Problema 5.1.

Supongamos que un *rayo* (una semirecta en 3D) tiene como origen o extremo el punto cuyas coordenadas del mundo es la tupla $\mathbf{o}$, y como vector de dirección la tupla $\mathbf{d}$ (la suponemos normalizada).

Además sabemos que un disco de radio r tiene como centro el punto de coordenadas de mundo $\mathbf{c}$ y está en el plano perpendicular al vector $\mathbf{n}$

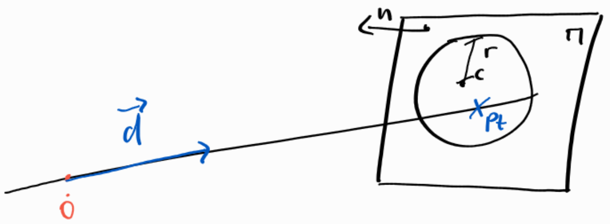
Con estos datos de entrada, diseña un algoritmo para calcular si hay intersección entre el rayo y el disco.

(ten en cuenta las indicaciones que hay en la siguiente transparencia).

Problema 5.1. (continuación)

Ten en cuenta que habrá intersección si y solo si se cumplen cada una de estas dos condiciones:

1. El rayo interseca con el plano que contiene al ~~triángulo~~ disco, es decir, existe $t > 0$ tal que el punto $\mathbf{p}_t \equiv \mathbf{o} + t\mathbf{d}$ está en dicho plano. Equivale a decir que el vector $\mathbf{p}_t - \cancel{\mathbf{v}_0}\ c$ es perpendicular a la normal al plano $\mathbf{n}$.
2. El punto $\mathbf{p}_t$ citado arriba está dentro del disco, es decir, su distancia a $\mathbf{c}$ es inferior al radio.



Explicación:

1) La recta y el plano no intersecan si, y solo si, $\vec{d} \perp \vec{n} \Rightarrow$ intersecan si, y solo si, $\vec{d} \not\perp \vec{n} \Rightarrow$ intersecan si, y solo si $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0$.

2) Calculamos el punto de intersección $p_t = o + td$, $t \in \mathbb{R}$. Si $t < 0$, el rayo no interseca.

3) Vemos si la distancia de p_t a c es menor que r.

(*) Para calcular el punto intersección, el plano es el conjunto de puntos x que satisfacen $(x - c) \cdot \vec{n} = 0$. Cogiendo $p_t = o + td$ y sustituyendo:

$$((o + td) - c) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(o^0 + td^0 - c^0) \cdot n^0 + (o^1 + td^1 - c^1) \cdot n^1 + (o^2 + td^2 - c^2) \cdot n^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{-n^0 o^0 + n^0 c^0 - n^1 o^1 + n^1 c^1 - n^2 o^2 + n^2 c^2}{n^0 d^0 + n^1 d^1 + n^2 d^2}$$

Pseudocódigo:

```
bool intersecaDisco(o, d, c, r, n){

    if(d·n = 0)
        return false;

    t = (-n⁰o⁰ + n⁰c⁰ - n¹o¹ + n¹c¹ - n²o² + n²c²) / (n⁰d⁰ + n¹d¹ + n²d²);

    if(t<0)
        return false;

    pt = o + td;

    if( ||pt-c|| > r)
        return false;

    return true;
}
```

Problema 5.2.

Diseña un algoritmo para calcular la primera intersección entre un rayo (con oriden en $\mathbf{o}$ y vector $\mathbf{d}$, normalizado) y una esfera de radio unidad y centro en el origen, si hay alguna.

Ten en cuenta que un punto cualquiera $\mathbf{p}$ está en esfera si y solo sí el módulo de $\mathbf{p}$ es la unidad, es decir, si y solo si $F(\mathbf{p}) = 0$, donde F es el campo escalar definido así:

$$F(\mathbf{p}) \equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - 1$$

Describe como podría usarse ese mismo algoritmo para calcular la intersección con una esfera con centro y radio arbitrarios (este problema puede reducirse al anterior si el rayo se traslada a un espacio de coordenadas donde la esfera tiene centro en el origen y radio unidad).

Explicación:

Sea cualquier punto del rayo: $x = o + dt$, $t > 0$. Calculamos los que tienen módulo igual que uno:

$$x = (o_0 + d_0 t,\ o_1 + d_1 t,\ o_2 + d_2 t)$$

$$\|x\| = 1 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 1 \Leftrightarrow (o_0 + d_0 t)^2 + (o_1 + d_1 t)^2 + (o_2 + d_2 t)^2 = 1 \Leftrightarrow o_0^2 + d_0^2 t^2 + 2 o_0 d_0 t + o_1^2 + d_1^2 t^2 + 2 o_1 d_1 t +$$

$$+ o_2^2 + d_2^2 t^2 + 2 o_2 d_2 t = 1 \Leftrightarrow t^2 (\underbrace{d_0^2 + d_1^2 + d_2^2}_{\|d\|^2}) + t(2(\underbrace{o_0 d_0 + o_1 d_1 + o_2 d_2}_{o \cdot d})) + (\underbrace{o_0^2 + o_1^2 + o_2^2}_{\|o\|^2}) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

Resolvemos:

$$t = \frac{-o \cdot d \pm \sqrt{o \cdot d^2 - 4\|d\|^2(\|o\|^2 - 1)}}{2\|d\|^2} \begin{cases} + \to t_1 \\ - \to t_2 \end{cases}$$

Ya podemos idear el pseudo-código:

```
//Devuelve (0,0,0) de no haber intersección
Tupla3f interseccionEsferaUnidad(o,d){

    discriminante = o·d² - 4||d||²(||o||²-1);

    if(discriminante<0)
        return {0.0,0.0,0.0};

    t1 = (-o·d + √discriminante) / (2||d||²);

    t2 = (-o·d - √discriminante) / (2||d||²);

    if(t1<0 && t2<0)
        return {0.0,0.0,0.0};
    else if(t1>0 && t2>0)
        return o+min{t1,t2}d;
    else if(t1>0)
        return o+t1d;
    else
        return o+t2d;
}
```

Problema 5.3.

Describe como podemos definir el campo escalar cuyos ceros son los puntos en un cilindro con altura unidad y radio unidad (sin considerar los discos que forman la base ni la tapa).

Usando esa definición diseña el algoritmo para calcular la intersección rayo-cilindro.

Describe asimismo el campo escalar y el algoritmo correspondientes a un cono de altura unidad y radio de la base unidad (sin considerar el disco de la base).