David Martínez Díaz

1. → $\mu = \frac{x_1 + 3x_2 + 4x_2}{8} \Rightarrow E[\bar{x}] = E\left[\frac{x_1 + 3x_2 + 4x_3}{8}\right]$;

$\mu = \frac{1}{8} \cdot (E[x_1] + E[3x_2] + E[4x_3]) \Rightarrow \frac{1}{8} \cdot (E[x_1] + 3E[x_2] + 4E[x_3])$

* Como $\Rightarrow \bar{x} = \mu$:

$\mu = \frac{1}{8} \cdot (\mu + 3\mu + 4\mu)$; $\mu = \frac{8\mu}{8} \Rightarrow \boxed{\mu = \mu} \Rightarrow$ Sí

→ $\mu = \frac{x_1 - 3x_2 + 4x_3}{10} \Rightarrow E[x] = E\left[\frac{x_1 - 3x_2 + 4x_3}{10}\right]$

$\mu = \frac{1}{10} \cdot (E[x_1] + E[3x_2] + E[4x_3]) \Rightarrow \frac{1}{10} \cdot (E[x_1] - 3E[x_2] + 4E[x_3])$

* Como $\Rightarrow \bar{x} = \mu$:

$\mu = \frac{1}{18} (\mu - 3\mu + 4\mu)$; $\mu = \frac{2\mu}{10} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{\mu}{5}} \Rightarrow$ No

---

2. → $\mu = \frac{x_1 + 3x_2 + 4x_3}{8}$;

$V[\mu] = V\left[\frac{x_1 + 3x_2 + 4x_3}{8}\right]$; $V[\mu] = \frac{1}{8^2} \cdot (V[x_1 + 3x_2 + 4x_3])$;

$V[\mu] = \frac{1}{8^2} [V[x_1] + V[3x_3] + V[4x_3]] = \frac{1}{8^2} \cdot (\sigma^2 + 9\sigma^2 + 16\sigma^2)$

$\frac{26\sigma^2}{64} = \frac{13\sigma^2}{32} = V[\mu]$

→ $\mu = \frac{x_1 - 3x_2 + 4x_3}{10}$;

$V[\mu] = V\left[\frac{x_1 - 3x_2 + 4x_3}{10}\right]$; $V[\mu] = \frac{1}{10^2} \cdot (V[x_1 - 3x_2 + 4x_3])$;

$V[\mu] = \frac{1}{10^2} [V[x_1] + V[3x_3] + V[4x_3]] = \frac{1}{10^2} (\sigma^2 + 9\sigma^2 + 16\sigma^2)$;

$\frac{26\sigma^2}{100} = V[\mu] \Rightarrow$ Mas chica/pequeña

3. $P(\lambda)$ $\mathcal{L}(\lambda) = \prod f(x_1, x_2 \dots x_n ; \lambda)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_2}}{x_2!} \cdots \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_n}}{x_n!} \Rightarrow \frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\Sigma x_i}}{\prod x_i!};$$

$$\frac{d \ln(L(\lambda))}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\Sigma x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\right) = \left(-n\lambda \ln(e) + \Sigma x_i \ln(\lambda)\right) - \ln\left(\prod x_i!\right)$$

$$\frac{\partial(\alpha_n(\alpha(\lambda))}{\partial\lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0; \Rightarrow \frac{\Sigma x_i}{x} = n;$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\sum^{n} x_i}{n} = \bar{x}}$$

---

4. $f(x;\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x}$ si $0 < x < +\infty$ y $\lambda > 0$

a) Insesgadez: Los estimadores son insesgados ya que:

$E(\hat{\lambda}) = E(\hat{\lambda}) \Rightarrow E(\bar{x}) = E(x) = \lambda$

b) Suficiencia: cuando la función de verosimilitud, se puede descomponer en $h(\theta,\theta)$ y $g(x_1, x_2$

$$L(\bar{x},\lambda) = e^{-n\lambda} \cdot \frac{\lambda^{\Sigma x_i}}{\prod x_i!} = e^{-n\lambda} \cdot \frac{\lambda^{-n\bar{x}}}{\prod x_i!} = e^{-n\lambda} \cdot \frac{\lambda^{n\lambda}}{\prod x_i!} = \frac{(e^{-\lambda} \cdot \lambda^{\lambda})^n}{\prod x_i!}$$

$h(\bar{x}) = \frac{1}{\prod x_i!} \cdot g(\lambda, \hat{\lambda}) = (e^{-\lambda}, \lambda^{\lambda})^n \Rightarrow$ Estimador suficiente.

c) Eficiencia: debe coincidir con la cota de Frechet-Cramer-Rao

$$\Rightarrow \text{Cota FCR} = \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln(f(x,\lambda))}{\partial\lambda}\right)^2\right]} = \frac{1}{nE\left[\left(-1+\frac{x}{\lambda}\right)^2\right]} = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\lambda^2} V[x]} = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\lambda^2} \cdot \lambda} = \frac{\lambda}{n}$$

$\Rightarrow$ Varianza: $V(\bar{x}) = \frac{V(x)}{n} = \frac{\lambda}{n}$; $\Rightarrow$ Estimador eficiente.

d) Consistencia: cuando es insesgado y su varianza $= 0$ cuando $n = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\lambda}) = \lim_{n\to\infty} V(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n} = 0$$

* Chebyshev:

$$P(|\hat{\theta} - E(\hat{\theta}_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\theta_n)}{\varepsilon^2}; \quad P(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\theta_n)}{\varepsilon}$$

$[1-0] = 1$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta_n - \theta| > \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{V(\theta_n)}{\varepsilon^2} = 0 \rightarrow \underline{\forall \varepsilon > 0}$$

* El estimador es consistente.

* $P \Rightarrow 1 \geq 1 \Rightarrow P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) = 1$

Escaneado con CamScanner

5. $f(x_1;\theta) = \frac{1}{2\theta^3} x_1^2 e^{-\frac{x_i}{\theta}}$ ... $f(x_n;\theta) = \frac{1}{2\theta^3} x_n^2 e^{-\frac{x_n}{\theta}}$

$f(x_2;\theta) = \frac{1}{2\cdot\theta^3} x_2^2 e^{-\frac{x^2}{\theta}}$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \frac{1}{2^n \theta^{3n}} \cdot \prod x_i^2 e^{-\frac{1}{\theta}\sum x_i}$$

$$\frac{1}{2^n\theta^{3n}} \cdot \sum x_i^2 \cdot e^{\frac{\sum x_i}{\theta}};$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L(x_1, x_2 \dots x_n;\theta)}{\partial\theta} \rightarrow -n\ln 2 - 3n\ln\theta + \sum 2\ln x_i - \frac{1}{\theta}\sum x_i$$

$$\Rightarrow -3n\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow -3n\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} n\bar{X} = 0$$

$\Rightarrow -3\cdot\theta + \bar{X} = 0$; Donde $\theta = \frac{\bar{X}}{3}$

* Derivamos por segunda vez:

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, x_2 \dots x_n;\theta)}{\partial\theta^2} = 3n\frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} n\cdot\bar{X};$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, x_2 \dots x_n;\theta)}{\partial\theta^2} = 3n\cdot\frac{1}{(\bar{X}/3)^2} - \frac{2}{(\bar{X}/3)^3} n\bar{X} \Rightarrow \boxed{-\frac{27n}{\bar{X}^2} < 0}$$

* Se cumple

---

6. → Para saber si es insesgado cuando su valor esperado coincide con el parámetro que pretende estimar:

$E[\theta] = E\left[\frac{\bar{X}}{3}\right] = \frac{1}{3}E[\bar{X}];$

↳ $E[\theta] = E\left[\frac{\bar{X}}{3}\right] = \frac{1}{3}E[X] = \frac{1}{3}E[\bar{X}] = \frac{1}{3}\cdot 3\theta = \theta$

Por tanto, $\frac{\bar{X}}{3}$ es un estimador. insesgado de θ.

→ Para cuando es eficiente, cuando la varianza coincide con la cota de Frechet - Cramer - Rao.

$V[\theta] = V\left[\frac{\bar{X}}{3}\right] = \frac{1}{9}V[\bar{X}];$

$V[\theta] = \frac{1}{9}V[\bar{X}] = \frac{1}{9}\frac{V[X]}{n} = \frac{1}{9}\frac{3\cdot\theta^2}{n} = \frac{\theta^2}{3n}$

* Para calcular la cota:

$$\text{Cota FCR} = \frac{1}{n E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x_i;\theta)}{\partial\theta}\right)\right]}$$

* Procedemos a derivar:

$$\ln f(x;\theta) = -\ln 2 - 3\ln\theta + 2\ln x - \frac{x}{\theta}$$

$$\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta} = -3\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2} \Rightarrow \frac{x-3\cdot\theta}{\theta^2}$$

→ Calculamos el valor esperado del cuadrado de la derivada:

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{x-3\theta}{\theta^2}\right)^2\right] = \frac{1}{\theta^4}E[(x-3\theta)^2]$$

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = \frac{1}{\theta^4}E[(x-3\theta)^2] = \frac{1}{\theta^4}3\cdot\theta^2 = \frac{3}{\theta^2}$$

$$\text{Cota FCR} = \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]} = \frac{1}{n\frac{3}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{3n}$$

→ Para verificar que es consistente:

$$\lim_{n\to\infty} P[|\hat\theta-\theta|<\varepsilon] = 1 \quad \forall\varepsilon>0$$

$$P[|\hat\theta-\theta|<\varepsilon] \geq 1 - \frac{V(\hat\theta)}{\varepsilon^2}$$ ⇒ Pero como sabemos: $V(\hat\theta) = \frac{\theta^2}{3n}$

$$\Rightarrow P[|\hat\theta-\theta|<\varepsilon] \geq 1 - \frac{\theta^2/3n}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\theta^2}{3n\varepsilon^2}$$

Si calculamos el límite cuando $n=\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} P[|\hat\theta-\theta|<\varepsilon] \geq \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\theta^2}{3n\varepsilon^2}\right) = 1-0 = 1$$

Como se trata de una probabilidad no puede ser mayor que 1 entonces $\lim_{n\to\infty} P[|\hat\theta-\theta|<\varepsilon] = 1$

Tenemos que $\hat\theta$ es estimador consistente de θ.

→ Un estimador es suficiente cuando se puede descomponer en producto de dos funciones una de ellas:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \frac{1}{2^n\theta^{3n}}\prod_{i=1}^{n} x_i^2 e^{-\frac{1}{\theta}\sum x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n\theta^{3n}} e^{-\frac{3n}{\theta}\cdot\frac{\bar{X}}{3}} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^2 = h(\theta,\hat\theta)\cdot g(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

$$h(\theta,\hat\theta) = \frac{1}{(2\theta^3)^n}\cdot e^{-\frac{3n}{\theta}\hat\theta} \quad / \quad g(x_1, x_2 \ldots x_n) = \prod x_i^2$$

Por tanto $\bar{X}/3$ es un estimador suficiente de θ

7. Para sacarlo se saca el momento no centrado de orden uno de la población al correspondiente momento muestral:

$$E[X] = \bar{X}$$

Si sustituimos $E[X]$ por su valor (3θ):

$$3 \cdot \theta = \bar{X}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{3}$$

---

8. La estimación puntual del perémetro se obtiene calculando la media y la dividimos entre 3:

$$\theta = \frac{\bar{X}}{3} = \frac{10'4}{3} = \boxed{3'46}$$