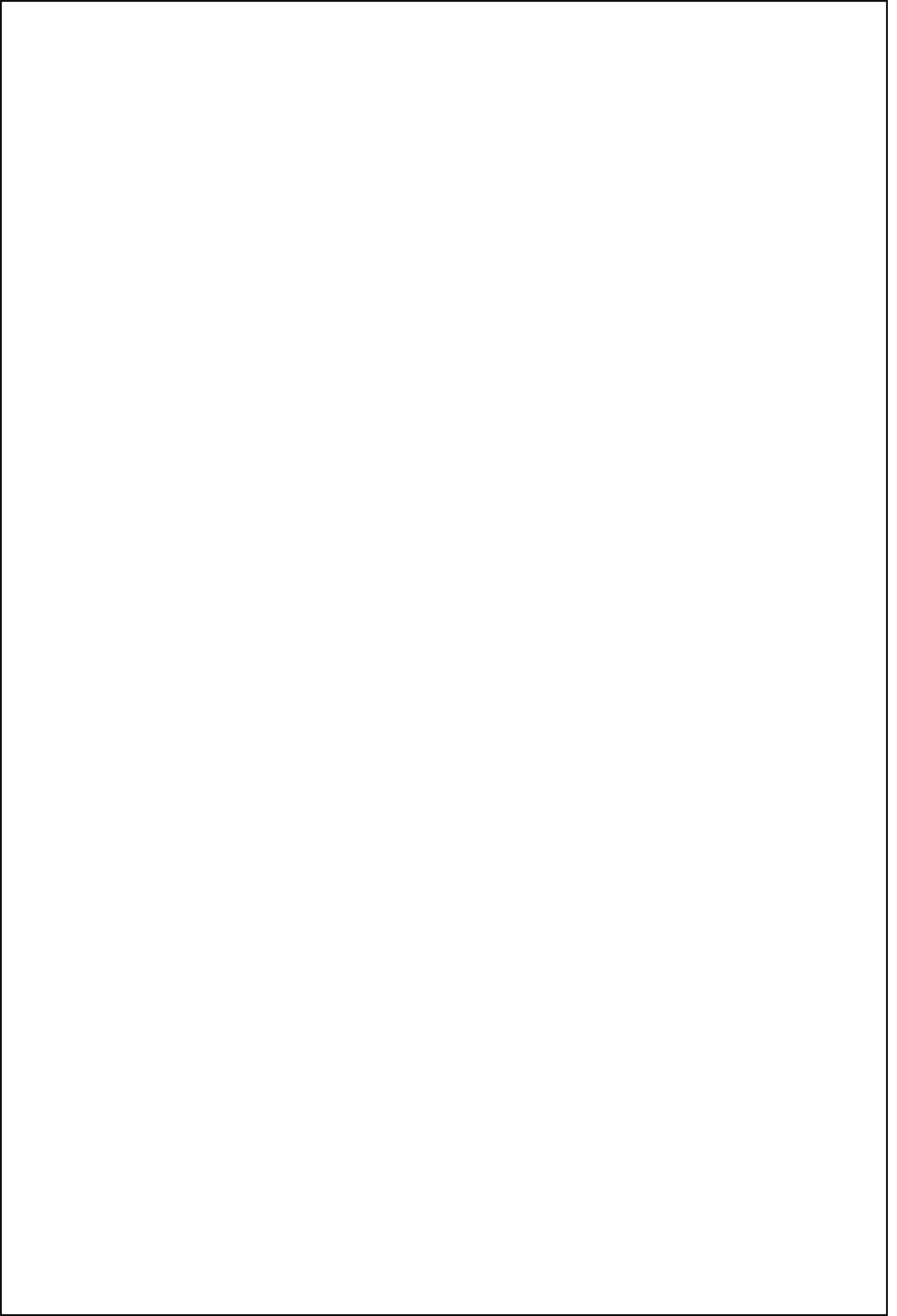
Précisément,

- Si l'on peut construire une application *injective* de E dans G , c'est que

$$\text{Card}(E) \leq \text{Card}(G)$$

En effet, il doit y avoir, dans G , suffisamment d'éléments pour pouvoir associer un élément différent à chaque élément de E .

- Si l'on peut construire une application *surjective* de E dans G , c'est que



$$\text{Card}(E) \geq \text{Card}(G)$$

En effet, il doit y avoir, dans E , suffisamment d'éléments pour pouvoir en associer un à chaque élément de G .

- Enfin, on peut construire une application *bijective* de E dans G si et seulement si

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(G)$$

En étendant ces idées aux ensembles infinis, il est alors possible de comparer la taille de deux ensembles infinis (on parle encore de cardinal pour ces ensembles infinis). Précisément deux ensembles infinis E et G sont dits de même cardinal s'il est possible de construire une *bijection* de l'un dans l'autre (on dit alors que E et G sont équipotents). C'est ainsi que l'on peut montrer que les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{N}^2 , \mathbb{Z} et \mathbb{Q} sont équipotents.

D'autre part, une étude poussée de ces notions a permis de montrer qu'il existait plusieurs tailles d'infini.

On peut en particulier montrer qu'il n'existe aucune bijection possible entre un ensemble E et l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est toujours significativement plus grand que E .

Par ailleurs, on peut montrer (notamment à l'aide de l'écriture décimale des nombres réels) qu'il existe une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et \mathbb{R} . Autrement dit, le cardinal de \mathbb{R} est significativement plus grand que celui de \mathbb{N} et on peut construire une échelle de tailles :

- Le cardinal de \mathbb{N} (et donc de \mathbb{Z} , de \mathbb{Q} , etc) est noté \aleph_0 . C'est l'infini *dénombrable*.
- Le cardinal de \mathbb{R} est noté \aleph_1 . On dit que \mathbb{R} a la *puissance du continu* et par convention, on a $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

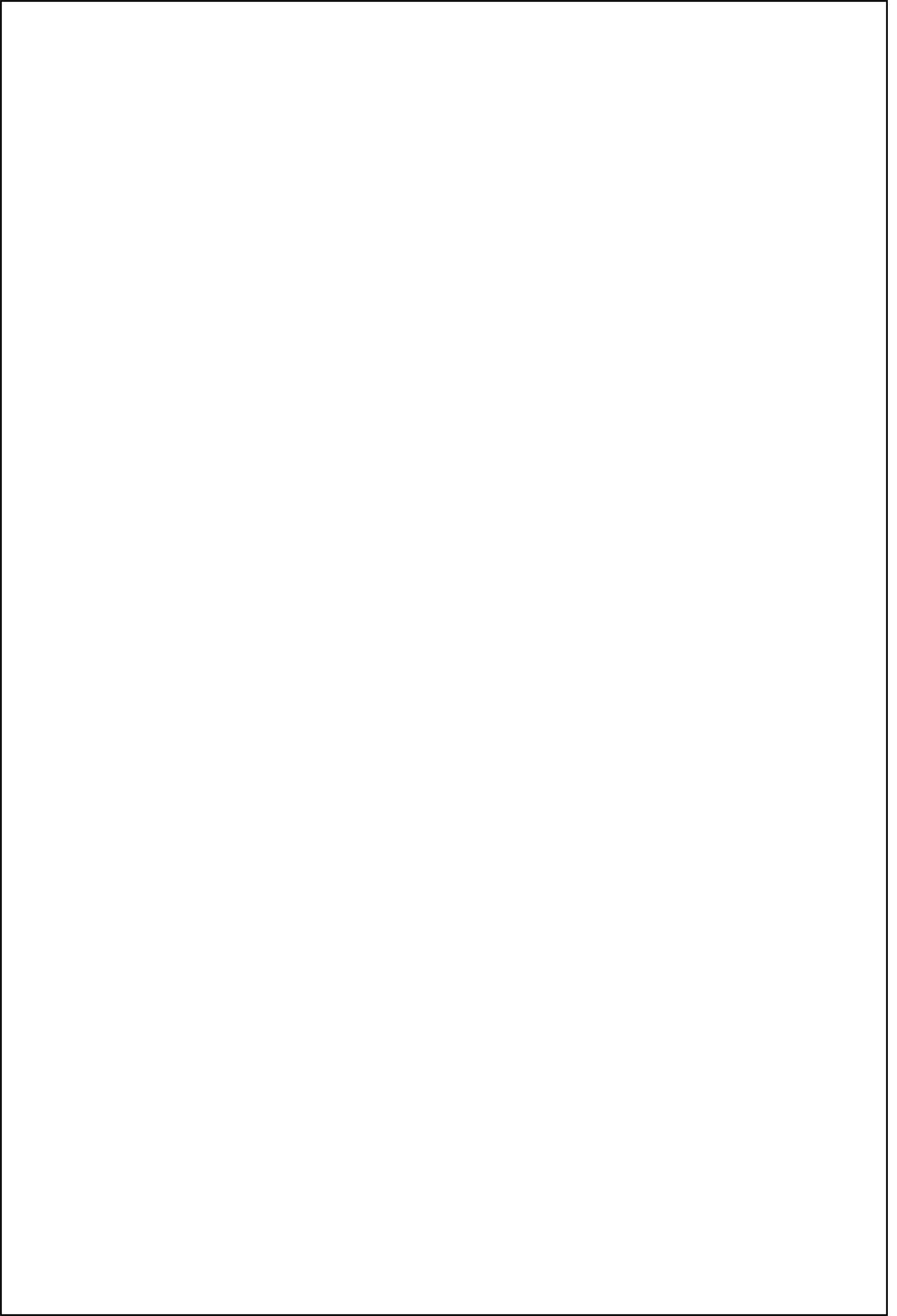
Note : une question importante qui divise toujours la communauté des mathématiciens est de savoir s'il existe une taille d'infini comprise entre \aleph_0 et \aleph_1 . Autrement dit, existe-t-il un ensemble qui contient strictement plus d'éléments que \mathbb{N} mais strictement moins d'éléments de \mathbb{R} ?

3 Relations binaires

3.1 Définition

Étant donné un ensemble E , on appelle *relation binaire sur E* tout processus permettant de relier deux à deux certains éléments de E .

Les fonctions et les applications de E dans lui-même sont un exemple de relation binaire que l'on peut définir sur E , les liens étant définis par les couples $(x, f(x))$.



De façon générale, une relation binaire sur E est définie par l'ensemble des couples formés par cette relation.

Formellement, une relation binaire τ sur E est donc définie par un sous ensemble G_τ du produit cartésien $E \times E$.

Le sous ensemble G_τ est appelé *le graphe de la relation τ* pour tout couple $(a, b) \in E \times E$, on notera

$$a \tau b \iff (a, b) \in G_\tau$$

Exemples :

- Les relations \leq et $<$ sont des relations binaires sur \mathbb{R} et ses sous-ensembles.
- La relation \subset est une relation binaire sur les ensembles $\mathcal{P}(E)$.
- Les relations de divisibilités (" \mid ") et de congruence (" \equiv ") sont des relations binaires sur les ensembles d'entiers.

3.2 Représentations graphiques

Si E est un ensemble fini, on peut représenter une relation binaire τ sur E par un diagramme de Venn, en reliant par des flèches les couples de l'ensemble G_τ .

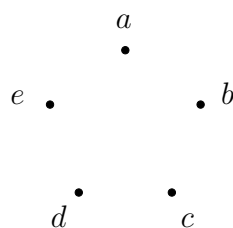
On peut également représenter une relation binaire τ sur E en donnant l'ensemble $E \times E$ sous la forme d'une table ou sous la forme d'une matrice carrée pleine de bits. Les cases cochées et/ou les 1 représentant les couples liés par la relation τ .

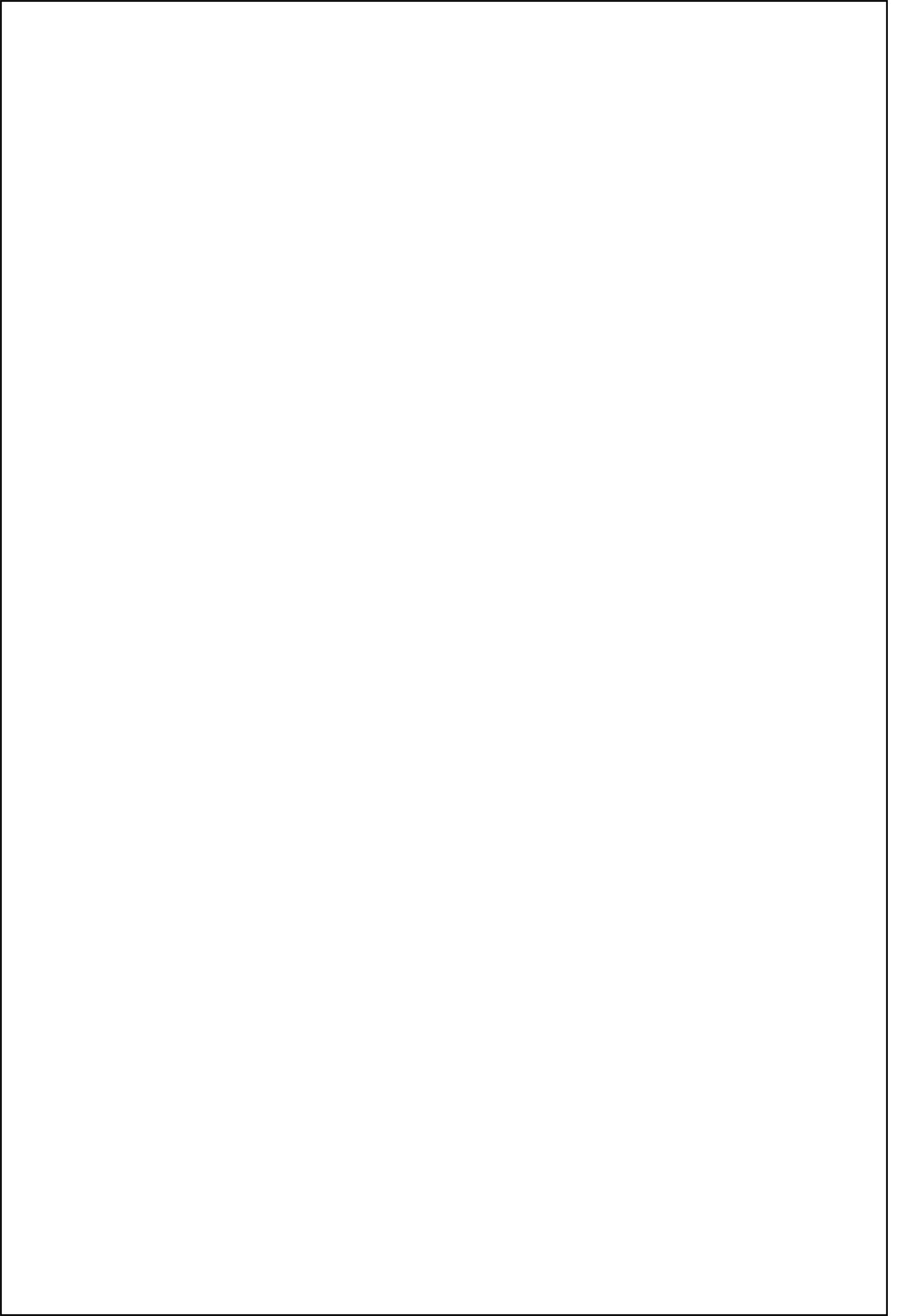
Exemple : soit $E = \{a, b, c, d, e\}$.

1. Construire une relation binaire τ sur E en cochant des cases dans le tableau à double entrée ci-dessous.

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

2. Donner sa représentation matricielle.
3. Représenter la relation τ sur le diagramme ci-dessous.





3.3 Propriétés des relations binaires

Définitions

Soit \mathfrak{r} une relation binaire définie sur un ensemble E .

- La relation \mathfrak{r} est dite *réflexive* si

$$\forall a \in E, \quad a \mathfrak{r} a$$

- La relation \mathfrak{r} est dite *transitive* si

$$\forall a, b, c \in E, \quad (a \mathfrak{r} b \text{ et } b \mathfrak{r} c) \Rightarrow (a \mathfrak{r} c)$$

- La relation \mathfrak{r} est dite *symétrique* si

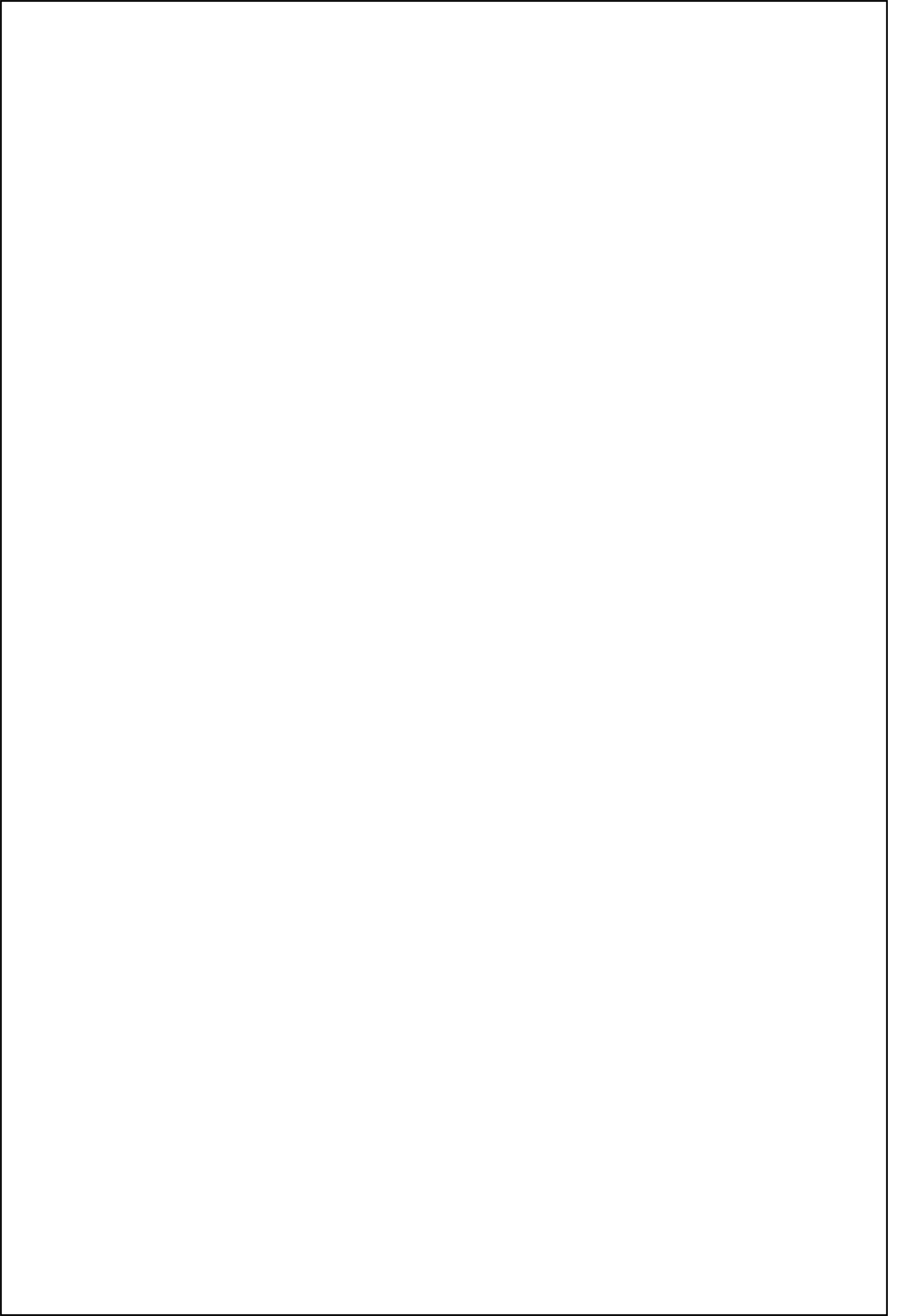
$$\forall (a, b) \in E^2, \quad a \mathfrak{r} b \Rightarrow b \mathfrak{r} a \quad \text{ou encore} \quad \forall (a, b) \in G_{\mathfrak{r}}, \quad (b, a) \in G_{\mathfrak{r}}$$

- La relation \mathfrak{r} est dite *anti-symétrique* si

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad (a \mathfrak{r} b \text{ et } b \mathfrak{r} a) \Rightarrow (a = b)$$

Exemple : compléter le tableau ci-dessous résumant les propriétés des relations binaires usuelles :

	réflexive	transitive	symétrique	anti-symétrique
\leq	✓	✓		✓
$<$		✓		✓
\subset	✓	✓		✓
$ $	✓	✓		✓
\equiv	✓	✓	✓	
\mathfrak{r}				



3.4 Relations d'ordre

3.4.1 Définitions

Définitions (relation d'ordre, ensemble ordonné)

Soit E un ensemble. Une relation binaire sur E est appelée *relation d'ordre* si elle est *réflexive, transitive et anti-symétrique*.

Par ailleurs, une relation d'ordre \mathfrak{r} est dite *totale* si

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad a \mathfrak{r} b \text{ ou } b \mathfrak{r} a$$

Enfin, un ensemble muni d'une relation d'ordre sera dit *ordonné*.

Exemples : les relations \leq , \subset et $|$ sont des relations d'ordre sur les ensembles associés, la relation \leq étant totale sur \mathbb{R} .

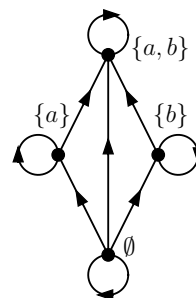
3.4.2 Diagramme de Hasse

Du fait des propriétés d'une relation d'ordre, il est possible de simplifier la représentation sagittale d'une telle relation.

Ainsi, si $E = \{a, b\}$, on peut représenter la relation d'ordre \subset sur

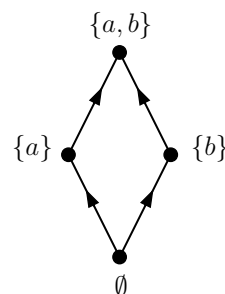
$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

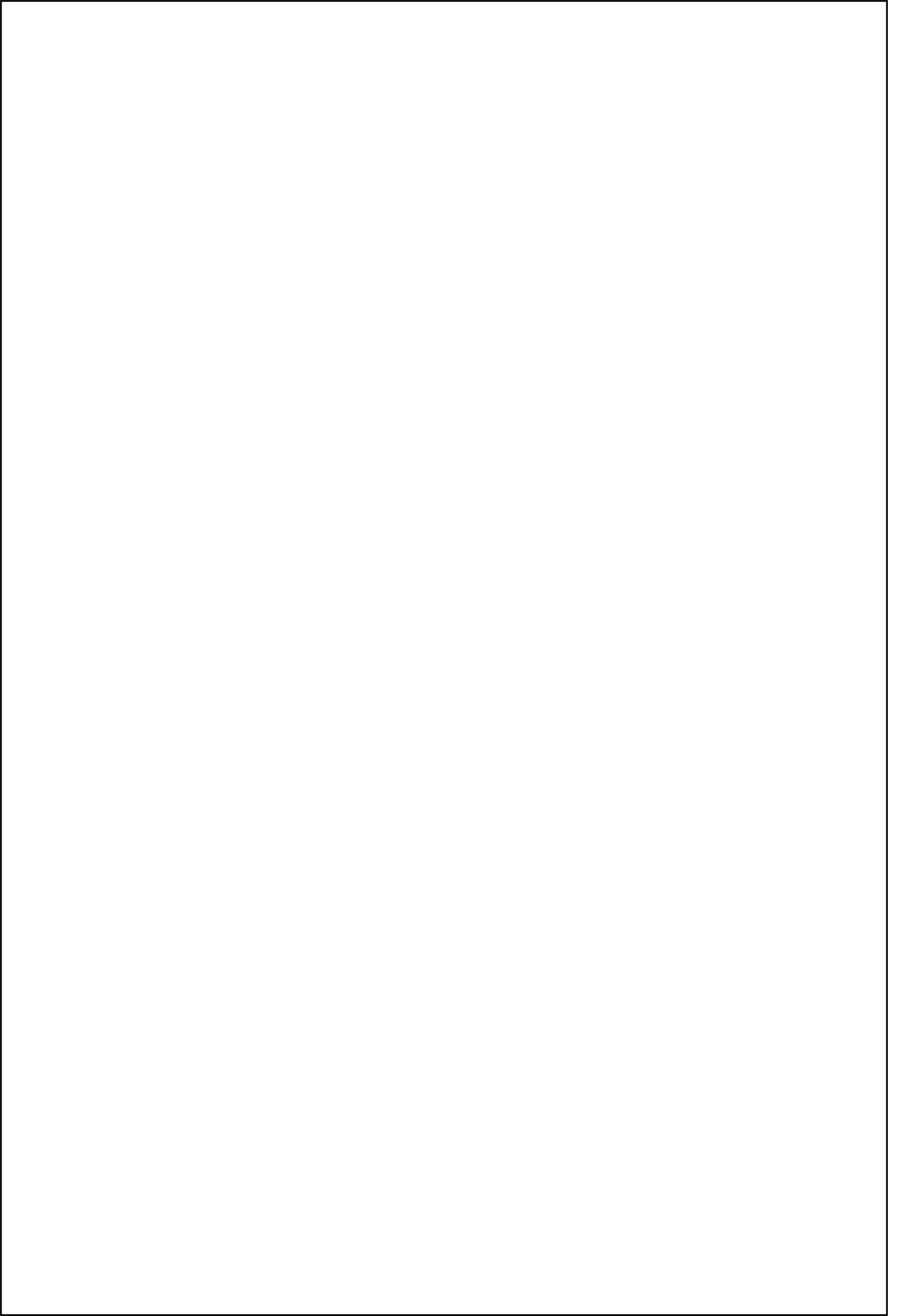
à l'aide du ci-contre.



En tenant compte des propriétés de la relation d'ordre, on peut alors simplifier ce diagramme en supprimant les boucles (indiquant que la relation des réflexive) ainsi que toutes les flèches qui peuvent être déduites de la transitivité.

On obtient ainsi le *diagramme de Hasse* de la relation représentée.





Exercice : tracer le diagramme de Hasse pour les relations " \mid " et " \leq " dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ puis dans les diviseurs de 30.

3.4.3 Extrema d'un ensemble ordonné

Dans un ensemble ordonné, on peut distinguer différents éléments particulier par rapport à la relation d'ordre.

Ainsi, soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre notée \triangleleft .

Définition (élément maximal)

Un élément $m \in E$ est *maximal* si

$$\forall x \in E, \quad x \triangleleft m \Rightarrow x = m$$

Un élément $m \in E$ est *minimal* si

$$\forall x \in E, \quad m \triangleleft x \Rightarrow x = m$$

Notes : si l'ordre \triangleleft n'est pas total sur E , il peut exister plusieurs éléments maximaux et minimaux.

Définition (plus grand élément)

Un élément $g \in E$ est le *plus grand élément* de E si

$$\forall x \in E, \quad x \triangleleft g$$

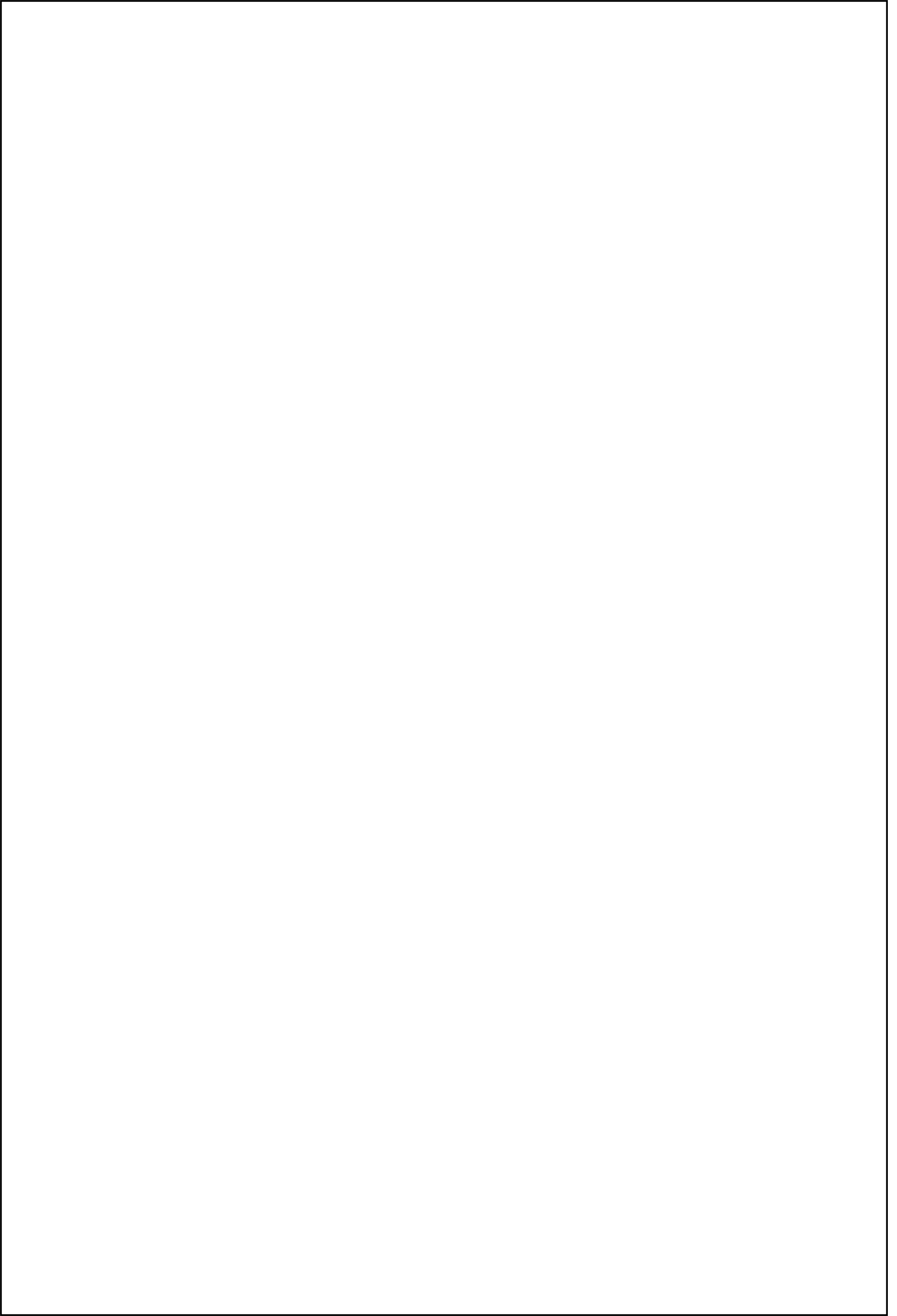
Un élément $p \in E$ est le *plus petit élément* de E si

$$\forall x \in E, \quad p \triangleleft x$$

Notes :

- Pour qu'un élément soit le plus grand ou le plus petit élément de E , il doit en particulier être comparé à tous les éléments de E .
- Si un plus grand (resp. plus petit) élément existe, alors il est unique et c'est un maximum (resp. minimum).

Exercice : repérer les éléments extrêmes (max/min, plus grand / plus petit élément) sur les diagrammes précédents.



3.5 Relations d'équivalence

Définition (relation d'équivalence)

Soit E un ensemble. Une relation binaire sur E est appelée *relation d'équivalence* si elle est **réflexive, transitive et symétrique**.

Exemples : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation de congruence modulo n (notée \equiv_n) est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .

Définition (classes d'équivalence)

Soient E un ensemble, τ une relation d'équivalence sur E et a un élément de E .

On appelle *classe d'équivalence de a* pour la relation τ **l'ensemble des éléments de E en relation avec a** :

$$Cl_{\tau}(a) = \{b \in E \mid a \tau b\}$$

L'ensemble des classes d'équivalences de E pour la relation τ est appelé **l'espace quotient et E par τ** , note E/τ .

Propriétés

Soient E un ensemble et τ une relation d'équivalence sur E .

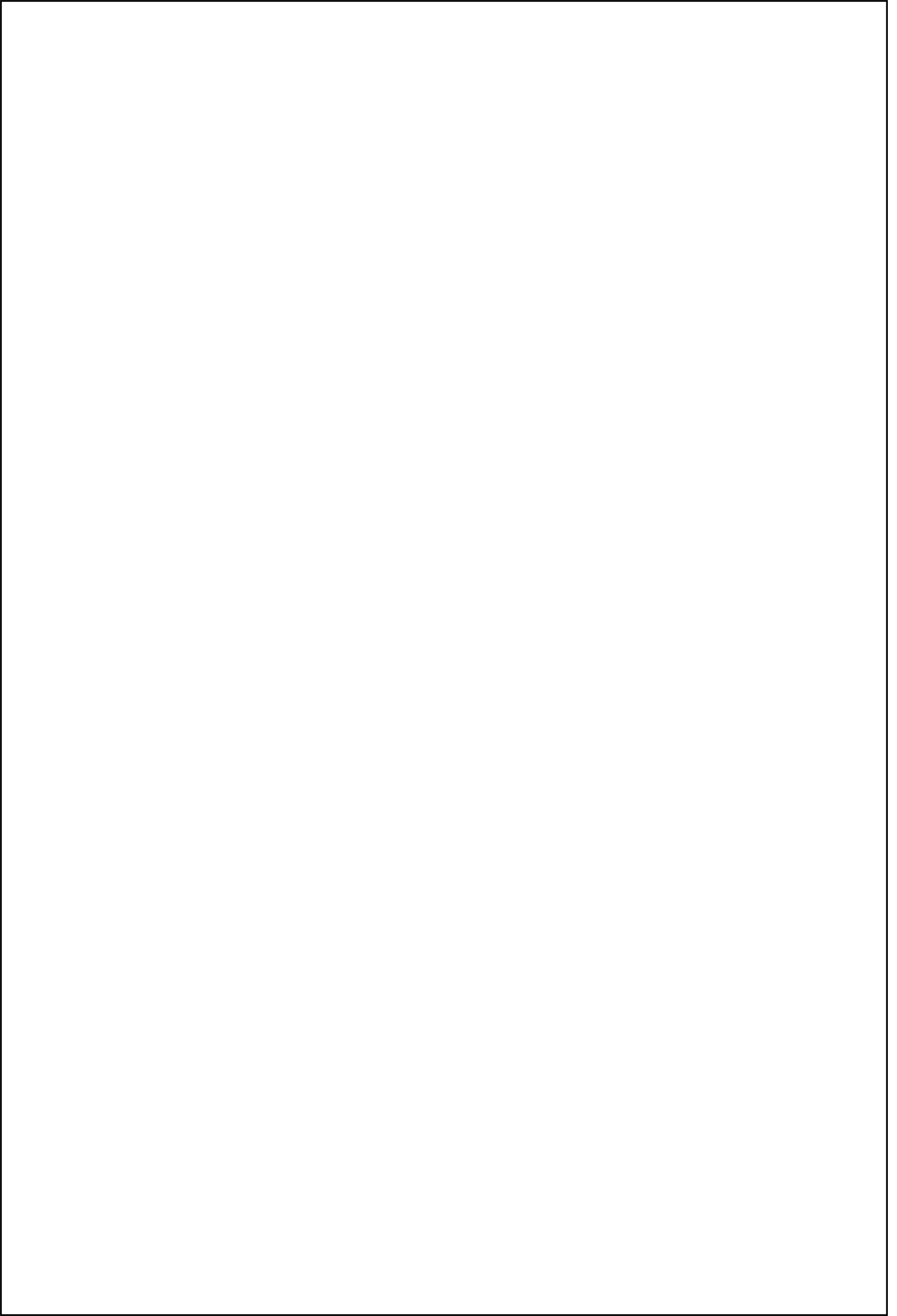
- $\forall a \in E, a \in Cl_{\tau}(a)$
- $\forall a, b \in E, Cl_{\tau}(a) \cap Cl_{\tau}(b) \neq \emptyset \Rightarrow Cl_{\tau}(a) = Cl_{\tau}(b)$

Théorème

- Soient E un ensemble et τ une relation d'équivalence sur E . L'ensemble des classes d'équivalence de E pour τ forme **une partition de E** .
- Pour toute partition (A_1, \dots, A_n) de E , la relation binaire τ définie par

$$a \tau b \iff \exists i \in \{1, \dots, n\} \mid a \text{ et } b \in A_i$$

est **une relation d'équivalence sur E** .



Exemple : pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, en notant \equiv_n la relation de congruence modulo n , pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a

$$C\ell_{\equiv_n}(a) = \{a + n k, k \in \mathbb{Z}\}$$

L'ensemble quotient \mathbb{Z} / \equiv_n est habituellement noté $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$.

