David Martínez Díaz

- Relación tema 4:

1. a) Tenemos que $V(x) = \sigma^2 = (2)^2 = 4;$

$$\begin{cases} E(\bar{x}) = \mu \\ V(\bar{x}) = \dfrac{V(x)}{n} = \dfrac{4}{n} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Aplicando Chebyshev:

$$P\left(|\bar{X} - \mu| < k\sqrt{\frac{4}{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \Rightarrow P\left(|\bar{x} - \mu| < 1\right) \geq 0'95$$

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0'95 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{1}{0'05}} = 2\sqrt{5};$$

$$2\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{4}{n}} = 1; \Rightarrow n = \frac{4}{0'05 \cdot 1} = \boxed{80};$$

---

2 b) Tenemos: $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{2}{\sqrt{n}}} \rightarrow N(0,1);$

Para obtener el valor $z_0$, donde este comprendido al 0'95 tenemos que:

$0'975 \Rightarrow z = 1'96$

$$P\left(\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right| < 1'96\right) = P\left(|\bar{X} - \mu| < 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = P\left(|\bar{X} - \mu| < \frac{3'92}{\sqrt{n}}\right) \geq 0'95$$

$$\frac{3'92}{\sqrt{n}} = 0'5 \Rightarrow n = 15'36;$$

Como el valor debe ser un número entero el resultado final sería: $\boxed{n > 16;}$

3. $X$ = Espesor de las chapas metálicas; $X \to N(0'5;\sigma^2)$;
$n=10$ y utilizando el siguiente estadístico:

$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ / $P(\chi_0^2 < \chi_n^2 < \chi_1^2) = 1-\alpha$; / $\chi_0^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} < \chi_1^2 = 1-\alpha$

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \Rightarrow 0'0088$;

$1-\alpha = 0'98$; $\alpha = 0'02$; $\frac{\alpha}{2} = 0'01$;

$1-\frac{\alpha}{2} = 0'99$;

$P(\chi^2_{(10)} \leq \chi_0^2) = 0'01 \Rightarrow \chi_0^2 = 2'56$;

$P(\chi^2_{(10)} \leq \chi_1^2) = 0'99 \Rightarrow \chi_1^2 = 23'21$;

$\frac{0'0088}{23'21} < \sigma^2 < \frac{0'0088}{2'56} \Rightarrow 0'00037 < \sigma^2 < 0'000343$

Desviación típica:

$\boxed{0'0194716 < \sigma < 0'058630197}$

Con un nivel de confianza del 98%

4. El salario de un directivo es $X \to N(\mu;\sigma^2)$
El tamaño es menor que 30:

$P\left(\bar{X} - t_0 \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_0 \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$;

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} \Rightarrow \frac{31350}{12} = 2612'5$;

$S_{n-1} \Rightarrow \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{12} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} \Rightarrow 382'054$;

$P(t_{12-1} \leq t_0) = 0'95 \Rightarrow t_0 = t_{11;0'95} \Rightarrow 1'796$

- Si sustituimos en el intervalo:

$2612'5 - 198'0799 < \mu < 2612'5 + 198'0799$

$\Rightarrow 2414'4201 < \mu < 2810'5799$

Para 90 %

5. $X \to N(\mu, \sigma) \Rightarrow \dfrac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \Rightarrow t_{n-1}$ $\quad s^2 \Rightarrow s = \sqrt{18'75} = 4'3301$

Por tanto tenemos que:

$$P\left(\frac{|\bar{X} - \mu|}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 0'995;$$

---

$\Rightarrow$ Si interpolamos en la tabla con 99 grados de libertad

$t_{\alpha/2} = 2'6265;$

$\Rightarrow$ Luego nuestro intervalo:

$$\left(25 - 2'6265 \cdot \frac{4'3301}{\sqrt{100}} ; 25 + 2'6265 \cdot \frac{4'3301}{\sqrt{100}}\right)$$

$\boxed{(23'8626 ; 26'1373);}$

---

6. Como $\dfrac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$ entonces tenemos que:

$$P\left(a \leq \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} \leq b\right) = 1-\alpha \Rightarrow P\left(\frac{(n-1) s^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) s^2}{a}\right);$$

$\Rightarrow$ De la primera igualdad para un $\alpha = 0'01$ y para las tablas chi cuadrado, si interpolamos entre $n=90$ y $n=100$, para tener $n=99$:

$\boxed{a = 66'52 \quad b = 138'98}$

$$\left(\frac{99 \cdot 18'75}{138'98} ; \frac{99 \cdot 18'75}{66'52}\right) \Rightarrow (13'3562 ; 27'9051);$$

Como $\sigma = 5 \Rightarrow \sigma^2 = 25$, esta dentro del intervalo por lo que si sería coherente.

7. Factoria A $\begin{cases} n = 40 & S_1^2 = 440 \\ \bar{X}_1 = 1200 \end{cases}$ Factoria B $\begin{cases} m = 50 & S_2^2 = 625 \\ \bar{X}_2 = 1320 \end{cases}$

98 % de confianza

$$P\left( -t_0 < \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} < t_0 \right) = 1 - \alpha;$$

- Calculemos Sc:

$$S_c = \sqrt{\frac{(n-1)\cdot S_1^2 + (m-1) S_2^2}{n+m-2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{39 \cdot S_1^2 + 49 \cdot S_2^2}{88}} = 23'3026$$

⇒ Buscando en la tabla 88 gr y $t_{0'99}$:

$$\frac{90-80}{2'368 - 2'374} = \frac{90-88}{2'368 - x} \Rightarrow x = 2'3692 = t_0$$

⇒ Calculamos los datos:

$$(\bar{X}_1 - \bar{Y}_2) = 1200 - 1320 = -120$$

$$t_0 \cdot S_c \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = 11'7114$$

⇒ Luego nuestro intervalo es:

$$\boxed{-131'7114 < \mu_1 - \mu_2 < -108'2886}$$

8. Para resolver:

$t_0 \, S_c \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = 10 \Rightarrow$ Como tenemos $98\% \Rightarrow z_{0'99} = \cancel{2'33}$ $2'33$;

$2'\cancel{85} \cdot \sqrt{\frac{440}{n} + \frac{625}{n}} \Rightarrow 10$

$\Rightarrow$ Donde obtenemos que:

$2'33 \cdot \sqrt{\frac{1065}{n}} = 10 \Rightarrow \sqrt{\frac{1065}{n}} = \frac{10}{2'33}$;

$\hookrightarrow \sqrt{\frac{1065}{n}} = 4'29 \Rightarrow n = \frac{1065}{4'29^2} \Rightarrow 57'8675$;

$\Rightarrow$ Por tanto el tamaño muestral es:

$\boxed{\Rightarrow 58}$

---

9. $\hat{p} \Rightarrow \frac{45}{60} = 0'75$ / $\hat{q} = 1 - \hat{p} \Rightarrow 1 - 0'75 = 0'25$

$P\left(\hat{p} - z_0 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_0 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = 1 - \alpha$;

$1 - \alpha = 0'95 \Rightarrow \alpha = 0'05$; $\frac{\alpha}{2} = 0'025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'975$;

$P(z \leq z_0) = 0'975 = 1'96$

---

$0'75 - 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'75 \cdot 0'25}{60}} < p < 0'75 + 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'75 \cdot 0'25}{60}}$

$\hookrightarrow \boxed{0'640432 < p < 0'859667}$

---

10. $r = 8\% \Rightarrow 0'08\%$

$P(|\hat{p} - p| < r) = 0'95 \Rightarrow r = z_0 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0'08$;

$\hookrightarrow$ si despejamos:

$r = z_0 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Rightarrow \frac{z_0}{r} = \sqrt{\hat{p}\hat{q}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_0}{r}\right)^2 (\hat{p}\hat{q})$

$\Rightarrow$ Del anterior ejercicio teníamos que:

$\hat{p} = 0'75$ y que $\hat{q} = 0'25$;

Por otro lado dado que el nivel de confianza es de 0'95 como en el anterior ejercicio, tenemos

⇒ Cuantil $z_0 = 1'96$

⇒ Si sustituimos en la expresión del tamaño muestral:

$$n = \left(\frac{z_0}{r}\right)^2 (\hat{p}\hat{q}) \Rightarrow \left(\frac{1'96}{0'08}\right)^2 (0'75 \cdot 0'25) = \boxed{112'5468}$$

Podemos tomar el tamaño muestral: $\boxed{113 \text{ comercios}}$ que con un error de estimación del 8%, al tener ya 60 comercios se quedarían con $113 - 60 = 53$ comercios adicionales.

---

11. Tenemos:

$\hat{p}_1 = \frac{120}{150} \Rightarrow 0'8$; $\Rightarrow \hat{q}_1 = 1 - \hat{p}_1 \Rightarrow 1 - 0'8 = 0'2$;

$\hat{p}_2 = \frac{92}{110} \Rightarrow 0'836$; $\Rightarrow \hat{q}_2 = 1 - \hat{p}_2 \Rightarrow 1 - 0'836 = 0'163$;

---

$$P\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_0\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{m}} < p_1 - p_2 < \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_0\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{m}}\right) = 1 - \alpha$$

⇒ Para nuestro caso:

$n = 150$ y $m = 110$

$P(z \leq z_0) = 0'975 \Rightarrow z_0 = 1'96$

⇒ Si sustituimos:

$$[0'8 - 0'836] - \left[1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'8 \cdot 0'2}{150} + \frac{0'836 \cdot 0'163}{110}}\right] \Rightarrow 0'0941;$$

$$-0'036 - 0'0941 < p_1 - p_2 < -0'036 + 0'0941;$$

$$\hookrightarrow \boxed{-0'1301 < p_1 - p_2 < 0'0581}$$

12. Para determinar el tamaño muestral dada una cota de error usaremos la siguiente expresión:

$$r = z_0 \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{m}}$$

⇒ Si suponemos que $n = m$ podemos despejar:

$$n = \left(\frac{z_0}{r}\right)^2 (\hat{p}_1 \hat{q}_1 + \hat{p}_2 \hat{q}_2)$$

↳ Si sustituimos:

$$n = \left(\frac{1'96}{0'02}\right)^2 \cdot (0'16 + 0'1362) \Rightarrow \overset{2849'0427}{[\cancel{2845'3678}]}.$$

⇒ Habría que encuestar a $\overset{2850}{[\cancel{2846}]}$ establecimientos para que haya una diferencia de error que no supere el 2%.