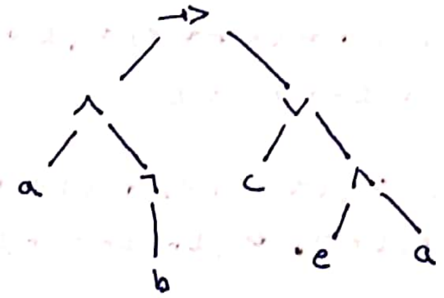
David Martínez Díaz

- Relación 4:

4.1 / 4.2

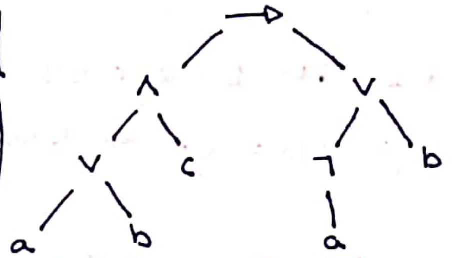
1. $\alpha = a \wedge \neg b \rightarrow c \vee (e \wedge a)$

   $Sub(\alpha) = \{\alpha, a \wedge \neg b, c \vee (e \wedge a), a, \neg b, b, c, e \wedge a, e\}$



2. $\alpha = c \wedge (a \vee b) \rightarrow \neg a \vee b$

   $Sub(\alpha) = \{\alpha, c \wedge (a \vee b), a \vee b, a, b, \neg a \vee b, \neg a, b\}$

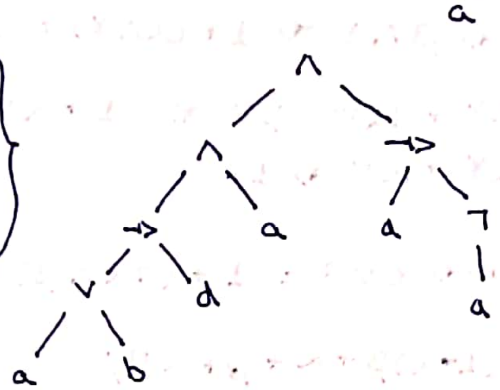


3. $\alpha = \neg(a \rightarrow b) \rightarrow a \wedge \neg(a \wedge b)$

   $Sub(\alpha) = \{\alpha, \neg(a \rightarrow b), a \rightarrow b, a, b, a \wedge \neg(a \wedge b), a, \neg(a \wedge b), a \wedge b\}$

4. $\alpha = a \wedge (a \vee b \rightarrow d) \wedge (d \rightarrow \neg a)$

   $Sub(\alpha) = \{\alpha, a \wedge (a \vee b \rightarrow d), a, a \vee b \rightarrow d, d, a \vee b, a, b, \neg a, d \rightarrow \neg a\}$



4.3. Si $\alpha / \beta = 1$ y $\gamma = \emptyset$;

1. $\alpha \vee \gamma = \alpha + \gamma + \alpha\gamma \Rightarrow 1$
2. $\alpha \wedge \gamma = \alpha\gamma = 0$
3. $\neg\alpha \wedge \neg\gamma = (1+\alpha) \wedge (1+\gamma) = 0 \wedge 1 = 0$
4. $\alpha \leftrightarrow \neg\beta \vee \gamma = 1 + \alpha + \neg\beta \vee \gamma = \neg\beta \vee \gamma = 0 \vee 0 = 0$
5. $\beta \vee \neg\gamma \Rightarrow \alpha \Rightarrow 1 + (\beta \vee \neg\gamma) + \alpha(\beta \vee \neg\gamma) =$

   $1 + (\beta \vee \neg\gamma) + 1(\beta \vee \neg\gamma) = 1$

6. $\beta \vee \alpha \to (\beta \to \neg\gamma) = 1 \vee 1 \to (1 \to 1) =$

$1 \to 1 = 1;$

7. $(\beta \leftrightarrow \neg\alpha) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \gamma) = (1 \leftrightarrow 0) \leftrightarrow (1 \leftrightarrow 0) =$

$0 \leftrightarrow 0 = 1 + 0 + 0 = 1$

8. $(\beta \to \alpha) \to ((\alpha \to \neg\gamma) \to (\neg\gamma \to \beta)) = (1 + \beta + \beta\alpha) \to$

$((1 + \alpha + (1+\gamma)) \to (1 + (1+\gamma) + \beta(1+\gamma)) = 1 \to (1 \to 1) = 1$

4.4. $\alpha \to \beta = 1 \iff 1 + \alpha + \alpha\beta = 1$

$\alpha + \alpha\beta = 0; \quad \alpha\beta = \alpha; \Rightarrow \alpha = \alpha\beta;$

1. $\alpha \vee \gamma \to \beta \vee \gamma \Rightarrow (\alpha + \gamma + \alpha\gamma) \to (\alpha + \gamma + \alpha\gamma) =$

$1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma + (\alpha + \gamma + \alpha\gamma)(\beta + \gamma + \beta\gamma)$

$1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\beta\gamma + \gamma\beta + \gamma^2 + \beta\gamma^2 + \alpha\gamma\beta + \alpha\gamma^2 + \alpha\gamma^2\beta$

$1 + \alpha + \gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\beta\gamma + \gamma\beta + \gamma^2 +$

$\Rightarrow 1;$

2. $\alpha \wedge \gamma \to \beta \wedge \gamma \Rightarrow 1 + (\alpha \wedge \gamma) + (\alpha\wedge\gamma)(\beta\wedge\gamma)$

$\hookrightarrow 1 + \alpha\gamma + (\alpha\gamma)\cdot(\beta\gamma) \Rightarrow 1 + \alpha\gamma + \alpha\beta\gamma^2;$

$1 + \cancel{\alpha\gamma} + \cancel{\alpha\gamma} \Rightarrow 1;$

3. $\neg\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha \vee \beta = 1 + (\neg\alpha \wedge \beta) + (\alpha \vee \beta)$

$\hookrightarrow 1 + (1+\alpha)\beta + \alpha + \beta + \alpha\beta;$

$1 + \beta + \alpha\beta + \alpha + \beta + \alpha\beta$

$1 + \alpha \Rightarrow \neg\alpha$

4.5. Si tenemos que: $\alpha \leftrightarrow \beta = 0;$

$\hookrightarrow 1 + \alpha + \beta = 0$

$\beta = 1 + \alpha = \neg\alpha;$

1. $\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha \wedge (1+\alpha) = 0$
2. $\alpha \vee \beta \Rightarrow \alpha \vee \neg\alpha = 1$
3. $\alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \alpha \rightarrow \neg\alpha = 1 + \alpha + 0 \Rightarrow 1 + \alpha = \neg\alpha = \beta$
4. $\alpha \wedge \gamma \leftrightarrow \beta \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma \leftrightarrow \neg\alpha \wedge \gamma =$
   $1 + \alpha\gamma + \neg\alpha\gamma = 1 + \gamma(\alpha + \neg\alpha) = 1 + \gamma = \neg\gamma;$

4.6. $\alpha \rightarrow \beta = 1 \Rightarrow 1 + \alpha + \alpha\beta = 1;$

$\alpha + \alpha\beta = 0; \ \alpha\beta = \alpha;$

1. $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta \Rightarrow \alpha;$
2. $\alpha \vee \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta \Rightarrow \beta;$
3. $\alpha \rightarrow \beta = 1 + \alpha + \alpha\beta = 1;$
4. $\alpha \wedge \gamma \leftrightarrow \beta \wedge \gamma = 1 + (\alpha \wedge \gamma) + (\beta \wedge \gamma)$
   $\hookrightarrow 1 + \alpha\gamma + \beta\gamma = 1 + \gamma(\alpha + \beta);$

4.7.

1. $\alpha \leftrightarrow \alpha \vee \alpha \Rightarrow 1 + \alpha + \alpha \vee \alpha = 1 + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha^2 = 1$

$\Rightarrow$ Tautología y satisfacible.

2. $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma) = (\alpha \to \beta)(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$

$(1 + \alpha + \alpha\beta)(1 + \beta + \beta\gamma) \to (1 + \alpha + \alpha\gamma) = (1 + \beta + \beta\gamma + \alpha + \alpha\beta)$

$\to (1 + \alpha + \alpha\gamma) = (1 + \beta + \beta\gamma + \alpha) \to (1 + \alpha + \alpha\gamma)$

$\Rightarrow \beta + \beta\gamma + \alpha + (1 + \beta + \beta\gamma + \alpha)(1 + \alpha + \alpha\gamma) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 2\beta + \alpha\beta\gamma$

$\to$ Es satisfacible y refutable.

3. $(\alpha \to \beta) \wedge \beta \to \alpha$

α	β	$\alpha \to \beta$	$\beta \to \alpha$	$\alpha \to \beta \wedge \beta \to \alpha$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

$\to$ Es contingente.

4. $\neg\alpha \to \alpha \wedge \beta$

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\neg\alpha \to \alpha \wedge \beta$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	~~0~~ 1
1	1	0	1	1

$\Rightarrow$ Es contingente

Escaneado con CamScanner

4 4.7.5. $\alpha \wedge \neg(\alpha \vee \beta)$

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\alpha \wedge \neg(\alpha \vee \beta)$
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

$\Rightarrow$ Es contradicción.

6. $\neg\alpha \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \neg\alpha)$

α	$\neg\alpha$	$\alpha \rightarrow \neg\alpha$	$\neg\alpha \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \neg\alpha)$
0	1	1	1
1	0	0	$\cancel{0}$ 1

$\Rightarrow$ Es tautologia

7. $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta$

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \vee \beta$	$(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

$\Rightarrow$ Es tautologia.

4.8.

1. Cuando el hombre dice "ambos somos embusteros".

$h \leftrightarrow \neg h \wedge \neg m = h + (h+1) \wedge (m+1) + 1 =$

$h + 1 + hm + h + m + 1 = m(h+1)$

$\Rightarrow$ Si $m(h+1) = 1$, entonces $\begin{cases} m = 1 \\ h = 0 \end{cases}$

* El hombre miente y la mujer dice la verdad

2. Cuando el Marido dice "por lo menos uno es embustero"

$h \leftrightarrow \neg h \vee \neg m \Rightarrow 1 + h + (\neg h \vee \neg m) =$

$1 + h + (1+h) + (1+m) + (1+h)(1+m) =$

$1 + m + 1 + m + h + hm = h(m+1)$

$\Rightarrow$ Si $h(m+1) = 1$ $\begin{cases} h = 1 \\ m = 0 \end{cases}$

* El hombre es veraz y la mujer es mendaz.

3. Hombre dice "si yo soy veraz, ella también lo es".

$h \leftrightarrow (h \rightarrow m) = 1 + h + 1 + h + hm = hm = 1$

$\Rightarrow$ $h, m = 1$ $\begin{cases} h = 1 \\ m = 1 \end{cases}$

* Ambos son veraces.

4. "Yo soy lo mismo que mi mujer"

$h \leftrightarrow (h \leftrightarrow m) = h + 1 + (h + 1 + m) = m;$

$m = 1$

* La mujer es veraz, el hombre puede ser veraz ó mendaz (cualquiera de los dos).

4.10.

1. $a \to b \equiv \neg a \to \neg b$

a	b	$a \to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \to \neg b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

* La equivalencia es cierta.

2. $a \leftrightarrow b \equiv \neg a \leftrightarrow \neg b$

a	b	$a \leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \leftrightarrow \neg b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

* La equivalencia es cierta

$(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \vee (b \to c)$

3.

a	b	c	$a \vee b$	$(a \vee b) \to c$	$a \to c$	$b \to c$	$(a \to c) \vee (b \to c)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

* La equivalencia es falsa

4. $(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \wedge (b \to c)$

a	b	c	$a \vee b$	$(a \vee b) \to c$	$a \to c$	$b \to c$	$(a \to c) \wedge (b \to c)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

* Equivalencia es cierta

5. $a \to (b \vee c) \equiv (a \to b) \vee (a \to c)$

a	b	c	$b \vee c$	$a \to (b \vee c)$	$a \to b$	$a \to c$	$(a \to b) \vee (a \to c)$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

* La equivalencia es cierta.

6. $a \to (b \to c) \equiv (a \wedge b) \to c$

a	b	c	$b \to c$	$a \to (b \to c)$	$a \wedge b$	$a \wedge b \to c$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

* La equivalencia es cierta

4.11. $r = \{c \to (a \vee b),\ b \to (c \to a),\ d \wedge \neg(c \to a)\}$

a	b	c	d	$a \vee b$	$c \to (a \vee b)$	$c \to a$	$b \to (c \to a)$	$\neg(c \to a)$	$d \wedge \neg(c \to a)$
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1		0	0
									0

$c \to (a \vee b)$: Contingente
$b \to (c \to a)$: Contingente
$d \wedge \neg(c \to a)$: Contingente

* El conjunto de proposiciones es Insatisfacible.

Escaneado con CamScanner

4.12.

1. $\models (\beta \to \alpha \vee \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to ((\gamma \to \beta) \to \gamma)$

$\beta \to \alpha \vee \gamma \models (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to ((\gamma \to \beta) \to \gamma))$

$\beta \to \alpha \vee \gamma, \alpha \to \beta \models \alpha \to ((\gamma \to \beta) \to \gamma)$

$\beta \to \alpha \vee \gamma, \alpha \to \beta, \alpha \models (\gamma \to \beta) \to \gamma$

$\beta \to \alpha \vee \gamma, \alpha \to \beta, \alpha, \gamma \to \beta \models \gamma$

$\to$ Polinomios premisas:

$\beta \to \alpha \vee \gamma = 1 + \beta + \beta(\alpha + \gamma + \alpha\gamma) = 1 + \beta + \alpha\beta + \gamma\beta + \alpha\beta\gamma;$

$\alpha \to \beta = 1 + \alpha + \alpha\beta$

α

$\gamma \to \beta = 1 + \gamma + \beta\gamma$

$\to$ Polinomio conclusión:

γ

$\to$ Multiplicamos premisas por negado conclusión:

$(1 + \beta + \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\beta\gamma)(1 + \alpha + \alpha\beta)\alpha(1 + \gamma + \beta\gamma)(1 + \gamma)$

$\hookrightarrow \alpha\beta(1 + \gamma + \beta\gamma)(1 + \gamma) = (\alpha\beta + \cancel{\alpha\beta\gamma} + \cancel{\alpha\beta\gamma})(1 + \gamma) = \alpha\beta(1 + \gamma) =$

$\alpha\beta + \alpha\beta\gamma$

$\Rightarrow$ No tautología.

---

2. $\models (\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \beta)) \to \alpha)$

$\beta \to \neg\alpha \models ((\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \beta)) \to \alpha)$

$\beta \to \neg\alpha, \neg\alpha \models \neg(\alpha \to \beta) \to \alpha$

$\beta \to \neg\alpha, \neg\alpha, \neg(\alpha \to \beta) \models \alpha$

$\to$ Polinomios premisas:

$\beta \to \neg\alpha = 1 + \beta + \beta \cdot \neg\alpha$

$\neg\alpha$

$\neg(\alpha \to \beta) = 0 + \neg\alpha + \neg(\alpha\beta)$

$\to$ Polinomio conclusión:

α

$\to$ Multiplicamos premisas por negado conclusión:

$(1 + \beta + \beta\neg\alpha)\neg\alpha(\neg\alpha + \neg(\alpha\beta)) \Rightarrow (\neg\alpha + \cancel{\beta\neg\alpha} + \cancel{\beta\neg\alpha})(\neg\alpha + \neg(\alpha\beta))$

$\hookrightarrow \neg\alpha + \neg\alpha\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha(1 + \neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha\beta$

$\Rightarrow$ No tautología

Escaneado con CamScanner

3. $\models (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

$\alpha \to \beta \models ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

$\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \models \alpha \to \gamma$

$\to$ <u>Polinomios premisas:</u>

$\alpha \to \beta = 1 + \alpha + \alpha\beta;$

$\beta \to \gamma = 1 + \beta + \beta\gamma;$

$\to$ <u>Polinomio conclusión:</u>

$\alpha \to \gamma = 1 + \alpha + \alpha\gamma; \Rightarrow 0 + (1+\alpha) + (1+\alpha\gamma) \Rightarrow \alpha + \alpha\gamma$

$\Rightarrow$ <u>Multiplicamos premisa por negado conclusión:</u>

$(1 + \alpha + \alpha\beta)(1 + \beta + \beta\gamma) \neg (1 + \alpha + \alpha\gamma)$

$1 + \beta + \beta\gamma + \alpha + \cancel{\alpha\beta} + \alpha\beta\gamma + \cancel{\alpha\beta} + \alpha\beta + \alpha\beta\gamma$

$\hookrightarrow (1 + \beta + \alpha + \beta\gamma + \alpha\beta)(\alpha + \alpha\gamma) \Rightarrow \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha\beta} + \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha\beta\gamma} + \cancel{\alpha\beta} + \cancel{\alpha\gamma} + \cancel{\alpha\gamma\beta} + \cancel{\alpha\gamma}$

$+ \cancel{\alpha\gamma\beta} + \cancel{\alpha\gamma\beta} = 0$

$\Rightarrow$ Es tautología

---

4. $\models ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

$\alpha \to \beta \models \alpha \to \alpha$

$\alpha \to \beta, \alpha \models \alpha$

$\to$ <u>Polinomios premisas:</u>

$\alpha \to \beta = 1 + \alpha + \alpha\beta;$

α

$\to$ Polinomio conclusión:

$\neg\alpha \Rightarrow (1 + \alpha)$

$\to$ <u>Multiplicamos premisas:</u> $\cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} + \alpha\beta \cdot (1 + \alpha)$

$(1 + \alpha + \alpha\beta)\alpha(1 + \alpha) \Rightarrow$

$\hookrightarrow \cancel{\alpha\beta} + \alpha\beta = 0$

$\to$ <u>Es tautología.</u>

4. 13.

1. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \models \neg a \wedge \neg c$

$\Rightarrow$ Lo resolvemos a traves de la tabla de verdad:

a	b	c	$\neg(a\wedge b)$	$\neg c \vee a$	$\neg a \wedge \neg c$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

$\Rightarrow$ Consecuencia lógica cierta.

2. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \models \neg a \rightarrow \neg c$

a	b	c	$\neg(a\wedge b)$	$\neg c \vee a$	$\neg a \rightarrow \neg c$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

$\Rightarrow$ Consecuencia lógica cierta.