ET3, ejercicio 5. Resolución

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_5)$.

1. Encuentra una matriz B tal que $A \cdot B = \mathrm{Id}$.
2. Encuentra todas las matrices B que cumplan la propiedad anterior.
3. ¿Existe una matriz C tal que $C \cdot A = \mathrm{Id}$?

---

1. **¿qué orden debe tener** B**?** Como la identidad es una matriz cuadrada, podemos calcular el orden de la matriz B que nos piden:

$\underset{3\times 4}{A} \quad \underset{4\times ?}{\cdot B} \quad \underset{3\times 3}{= I}$ así que ?= 3, es decir, B es de orden 4×3.

Una idea posible Si calculamos la forma de Hermite por columnas de A y la **matriz de paso**, a la que llamaremos Q, entonces $A \cdot Q = H$. H no es la matriz identidad, por supuesto, porque tiene orden 3×4, pero puede parecerse bastante. Calculémosla:

$$\left[\frac{A}{I_4}\right] = \left(\begin{array}{cccc} 2 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_c \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_c \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_c$$

$$\sim_c \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim_c \left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\frac{H}{Q}\right]$$

Así que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)$$

una solución Observando el producto anterior nos damos cuenta de que si tomamos solo las 3 primeras columnas de Q tenemos una matriz que verifica la condición. Así que una posible matriz B es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La pregunta ahora es encontrar cómo son **todas** las matrices que verifican esta condición. En realidad el planteamiento es sencillo, sería resolver:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que puede parecer complicado, son 12 incógnitas, pero realmente no se mezclan (por eso las he designado con letras distintas). El primer sistema será el que corresponde a las x's:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

y las correspondientes a los sistemas para las y's y las z's:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como se resuelven haciendo o.e. por filas sobre la matriz de coeficientes, los tres pueden resolverse simultáneamente utilizando la matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

que incluye las tres columnas de términos independientes. Utilizamos el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_f$$

$$\sim_f \left(\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_f$$

$$\sim_f \left(\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_f$$

Eligiendo en cada caso la columna de términos independientes que corresponde tendremos la solución de los tres sistemas. Por tanto la solución de cada uno de los sistemas es

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 + 2\lambda_1 \\ x_3 = \lambda_1 \\ x_4 = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} y_1 = 3 \\ y_2 = 4 + 2\lambda_2 \\ y_3 = \lambda_2 \\ y_4 = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} z_1 = 2 \\ z_2 = 1 + 2\lambda_3 \\ z_3 = \lambda_3 \\ z_4 = 1 \end{array} \right. \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}_5$$

Es decir, todas las matrices son de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 + 2\lambda_1 & 4 + 2\lambda_2 & 1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}_5$$

3. Si pensamos primero en el orden de C, debería ser

$$\underset{?\times 3}{C} \cdot \underset{3\times 4}{A} = \underset{4\times 4}{I} \quad \text{entonces } ?= 4.$$

El argumento más fácil de utilizar es posterior al momento en que nos encontramos en el desarrollo del tema. Se usa:

$$\operatorname{rg}(A \cdot B) \leq \text{máx}\{\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\}$$

en este caso, por los órdenes de A y C su rango máximo posible es 3, luego $\operatorname{rg}(C \cdot A) \leq 3$ mientra que $\operatorname{rg}(I_4) = 4$.