Teorema Basi

a) Sia X un insieme e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ t.c.

i) $\forall x \in X \ \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B$

ii) Siano $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$ allora $\exists B_0 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_0 \subseteq B_1 \cap B_2$

Allora esiste un'unica topologia τ_B su X t.c. $\mathcal{B}$ è una base di τ_B $\rightsquigarrow$ TOPOLOGIA GENERATA DA $\mathcal{B}$.

Tale topologia può essere caratterizzata nel seguente modo:

$$\tau_B = \{A \subseteq X \text{ t.c. } \forall x \in A \ \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.c. } x \in B \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}$$

b) Se (X, τ) spazio topologico e $\mathcal{B}$ base per τ allora $\mathcal{B}$ soddisfa (i), (ii) del punto precedente.

Dim a) $\tau_B = \{A \subseteq X \text{ t.c. } \forall x \in A \ \exists B \in \mathcal{B} \text{ t.c. } x \in B \subseteq A\} \cup \{\emptyset\}$

1) Mostriamo che τ_B è una topologia

TOP 1) $\emptyset \in \tau_B$ ovvio

$X \in \tau_B$: (i) $\Rightarrow \forall x \in X \ \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subseteq X$

TOP 2) Sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau_B$ e sia $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

Dato $x \in U \Rightarrow \exists \bar{\alpha}$ t.c. $x \in U_{\bar{\alpha}}$

Poiché $U_{\bar{\alpha}}$ è aperto $\rightarrow \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B \subseteq U_{\bar{\alpha}}$

$\Rightarrow x \in B \subset U \Rightarrow U \in \tau_B$.

TOP 3) Siano $U_1, U_2 \in \tau_B$ e sia $x \in U_1 \cap U_2$

$\Rightarrow \exists B_1 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_1 \subset U_1$

$\exists B_2 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_2 \subset U_2$

ii) $\Rightarrow \exists B_0 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_0 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$

$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau_B$

Per induzione si mostra che vale $\forall K$ se $U_1, \dots, U_K \in \tau_B$

$\Rightarrow (U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_{K-1}) \cap U_K \in \tau_B$

a) La topologia <u>generata</u> da $\mathcal{B}$ è unica e coincide con $\tau_{\mathcal{B}}$.

↳ i.e. gli aperti sono unioni di elementi di $\mathcal{B}$.

Sia τ topologia su X con base $\mathcal{B}$ e sia $A \in \tau$.

Poiché $\tau_{\mathcal{B}}$ è una topologia e tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ stanno anche in $\tau_{\mathcal{B}}$ anche l'unione di elementi di $\mathcal{B}$ sta in $\tau_{\mathcal{B}} \Rightarrow A \in \tau_{\mathcal{B}}$

$\Rightarrow \tau \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$

Viceversa, sia $A \in \tau_{\mathcal{B}} \Rightarrow \forall x \in A \; \exists B_x \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_x \subseteq A$

$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} B_x \Rightarrow A \in \tau \Rightarrow \tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau$

$\Rightarrow \tau_{\mathcal{B}} = \tau$

b) Sia $\mathcal{B}$ base per τ

$X \in \tau \Rightarrow$ | X unione di elementi di τ |

$\Rightarrow \forall x \in X \quad \exists B \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B$ (i.e. (i))

Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1, B_2 \in \tau \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \tau$

$\Rightarrow B_1 \cap B_2$ UNIONE DI ELEMENTI DI $\mathcal{B}$

$\Rightarrow$ Sia $x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_0 \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_0 \subseteq B_1 \cap B_2$ (i.e. ii)

Teorema sulla continuità in spazi metrici.

Th: Sia $f:(X,d)\to(Y,d')$ funzioni tra spazi metrici. Allora le seguenti sono equivalenti

1) f è CONTINUA

2) $\forall A\in\tau_{d'}$, $f^{-1}(A)\in\tau_d$

3) $\forall C\in(\tau_{d'})^*$, $f^{-1}(C)\in\tau_d^*$

4) $\forall E\subseteq X$, $f(\overline{E})\subseteq\overline{f(E)}$

5) Sia $\{p_n\}\subset X$ t.c. $p_n\to p_0$ $n\to\infty$ allora $f(p_n)\to f(p)$ $n\to\infty$.

Dim $[1\Rightarrow 2]$ Sia f CONTINUA e sia $A\in\tau_{d'}$

$\forall x\in f^{-1}(A)$ vogliamo mostrare che x è un punto interno di $f^{-1}(A)$ rispetto a τ_d.

$\underset{\text{aperto in }\tau_{d'}}{f(x)\in A}\Rightarrow\exists\varepsilon>0$ t.c. ${}^{d'}B_\varepsilon(f(x))\subseteq A$

f CONTINUA $\Rightarrow\exists\delta>0$ t.c. $f({}^dB_\delta(x))\subseteq A$

$\Rightarrow f^{-1}(f({}^{\delta}B_\delta(x)))\subseteq f^{-1}(A)$

$\quad\quad {}^dB_\delta(x)$

$\Rightarrow x$ interno a $f^{-1}(A)$

$[2\Rightarrow 3]$ $\forall C\in(\tau_{d'})^*$ $C=Y\setminus A$ per qualche $A\in\tau_{d'}$

$f^{-1}(C)=f^{-1}(Y\setminus A)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(A)=X\setminus f^{-1}(A)$

Ma $f^{-1}(A)\in\tau_d$ per 2 $\Rightarrow f^{-1}(C)\in\tau_d^*$.

$[3\Rightarrow 4]$ Sia $E\subseteq X$ si ha che $f(E)\subseteq\overline{f(E)}\in(\tau_{d'})^*$

$\overset{3)}{\Rightarrow} f^{-1}(\overline{f(E)})\in\tau_d^*$ Controimmagine di un chiuso è un chiuso.

Inoltre $E\subseteq f^{-1}(f(E))\subseteq f^{-1}(\overline{f(E)})\in\tau_d^*$

$\Rightarrow\overline{E}\subseteq f^{-1}(\overline{f(E)})\to$ il più piccolo.

$\Rightarrow f(\overline{E})\subseteq f(f^{-1}(\overline{f(E)}))\subseteq\overline{f(E)}\Rightarrow f(\overline{E})\subseteq\overline{f(E)}$

[$4 \Rightarrow 5$] "Claim" Se $\{p_n\} \subset (X, d)$ NON CONVERGE a $p \in X$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, $\{p_n\}$ sottosuccessione t.c. $d(p_{n_K}, p) > \varepsilon \quad \forall K$.

Se per assurdo $\exists \{p_n\}$ t.c. $p_n \to p \quad n \to \infty$

Ma $f(p_n) \not\to f(p) \quad n \to +\infty$

Claim $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$, $\{f(p_{n_K})\}$ sottosuccessione di $\{f(p_n)\}$ t.c.

$* \; d'(f(p_{n_K}), f(p)) > \varepsilon \quad \forall K$

~~D'altra parte~~

Consideriamo $E = \{p_{n_K}\}$

$p_n \to p \quad n \to \infty \Rightarrow p \in \overline{E}$

D'altra parte $* \Rightarrow {}^{d'}B_\varepsilon(f(p)) \cap f(E) = \emptyset \Rightarrow f(p) \notin \overline{f(E)}$

$\Rightarrow f(\overline{E}) \not\subset \overline{f(E)}$. Assurdo con 4. ↯

[$5 \Rightarrow 1$] Per assurdo supponiamo che f NON SIA CONTINUA ~~in~~ SU X

i.e. $\exists\, p \in X \quad \exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $\forall \delta > 0 \quad f({}^{d}B_\delta(p)) \not\subset {}^{d'}B_\varepsilon(f(p))$

$\Rightarrow p_n \to p \quad n \to \infty$

Ma $f(p_n) \not\to f(p) \quad n \to \infty$ Poichè $d'(f(p_n), f(p)) > \varepsilon \quad \forall n$ //.

Teorema sulla continuità in spazi topologici

Th: Sia $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ tra due spazi topologici.
Allora le seguenti sono equivalenti.

i) $\forall A\in\tau'$, $f^{-1}(A)\in\tau$

ii) $\forall C\in(\tau')^*$, $f^{-1}(C)\in\tau^*$

iii) $\forall E\subseteq X$, $f(\overline{E})\subseteq\overline{f(E)}$

iv) $\forall p\in X$, $\forall V\in\mathcal{U}_{f(p)}$ $\exists U\in\mathcal{U}_p$ t.c. $f(U)\subset V$

Se la condizione in (iv) vale $p\in X$, diciamo che f è CONTINUA IN P.

Dim. Mostreremo (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) e che (i) $\Leftrightarrow$ (iv)

[(i) $\Rightarrow$ (iii)] Sia $E\subset(X,\tau)$, mostriamo che se f è continua e $x\in\overline{E}\Rightarrow f(x)\in\overline{f(E)}$

Sia V un intorno di $f(x)\Rightarrow x\in f^{-1}(V)\in\tau$

$\overset{x\in\overline{E}}{\Rightarrow} f^{-1}(V)\cap E\neq\emptyset$. Sia $y\in f^{-1}(V)\cap E$.

$\Rightarrow f(y)\in V\cap f(E)\neq\emptyset$

$\Rightarrow f(x)\in\overline{f(E)}$.

[(iii) $\Rightarrow$ (ii)] Sia $C\in(\tau')^*$ e $B=f^{-1}(C)$

Vogliamo mostrare che $B\in\tau^*$. Mostriamo che $B=\overline{B}$

Si ha che $f(B)=f(f^{-1}(C))\subseteq C \rightsquigarrow \overline{f(B)}\subseteq\overline{C}$

$\Rightarrow$ Se $x\in\overline{B}\Rightarrow f(x)\in f(\overline{B})\overset{(iii)}{\subseteq}\overline{f(B)}\subseteq\overline{C}=C$

$\Rightarrow x\in f^{-1}(C)=B\Rightarrow\overline{B}\subseteq B$

Ma poiché ovviamente $B\subseteq\overline{B}\Rightarrow B=\overline{B}$

[(ii) $\Rightarrow$ (i)] $\forall A\in\tau'$ $A=Y\setminus C$ per qualche $C_A\in\tau'^*$

$f^{-1}(A)=f^{-1}(Y\setminus C)=f^{-1}(Y)\setminus f^{-1}(C)=X\setminus f^{-1}(C)$

Ma $f^{-1}(C)\in\tau^*$ per ii) $\Rightarrow f^{-1}(A)\in\tau$

[(i) $\Rightarrow$ (iv)] Sia $x\in X$, V intorno di $f(x)$

$U=f^{-1}(V)$ è un intorno di x t.c. $f(U)=f(f^{-1}(V))\subseteq V$

[(iv) ⇒ (i)] Sia $V \in \tau'$ aperto in (Y, τ')

Sia $x \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \in V \overset{(iv)}{\Rightarrow} \exists U_x \in \mathcal{U}_x$ t.c. $f(U_x) \subset V$

$\Rightarrow U_x \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x \in \tau$ in quanto unione di aperti //

Topologia prodotto

Prop Sia $\mathcal{B}_1$ base di τ_1, $\mathcal{B}$ base di τ_2

Allora la collezione:

$$\mathcal{B}_3 = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

è una base per $\tau_1 \times \tau_2$.

Dim (B1) Sia $(x,y) \in X \times Y$ poiché $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ basi

$$\left.\begin{array}{l} \exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \text{ t.c. } x \in B_1 \\ \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \text{ t.c. } y \in B_2 \end{array}\right\} (x,y) \in B_1 \times B_2$$

(B2) Sia $(x,y) \in (B_1 \times B_2) \cap (B_1' \times B_2')$ con $B_1, B_1' \in \mathcal{B}_1$, $B_2, B_2' \in \mathcal{B}_2$

$\overset{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \text{ basi}}{\Rightarrow} \exists B_1'' \in \mathcal{B}_1, B_2'' \in \mathcal{B}_2$ t.c.

$x \in B_1'' \subseteq B_1 \cap B_1'$

$y \in B_2'' \subseteq B_2 \cap B_2'$

$\Rightarrow (x,y) \in B_1'' \times B_2'' \subseteq (B_1 \cap B_1') \times (B_2 \cap B_2') = (B_1 \times B_2) \cap (B_1' \times B_2')$

$\Rightarrow \mathcal{B}_3$ base.

Mostriamo ora che $\mathcal{B}_3$ genera proprio $\tau_1 \times \tau_2$ i.e. che $\tau_{\mathcal{B}_3} = \tau_1 \times \tau_2$

Sia $W \in \tau_1 \times \tau_2$, $(x,y) \in W \Rightarrow \exists \underbrace{U_1 \times U_2}_{\text{elemento della base di } \tau_1 \times \tau_2}$ t.c. $(x,y) \in U_1 \times U_2 \subseteq W$

$\mathcal{B}_1$ base di $\tau_1 \Rightarrow \exists B_1 \in \mathcal{B}_1$ t.c. $x \in B_1 \subseteq U_1$

$\mathcal{B}_2$ base di $\tau_2 \Rightarrow \exists B_2 \in \mathcal{B}_2$ t.c. $y \in B_2 \subseteq U_2$

$\Rightarrow (x,y) \in B_1 \times B_2 \subseteq W$

$\Rightarrow W \in \tau_{\mathcal{B}_3}$

Il viceversa è ovvio.

Topologia prodotto Haussdorf

Prop: $\tau_1 \times \tau_2$ è di Haussdorf sse $\tau_1 \times \tau_2$ sono di Haussdorf.

DIMO: "$\Leftarrow$" Siano $(p_1,p_2) \neq (q_1,q_2) \in X \times Y$

$$\begin{cases} p_1 \neq q_1 \\ p_2 \neq q_2 \end{cases} \Rightarrow \text{e.g. } p_1 \neq q_1 \overset{\tau_1 \text{ è Haussdorf}}{\Longrightarrow} \exists U \in \mathcal{U}_{p_1}, V \in \mathcal{U}_{q_1} \text{ t.c. } U \cap V = \emptyset$$

$$\Rightarrow \underbrace{(U \times Y)}_{\in \mathcal{U}_{(p_1,p_2)}} \cap \underbrace{(V \times Y)}_{\in \mathcal{U}_{(q_1,q_2)}} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \tau_1 \times \tau_2 \text{ Haussdorf}$$

"$\Rightarrow$" Supponiamo $\tau_1 \times \tau_2$ Haussdorf e mostriamo ad esempio che τ_1 è di Haussdorf (per τ_2 è analogo, basta scambiare i fattori).

Siano $p_1 \neq q_1 \in X$ e $p_2 = q_2 \in Y$

$\Rightarrow (p_1,p_2) \neq (q_1,q_2) \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{U}_{(p_1,p_2)}, V \in \mathcal{U}_{(q_1,q_2)}$ t.c. $U \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{U}_{p_1}, U_2 \in \mathcal{U}_{p_2}, V_1 \in \mathcal{U}_{q_1}, V_2 \in \mathcal{U}_{q_2}$

t.c. $(p_1,p_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq U$

$(q_1,q_2) \in V_1 \times V_2 \subseteq V$

e quindi t.c. $(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = \emptyset$

Poiché ovviamente $U_2 \overset{p_2}{\cap} V_2 \neq \emptyset$, necessariamente $U_1 \cap V_1 = \emptyset$

Abbiamo mostrato che τ_1 è di Haussdorf. //

Proprietà Fondamentali topologia prodotto

Prop $(X,\tau_1), (Y,\tau_2)$ spazi topologici, $E_1 \subseteq X, E_2 \subseteq Y$

Allora in $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ si ha

1) $E_1 \times E_2 \in \tau_1 \times \tau_2 \iff E_1 \in \tau_1, E_2 \in \tau_2$

$E_1 \times E_2 \in (\tau_1^* \times \tau_2^*)^* \Leftrightarrow E_1 \in \tau_1^*, E_2 \in \tau_2^*$

2) $(E_1 \times E_2)^\circ = E_1^\circ \times E_2^\circ$

3) $\overline{(E_1 \times E_2)} = \overline{E}_1 \times \overline{E}_2$

4) $\partial(E_1 \times E_2) = (\partial E_1 \times \overline{E}_2) \cup (\overline{E}_1 \times \partial E_2)$

Topologia prop. Fondamentali

Sia $(X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ prodotto topologico. Allora:

(i) $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$ sono continue e aperte.

(ii) [Proprietà universale della topologia prodotto]

Sia (Z, τ) spazio topologico una funzione
$$f : (Z, \tau) \to (X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$$
è continua SSE
$$\pi_1 \circ f : (Z, \tau) \to (X, \tau_1)$$
$$\pi_2 \circ f : (Z, \tau) \to (Y, \tau_2)$$

Lo sono

(iii) $\forall y \in Y$ $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ è OMEOMORFO a X

$\forall x \in X$ $\{x\} \times Y \subseteq (X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ è omeomorfo a Y

DIM i) Per definizione di topologie prodotto π_1, π_2 continue.

Mostriamo che sono aperte

Sia $A = A_1 \times A_2$ con $A_1 \in \tau_1$, $A_2 \in \tau_2$

Un generico elemento della base di $\tau_1 \times \tau_2$

$\Rightarrow \pi_1(A) = A_1 \in \tau_1$

$\pi_2(A) = A_2 \in \tau_2$

$\Rightarrow \pi_1, \pi_2$ aperte.

ii) Sia $f : (Z, \tau) \to (X \times Y, \tau_1 \times \tau_2)$ CONTINUA

$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \circ f \\ \pi_2 \circ f\end{array}\right\}$ CONTINUE (COMPOSIZIONI di FUNZIONI CONTINUE)

Siano $U_1 \in \tau_1$, $U_2 \in \tau_2$

$$f^{-1}(\underbrace{U_1 \times U_2}_{\text{Generico elemento di una base di } \tau_1 \times \tau_2}) = \{a \in Z \text{ t.c. } \pi_1 \circ f(a) \in U_1, \pi_2 \circ f(a) \in U_2\}$$

$$= \underbrace{(\pi_1 \circ f)^{-1}(U_1)}_{\in \tau} \cap \underbrace{(\pi_2 \circ f)^{-1}(U_2)}_{\in \tau} \in \tau$$

iii) Consideriamo $h: X\times\{y\} \to X$
$(x,y) \longmapsto x$

h biettiva. Sia $i: X\times\{y\} \to X\times Y$ INCLUSIONE

$h = \underset{\text{CONTINUA}}{\pi_1} \circ \underset{\text{CONTINUA}}{i} : X\times\{y\} \to X$ CONTINUA

Sia ora W elemento base top. indotta di $X\times\{y\}$

$W = (\underset{\tau_1}{U_1} \times \underset{\tau_2}{U_2}) \cap (X\times\{y\}) \to \emptyset$ se $y \notin U_2$
$\to U_1\times\{y\}$ $y\in U_2$

$\Rightarrow h(W) \left\langle \begin{array}{l} \emptyset \\ U_1 \end{array} \right. \in \tau_1 \Rightarrow h$ aperta $\Rightarrow h$ omeomorfismo.

L'altro caso è analogo

Prop. Haussdorf
Sia (X,τ) spazio topologico, allora τ è di Haussdorff sse Δ_X è un chiuso in $(X\times X, \tau\times\tau)$

DIMO "$\Rightarrow$" Sia τ di Haussdorf
Mostriamo che $(X\times X)\setminus\Delta_X$ è aperto
Sia $(p_1,p_2)\in(X\times X)\setminus\Delta_X \Rightarrow p_1\neq p_2$
τ Haussdorf
$\Rightarrow \exists U_1\in\mathcal{U}_{p_1}, U_2\in\mathcal{U}_{p_2}$ t.c. $U_1\cap U_2=\emptyset$
$\Rightarrow U_1\times U_2 \subseteq (X\times X)\setminus\Delta_X \Rightarrow (p_1,p_2)$ interno
$\Rightarrow \Delta_X$ chiuso

"$\Leftarrow$" Sia Δ_X chiuso
Se $p_1\neq p_2 \in X \Rightarrow p=(p_1,p_2)\in(X\times X)\setminus\Delta_X$
$\Rightarrow \exists U_1\in\mathcal{U}_{p_1}, U_2\in\mathcal{U}_{p_2}$ t.c.
$U_1\times U_2 \subseteq (X\times X)\setminus\Delta_X$
$\Rightarrow U_1\cap U_2=\emptyset$ //.

Th: Teorema del grafico chiuso

a) Teo Sia $f(X,\tau) \to (Y,\tau')$ CONTINUA, τ' di Haussdorf. Allora

$$T = \{(x, f(x)) : x \in X\} \text{ è chiuso in } (X \times Y, \tau \times \tau')$$

b) Siano $f, g : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ CONTINUE, τ' di Haussdorf. Allora

$$\{p \in X : f(p) = g(p)\} \in \tau^*$$

Dim (a) Sia $h : (X,\tau) \times (Y,\tau') \to (Y,\tau') \times (Y,\tau')$

$$(x,y) \longmapsto (f(x), id_Y(y))$$

h continua (componenti son continue)

$$T = h^{-1}(\underbrace{\Delta_Y}_{\text{chiuso}}) \text{ chiuso}$$

b) Sia $h : (X,\tau) \to (Y,\tau') \times (Y,\tau')$

$$x \longrightarrow (f(x), g(x))$$

h continua

$$\{p \in X : f(x) = g(x)\} = h^{-1}(\underbrace{\Delta_Y}_{\text{chiuso}}) \Rightarrow \in \tau^*$$

Proposizioni su compattezza e chiusura

(i) (X,τ) COMPATTO, C chiuso in $X \Rightarrow C$ compatto

(ii) (X,τ) T_2, $K \subseteq X$ compatto $\Rightarrow K$ chiuso

<u>Dimo</u> (i) (X,τ) COMPATTO, $C \in \tau^*$

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di C in (X,τ)

$\Rightarrow \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \underbrace{(X \setminus C)}_{\in \tau}$ è un ricoprimento aperto di X.

(X,τ) COMPATTO

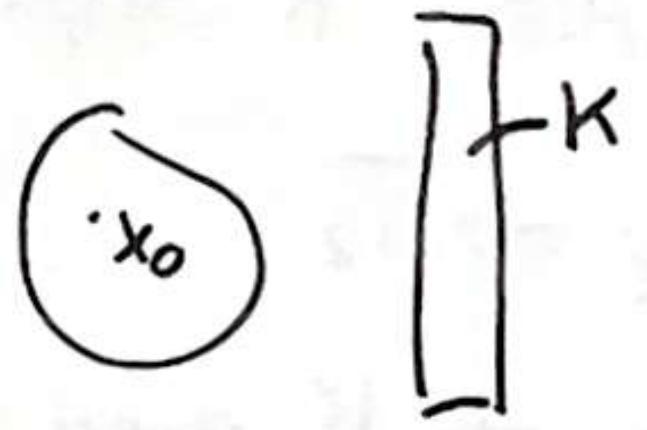
$\Rightarrow \exists$ un sottoricoprimento finito

/ Se contiene $X \setminus C$ lo scartiamo e abbiamo ottenuto il sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$ per C.

\ Se non lo contiene $\Rightarrow$ abbiamo finito.

ii) Sia (X,τ) T_2

$K \subseteq X$ compatto

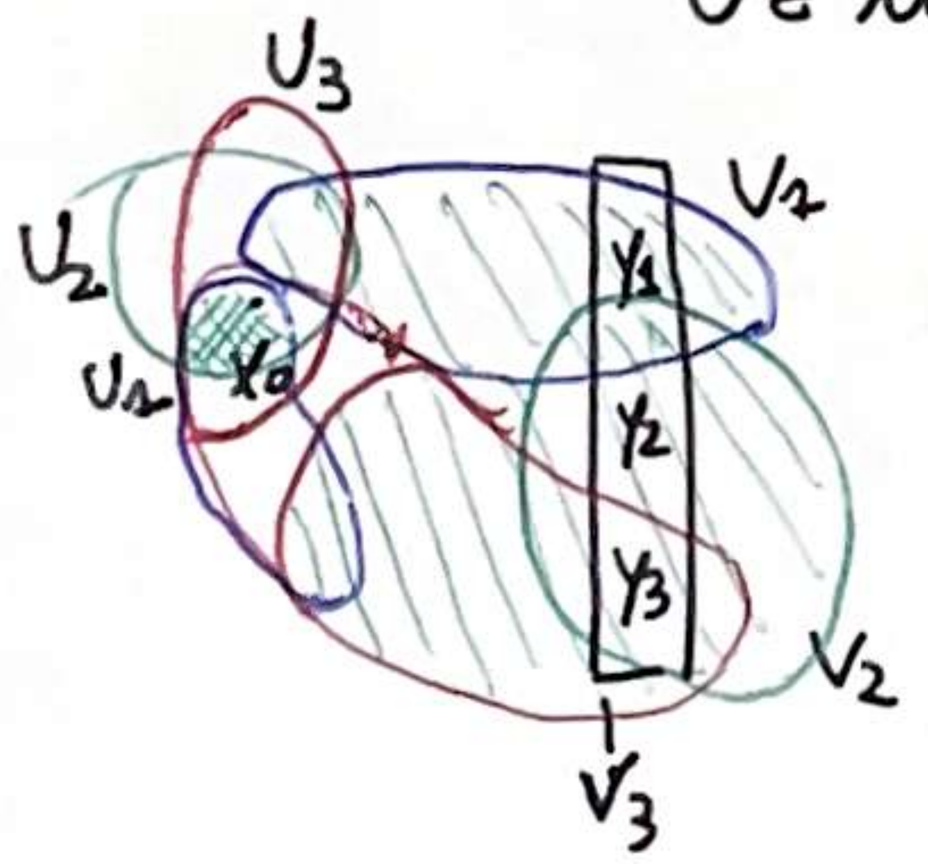


Mostriamo che $X \setminus K$ è aperto.

"Claim Sia $x_0 \in X \setminus K$ mostriamo che $\exists U \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $U \subseteq X \setminus K$"

$\forall y \in K$ prendiamo (da T_2)

$U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}$ t.c. $U \cap V_y = \emptyset$



$\{V_y : y \in K\}$ Ricoprimento aperto di K in (X,τ)

$\overset{K \text{ compatto}}{\Longrightarrow} \exists$ sottoricoprimento finito $(V_{y_1}, \dots, V_{y_n})$

Definendo $V = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \dots \cup V_{y_n} \Rightarrow K \subseteq V$

$V \cap (U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \dots \cap U_{y_n}) = \emptyset$

$\Rightarrow$ Abbiamo quindi trovato $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $U \subseteq X \setminus K$ ($X \setminus K$ aperto) //

Prop Sia (X,d) spazio metrico, $K \subseteq X$, K compatto (in τ_d) allora K è limitato.

Dim. Si fissi $x \in K$.

$\{B_r(x) : r \in \mathbb{R}_+\}$ è un ricoprimento aperto di K.

K COMPATTO $\Rightarrow$ Possiamo estrarre un sottoricoprimento finito
$\{B_{r_1}(x), B_{r_2}(x), \dots, B_{r_n}(x)\}$

Sia $R = \max\{r_1, \dots, r_n\} \Rightarrow d(x,y) \leq R \quad \forall y \in K$

In particolare $\forall y, z \in K$

$$d(y,z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DIS. TRIANGOLARE}}}{\leq} d(y,x) + d(x,z) \leq 2R$$

$\Rightarrow K$ limitato.

Teorema di Heine-Borel per $\mathbb{R}$

Sia $K \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{E}_1)$. Allora K compatto $\Leftrightarrow$ K è chiuso e limitato.

Dim. $\mathcal{E}_1$ indotta da $d_\mathcal{E} \Rightarrow T_2$

Quindi K compatto $\Rightarrow$ K chiuso

D'altra parte per la proposizione precedente K limitato.

Viceversa, se K è limitato chiuso

LIMITATEZZA $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{R}$ t.c. $K \subseteq [-N,N]$.

$$\left.\begin{array}{l} [-N,N] \text{ COMPATTO} \\ K \text{ chiuso, } K \subseteq [-N,N] \end{array}\right\} \Rightarrow K \text{ compatto.}$$

Teorema sulla compattezza e funzioni continue

Siano (X,τ), (Y,τ') spazi topologici e $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ CONTINUA

Sia $K\subseteq X$, K compatto. Allora $f(K)$ è compatto.

Dim $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di $f(K)$

$\forall A\in\mathcal{A}$ prendiamo $f^{-1}(A)\in\tau$ (f CONTINUA)

$\Rightarrow K\subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} f^{-1}(A)$

$\{f^{-1}(A)\}_{A\in\mathcal{A}}$ RICOPRIMENTO APERTO DI K

K COMPATTO $\Rightarrow$ Estraggo un sottoricoprimento finito

$$\{\underset{f^{-1}(A_1)}{\underset{\shortparallel}{A_1'}},\dots,\underset{f^{-1}(A_n)}{\underset{\shortparallel}{A_n'}}\} \qquad \left(K\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i)\right)$$

$$f(K)\subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i)\right)=f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right)\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$\Rightarrow \{A_1,\dots,A_n\}$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$ per $f(K)$. //

Teorema di Weierstrass

Sia (X,τ) spazio topologico e $f:(X,\tau)\to(\mathbb{R},\mathcal{E}_1)$ CONTINUA.

Se $K\subseteq X$ compatto esistono $p_1,p_2\in K$ t.c.

$$f(p_1)\leq f(p)\leq f(p_2)\quad \forall p\in K$$

Dim f CONTINUA, K COMPATTO $\Rightarrow f(K)$ COMPATTO $\subseteq(\mathbb{R},\mathcal{E}_1)$

$\Rightarrow \exists\, a=\max\{f(K)\}\in f(K)$

$\Rightarrow \exists\, p_2\in K$ t.c. $f(p_2)=a$

i.e. t.c. $f(p)\leq f(p_2)\ \forall p\in K$

Analogamente per il minimo.

Th prodotto compatti

Il prodotto topologico di un numero finito di spazi topologici compatti è compatto

Dim: proviamo x 2.

Proviamo che $(X,\tau), (Y,\tau')$ COMPATTO

Sia $x_0 \in X$ e N aperto in $(X\times Y, \tau_1 \times \tau')$ t.c.

$\{x_0\}\times Y \subseteq N$

"Claim $\exists W \in \mathcal{U}_{x_0}$ t.c. $\underbrace{W\times Y}_{\text{TUBO}} \subseteq N$"

Innanzi tutto ricopriremo $\{x_0\}\times Y$ con elementi della base standard di $\tau\times\tau'$

$\{x_0\}\times Y$ è compatto (essendo omeomorfo a Y (compatto))

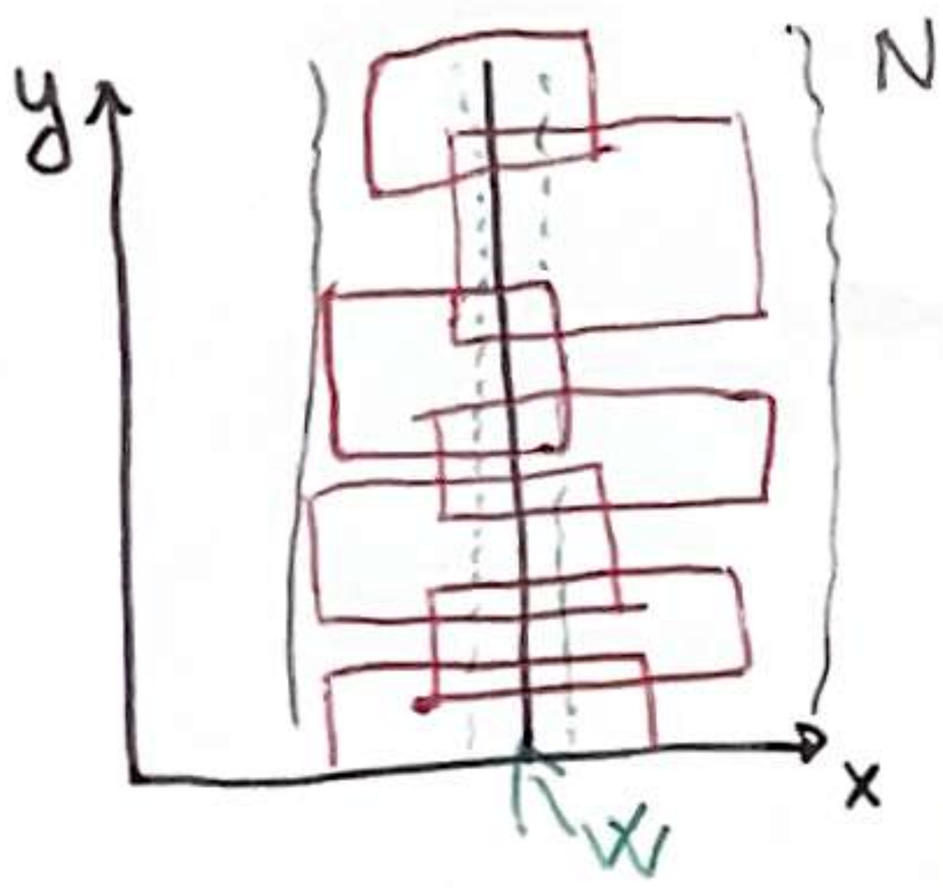
$\Rightarrow \exists$ sottoricoprimento finito

$\tilde{A} = \{U_1\times V_1, U_2\times V_2, \dots, U_n\times V_n\}$

wlog supponiamo che ognuno di questi intersechi $\{x_0\}\times Y$ (se no lo scartiamo)

Definiamo $W = U_1 \cap \dots \cap U_n$

$\Rightarrow W$ è aperto in τ e contiene x_0 → poiché ogni $U_i\times V_i$ interseca $\{x_0\}\times Y$



Mostriamo che $\tilde{A}$ ricoprimento del tubo $W\times Y$ sia $(x,y)\in W\times Y$ si consideri il punto (x_0,y) della fetta $\{x_0\}\times y$ (avente la stessa coordinata y)

$(x_0,y) \in U_i\times V_i$ per qualche $i=1,\dots,n$

$\Rightarrow y \in V_i$

Ma $x \in U_y$ $\forall y = 1,\dots,n \Rightarrow (x,y)\in U_i\times V_i$

$\Rightarrow \tilde{A}$ ricoprimento di $W\times Y$ e siccome tutti gli $U_i\times V_i$ sono contenuti in N.

$\Rightarrow W\times Y \subseteq N$

STEP 2

Siano ora $(X,\tau),(Y,\tau')$ compatti e $\mathcal{A}$ ricoprimento aperto di $X\times Y$

Dato $x_0\in X$, $\{x_0\}\times Y$ COMPATTO $\Rightarrow$ può essere ricoperto da un numero finito di $\mathcal{A}$: $A_1,\dots,A_m$

$$\Rightarrow \begin{cases} N=A_1\cup\dots\cup A_m & \text{APERTO} \\ N\supseteq\{x_0\}\times Y \end{cases}$$

$\overset{\text{STEP 1}}{\Rightarrow}$ $N\supseteq W\times Y$ TUBO attorno a $\{x_0\}\times Y$, ove $W\in\tau$
$\Rightarrow W\times Y$ è ricoperto da $A_1,\dots,A_m$

Quindi $\forall x\in X$ possiamo scegliere un intorno W_x di x t.c. il tubo $W_x\times Y$ sia ricoperto da un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$

La collezione di tutti gli intorni W_x ci dà un ricoprimento di X.

X COMPATTO $\Rightarrow \exists$ sottoricoprimento finito $\{W_1,\dots,W_k\}$

$\Rightarrow (W_1\times Y)\cup(W_2\times Y)\cup\dots\cup(W_k\times Y)=X\times Y$

e poiché ognuno di questi tubi può essere ricoperto da un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$ otteniamo la tesi. //

Th (Heine per $\mathbb{R}^n$)

Un sottoinsieme A di $(\mathbb{R}^n,\mathcal{E}_n)$ è compatto sse è chiuso ed è limitato rispetto a $d_{\mathcal{E}}$.

DIM) A COMPATTO $(\mathbb{R}^n, \tau_{d_\mathcal{E}}) \Rightarrow A$ chiuso, limitato.
$\underset{T_2}{\downarrow}$ $\tau_{d_\mathcal{E}} = \mathcal{E}_n$

Viceversa, sia $A\subseteq\mathbb{R}^n$ chiuso e limitato.
Sia diam $A<\delta$

Se $\bar{x}=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)\in A$ allora $|x_i-\bar{x}_i|<\delta$ $\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in A$

$$\Rightarrow A\subseteq A' = \underbrace{\prod_{i=1}^{n}[\bar{x}_i-\delta,\bar{x}_i+\delta]}_{\substack{\text{Prodotto topologico di compatti} \Rightarrow \text{COMPATTO} \\ \text{intervalli chiusi e limitati}}} \Rightarrow A \text{ chiuso in un compatto} \Rightarrow A \text{ COMPATTO.} //$$

Teorema spazi metrici e compatti

Sia (X,d) spazio metrico, $K \subseteq X$. Allora

K compatto $\iff$ K compatto per successioni

rispetto a τ_d indotta dalla metrica

Viene solo provata questa

Dim "$\Rightarrow$" Sia $\{x_n\} \subset K$ COMPATTO

Consideriamo $E = \{x_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$

- Se $|E| < \infty \Rightarrow \exists x$ t.c. $x = x_n$ per infiniti valori di n.

$\Rightarrow \{x_n\}$ ha una sottosuccessione costante (che converge in K)

- Se $|E| = \infty \overset{\text{Prop}}{\Rightarrow} \mathrm{Der}(E) \neq \emptyset$

Sia $x \in \mathrm{Der}(E) \Rightarrow x \in K$ (K chiuso)

Definiamo $\{x_{n_K}\}$ convergente a $x \in K$ come segue

- Scegliamo n_1 t.c. $x_{n_1} \in B_1(x)$
- Dato n_{K-1}, poiché $|B_{1/K}(x) \cap E| = \infty$ possiamo scegliere $n_K > n_{K-1}$ t.c. $x_{n_K} \in B_{1/K}(x)$

$\Rightarrow x_{n_K} \to x \in K \quad K \to \infty$ //

Th (Completezza di $(\mathbb{R}^n, d_E)$)

$\forall n \geq 1$, $(\mathbb{R}^n, d_E)$ è completo

Dim: Sia $\{x_n\}$ di Cauchy in $\mathbb{R}^n$.

x prop. precedente $\Rightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ limitato

in (X,d) E limitato sse $\overline{E}$ limitato $\Rightarrow K = \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ LIMITATO + CHIUSO IN $\mathbb{R} \overset{HB}{\Rightarrow}$ Compatto.

$\Rightarrow$ COMPLETO $\Rightarrow \{x_n\}$ converge in K e quindi in $\mathbb{R}^n$ //

Prop. precedente

Teorema delle contrazioni

Sia (X,d) uno spazio metrico **COMPLETO** e sia $f:(X,d)\to(X,d)$ contrazioni.

Allora $\exists!\ \bar{x}\in X$ t.c. $f(\bar{x})=\bar{x}$ $\rightsquigarrow \bar{x}$ punto fisso di f

[oss. serve contrazione $C<1$]

DIM (costruttiva: ci da un modo per approssimare il punto fisso di una contrazione) Sia $f:(X,d)\to(X,d)$ CONTRAZIONE

i.e. t.c. $\exists C<1$ t.c. $d(f(p),f(q))\le C\, d(p,q)$ $\forall p,q\in X$

- $C=0$: f costante i.e. $f(x)=\bar{x}$ $\forall x\in X$
  $\Rightarrow \bar{x}$ punto fisso $(f(\bar{x})=\bar{x})$

- $\underline{C>0}$: Sia $x_0\in X$
  Definiamo la successione $\{x_n\}$ ricorsivamente
  tramite $x_n=f(x_{n-1})$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow d(x_n,x_{n-1})=d(f(x_{n-1}),f(x_{n-2}))\le C\,d(x_{n-1},x_{n-2})$$
$$= C\,d(f_{n-2}),f_{n-3}))\le C^2 d(x_{n-2},x_{n-3})$$
$$=\dots\le C^{n-1}d(x_1,x_0)\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Siano m,n $(m\le n)$ $\Rightarrow$ dalla disuguaglianza triangolare

$$d(x_n,x_m)\le d(x_m,x_{m+1})+d(x_{m+1},x_{m+2})+\dots+d(x_{n-1},x_n)$$
$$\le d(x_1,x_0)\sum_{i=m}^{n-1}C^i = d(x_1,x_0)\cdot C^m\sum_{i=0}^{n-m-1}C^i = d(x_1,x_0)\,C^m\,\frac{1-C^{n-m}}{1-C}$$

$$C<1\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N \text{ t.c. } C^N<\frac{\varepsilon(1-C)}{d(x_1,x_0)}$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\text{ per } n,m\ge N\quad C^m\cdot\frac{1-C^{n-m}}{1-C}<C^n\cdot\frac{1}{1-C}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N \text{ t.c. } \forall n,m\ge N\quad d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

$(\Rightarrow \{x_n\}$ è di Cauchy $\underset{(X,d)\text{ completo}}{\Rightarrow}$ $x_n\to\bar{x}\in X$ $n\to\infty)$

Ma essendo f continua

$x_{n+1}=f(x_n)$, $x_{n+1}\to\bar{x}$, $f(x_n)\to f(\bar{x})$ (f continua) $n\to+\infty$ $\Rightarrow \bar{x}=f(\bar{x})$

Unicità: Sia $\bar{y} \in X$ t.c. $f(\bar{y}) = \bar{y}$

$$0 \leq d(\bar{x}, \bar{y}) = d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) \leq C\, d(\bar{x}, \bar{y}) \overset{C<1}{<} d(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{Assurdo.} \; // \; \lightning$$

Proposizione sulla chiusura di un connesso

Sia E un sottoinsieme connesso di (X, τ). Se $E \subseteq H \subseteq \bar{E} \to H$ è connesso

se aggiungo punti ad un connesso resta connesso

In particolare questo ci dice che $\bar{E}$ connesso e che ogni componente connessa di uno spazio topologico è un chiuso.

Dim: Sia E connesso e $E \subseteq H \subseteq \bar{E}$

Supponiamo per assurdo che $H = U \cup V$ separazione di H in τ_H

$$\rightsquigarrow \underset{\tau_E}{(U \cap E)} \cup \underset{\tau_E}{(V \cap E)} = E$$

E connesso
$\Rightarrow$ UNO DI loro è $\emptyset \Rightarrow E$ è connesso interamente nell'altro e.g. $E \subseteq U$

$\Rightarrow \bar{E} \subseteq \bar{U}$

Tuttavia $\bar{U}, V$ sono disgiunti: infatti

- Essendo $H = U \cup V$, U, V sono sia aperti che chiusi in τ_H
- In particolare $U = \bar{U} \cap H$
  $\Rightarrow \bar{U} \cap V = \emptyset$

$\Rightarrow \bar{U} \cap V = \emptyset$

Quindi $\bar{E} \cap V = \emptyset \Rightarrow V = \emptyset$ Assurdo $\lightning$ con il fatto che U e V è separazione di H

$V \subseteq H \subseteq \bar{E}$

Teorema degli zeri

Sia $f:(X,\tau)\to(\mathbb{R},\mathcal{E}_1)$ funzione continua, $E\subseteq X$, E connesso. Se esistono $p_1,p_2\in E$ t.c. $f(p_1)<0$ e $f(p_2)>0$ allora esiste $p_0\in E$ t.c. $f(p_0)=0$.

DIMO Se per assurdo $f(p)\neq 0$ $\forall p\in E$

$$E=E_1\cup E_2 \quad \text{con } E_1=\{p\in E \text{ t.c. } f(p)<0\},\quad E_2=\{p\in E \text{ t.c. } f(p)>0\}$$ aperti poiché f CONTINUA.

$E_1\cap E_2=\emptyset$, E_1,E_2 NON VUOTI PER IPOTESI

$\Rightarrow E_1,E_2$ sconnettono E. Assurdo $\lightning$ E è connesso!

Corollario (teorema dei valori intermedi)

Sia $f:(X,\tau)\to(\mathbb{R},\mathcal{E}_1)$ funzioni CONTINUA, (X,τ) CONNESSO. Se $a,b\in X$ e y_0 è un qualunque numero reale tra $f(a)$ e $f(b)$ allora esiste un $c\in X$ t.c. $f(c)=y_0$

Dim. Supponiamo e.g. $f(a)<f(b)$

La funzione $F:(X,\tau)\to(\mathbb{R},\mathcal{E}_1)$

$$F(p)=f(p)-y_0$$

è continua e $F(a)<0$, $F(b)>0\Rightarrow\exists c\in X$ t.c. $F(c)=0=f(c)-y_0$

i.e. $f(c)=y_0$.

Teorema sui prodotti di connessi

Un prodotto di spazi topologici $(X\times Y,\tau\times\tau')$ è connesso sse $(X,\tau),(Y,\tau')$ lo sono.

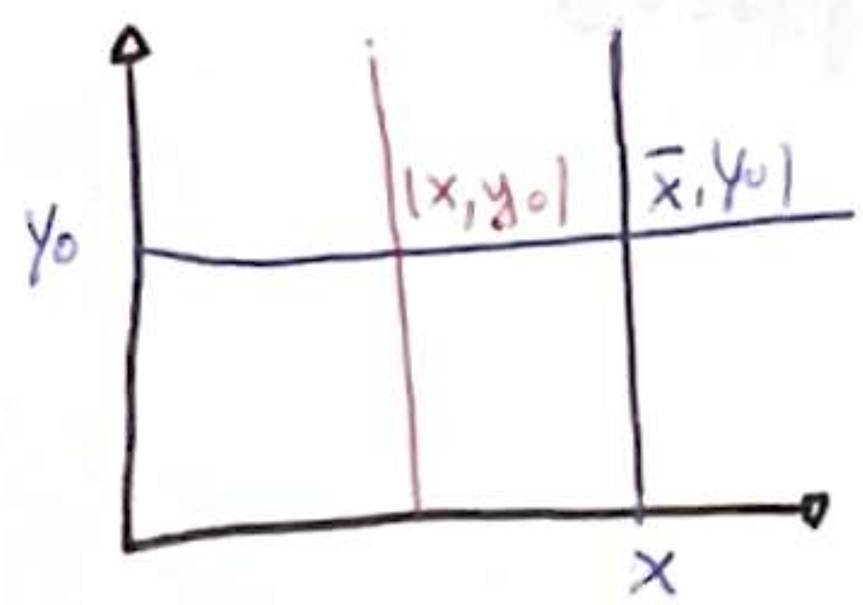
Dim) "$\Rightarrow$" $\pi_1:X\times Y\to X$, $\pi_2:X\times Y\to Y$ sono continue e suriettive

Supponiamo $(X\times Y,\tau\times\tau')$ connesso $\Rightarrow \pi_1(X\times Y)=X$, $\pi_2(X\times Y)=Y$ CONNESSI essendo π_1,π_2 continue

"$\Leftarrow$" Siano (X,τ), (Y,τ') connessi, sia $y_0 \in Y$.

Consideriamo $T_x = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$

connesso perché omeomorfo a Y CONNESSO; connesso perché omeomorfo a X CONNESSO.



$\leadsto T_x$ è connesso in quanto unione di connessi non disgiunti.

$X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x$ è connesso in quanto unione di connessi aventi in comune tutti quanti, in particolare, il punto $(\bar{x}, y_0)$ (ove $\bar{x} \in X$ fissato). //

Prop

Se (X,τ) è connesso per archi allora (X,τ) è connesso

Dim: Per assurdo supponiamo $X = A \cup B$ separazione di (X,τ)

Sia $\gamma : [0,1] \to X$ un arco qualunque

Osserviamo che $\gamma([0,1])$ è connesso (immagine continua di un connesso)

$\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow}$ $\gamma([0,1])$ è CONTENUTO INTERAMENTE in A o in B

Questo è in contraddizione con il fatto che X sia connesso per archi.

Prop

1) Siano (X,τ), (Y,τ') spazi topologici

1) Se $f : (X,\tau) \to (Y,\tau')$ CONTINUA e $E \subseteq X$ connesso per archi, allora $f(E)$ è connesso per archi.

In particolare se $(X,\tau) \approx (Y,\tau')$ allora (X,τ) è connesso per archi SSE (Y,τ') lo è.

Si ha inoltre che se C è una componente connessa

2) $(X \times X, \tau \times \tau')$ connesso per archi SSE (X,τ), (Y,τ') CONNESSO per archi.

1) Siano $q_1, q_2 \in f(E)$. Allora esistono $p_1, p_2 \in E$ t.c.

$$f(p_1) = q_1 \qquad f(p_2) = q_2$$

per Hp. $\exists \gamma : [0,1] \to E \subseteq (X, \tau)$ t.c.

$$\gamma(0) = p_1 \qquad \gamma(1) = p_2$$

Allora $f \circ \gamma : [0,1] \to f(E) \subseteq (Y, \tau')$ Arco che congiunge q_1, q_2.

2) Analogo del prodotto per connessi.

Prop Proprietà funzioni compatibili

Con le stesse notazioni, sia $f : X \to Y$ funzioni compatibile con $\mathcal{R}$. Allora:

A) f_R è suriettiva SSE f è suriettiva

B) f_R è iniettiva SSE f è totalmente compatibile

c) $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ CONTINUA SSE $f_R : (X/_{\mathcal{R}}, \tau/_{\mathcal{R}}) \to (Y, \tau')$ CONTINUA.

d) $f_R : (X/_{\mathcal{R}}, \tau/_{\mathcal{R}}) \to (Y, \tau')$ aperta SSE f MANDA APERTI SATURI IN APERTI.

<u>Dim</u> a) Per come è definita f_R si ha $\mathrm{Im}(f_r) = \mathrm{Im}(f)$

b) Sia f totalmente compatibile con $\mathcal{R}$

Se $f_R([p]) = f_R([q]) \Rightarrow$ In particolare $f(p) = f(q)$

$\Rightarrow p \mathcal{R} q \Rightarrow [p] = [q] \Rightarrow f_r$ è iniettiva

f totalmente compatibile

Viceversa sia f_R iniettiva

Se $f(p) = f(q) \Rightarrow f_R([p]) = f_R([q]) \Rightarrow [p] = [q]$ i.e. $p \mathcal{R} q \Rightarrow f$ TOTALMENTE COMPATIBILE.

per def di f_R $\qquad$ f_R 1-1

c) Sia f CONTINUA e $A \in \tau'$ $\quad f = f_R \circ \pi$

$\Rightarrow f^{-1}(A) = (f_R \circ \pi)^{-1}(A) = \pi^{-1}(f_R^{-1}(A)) \in \tau$

Per definizione di $\tau/_R \Rightarrow f_R^{-1}(A) \in \tau/_R \Rightarrow f_R$ è CONTINUA.

Viceversa sia f_R CONTINUA $\Rightarrow f = f_R \circ \pi$ CONTINUA IN QUANTO composizione di continue.

D) Supponiamo che $\forall U \in \tau$ saturo, $f(U) \in \tau'$

Sia $A \in \tau/_R \Rightarrow \exists B$ aperto saturo in τ t.c. $\pi(B) = A$

$\Rightarrow f_R(A) = f_R(\pi(B)) = (f_R \circ \pi)(B) = f(B) \in \tau'$

$\Rightarrow f_R$ è aperta

Viceversa, se $A \in \tau$ saturo e f_R aperta $\Rightarrow f(A) = (f_R \circ \pi)(A) = f_R(\pi(A)) \in \tau'$

$\Rightarrow \in \tau/_R$ per definizione topologia quoziente. //

Corollario

Siano $(X,\tau), (Y,\tau')$ spazi topologici e (Y,τ') di Haussdorf se $\exists f: (X,\tau) \to (Y,\tau')$ CONTINUA e TOTALMENTE COMPATIBILE con R allora $(X/_R, \tau/_R)$ è di Haussdorff.

CONTINUA e ~~TOTALMENTE COMPATIBILE~~

Dim: $f_R: (X/_R, \tau/_R) \to (Y,\tau')$ CONTINUA + iniettiva (f è tot. compatibile)

a valori in un $T_2 \Rightarrow (X/_R, \tau/_R)\, T_2$. //

Prop. vista a fine lezione 14

$g: (X,\tau) \to (Y,\tau')$ CONTINUA

è iniettiva, τ' $T_2 \Rightarrow \tau$ T_2