Topologia

Giacomo Dutto

Settembre-Dicembre 2025

Indice

Capitolo 1

Spazi Topologici e spazi metrici

1.1 Aperti, chiusi e continuità

DEF. $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **APERTO** se tutti i suoi punti sono interni.

$$i.e.\ \forall p \in A\ \exists r > 0\ t.c.\ I_r(p) \subseteq A$$

$B \subseteq \mathcal{R}$ si dice **CHIUSO** se B^c (complementare di B) è aperto.

Prop. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale:

1) $\varnothing \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R}$ sono aperti
2) Sia I un qualunque insieme di indici e $\forall i \in I$ sia A_i insieme aperto di $\mathbb{R} \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ è aperto
3) Siano $A_1, \ldots, A_k$ aperti di $\mathbb{R} \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$ aperto

Oss. Non si estende all'intersezione di infiniti insiemi:
e.g $\forall n$ sia $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightsquigarrow$ aperto $\Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\} \rightsquigarrow$ non aperto

Memo Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in x se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ t.c.\ |x - y| > \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Il concetto di insieme aperto ci permette di dare una caratterizzazione equivalente.

Prop. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua sse per ogni aperto A di $\mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}$.

1.2 Topologia

DEF. Sia X un insieme. Una **TOPOLOGIA** τ su X è un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di X t.c:

Top1) $\varnothing \in \tau, X \in \tau$

Top2) Sia I un qualunque insieme di indici e $\forall i \in I$ sia $A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$

Top3) Sia $A_1, \ldots, A_k \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \tau$

La coppia (X, τ) viene detta **spazio topologico**. Gli elementi di τ vengono detti **insiemi aperti** di (X, τ)

Oss. Dato un insieme X potremmo considerare su di esso diverse topologie.

DEF. Un sottoinsieme C di uno spazio topologico (X, τ) si dice **CHIUSO** sse $X \backslash C$ è aperto.

Notazione

$$\text{Insieme dei chiusi} \rightsquigarrow \tau^*$$

Prop. Dato (X, τ) spazio topologico

1) $\varnothing, X \in \tau^*$
2) Sia I un qualunque insieme di indici e $\forall i \in I$ sia $C_i \in \tau^* \Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i \in \tau^*$
3) Siano $C_1, \ldots, C_k \in \tau^* \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} C_i \in \tau^*$

DEF. Siano τ e τ' due topologie su un dato X. Se $\tau' \supseteq \tau$ diaciamo che τ' è **PIÙ FINE** di τ (più aperti). Se $\tau' \subseteq \tau$ diciamo che τ' è **MENO FINE** di τ.

DEF. Uno spazio topologico (X, τ) è detto di **Hausdorff** (T_2) se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in X$ esistono aperti $U, V \in \tau \quad t.c. \quad x_1 \in U,\ x_2 \in V$ e $U \cap V = \varnothing$

Oss. Se (X, τ) Haussdorff è $\tau' \supseteq \tau$ (τ' più fine) $\Rightarrow (X, \tau')$ è di Haussdorff.

Notazione

1) Topologia banale: $\tau_B = \{\varnothing, X\}$ è la meno fine di tutte le altre topologie.
2) Topologia discreta: $\tau_D = \mathcal{P}(X)$, è la più fine di tute le altre topologie.

3) Topologia cofinita: $\tau_{cof} = \{A \subseteq X : |A^C| < \infty\} \cup \{\varnothing\}$
(nota: la cardinalità del complementare di A su X è finita).

4) Topologia del punto x: Sia $x \in X$ $\tau_x = \{A \in \mathcal{P}(x)\ t.c.\ x \in A\} \cup \{\varnothing\}$

5) Topologia Euclidea/standard/normale: $(\mathbb{R}, \varepsilon_1)$, dove $\varepsilon_1 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad t.c.\ A$ è aperto$\}$
La topologia euclidea $(\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ è di Hausdorff

Oss.

- Se $|X| < \infty \implies \tau_{cof} = \tau_D$
- Se X è infinito $\implies (X, \tau_{cof})$ non è di Hausdorff, infatti addirittura non ci sono aperti non vuoti disgiunti

1.3 Spazi metrici

DEF. Una **METRICA** su un insieme $X \neq \varnothing$ è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ t.c.:

D1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y, \in X$ "=0" sse x=y (Positività)

D2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$ (Simmetria)

D3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in X$ (Disuguaglianza triangolare)

$(X,d) \rightsquigarrow$ **SPAZIO METRICO**

Oss. Sia $X = \mathbb{R}^n,\ x, y \in X \rightsquigarrow x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$.
La **metrica euclidea** è così definita:

$$d_\varepsilon(x,y) = (\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Lemma Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz
Siano $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ allora $|x \cdot y| \leq ||x||_2 \cdot ||y||_2$ ove $||x||_2 = \sqrt{x \cdot x}$

DEF. La **metrica indotta su un sottoinsieme**: è la restrizione $d_E = d|_{E \times E}$ nello spazio metrico (X,d) con $E \subseteq X$

DEF. Dati (X,d) spazio metrico, $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ l'insieme:

$$^{d}B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$$

viene detto bolla di centro x e raggio ε in (X,d).
N.b. la bolla è aperta, per avere una bolla chiusa basta mettere $\leq$ nella definizione.

Memo Definiamo la seguente metrica su X insieme, con $p \in X$ che noi chiameremo **Metrica Discreta** d_0 :

$$B_r(p) = \begin{cases} p & \text{se } r \leq 1 \\ X & \text{se } r > 1 \end{cases}$$

DEF. Due metriche d_1 e d_2 definiamo sullo steso insieme X si dicono **EQUIVALENTI** (o per essere più precisi **uniformemente equivalenti** se $\exists\ m, M > 0$, t.c:

$$md_1(p,q) \leq d_2(p,q) \leq Md_1(p,q)\ \forall p,q \in X$$

Memo Metriche L^p su $\mathbb{R}^n$
Consideriariamo $\mathbb{R}^n$ e sia p $\in \mathbb{Z}_+$ o $p = \infty$ poniamo:

$$d_{L^p}(x,y) = \begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} & p \in \mathbb{Z}_+ \\ \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| & p = \infty \end{cases}$$

Prop. Se d_1, d_2 sono metriche equivalenti su X con

$$md_1(p,q) \leq d_2(p,q) \leq Md_1(p,q) \quad \forall p,q \in X$$

allora $\forall r \in 0$:

$$^{d_1}B_{\frac{r}{M}}(p) \subseteq {}^{d_2}B_r(p) \subseteq {}^{d_1}B_{\frac{r}{m}(p)}$$

1.4 Topologie indotte da metriche

Sia (X,d) spazio metrico possiamo imitare quello che abbiamo fatto per $(\mathbb{R}, d_\varepsilon)$, sia $A \subseteq (X,d)$, con $p \in A$ è **punto interno** ad A se $\exists r > 0\ t.c\ B_r(p) \subseteq A$.
Definiamo quindi una topologia τ_d su (X,d) ponendo:

$$\tau_d = \{A \subseteq X \quad t.c.\ \forall p \in A \text{ è un punto interno}\} \cup \{\varnothing\}$$

$$\tau_d = \{A \subseteq X \quad t.c.\ \forall p \in A\ \exists r > 0 \quad t.c.\ {}^dB_r(p) \subseteq A\} \cup \{\varnothing\}$$

$$\boxed{\tau_d \rightsquigarrow \textbf{TOPOLOGIA INDOTTA DALLA METRICA d}}$$

Prop. In (X, τ_d) le bolle aperte $B_r(p)$ sono insiemi aperti e le bolle chiuse $\{q \in X : d(p,q) \leq r\}$ sono insiemi chiusi.

Memo Su $\mathbb{R}^n$ chiameremo τ_{d_ε} e denoteremo con ε_n la **topologia Euclidea di $\mathbb{R}^n$**.

DEF. Uno spazio topologico (X, τ) si dirà **METRIZZABILE** se esiste una metrica d su X che induce la topologia τ.

Prop. Sia (X, d) spazio metrico. Allora (X, τ_d) è di Hausdorff.

DEF. Sia (X,d) spazio metrico. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice **LIMITATO** se $\exists M > 0$ t.c.:

$$d(x, y) \leq M \; \forall x, y \in A$$

Se $A \neq \varnothing$ e limitato definiamo il **diametro** di A:

$$\text{diamA}=\sup\{d(x, y) : x, y \in A\} < \infty$$

ATTENZIONE! La **LIMITATEZZA** non è una proprietà topologia, ma dipende dalla metrica che stiamo utilizzando!

Prop. Sia (X,d) spazio metrico. Si definisca $\tilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ tramite $\tilde{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$. Allora $\tilde{d}$ è una metrica, induce la stessa topologia di d e X è limitato rispetto a $\tilde{d}$.
$\tilde{d}$ è detta **metrica limitata standard associata a d**.

Oss. Vale che $\tilde{d}(x, y) \leq d(x, y) \; \forall x, y, \in X$. Tuttavia d e $\tilde{d}$ non sono due metriche equivalenti se X è illimitato rispetto a d.

Prop. Siano d e d' due metriche su un insieme X e τ_d le topologie indotte da queste metriche. Se $\exists M > 0$ t.c.

$$d'(x, y) \leq M d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

allora $\tau_{d'} \subseteq \tau_d$; i.e. τ_d è più fine di $\tau_{d'}$ In particolare, se d e d' sono equivalenti le due topologie indotte coincidono.

Prop. Dal fatto che abbiamo osservato che su $\mathbb{R}^n$ tutte le metriche L^P.
$d_{L^P}, p \in \mathbb{Z}_+, d_{L^\infty}$ sono equivalenti concludiamo che le topologie indotte coincidono.

$$\tau_{d_{L^\infty}} = \tau_{d_{L^P}} \; \forall p \in \mathbb{Z}_+$$

1.5 Spazi vettoriali normati

DEF. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Una **norma** su V è una funzione $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$ t.c.

N1) $\forall v \in V, ||v|| \geq 0$ e $||v|| = 0$ sse $v = 0_V$

N2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V \; ||\alpha v|| = |\alpha| \; ||v||$

N3) $\forall v, w \in V, ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

$V, || \cdot || \rightsquigarrow$ Spazio (vettoriale) normato

Prop. Sia $(V, || \cdot ||)$ spazio normato, la funzione $d : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$d(v, w) = ||v - w||$$

è una metrica su V, detta **METRICA INDOTTA DALLA NORMA**; in particolare ogni spazio normato è uno spazio topologico.

Oss. Per una metrica indotta da una norma vale che:

1) $d(v + z, w + z) = d(v, w) \; \forall v, w, z \in V$ (Invarianza per Traslazione)

2) $d(\alpha v, \alpha w) = |\alpha| d(v, w) \; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall v, w \in V$ (Omogeneità).

1.6 Intorni, basi di topologie e basi di intorni

DEF. Dato (X, τ) spazio topologico e $p \in X$ gli insiemi aperti contenenti p vengono detti **INTORNI DI P.**

$\mathcal{U}_p \rightsquigarrow$ **FAMIGLIA DEGLI INTORNI DI p**

La conoscenza di $\{\mathcal{U}_p\}_{p \in X}$ è equivalente alla conoscenza di τ.

Prop. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Allora $A \in \tau$ sse per ogni $p \in A$ $\exists U \in \mathcal{U}_p$ $t.c.$ $U \subseteq A$

DEF. Sia (X, τ) uno spazio topologico, una collezione $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è detta **bese per** τ se ogni aperto $A \in \tau$ si può scrivere come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

TEOREMA

a) Sia X un insieme e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ t.c.

   i) $\forall x \in X$ $\exists B \in \mathcal{B}$ $t.c.$ $x \in B$

   ii) Siano $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$ allora $\exists B_0 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_0 \subseteq B_1 \cap B_2$.

   Allora esiste un'unica topologia $\tau_{\mathcal{B}}$ su C t.c. $\mathcal{B}$ è una base di $\tau_{\mathcal{B}}$ $\rightsquigarrow$**topologia generata da** $\mathcal{B}$. Tale topologia può essere caratterizzata nel mondo seguente:

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{A \subseteq X \ t.c. \ \forall x \in A \ \exists B \in \mathcal{B} \ t.c. \ x \in B \subseteq A\} \cup \{\varnothing\}$$

b) Se (X, τ) spazio topologico e $\mathcal{B}$ base per τ allora $\mathcal{B}$ soddisfa i), ii) del punto precedente.

Oss. Dalla definizione di τ_B in particolare si ha che ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un elemento di τ_B

Oss.

- In particolare abbiamo dimostrato $\forall A \in \tau_B$ può essere espresso come unione degli elementi di base. Questa espressione tuttavia non è unica. (Differenza con le basi in algebra lineare).
- In generale una topologia ammetterà più basi.

DEF. Sia (X, τ) spazio topologico. Se $p \in X$ un sottoinsieme dell'insieme degli intorni di p $\mathcal{B}_p \subseteq \mathcal{U}_p$ si dice **base di intorni di p** se

$$\forall U \in \mathcal{U}_p \ \exists V \in \mathcal{B}_p \ t.c. \ V \subseteq U$$

Il seguente risultato ci permette, data una topologia, di costruire una base che la genera.

Prop. Sia (X, τ) spazio topologico

1) Se $\mathcal{B}$ è una base di τ e se $p \in X$ L'insieme $\mathcal{B}_p = \{B \in \mathcal{B} : p \in B\}$ è una base di intorni di p.

2) Se per ogni $p \in X$ è definita una base di intorni di p, $\mathcal{B}_p \implies \mathcal{B} = \{B \in \mathcal{B}_p \ t.c. \ p \in X\}$ è una base di τ.

ATTENZIONE! Le topologie indotte da metriche ammettono basi formate da bolle.

Prop. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi, rispettivamente di τ e τ' su X. Allora le seguenti sono equivalenti

1) τ' è più fine di τ

2) $\forall x \in X$ e $\forall B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B$ si ha che $\exists B' \in \mathcal{B}'$ t.c. $x \in B' \subset B$

Oss. Dalla ultima proposizione, scopriamo che le bolle possono essere inscatolate infatti su $\mathbb{R}^2$:

$$\varepsilon_2 = \tau_{d_2} = \tau_{d_\infty} = \tau_{d_1}$$

Capitolo 2

Insiemi e successioni

2.1 Parte interna, chiusura, frontiera

DEF. Dato $A \subset (X, \tau)$, un punto $p \in A$ è **interno ad A** se $\exists U \in \mathcal{U}_p$ t.c. $U \subseteq A$.
Un punto si dice invece **esterno** ad A se è interno al complementare $X \backslash A$.

DEF. L'insieme di tutti i punti interni di $A \subset (X, \tau)$ denotiamo con Int(A), $\mathring{A}$, A° è chiamato **parte interna di A**. $\mathring{A}$ è l'unione di tutti gli aperti che sono contenuti in A.

In particolare:

- $\mathring{A}$ è aperto $((A^\circ)^\circ = A^\circ)$
- A° è il più grande aperto contenuto in A

Dunque, se $A \in \tau \implies A = A^\circ$ e viceversa se $A = A^\circ \implies$ tutti i punti di A sono punti interni $\implies A \in \tau$ Per riassumere possiamo dire:

$$\boxed{A \in \tau \iff A^\circ = A}$$

Prop.
Parte interna e operazioni
Siano $A, B \subset (X, \tau)$

1) Se $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$
2) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$
3) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

DEF. La **chiusura** di $A \subseteq (X, \tau)$, indica con $\overline{A}$, è data dall'intersezione di tutti i chiusi che contengono A.
I punti di $\overline{A}$ vengono detti **punti aderenti ad A**:

- $\overline{A}$ è un chiuso ($\overline{\overline{A}} = \overline{A}$)
- $\overline{A}$ è il più piccolo chiuso che contiene A.

Prop. Sia $A \subseteq (X, \tau)$

1) $A \in \tau^*$ sse $A = \overline{A}$
2) $p \in \overline{A}$ sse $U \cap A \neq \varnothing \quad \forall U \in \mathcal{U}_p$

Prop.
Chiusura e operazioni:
Siano $A, B \subseteq (X, \tau)$

1) $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$
2) $(\overline{X \backslash A}) = X \backslash A^\circ$
3) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$
4) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

DEF. Sia (X, τ) spazio topologico, $A \subseteq X$ si dice **denso in** $B \subseteq X$ se $B \subseteq \overline{A}$. In particolare A **è denso in X** se $\overline{A} = X$

DEF. Sia $A \subseteq (X, \tau)$ chiusura **frontiera** (o **bordo**) di A.

$$Fr(A) = \delta A = \overline{A} \backslash A^\circ$$

Punti di $\delta A \rightsquigarrow$**punti di frontiera**.
$\forall p \in \delta A$ p non è interno né ad A né a $X \backslash A$.

$$i.e. \quad \forall U \in \mathcal{U}_p \quad \begin{aligned} &U \cap A \neq \varnothing \\ &U \cap (X \backslash A) \neq \varnothing \end{aligned}$$

Oss. $p \in \delta A$ può appartenere ad A o a A^c

Oss. Dalla definizione e dalla proposizione precedente si ha che:

- $\overline{A} \cap (\overline{X \backslash A}) = \overline{A} \cap (X \backslash A^\circ) = \overline{A} \backslash A^\circ = \delta A$
- $A^\circ, \delta A$ sono distinti $\Rightarrow \overline{A} = A^\circ \cup \delta A$
- $A \in \tau^*$ sse $A = \overline{A}$ sse $\delta A \subseteq A$ (sono chiuso se contengo tutti i punti di frontiera).

2.2 Insieme derivato, punti di accumulazione e punti isolati

C'è un altro modo di descrivere la chiusura di un insieme. Ci serve la seguente definizione.

DEF. Un punto $p \in X$ si dice **punto di accumulazione di** $E \subseteq X$ se

$$\forall U \in \mathcal{U}_p, \text{ (Consideriamo l'intorno bucato)} (U \setminus \{p\}) \cap E \neq \varnothing$$

L'insieme Der(E) dei punti di accumulazione di E si dice **insieme derivato di E**.

$$\text{(in altre parole } p \in Der(E) \text{ sse } p \in \overline{E \setminus \{p\}}$$

Oss. $p \in Der(E)$ può stare in E oppure no.

Prop. $\overline{E} = Der(E) \cup E$

DEF. Un punto $\underline{p \in E}$ si dice **punto isolato di E** se $\exists U \in \mathcal{U}_p$ t.c. $U \cap E = \{p\}$

$$\text{Insieme dei punti isolati} \rightsquigarrow Iso(E)$$

Prop.

1) $\overline{E} = Der(E) \cup Iso(E) \quad Der(E) \cap Iso(E) \neq \varnothing$
2) $E \in \tau^*$ (i.e. chiuso) $\iff Der(E) \subseteq E$ (E è chiuso sse contiene tutti i suoi punti di accumulazione)
3) $Iso(E) = E \setminus Der(E)$

Prop. Sia (X, τ) Hausdorff. Allora $\forall E \subseteq X \Rightarrow Der(E) \in \tau^*$

2.3 Convergenza di successioni e chiusura in spazi metrici

Sia (X,d) uno spazio metrico. Una prima proprietà:

Prop. E limitato sse $\overline{E}$ limitato.
(nota: Una caratterizzazione più ragionevole della chiusura in spazi metrici è data tramite il concetto di successioni convergenti$\rightsquigarrow$ strumento importante nel contesto degli spazi metrici.)

Memo Dato X insieme una successione in X è una funzione $x : \mathbb{N} \to X$

Notazione: $x(n) \rightsquigarrow x_n$
$\{x_n\} \rightsquigarrow$ Sucessione con termine generale x_n

DEF. Dato (X,τ) spazio topologico, una successione $\{x_n\}$ in X si dice **convergente** a $x \in X$ se

$$\forall A \in \mathcal{U}_x \ \exists N_A \text{ t.c. } x_n \in A \ \forall n > N_A$$

Oss. Se τ è la topologia indotta da una metrica d su X questo equivale a dire che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \text{ t.c } x_n \in {}^dB_\varepsilon(x) \ \forall n \geq N_\varepsilon$$

Questa è la nostra stessa definizione che conosciamo per successioni definite in $\mathbb{R}$, ed è equivalente:

$$\iff d(x_n, x) \longrightarrow 0 \qquad n \longrightarrow \infty$$

Oss. In spazi metrici (o più in generale in spazi di Hausdorff) il limite di una successione è unico! In tal caso useremo la notazione $\lim\limits_{n\to\infty}$

Data $\{x_n\}$ successione in X, una **sottosuccessione** di $\{x_n\}$ è una successione $\{x_{n_k}\}$ in X, ove $\{x_n\}$ e una successione strettamente crescente in $\mathbb{N}$

DEF. I **punti** (o valori) **limite** di una successione $\{x_n\}$ sono i limiti di sue sottosuccessioni convergenti.

Oss. Se $x_n \longrightarrow x \qquad n \longrightarrow \infty \implies$ x è l'unico punto limite di $\{x_n\}$

Oss. Ci sembra plausibile che se $x \in \overline{E} \subset X$ esiste una successione di punti in E che converge ad x. Questo non è sempre vero, ma nel caso di spazi metrici sì.

Prop. Sia (X,τ) uno spazio topologico e $A \subseteq X$ se esiste una successione di punti di A che converge a $x \in X$ allora $x \in \overline{A}$ Se (x,τ) è metrizzabile (i.e. τ è la topologia indotta da una metrica) allora vale anche il viceversa:

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\} \subseteq A \quad \text{t.c.} \quad x_n \longrightarrow x \quad n \longrightarrow \infty$$

Caratterizzazione dei punti di aderenza in spazi metrici tramite successioni.

Oss.

i) Ne deduciamo che $A \subset (X,d)$ spazio metrico.
È chiuso $\iff$ il limite di ogni successione convergente di punti di A appartiene ad A.

ii) Dato $x \in \overline{A} \subset (X,d), \{x_n\} \subseteq A$ t.c. $x_n \to x \quad n \to \infty$
Può essere scelta definitivamente non costante sse $x \in$ Der(A).

iii) Osserviamo che nella dimostrazione della seconda parte non abbiamo usato completamente la metrizzabilità. Ciò che serve davvero è l'esistenza della collezione numerabile di bolle centrate in x ${}^dB_{\frac{1}{n}}(x)$
$\rightsquigarrow$ I numerabilità di (X,τ) $\forall x \in X \quad \exists$ una famiglia numerabile $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ di intorni di x t.c. ogni intorno di x contiene un elemento di questa famiglia.
$\rightsquigarrow$ automatico per spazi metrici.

Prop. Sia (X,d) spazio metrico, $E \subseteq X$. Allora $p \in \overline{E}$ sse d(p,E)=0

Capitolo 3

Funzioni

3.1 Funzioni continue tra spazi metrici

Toy case

$$f : (\mathbb{R}, d_\varepsilon) \to (\mathbb{R}, d_\varepsilon)$$

f è continua in $p \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad \text{t.c. } |x - p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

$$\text{i.e. } \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad \text{ t.c. } \;\; f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$$

Possiamo estendere questa definizione al caso di funzioni tra spazi metrici.

DEF. Siano (X,d), (Y,d') spazi metrici, $f : (X, d) \to (Y, d')$ diciamo che f **è continua in** $p \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad \text{t.c. } \;\; d(x, p) < \delta \implies d'(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

$$\text{i.e.} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \quad \text{t.c. } \;\; f({}^{d}B_\delta(p)) \subseteq {}^{d'}B_\varepsilon(f(p))$$

Diaciamo che f è **continua su** $E \subseteq (X, d)$ se lo è in ogni punto di E.

Oss. La continuità dunque dipende non solo da una f ha anche dalle metriche che mettiamo in partenza e in arrivo.

Il prossimo teorema estende il risultato visto per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a inizio corso dando varie caratterizzazioni del concetto di continuità. Nel contesto particolare degli spazi metrici abbiamo anche una caratterizzazione tramite successioni convergenti.

TEOREMA Sia $f : (X, d) \to (Y, d')$ funzione tra spazi metrici. Allora le seguenti sono equivalenti:

1) f è continua (in X)
2) $\forall A \in \tau_{d'}, \; f^{-1}(A) \in \tau_d$
3) $\forall C \in (\tau_{d'})^*, f^{-1}(C) \in (\tau_d)^*$

4) $\forall E \subseteq X,\ f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$

5) Sia $\{p_n\} \subset X$ t.c. $p_n \to p \quad n \to \infty$ allora $f(p_n) \to f(p) \quad n \to \infty$

Oss. Quando considereremo spazi topologici non metrizzabili ci rimarranno le caratterizzazioni 2,3,4 e un analogo della 1, che usa intorni invece che bolle.

DEF. Diciamo che $f : (X, d) \to (Y, d')$ è un' **isometria** (preserva le distanze tra punti), se $\forall x_1, x_2 \in X$

$$d(x_1, x_2) = d'(f(x_1), f(x_2))$$

Diremo che (X,d) e (Y,d') sono **ISOMETRICI** se esiste tra loro un'isometria suriettiva.

Prop.

i) Un'isometria $f : (X, d) \to (Y, d')$ è continua

ii) Un'isometria $f : (X, d) \to (Y, d')$ suriettiva è continua, biettiva, con inversa continua=OMEOMORFISMO; e la sua inversa è un'isometria.

Oss. Abbiamo caratterizzato la continuità per funzioni tra spazi metrici utilizzando le successioni convergenti.
Una caratterizzazione analoga si ha per il limite di una funzione $f : (X, d) \to (Y, d')$ tra spazi metrici quando p si avvicina ad un punto di accumulazione $p_0 \in X$.

DEF. Sia p_0 punto di accumulazione per X si dice che $l \in Y$ è **limite** di $f(p)$ per p che tende a $p_0 \in X$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ t.c. } f({}^{d}B_\delta(p_0)) \subseteq {}^{d'}B_\varepsilon(l)$$

Prop. Si ha che $\lim_{p \to p_o} f(p) = l$ sse $\forall \{p_n\} \subset X$ t.c. $p_n \to p_o \quad n \to \infty$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = l$

3.2 Funzioni continue tra spazi topologici

DEF. Una funzione $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ tra due spazi topologici si dice **continua** se per ogni aperto $A \in \tau'$ la controimmagine $f^{-1}(A) \in \tau$.

Oss. La continuità oltre che dipendere da f dipende dalle topologie che sto considerando.

In questo contesto abbiamo le seguenti caratterizzazioni della continuità

TEOREMA Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ tra due spazi topologici.
Allora le seguenti sono equivalenti:

i) $\forall A \in \tau',\ f^{-1}(A) \in \tau$

ii) $\forall C \in (\tau')^*,\ f^{-1}(C) \in \tau^*$

iii) $\forall E \subseteq X,\ f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$

iv) $\forall p \in X,\ \forall V \in \mathcal{U}_{f(p)}\ \exists\ U \in \mathcal{U}_p$ t.c. $f(U) \subset V$

(Nota: se la condizione (iv) vale per $p \in X$, diciamo che f è **continua in p**)

Corollario Se $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua e suriettiva e $D \subseteq$ denso in X $\implies$ f(D) è denso in Y.

Nota introduttiva: se di una topologia τ' è nota una base abbiamo un modo più facile per verificare la continuità di una funzione $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$.

Prop. Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$

i) Sia $\mathcal{B}'$ una base per τ'. Allora f è continua sse

$$f^{-1}(B) \in \tau \ \ \forall B \in \mathcal{B}'$$

ii) Sia $p \in X$, $q = f(p)$ e sia $\mathcal{B}_q$ una base di intorni di q allora f è continua in p sse:

$$\forall\ V \in \mathcal{B}_q \ \ \exists U \in \mathcal{U}_p \ \ \text{t.c.} \ \ f(U) \subseteq V$$

Nota: vediamo un primo modo di costruire funzioni continue a partire da altre funzioni continue.

Prop. Se $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$, $g : (Y, \tau') \to (Z, \tau'')$ sono continue, allora la mappa:

$$g \circ f : (X, \tau) \to (Z, \tau'') \quad \text{è continua.}$$

Prop. Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua e iniettiva e τ' è di Hausdorff allora τ è di Hausdorff.

3.3 Topologia iniziale per una funzione e topologia indotta

Sia X insieme, sia (Y, τ') spazio topologico e $g : X \to (Y, \tau')$

DEF. Chiamiamo **Topologia iniziale per g** la topologia τ_g meno fine che rende g continua.

$$\implies \tau_g = \{V \subseteq X \ \ \text{t.c.} \ \ \exists\ U \in \tau' \ \ \text{t.c.} \ \ V = g^{-1}(U)\}$$

Nota: $g^{-1}(U)$ contiene solo le controimmagini degli aperti in τ'.

Oss. Più in generale se $g : X \to (Y, \tau'_i) \quad i \in I$.

La topologia iniziale τ su X rispetto alla famiglia di funzioni $\{g_i\}_{i \in I}$ è la topologia meno fine rispetto a cui tutte le g_i sono continue:

$$\tau = \{V \subseteq X \ \ \text{t.c.} \ \ \exists\ i \in I : \exists U \in \tau'_i \ \ \text{t.c.} \ \ V = g_i^{-1}(U)\}$$

Un caso particolarmente importante è quello di topologia di sottospazio (o topologia indotta)

DEF. Sia (X, τ) spazio topologico, $E \subseteq X$ si definisce **topologia indotta da E su** τ la topologia $\tau_E = \tau_{i_E}$ data dalla topologia iniziale di

$$\begin{aligned} i_E : E &\to (X, \tau) \\ x &\to x \end{aligned}$$

Con $x \in E$

Oss. Gli aperti di un sottospazio E con topologia indotta non sono necessariamente aperti in (X, τ) tuttavia se $E \subseteq \tau$ allora sì, come dice la proposizione seguente.

Oss. Se $\mathcal{B}$ è una base per τ allora la collezione

$$\mathcal{B}_E = \{B \cap E : B \in \mathcal{B}\}$$

è una base per τ_E su E.

Prop. Sia (X, τ) spazio topologico, $E \subseteq X$

i) $(\tau_E)^* = \{C \cup E : C \in \tau^*\}$

ii) $E \in \tau$ sse $\tau_e = \{A \in \tau : A \subseteq E\}$
In particolare se $E \in \tau$ e $A \subseteq E$ si ha che A è aperto in E sse A aperto in X

iii) $E \in \tau^*$ sse $\tau_E^* = \{C \in \tau^* : C \subseteq E\}$

iv) $E' \subseteq E \implies (\tau_E)_{E'} = \tau_{E'}$

v) τ Hausdorff $\implies \tau_E$ Hausdorff.

3.4 Costruire funzioni continue

Prop. Siano $(X, \tau), (Y, \tau')$ spazi topologici:

a) **Inclusione:** Se $A \subset (X, \tau)$ (dotato della topologia indotta) per definizione $i_A : A \to X$ è continua.

b) **Restrizione dominio:** Se $f : (X, \tau) \to (Y, \tau)$ continua e $A \subseteq (X, \tau)$ allora la restrizione di f ad A
$$f|_a : (A, \tau_a) \to (Y, \tau')$$
è continua

c) **Restrizione/Espansione codominio:** Se $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua. Se $Z \subseteq (Y, \tau')$ t.c. $f(x) \subseteq Z$ allora la funzione
$$g : (X, \tau) \to (Z, \tau_z)$$
ottenuta restringendo il codominio di f è continua.

Se (Z, τ'') è uno spazio topologico contenente Y e t.c. la topologia indotta su Y è τ' allora la funzione
$$h : (X, \tau) \to (Z, \tau'')$$
ottenuta espandendo il codominio di f è continua.

d) **formulazione locale della continuità:** la funzione $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ è continua se X può essere scritto come unione di U_α aperti t.c. $f|_{U_\alpha}$ continua $\forall \alpha$.

Lemma (Lemma di incollamento)

Sia $X = A \cup B$ con A,B chiusi in (X, τ)

Siano $f : A \to (Y, \tau')$, $g : B \to (Y, \tau')$ continue.

Se $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A \cap B$ (rende h ben definita), allora detta $h : X \to Y$ la funzione definita da:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

si ha che h è continua.

Oss. Se A,B aperti la conclusione del lemma continua a valere ma non è altro che una conseguenza della (d) della precedente.

Capitolo 4

Omeomorfismi

4.1 Omeomorfismi

DEF. Siano $(X, \tau), (Y, \tau')$ spazi topologici e $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ biettiva. Se sia f che $f^{-1} : (Y, \tau') \to (X, \tau)$ sono continue, f è detta **omeomorfismo**.

In tal caso diciamo che (X, τ) **è omeomorfismo** a (Y, τ') è suriettivo $(X, \tau) \approx (Y, \tau')$

Oss. f^{-1} continua $\rightsquigarrow \forall U \in \tau, (f^{-1})^{-1}(U) \in \tau'$ (i.e. $f(U) \in \tau'$)

f manda aperti in aperti.

DEF. Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ diciamo che f è **aperta** se

$$\forall A \in \tau,\ f(A) \in \tau'$$

.

Diciamo invece che f è **chiusa** se

$$\forall C \in \tau^*,\ f(C) \in (\tau')^*$$

Prop. $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ è un omeomorfismo sse:

- f è **biunivoca, continua e aperta**.

ATTENZIONE!

$\rightsquigarrow$ Ogni proprietà di (X, τ) che può essere espressa in termini della topologia (i.e. in termini degli aperti) implica, tramite f, la stessa proprietà per (Y, τ')

$\rightsquigarrow$ **INVARIANTI TOPOLOGICI**

Sia (X, τ) spazio topologico, $E, E' \subseteq X$

Diciamo che E, E' sono omeomorfismi se $(E, \tau_E) \approx (E', \tau_{E'})$

In molti casi questo si dimostra provando una proprietà più forte

DEF. $E, E' \subseteq (X, \tau)$ si dicono **omeomorfismi in X** se

$$\exists\ f : (X, \tau) \to (X, \tau) \text{ omeorfismo t.c. } f(E) = E'$$

Prop. Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ e $\mathcal{B}$ una base di τ. Allora f è aperta sse $f(B) \in \tau' \quad \forall B \in \mathcal{B}$.

Capitolo 5

Topologia prodotto

5.1 Topologia Prodotto

N.B. Ricordiamo che se $f_i : X \to (Y_i, \tau_i) \quad i \in I$, la topologia iniziale τ su X rispetto alla famiglia di funzioni $\{f_i\}_{i \in I}$ è la topologia meno fine che rende tutte le f_i continue.

$$t = \{V \subseteq X \text{ t.c. } V = f_i^{-1}(U) \text{ per qualche } i \in I,\ U \in \tau_i\}$$

DEF. Consideriamo $(X, \tau_1),\ (Y, \tau_2)$ spazi topologici.
Diciamo **TOPOLOGIA PRODOTTO su X×Y** la topologia iniziale di $\{\pi_1, \pi_2\}$, ove:

$$\begin{aligned} \pi_1 \colon X \times Y &\longrightarrow (X, \tau_1) \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2 \colon X \times Y &\longrightarrow (Y, \tau_2) \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

Sono le proiezioni sui fattori.

Sia:

$$U_1 \in \tau_1 \quad \pi_1^{-1}(U_1) = U_1 \times Y$$
$$U_2 \in \tau_2 \quad \pi_2^{-1}(U_2) = X \times U_2$$

Se questi sono aperti sono in $\tau_1 \times \tau_2$ ci devono stare anche le loro intersezioni finite:

$$\pi^{-1}(U_1) \ \cap \ \pi_2^{-1}(U_2) = (U_1 \times Y) \ \cap \ (X \times U_2) = U_1 \times U_2$$

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 : \ \ U_i \in \tau_i \ \ i = 1, 2\}$$

$\mathcal{B}$ **non è una topologia** tuttavia $\mathcal{B}$ è una **base**.

$(B1)$ $\displaystyle\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \times Y$

$(B2)$ Siano $B = B_1 \times B_2$ e $B' = B_1' \times B_2'$ t.c. $B \cap B' \neq \emptyset$.

Sia (x,y) $\in B \cap B'$

$$(x,y) \in (B_1 \cap B_1') \times (B_2 \cap B_2')(\text{n.b. tutto questo} \in \mathcal{B}) \ = B \cap B'$$

$\implies \mathcal{B}$ genera una topologia che è la topologia prodotto $\tau_1 \times \tau_2$.

Più in generale se $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ spazi topologici abbiamo che la topologia prodotto su $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ (la topologia iniziale di $\{\pi_i\}_{i=1}^n$) è la topologia avente come base:

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times ... \times U_n : \ U_i \in \tau_i \quad i = 1, .., n\}$$

Da qui concentriamoci su prodotti finiti e in particolare n=2

- (X, τ_1), (X,τ_2)

Dalla definizione di $\tau_1 \times \tau_2$ segue che W $\subseteq X \times Y$ è aperto in $\tau_1 \times \tau_2$ sse $\forall w \in W \ \exists U_w, V_w$ t.c. $w \in U_w \times V_w \subseteq W$

Prop. Sia $\mathcal{B}_1$ base di τ_1, $\mathcal{B}_2$ base di τ_2.
Allora la collezione

$$\mathcal{B}_3 = B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, \ B_2 \in \mathcal{B}_2$$

è una base per $\tau_1 \times \tau_2$.

Prop. $\tau_1 \times \tau_2$ è di Hausdorff se e solo se $\tau_1, \ \tau_2$ sono di Haussdorff.

Per andare a dimostrare una versione del Teorema di Weirstrass per spazi topologici vogliamo capire meglio la compattezza per spazi metrici e in particolare per $\mathbb{R}$. Ricordiamo che $A \subseteq (X, d)$ spazio metrico si dice limitato se $\exists M > 0$ t.c.

$$d(x, y) \leq M \quad \forall x, y \in A$$

$\rightsquigarrow$ proprietà metrica, non topologica; e.g. $(\mathbb{R}, \varepsilon_1) \approx (0, 1) \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$

Ma (0,1) è limitato rispetto a d_ε mentre $\mathbb{R}$ no.

Prop. Sia (X,d) spazio metrico, $K \subseteq X, \ K$ compatto (in τ_d) allora K è limitato.

TEOREMA Teorema di Heine-Borel per $\mathbb{R}$
Sia $K \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$. Allora K compatto $\iff$ K è chiuso e limitato.

Oss. (serve proprio ($\mathbb{R}, \varepsilon_1$))
Consideriamo (X=[0,2), $\tau = \varepsilon_1|_X$) E=[1,2) chiuso in τ (E=[1,3]$\cap$ X). Limitato in d=$(d_\varepsilon)|_E$ $\forall x, y \in E \ d(x, y) < 1 \rightarrow$distanza indotta da d_ε su E. Ma E non compatto.

Corollario Sia $K \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ compatto. Allora K ha un massimo. i.e. $\exists a \in K$, t.c. $x \leq a \ \forall x \in K$

TEOREMA Compattezza e funzioni continue Siano (X, τ), (Y, τ') spazi topologici e $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua.
Sia $K \subseteq X$, K compatto. Allora f(K) è compatto.

TEOREMA Teorema di Weirstrass
Sia (X, τ) spazio topologico e $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \varepsilon_1$ continua. Se $K \subseteq X$ compatto esistono $p_1, p_2 \in K$ t.c.

$$f(p_1) \leq f(p) \leq f(p_2) \ \forall p \in K$$

Memo Ricordiamo che abbiamo visto che se $(X, d_1)(Y, d_2)$ spazi metrici possiamo definire su $X \times Y$ la metrica

$$\rho_\infty : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}_+$$
$$\rho_\infty((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = max\{d_1(p_1, q_1), d_2(p_2, q_2)\}$$

Abbiamo anche visto che ρ_∞ è equivalente a ρ_p $\forall p \in \mathbb{Z}_+$, in particolare a ρ_2

$$\rho_2((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = (d_1(p_1, q_1)^2, d_2(p_2, q_2)^2)^{\frac{1}{2}}$$

E.g. Preso $(\mathbb{R}, \varepsilon_1)$

su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o più in generale
su $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$

La topologia prodotto $\varepsilon_1 \times \ldots \times \varepsilon_1$ ha base

$$\{B \subseteq \mathbb{R}^n : B = \prod_{i=1}^{N} (x_i - r, x_i + r) : x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$$

Prop. $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ spazi topologici, $E_1 \subseteq X$, $E_2 \subseteq Y$. Allora in $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ si ha:

i) $E_1 \times E_2 \in \tau_1 \times \tau_2 \iff E_1 \in \tau_1, \ E_2 \in \tau_2$

ii) $(E_1 \times E_2)^0 = E_1^0 \times E_2^0$

iii) $(\overline{E_1 \times E_2}) = \overline{E}_1 \times \overline{E}_2$

iv) $\partial(E_1 \times E_2) = (\partial E_1 \times \overline{E}_2) \cup (\overline{E}_1 \times \partial E_2)$

Prop. Sia $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ prodotto topologico. Allora:

i) $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$ sono continue e aperte.

ii) **Proprietà universale della topologia prodotto**
Sia (Z, τ) spazio topologico, una funzione

$$f : (Z, \tau) \to (X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$$

è continua sse:

$$\pi_1 \circ f : (Z, \tau) \to (X, \tau_1)$$
$$\pi_2 \circ f : (Z, \tau) \to (Y, \tau_2)$$

lo sono.

iii) $\forall y \in Y \;\; X \times \{y\} \subseteq (X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ è omeomorfo a X
$\forall x \in X \;\; \{x\} \times Y \subseteq (X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ è omeomorfo a Y

Prop. Sia (X, τ) spazio topologico, allora τ è di Hausdorff sse Δ_x è un chiuso in $(X \times X, \tau \times \tau)$

TEOREMA

a) **Teorema del grafico chiuso**
Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua, τ' di Hausdorff. Allora:

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

è chiuso in $(X \times Y, \tau \times \tau')$

b) Siano $f, g : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continue, τ' di Hausdordd. Allora:

$$\{p \in X : f(p) = g(p)\} \in \tau^*$$

Capitolo 6

Invarianti

6.1 Invarianti

Gli **Invarianti topologici** sono proprietà invarianti per omeomorfismi.

$$(X,\tau) \text{ ha proprietà P e } (X,\tau) \approx (Y,\tau') \implies (Y,\tau') \text{ ha proprietà P}$$

Se (X,τ) ha proprietà P, ma (Y,τ') non ha proprietà P $\implies \nexists$ un omeomorfismo tra (X,τ) e (Y,τ')

In Gran parte del resto del corso studieremo alcune di queste proprietà che infatti saranno abbastanza forti da garantire risultati "altamente desiderabili", (ma non troppo in modo da non restituire troppo l'applicabilità di quello che vedremo)

Possiamo raggruppare le proprietà che vedremo nelle seguenti classi:

a) Assiomi di numerabilità

b) Assiomi di separazione

c) Condizioni di compattezza

d) Condizioni di connessione

6.2 Assiomi di Numerabilità

DEF. Sia (X,τ) spazio topologico. Se ogni $x \in X$ ha una base di intorni numerabili, (X,τ) si dice **I-numerabile (o N_1)**
[N.b. Ogni spazio topologico metrizzabile è N_1]
Il fatto più utile, che infatti abbiamo già visto, che segue dall' I-numerabilità è il seguente.

Prop. $(X,\tau)N_1$. Allora:

a) Sia $A \subseteq X$. $x \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\} \subseteq A$, t.c. $x_n \to x$ per $n \to \infty$.

b)
$$f : (X,\tau) \to (Y,\tau') \text{ continua}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \{x_n\} \subseteq X \text{ t.c. } \ x_n \to x \text{ per } n \to \infty;$$
$$\text{si ha } f(x_n) \to f(x) \text{ per } n \to \infty$$

Anche più importante è la seguente PROPRIETÀ (più forte):

DEF. Se (X, τ) ha una base numerabile è detto **II-NUMERABILE (o N_2)**

Oss.

- $N_2 \Rightarrow N_1$**:**
- $N_1 \nRightarrow N_2$:

Oss. In particolare abbiamo ottenuto che $\exists$ spazi metrici non N_2.
es:

$$(\mathbb{R}, \varepsilon_1) \text{ è } N_2 \quad \mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\} \text{ (base numerabile)}$$

$$(\mathbb{R}^n, \varepsilon_1) \text{ è } N_2 \quad \mathcal{B} = \{\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{Q} \text{ per } i = 1, \dots, n\} \text{ (base numerabile)}$$

$(\mathbb{R}^\omega, \tau_{prodotto})$ è N_2
$\mathcal{B} = \{\prod_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n : U_n$ Intervallo aperto con estremi in $\mathbb{Q}$ per un numero finito n$\}$

DEF. (X, τ) si dice **separabile** se esiste in X un sottoinsieme numerabile denso; i.e. $A \subseteq X$ t.c. $|A| \leq \aleph_0$ (è al più numerabile) e $\overline{A} = X$

Prop.

i) $(X, \tau) N_2 \Rightarrow$separabile

ii) (X, d) spazio metrico separabile $\Rightarrow (X, \tau_d)$ N_2

6.3 Assiomi di Separazione

La proprietà di Hausdorff ne è un esempio, ma ce ne sono altre.

DEF. Uno spazio topologico (X, τ) viene detto:

- T_0:
  Per ogni coppia di punti distinti esiste un aperto contenente uno di essi, ma non l'altro.

- T_1:
  $\forall x \neq y$ esistono due aperti uno contenente x ma non y e l'altro contenente y ma non x.

- T_2 **(Hausdorff)**:
  $\forall x \neq y$ esistono due aperti <u>disgiunti</u>, uno contenente x e l'altro contenente y.

- T_3:
  (X, τ) soddisfa T_1 e per ogni sottoinsieme chiuso F e ogni $x \notin F$ esistono due aperti disgiunti uno contenente F e l'altro contenente x.

- T_4:
  (X, τ) soddisfa T_1 e per ogni coppia di chiusi F_1, F_2 disgiunti esistono due aperti disgiunti che li separano.

Oss.

$$T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$$

ed è possibile costruire controesempi per le implicazioni inverse.

Prop. (X, τ) $T_1 \iff$ i singoletti $\{p\}$ sono chiusi.

Prop. (X, τ) $T_1, \ A \subset X$. Allora $x \in Der(A)$ sse ogni intorno di x contiene infiniti punti di A.

Ricordiamo inoltre che abbiamo già visto che se (X, τ) è T_2

- Il limite di una successione di punti di X convergente è unico.
- La proprietà T_2 passa a sottospazi e a prodotti qualunque.

TEOREMA Ogni spazio metrico (X, d) è T_4.

Capitolo 7

Compattezza

7.1 Compattezza

Un risultato fondamentale in analisi matematica è il Teorema dei valori estremali di Weierstrass che ci dice che:

$$\text{Se } f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ continua allora:}$$

$$\exists\ c, d \in [a, b]\ t.c.\ f(x) \leq f(c)\ \forall \in [a, b] \text{ e } f(x) \geq f(d)\ \forall \in [a, b]$$

Oss. Oltre che dalla continuità di f dipende in modo essenziale da una **proprietà** dello spazio topologico $[a, b] \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ che ora andiamo a studiare.
La proprietà è la **COMPATTEZZA**: in molte situazioni analitiche o geometriche è quella che ci permette di passare da una proprietà locale ad un risultato globale, come nel Teorema di Weirstrass appena citato.

DEF. Un **RICOPRIMENTO** di un sottoinsieme S di un insieme X è una famiglia di sottoinsiemi $\{U_i\}_{i \in I}$ di X t.c. $S \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ Il ricoprimento è detto **FINITO se** $|I| < \infty$.
Se $S = X \implies$ si ha $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = X$

E.g. $\{[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ è un ricoprimento di (0,1)$\subseteq \mathbb{R}$

DEF. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento di $S \subseteq X$ è $I' \subseteq I$, se $\{U_i\}_{i \in I}$ è ancora un ricoprimento di S. Diremo che è un **sottoricoprimento di** $\{U_i\}_{i \in I}$ **per S**.

E.g. Sia $U_r = (r, r + 3) \subseteq \mathbb{R} \implies \{U_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ ricoprimento di $\mathbb{R}$.
$\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è un suo sottoricoprimento. Se (X, τ) spazio topologico, $S \subseteq X$, $\{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento e $U_i \in \tau\ \forall i \in I \implies$ si dice **ricoprimento aperto di** $S \subseteq (X, \tau)$.

TEOREMA Siano $a < b$ in $\mathbb{R}$. L'intervallo $E = [a, b] \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ ha la seguente proprietà:
Da ogni ricoprimento aperto di E è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

DEF. $S \subseteq (X, \tau)$ si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto di S ammette un sottoricoprimento finito. S si dice **relativamente compatto** se $\overline{S}$ è compatto.

Oss. Si noti che la compattezza è definita utilizzando solo gli aperti.

$\rightsquigarrow$ Si tratta ancora una volta di un **invariante topologico!**

E.g.
- Ogni intervallo chiuso in $(\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ è compatto.
- $(\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ non è compatto.
- $(\mathbb{R}^n, \varepsilon_n)$ non è compatto.
- X t.c. $|X| = \infty$ con τ_0 la topologia discreta $\{\{p\}\}_{p \in X}$
  Infatti in tal caso X è compatto $\iff$ $|X| < \infty$.

Mostriamo qualche risultato che ci aiuti a costruire nuovi insiemi compatti a partire da compatti esistenti o più in generale a capire se un insieme è compatto.

Prop. Un sottoinsieme $S \subseteq (X, \tau)$ è compatto sse è compatto come spazio topologico con la topologia indotta τ_s

Prop.

i) $\tau' \subseteq \tau$ (X, τ) compatto $\implies$ (X, τ') compatto.

ii) (X, τ) spazio topologico, $\mathcal{B}$ base per τ. Allora:

$K \subseteq X$ compatto $\iff$ Per ogni ricoprimento aperto di K formato da elementi di $\mathcal{B}$ possiamo estrarre un sottoricoprimento finito.

Prop. Compattezza e chiusura

i) (X, τ) compatto, C chiuso in X $\implies$ C compatto.

ii) (X, τ) T_2, $K \subseteq X$ compatto $\implies$ K chiuso.

Claim Sia $x_0 \in X \backslash K$ mostriamo che $\exists U \in U_\infty$ t.c. $U \subseteq X \backslash K$.

Oss. Notiamo che abbiamo provato che se (X, τ) $T_2, K \subseteq X$, K compatto e $x_0 \notin K$

$$\exists U \in U_{x_0} \text{ e } V \in \tau,\ V \supseteq K\ t.c. U \cap V = 0$$

E.g. Visto che $[a, b] \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ compatto otteniamo quindi che intervalli della forma (c,d] o [c,d) o (c,d) non possono essere compatti (non sono chiusi).

Oss. L'ipotesi T_2 in (ii) è necessaria

Prop.

i) $K_1, ..., K_n$ compatti in $(X, \tau) \implies \bigcup_{i=1}^{h} K_i$ compatto

ii) (X, τ) T_2, $\{K_i\}_{i \in I}$ compatti $\implies \bigcap_{i \in I} K_i$ compatto.

Per andare a dimostrare una versione del Teorema di Weirstrass per spazi topologici vogliamo capire meglio la compattezza per spazi metrici e in particolare per $\mathbb{R}$. Ricordiamo che $A \subseteq (X, d)$ spazio metrico si dice limitato se $\exists M > 0$ t.c.

$$d(x, y) \leq M \ \forall x, y \in A$$

$\rightsquigarrow$ proprietà metrica, non topologica; e.g. $(\mathbb{R}, \varepsilon_1) \approx (0, 1) \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$

Ma (0,1) è limitato rispetto a d_ε mentre $\mathbb{R}$ no.

Prop. Sia (X,d) spazio metrico, $K \subseteq X, K$ compatto (in τ_d) allora K è limitato.

TEOREMA Teorema di Heine-Borel per $\mathbb{R}$
Sia $K \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$. Allora K compatto $\iff$ K è chiuso e limitato.

Oss. (serve proprio ($\mathbb{R}, \varepsilon_1$))
Consideriamo (X=[0,2), $\tau = \varepsilon_1|_X$) E=[1,2) chiuso in τ (E=[1,3]$\cap$ X). Limitato in d=$(d_\varepsilon)|_E$ $\forall x, y \in E$ $d(x, y) < 1$ $\rightarrow$distanza indotta da d_ε su E. Ma E non compatto.

Corollario Sia $K \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ compatto. Allora K ha un massimo. i.e. $\exists a \in K$, t.c $x \leq a \ \forall x \in K$

TEOREMA Compattezza e funzioni continue Siano (X, τ), (Y, τ') spazi topologici e $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ continua.
Sia $K \subseteq X$, K compatto. Allora f(K) è compatto.

TEOREMA Teorema di Weirstrass
Sia (X, τ) spazio topologico e $f : (X, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ continua. Se $K \subseteq X$ compatto esistono $p_1, p_2 \in K$ t.c.

$$f(p_1) \leq f(p) \leq f(p_2) \ \forall p \in K$$

Prop. Argomento compatto Hausdorff
Sia $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ biettiva, continua, (X, τ) compatto e (Y, τ') Hausdorff. Allora f è un omeomorfismo.
Questa applicazione del Teorema è uno strumento utilissimo.

DEF. Una funzione $f : (X, d_x) \to (Y, d_y)$ tra spazi metrici si dice **uniformemente continua** se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \delta > 0 \;\; \text{t.c} \;\; \forall x_0, x_1 \in X \;\; d_X(x_0, x_1) < \delta \implies d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon$$

Questo è un nuovo modo di vedere la continuità di una funzione.

TEOREMA (Heine-Cantor)
Siano $(X, d_x), (Y, d_y)$ spazi metrici, (X, d_x) compatto, $f : (X, d_x) \to (Y, d_y)$ continua. Allora f è uniformemente continua.

7.2 Compattezza e prodotti

Vedremo che il prodotto di un numero finito è ancora compatto. Questo in particolare ci servirà per dimostrare il Teorema di Heine-Borel in $\mathbb{R}^n$

TEOREMA Il prodotto di un numero di spazi topologici compatti è compatto.

Oss. Il Teorema di Tychonoff ci permette di provare (anche se non lo faremo, perché è difficile da provare) che il prodotto topologico di un numero infinito di compatti è compatto.

Possiamo ora caratterizzare i sottoinsiemi compatti di $(\mathbb{R}^n, \varepsilon_n)$

TEOREMA Heine-Borel per $\mathbb{R}^n$
Un sottoinsieme A di $(\mathbb{R}^n, \varepsilon_n)$ è compatto sse è chiuso ed è limitato rispetto a d_ε.

7.3 Compattificazione di Alexandrov

Due delle classi di spazi topologici che si comportano meglio in matematica sono gli spazi metrizzabili e gli spazi di Hausdorff compatti

$\rightsquigarrow$ Buone proprietà che ci permettono di ottenere teoremi desiderabili

La migliore cosa che può succedere se non sono in queste classi di resto è quella di essere un sottoinsieme di uno spazio con queste proprietà

spazi metrizzabili $\rightsquigarrow$ sottoinsieme spazio metrizzabile è metrizzabile

D'altra parte un sottoinsieme di uno spazio di Hausdorff compatto non è necessariamente compatto.

Q? Quando uno spazio topologico risulta essere omeomorfo ad
un sottoinsieme di uno spazio di Hausdorff compatto?

Una possibile risposta passa dalla seguente definizione:

DEF. (X, τ) si dice **localmente compatto** in $x \in X$ se $\exists K \subseteq X$, K compatto t.c. $\exists U \in \mathcal{U}_x$ t.c. $U \in K$.
Se localmente compatto in x $\forall x \in X \implies$ localmente compatto

ATTENZIONE!
Se (X, τ) localmente compatto, di Hausdorff (e non compatto), la seguente costruzione, nota con il nome di **Compattezza di Alexandrov** (o del punto) permette "di aggiungere" solo un punto a X e ottenere uno spazio compatto, di Hausdorff.

Oss. Sia (X, τ) T_2.
Consideriamo p_0 che non sia un punto di X, definiamo $\hat{X} = X \cup \{p_0\}$ e lo dotiamo della topologia

$$\hat{\tau} = \tau \cup \{V \subseteq \hat{X} \text{ t.c } p_0 \in V, X \backslash V \text{ compatto in } X\}$$

Oss. Per costrzione $(\hat{\tau})_X = \tau \qquad i : X \to \hat{X}$

$$\begin{aligned} \text{Sia } V \in \hat{\tau} : \text{se } p_0 \notin V &\implies i^{-1}(V) = V \in \tau \\ \text{se } p_0 \in V &\implies i^{-1}(V) = X \cap (\hat{X} \backslash K) = X \backslash K \in \tau \end{aligned}$$

$\implies (\hat{\tau})_X \subseteq \tau$ e ovviamente $\tau \subseteq \hat{\tau}_x$ (per definizione).

7.4 Compattezza per successioni

$\rightsquigarrow$ Formulazione alternativa della compattezza in spazi metrici.
$\rightarrow$ incredibilmente utile in analisi

DEF. Sia (X, d) spazio metrio, $K \subseteq X$. K si dice **compatto per successioni** se ogni successione $\{x_n\} \subseteq K$. Ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di K.

Vogliamo mostrare che compattezza e compattezza per successioni coincidono per spazi metrici (vedremo solo la dim di $\Rightarrow$).

Prop. Sia (X, τ) spazio topologico, $K \subseteq X$ compatto. Se $E \subseteq K$ e $|E| = \infty$ allora $Der(E) \neq \varnothing$

TEOREMA Sia (X, τ) spazio metrico, $K \subseteq X$. Allora:

K compatto (rispetto alla metrica τ_d indotta dalla metrica) $\iff$ K compatto per successioni

Oss. È possibile apprezzare la comodità di questa caratterizzazione riprovando <u>nel contesto di spazi metrici</u> !
Risultati sulla compattezza già dimostrati, ma con molta più fatica.

7.5 Spazi metrici completi

Concetto di completezza per uno spazio metrico $\rightsquigarrow$ fondamentale in molte parti dell'analisi matematica e della geometria.

Nonostante che si tratti di una proprietà metrica ci sono teoremi che la riguardano che hanno un forte carattere topologico, come quelli che legano la completezza con la compattezza

Vedremo:

- Proprietà fondamentali di uno spazio completo

- Alcuni primi esempi di spazi completi
- Teorema delle contrazioni ($\rightsquigarrow$ teorema del punto fisso) (in cui la completezza gioca un ruolo fondamentale).

DEF. Sia (X, τ) uno spazio metrico. Una successione $\{x_n\}$ in X si dice **di Cauchy** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \text{t.c.} \ \ \forall n, m \geq N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Prop. Ogni successione convergente in uno spazio metrico è di Cauchy.

N.B. Intuitivamente, le successioni di Cauchy sono quelle successioni che "vorrebbero" convergere. Tuttavia non è sempre così.

DEF. Uno spazio metrico (X,d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X converge ad un punto di X.

(e.g. in $X = (0,1) \subset (\mathbb{R}, d_\varepsilon)$ la successione $x_n = \frac{1}{n}$ la successione è di Cauchy ma non converge in X).

Oss. La differenza tra la definizione di convergenza e la definizione di successione di Cauchy è che nella prima è coinvolta la conoscenza del limite!

In uno spazio completo possiamo mostrare la convergenza senza conoscere il limite!

La prossima proprietà sarà utile per provare la compattezza di $(\mathbb{R}, d_\varepsilon)$

Prop. Sia $\{x_n\}$ successione di Cauchy in (X,d) allora $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato.

Inoltre, se x è un punto limite di $\{x_n\}$ (i.e. limite di successioni convergente) allora:

$$x_n \longrightarrow x \qquad n \longrightarrow \infty$$

Prop. Completezza e chiusura
Sia (X,d) spazio metrico e $E \subseteq X$

1) Se (X,d) è completo $\implies (\overline{E}, d)$ è completo
2) Se (E,d) è completo $\implies E$ è chiuso

Il **Teorema delle contrazioni (Banach-Cacciopoli)** $\rightsquigarrow$ teorema del punto fisso.
Ha un ruolo fondamentale in analisi, (e.g. per teorema esistenza e unicità per soluzioni di eq. differenziali).

DEF. Siano $(X, d), (Y, d')$ spazi metrici, $f : (X, d) \to (Y, d')$ si dice **Lipschitziana** di costante $C \geq 0$ (costante di Lipschits) se:

$$d'(f(p), f(q)) \leq C \ d(p, q) \qquad \forall p, q \in X$$

Sia $f : (X, d) \to (X, d)$ Lipschitziana di costante $C < 1$ allora si dice **contrazione**.

TEOREMA delle contazioni
Sia (X,d) uno spazio metrico completo e sia $f : (X, d) \to (X, d)$ contrazione. Allora $\exists! \; \overline{x} \in X$ t.c. $f(\overline{x}) = \overline{x}$.
Nota: $\overline{x}$ è un punto fisso di f.

Oss. (Serve contrazione $C < 1$) f isometria non basta.

$$\text{e.g. } f : (\mathbb{R}, d_\varepsilon) \to (\mathbb{R}, d_\varepsilon)$$
$$f(x) = x + 1 \text{ non ha punti fissi}$$

$$\text{e.g. } g : (\mathbb{R}, d_\varepsilon) \to (\mathbb{R}, d_\varepsilon) \text{ ha } \infty \text{ punti fissi}$$
$$g(x) = x$$

Prop. (Relazione con compattezza) Sia $K \subseteq (X, d)$ K compatto. Allora (K,d) completo.

ATTENZIONE! In particolare uno spazio metrico compatto è anche completo!

TEOREMA (Completezza di $(\mathbb{R}^n, d_\varepsilon)$)
$\forall n \geq 1, (\mathbb{R}^n, d_\varepsilon)$ è completo.

Oss. Notiamo che $(\mathbb{R}, d_\varepsilon) \approx (0, 1)$ (i 2 insiemi sono omeomorfi). Ma $(0, 1) \subseteq (\mathbb{R}, d_\varepsilon)$ non completo con $d_\varepsilon|_{(0,1)}$ e $(\mathbb{R}, d_\varepsilon)$ completo.

ATTENZIONE! Completezza è un concetto metrico, **NON è un concetto topologico**.

TEOREMA Completezza di $(C([a, b]), || \cdot ||_\infty)$
Sia C([a,b]) lo spazio delle funzioni continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $|| \cdot ||_\infty$ la norma data da:

$$||f||_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Allora $(C([a, b]), || \cdot ||_\infty)$ è completo.

Capitolo 8

Connessione

8.1 Proprietà di connessione

Altro risultato fondamentale in Analisi

TEOREMA dei valori intermedi

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e y_0 numero reale tra $f(a)$ e $f(b)$. Allora esiste $c \in [a, b]$ t.c. $f(c) = y_0$

$\rightsquigarrow$ Come per la compattezza vediamo come risultato su [a,b] oltre che sulla continuità $\rightsquigarrow$ dipende dalle proprietà di connessione [a,b]. Daremo quindi una versione per spazi topologici di questo risultato.

8.2 Spazi connessi

Connesso $\rightsquigarrow$ formato da un solo pezzo

Intuitivamente: spazio sconnesso $\rightsquigarrow$ fatto da più pezzi disgiunti, non vuoti, aperti.

DEF. Sia (X, τ) spazio topologico, diciamo che (X, τ) è **connesso** se gli unici sottoinsiemi di X che siano conteporaneamente aperti e chiusi sono $\varnothing, X$.

In caso contrario (X, τ) si dice **sconnesso**. Analogamente $E \subseteq (X, \tau)$ si dice connesso/sconnesso se (E, τ_E) connesso/sconnesso.

Oss. È una proprietà topologica perchè nella definizione ho usato solo aperti/chiusi.

Una caratterizzazione equivalente è la seguente:

(X, τ) sconnesso se esiste una **separazione di X** in due aperti non vuoti disgiunti. (i.e. $\exists U, V \in \tau$ t.c. $U, V \neq \varnothing, U \cap V = \varnothing \; e \; U \cup V = X$).

DEF. Sia (X, τ) spazio topologico. $E \subseteq (X, \tau)$ non vuoto è una **componente connessa** di (X, τ) se E è connesso e $\forall E' \subseteq X \; t.c. \; E \subset E'$, E' è sconnesso.

Oss. Se (X, τ) connesso $\implies$ ho 1 componente connessa

Nota: Vogliamo imparare a costruire connessi a partire da altri connessi.

Prop. Sia E un sottoinsieme connesso di (X, τ). Se $E \subseteq H \subseteq \overline{E} \implies H$ è connesso (nota: se aggiungo punti di accumulazione ad un connesso resta connesso).

In particolare questo ci dice che $\overline{E}$ connesso e che ogni componente connessa di uno spazio topologico è un chiuso.

Prop. (Connessione e funzioni continue) Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua e $E \subseteq X$ connesso allora $f(E)$ è connesso.

Corollario $(X, \tau) \overset{f}{\approx} (Y, \tau')$. Allora:

1) (X, τ) connesso sse (Y, τ') connesso.
2) Se C è componente connessa di $(X, \tau) \implies f(C)$ è componente connessa di (Y, τ'); in particolare il numero di componenti connesse è un invariante topologico.

Possiamo caratterizzare i connessi di $(\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ con il seguente teorema (di cui omettiamo la dimostrazione)

TEOREMA Un sottoinsieme $E \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ è connesso sse è un <u>intervallo</u>, oppure $|E| = 1$ (singoletto).

Oss. (Strumento importante)

Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ omeomorfismo e $p \in X$ allora anche:

$$f : (X \backslash \{p\}, \tau_{X \backslash \{p\}}) \to (Y \backslash \{f(p)\}, \tau_{Y \backslash \{f(p)\}})$$

è un omeomorfismo. Infatti:

- è banalmente biettiva
- è continua e aperta (nota: gli aperti sono gli stessi al più privati di un punto $\rightsquigarrow$ sono ancora in biezione.)

Vale il discorso analogo se togliamo più di un punto (affinchè siano un numero finito).

ATTENZIONE! Dati due spazi topologici $(X, \tau), (Y, \tau')$. Se tolgiendo K punti da X otteniamo n componenti connesse <u>ma</u> per <u>qualsiasi scelta</u> di K punti rimossi da Y otteniamo un numero di componenti connesse diverso da n possiamo concludere che $(X, \tau), (Y, \tau')$ non sono omeomorfi.

Possiamo ora dimostrare il teorema degli zeri e il teorema dei valori intermedi per spazi topologici.

TEOREMA degli zeri Sia $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ funzione continua, $E \subseteq X$ connesso. Se esistono $p_1, p_2 \in E$ t.c. $f(p_1) < 0$ e $f(p_2) > 0$ allora esiste $p_0 \in E$ t.c. $f(p_o) = 0$.

Corollario (Teorema dei valori intermedi) Sia $f : (X, \tau) \implies (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ funzione continua (X, τ) connesso. Se $a, b \in X$ e y_0 è un qualunque numero reale tra $f(a)$ e $f(b)$ allora esiste un $c \in X$ t.c. $f(c) = y_0$.

Lemma Sia (X, τ) spazio topologico e supponiamo che A_1, A_2 sconnettano (A, τ). Se $E \subseteq X$, E connesso allora o $E \subseteq A_1$ o $E \subseteq A_2$.

Lemma (Connessione e unione)

Sia (X, τ) spazio topologico, $\{E_i\}_{i \in I}$ famiglia di connessi in X t.c. o:

1) $E_i \cap E_j \neq \varnothing \quad \forall i, j \in I$

   OPPURE

2) $\exists i_0 \in I$ t.c. $E_i \cap E_{i_0} \neq \varnothing \quad \forall i \in I$

Allora $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ è connesso.

TEOREMA (Prodotto di connessi)

Un prodotto di spazi topologici $(X \times Y, \tau \times \tau')$ è connesso se e solo se (X, τ), (Y, τ') sono connessi.

In particolare deduciamo che:

Corollario $(\mathbb{R}^n, \varepsilon_n)$ è connsesso, per ogni n.

8.3 Connessione per archi

$\rightsquigarrow$ Concetto simile ma differente di connsessione.

DEF. (Arco)

Un **arco** (o cammino) in uno spazio topologico (X, τ) è un'applicazione CONTINUA:

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow [X, \tau]$$

In particolare:

- $\gamma(0) \rightsquigarrow$ **punto iniziale** dell'arco
- $\gamma(1) \rightsquigarrow$ **punto finale** dell'arco

Diremo che γ **congiunge** $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$

DEF. (Connesso per archi) Uno spazio topologico (X, τ) è detto **Connesso per archi** se $\forall x_0, x_1 \in X$ esiste un arco in X che congiunge x_0 a x_1.

Un sottoinsieme $E \subseteq (X, \tau)$ spazio topologico è una **componente connessa per archi** di (X, τ) se E è connesso per archi e $\forall E' \subseteq X$ t.c. $E \subset E'$, E' non è connesso per archi.

E.g. Gli intervalli di $(\mathbb{R}, \varepsilon_1)$ sono connessi per archi. Analogamente (con lo stesso tipo di archi)

si dimostra che $(\mathbb{R}^n, \varepsilon_n)$ è connesso per archi.

Lo stesso vale per concludere che ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e qualunque sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^n$ risultano esistere connessi per archi.

infatti $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_n)$ è connesso per archi.

E.g. (Spazio non connesso per archi)
$X = [0,1] \cup [5,7] \subseteq (\mathbb{R}, \varepsilon_1)$
Componenti connesse per archi $\rightsquigarrow$[0,1],[5,7].

Adesso parleremo della costruzione di archi a partire da archi dati

Oss. Sia $\gamma : [a,b] \to X$ continua t.c. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Allora possiamo sempre cambiare variabile in modo che sia definito su [0,1]. Si pone

$$t(a) = (b-a)u + a \quad 0 \leq u \leq 1$$

$\implies \gamma \circ t : [0,1] \to X$

$$\gamma(t(0)) = x \quad \gamma(t(1)) = y$$

1) Dato $\gamma : [0,1] \to X$ t.c. $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$
L'arco
$$\bar{\gamma} : [0,1] \to X$$
definito
$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$$
percorro lo stesso sostegno in verso opposto.

2) **(Concatenazione)**

$$\text{Siano } \gamma_1 : [0,1] \to X,\ \gamma_1(0) = x, \gamma_1(1) = y$$
$$\gamma_2 : [0,1] \to X,\ \gamma_2(0) = y, \gamma_2(1) = z$$

Costruiamo $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 : \quad [0,1] \to X$ (* è il simbolo di **concatenzazione**).
Si puo concatenare di due archi ponendo:

$$\gamma(t) = \gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\implies \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = z$

Prop. Uno spazio topologico (X, τ) è connesso per archi sse $\exists p_0 \in X$ t.c. $\forall p \in X$ i punti p e p_0 sono congiungibili.

Prop. Se (X, τ) è connesso per archi allora (X, τ) è connesso.

E.g. NON vale il viceversa!!!
[Curva del seno del topologo]
Sia S=$\{(x, \sin\frac{1}{x} : 0 < x < 1)\}$
S=Im(f) ove

$$f : (0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$x \to (x, \sin\frac{1}{x}) \text{ continua in } (0,1]$$

$\implies$ S conneso in quanto immagine di un connesso tramite una funzione continua.
$\implies$ Anche $\bar{S}$ è connesso per una proposizione vista in precedenza ($\bar{S} = S \cup \{\{0\} \times [-1,1]\}$)
Claim: $\bar{S}$ NON È CONNESSO PER ARCHI.

Prop. Siano (X,τ), (Y,τ') spazi topologici:

1) Se $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ continua e $E\subseteq X$ connesso per archi, allora $f(E)$ è connesso per archi.

   In particolare se $(X,\tau)\approx(Y,\tau')$ allora (X,τ) è connesso per archi sse (Y,τ') lo è.

   Si ha inoltre che se C è una componente connessa per archi in (X,τ) allora $f(C)$ lo è in (Y,τ')

   $\implies$ Il numero di componenti connesse per archi è un **invariante topologico**.

2) $(X\times Y,\tau\times\tau')$ connesso per archi se e solo se (X,τ), (Y,τ') connessi per archi.

ATTENZIONE!
Componenti connesse e componenti connesse per archi non sono la stessa cosa.
In generale possiamo dire che ogni componente connessa per archi è contenuta in una componente connessa.

E.g. Mostriamo (nuovamente) che S^1 non è un omeomorfismo a $\mathbb{R}$.
Se esistesse $f:S^1\to\mathbb{R}$ omeomorfismo questo indurrebbe un omeomorfismo tra $S^1\backslash\{p\}$ e $\mathbb{R}\backslash\{f(p)\}$
Tuttavia $S^1\backslash\{p\}$ è connesso per archi mentre se togliamo un qualunque punto a $\mathbb{R}$ otteniamo due componenti connesse per archi.
$\implies$ Non esiste f.

8.4 Topologia quoziente

DEF. L'applicazione $\pi:X\to X/R$ definita da $\pi(x)=[x]$ è detta **propiezione sul quoziente**.

DEF. Sia $E\subseteq X$ definiamo il **saturo di E** come l'insieme:

$$sat(E)=\{p\in X:\exists q\in E\ \text{ t.c. }\ qRp\}=\bigcup_{q\in E}[q]$$

Si ha ovviamente che $E\subseteq sat(E)$. Inoltre, dalla definizione segue che

$$sat(E)=\pi^{-1}(\pi(E))$$

$E\subseteq X$ si dirà **saturo** se E=sat(E) (E coincide con tutta la controimmagine tramite π di un sottoinsieme X/R).

Vogliamo indurre una topologia su X/R per farlo è utile la seguente definizione:

DEF. Sia (X,τ) spazio topologico e Y un insieme e sia $f:(X,\tau)\to Y$ funzione
Diciamo **topologia finale di** f e denotiamo con τ_f la topologia più fine su Y che rende f continua:

$$\tau_f=\{V\subseteq Y:f^{-1}(V)\in\tau\}$$

DEF. (Topologia Quoziente)
Sia (X, τ) spazio topologico, R relazione di equivalenza su X. La **topologia quoziente** su X/R è la topologia finale di $\pi : (X, \tau) \to X/R$ la indicheremo con $\tau_{/R}$

$$\rightsquigarrow \tau_{/R} = \tau_\pi = \{V \subseteq X/R : \pi^{-1}(V) \in \tau\} \quad (X/R, \tau_{/R}) \textbf{ spazio topologico quoziente}$$

Prop. Si ha che $A \in \tau_{/R}$ se e solo se $\exists B \in \tau$ saturo t.c. $\pi(B) = A$

Oss. Osserviamo che essendo $\pi : (X, \tau) \to (X/R, \tau_{/R})$ continua e suriettiva:

- (X, τ) compatto $\implies$ $(X/R, \tau_{/R})$ compatto
- (X, τ) connesso/connesso per archi $\implies$ $(X/R, \tau_{/R})$ connesso/connesso per archi.

ATTENZIONE! Tuttavia in generale il quoziente di uno spazio di Haussdorff può non essere di Haussdorff!

Prop. Se (X, τ) è di Haussdorff, $(X/R, \tau_{/R})$ è di Haussdorff **sse** $\forall p, q \in X$ non equivalenti esistono intorni saturi $U \in \mathcal{U}_p,\ V \in \mathcal{U}_q$ t.c. $U \cap V = \varnothing$

Memo Nella lezione 33 sono presenti alcune costruzioni sfruttando la topologia prodotto e le proprietà di "incollamento".
Gli esempi proposti sono il cilindo, il nastro di Moebius, la bottiglia di Klein, il toro e il piano proiettivo reale.

DEF. Sia $f : X \to Y$ e sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su X:

1) f si dice **compatibile su** $\mathcal{R}$ **se "**$p\mathcal{R}q \implies f(p) = f(q)$**"**
2) f si dice **totalmente compatibile su** $\mathcal{R}$ **se "**$p\mathcal{R}q \iff f(p) = f(q)$**"**

DEF. se f **è compatibile con** $\mathcal{R} \implies$ **"passa al quoziente"**
i.e. è definita la funzione quoziente:

$$\begin{aligned} f_R \colon X/R &\to Y \\ [p] &\mapsto f(p) \end{aligned}$$

$$\boxed{f_{\mathcal{R}} \circ \pi = f}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/R \arrow[ur, dashed, "f_R"'] & \end{tikzcd}$$

Prop. Proprietà funzioni compatibili Con le stesse notazioni, sia $f : X \to Y$ funzione compatibile con $\mathcal{R}$. Allora:

a) $f_{\mathcal{R}}$ è suriettiva sse f è suriettiva

b) $f_{\mathcal{R}}$ è iniettiva sse f è totalmente compatibile

c) $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua sse $f_{\mathcal{R}} : (X/\mathcal{R}, \tau_{/\mathcal{R}}) \to (Y, \tau')$ è continua

d) $f_R : (X/\mathcal{R}, \tau_{/\mathcal{R}}) \to (Y, \tau')$ aperta sse f manda aperti saturi in aperti.

Il corollario che segue è un UTILISSIMO criterio per determinare se uno spazio quoziente è di Haussdorff.

Corollario Siano (X, τ), (Y, τ') spazi topologici e (Y, τ') di Haussdorff se $\exists f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua e totalmente compatibile con $\mathcal{R}$ allora $(X/\mathcal{R}, \tau_{/\mathcal{R}})$ è di Haussdorff.

Possiamo generalizzare quanto visto con la seguente:

DEF. Sia $f : X \to Y$ e siano R, R' relazioni di equivalenza su X e rispettivamente Y.

1) f si dice **bicompatibile con** $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ se "$p\mathcal{R}q \implies f(p)\mathcal{R}'f(q)$"

2) f si dice **totalmente bicompatibile con** $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ se "$p\mathcal{R}q \iff f(p)\mathcal{R}'f(q)$"

DEF. Se f bicompatibile $\implies$ "passa ai quozienti"
i.e. è definita

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} : X/\mathcal{R} &\longrightarrow Y/\mathcal{R}' \\ [p] &\longrightarrow [f[p]] \end{aligned}$$

$$\boxed{f_{\mathcal{R},\mathcal{R}'} \circ \pi = \pi' \circ f}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[d, "\pi'"] \\ X/R \arrow[r, dashed, "f_{R,R'}"'] & Y/R' \end{tikzcd}$$

Prop. Con e stesse notazioni, sia $f : X \to Y$ una funzione bicompatibile con $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$. Allora:

a) $f_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}$ è suriettiva sse f è suriettiva

b) $f_{\mathcal{R},\mathcal{R}'}$ è iniettiva sse f è totalmente bicompatibile.

c) $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ continua sse $f'_{\mathcal{R},\mathcal{R}} : (X/\mathcal{R}, \tau_{/\mathcal{R}}) \to (Y/\mathcal{R}', \tau'_{/\mathcal{R}'})$ è continua

d) $f_{R,R'} : (X/\mathcal{R}, \tau_{/\mathcal{R}}) \to (Y/\mathcal{R}', \tau'_{/\mathcal{R}'})$ aperta sse f manda aperti saturi in aperti saturi.