

## Tema 1. Electromagnetismo. Parte I. Campo Eléctrico

Isabel M. Tienda Luna

Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores  
Universidad de Granada

[isabelt@ugr.es](mailto:isabelt@ugr.es)

Doble Grado en Informática y ADE - Doble Grado en Informática y  
Matemáticas  
Curso 2019-2020

- 1 Magnitudes escalares y vectoriales
- 2 Teoría de Campos
- 3 Concepto de campo eléctrico
- 4 Intensidad de campo eléctrico
- 5 Energía potencial eléctrica
- 6 Potencial eléctrico
- 7 Principio de superposición
- 8 Teorema de Gauss
- 9 Campo Eléctrico en la materia. Capacidad

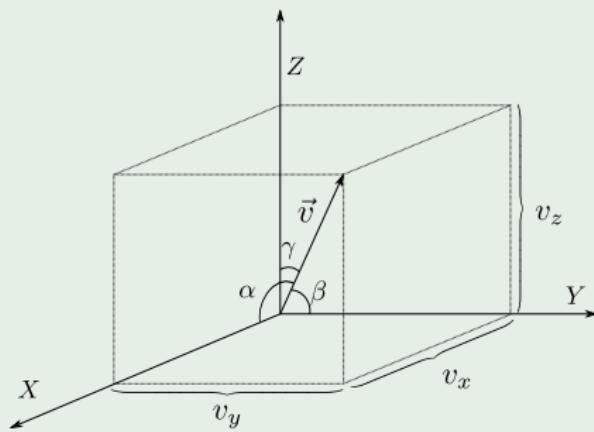
- 1 Magnitudes escalares y vectoriales
- 2 Teoría de Campos
- 3 Concepto de campo eléctrico
- 4 Intensidad de campo eléctrico
- 5 Energía potencial eléctrica
- 6 Potencial eléctrico
- 7 Principio de superposición
- 8 Teorema de Gauss
- 9 Campo Eléctrico en la materia. Capacidad

# Magnitudes escalares y vectoriales

- Denominamos **magnitudes escalares** a aquellas que quedan completamente identificadas dando su valor, que siempre es un número real acompañado de una unidad. Ejemplos: masa, temperatura, densidad, tiempo, intensidad, voltaje, ...
- Denominamos **magnitudes vectoriales** a aquellas que quedan completamente identificadas dando su módulo, dirección y sentido. Por ejemplo velocidad, aceleración, fuerza, el campo eléctrico, el campo magnético.... El módulo de una magnitud vectorial siempre es un número real positivo.
- Las magnitudes vectoriales se representan a través de **vectores**.

# Vectores

## Representación de un vector

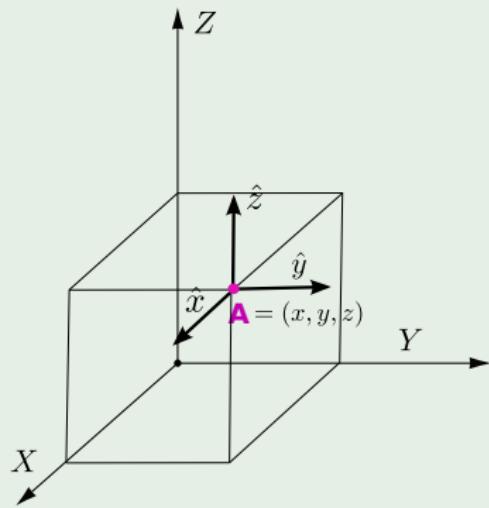


## Características de un vector

- Módulo:  $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
- Dirección. Vectores unitarios
- Sentido
- Punto de aplicación u origen

# Sistemas de coordenadas

## Cartesianas

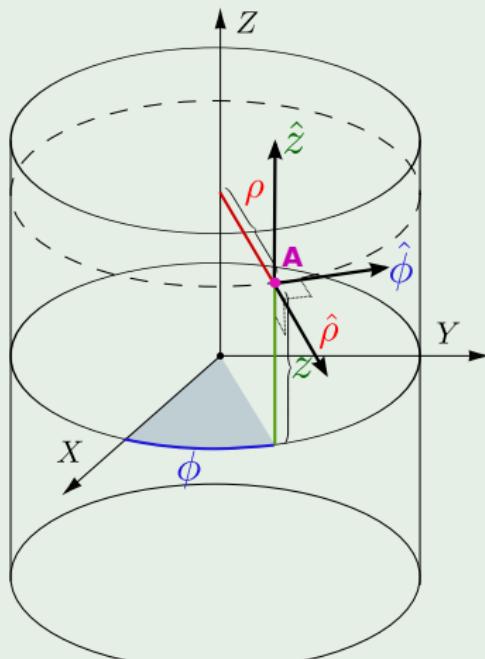


## Cartesianas

- Los vectores unitarios son:  $\hat{i}, \hat{j}$  y  $\hat{k}$  o  $\hat{x}, \hat{y}$  y  $\hat{z}$
- La expresión del vector de posición del punto A es:  $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$
- Pero existen otros **sistemas de coordenadas** donde el vector de posición de A podría escribirse como:
  - $\rho\hat{\rho} + \phi\hat{\phi} + z\hat{z}$
  - $r\hat{r} + \phi\hat{\phi} + \theta\hat{\theta}$

# Sistemas de coordenadas

## Cilíndricas



## Cilíndricas a Cartesianas

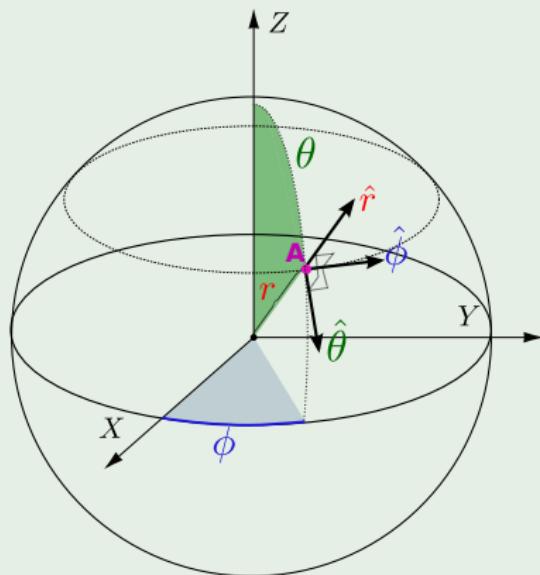
$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\y &= \rho \sin \phi \\z &= z\end{aligned}$$

## Cartesianas a Cilíndricas

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z\end{aligned}$$

# Sistemas de coordenadas

## Esféricas



## Esféricas a Cartesianas

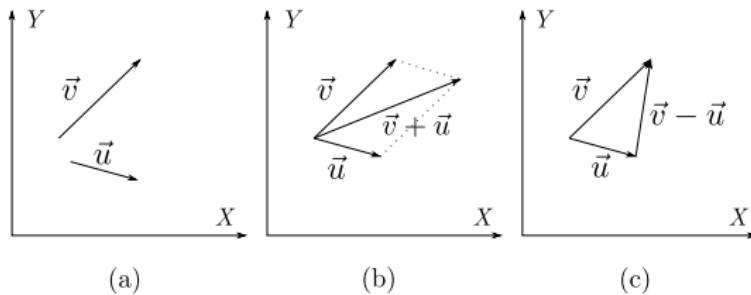
$$\begin{aligned}x &= \color{red}{r} \sin \theta \cos \phi \\y &= \color{red}{r} \sin \theta \sin \phi \\z &= \color{red}{r} \cos \theta\end{aligned}$$

## Cartesianas a Esféricas

$$\begin{aligned}\color{red}{r} &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan \left( \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{z} \right) \\ \phi &= \arctan(y/x)\end{aligned}$$

# Operaciones con vectores

- Suma, resta y producto de un escalar por un vector:** se hacen componente a componente.



**Ejemplos:** Si  $\vec{v} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$  y  $\vec{u} = 7\hat{i} + \hat{k}$ , entonces

- $\vec{v} + \vec{u} = 10\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$
- $\vec{v} - \vec{u} = -4\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$
- $3\vec{v} = 9\hat{i} + 6\hat{j}$

# Operaciones con vectores

- **Producto de un escalar por un vector:** se multiplica cada componente por el escalar

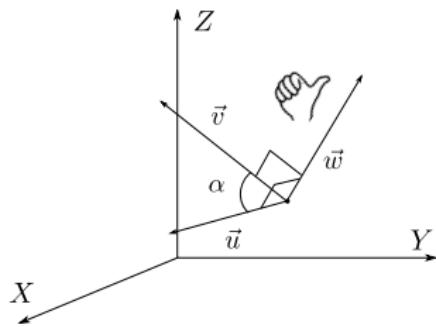
**Ejemplo:** Si  $\vec{v} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$  y  $\vec{u} = 7\hat{i} + \hat{k}$ , entonces  $3\vec{v} = 9\hat{i} + 6\hat{j}$

- **Producto escalar:** se representa por un punto, es una magnitud escalar y se puede calcular de dos formas diferentes que son equivalentes.  $\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{v}\vec{u}})$

**Ejemplo:**  $\vec{v} \cdot \vec{u} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 21$

# Operaciones con vectores

- **Producto vectorial:** se representa por  $\wedge$  o por  $\times$ , es un vector así que hay que calcular su módulo, dirección y sentido. El módulo es  $|\vec{v} \wedge \vec{u}| = |\vec{v}| |\vec{u}| \sin(\widehat{\vec{v}\vec{u}})$ , para calcular su dirección y sentido hay que usar la regla de la mano derecha o resolver un determinante.



Ejemplo:

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1)\hat{i} + (0 \cdot 7)\hat{j} + (3 \cdot 0)\hat{k} - (0 \cdot 0)\hat{i} - (3 \cdot 1)\hat{j} - (7 \cdot 2)\hat{k}$$

# Funciones vectoriales

- Definición de **función vectorial**

$$\begin{array}{ccc} \vec{F}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto \vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\hat{x} + F_y(x, y, z)\hat{y} + F_z(x, y, z)\hat{z} \end{array}$$

## Ejemplos:

- $\vec{F}(x, y, z) = xy\hat{x} + z\hat{y} + 7\hat{z}$
- Si  $P_1 = (2, 4, 5)$  la función evaluada en el punto se calcula como  
 $\vec{F}(x, y, z)|_{P_1} = 8\hat{x} + 5\hat{y} + 7\hat{z}$
- $\vec{F}(x, y, z) = \cos z\hat{x} + \sin z\hat{y} + z\hat{z}$  Sólo depende de una variable

# Funciones vectoriales

- **Derivada** de una función vectorial

- Si sólo depende de una variable:

$$\frac{d\vec{F}(t)}{dt} = \frac{dF_x(t)}{dt}\hat{x} + \frac{dF_y(t)}{dt}\hat{y} + \frac{dF_z(t)}{dt}\hat{z}$$

- Si depende de varias variables:

$$\frac{\partial \vec{F}(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial x}\hat{y} + \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial x}\hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{F}(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial y}\hat{x} + \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial y}\hat{z}$$

$$\frac{\partial \vec{F}(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial F_y(x, y, z)}{\partial z}\hat{y} + \frac{\partial F_z(x, y, z)}{\partial z}\hat{z}$$

# Funciones vectoriales

- **Integral** de una función vectorial

- Si sólo depende de una variable:

$$\int \vec{F}(t) dt = \left( \int F_x(t) dt \right) \hat{x} + \left( \int F_y(t) dt \right) \hat{y} + \left( \int F_z(t) dt \right) \hat{z}$$

- Si depende de varias variables:

$$\begin{aligned} \iiint \vec{F}(x, y, z) dx dy dz &= \iiint F_x(x, y, z) dx dy dz \hat{x} \\ &\quad + \iiint F_y(x, y, z) dx dy dz \hat{y} + \iiint F_z(x, y, z) dx dy dz \hat{z} \end{aligned}$$

- Otros sistemas de coordenadas

- 1 Magnitudes escalares y vectoriales
- 2 Teoría de Campos
- 3 Concepto de campo eléctrico
- 4 Intensidad de campo eléctrico
- 5 Energía potencial eléctrica
- 6 Potencial eléctrico
- 7 Principio de superposición
- 8 Teorema de Gauss
- 9 Campo Eléctrico en la materia. Capacidad

# Teoría de Campos

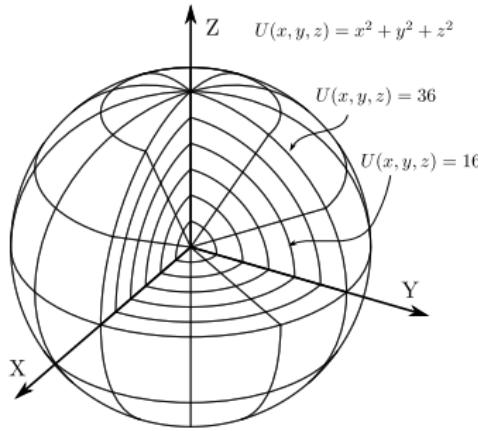
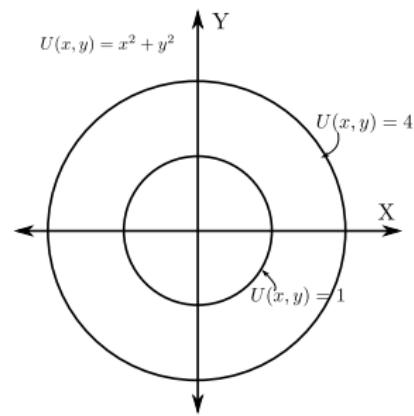
En la naturaleza, existen muchos cuerpos que interactúan entre sí sin estar en contacto. Por ejemplo la interacción que existe entre un imán y un clavo situado a cierta distancia. Estas interacciones se explican mediante el concepto de **campo**.

Vamos a estudiar dos tipos de campos:

- Campos escalares
- Campos vectoriales

# Campos escalares

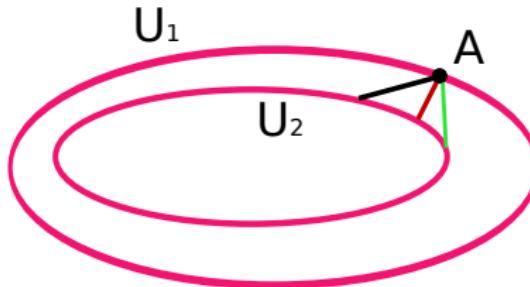
- Se dice que existe un **campo escalar** cuando una magnitud escalar tiene un valor determinado en cada punto del espacio. La magnitud escalar será entonces una función de la posición. Si llamamos a esa magnitud  $U$ , entonces  $U = f(x, y, z)$ .
- **Superficies/líneas de nivel o equiescalares:** unen puntos con igual valor de  $U$  (superficies equipotenciales, isotermas, isobaras, etc..)



# Campos escalares

- Variaciones del campo escalar entre superficies equiescalares: gradiente.

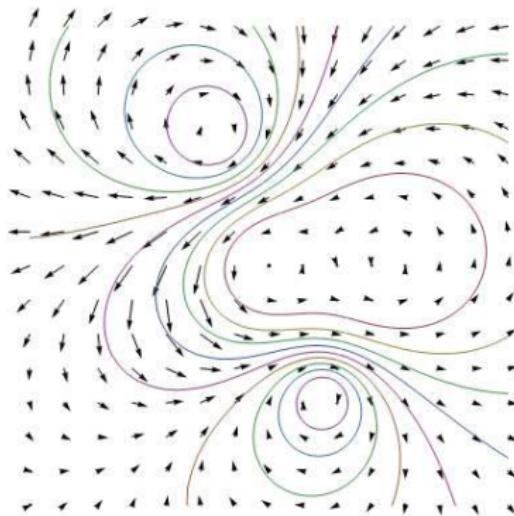
$$\vec{\nabla}U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} \quad (1)$$



- Ejemplo:** Si  $U(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + 0$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y} = 0 + 2y$ ,  $\frac{\partial U}{\partial z} = 0 + 0$ , por tanto,  $\vec{\nabla}U = 2x\hat{i} + 2y\hat{j}$ .

# Campos vectoriales

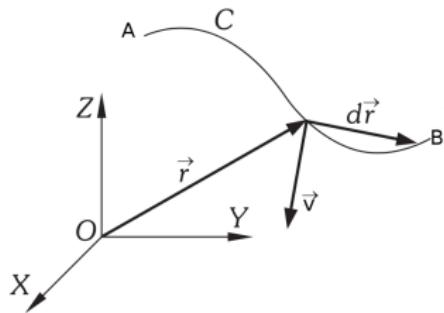
- Se dice que existe un **campo vectorial** cuando en cada punto del espacio está definido un vector. Si llamamos a esa magnitud  $\vec{v}$ , entonces  $\vec{v} = \vec{f}(x, y, z)$ .



# Campos vectoriales

- **Línea de campo** en un punto es la tangente al vector campo en dicho punto.
- Campo uniforme.
- Campo central.
- Propiedades de las líneas de campo:
  - 1 Su sentido de recorrido coincide con el del vector campo.
  - 2 Dos líneas de campo no pueden cortarse nunca.
  - 3 Las líneas de campo pueden ser cerradas o abiertas.
  - 4 Si el campo es uniforme, las líneas de campo son rectas paralelas.

# Circulación de un vector. Campos Conservativos



- **Circulación** de un vector  $\vec{v}$  a través de la curva  $C$  que une A y B.

$$\text{Circulación} = \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

- La circulación de un vector es una magnitud escalar.
- **Campo conservativo:**

$$\text{Circulación} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (3)$$

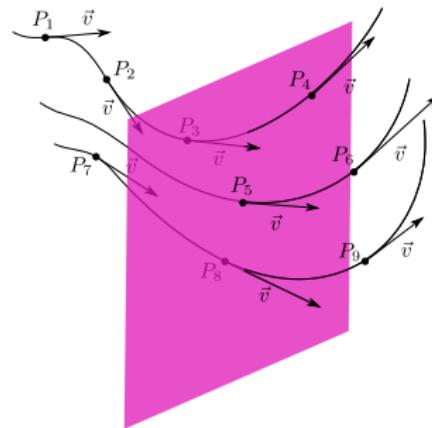
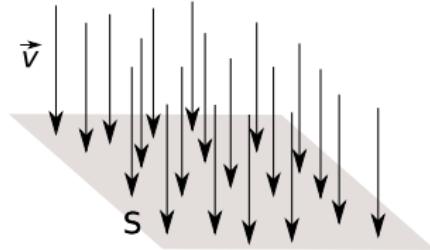
# Campos conservativos. Potencial

- **Potencial:** A cada punto de un *campo vectorial conservativo* se le puede asignar un escalar llamado potencial ( $V$ ), de manera que la circulación entre dos puntos del campo nos da la diferencia de potencial entre dichos puntos:

$$\text{Circulación} = \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{r} = V_B - V_A = -(V_A - V_B) \quad (4)$$

- Líneas/Superficies equipotenciales. Propiedades.

# Flujo a través de una superficie

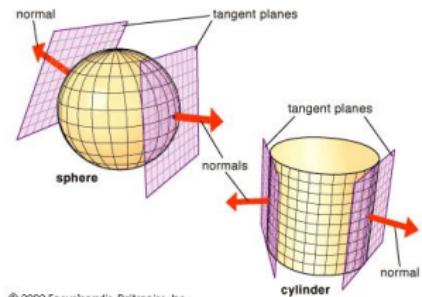
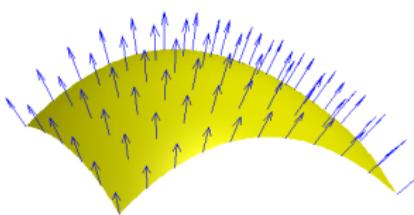
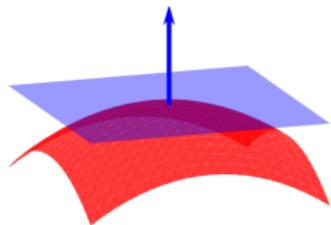


- El **Flujo** ( $\phi$ ) del campo vectorial ( $\vec{v}$ ) a través de una superficie ( $S$ ) es el número de líneas de campo que la atraviesan.
- Cálculo del **Flujo** ( $\phi$ ) del vector  $\vec{v}$  a través de la superficie  $S$ :

$$\text{Flujo} = \phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} (\text{Weber}) \quad (5)$$

# Flujo a través de una superficie

- Vector de superficie de una superficie. Ejemplos: esfera, cubo, cilindro.



- Producto escalar:  $\phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S |\vec{v}| |d\vec{S}| \cos(\widehat{\vec{v} d\vec{S}}).$
- Si  $\vec{v}$  es el mismo para cualquier punto de la superficie y  $\vec{v}$  y  $\vec{S}$  son paralelos:  $\phi = |\vec{v}| |\vec{S}|.$

- 1 Magnitudes escalares y vectoriales
- 2 Teoría de Campos
- 3 Concepto de campo eléctrico
- 4 Intensidad de campo eléctrico
- 5 Energía potencial eléctrica
- 6 Potencial eléctrico
- 7 Principio de superposición
- 8 Teorema de Gauss
- 9 Campo Eléctrico en la materia. Capacidad

# Propiedades

Se dice que existe un **campo eléctrico** en una región del espacio si una carga eléctrica colocada en un punto de esa región experimenta una fuerza eléctrica.

$$|\vec{F}| \propto q \quad (6)$$

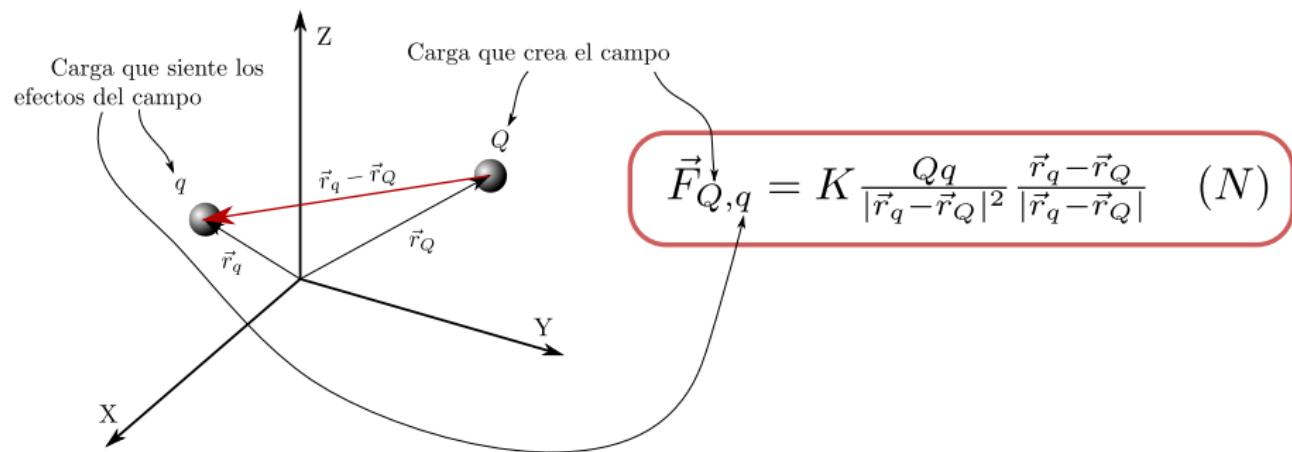
Características del campo eléctrico:

- Está creado por cargas.
- Es un campo vectorial: cada punto del campo posee un valor de  $\vec{E}$  (Intensidad de campo).
- Es central, eso es, está dirigido hacia el punto donde se encuentra la carga que lo crea.
- Es conservativo.
- La fuerza que lo define es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (Ley de Coulomb).

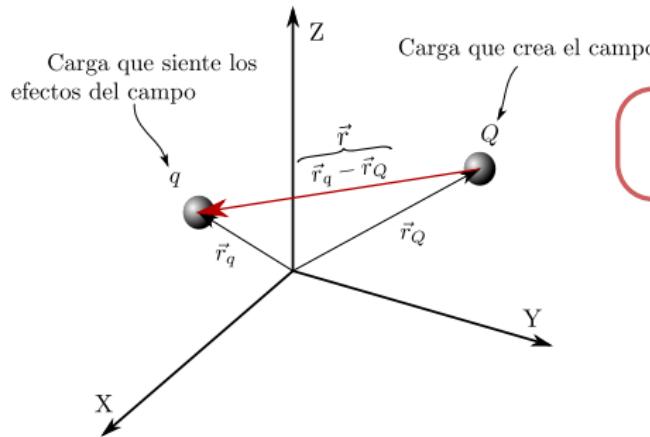
# Ley de Coulomb: cargas puntuales

## Ley de Coulomb (1785)

La fuerza de atracción o repulsión entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las dos cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.



# Ley de Coulomb: cargas puntuales



$$\vec{F}_{Q,q} = K \frac{Qq}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|^2} \frac{\vec{r}_q - \vec{r}_Q}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|} \quad (N)$$

↓

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}_q - \vec{r}_Q \\ \hat{e}_r = \hat{r} = \frac{\vec{r}_q - \vec{r}_Q}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|} \end{array} \right.$$

$$\vec{F} = K \frac{Qq}{|\vec{r}|^2} \hat{e}_r \quad (N)$$

- Limitaciones de ecuación anterior: sólo es aplicable a cargas puntuales.
- Unidad de carga eléctrica en el S.I.: *El culombio* (C).
- Carga del electrón:  $q = e = 1,6 \times 10^{-19}$  C. ¿Cuántos  $e^-$  necesito para tener 1C de carga?
- $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ .
- Ejemplo de aplicación.

- 1 Magnitudes escalares y vectoriales
- 2 Teoría de Campos
- 3 Concepto de campo eléctrico
- 4 Intensidad de campo eléctrico
- 5 Energía potencial eléctrica
- 6 Potencial eléctrico
- 7 Principio de superposición
- 8 Teorema de Gauss
- 9 Campo Eléctrico en la materia. Capacidad

# Intensidad de campo Eléctrico: cargas puntuales

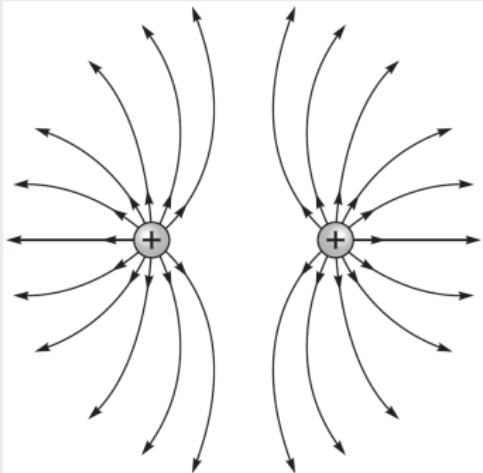
- La **intensidad de campo** es la fuerza referida a la unidad característica de dicho campo colocada en ese punto.
- En el **campo eléctrico**, la intensidad de campo en un punto es la fuerza que ejerce el campo sobre una unidad de carga positiva colocada en dicho punto.
- Se representa por  $\vec{E}$ .
- Intensidad de campo eléctrico creado por una carga  $Q$  en un punto que está a una distancia  $r$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = K \frac{Qq}{qr^2} \hat{e}_r = K \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r (N/C) \quad (7)$$

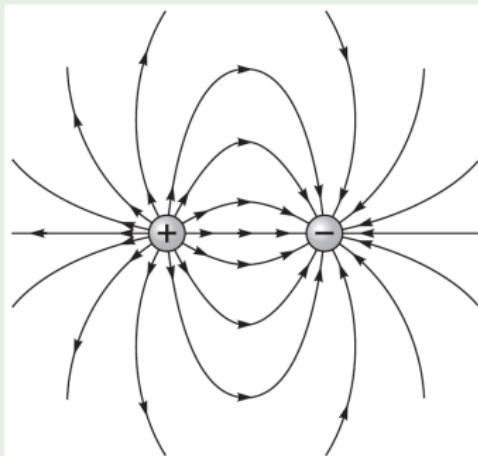
# Líneas de Campo

- Cargas positivas: Fuentes
- Cargas negativas: Sumideros

Ejemplo 1



Ejemplo 2

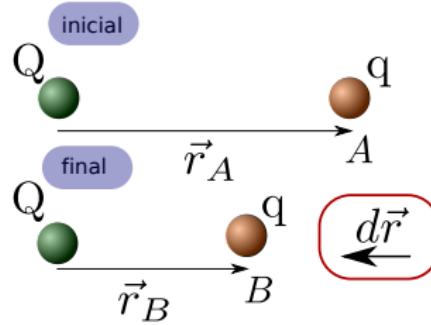


- 1 Magnitudes escalares y vectoriales
- 2 Teoría de Campos
- 3 Concepto de campo eléctrico
- 4 Intensidad de campo eléctrico
- 5 Energía potencial eléctrica
- 6 Potencial eléctrico
- 7 Principio de superposición
- 8 Teorema de Gauss
- 9 Campo Eléctrico en la materia. Capacidad

# Trabajo en el Campo Eléctrico

Supongamos que tenemos dos cargas,  $Q$  y  $q$ , y que queremos desplazar  $q$  con respecto a  $Q$  (llevamos  $q$  de  $A$  hasta  $B$ ). Eso requerirá un esfuerzo, la realización de un trabajo:

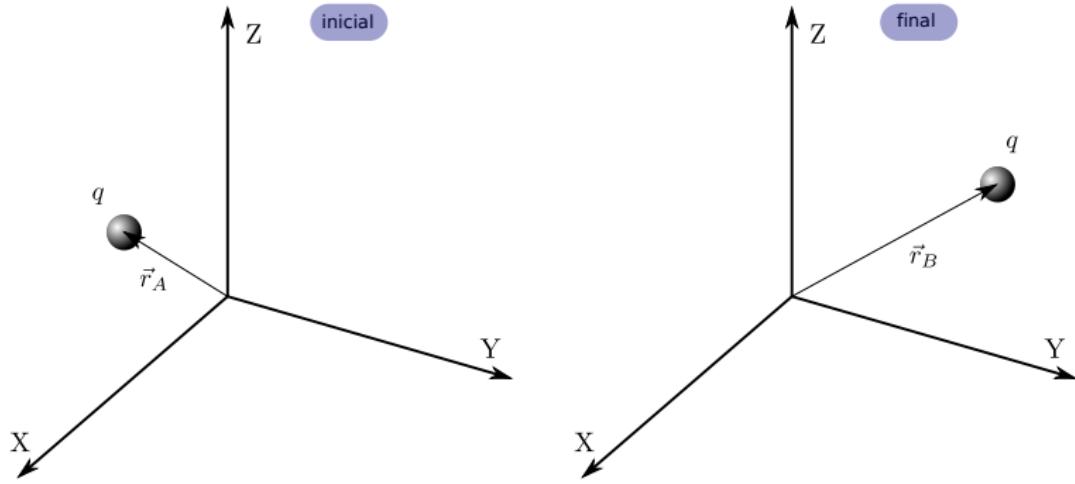
$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}_{Q,q} \cdot d\vec{r} \text{ (Julios)} \quad (8)$$



# Trabajo en el Campo Eléctrico

Supongamos ahora un caso más general: una carga  $q$  que desplazamos desde A hasta B en una región del espacio donde hay un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$ . De nuevo, eso requerirá un esfuerzo, la realización de un trabajo:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \text{ (Julios)} \quad (9)$$



# Variación de la energía potencial eléctrica

- El trabajo  $W_{A \rightarrow B}$  se hace a costa de la energía potencial del sistema carga-campo.
- Como el Campo Eléctrico es conservativo, el trabajo sólo depende de los puntos inicial y final, no de la trayectoria seguida por la carga q

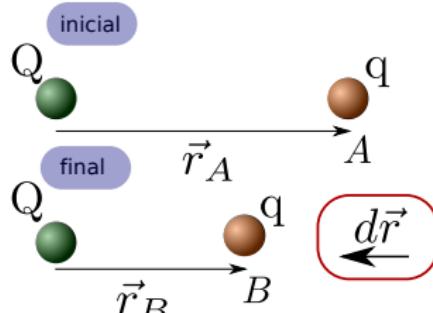
Se define la **variación de la energía potencial** entre dos puntos A y B,  $\Delta E_p$ , como:

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -W_{A \rightarrow B} = -q \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Para campos creados por **cargas puntuales**:

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = KQq \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) (\text{Julios}) \quad (10)$$

# Variación de la energía potencial eléctrica



$$\begin{aligned}\Delta E_p &= E_{pB} - E_{pA} = KQq \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \\ &= -W_{A \rightarrow B}\end{aligned}$$

**Signos** (para el ejemplo de la figura)

- $\Delta E_p$  es positivo si  $Q$  y  $q$  tienen mismo signo  $\Rightarrow W_{A \rightarrow B}$  es negativo porque el trabajo se realiza en contra del campo, lo tiene que realizar una fuerza externa.
- $\Delta E_p$  es negativo si  $Q$  y  $q$  tienen distinto signo  $\Rightarrow W_{A \rightarrow B}$  es positivo porque el trabajo lo realiza el campo.

# Energía potencial eléctrica

Sólo tiene sentido hablar de diferencias de energía potencial. Si se quiere hablar en términos absolutos es necesario marcar una referencia. En nuestro caso la referencia será una distancia muy lejana donde la interacción y por tanto el potencial se suponen nulos.

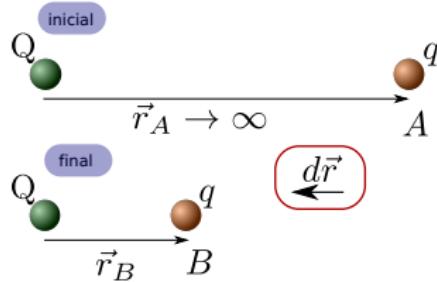
La **energía potencial eléctrica** en un punto B es **menos** el trabajo realizado por el campo eléctrostático  $\vec{E}$  al trasladar una carga q desde el infinito ( $r_A$ ), donde se supone que la fuerza electrostática ( $-q\vec{E}(\vec{r})$ ) es nula, hasta dicho punto ( $r_B$ ).

$$\begin{aligned}
 E_p &= -W_{\infty \rightarrow B} = - \int_{\infty}^B q \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_{\infty}^B \vec{F}_{campo}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}
 \end{aligned} \tag{11}$$

# Energía potencial eléctrica

Imaginemos el caso más sencillo con **cargas puntuales**: un campo eléctrico creado por una carga  $Q$  cuyos efectos siente una carga  $q$ :

La **energía potencial eléctrica** en un punto B es **menos** el trabajo realizado por el campo electrostático (en este caso  $\vec{E}_{externa} = -K \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r$ ) para trasladar la carga q desde el infinito ( $r_A$ ), donde se supone que la fuerza ejercida por Q es nula, hasta dicho punto ( $r_B$ ).



Para **cargas puntuales**:

$$E_p = K \frac{Qq}{r_B} (\text{Julios}) \quad (12)$$

- 1 Magnitudes escalares y vectoriales
- 2 Teoría de Campos
- 3 Concepto de campo eléctrico
- 4 Intensidad de campo eléctrico
- 5 Energía potencial eléctrica
- 6 Potencial eléctrico
- 7 Principio de superposición
- 8 Teorema de Gauss
- 9 Campo Eléctrico en la materia. Capacidad

# Diferencia de potencial Eléctrico

La **diferencia de potencial** entre dos puntos de una región del espacio donde existe un campo electrostático  $\vec{E}(\vec{r})$  se define como menos el trabajo realizado para trasladar la unidad de carga positiva desde un punto al otro.

- De forma general:

$$V_B - V_A = - \int_A^B 1C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} (V) \quad (13)$$

- Para **cargas puntuales**:

$$V_B - V_A = KQ \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) (V) \quad (14)$$

# Definición de potencial Eléctrico

El **potencial eléctrico** en un punto es **menos** el trabajo realizado por el campo electrostático  $\vec{E}$  para trasladar la unidad de carga positiva sometida a la acción dicho campo desde el infinito ( $r_A$ ), donde suponemos que el campo es nulo, hasta dicho punto ( $r_B$ ).

- Para **cargas puntuales**:

$$V_B = K \frac{Q}{r_B} \quad (\text{Voltio} = \frac{\text{Julios}}{\text{Culombio}}) \quad (15)$$

# Potencial e intensidad de campo

- Cálculo del potencial a partir del campo

$$V_B - V_A = \frac{-W_{AB}}{q} = -\frac{1}{q} \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{q} \int_A^B q\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_A^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (16)$$

Si consideramos  $r_A \rightarrow \infty$  y situamos la referencia de potencial en el infinito, entonces

$$V_B = - \int_{\infty}^B \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \rightarrow V_B = \int_B^{\infty} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (17)$$

- Cálculo del campo a partir del potencial

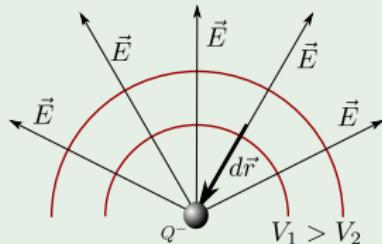
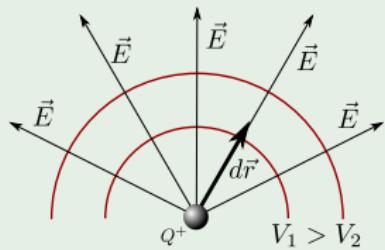
$$-\vec{E}(\vec{r}) = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \quad (18)$$

# Potencial e intensidad de campo

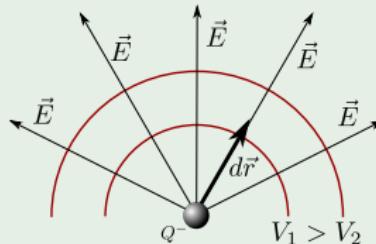
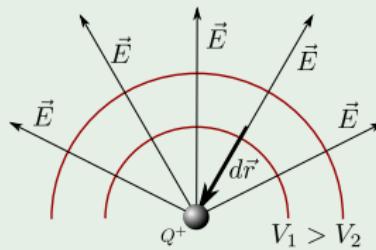
El sentido del campo es el de los potenciales decrecientes.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V$$

## Trabajo realizado por el campo

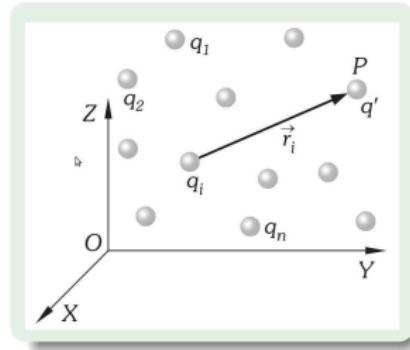


## Trabajo contra el campo



- 1 Magnitudes escalares y vectoriales
- 2 Teoría de Campos
- 3 Concepto de campo eléctrico
- 4 Intensidad de campo eléctrico
- 5 Energía potencial eléctrica
- 6 Potencial eléctrico
- 7 Principio de superposición
- 8 Teorema de Gauss
- 9 Campo Eléctrico en la materia. Capacidad

# ¿Qué ocurre cuando tengo más de una carga?



Cuando queremos calcular el campo o el potencial eléctricos creados por una serie de cargas puntuales usamos el **principio de superposición**.

Para el campo eléctrico ha de hacerse una suma de **vectores**:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = K \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{e}_{r_i} \quad (19)$$

Para el potencial la suma es de **escalares**:

$$V_T = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = K \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \quad (20)$$

# Distribuciones continuas de carga

- Distribución volumétrica

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \left( \frac{C}{m^3} \right) \Rightarrow Q = \int_V \rho dV \quad (21)$$

- Distribución superficial

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS} \left( \frac{C}{m^2} \right) \Rightarrow Q = \int_S \sigma dS \quad (22)$$

- Distribución lineal

$$\lambda = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{dQ}{dL} \left( \frac{C}{m} \right) \Rightarrow Q = \int_L \lambda dL \quad (23)$$

# Principio de Superposición Generalizado

Si tenemos un sistema de cargas puntuales, una distribución volumétrica de carga definida por una  $\rho(r)$ , una distribución superficial definida por  $\sigma(r)$  y una distribución lineal de cargas definida por  $\lambda(r)$ , el campo total es:

$$\vec{E}_T = K \left[ \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{e}_{r_i} + \int_V \frac{\rho(r)dV}{r^2} \vec{e}_r + \int_S \frac{\sigma(r)dS}{r^2} \vec{e}_r + \int_L \frac{\lambda(r)dL}{r^2} \vec{e}_r \right] \quad (24)$$

- 1 Magnitudes escalares y vectoriales
- 2 Teoría de Campos
- 3 Concepto de campo eléctrico
- 4 Intensidad de campo eléctrico
- 5 Energía potencial eléctrica
- 6 Potencial eléctrico
- 7 Principio de superposición
- 8 Teorema de Gauss
- 9 Campo Eléctrico en la materia. Capacidad

# ¿Hay otra alternativa para calcular el campo?

## Teorema de Gauss

El flujo total de un campo eléctrico ( $\vec{E}$ ) a través de una superficie cerrada ( $S$ ) es igual al cociente entre la suma algebraica de las cargas contenidas en el volumen limitado por ella y la permitividad del vacío ( $\epsilon_0$ ).

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{\text{dentro}}}{\epsilon_0} \quad (25)$$

## Ejemplos de aplicación

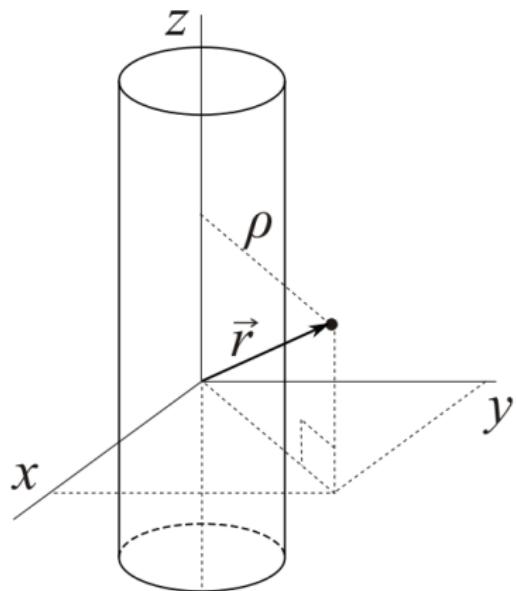
- Campo y potencial creados por una carga puntual.
- Campo y potencial creados por un plano uniformemente cargado.
- Campo y potencial creados por un hilo infinito uniformemente cargado.
- Campo y potencial creados por una esfera uniformemente cargada en su interior y en el exterior.

# Aplicación del Teorema de Gauss: pasos

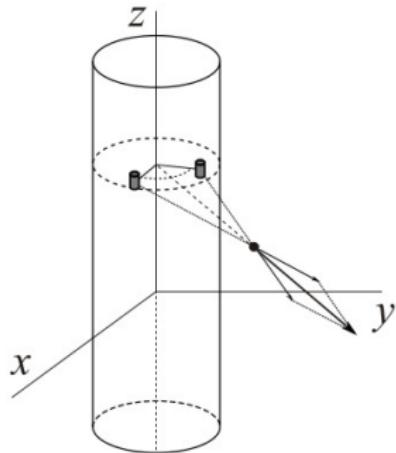
Para aplicar el Teorema de Gauss a un problema seguiremos los siguientes pasos:

- ① Estimamos la dirección y sentido del vector intensidad de campo eléctrico.
- ② Elegimos una superficie de integración que pase por el punto donde queremos calcular el campo y que simplifique  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ .
- ③ Calculamos el flujo según su definición  $\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ .
- ④ Para la superficie de integración elegida calculamos  $\frac{\sum Q_{\text{dentro}}}{\epsilon_0}$ .
- ⑤ Calculamos el valor del campo eléctrico aplicando el Teorema de Gauss.

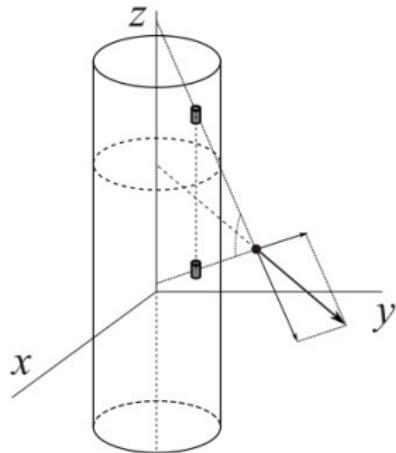
# Aplicación del Teorema de Gauss: geometría cilíndrica



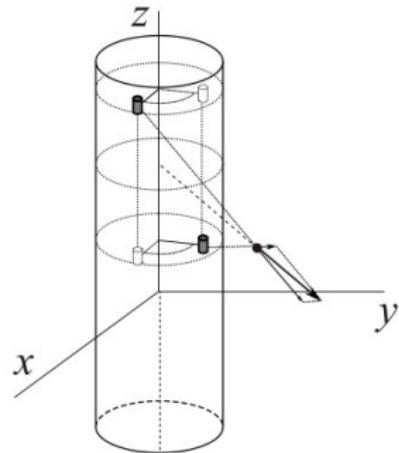
# Aplicación del Teorema de Gauss: geometría cilíndrica



(a) Dos trozos en el mismo plano que el punto y perpendicular al eje del cilindro

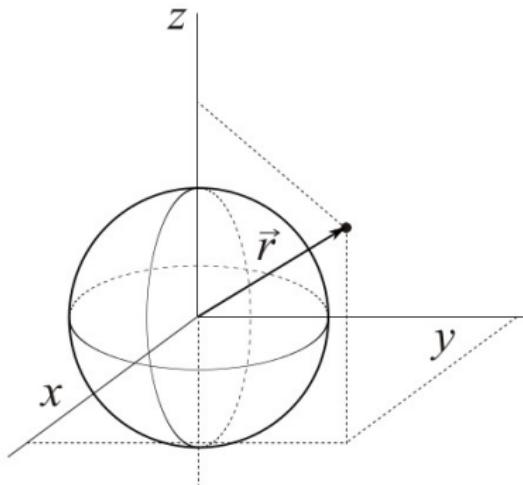


(b) Dos trozos en el mismo plano que el punto y el eje

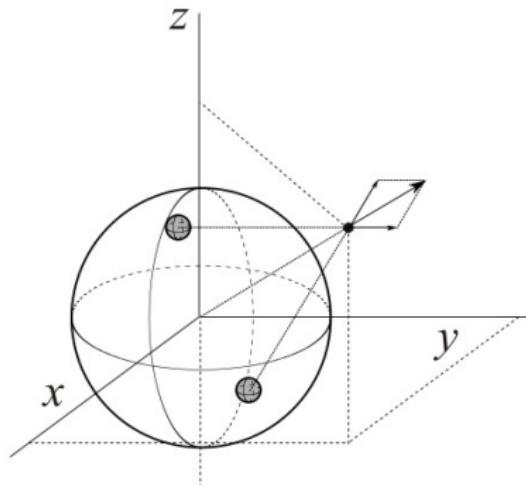


(c) Dos trozos simétricos cualesquiera

# Aplicación del Teorema de Gauss: geometría esférica

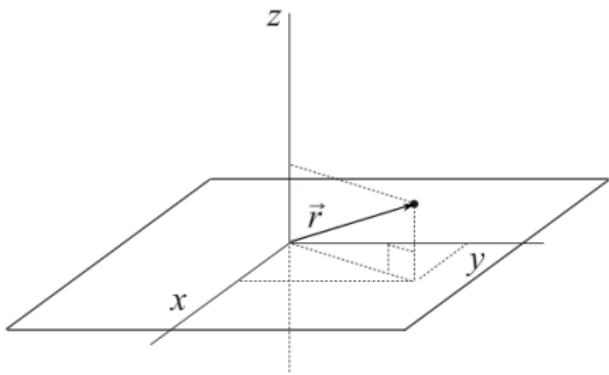


(a) Esquema general de una sistema con simetría esférica

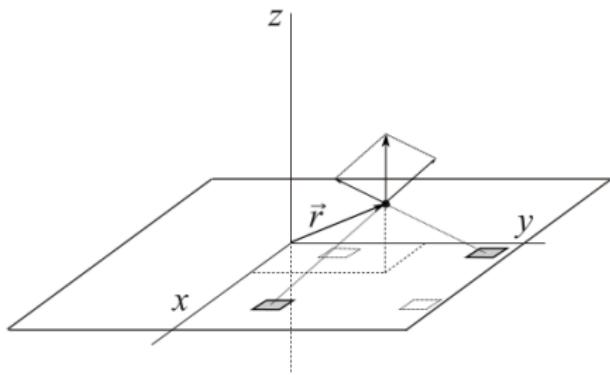


(b) Esquema de la dirección de la contribución de dos trozos simétricos respecto al punto

# Aplicación del Teorema de Gauss: geometría planar



(a) Esquema general de un sistema con simetría plana



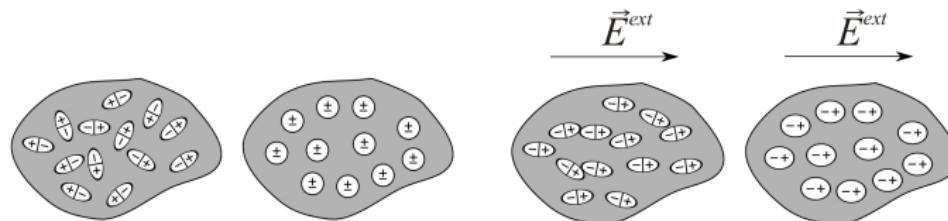
(b) Esquema de la dirección de la contribución de dos trozos simétricos respecto al punto

- 1 Magnitudes escalares y vectoriales
- 2 Teoría de Campos
- 3 Concepto de campo eléctrico
- 4 Intensidad de campo eléctrico
- 5 Energía potencial eléctrica
- 6 Potencial eléctrico
- 7 Principio de superposición
- 8 Teorema de Gauss
- 9 Campo Eléctrico en la materia. Capacidad

# Materiales conductores y dieléctricos

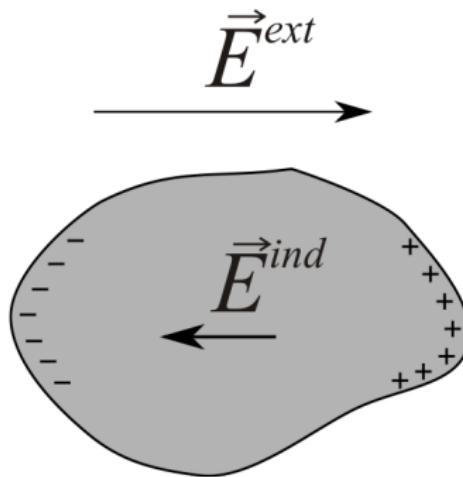
- Dieléctricos
- Conductores
- Semiconductores

¿Cómo se comporta un dieléctico en un campo eléctrico?



# Materiales conductores y dieléctricos

¿Cómo se comporta un dieléctico en un campo eléctrico?



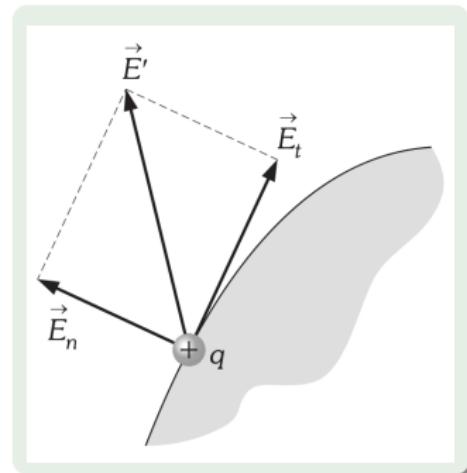
$$\vec{E}^{tot} = \vec{E}^{ext} + \vec{E}^{ind} \quad (26)$$

$$\vec{E}^{tot} = \vec{E}^{ext} - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{E}^{ext} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \vec{E}^{ext} \quad (27)$$

# Materiales conductores y dieléctricos

- Dieléctricos
- Conductores
- Semiconductores

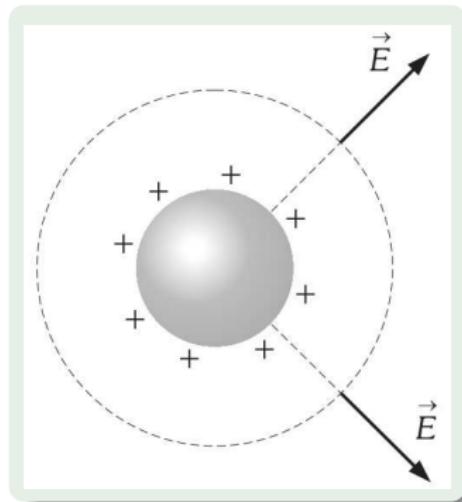
¿Cómo se comporta un conductor cargado en equilibrio?



- La carga se distribuye en la superficie
- $\vec{E}$  es perpendicular a la superficie
- $\vec{E}$  es cero en el interior
- El potencial es constante

# Ejemplo: esfera conductora cargada en equilibrio

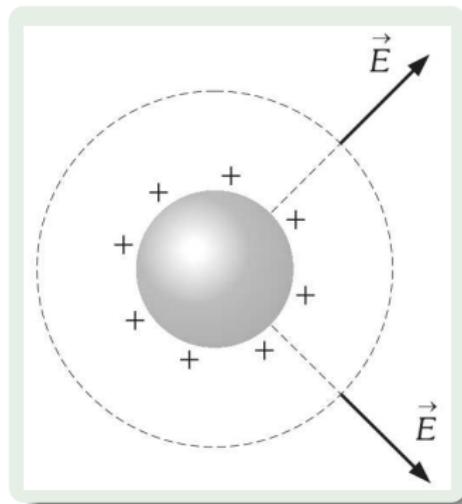
Aplicamos el Teorema de Gauss



- $\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E 4\pi r^2$
- Teorema de Gauss:  $\phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$
- $E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$
- $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = K \frac{Q}{r^2}$

# Ejemplo: esfera conductora cargada en equilibrio

Usamos la relación entre el potencial y el campo



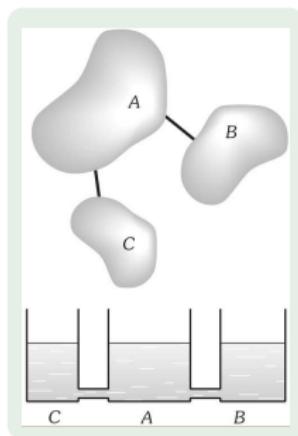
- $V = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} E dr$
- Aplicamos el resultado anterior:  
$$V = \int_r^{\infty} K \frac{Q}{r^2} dr$$
- $V = K \frac{Q}{r}$

# Capacidad

## Definición

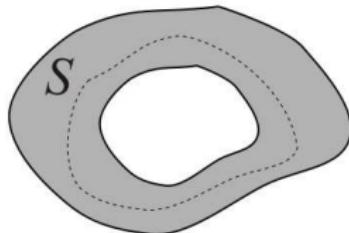
La **capacidad** de un conductor es el cociente entre la carga que almacena y el potencial al que se encuentra.

$$C = \frac{Q}{V} \left( \frac{C}{V} = \text{Faradio} \right) \quad (28)$$

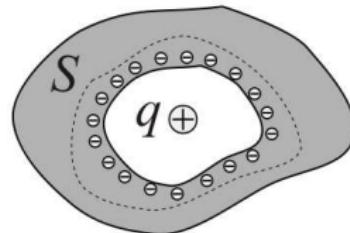


- Símil hidrostático
- Al poner en contacto:  $V_A = V_B = V_C$
- Pero  $Q_A \neq Q_B \neq Q_C$  porque  $C_A \neq C_B \neq C_C$
- Ejemplo: Capacidad de un esfera conductora

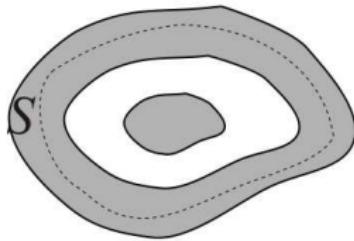
# Fenómenos de apantallamiento.



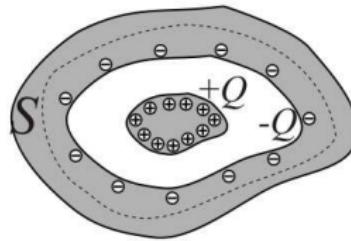
(a) Superficie de integración dentro de un conductor con hueco



(b) Distribución de carga en el seno de un conductor hueco



(a) Superficie de integración en el seno de un conductor apantallando otro



(b) Dos conductores apantallados, el interior con una carga positiva

# Condensadores

Los **condensadores** son sistemas de dos conductores, separados por un dieléctrico, en los que se verifica un aumento de capacidad por fenómenos de influencia total. Ello permite que los conductores almacenen una gran carga, para pequeñas diferencias de potencial.

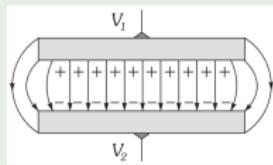
- Un condensador consta de dos armaduras metálicas: **colectora** y **condensadora**; la primera con carga positiva y un mayor potencial que la segunda, en la que existe, en su superficie influida, una carga igual pero de signo contrario.
- La capacidad de un condensador se calcula:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

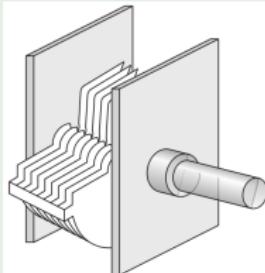
- La capacidad de un condensador depende del propio cuerpo, del medio y del resto de cuerpos que lo rodean.

# Condensadores

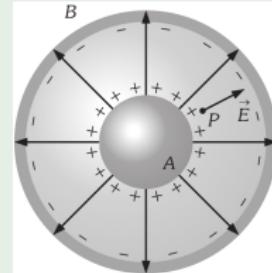
Condensador Plano



Condensador variable



Condensador esférico

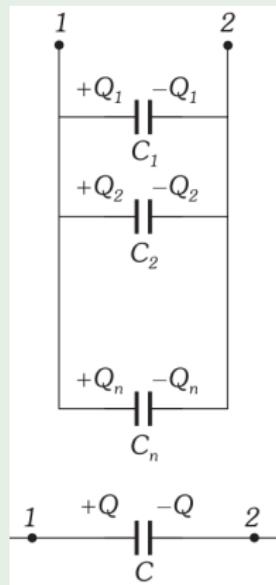


$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (29)$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}} \quad (30)$$

# Condensadores

## Asociación paralelo



- Se realiza con la unión de todas las armaduras colectoras y condensadoras entre sí
- La capacidad del sistema es igual a la suma de las capacidades asociadas

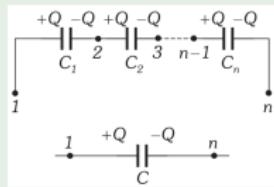
$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \quad (31)$$

- Para obtener la relación anterior se tiene cuenta que

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n \quad (32)$$

# Condensadores

## Asociación serie



- Se realiza uniendo las armaduras de cada condensador con la condensadora y colectora del anterior y del siguiente, quedando las dos terminales, funcionando como armaduras del conjunto
- La inversa de la capacidad del sistema es la suma de las inversas de las capacidades asociadas

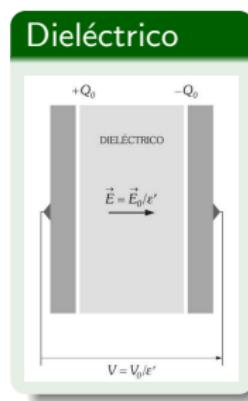
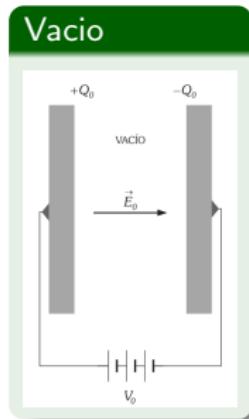
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \quad (33)$$

# Condensadores

- Energía almacenada en un condensador:

$$U = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2)^2 \quad (34)$$

- Definición de la constante dieléctrica de un medio a partir de la capacidad. Experiencias de Faraday.



# Bibliografía

Algunos libros útiles para estudiar los contenidos de este tema son:

- Física General (Burbano). Capítulos II, XVIII y XIX.
- Fundamentos Físicos y Tecnológicos de la Informática (Gómez). Capítulo 2.
- Física para Ciencias e Ingenierías Vol II (Serway). Parte I.
- Física (Sears). Temas 21, 22, 23 y 24.
- Apuntes prof. David Blanco. Tema 4.

**Nota:** Todos estos libros cuentan con ejemplos de aplicación resueltos útiles para adquirir los distintos conceptos tratados en este tema.

## Tema 1. Electromagnetismo. Parte II. Campo Magnético

Isabel M. Tienda Luna

Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores  
Universidad de Granada

isabelt@ugr.es

Doble Grado en Informática y ADE - Doble Grado en Informática y  
Matemáticas  
Curso 2019-2020

- 1 Introducción
- 2 Corriente Eléctrica
- 3 Ley de Ohm. Resistencia.
- 4 Fuerza Electromotriz
- 5 Vector Inducción Magnética. Fuerza de Lorentz.
- 6 Cálculo del vector Inducción Magnética: Ley de Biot y Savart
- 7 Ley de Ampère
- 8 Fenómenos de autoinducción

- 1 Introducción
- 2 Corriente Eléctrica
- 3 Ley de Ohm. Resistencia.
- 4 Fuerza Electromotriz
- 5 Vector Inducción Magnética. Fuerza de Lorentz.
- 6 Cálculo del vector Inducción Magnética: Ley de Biot y Savart
- 7 Ley de Ampère
- 8 Fenómenos de autoinducción

# Un poco de historia...

- **Oersted** (1820). Las corrientes eléctricas producen campos magnéticos.



- **Faraday** (1832). Los campos magnéticos son capaces de inducir movimiento de cargas.

# Un poco de historia...

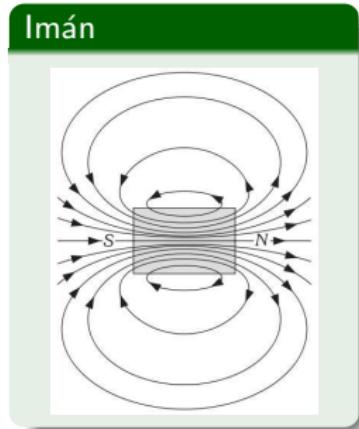
## Ampère sienta las bases del Electromagnetismo:

- ① Las cargas en movimiento producen interacciones electromagnéticas ademas de las eléctricas dadas por la ley de Coulomb.
- ② Toda carga en movimiento produce un campo magnético que actúa sobre otra carga sólo si ésta está también en movimiento.
- ③ Un campo magnético sólo es capaz de actuar sobre cargas en movimiento.
- ④ Se dice que en una región hay un campo magnético cuando una carga en movimiento experimenta una fuerza.
- ⑤ El campo magnético cumple el principio de superposición.
- ⑥ El magnetismo natural es consecuencia también de cargas en movimiento.



# Conceptos fundamentales

- Imanes.
- Polos.
- Líneas de inducción magnética.
  - ① La dirección del campo ( $\vec{B}$ ) es tangente a las líneas de inducción.
  - ② En imanes: salen del polo N y entran al polo S.
  - ③ En corrientes rectilíneas: son circunferencias con centro en el conductor.
  - ④ Son cerradas  $\Rightarrow$  en imanes, los polos no pueden separarse.
  - ⑤ Líneas terrestres.



- 1 Introducción
- 2 Corriente Eléctrica
- 3 Ley de Ohm. Resistencia.
- 4 Fuerza Electromotriz
- 5 Vector Inducción Magnética. Fuerza de Lorentz.
- 6 Cálculo del vector Inducción Magnética: Ley de Biot y Savart
- 7 Ley de Ampère
- 8 Fenómenos de autoinducción

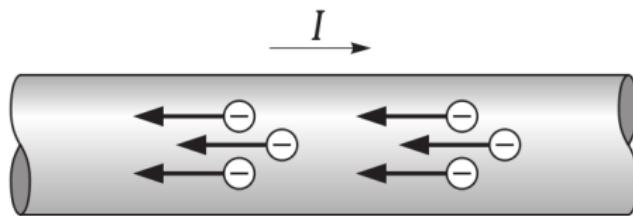
# Conceptos

## Corriente Eléctrica

La **corriente eléctrica** es el conjunto de las cargas que circulan a través de un conductor. La **conducción**, es el proceso por el cual la carga se transporta.

## Convenio

**Convenimos** en asignar el sentido de la corriente eléctrica al que tienen los portadores de carga positiva. Como la corriente eléctrica está producida por un campo eléctrico, ésta tiene el mismo sentido que el campo.

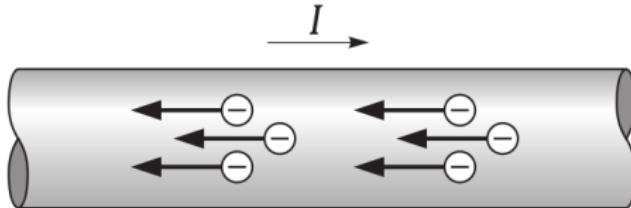


# Intensidad de corriente

## Intensidad de corriente

La **intensidad de corriente** es la velocidad a la que se transporta la carga por un punto dado en un sistema conductor. Es la cantidad de carga por unidad de tiempo que atraviesa un conductor.

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \left( \frac{\text{Culombio}}{\text{segundo}} = \text{Amperio} \right) \quad (1)$$



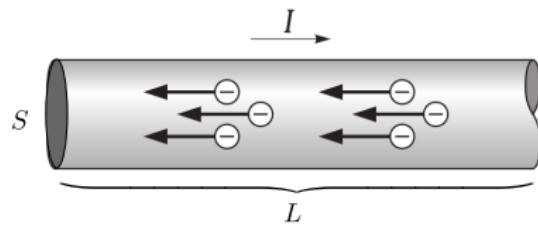
Efecto	Corriente
Quemaduras Graves	0.5 A
Detención de respiración	0.3 A
Imposibilidad de desprenderse	0.05 A
Cosquilleo	10 mA
Umbral de sensación	1 mA

- 1 Introducción
- 2 Corriente Eléctrica
- 3 Ley de Ohm. Resistencia.
- 4 Fuerza Electromotriz
- 5 Vector Inducción Magnética. Fuerza de Lorentz.
- 6 Cálculo del vector Inducción Magnética: Ley de Biot y Savart
- 7 Ley de Ampère
- 8 Fenómenos de autoinducción

# Resistencia eléctrica

## Definición de Resistencia

La resistencia es la medida de la oposición de los hilos conductores al movimiento de los electrones en su seno.



Para un conductor rectilíneo de longitud  $L$ , superficie transversal  $S$  y resistividad  $\rho$  (inversa de la conductividad  $\sigma$ ),

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (2)$$

Sus unidades con los Ohmios ( $\Omega$ )

# Ley de Ohm

## Definición de Resistencia

La resistencia es la medida de la oposición de los hilos conductores al movimiento de los electrones en su seno.

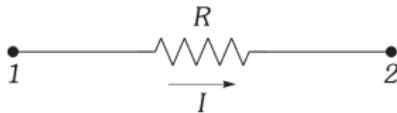


## Ley de Ohm

$$V_1 - V_2 = IR \quad (3)$$

## Representación en un circuito

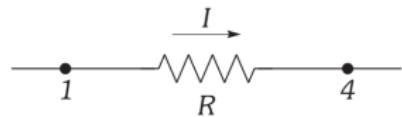
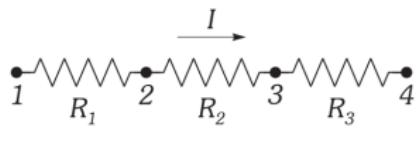
$$V_1 - V_2 = IR$$



- La resistencia depende de la temperatura. ¿Aumenta o disminuye con T?

# Asociación de resistencias

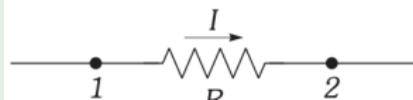
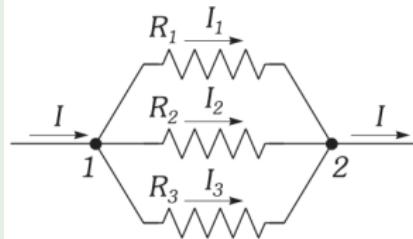
## Asociación serie



$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

- Misma intensidad
- Diferente diferencia de potencial

## Asociación paralelo



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

- Diferente intensidad
- Misma diferencia de potencial

# Resistencias

- Resistencias **variables**: cajas de resistencias y potenciómetros.

- **Energía consumida** por una corriente ( $I$ ) que atraviesa una resistencia.

*La caída de potencial ( $V_1 - V_2$ ) entre dos puntos de un hilo conductor es la pérdida de energía potencial de la unidad de carga, cuando pasa de un punto a otro. Si la carga transportada es  $q$ , la pérdida de energía potencial  $U$  será:*

$$U = I(V_1 - V_2)t = I^2Rt = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}t \quad (4)$$

- **Potencia consumida** por una corriente que atraviesa una resistencia

*Es la energía de la corriente en cada unidad de tiempo. Su unidad es el Vatio (W).*

$$P = I(V_1 - V_2) = I^2R = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \quad (5)$$

- Kilovatio-hora.

- **Efecto Joule**. Es la transformación de la energía eléctrica en calorífica, al circular una corriente por un conductor.  $U = I^2Rt$

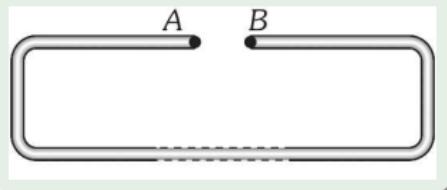
- 1 Introducción
- 2 Corriente Eléctrica
- 3 Ley de Ohm. Resistencia.
- 4 Fuerza Electromotriz
- 5 Vector Inducción Magnética. Fuerza de Lorentz.
- 6 Cálculo del vector Inducción Magnética: Ley de Biot y Savart
- 7 Ley de Ampère
- 8 Fenómenos de autoinducción

# Fuerza electromotriz

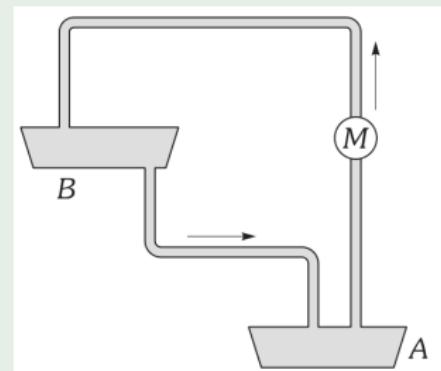
## Fuerza electromotriz

La **fuerza electromotriz** (fem) ( $\varepsilon$ ) es toda causa capaz de mantener una diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor o de producir una corriente eléctrica que lo atraviese.

Electrostática



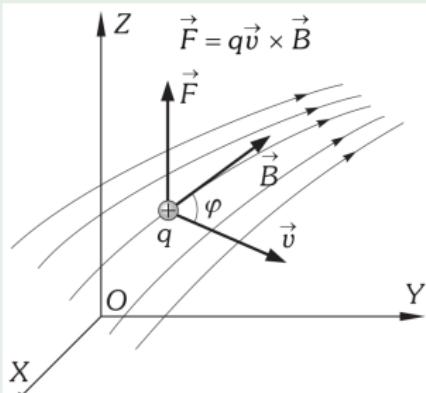
Símil hidrodinámico



- 1 Introducción
- 2 Corriente Eléctrica
- 3 Ley de Ohm. Resistencia.
- 4 Fuerza Electromotriz
- 5 Vector Inducción Magnética. Fuerza de Lorentz.
- 6 Cálculo del vector Inducción Magnética: Ley de Biot y Savart
- 7 Ley de Ampère
- 8 Fenómenos de autoinducción

# Vector Inducción Magnética. Fuerza de Lorentz

## Carga móvil



Fuerza experimentada por una **carga puntual en movimiento**:

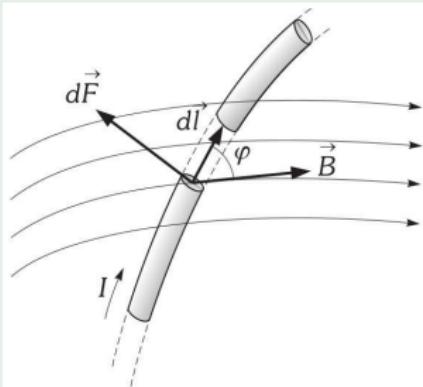
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (6)$$

- Unidades de  $\vec{B}$ : *Tesla*,  $\frac{\text{Weber}}{\text{m}^2}$
- Módulo de la fuerza :  $qvB \sin \varphi$
- Dirección y sentido de la fuerza: *regla de la mano derecha*

# Vector Inducción Magnética. Fuerza de Lorentz

Fuerza experimentada por una **corriente**:

Corriente



$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \quad (7)$$

- Módulo de la fuerza :  $I l B \sin \varphi$
- Dirección y sentido de la fuerza: *regla de la mano derecha*
- Si  $\vec{l}$  cambia,  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$
- Si  $\vec{l}$  y  $\vec{B}(\vec{r})$  cambian,  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$

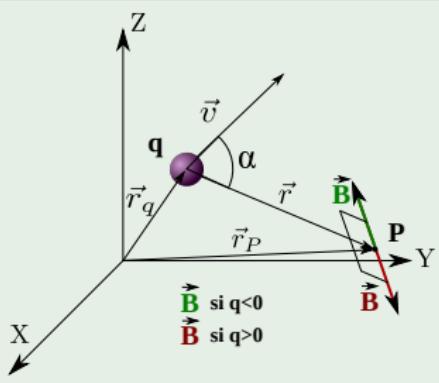


$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (8)$$

- 1 Introducción
- 2 Corriente Eléctrica
- 3 Ley de Ohm. Resistencia.
- 4 Fuerza Electromotriz
- 5 Vector Inducción Magnética. Fuerza de Lorentz.
- 6 Cálculo del vector Inducción Magnética: Ley de Biot y Savart
- 7 Ley de Ampère
- 8 Fenómenos de autoinducción

# Campo creado por una carga puntual en movimiento

## Carga puntual en movimiento



Vector Inducción Magnética en P:

$$\vec{B}(\vec{r}_P) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_q)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_q|^3} \quad (T) \quad (9)$$

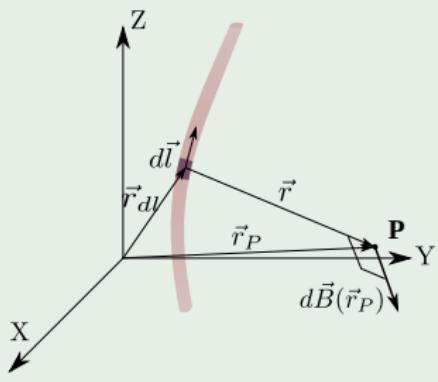
$$\vec{B}(\vec{r}_P) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{e}_r}{r^2} \quad (10)$$

- Permeabilidad magnética ( $\mu [N/A^2]$ ): capacidad de una sustancia o medio para atraer y hacer pasar a través de sí los campos magnéticos.
- Módulo, dirección y sentido.

# Campo creado por un elemento de corriente: Ley de Biot y Savart

La ley de Biot y Savart permite calcular la **inducción magnética** producida por un elemento de la corriente estacionaria  $I$  de longitud  $d\vec{l}$  en un punto  $\mathbf{P}$  del espacio. El vector resultante,  $d\vec{B}(\vec{r}_P)$ , es perpendicular a los vectores  $d\vec{l}$  (tangente al conductor y en el sentido de  $I$ ) y  $\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_{dl}$ .

Elemento de corriente



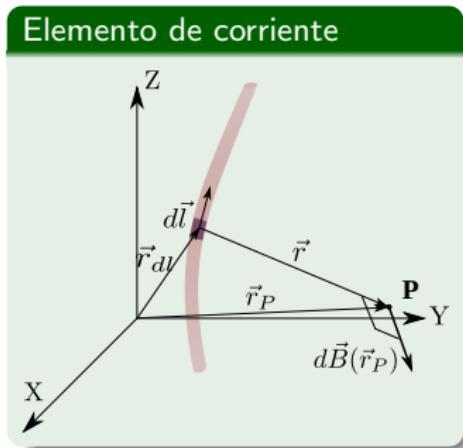
Ley de Biot y Savart expresada matemáticamente:

$$d\vec{B}(\vec{r}_P) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_{dl})}{|\vec{r}_P - \vec{r}_{dl}|^3} \quad (T) \quad (11)$$

$$d\vec{B}(\vec{r}_P) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{e}_r}{r^2} \quad (12)$$

# Campo creado por un elemento de corriente: Ley de Biot y Savart

$$d\vec{B}(\vec{r}_P) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Idl \times (\vec{r}_P - \vec{r}_{dl})}{|\vec{r}_P - \vec{r}_{dl}|^3} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Idl \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Idl \times \hat{e}_r}{r^2}$$



- Para calcular el vector Inducción Magnética total ( $\vec{B}(\vec{r}_P)$ ) creado por todo el conductor aplicamos el Principio de superposición.
- Si tenemos un conductor finito: sumo las contribuciones de todos los trozos de conductor  $\Rightarrow$  uso  $\int$ .
- Aplicable a cargas en movimiento  $\Rightarrow$  sustituyo  $Idl$  por  $q\vec{v}$ .

- 1 Introducción
- 2 Corriente Eléctrica
- 3 Ley de Ohm. Resistencia.
- 4 Fuerza Electromotriz
- 5 Vector Inducción Magnética. Fuerza de Lorentz.
- 6 Cálculo del vector Inducción Magnética: Ley de Biot y Savart
- 7 Ley de Ampère
- 8 Fenómenos de autoinducción

# ¿Hay alguna forma más fácil de calcular el campo?

Si, pero primero algunas propiedades del campo magnético:

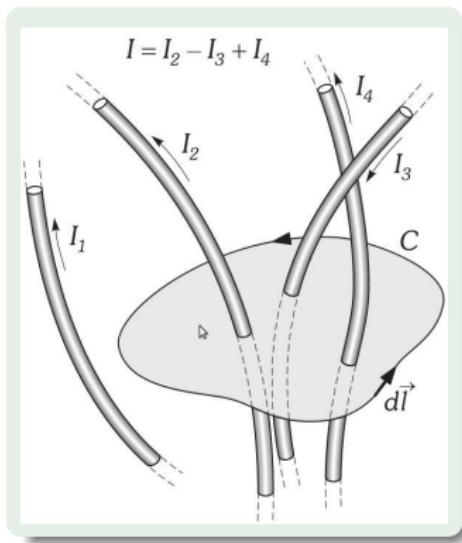
- El origen del campo magnético está en las corrientes eléctricas y por tanto no existen ni fuentes ni sumideros de campo magnético aislados, es decir, las líneas de campo son siempre cerradas. Por tanto:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (13)$$

- No podemos usar la ley de Gauss para el campo magnético.
- El campo magnético **no es conservativo**, por tanto su circulación a lo largo de una línea cerrada no es cero. No podemos definir potencial.

# Ley de Ampère

En un campo magnético, la circulación del vector inducción a lo largo de una curva cerrada  $C$  es igual a  $\mu_0$  veces la intensidad de corriente que corta el área de dicha curva.



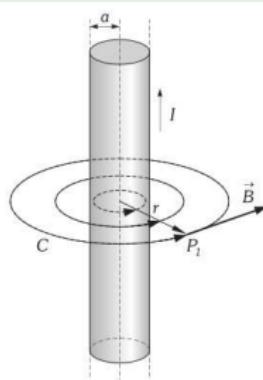
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (14)$$

- La ley de Ampère sólo es válida para corrientes estacionarias
- En el ejemplo:  

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_2 - I_3 + I_4)$$
- Para poner signo a las corrientes usamos la regla de la mano derecha

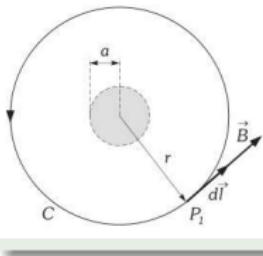
# Ejemplos de aplicación

- Si  $r > a$



$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_C B dl = B \oint_C dl = B 2\pi r \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\end{aligned}$$

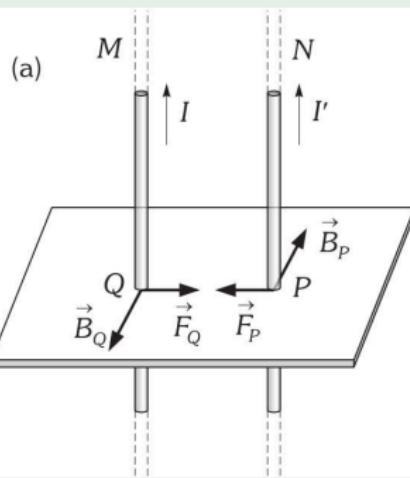
- Si  $r < a$



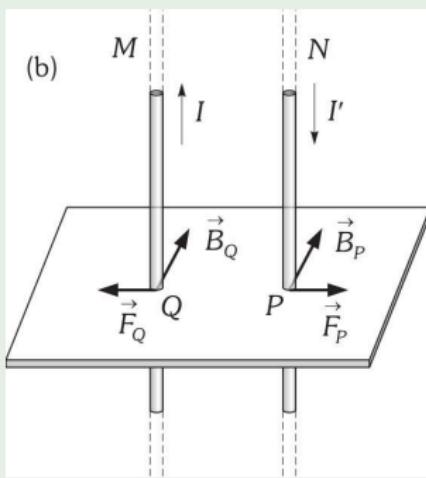
$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_C B dl = B \oint_C dl = B 2\pi r \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I' \text{ con } I' = I \frac{\pi r^2}{\pi a^2} \\ B &= \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\end{aligned}$$

# Fuerzas entre corrientes paralelas

## Mismo sentido



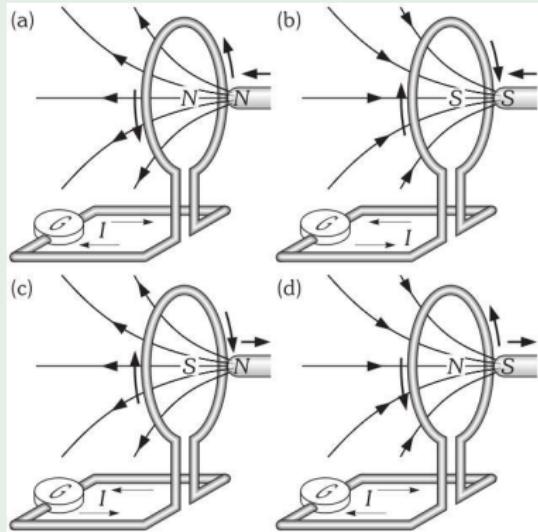
## Sentido opuesto



- Las corrientes en el mismo sentido se atraen
- Las corrientes en sentidos opuestos se repelen
- $F = \frac{\mu_0 II' l}{2\pi a}$

- 1 Introducción
- 2 Corriente Eléctrica
- 3 Ley de Ohm. Resistencia.
- 4 Fuerza Electromotriz
- 5 Vector Inducción Magnética. Fuerza de Lorentz.
- 6 Cálculo del vector Inducción Magnética: Ley de Biot y Savart
- 7 Ley de Ampère
- 8 Fenómenos de autoinducción

# Experiencias de Faraday



- Sólo hay corriente mientras que haya movimiento relativo espira-imán
- Cesa la corriente si cesa el movimiento
- La corriente se produce por una fuerza electromotriz llamada *fem inducida* que depende de la intensidad del campo magnético y de su sentido
- **Explicación:** las corrientes inducidas se deben a las variaciones del flujo magnético

# Ley de Lenz

## Ley de Lenz

El flujo producido por la corriente inducida se opone a la variación del flujo inductor.



Si se produce una variación de flujo, dicha variación induce una corriente (**corriente inducida**) cuyo sentido es tal que tiende a oponerse a la causa que originó la variación de flujo: **principio de acción-reacción del electromagnetismo**.

# Ley de Faraday

## Ley de Faraday

Siempre que varía el flujo magnético que atraviesa un circuito, se origina en él una **corriente inducida**. La fuerza electromotriz de inducción que origina dicha corriente inducida es el valor de la velocidad de variación del flujo. La corriente de inducción existe mientras existe variación de flujo.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \quad (15)$$

¿Por qué puede variar el flujo ( $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ )?

- ① Porque cambie  $\vec{B}$ .
- ② Porque cambie  $\vec{S}$ .
- ③ Porque cambie el ángulo entre  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$ .

# Autoinducción

**¿Qué ocurriría si tengo un conductor y hago variar la corriente que lo atraviesa?**

Si uso la ley de Lenz, aparecerá una corriente (**corriente inducida**) que se opondrá a dichas variaciones.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

## Autoinducción

Se produce el fenómeno de **autoinducción** en un conductor cuando se forman en él corrientes inducidas debidas a las variaciones de flujo en el propio conductor.

# Autoinducción

El flujo magnético ( $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ ) que atraviesa a un circuito aislado depende de:

- ① sus parámetros geométricos ( $\vec{S}$ )
- ② de la corriente que lo recorre porque  $\vec{B}$  depende de la corriente
- ③ del ángulo entre  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$

Para un **círcuito rígido** (no varía su superficie ni el ángulo entre  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$ ), los cambios de flujo se deben a los cambios de  $\vec{B}$  causados por los cambios de corriente:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dI} \frac{dI}{dt} \quad (16)$$

# Autoinducción

Para un **círculo rígido**

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dI} \frac{dI}{dt} \quad (17)$$

**Coeficiente de autoinducción** de un circuito es la variación que experimenta el flujo a través del circuito debida a las variaciones de la corriente que lo recorre y depende únicamente de los parámetros geométricos del circuito

$$L = \frac{d\phi}{dI} \quad (18)$$

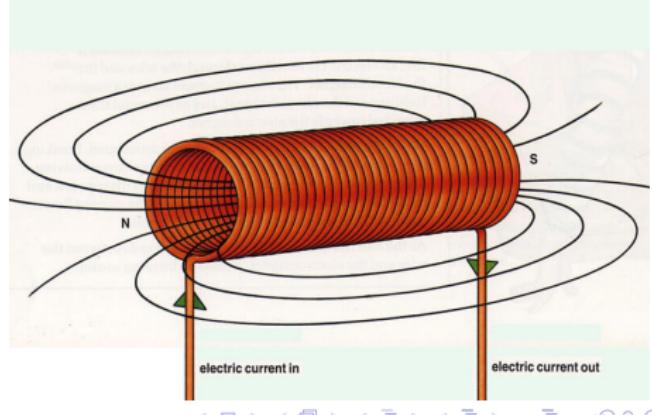
# Autoinducción

- **L** se mide en Henrios. Un **Henrio** es la autoinducción de un conductor en el cual la variación de la corriente en un amperio por segundo induce una fem de un voltio.

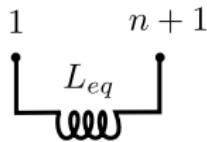
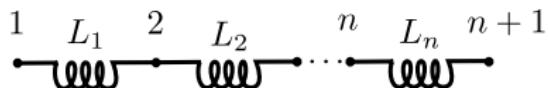
$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt} \quad (19)$$

- Ejemplo: Bobina

- Partimos de  $\varepsilon = -N \frac{d\phi}{dt}$
- Como  $\phi = BS$  y  $B = \frac{\mu NI}{l}$
- Entonces  $\varepsilon = -\frac{\mu N^2 S}{l} \frac{dI}{dt}$
- Resultando que  $L = \frac{\mu N^2 S}{l}$



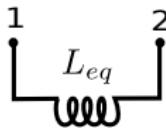
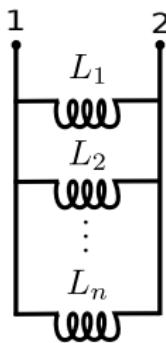
# Autoinducciones como elementos de circuitos



- Se realiza uniendo una autoinducción con la siguiente
- La autoinducción equivalente se calcula como la suma de las autoinducciones de la asociación.
- Autoinducción equivalente de la asociación en serie:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n \quad (20)$$

# Autoinducciones como elementos de circuitos



- Se realiza uniendo todos los extremos de un lado de todas las autoinducciones de la asociación entre sí (punto 1) y todos los extremos opuestos de las autoinducciones de la asociación entre sí (punto 2).
- La autoinducción equivalente se calcula usando la suma de inversos.
- Autoinducción equivalente de la asociación en paralelo:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (21)$$

# Bibliografía

Algunos libros útiles para estudiar los contenidos de este tema son:

- Física General (Burbano). Capítulos XXI y XXII.
- Fundamentos Físicos y Tecnológicos de la Informática (Gómez). Capítulo 3.
- Física para Ciencias e Ingenierías Vol II (Serway). Parte I.
- Física (Sears). Temas 25, 27, 28, 29 y 30.
- Apuntes prof. David Blanco. Tema 7.

**Nota:** Todos estos libros cuentan con ejemplos de aplicación resueltos útiles para adquirir los distintos conceptos tratados en este tema.

# Fundamentos Físicos y Tecnológicos

## Tema 2. Circuitos en Corriente Continua

Isabel M. Tienda Luna

Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores  
Universidad de Granada

isabelt@ugr.es

Grado en Informática - Doble Grado en Informática y Matemáticas  
Curso 2015-2016

- 1 Corriente Eléctrica
- 2 Ley de Ohm. Resistencia
- 3 Fuerza Electromotriz. Generadores y fuentes
- 4 Potencia en Corriente Continua
- 5 Leyes de Kirchhoff
- 6 Técnicas de Análisis de circuitos
- 7 Corrientes no estacionarias

## 1 Corriente Eléctrica

2 Ley de Ohm. Resistencia

3 Fuerza Electromotriz. Generadores y fuentes

4 Potencia en Corriente Continua

5 Leyes de Kirchhoff

6 Técnicas de Análisis de circuitos

7 Corrientes no estacionarias

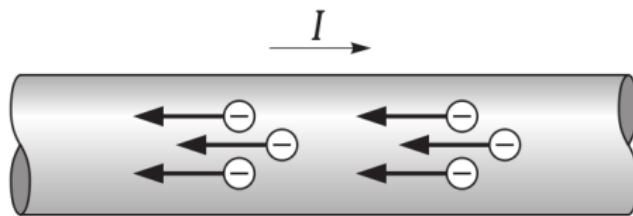
# Conceptos

## Corriente Eléctrica

La **corriente eléctrica** es el conjunto de las cargas que circulan a través de un conductor. La **conducción**, es el proceso por el cual la carga se transporta.

## Convenio

**Convenimos** en asignar el sentido de la corriente eléctrica al que tienen los portadores de carga positiva. Como la corriente eléctrica está producida por un campo eléctrico, ésta tiene el mismo sentido que el campo.

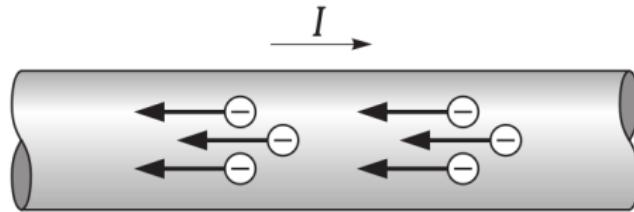


# Intensidad de corriente

## Intensidad de corriente

La **intensidad de corriente** es la velocidad a la que se transporta la carga por un punto dado en un sistema conductor. Es la cantidad de carga por unidad de tiempo que atraviesa un conductor.

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \left( \frac{\text{Culombio}}{\text{segundo}} = \text{Amperio} \right) \quad (1)$$



- 1 Corriente Eléctrica
- 2 Ley de Ohm. Resistencia
- 3 Fuerza Electromotriz. Generadores y fuentes
- 4 Potencia en Corriente Continua
- 5 Leyes de Kirchhoff
- 6 Técnicas de Análisis de circuitos
- 7 Corrientes no estacionarias

# Ley de Ohm

## Definición de Resistencia

La resistencia es la medida de la oposición de los hilos conductores al movimiento de los electrones en su seno.

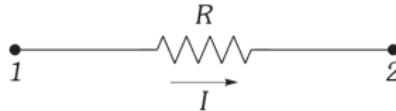


## Ley de Ohm

$$V_1 - V_2 = IR \quad (2)$$

## Representación en un circuito

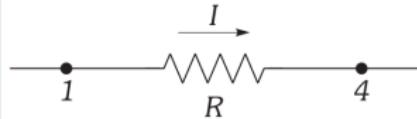
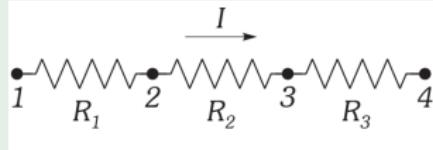
$$V_1 - V_2 = IR$$



- La resistencia depende de la temperatura. ¿Aumenta o disminuye con T?

# Asociación de resistencias

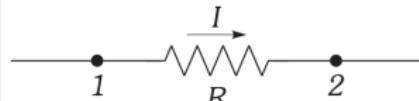
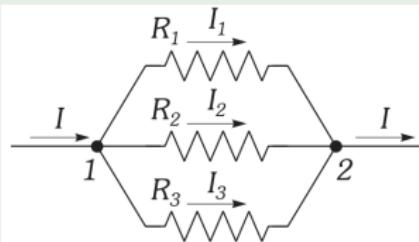
## Asociación serie



$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

- Misma intensidad
- Diferente diferencia de potencial

## Asociación paralelo



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

- Diferente intensidad
- Misma diferencia de potencial

# Resistencias

- Resistencias **variables**: cajas de resistencias y potenciómetros.

- **Energía consumida** por una corriente ( $I$ ) que atraviesa una resistencia.

*La caída de potencial ( $V_1 - V_2$ ) entre dos puntos de un hilo conductor es la pérdida de energía potencial de la unidad de carga, cuando pasa de un punto a otro. Si la carga transportada es  $q$ , la pérdida de energía potencial  $U$  será:*

$$U = I^2 R t = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} t \quad (3)$$

- **Potencia consumida** por una corriente que atraviesa una resistencia

*Es la energía de la corriente en cada unidad de tiempo. Su unidad es el Vatio (W).*

$$P = I^2 R = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \quad (4)$$

- Kilovatio-hora.

- **Efecto Joule**. Es la transformación de la energía eléctrica en calorífica, al circular una corriente por un conductor.  $U = I^2 R t$

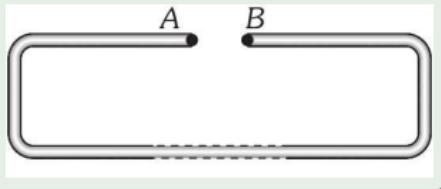
- 1 Corriente Eléctrica
- 2 Ley de Ohm. Resistencia
- 3 Fuerza Electromotriz. Generadores y fuentes
- 4 Potencia en Corriente Continua
- 5 Leyes de Kirchhoff
- 6 Técnicas de Análisis de circuitos
- 7 Corrientes no estacionarias

# Fuerza electromotriz

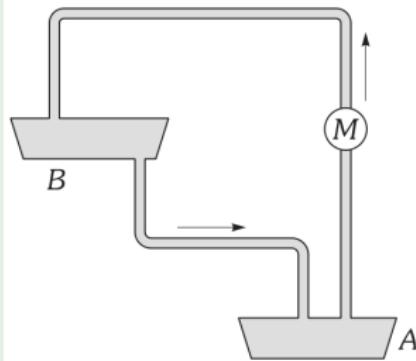
## Fuerza electromotriz

La **fuerza electromotriz** (**fem**) ( $\varepsilon$ ) es toda causa capaz de mantener una diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor o de producir una corriente eléctrica que lo atraviese.

Electrostática



Símil hidrodinámico



# Fem de un generador

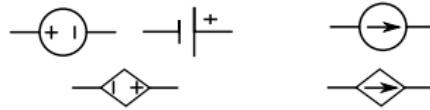
En un generador, la **fuerza electromotriz** (fem) ( $\varepsilon$ ) es el trabajo necesario para el transporte de la unidad de carga positiva del polo negativo (menor potencial) al positivo (mayor potencial) por el interior del generador.

$$\varepsilon = \frac{U}{q} \Rightarrow U = \varepsilon q \Rightarrow U = \varepsilon It \quad (5)$$

¿En qué se emplea la energía  $U$ ?

- calor (resistencia interna del generador,  $r$ )
- energía potencial de las cargas que hace que circulen

Representación en un circuito:



# Diferencia de potencial entre los polos de un generador

¿Toda la energía del generador va a las cargas?

La **diferencia de potencial** entre los polos de un generador es igual a su fem menos  $Ir$ , donde  $r$  es la resistencia interna del generador.

$$V_1 - V_2 = \varepsilon - Ir \quad (6)$$

**Convenio de signos** ([ecuación \(6\)](#)):

- $V_1 - V_2$  en la fórmula anterior será siempre la diferencia de potencial entre el polo positivo y el negativo del generador,  $\varepsilon$  será, así, siempre positiva cuando se aplique esta fórmula.
- $I$  será positiva o negativa dependiendo de si su sentido es “saliente” o “entrante” con respecto al polo positivo del generador.

**Rendimiento:**  $\eta = \frac{\text{potencial útil}}{\text{potencial teórico}} = \frac{(V_1 - V_2)}{\varepsilon}$

# Tipos de fuentes: dependientes e independientes

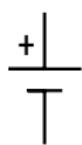
## Fuentes Independientes

- Definición de fuente independiente.
- Tipos de fuentes independientes: de tensión y de corriente.
- Símbolos de las fuentes independientes.

Fuentes  
de  
Tensión



Fuente  
de  
Corriente

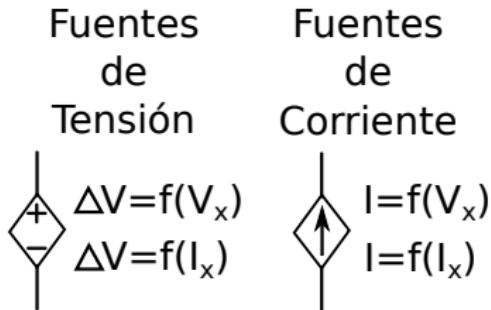


- **Fuentes de tensión:** la diferencia de potencial es **constante**. La intensidad depende del circuito donde estén.
- **Fuentes de corriente:** la intensidad es **constante**. La diferencia de potencial depende del circuito donde estén.

# Tipos de fuentes: dependientes e independientes

## Fuentes Dependientes

- Definición de fuente dependiente.
- Tipos de fuentes dependientes: de tensión dependiente de una tensión, de tensión dependiente de una corriente, de corriente dependiente de una tensión y de corriente dependiente de una corriente.
- Símbolos de las fuentes dependientes.



# Tipos de elementos en un circuito: asociaciones

- **Tipos** de elementos en un circuito:

- elementos activos
- elementos pasivos

- **Asociación** de fuentes ideales:

- las fuentes de **tensión** se asocian en **serie**
- las fuentes de **corriente/intensidad** se asocian en **paralelo**

- **Asociación** de resistencias

- 1 Corriente Eléctrica
- 2 Ley de Ohm. Resistencia
- 3 Fuerza Electromotriz. Generadores y fuentes
- 4 Potencia en Corriente Continua
- 5 Leyes de Kirchhoff
- 6 Técnicas de Análisis de circuitos
- 7 Corrientes no estacionarias

# Cálculo de potencia en Corriente Continua

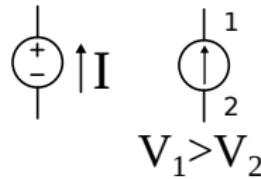
- Resistencias:

- Siempre consumen potencia.
- Cálculo:  $P = I\Delta V$  o equivalentemente usar ecuación 4.

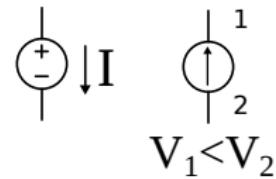
- Fuentes:

- Cuando sólo tengo una fuente en un circuito, ésta siempre suministra potencia. Si tengo más de una fuente, éstas pueden suministrar o consumir potencia.
- Cálculo:  $P = I\Delta V$ .
- Criterio:

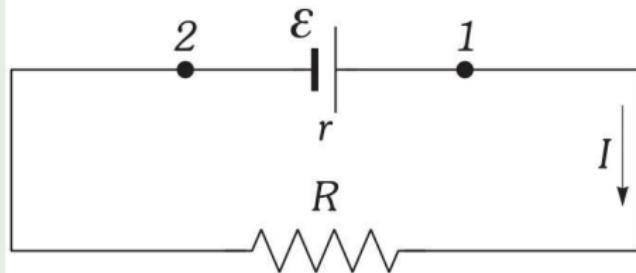
Suministra



Consumir



# Conservación de la energía



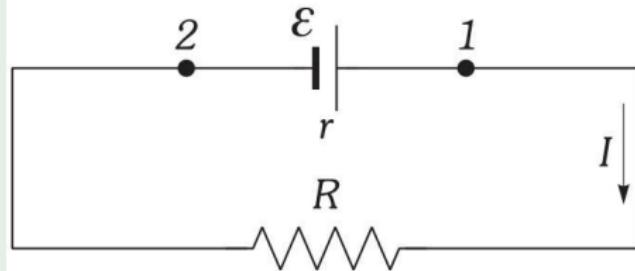
- Conservación de la energía:  
Potencia suministrada igual a potencia consumida

$$\begin{aligned}\epsilon I &= I^2R + I^2r \\ I &= \frac{\epsilon}{R+r}\end{aligned}$$

La intensidad de la corriente es directamente proporcional a la fem e inversamente proporcional a la resistencia total del circuito:

$$I = \frac{\sum \epsilon_i}{R_t}$$

# Conservación de la energía



Datos:

- $R = 10\text{k}\Omega$
- $r = 20\Omega$
- $\varepsilon = 10\text{V}$

$$I = \frac{\sum \varepsilon_i}{R_t} = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{10\text{V}}{1020\Omega} = 9,8\text{mA}$$

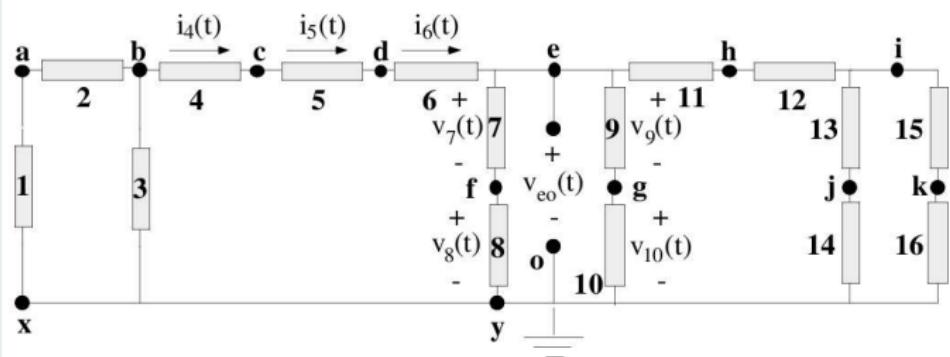
- Potencia suministrada por la fuente:  
 $P = \varepsilon I = 10\text{V} * 9,8\text{mA} = 98\text{mW}$
- Potencia consumida por R:  $P = I^2 R = 96,04\text{mW}$
- Potencia consumida por r:  $P = I^2 r = 1,96\text{mW}$

- 1 Corriente Eléctrica
- 2 Ley de Ohm. Resistencia
- 3 Fuerza Electromotriz. Generadores y fuentes
- 4 Potencia en Corriente Continua
- 5 Leyes de Kirchhoff
- 6 Técnicas de Análisis de circuitos
- 7 Corrientes no estacionarias

# Nomenclatura

- **Nudo:** punto donde se conectan dos o más elementos
- **Nudo esencial:** nudo en el que se conectan tres o más elementos; en un circuito hay  $n$  nudos esenciales
- **Nudo de referencia (tierra, masa):** nudo al que se asigna arbitrariamente una tensión nula; se indica explícitamente y sólo hay uno en cada circuito
- **Rama esencial:** camino entre dos nudos esenciales; en un circuito hay  $r$  ramas esenciales

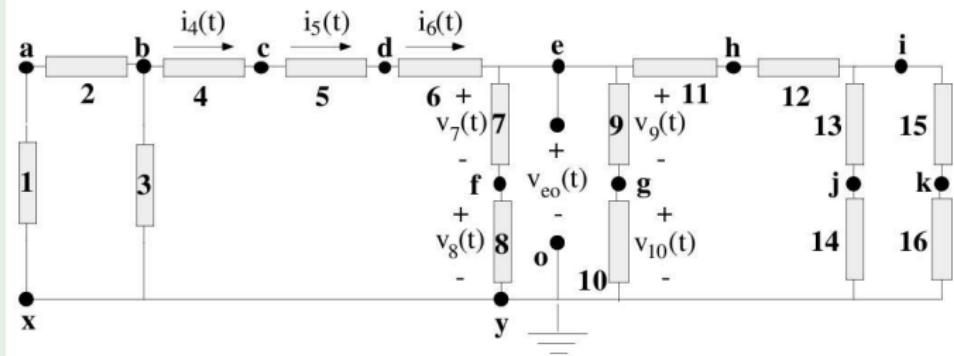
## Ejemplo 2



# Nomenclatura

- **Malla:** conjunto cerrado de elementos que se recorre sin pasar dos veces por ninguno; en un circuito hay  $r - (n - 1)$  mallas independientes
- **Elementos en serie:** tienen un nudo común al que no se conecta otro elemento; las corrientes en elementos en serie son iguales
- **Elementos en paralelo:** los terminales de todos se conectan a los mismos nudos; las tensiones en elementos en paralelo son iguales

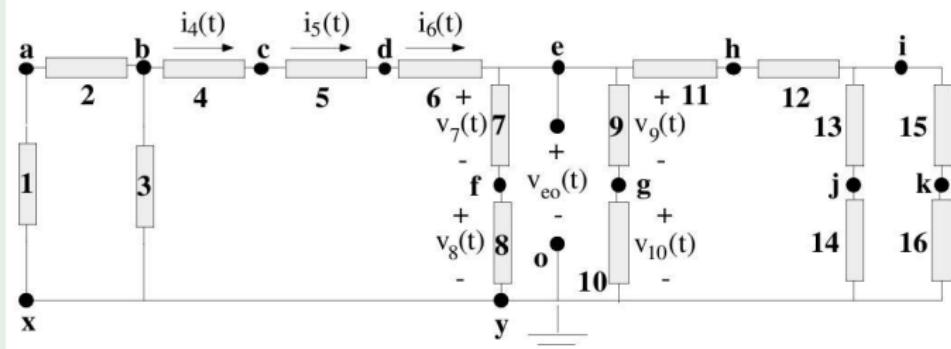
## Ejemplo 2



# Nomenclatura

- **Círculo abierto:** par de nudos sin conexión directa; la corriente es nula, pero puede soportar tensión (resistencia infinita)
- **Corto-circuito:** conexión directa entre dos elementos; la tensión es nula, pero puede soportar corriente (resistencia nula)

## Ejemplo 2



# Leyes de Kirchhoff

Las **leyes de Kirchhoff** sólo son aplicables en régimen estacionario, es decir, cuando las intensidades y los potenciales en los distintos puntos del circuito permanecen constantes.

## Ley de Nudos

La suma de las intensidades de corriente que llegan a un nudo es igual a la suma de las intensidades que salen de él.

$$\sum I_{\text{entran}} = \sum I_{\text{salen}} \quad (7)$$

## Ley de Mallas

En un circuito cerrado, la suma de los productos de las intensidades por las resistencias es igual a la suma de las fem.

$$\sum IR = \sum \varepsilon \quad (8)$$

# Signo de las intensidades y la fem

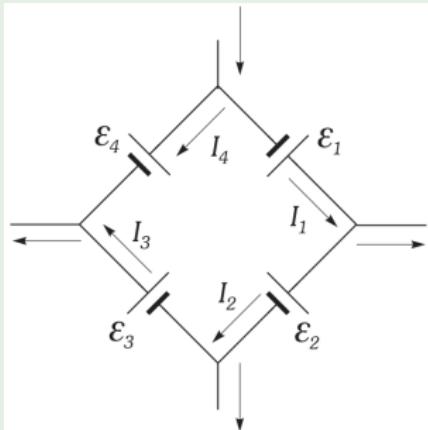
## Intensidades

- Usamos un **criterio de signos**: se pinta de forma arbitraria sentido de las intensidades de corriente. **Por ejemplo**, se da el signo positivo a las que circulan en el sentido de las agujas de un reloj; las contrarias son las negativas.
- Tras resolver el circuito se comprueba la bondad de la suposición.

## Fem

- Signo dependiendo de la corriente que la atraviesa.
- Es positiva cuando la intensidad de corriente que la atraviesa sale por el polo positivo. Es negativa en caso contrario.

## Ejemplo 1



- 1 Corriente Eléctrica
- 2 Ley de Ohm. Resistencia
- 3 Fuerza Electromotriz. Generadores y fuentes
- 4 Potencia en Corriente Continua
- 5 Leyes de Kirchhoff
- 6 Técnicas de Análisis de circuitos
- 7 Corrientes no estacionarias

# Análisis por mallas

## Procedimiento

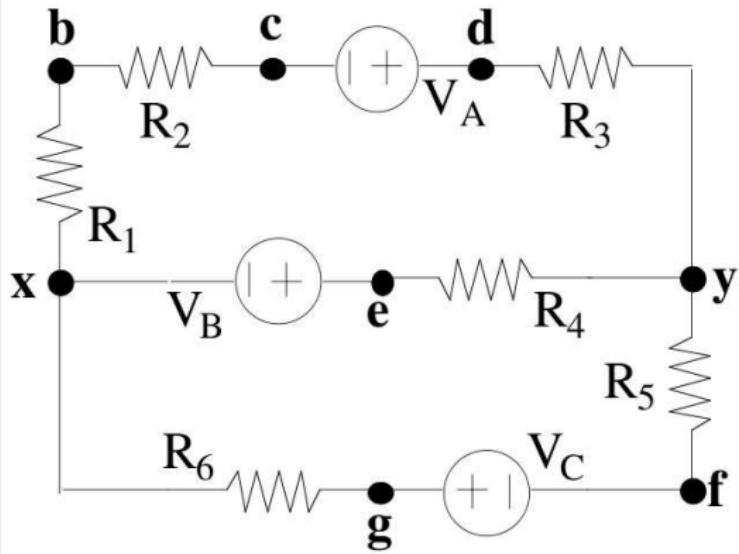
- ① Se asigna una corriente a cada malla independiente. Las corrientes de malla no tienen existencia real, las de rama sí.
- ② Se formula una ecuación por cada malla independiente (ley de Kirchhoff de las mallas). Relaciona las fuentes de tensión con la corriente de malla, las resistencias de la malla, las resistencias compartidas con otras mallas, y las corrientes en esas resistencias.
- ③ Se añaden tantas ecuaciones adicionales como fuentes independientes de corriente y fuentes dependientes haya en el circuito. Los elementos *extraños* (*fuentes de corriente o fuentes dependientes*) han de proporcionar las ecuaciones adicionales

## Resultado

- Se obtienen las **corrientes de malla**. A partir de las corrientes es posible calcular cualquier otra magnitud en el circuito.

# Análisis por mallas

Ejemplo 3



# Análisis por nudos

## Procedimiento

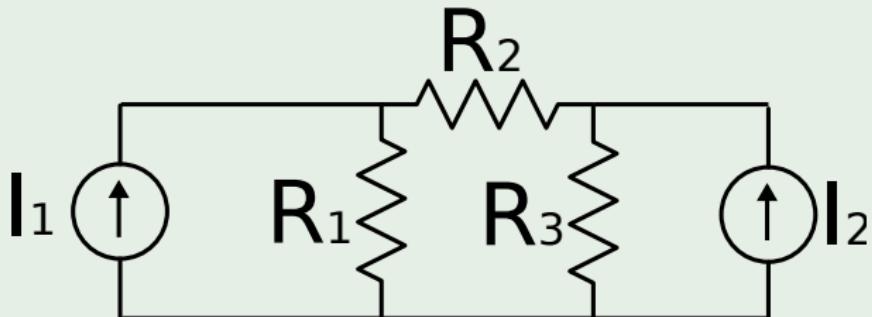
- ① Se elige un nudo esencial como referencia y se le asigna una tensión nula. Las tensiones de nudo no tienen existencia real. Lo que se mide es diferencia de tensión. Al asignar tensión nula a un nudo, coinciden la tensión de nudo y la diferencia de tensión entre éste y el de referencia.
- ② Se asignan las tensiones a los restantes nudos esenciales.
- ③ Se formula una ecuación para cada nudo esencial, exceptuando el de referencia (ley de Kirchhoff de nudos). Relaciona las fuentes de corriente conectadas al nudo, las resistencias conectadas a éste, las resistencias compartidas con otros nudos y las tensiones de éstos.
- ④ Se añaden tantas ecuaciones adicionales como fuentes independientes de tensión y fuentes dependientes haya en el circuito. Los elementos extraños (*fuentes de tensión o fuentes dependientes*) han de proporcionar las ecuaciones adicionales

## Resultado

- Se obtienen las **tensiones de los nudos**. A partir de las tensiones es posible calcular cualquier otra magnitud en el circuito.

# Análisis por nudos

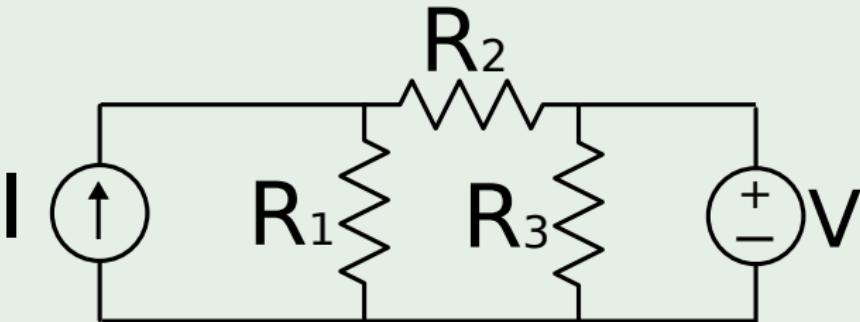
Ejemplo 4



# ¿Qué método uso si hay fuentes de tensión y de corriente?

Calcular  $I_{R_2}$  usando Método de Mallas/Método de Nudos

Ejemplo 5: ¿Mallas o Nudos?



- Puedo usar cualquiera de los métodos explicados en este tema.
- **Advertencia:** Al usar el método de mallas para resolver este circuito, **NO** puede afirmarse que la fem o diferencia de potencial entre los extremos de la fuente de corriente es cero.

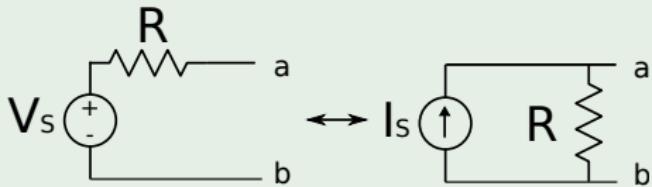
# Métodos de Simplificación

## Reducción

Aunque los métodos derivados de la aplicación de las leyes de Kirchhoff constituyen herramientas muy potentes para la solución de circuitos, en general el uso de métodos que permitan simplificar los circuitos siempre es más deseable. Ejemplos de reducción son el uso de equivalencias serie-paralelo o  $\Delta$ - $Y$ .

## Transformación entre fuentes

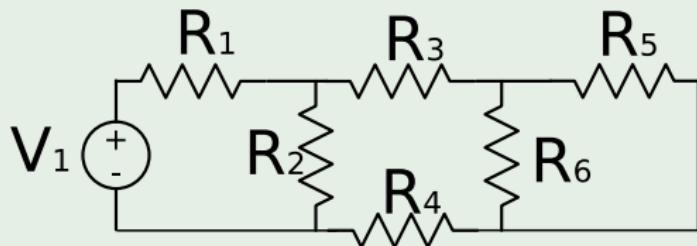
### Equivalencia



$$I_S = \frac{V_S}{R}$$

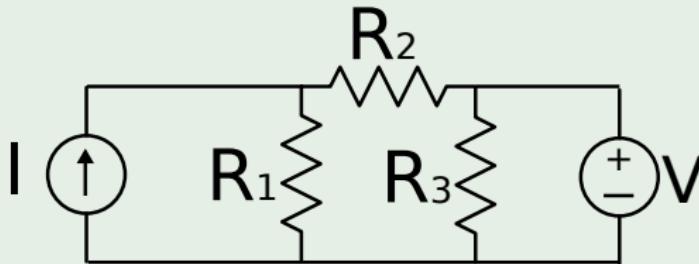
# Métodos de Simplificación

## Ejemplo 6: Reducción



Calcular  $I_{R_2}$  usando un Método de Simplificación.

## Ejemplo 5: Simplificación



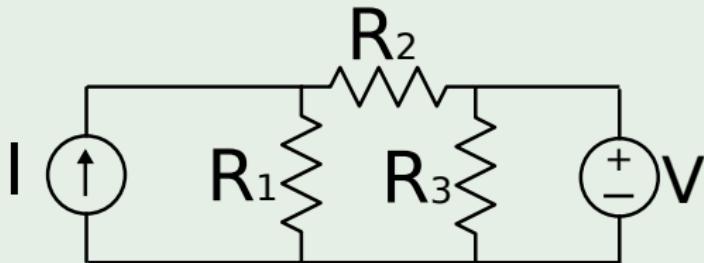
# Circuitos lineales: Principio de Superposición

## Principio de Superposición

En cualquier red resistiva lineal, la tensión o la corriente a través de cualquier resistencia o fuente se calcula mediante la suma algebraica de todas las tensiones o corrientes individuales ocasionadas por fuentes independientes separadas que actúan solas, junto con todas las demás fuentes de tensión independientes sustituidas por cortocircuitos y todas las demás fuentes de corrientes independientes, sustituidas por circuitos abiertos.

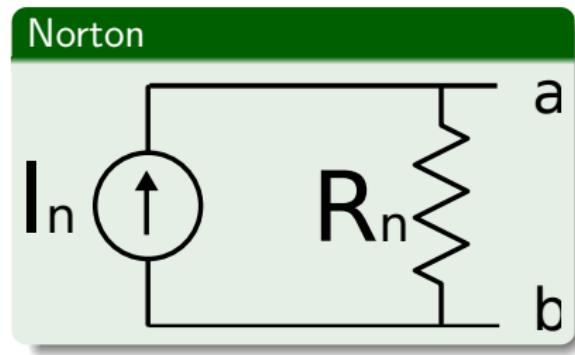
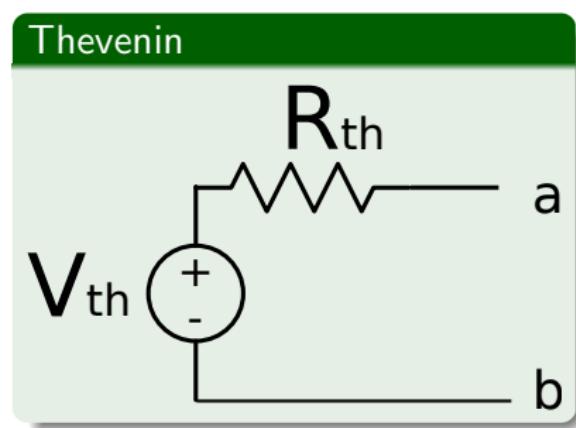
Calcular  $I_{R_2}$  usando el Principio de Superposición

### Ejemplo 5: Principio Superposición



# Equivalentes Thevenin y Norton

- Motivación
- Definición de Equivalente Thevenin.
- Cálculo del Equivalente Thevenin.
- Definición del Equivalente Norton.
- Cálculo del Equivalente Norton.



- 1 Corriente Eléctrica
- 2 Ley de Ohm. Resistencia
- 3 Fuerza Electromotriz. Generadores y fuentes
- 4 Potencia en Corriente Continua
- 5 Leyes de Kirchhoff
- 6 Técnicas de Análisis de circuitos
- 7 Corrientes no estacionarias

# Condensadores en corrientes estacionarias

- Relación intensidad-voltaje

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (9)$$

- Representación en un circuito
- Unidades (Faradios)
- Asociación en serie:

$$\frac{1}{C_{equiv}} = \sum_i \frac{1}{C_i} \quad (10)$$

- Asociación en paralelo:

$$C_{equiv} = \sum_i C_i \quad (11)$$

- Energía:

$$U = \frac{1}{2} C v^2 \quad (12)$$

- Comportamiento en CC: circuito abierto.

# Inductores en corrientes estacionarias

- Relación intensidad-voltaje

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (13)$$

- Representación en un circuito
- Unidades (Henrio)
- Asociación en paralelo:

$$\frac{1}{L_{equiv}} = \sum_i \frac{1}{L_i} \quad (14)$$

- Asociación en serie:

$$L_{equiv} = \sum_i L_i \quad (15)$$

- Energía:

$$U = \frac{1}{2} L i^2 \quad (16)$$

- Comportamiento en CC: cortocircuito.

# Condensadores e inductores en corrientes no estacionarias

## Condensadores

- Relación intensidad-voltaje

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0) \quad (17)$$

- Potencia

$$p = iv = Cv \frac{dv}{dt} \quad (18)$$

## Inductores

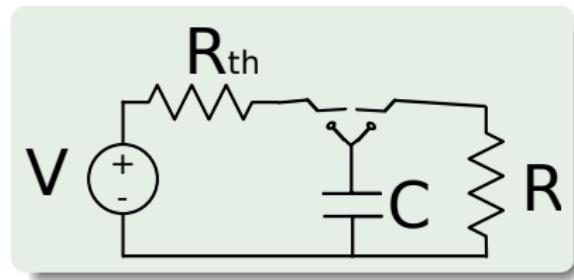
- Relación intensidad-voltaje

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt + i(t_0) \quad (19)$$

- Potencia

$$p = iv = Li \frac{di}{dt} \quad (20)$$

# Circuito RC



- Ecuación diferencial

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \quad (21)$$

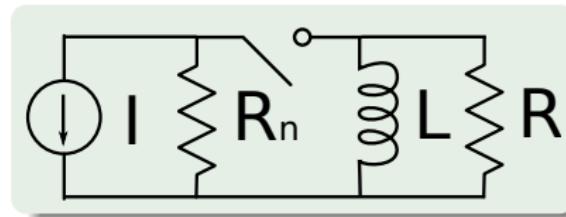
- Condiciones iniciales

$$v(0^-) = v(0^+) = v(0) = V \quad (22)$$

- Solución:

$$v(t) = V e^{-t/RC} \quad (23)$$

# Circuito RL



- Ecuación diferencial

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (24)$$

- Condiciones iniciales

$$i(0^-) = i(0^+) = i(0) = I \quad (25)$$

- Solución:

$$i(t) = I e^{-tR/L} \quad (26)$$

# Fundamentos Físicos y Tecnológicos

## Tema 3. Circuitos en Corriente Alterna

Isabel M. Tienda Luna

Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores  
Universidad de Granada

[isabelt@ugr.es](mailto:isabelt@ugr.es)

Grado en Informática  
Curso 2012-2013

- 1 Introducción
- 2 Herramientas Matemáticas
- 3 Corriente Alterna
- 4 Impedancia
- 5 Potencia
- 6 Principio de Superposición en CA
- 7 Teoremas de Thevenin y Norton en CA.
- 8 Función de Transferencia. Filtros.

- 1 Introducción
- 2 Herramientas Matemáticas
- 3 Corriente Alterna
- 4 Impedancia
- 5 Potencia
- 6 Principio de Superposición en CA
- 7 Teoremas de Thevenin y Norton en CA.
- 8 Función de Transferencia. Filtros.

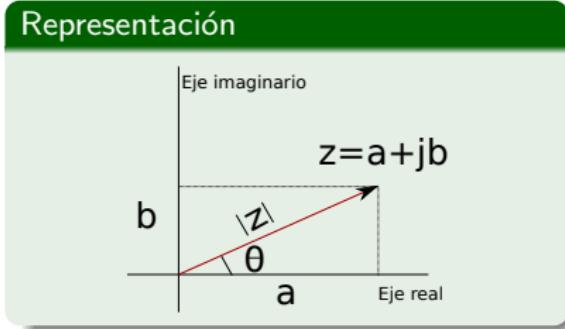
# CA vs CC

- El amplio uso de la CA viene determinada por su **facilidad de transformación**, que no existe CC.
- Elevación de tensión en CC: conexión de generadores en serie  $\Rightarrow$  poco práctico.
- Elevación de tensión en CA: uso de transformadores  $\Rightarrow$  **eficiente** porque se eleva el voltaje hasta altos valores (alta tensión), disminuyendo en igual proporción la intensidad de corriente.
- Energía transportada:  $U = vit$ . La misma energía puede ser distribuida a largas distancias con bajas intensidades de corriente y, por tanto, con **bajas pérdidas** ( $U_{perdidas} = Ri^2t$ ).
- Una vez en el punto de consumo o en sus cercanías, el voltaje puede ser de nuevo reducido para su uso industrial o doméstico de forma cómoda y segura.

- 1 Introducción
- 2 Herramientas Matemáticas
- 3 Corriente Alterna
- 4 Impedancia
- 5 Potencia
- 6 Principio de Superposición en CA
- 7 Teoremas de Thevenin y Norton en CA.
- 8 Función de Transferencia. Filtros.

# Números complejos

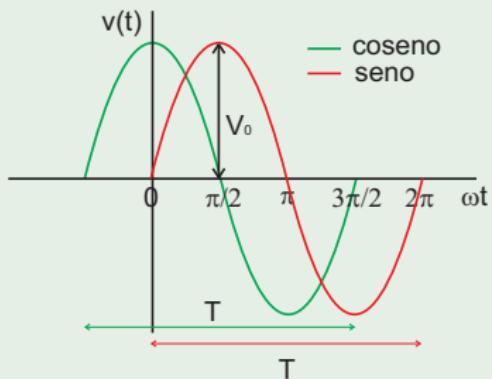
- ¿Qué es un número complejo?
  - Los números complejos están relacionados con las raíces de números negativos.
  - Nosotros vamos a usar la notación  $j \equiv \sqrt{-1}$
- ¿Cómo se expresan los números complejos?
  - Forma binomial:  $z = a + jb$ .
  - Forma polar:  $z = |z|e^{j\theta}$ .
  - Forma trigonométrica:  $z = |z| \cos \theta + j|z| \sin \theta$
  
- Transformaciones.
- Representación gráfica.
- Complejo conjugado.
- Opuesto de un número complejo.
- Igualdad de números complejos.



# Números complejos

- Operaciones con números complejos: dependiendo de la operación a realizar, será más conveniente tener el número complejo expresado en una forma u otra.
  - ① Suma (binomial)
  - ② Resta (binomial)
  - ③ Producto (polar)
  - ④ División (polar)
- Para hacer ejemplos sobre operaciones con números complejos, usar el pdf sobre complejos que está dentro de la carpeta **Curso cero de matemáticas básicas** disponible en el **moodle** (material extra en semana 1).

# Señal sinusoidal (tipo seno o tipo coseno)



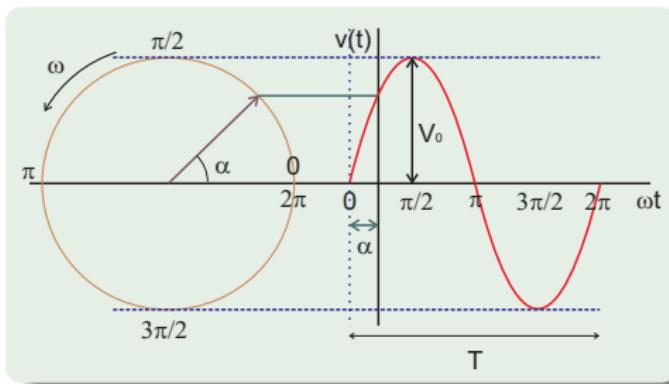
- $v(t) = V_0 \sin(\omega t + \alpha) = V_0 \cos(\omega t + \alpha - \pi/2)$
- $v(t) = V_0 \sin(2\pi f t + \alpha) = V_0 \cos(2\pi f t + \alpha - \pi/2)$
- $v(t) = V_0 \sin(\frac{2\pi t}{T} + \alpha) = V_0 \cos(\frac{2\pi t}{T} + \alpha - \pi/2)$

## Algunas definiciones

- **Frecuencia angular** ( $\omega$ ), **frecuencia** ( $f$ ), y **Periodo** ( $T$ ).
- Diferencia de **fase** entre dos señales  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ .  $x_1(t)$  adelantada si  $0 < \alpha_1 - \alpha_2 < \pi$ .  $x_2(t)$  adelantada si  $-\pi < \alpha_1 - \alpha_2 < 0$ .
- **Valor instantáneo**.
- **Valor pico a pico**.
- **Valor eficaz (r.m.s.)** =  $\sqrt{\int_0^T v^2(t) dt} = V_0/\sqrt{2}$ . Relación con la potencia.

# Fasores y números complejos

- Puedo usar números complejos para representar señales sinusoidales ( ver <http://en.wikipedia.org/wiki/Phasor> o <http://es.wikipedia.org/wiki/Fasor>):  
 $v(t) = V_0(\cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha))$  **¡¡Sólo nos interesa una parte!!**
- Representación fasorial:  $v(t) = V_0 e^{j(\omega t + \alpha)}$  si  $V = V_0 e^{j\alpha} \Rightarrow v(t) = V e^{j\omega t}$



## Fasor ( $V_0 e^{j\alpha}$ )

Es un número complejo que representa el módulo  $V_0$  y la fase inicial  $e^{j\alpha}$  de una señal sinusoidal  $v(t)$ .

- ¿Por qué trabajar con números complejos?
  - **Ventaja:** permite transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas fáciles de resolver.(Derivada e integral de la exponencial).
  - **Desventaja:** hay que familiarizarse con los números complejos.

- 1 Introducción
- 2 Herramientas Matemáticas
- 3 Corriente Alterna
- 4 Impedancia
- 5 Potencia
- 6 Principio de Superposición en CA
- 7 Teoremas de Thevenin y Norton en CA.
- 8 Función de Transferencia. Filtros.

# Características Generales

- **¿Qué es una señal de corriente alterna?** Se denomina corriente alterna a la corriente eléctrica en la que la magnitud y dirección varían cíclicamente. La forma de onda de la corriente alterna más comúnmente utilizada es la de una onda senoidal. Sin embargo, en ciertas aplicaciones se utilizan otras formas de onda periódicas, tales como la triangular o la cuadrada.
- Representación: polaridad.
- Notación.
- Vamos a comenzar analizando las características y el comportamiento de las señales más sencillas: aquellas que son de tipo senoidal.

## Características Generales II

- Algunos tipos de ondas periódicas tienen el inconveniente de no tener definida su expresión matemática, por lo que no se puede operar analíticamente con ellas.
- **¿Por qué trabajamos con ondas senoidales?**
  - Las funciones seno y coseno están perfectamente definidas matemáticamente. Mediante la teoría de los números complejos se analizan con facilidad los circuitos de alterna.
  - Las ondas periódicas no senoidales se pueden descomponer en suma de una serie de ondas senoidales de diferentes frecuencias (armónicos): series de Fourier.
  - Se pueden generar con facilidad y en magnitudes de valores elevados para facilitar el transporte de la energía eléctrica: transformadores.
- Las **leyes de Kirchoff** se siguen cumpliendo. **Problema:** ahora trabajamos con ecuaciones diferenciales.

- 1 Introducción
- 2 Herramientas Matemáticas
- 3 Corriente Alterna
- 4 Impedancia
- 5 Potencia
- 6 Principio de Superposición en CA
- 7 Teoremas de Thevenin y Norton en CA.
- 8 Función de Transferencia. Filtros.

# Impedancia. Ley de Ohm generalizada.

- Si  $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \alpha)$ , se cumple que  $v(t) = \text{Real} \left( V_0 e^{j(\omega t + \alpha)} \right) \Rightarrow$  A partir de ahora usaremos  $v(t) = V_0 e^{j(\omega t + \alpha)}$  para hacer las cuentas y al final, al calcular potenciales o intensidades, nos quedaremos **sólo** con la parte real del resultado porque  $v(t)$  es la parte real del número complejo  $V_0 e^{j(\omega t + \alpha)}$ .
- **¿Por qué hacemos esto?** Para poder seguir usando la Ley de Ohm.

## Generalización de la ley de Ohm

$$v(t) = Z i(t)$$

$Z$  es la Impedancia y se mide en Ohmios ( $\Omega$ ). Su valor depende del tipo de elemento a considerar. A continuación lo calcularemos para:

- Resistencia
- Condensador
- Bobina

# Impedancia de una resistencia

Para una resistencia se cumple siempre que:

$$v(t) = R i(t)$$

Si usamos que  $v(t) = V_0 e^{j(\omega t + \alpha)}$ , la Ley de Ohm nos dice que  $V_0 e^{j(\omega t + \alpha)} = R i(t)$ . Esta expresión tiene dos consecuencias:

- ① La impedancia de una resistencia se calcula como  $Z_R = R$ .
- ② La intensidad que recorre la resistencia es  $i(t) = \frac{V_0}{R} e^{j(\omega t + \alpha)}$ . Como puede observarse,  $i(t)$  tiene las mismas frecuencia angular y fase que  $v(t)$  pero distinto módulo.

# Impedancia de un condensador

Para un condensador se cumple siempre que:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Si usamos que  $v(t) = V_0 e^{j(\omega t + \alpha)}$ , la expresión anterior queda como

$i(t) = C \frac{d(V_0 e^{j(\omega t + \alpha)})}{dt} = C j \omega V_0 e^{j(\omega t + \alpha)} = C j \omega v(t)$ . Esta expresión tiene dos consecuencias:

- ① La impedancia de un condensador se calcula como  $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}$  ya que  $v(t) = \frac{1}{j\omega C} i(t)$ .
- ② La intensidad que recorre el condensador es  $i(t) = C j \omega v(t) = C \omega V_0 e^{j(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})}$ . Como puede observarse,  $i(t)$  tiene la misma frecuencia angular que  $v(t)$  pero distinto módulo ( $C \omega V_0$ ) y distinta fase ( $\alpha + \frac{\pi}{2}$ ).

# Impedancia de una bobina

Para una bobina se cumple siempre que:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Si usamos que  $v(t) = V_0 e^{j(\omega t + \alpha)}$ , la expresión anterior queda como  
 $i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt = \frac{1}{L} \int V_0 e^{j(\omega t + \alpha)} dt = \frac{1}{L} \frac{1}{j\omega} V_0 e^{j(\omega t + \alpha)}$ . Esta expresión tiene dos consecuencias:

- ① La impedancia de una bobina se calcula como  $Z_L = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}$  ya que  $v(t) = j\omega L i(t)$ .
- ② La intensidad que recorre la bobina es  $i(t) = \frac{1}{j\omega L} v(t) = \frac{V_0}{\omega L} e^{j(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2})}$ . Como puede observarse,  $i(t)$  tiene la misma frecuencia angular que  $v(t)$  pero distinto módulo ( $\frac{V_0}{\omega L}$ ) y distinta fase ( $\alpha - \frac{\pi}{2}$ ).

# Impedancia

- A partir de ahora, trataremos resistencias, bobinas y condensadores como si fueran resistencias de valor  $Z$  ( $Z_R$  para resistencias,  $Z_L$  para bobinas y  $Z_C$  para condensadores) en los circuitos alimentados por corriente alterna de manera que cumplirán la Ley de Ohm generalizada.
- Las asociaciones de impedancias se harán:

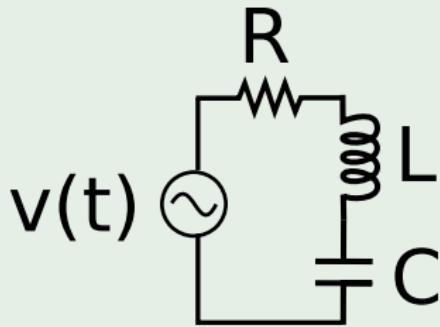
- Serie:  $Z_{equivalente} = \sum_i^N Z_i$

- Paralelo:  $\frac{1}{Z_{equivalente}} = \sum_i^N \frac{1}{Z_i}$

- Puesto que la existencia de una resistencia, condensador o bobina no cambia la frecuencia angular de las señales, a partir de ahora, ignoraremos la dependencia temporal de las mismas en los cálculos (nos olvidamos del término  $e^{j\omega t}$ ). Añadiremos esta dependencia temporal (el término  $e^{j\omega t}$ ) al final y, por tanto, operaremos sólo con fasores.

# Ejemplo 1: RCL serie

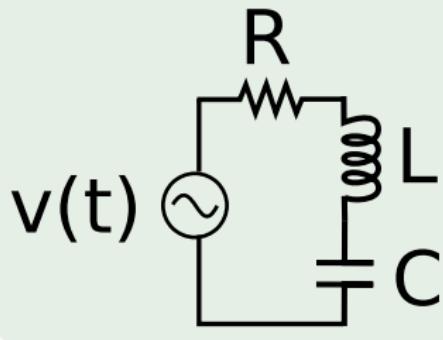
## Ejemplo 1



- $R=1\text{k}\Omega$
- $L=1\text{mH}$
- $C=2\text{nF}$
- $v(t)=10\cos\left(10^6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t\right) V$

# Ejemplo 1: RCL serie

Ejemplo 1



- Se cumple que:

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \quad (1)$$

$$v(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t)dt \quad (2)$$

- Pero si usamos fasores:

$$10V = IZ_R + IZ_L + IZ_C \quad (3)$$

$$10V = IR + Ij\omega L + I\frac{1}{j\omega C} \quad (4)$$

# Ejemplo 1: RCL serie

- Calculamos las impedancias:

$$Z_R = 10^3 \Omega \quad (5)$$

$$Z_C = \frac{1}{j10^6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} 2 \cdot 10^{-9} F} = -j0,5 \cdot 10^3 \Omega = 0,5 \cdot 10^3 e^{-j\frac{\pi}{2}} \Omega \quad (6)$$

$$Z_L = j10^6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} 10^{-3} H = j10^3 \Omega = 10^3 e^{j\frac{\pi}{2}} \Omega \quad (7)$$

- Como las tres están en serie, la impedancia equivalente:

$$Z_{eq} = Z_R + Z_C + Z_L = (10^3 + j0,5 \cdot 10^3) \Omega = 1,12 \cdot 10^3 e^{j0,46} \Omega \quad (8)$$

- Calculamos el fasor que representa la intensidad:

$$I = \frac{10V}{(10^3 + j0,5 \cdot 10^3) \Omega} = \frac{10V}{1,12 \cdot 10^3 e^{j0,46} \Omega} = 8,93 e^{-j0,46} mA \quad (9)$$

- Añadimos la dependencia temporal:  $i(t) = 8,93 e^{j(10^6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t - 0,46)} mA$
- Nos quedamos sólo con la parte real:  $i(t) = 8,93 \cos\left(10^6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t - 0,46\right) mA$

# Ejemplo 1: RCL serie

- Usamos la ley de Ohm Generalizada aplicada a cada elemento para calcular la diferencia de potencial entre sus extremos:

$$V_R = RI = 10^3 \Omega 8,93e^{-j0,46} mA = 8,93e^{-j0,46} V \quad (10)$$

$$V_C = \frac{1}{j\omega C} I = \frac{8,93e^{-j0,46} mA}{j10^6 \frac{rad}{s} 2 \cdot 10^{-9} F} = 0,5 \cdot 10^3 e^{-j\frac{\pi}{2}} \Omega 8,93e^{-j0,46} mA = 4,46e^{-j2,03} V \quad (11)$$

$$V_L = j\omega L I = j10^3 \Omega 8,93e^{-j0,46} mA = 10^3 e^{j\frac{\pi}{2}} \Omega 8,93e^{-j0,46} mA = 8,93e^{j1,11} V \quad (12)$$

- Añadimos la dependencia temporal:

$$v_R(t) = 8,93e^{-j0,46} e^{j10^6 \frac{rad}{s} t} V = 8,93e^{j(10^6 \frac{rad}{s} t - 0,46)} V \quad (13)$$

$$v_C(t) = 4,46e^{-j2,03} e^{j10^6 \frac{rad}{s} t} V = 4,46e^{j(10^6 \frac{rad}{s} t - 2,03)} V \quad (14)$$

$$v_L(t) = 8,93e^{j1,11} e^{j10^6 \frac{rad}{s} t} V = 8,93e^{j(10^6 \frac{rad}{s} t + 1,11)} V \quad (15)$$

- Nos quedamos sólo con la parte real:

$$v_R(t) = 8,93 \cos \left( 10^6 \frac{rad}{s} t - 0,46 \right) V \quad (16)$$

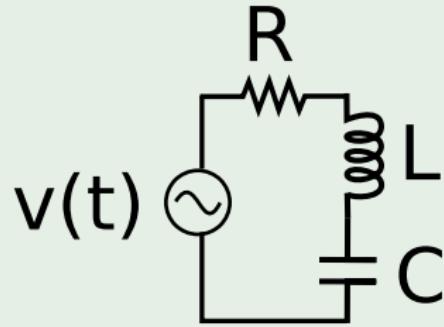
$$v_C(t) = 4,46 \cos \left( 10^6 \frac{rad}{s} t - 2,03 \right) V \quad (17)$$

$$v_L(t) = 8,93 \cos \left( 10^6 \frac{rad}{s} t + 1,11 \right) V \quad (18)$$

# Ejemplo 1: RCL serie

¿Qué ocurriría para otro valor de  $\omega$ ?

## Ejemplo 1



- $R=1\text{k}\Omega$
- $L=1\text{mH}$
- $C=2\text{nF}$
- $v(t)=10\cos(\omega t)\text{V}$

# Ejemplo 1: RCL serie

Se sigue cumpliendo:

$$10V = IZ_R + IZ_L + IZ_C \quad (19)$$

$$10V = IR + Ij\omega L + I\frac{1}{j\omega C} \quad (20)$$

$$10V = I \left( 1k\Omega + j\omega 1mH + \frac{1}{j\omega 2 \cdot 10^{-9}F} \right) \quad (21)$$

$$Z_{eq} = \left( 1k\Omega + j \left( \omega 1mH - \frac{1}{\omega 2 \cdot 10^{-9}F} \right) \right) \quad (22)$$

$$= \sqrt{(1k\Omega)^2 + \left( \omega 1mH - \frac{1}{\omega 2 \cdot 10^{-9}F} \right)^2} e^{j \arctan \left( \frac{\omega 1mH - \frac{1}{\omega 2 \cdot 10^{-9}F}}{1k\Omega} \right)}$$

# Ejemplo 1: RCL serie

- El fasor que representa a la intensidad es un número complejo:

$$I = \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}\right)^2}} e^{j \arctan\left(\frac{\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)} \quad (23)$$

$$I = \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}\right)^2}} e^{-j \arctan\left(\frac{\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)} \quad (24)$$

- Añadimos la dependencia temporal :

$$i(t) = I e^{j\omega t} = \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}\right)^2}} e^{j \left( \omega t - \arctan\left(\frac{\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right) \right)} \quad (25)$$

- Nos quedamos sólo con la parte real:

$$i(t) = \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)\right) \quad (26)$$

# Ejemplo 1: RCL serie

- Usamos la ley de Ohm para calcular la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia. Trabajo con fasores.

$$V_R = Z_R I = 1k\Omega \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}\right)^2}} e^{-j \arctan\left(\frac{\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)} \quad (27)$$

- Añadimos la dependencia temporal

$$v_R(t) = 1k\Omega \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}\right)^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)\right)} \quad (28)$$

- Nos quedamos sólo con la parte real:

$$v_R(t) = 1k\Omega \frac{10V}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9}F}}{1k\Omega}\right)\right) \quad (29)$$

# Ejemplo 1: RCL serie

- Usamos la ley de Ohm generalizada para calcular la diferencia de potencial entre los extremos del condensador. Trabajo con fasores.

$$V_C = Z_C I = \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega_2 10^{-9} F} \frac{10Ve}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}\right)^2}} \quad (30)$$

$$= \frac{10Ve}{\omega_2 10^{-9} F \sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}\right)^2}} \quad (31)$$

- Añado la dependencia temporal  $v_C(t) = \frac{10Ve}{\omega_2 10^{-9} F \sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}\right)^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}}{1k\Omega}\right) - \frac{\pi}{2}\right)}$

- Me quedo sólo con la parte real:

$$v_C(t) = \frac{10V}{\omega_2 10^{-9} F \sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega_1 mH - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}}{1k\Omega}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

# Ejemplo 1: RCL serie

- Uso la ley de Ohm generalizada para calcular la diferencia de potencial entre los extremos de la bobina. Trabajo con fasores.

$$V_L = Z_L I = \omega_1 m H e^{j \frac{\pi}{2}} \frac{10V e^{-j \arctan\left(\frac{\omega_1 m H - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}}{1k\Omega}\right)}}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 m H - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}\right)^2}} \quad (32)$$

$$= \frac{10V \omega_1 m H e^{-j \left(\arctan\left(\frac{\omega_1 m H - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}}{1k\Omega}\right) - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 m H - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}\right)^2}} \quad (33)$$

- Añado la dependencia temporal:

$$v_L(t) = \frac{10V \omega_1 m H e^{j \left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega_1 m H - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}}{1k\Omega}\right) + \frac{\pi}{2}\right)}}{\omega_2 10^{-9} F \sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 m H - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}\right)^2}}$$

- Me quedo sólo con la parte real:

$$v_L(t) = \frac{10V}{\omega_2 10^{-9} F \sqrt{(1k\Omega)^2 + \left(\omega_1 m H - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega_1 m H - \frac{1}{\omega_2 10^{-9} F}}{1k\Omega}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

- 1 Introducción
- 2 Herramientas Matemáticas
- 3 Corriente Alterna
- 4 Impedancia
- 5 Potencia
- 6 Principio de Superposición en CA
- 7 Teoremas de Thevenin y Norton en CA.
- 8 Función de Transferencia. Filtros.

# Potencia

Supongamos que

$$v(t) = V e^{j(\omega t + \alpha_V)}$$

$$i(t) = I e^{j(\omega t + \alpha_I)}$$

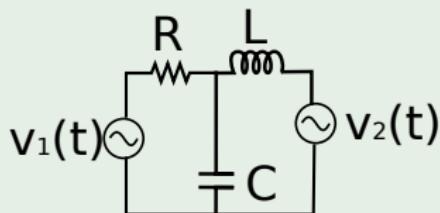
## ¿Cómo calculo la potencia?

- **No** puedo multiplicar los números complejos y quedarme con la parte real
- Procedimiento adecuado:  
 $p(t) = VI \cos(\omega t + \alpha_V) \cos(\omega t + \alpha_I) = \frac{VI}{2} [\cos(2\omega t + \alpha_V + \alpha_I) + \cos(\alpha_V - \alpha_I)]$
- La potencia varía con el tiempo con una **frecuencia doble** a la de las señales del circuito.
- La potencia tiene una parte independiente del tiempo que es la que da lugar al valor medio de la potencia distinto de cero.
- La potencia media disipada en una bobina o un condensador es cero.

- 1 Introducción
- 2 Herramientas Matemáticas
- 3 Corriente Alterna
- 4 Impedancia
- 5 Potencia
- 6 Principio de Superposición en CA
- 7 Teoremas de Thevenin y Norton en CA.
- 8 Función de Transferencia. Filtros.

# Principio de Superposición en circuitos con CA

## Ejemplo 3



Si:

- $v_1(t) = 10 \cos(10^6 \frac{rad}{s} t) V$
- $v_2(t) = 3 \cos(2 \cdot 10^6 \frac{rad}{s} t + \frac{\pi}{6}) V$

¿Cómo calculo las impedancias?  
¿Qué valor de  $\omega$  tengo que usar?

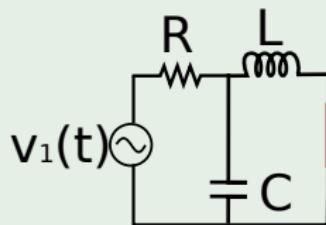
## SOLUCIÓN: Uso el Principio de superposición

- El Principio de Superposición es especialmente útil en CA para resolver circuitos en los que hay varias fuentes que operan a distintas frecuencias. En este caso, no podemos emplear ningún otro método de resolución de los aprendidos en CC.

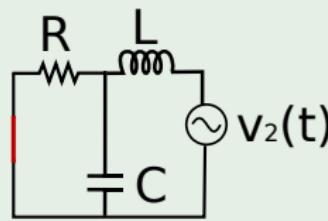
# Principio de Superposición en circuitos con CA

- La intensidad o diferencia de potencial entre los extremos de cualquier elemento del circuito del Ejemplo 3 se puede calcular como la suma de las intensidades o diferencias de potenciales que se obtienen al resolver los circuitos de los ejemplos 3a y 3b.

Ejemplo 3a



Ejemplo 3b

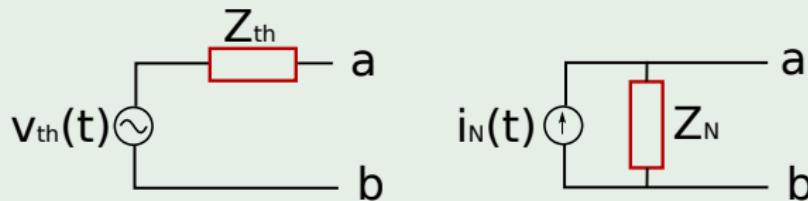


- Resuelvo el Ejemplo 3a usando  $\omega = 10^6 \frac{rad}{s}$ .
- Resuelvo el Ejemplo 3b usando  $\omega = 2 \cdot 10^6 \frac{rad}{s}$ .
- Sumo las **soluciones finales**, las que dependen del tiempo y son funciones coseno!!!

- 1 Introducción
- 2 Herramientas Matemáticas
- 3 Corriente Alterna
- 4 Impedancia
- 5 Potencia
- 6 Principio de Superposición en CA
- 7 Teoremas de Thevenin y Norton en CA.
- 8 Función de Transferencia. Filtros.

# Teoremas de Thevenin y Norton en circuitos en CA

## Equivalentes Thevenin y Norton



- La formulación de ambos teoremas es similar a la vista en CC. Ahora hablaremos de Impedancia Thevenin y de Impedancia Norton en lugar de Resistencias Thevenin y Norton.
- Las impedancias Thevenin y Norton son ahora números complejos  $\Rightarrow$  complejidad de determinación experimental.
- Las impedancias Thevenin y Norton son ahora funciones de la frecuencia.

- 1 Introducción
- 2 Herramientas Matemáticas
- 3 Corriente Alterna
- 4 Impedancia
- 5 Potencia
- 6 Principio de Superposición en CA
- 7 Teoremas de Thevenin y Norton en CA.
- 8 Función de Transferencia. Filtros.

# Función de Transferencia. Filtros

Supongamos un circuito arbitrario de manera que entre dos de sus puntos conectamos una fuente de tensión con cierta amplitud y cierta frecuencia ( $v_{entrada,\omega}$ ) y estamos interesados en ver cómo este hecho afecta la diferencia de potencial entre otros dos puntos del circuito ( $v_{salida,\omega}$ ). Observamos que:

- La frecuencia de entrada es igual a la de salida.
- Si cambio la frecuencia de entrada, cambia la amplitud de salida.
- Si cambio la frecuencia de entrada, cambio el desfase entre entrada y salida.

Matemáticamente:

$$v_{salida,\omega} = T(\omega)v_{entrada,\omega}$$

donde:

$$\left. \begin{array}{lcl} v_{salida,\omega} & = & |v_{salida,\omega}|e^{j\arg(v_{salida,\omega})} \\ v_{entrada,\omega} & = & |v_{entrada,\omega}|e^{j\arg(v_{entrada,\omega})} \\ T(\omega) & = & |T(\omega)|e^{j\arg(T(\omega))} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} |T(\omega)|e^{j\arg(T(\omega))} = \frac{|v_{salida,\omega}|}{|v_{entrada,\omega}|} \\ e^{j(\arg(v_{salida,\omega}) - \arg(v_{entrada,\omega}))} \end{array} \right.$$

# Función de Transferencia. Filtros

¿Cómo puedo estudiar la función de transferencia gráficamente?

**Uso su representación:** Diagrama de Bode

¿Cómo se pinta un Diagrama de Bode?

- Puesto que la función de transferencia es un número complejo, para representar su comportamiento en función de la frecuencia (Diagrama de Bode) necesitamos hacer **dos** dibujos: el del **argumento** y el del **módulo**.
- Para estudiar el **módulo**, representamos  $20\log|T(\omega)|$  (en decibelios) frente a la frecuencia ( $\omega$ ) usando una escala logarítmica para la frecuencia.
- Para estudiar el **argumento**, representamos su valor frente a la frecuencia usando para esta última una escala logarítmica.
- Para aprender a dibujar diagramas de Bode, usar el documento titulado *Dibujo de diagramas de Bode* disponible en moodle.
- Link muy útil para práctica 3:  
[www.ugr.es/~jmolinos/files/elaboraciondediagramasddebode.pdf](http://www.ugr.es/~jmolinos/files/elaboraciondediagramasddebode.pdf)

# Función de Transferencia. Filtros

$$|T(\omega)| e^{j \arg(T(\omega))} = \frac{|v_{salida,\omega}|}{|v_{entrada,\omega}|} e^{j (\arg(v_{salida,\omega}) - \arg(v_{entrada,\omega}))}$$

Analizamos el módulo de la Función de Transferencia

$$|T(\omega)| = \frac{|v_s|}{|v_e|} \Rightarrow |v_s| = |T(\omega)||v_e|$$

- Si  $|T(\omega)| = \frac{|v_s|}{|v_e|} < 1 \Rightarrow |v_s| < |v_e| \Rightarrow 20 \log |T(\omega)| < 0$
- Si  $|T(\omega)| = \frac{|v_s|}{|v_e|} > 1 \Rightarrow |v_s| > |v_e| \Rightarrow 20 \log |T(\omega)| > 0$
- Si  $|T(\omega)| = \frac{|v_s|}{|v_e|} = 1 \Rightarrow |v_s| = |v_e| \Rightarrow 20 \log |T(\omega)| = 0$

# Función de Transferencia. Filtros

$$|T(\omega)|e^{j\arg(T(\omega))} = \frac{|v_{salida,\omega}|}{|v_{entrada,\omega}|} e^{j(\arg(v_{salida,\omega}) - \arg(v_{entrada,\omega}))}$$

Analizamos el argumento de la Función de Transferencia

$$\arg(T(\omega)) = \arg(v_s) - \arg(v_e)$$

- Si  $\arg(T(\omega)) = \arg(v_s) - \arg(v_e) < 0 \Rightarrow \arg(v_s) < \arg(v_e)$
- Si  $\arg(T(\omega)) = \arg(v_s) - \arg(v_e) > 0 \Rightarrow \arg(v_s) > \arg(v_e)$
- Si  $\arg(T(\omega)) = \arg(v_s) - \arg(v_e) = 0 \Rightarrow \arg(v_s) = \arg(v_e)$

# Circuito RC: Filtros paso alta y paso baja

Analizamos un circuito RC y ponemos la salida en:

- ① el condensador: Filtro paso baja

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} e^{j(-\arctan(RC\omega))}$$

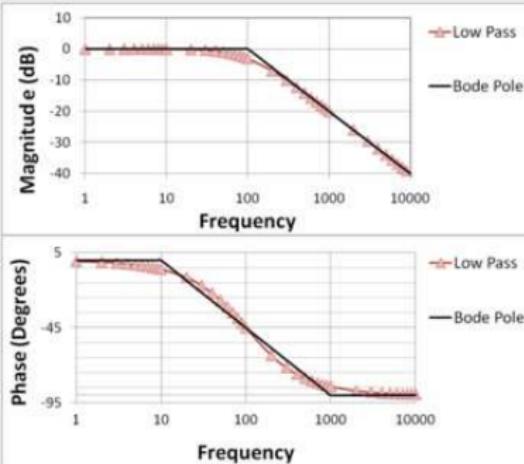
- ② la resistencia: Filtro paso alta

$$T(\omega) = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega))}$$

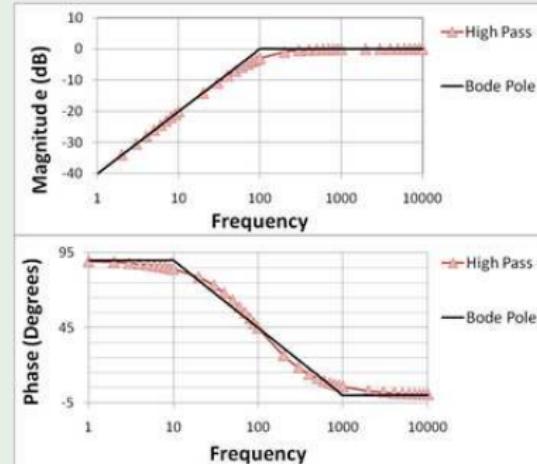
**Frecuencia de corte:** es la frecuencia a la que la salida es un 70 % de la señal de entrada. Esto se traduce en una disminución o aumento de la función de transferencia en 3 dB.

# Circuito RC: Filtros paso alta y paso baja

## Bode del Filtro paso baja



## Bode del Filtro paso alta



# Circuito RLC: Filtro paso banda

Si tomamos la salida en la resistencia:

$$T(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 CL}))}$$

Si definimos:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} R$$

La función de transferencia puede escribirse como:

$$T(\omega) = \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{4\omega^2}{\omega_0}}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{2\delta\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}))}$$

# Circuito RLC: Filtro paso banda

¿Qué ocurre a bajas frecuencias ( $\omega << \omega_0$ )?

$$|T(\omega)| = \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{2\delta\omega}{\omega_0}))}$$

- Bode en amplitud:  $20 \log |T(\omega)| = 20 \log 2\delta \frac{\omega}{\omega_0} = 20 \log \omega + \log \frac{2\delta}{\omega_0}$
- Bode en fase:  $\arg(|T(\omega)|) = \frac{\pi}{2} - \arctan(2\delta \frac{\omega}{\omega_0})$

¿Qué ocurre a altas frecuencias ( $\omega >> \omega_0$ )?

$$|T(\omega)| = 2\delta \frac{\omega_0}{\omega} e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{2\delta\omega_0}{-\omega}))}$$

- Bode en amplitud:  $20 \log |T(\omega)| = 20 \log 2\delta \frac{\omega_0}{\omega} = -20 \log \omega + \log \frac{2\delta}{\omega_0}$
- Bode en fase:  $\arg(|T(\omega)|) = \frac{\pi}{2} - \arctan(2\delta \frac{\omega_0}{-\omega})$

# Pintando Bode a mano alzada

Los tipos de funciones sencillas que nos podemos encontrar son:

- ①  $T(\omega) = K$  donde  $K$  es un valor constante (no depende de  $\omega$ ).
- ②  $T(\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0}$  donde  $\omega_0$  es un valor constante.
- ③  $T(\omega) = \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0}}$  donde  $\omega_0$  es un valor constante.
- ④  $T(\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0}$  donde  $\omega_0$  es un valor constante.
- ⑤  $T(\omega) = \frac{1}{1+j \frac{\omega}{\omega_0}}$  donde  $\omega_0$  es un valor constante.

# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = K$

La forma del diagrama de Bode de  $T(\omega) = K$  depende del signo de  $K$ . Vamos a escribir la función de transferencia  $T(\omega) = K$  en forma polar:

- $T(\omega) = |K|e^{j0}$  si  $K$  es positivo.
- $T(\omega) = |K|e^{j\pi}$  si  $K$  es negativo.

Entonces:

- ① para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log |K| dB$$

- ② para el diagrama de Bode del argumento necesito:

$$\arg T(\omega) = 0 \text{ si } K \text{ es positivo.}$$

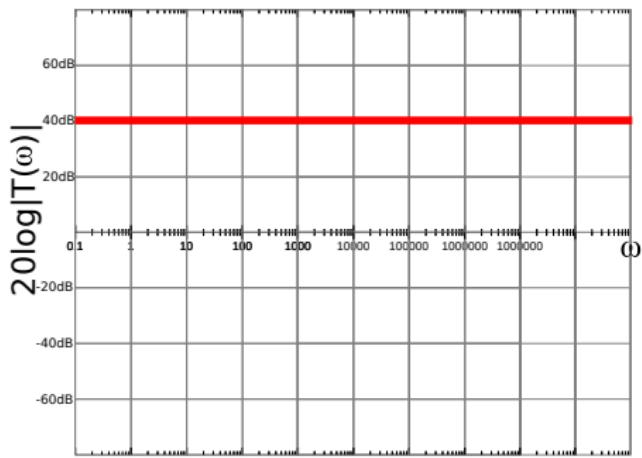
$$\arg T(\omega) = \pi \text{ si } K \text{ es negativo.}$$

**Conclusión:** El diagrama de Bode tanto del módulo como del argumento para este tipo de funciones es **constante**, no depende de  $\omega$ .

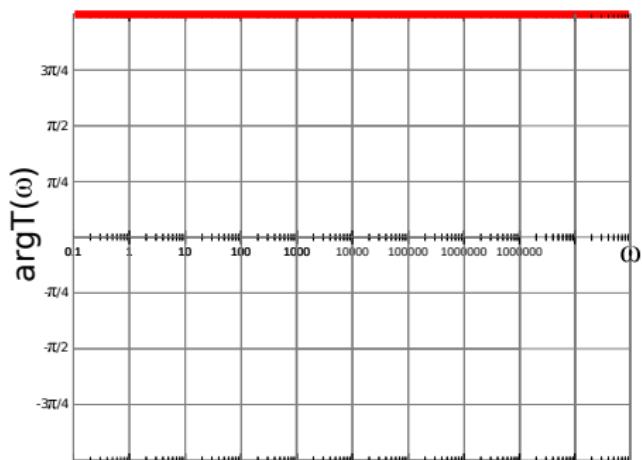
# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = K$

Ejemplo:  $T(\omega) = -100$

Módulo



Argumento



# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia  $T(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$  en forma polar. Para ello usamos que esta función es un número complejo que tiene sólo parte imaginaria.

$$T(\omega) = \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right| e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Entonces:

- ① para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right| = 20 \log \omega - 20 \log \omega_0$$

- ② para el diagrama de Bode del argumento necesito:

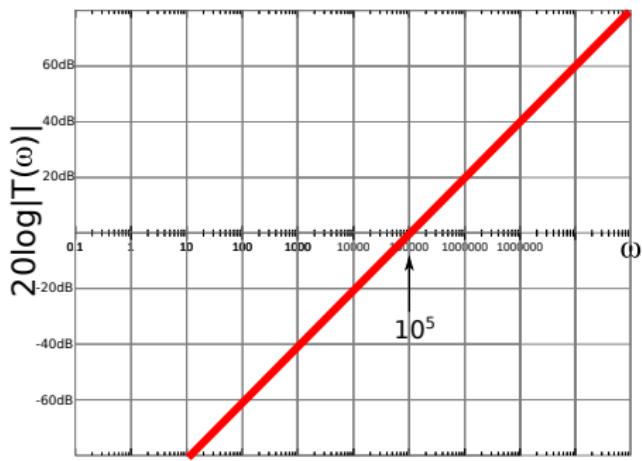
$$\arg T(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

**Conclusiones:** El diagrama de Bode tanto del módulo es una recta de pendiente 20dB que corta al eje X en  $\omega = \omega_0$ . El diagrama de Bode del argumento para este tipo de funciones es **constante**, no depende de  $\omega$ .

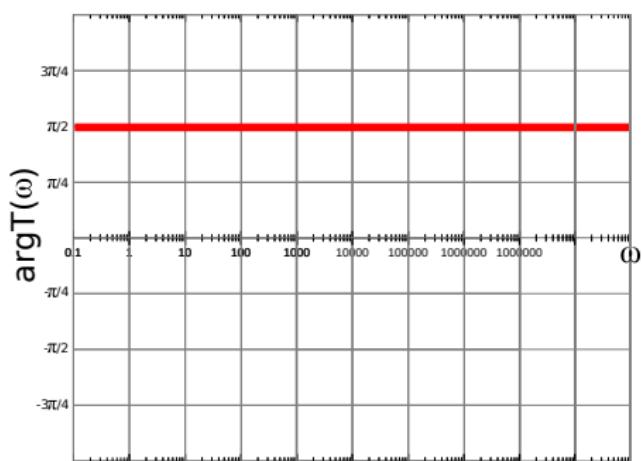
# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$

Ejemplo:  $T(\omega) = j\frac{\omega}{10^5}$

Módulo



Argumento



# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia  $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$  en forma polar. Para ello usamos que esta función es un número complejo que tiene sólo parte imaginaria.

$$T(\omega) = -j\frac{\omega_0}{\omega} = \left| \frac{\omega_0}{\omega} \right| e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Entonces:

- ① para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log \left| \frac{\omega_0}{\omega} \right| = 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega$$

- ② para el diagrama de Bode del argumento necesito:

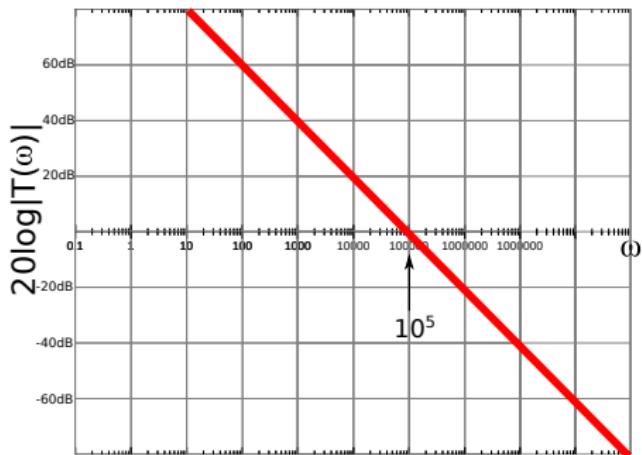
$$\arg T(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

**Conclusiones:** El diagrama de Bode tanto del módulo es una recta de pendiente -20dB que corta al eje X en  $\omega = \omega_0$ . El diagrama de Bode del argumento para este tipo de funciones es **constante**, no depende de  $\omega$ .

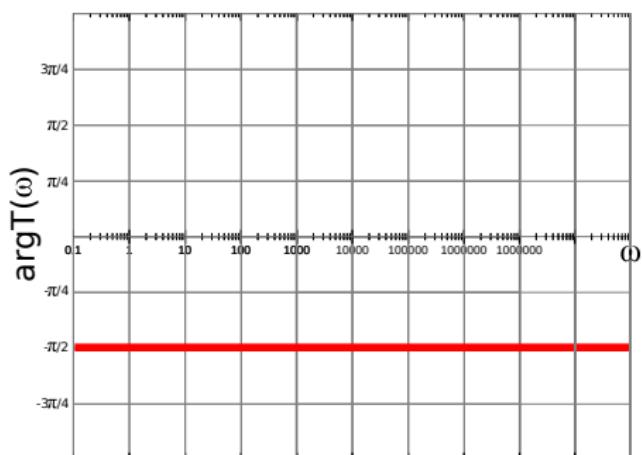
# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$

**Ejemplo:**  $T(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{10^5}}$

Módulo



Argumento



# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia  $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$  en forma polar:

$$T(\omega) = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} e^{j \arctan \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Entonces:

- ① para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

- ② para el diagrama de Bode del argumento necesito:

$$\arg T(\omega) = \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del módulo:

- Si  $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx \frac{\omega}{\omega_0}$

$$20 \log |T(\omega)| \approx 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} = 20 \log \omega - 20 \log \omega_0$$

- Si  $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx 1 \Rightarrow \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx 1$

$$20 \log |T(\omega)| \approx 20 \log 1 = 0dB$$

- Si  $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} = \sqrt{2}$

$$20 \log |T(\omega)| = 20 \log \sqrt{2} \approx 3dB$$

# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

$$\arg T(\omega) = \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del argumento:

- Si  $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{2}$

$$\arg T(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$$

- Si  $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx 0$

$$\arg T(\omega) \approx 0$$

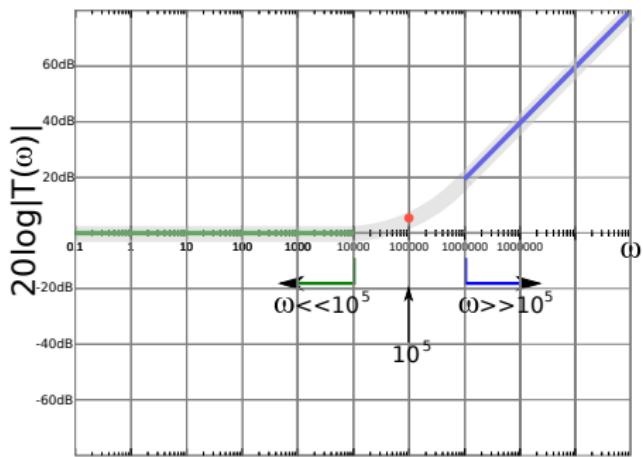
- Si  $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$$\arg T(\omega) = \frac{\pi}{4}$$

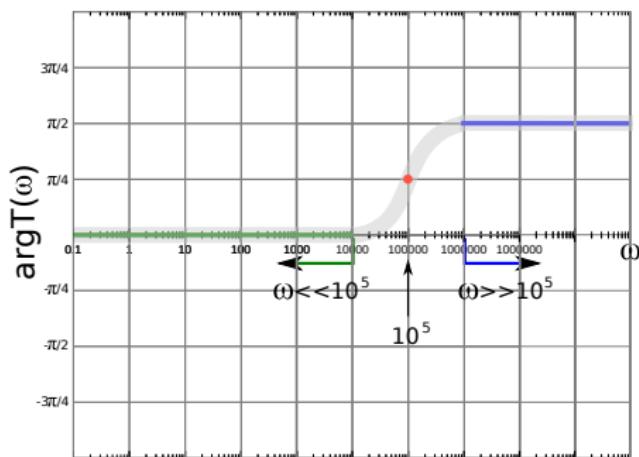
# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}$

**Ejemplo:**  $T(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{10^5}$

Módulo



Argumento



# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Comenzamos escribiendo la función de transferencia  $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$  en forma polar:

$$T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}} e^{j \arctan \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}} e^{-j \arctan \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Entonces:

- ① para el diagrama de Bode del módulo necesito:

$$20 \log |T(\omega)| = 0 - 20 \log \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

- ② para el diagrama de Bode del argumento necesito:

$$\arg T(\omega) = - \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

$$20 \log |T(\omega)| = -20 \log \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del módulo:

- Si  $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx \frac{\omega}{\omega_0}$

$$20 \log |T(\omega)| \approx -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} = -20 \log \omega + 20 \log \omega_0$$

- Si  $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx 1 \Rightarrow \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \approx 1$

$$20 \log |T(\omega)| \approx 20 \log 1 = 0 \text{dB}$$

- Si  $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} = \sqrt{2}$

$$20 \log |T(\omega)| = -20 \log \sqrt{2} \approx -3 \text{dB}$$

# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

$$\arg T(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

Analizamos ahora el comportamiento asintótico del argumento:

- Si  $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{2}$

$$\arg T(\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$$

- Si  $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \Rightarrow \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \approx 0$

$$\arg T(\omega) \approx 0$$

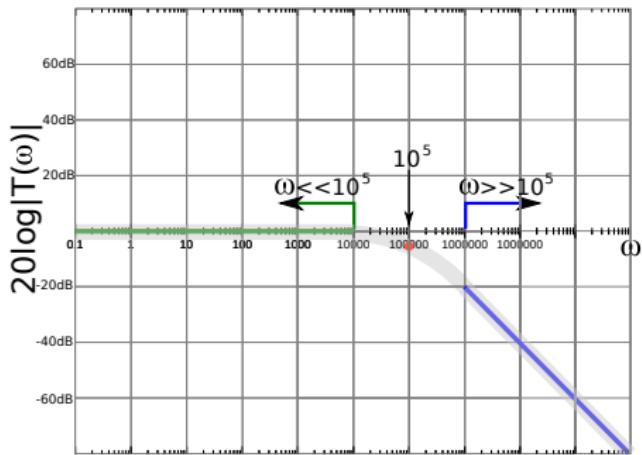
- Si  $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$$\arg T(\omega) = -\frac{\pi}{4}$$

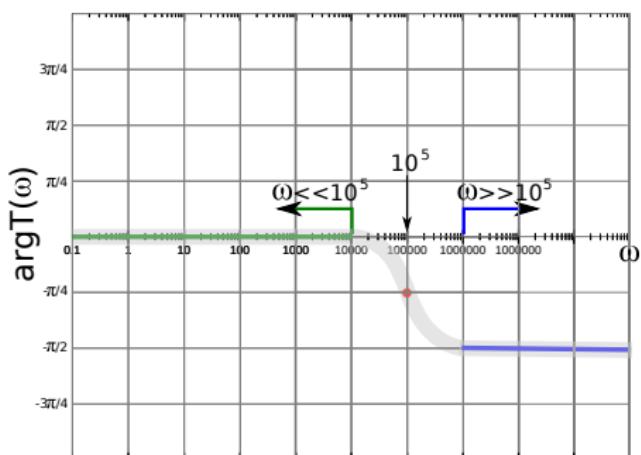
# Pintando Bode a mano alzada. $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

**Ejemplo:**  $T(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{10^5}}$

Módulo



Argumento



# Pintando Bode a mano alzada.

En general, en esta asignatura, vamos a poder escribir siempre una función de transferencia  $T(\omega)$  como el producto de una serie de funciones de transferencia sencillas ( $T_i(\omega)$ ):

$$T(\omega) = \prod_i T_i(\omega) = \prod_i \left( |T_i(\omega)| e^{j \arg T_i(\omega)} \right) = \left( \prod_i |T_i(\omega)| \right) e^{j \sum_i \arg T_i(\omega)} = |T(\omega)| e^{j \arg T(\omega)}$$

De la igualdad anterior podemos concluir que:

$$\begin{aligned} |T(\omega)| &= \prod_i |T_i(\omega)| \Rightarrow 20 \log |T(\omega)| = \sum_i (20 \log |T_i(\omega)|) \\ \arg T(\omega) &= \sum_i \arg T_i(\omega) \end{aligned}$$

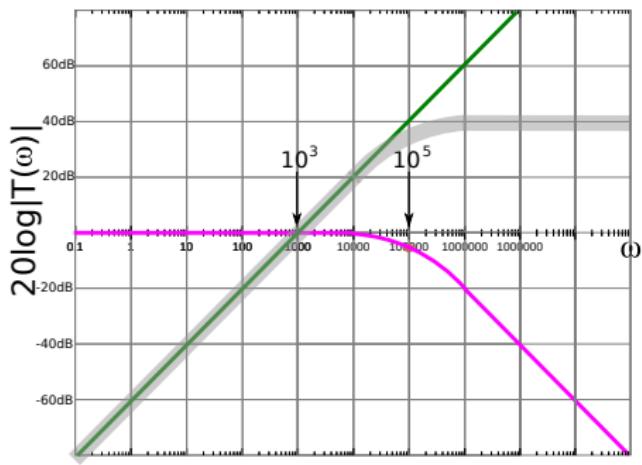
Entonces,

- si conozco el diagrama de Bode en módulo cada  $T_i(\omega)$  podré calcular el de  $T(\omega)$  simplemente sumándolos.
- si conozco el diagrama de Bode de cada  $\arg T_i(\omega)$  podré calcular el de  $\arg T(\omega)$  sumándolos.

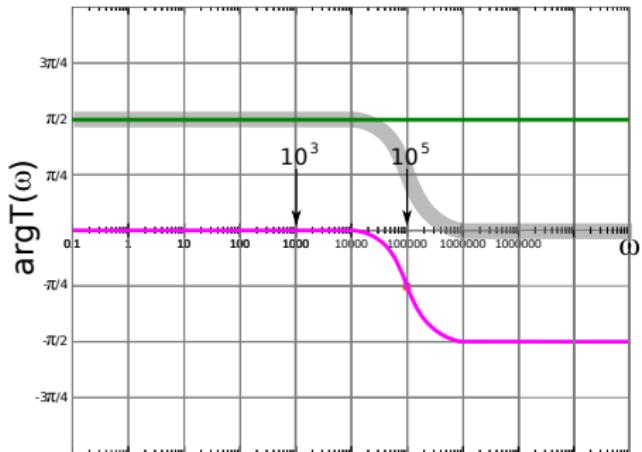
# Pintando Bode a mano alzada.

**Ejemplo:**  $T(\omega) = \frac{j \frac{\omega}{10^3}}{1 + j \frac{\omega}{10^5}} \Rightarrow T(\omega) = T_1(\omega)T_2(\omega) = (j \frac{\omega}{10^3}) \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{10^5}}$

Módulo



Argumento



# Fundamentos Físicos y Tecnológicos

## Tema 4. Dispositivos Semiconductores

Isabel M. Tienda Luna

Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores  
Universidad de Granada

[isabelt@ugr.es](mailto:isabelt@ugr.es)

Grado en Informática - Doble Grado en Informática y Matemáticas  
Curso 2015-2016

- 1** Introducción
- 2** Modelo atómico
- 3** Materiales sólidos
- 4** Semiconductores
- 5** La unión PN
- 6** El Transistor MOSFET

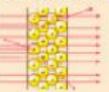
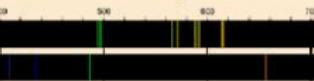
- 1 Introducción
- 2 Modelo atómico
- 3 Materiales sólidos
- 4 Semiconductores
- 5 La unión PN
- 6 El Transistor MOSFET

# Introducción

- Los dispositivos semiconductores son componentes electrónicos que hacen uso de las propiedades electrónicas de los materiales semiconductores.
- Usan la conducción eléctrica en sólidos y no en gases o la emisión termoiónica en condiciones de vacío.
- Se fabrican individualmente o formando partes de circuitos integrados en obleas.
- Como veremos, el uso de semiconductores es útil debido a que su comportamiento puede manipularse de forma sencilla añadiendo impurezas.
- Los semiconductores pueden ser excelentes sensores ya que su conductividad puede controlarse por distintos mecanismos (campos eléctricos o magnéticos, luz, calor o deformaciones mecánicas).
- Los dispositivos semiconductores son las piezas básicas de las puertas lógicas, partes fundamentales de la electrónica digital.
- Son claves en amplificadores y osciladores en electrónica analógica.
- Son elementos de traducción entre circuitos digitales y analógicos.

- 1 Introducción
- 2 **Modelo atómico**
- 3 Materiales sólidos
- 4 Semiconductores
- 5 La unión PN
- 6 El Transistor MOSFET

# Un poco de historia....

Año	Científico	Descubrimientos experimentales	Modelo atómico
1808	John Dalton	Durante el s.XVIII y principios del XIX algunos científicos habían investigado distintos aspectos de las reacciones químicas, obteniendo las llamadas <a href="#">leyes clásicas de la Química</a> .	La imagen del átomo expuesta por Dalton en su <a href="#">teoría atómica</a> , para explicar estas leyes, es la de minúsculas partículas esféricas, indivisibles e inmutables, iguales entre sí en cada elemento químico. 
1897	J.J. Thomson	Demostró que dentro de los átomos hay unas partículas diminutas, con carga eléctrica negativa, a las que se llamó <a href="#">electrones</a> .	De este descubrimiento dedujo que el átomo debía de ser una esfera de materia cargada positivamente, en cuyo interior estaban incrustados los electrones. ( <a href="#">Modelo atómico de Thomson</a> .) 
1911	E. Rutherford	Demostró que los átomos no eran macizos, como se creía, sino que están vacíos en su mayor parte y en su centro hay un diminuto <a href="#">núcleo</a> .	Dedujó que el átomo debía estar formado por una <a href="#">corteza</a> con los electrones girando alrededor de un núcleo central cargado positivamente. ( <a href="#">Modelo atómico de Rutherford</a> .) 
1913	Niels Bohr	<a href="#">Espectros atómicos</a> discontinuos originados por la radiación emitida por los átomos excitados de los elementos en estado gaseoso. 	Propuso un nuevo modelo atómico, según el cual los electrones giran alrededor del núcleo en unos niveles bien definidos. ( <a href="#">Modelo atómico de Bohr</a> ). 



# Modelo atómico actual

- Energía cinética + Energía potencial = Energía total

## Ecuación de Schroedinger dependiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r, t) + V(r)\Psi(r, t) = j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) \quad (1)$$

donde:

- $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$  es el operador energía cinética y m es la masa de la partícula.
- $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
- $V(r)$  es la energía potencial en la posición r
- $\Psi(r, t)$  es la función de onda

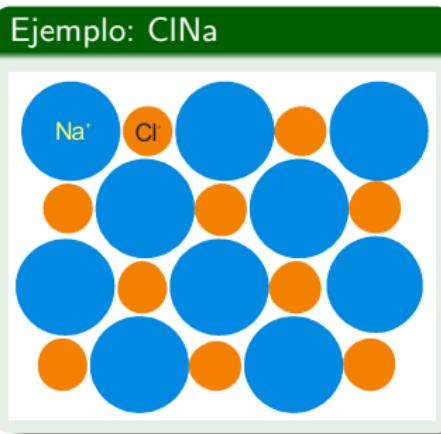
## Ecuación de Schroedinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r, t) + V(r)\Psi(r, t) = E\Psi(r, t) \quad (2)$$

- 1 Introducción
- 2 Modelo atómico
- 3 Materiales sólidos
- 4 Semiconductores
- 5 La unión PN
- 6 El Transistor MOSFET

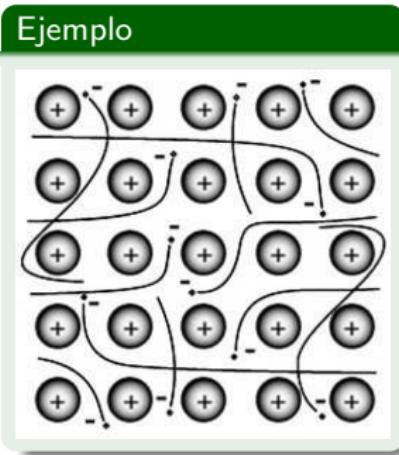
# Enlaces iónicos

- Los electrones están fuertemente ligados a los átomos ⇒ **aislantes**.



# Enlaces Metálicos

- Los electrones exteriores están desligados de los átomos, formando una nube electrónica distribuida en todo el sólido y que sirve de unión entre los núcleos atómicos.
- Los electrones exteriores no están ligados a ningún átomo en concreto, por lo que pueden moverse libremente bajo la acción de un campo eléctrico ⇒ **conductores**.

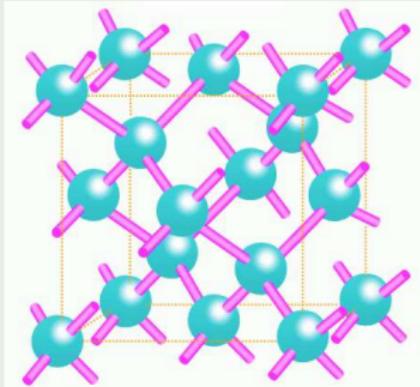


# Enlaces Covalentes

- Los electrones de la capa más externa de cada átomo se comparten con otros átomos, formando un enlace entre ellos.
- Cada par de electrones forma un enlace entre átomos.
- Por ejemplo, el silicio tiene cuatro electrones en su capa más externa  $\Rightarrow$  forma cuatro enlaces covalentes con otros tantos átomos de silicio.

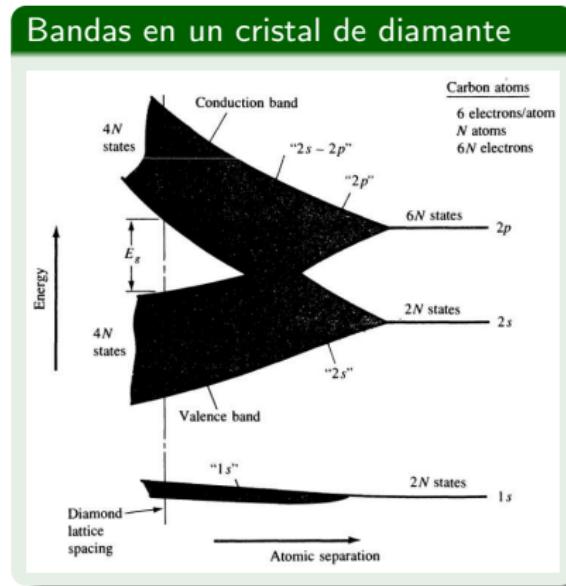
- En principio (cierto a  $T = 0 \text{ K}$ ), los electrones que forman el enlace se comparten por dos átomos y no pueden desplazarse por el cristal bajo la acción de un campo eléctrico  $\Rightarrow$  **aislante**.
- Al aumentar  $T$ , se rompen algunos enlaces liberándose electrones que pueden moverse bajo la acción de un campo eléctrico  $\Rightarrow$  **conductor**.

## Ejemplo: Silicio



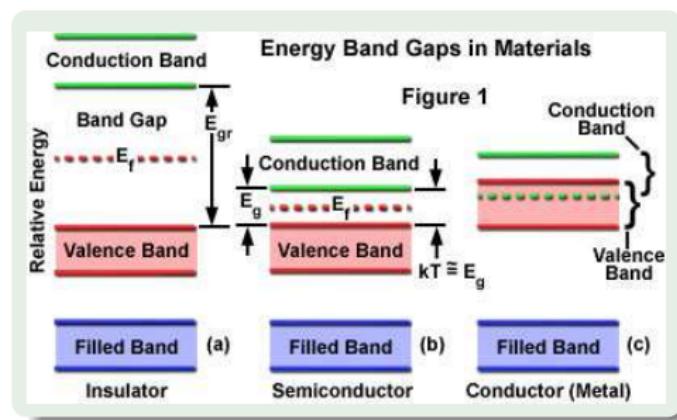
# Bandas de energía

Cuando una serie de átomos se unen para formar un sólido los niveles de energía de los átomos individuales forman bandas continuas de energía.



# Clasificación de materiales

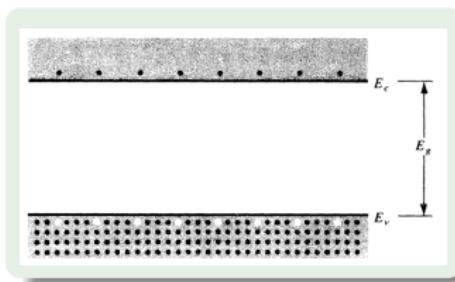
- ① Aislantes
- ② Semiconductores
- ③ Conductores



- 1 Introducción
- 2 Modelo atómico
- 3 Materiales sólidos
- 4 Semiconductores
- 5 La unión PN
- 6 El Transistor MOSFET

# Portadores: electrones y huecos

- Al aumentar T, se rompen algunos enlaces liberándose electrones que pueden moverse bajo la acción de un campo eléctrico ⇒ **Formación de par electrón-hueco.**



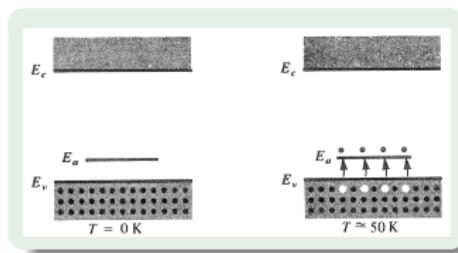
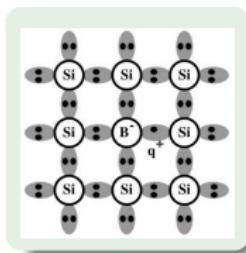
- Los huecos también participan en el proceso de conducción:  $\sigma = qn\mu_n + qp\mu_p$ . ( $\sigma$  es la conductividad,  $n$  es la concentración de electrones,  $p$  la de huecos y  $\mu_n$  y  $\mu_p$  las movilidades de electrones y huecos.)
- En general, un semiconductor tiene pocos portadores libres por eso su conductividad es baja.
- ¿Qué puedo hacer para aumentar la conductividad?** Incrementar el número de portadores.

# Tipos de Semiconductores

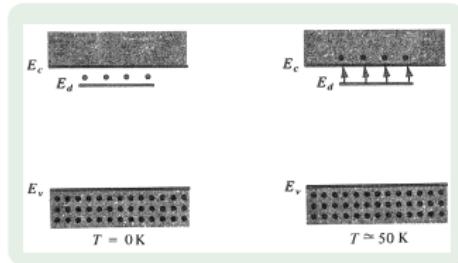
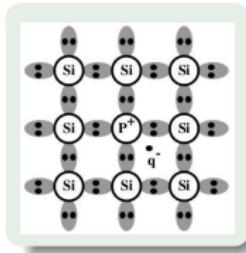
- **Intrínsecos**

- **Extrínsecos (dopados)**

- ① **Tipo P** (con impurezas aceptadoras, materiales de la columna III)

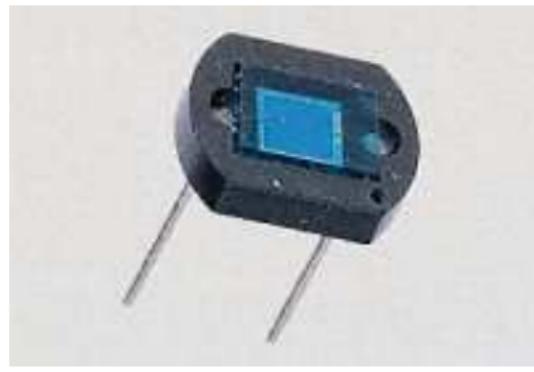


- ② **Tipo N** (con impurezas donadoras, materiales de la columna V)

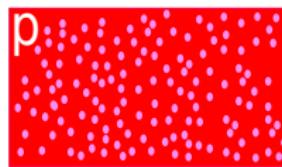


- 1 Introducción
- 2 Modelo atómico
- 3 Materiales sólidos
- 4 Semiconductores
- 5 La unión PN
- 6 El Transistor MOSFET

# Unión PN



# Unión PN

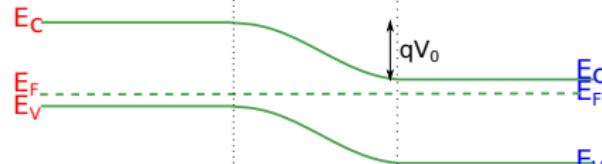
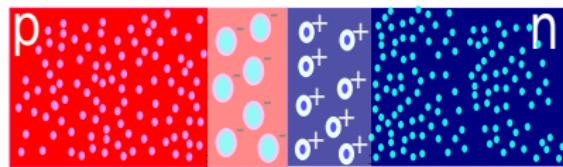
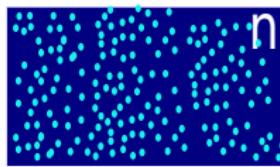


- hueco
- electrón

•  $\text{O}^-$  átomo con un hueco ocupado por un  $e^-$   
 •  $\text{O}^+$  átomo que ha perdido un  $e^-$



Estructura de Bandas

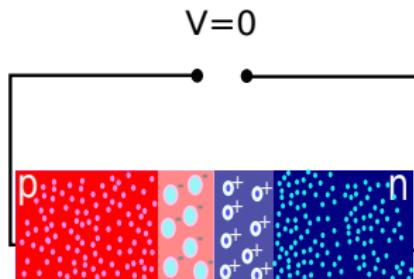


Estructura de Bandas

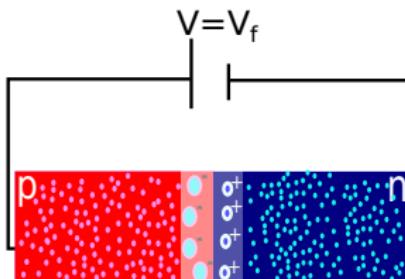
# Unión PN

¿Se puede hacer algo para modificar la barrera que ven electrones y huecos?

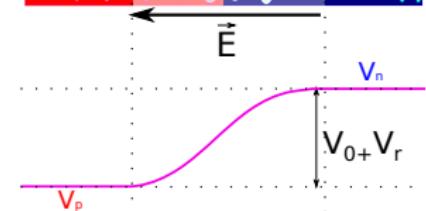
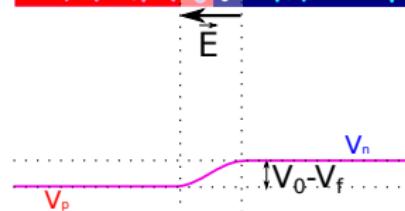
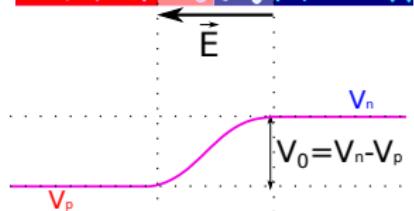
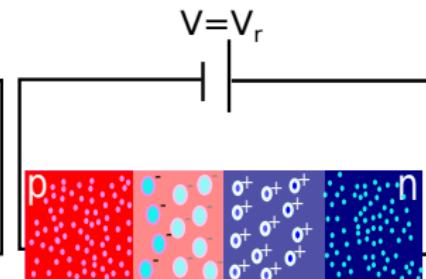
Sin polarización



Polarización directa

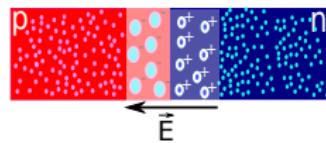
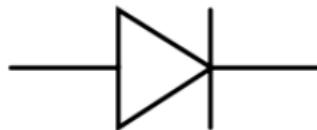


Polarización inversa



# El Diodo

- Es un dispositivo de dos terminales.
- Símbolo



- Relación voltaje/intensidad:

$$I_d = I_S \left( e^{\frac{qV_d}{k_B T}} - 1 \right) \quad (3)$$

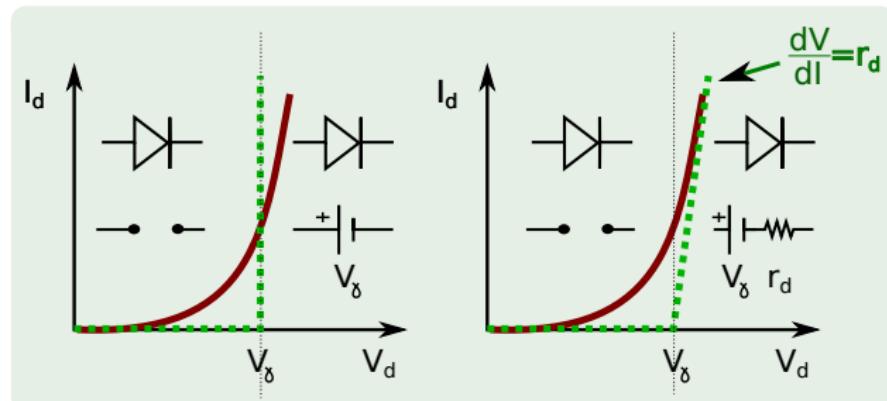
donde  $I_d$  es la intensidad que atraviesa del diodo,  $I_S$  es la corriente inversa de saturación,  $q$  es la carga del electrón,  $V_d$  la diferencia de potencial entre los extremos del diodo,  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura.

- Tipos de diodos: Zener, LEDs,..

# El Diodo

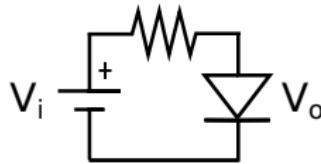
¿Cómo se trabaja en un circuito con diodos? Hay que hacer aproximaciones.

- **Modelo 1.** Suponemos que hay una tensión a partir de la cual el diodo conduce ( $V_\gamma$ ) y una vez que entra en conducción puede conducir cualquier valor de corriente. El diodo se comportan entonces como una fuente de tensión de valor  $V_\gamma$
- **Modelo 2.** Suponemos que hay una tensión a partir de la cual el diodo conduce ( $V_\gamma$ ) como en el modelo anterior. Sin embargo, consideramos que existe una resistencia asociada ( $r_d$ ), de manera que el diodo se comporta en conducción como una fuente de tensión  $V_\gamma$  en serie con esa resistencia.



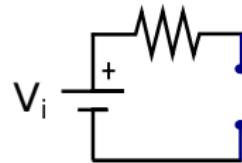
# El Diodo

**Característica de transferencia:** es la representación de la salida de un circuito en función de la entrada. (**No** confundir con función de transferencia)



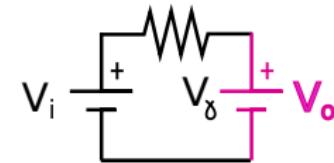
Modelo 2

Si  $V_i < V_\delta$

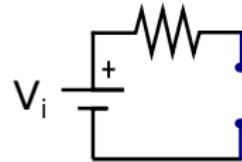


$$V_o$$

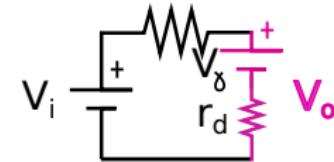
Si  $V_i > V_\delta$



$$V_\delta \quad V_o$$



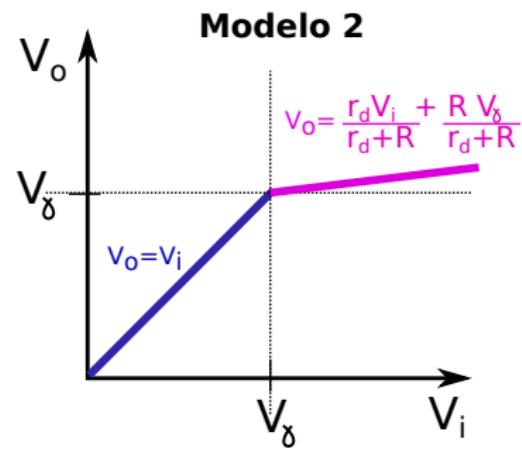
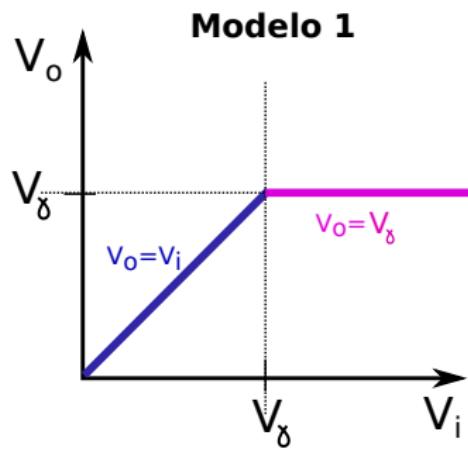
$$V_o$$



$$V_\delta \quad r_d \quad V_o$$

# El Diodo

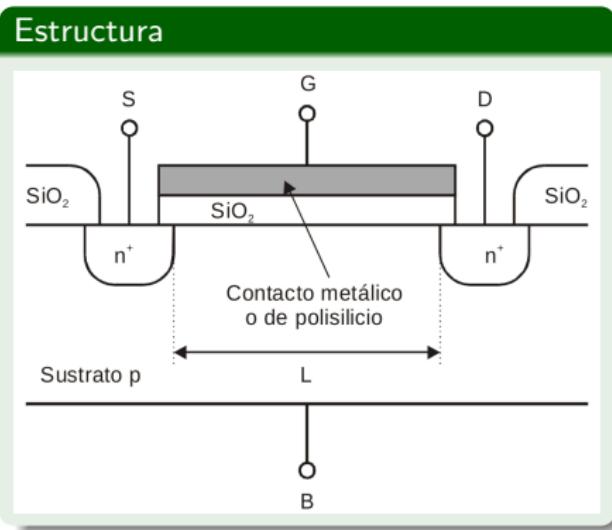
**Característica de transferencia:** es la representación de la salida de un circuito en función de la entrada. (**No** confundir con función de transferencia)



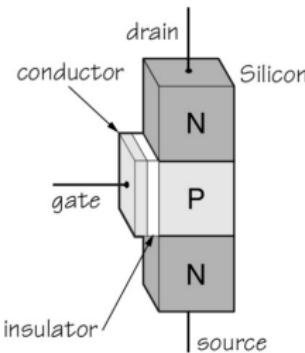
- 1 Introducción
- 2 Modelo atómico
- 3 Materiales sólidos
- 4 Semiconductores
- 5 La unión PN
- 6 El Transistor MOSFET

# El transistor de efecto campo

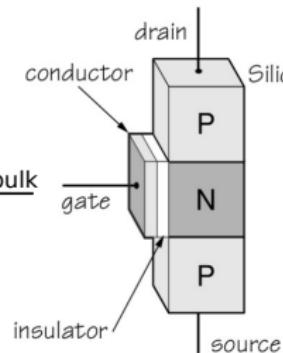
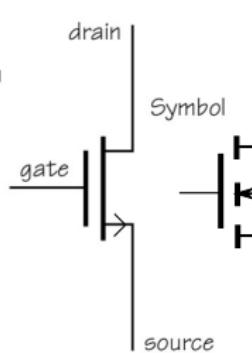
- Es un dispositivo electrónico de tres terminales llamados puerta (*G, gate*), drenador (*D, drain*) y fuente (*S, source*).
- La corriente fluye entre la fuente y el drenador y se controla con la tensión aplicada en la puerta.
- Sus aplicaciones fundamentales son:
  - ① Digitales: conmutadores.
  - ② Analógicas: amplificadores.
- El más importante es el **MOSFET** (*Metal oxide semiconductor field effect transistor*).
- Tipos:
  - n-MOSFET
  - p-MOSFET



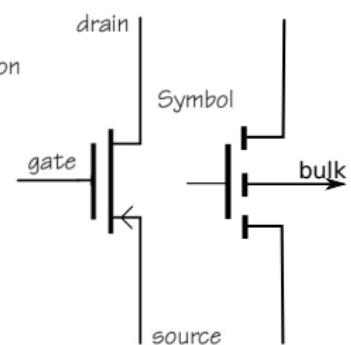
# Tipos de MOSFET



(a) NMOS Field-Effect Transistor

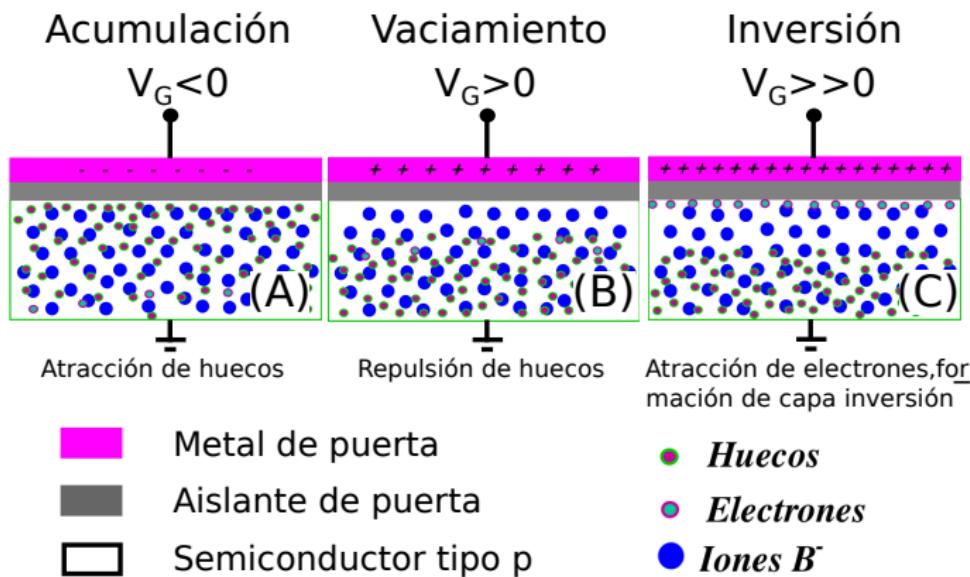


(b) PMOS Field-Effect Transistor



# Flujo de portadores en el MOSFET

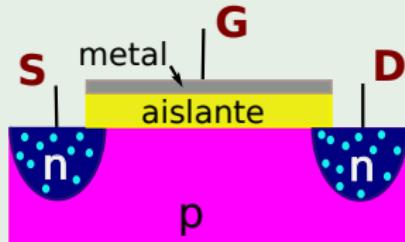
- La unión Metal-Aislante-Semiconductor (MIS) se comporta como un condensador:



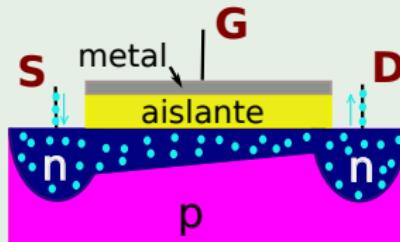
# Modos de funcionamiento del n-MOSFET

- Para caracterizar el comportamiento del dispositivo definimos una *tensión umbral* ( $V_T$  es la diferencia de potencial entre puerta y sustrato a la que comienza a formarse el canal).
- Distinguimos las siguientes regiones de comportamiento en función de la polarización drenador-fuente:
  - $V_G - V_S = V_{GS} < V_T$ . No hay canal.
  - $V_{GS} > V_T$  y  $V_{DS} < (V_{GS} - V_T)$ . Hay canal en toda la zona entre D y S.
  - $V_{GS} > V_T$  y  $V_{DS} > (V_{GS} - V_T)$ . Hay canal pero no ocupa toda la zona entre D y S.

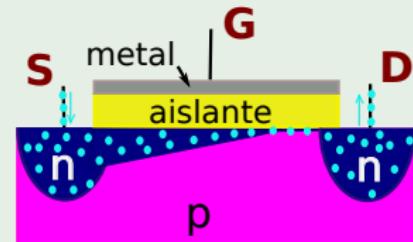
## CORTE



## LINEAL

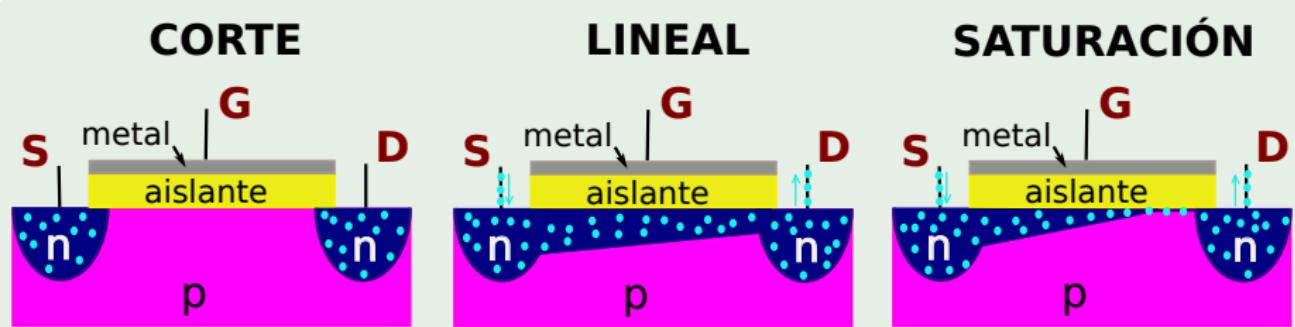


## SATURACIÓN



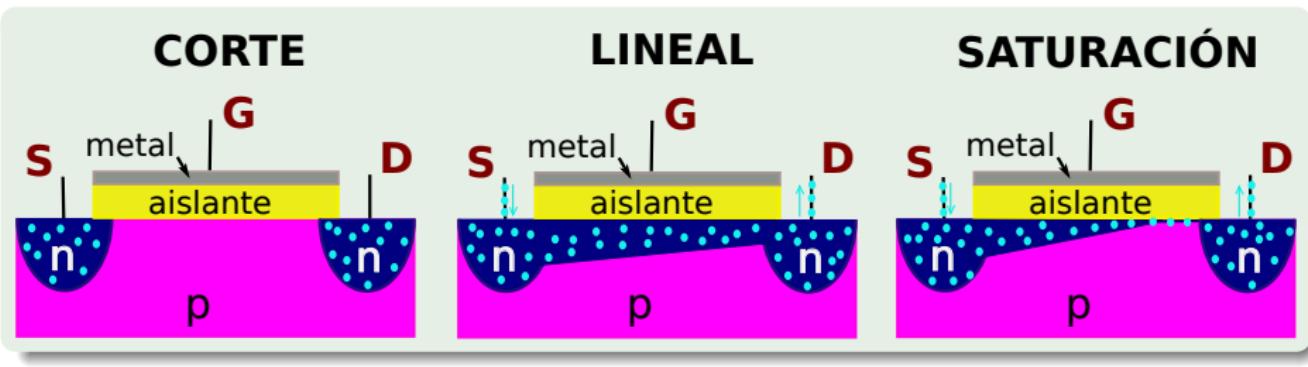
# Modos de funcionamiento del n-MOSFET: corte

- **Objetivo:** que los electrones circulen desde S a D  $\Rightarrow V_D > V_S$ .
- En **corte**:  $V_G - V_S = V_{GS} < V_T$ .
- Si  $V_G - V_S = V_{GS} < V_T \Rightarrow$  No hay capa de inversión en S.
- Si  $V_G - V_S = V_{GS} < V_T \Rightarrow$  Como  $V_D > V_S \Rightarrow V_G - V_D = V_{GD} < V_T \Rightarrow$  No hay capa de inversión en D.
- Como no hay capa de inversión ni en S ni en D, no hay canal entre ellos.



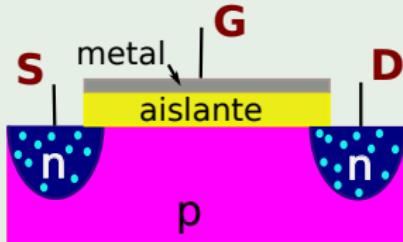
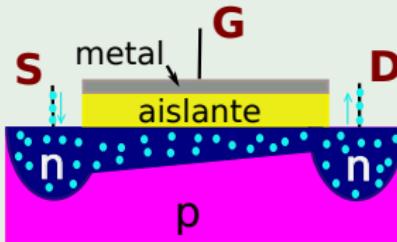
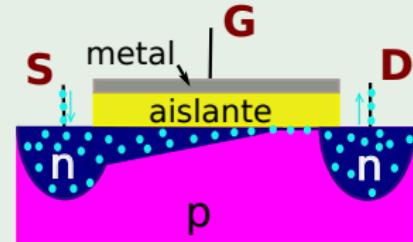
# Modos de funcionamiento del n-MOSFET: lineal

- **Objetivo:** que los electrones circulen desde S a D  $\Rightarrow V_D > V_S$ .
- En **lineal**:  $V_{GS} > V_T$  y  $V_{DS} < (V_{GS} - V_T)$ .
- Si  $V_G - V_S = V_{GS} > V_T \Rightarrow$  Hay capa de inversion en S.
- Si  $V_D - V_S < (V_G - V_S - V_T) \Rightarrow V_T < V_G - V_D = V_{GD} \Rightarrow$  Hay capa de inversion en D.
- Como hay capa de inversión en S y en D, hay canal entre ellos y los electrones van desde S a D.



# Modos de funcionamiento del n-MOSFET: saturación

- **Objetivo:** que los electrones circulen desde S a D  $\Rightarrow V_D > V_S$ .
- En **saturación**:  $V_{GS} > V_T$  y  $V_{DS} > (V_{GS} - V_T)$ .
- Si  $V_G - V_S = V_{GS} > V_T \Rightarrow$  Hay capa de inversión en S.
- Si  $V_D - V_S > (V_G - V_S - V_T) \Rightarrow V_T > V_G - V_D = V_{GD} \Rightarrow$  No hay capa de inversión en D.
- La capa de inversión que hay en S se hace cada vez más estrecha al acercamos a D. A pesar de que el canal no ocupa toda la zona entre S y D, los electrones van de S a D.

**CORTE****LINEAL****SATURACIÓN**

# Modos de funcionamiento del n-MOSFET

## ① Región de Corte:

- Ocurre si  $V_{GS} \leq V_T$
- El transistor está OFF porque no hay canal.
- No hay conducción entre drenador y fuente ( $I_D = 0$ ).
- $I_G = 0$ .
- Corriente de fuga.

## ② Región lineal, óhmica o triodo:

- Ocurre si  $V_{GS} > V_T$  y  $V_{DS} < (V_{GS} - V_T)$ .
- El transistor está ON.
- $I_G = 0$ .
- Hay conducción entre drenador y fuente:

$$I_D = \frac{k}{2} [2(V_{GS} - V_T) V_{DS} - V_{DS}^2] \quad (4)$$

**Nota:**  $k$  es la **transconductancia** de valor  $k = \mu C_{ox} \frac{W}{L}$  donde  $\mu$  es la movilidad de los portadores,  $C_{ox}$  la capacidad del óxido de puerta y  $W$  y  $L$  son la anchura y longitud del canal respectivamente.

# Modos de funcionamiento del n-MOSFET

## ① Región de Corte:

- Ocurre si  $V_{GS} \leq V_T$
- El transistor está OFF porque no hay canal.
- No hay conducción entre drenador y fuente ( $I_D = 0$ ).
- $I_G = 0$ .
- Corriente de fuga.

## ② Región lineal, óhmica o triodo:

- Ocurre si  $V_{GS} > V_T$  y  $V_{DS} < (V_{GS} - V_T)$ .
- El transistor está ON.
- $I_G = 0$ .
- Hay conducción entre drenador y fuente:

$$I_D = \frac{k}{2} [2(V_{GS} - V_T) V_{DS} - V_{DS}^2] \quad (5)$$

**Nota:**  $k$  es la **transconductancia** de valor  $k = \mu C_{ox} \frac{W}{L}$  donde  $\mu$  es la movilidad de los portadores,  $C_{ox}$  la capacidad del óxido de puerta y  $W$  y  $L$  son la anchura y longitud del canal respectivamente.

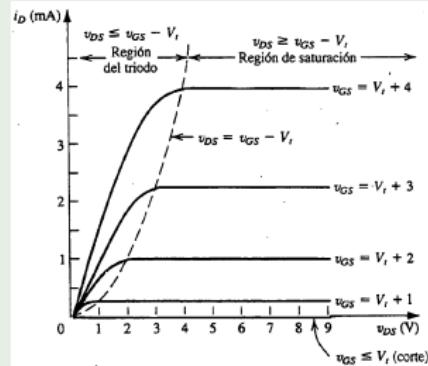
# Modos de funcionamiento del n-MOSFET

## ③ Región de saturación:

- Ocurre si  $V_{GS} > V_T$  y  $V_{DS} > (V_{GS} - V_T)$ .
- El transistor está ON.
- $I_G = 0$ .
- Hay conducción entre drenador y fuente:

$$I_D = \frac{k}{2} (V_{GS} - V_T)^2 \quad (6)$$

Curva I-V<sub>DS</sub> nMOSFET



# Modos de funcionamiento del p-MOSFET

## ① Región de Corte:

- Ocurre si  $V_{GS} \geq V_T$  ( $|V_{GS}| \leq |V_T|$ )
- El transistor está OFF porque no hay canal.
- $I_G = 0$ .
- No hay conducción entre drenador y fuente ( $I_D = 0$ ).

## ② Región lineal u óhmica:

- Ocurre si  $V_{GS} < V_T$  ( $|V_{GS}| > |V_T|$ ) y  $V_{SD} < (V_{SG} - |V_T|)$  ( $|V_{DS}| < (|V_{GS}| - |V_T|)$ ).
- El transistor está ON.
- $I_G = 0$ .
- Hay conducción entre drenador y fuente:

$$I_D = \frac{k}{2} [2(V_{SG} - |V_T|) V_{SD} - V_{SD}^2] \quad (7)$$

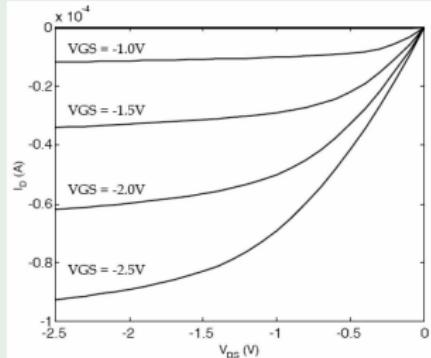
# Modos de funcionamiento del p-MOSFET

## ③ Región de saturación:

- Ocurre si  $V_{GS} < V_T$  ( $|V_{GS}| > |V_T|$ ) y  $V_{SD} > (V_{SG} - |V_T|)$  ( $|V_{DS}| > (|V_{GS}| - |V_T|)$ ).
- El transistor está ON.
- $I_G = 0$ .
- Hay conducción entre drenador y fuente:

$$I_D = \frac{k}{2} (V_{SG} - |V_T|)^2 \quad (8)$$

Curva I-V pMOSFET

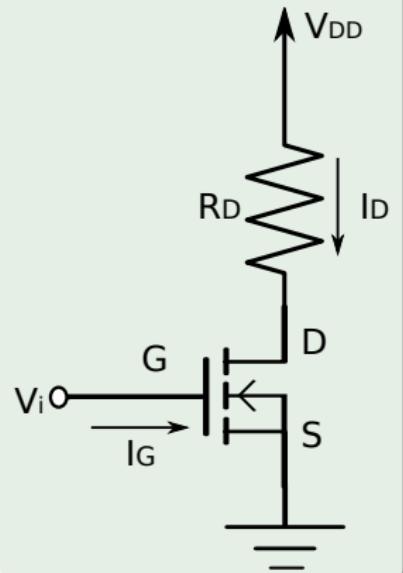


# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. I

Determinar la región de operación del transistor y calcular  $I_D$  para el circuito del Ejemplo 4

- $V_{DD} = 15V$
- $R_D = 1k\Omega$
- $V_i = 15V$
- $V_T = 2V$
- $k = 40 \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2}$

## Ejemplo 4

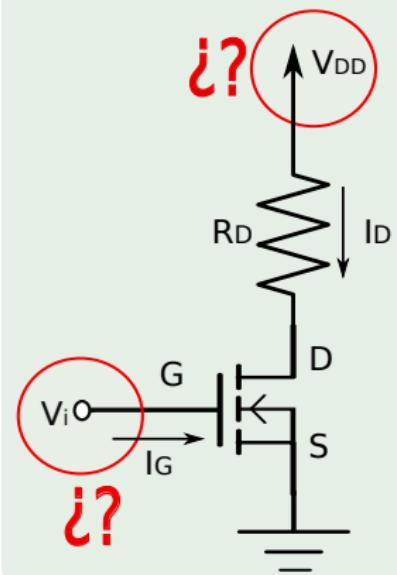


# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. I

Determinar la región de operación del transistor y calcular  $I_D$  para el circuito del Ejemplo 4

- $V_{DD} = 15V$
- $R_D = 1k\Omega$
- $V_i = 15V$
- $V_T = 2V$
- $k = 40 \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2}$

## Ejemplo 4

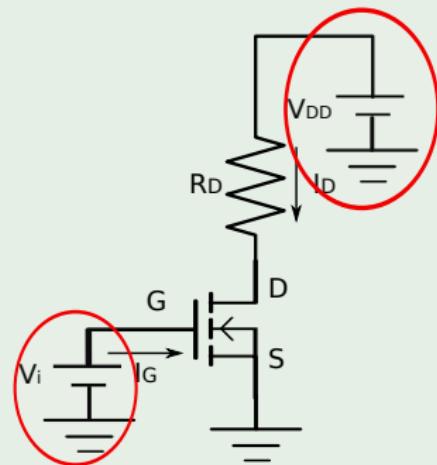


# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. I

Determinar la región de operación del transistor y calcular  $I_D$  para el circuito del Ejemplo 4

- $V_{DD} = 15V$
- $R_D = 1k\Omega$
- $V_i = 15V$
- $V_T = 2V$
- $k = 40 \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2}$

## Ejemplo 4

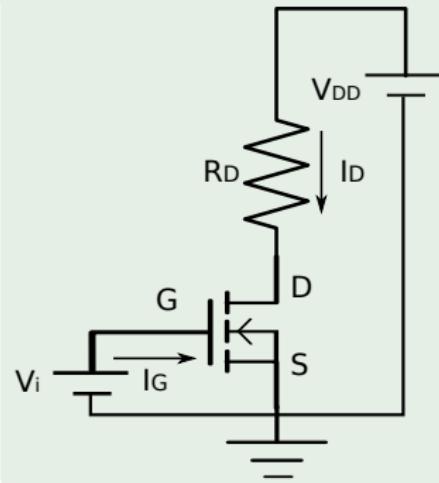


## Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs.

Determinar la región de operación del transistor y calcular  $I_D$  para el circuito del Ejemplo 4

- $V_{DD} = 15V$
  - $R_D = 1k\Omega$
  - $V_i = 15V$
  - $V_T = 2V$
  - $k = 40 \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2}$

### Ejemplo 4



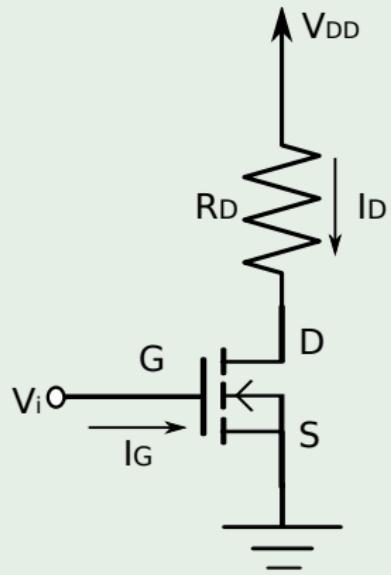
# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs.

- 1 Comenzamos calculando  $V_{GS}$  para saber si el transistor está conduciendo o no.

$$V_{GS} = V_G - V_S \Rightarrow \text{necesitamos } V_G \text{ y } V_S$$

- ¿Cuánto vale  $V_G$ ? A la puerta sólo tenemos conectada una fuente, de manera que  $V_G = V_i = 15V$ .
  - ¿Cuánto vale  $V_S$ ? La fuente está conectada a tierra, por tanto  $V_S = 0V$ .
  - Entonces
- $V_{GS} - V_T = 15V - 2V = 13V > 0 \Rightarrow$  nMOSFET ON.
- ¿Lineal o Saturación?

## Ejemplo 4



# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. I

② Suponemos **saturación**.

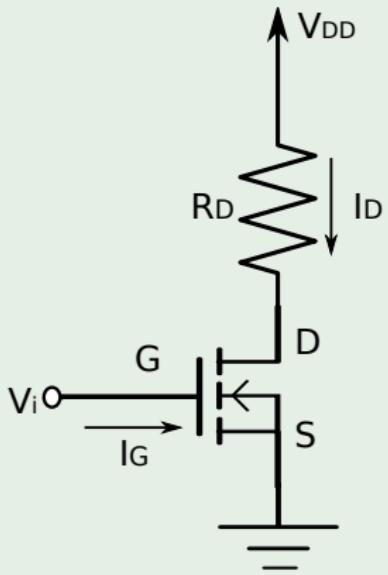
- Resolvemos usando la ecuación para la intensidad  $I_D$  en saturación:

$$I_D = \frac{k}{2} (V_{GS} - V_T)^2$$

$$I_D = \frac{40 \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2}}{2} (15V - 2V)^2$$

$$I_D = 3,38 \cdot 10^{-3} A$$

## Ejemplo 4



# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. I

## ③ Compruebo si mi suposición es correcta.

- Para comprobar si la suposición que hice es correcta tengo que ver si se cumple la condición de saturación:

$$V_{DS} > (V_{GS} - V_T) = 15V - 2V = 13V$$

- ¿Cuánto vale  $V_{DS}$ ?

$V_{DS} = V_D - V_S \Rightarrow$  necesito saber  $V_D$ . Para calcular  $V_D$  aplico la ley de Ohm a la resistencia  $R_D$ :

$$V_{DD} - V_D = I_D R_D$$

$$V_D = V_{DD} - I_D R_D$$

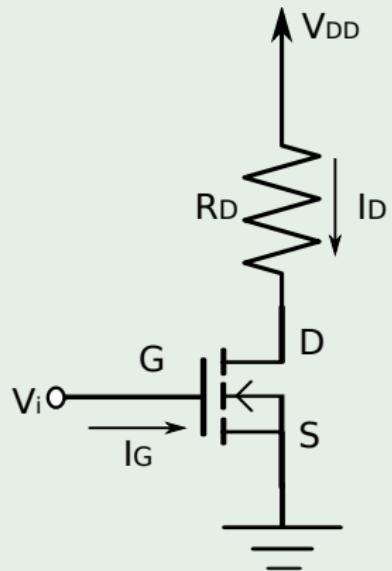
$$V_D = 15V - 3,38 \cdot 10^{-3} A \cdot 1k\Omega$$

$$V_D = 11,62V$$

$$V_{DS} = V_D - V_S = 11,62V - 0V = 11,62V$$

- Como  $V_{DS} = 11,62V < (V_{GS} - V_T) = 13V$   
**SUPOSICIÓN INCORRECTA** ☹

## Ejemplo 4



# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. I

## 4 Supongo lineal.

- Resolvemos utilizando la ecuación para  $I_D$  en la región lineal:

$$I_D = \frac{k}{2} [2(V_{GS} - V_T) V_{DS} - V_{DS}^2]$$

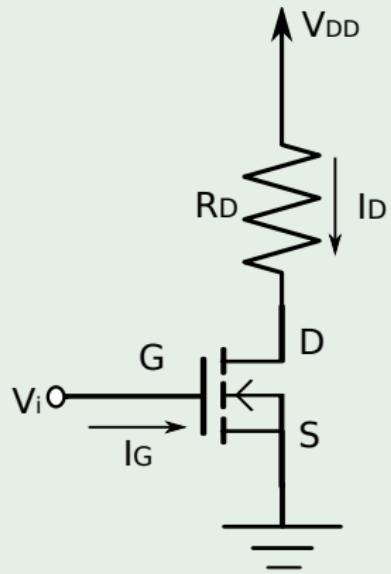
$$I_D = \frac{40 \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2}}{2} [2(15V - 2V) V_{DS} - V_{DS}^2]$$

- Para calcular  $I_D$  necesito  $V_{DS}$
- ¿Cuánto vale  $V_{DS}$ ?  
 $V_{DS} = V_D - V_S \Rightarrow$  necesito saber  $V_D$ . Para calcular  $V_D$  aplico la ley de Ohm a la resistencia  $R_D$ :

$$V_{DD} - V_D = I_D R_D$$

$$V_D = 15V - I_D 10^3 \Omega$$

## Ejemplo 4



# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. I

## 4 Supongo lineal.

- Sustituyendo la expresión de  $I_D$  en la fórmula para  $V_D$  queda:

$$V_D = 15V - \frac{40 \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2}}{2} [2(15V - 2V)V_D - V_D^2] 10^3 \Omega$$

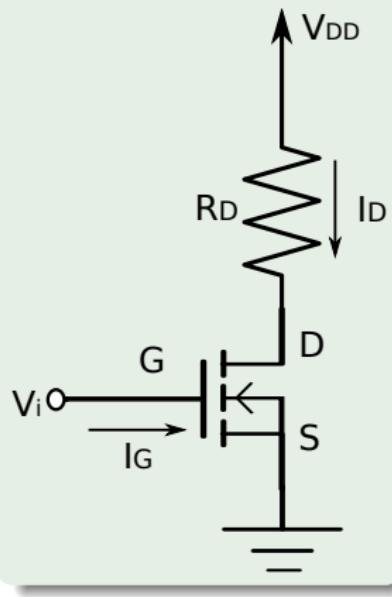
- La ecuación anterior tiene dos soluciones:

$$V_{DS1} = 64,33V$$

$$V_{DS2} = 11,68V$$

- ¿Son las dos soluciones correctas? Una solución será correcta si está de acuerdo con mi suposición. En este caso, si cumple que  $V_{DS} < V_{GS} - V_T = 13V$ . Por tanto, sólo  $V_{DS2}$  es correcta.

## Ejemplo 4

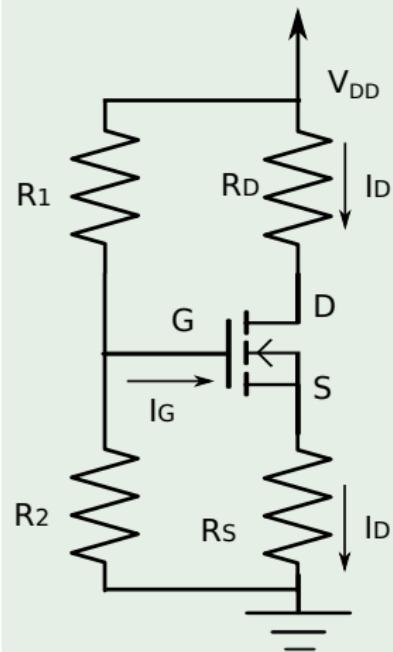


# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. II

Determinar la región de operación del transistor y calcular  $I_D$  para el circuito del Ejemplo 5

- $V_{DD} = 15V$
- $R_D = 40k\Omega$
- $R_S = 5k\Omega$
- $R_1 = 150k\Omega$
- $R_2 = 100k\Omega$
- $V_T = 2V$
- $k = 40 \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2}$

## Ejemplo 5



# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. II

- ① Comenzamos calculando  $V_G$  para saber si el MOSFET conduce o no. Para ello, tenemos en cuenta que:

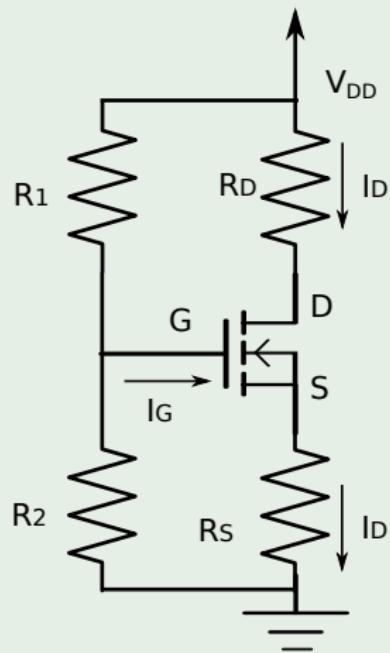
- $I_G = 0$
- La parte de la izquierda del circuito es un divisor de tensión:

$$I_1 = \frac{15V}{150k\Omega + 100k\Omega}$$

$$V_G = I_1 100k\Omega = \frac{15V}{250k\Omega} 100k\Omega = 6V$$

- Como  $V_G - V_T > 0 \Rightarrow$  nMOSFET ON
- ¿Pero no era  $V_{GS}$ ? ¿Por qué uso  $V_G$ ?
- ¿Lineal o Saturación?

## Ejemplo 5



# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. II

② Suponemos saturación:

- Ecuaciones generales:

$$V_{DD} = I_D R_D + V_{DS} + I_D R_S$$

$$V_G = V_{GS} + I_D R_S$$

- Saturación:  $I_D = \frac{k}{2} (V_{GS} - V_T)^2$

- Sustituimos:

$$15V = I_D 45k\Omega + V_{DS} \quad (9)$$

$$6V = V_{GS} + I_D 5k\Omega \quad (10)$$

$$I_D = 20 \cdot 10^{-6} \frac{A}{V^2} (V_{GS}^2 + 4 - 4V_{GS}) \quad (11)$$

- Despejando e igualando:

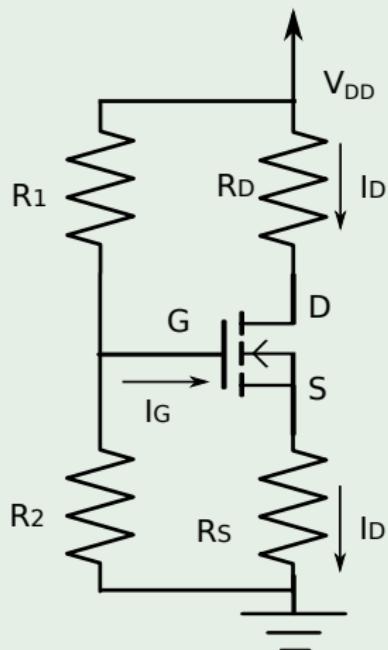
$$\frac{6 - V_{GS}}{R_S} = 20 \cdot 10^{-6} (V_{GS}^2 + 4 - 4V_{GS})$$

$$V_{GS}^2 + 6V_{GS} - 56 = 0$$

$$V_{GS1} = 5,06V \Rightarrow I_D = 0,18mA \Rightarrow V_{DS} = 6,54V$$

$$V_{GS2} < 0 \Rightarrow \text{IMPOSIBLE}$$

## Ejemplo 5



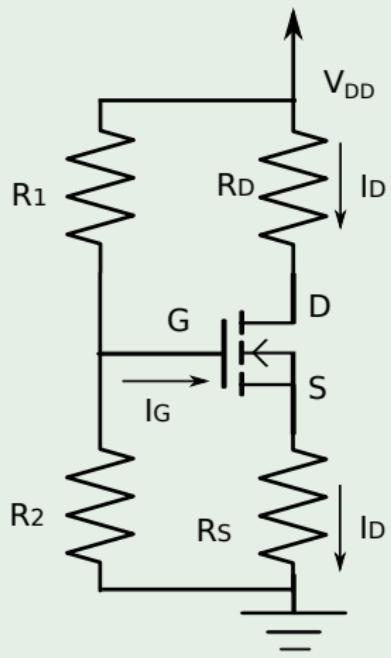
# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. II

- ③ Comprobamos que la suposición es correcta:

- $V_{DS} > V_{GS} - V_T$ ?
- $6,54V > 5,06V - 2V = 3,06V \Rightarrow$

**SUPOSICIÓN CORRECTA ☺**

Ejemplo 5

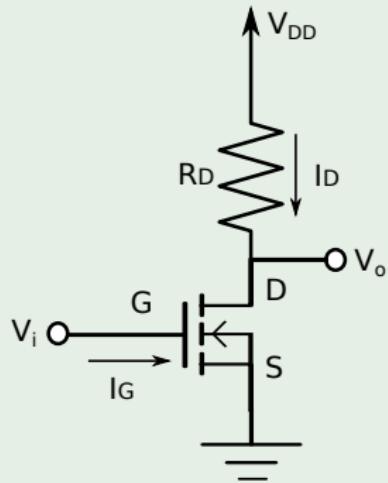


# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. III

Pintar la característica de transferencia para el circuito del Ejemplo 6

- $V_{DD} = 15V$
- $R_D = 0,1k\Omega$
- $V_T = 2V$
- $k = 40 \cdot 10^{-3} \frac{A}{V^2}$

## Ejemplo 6

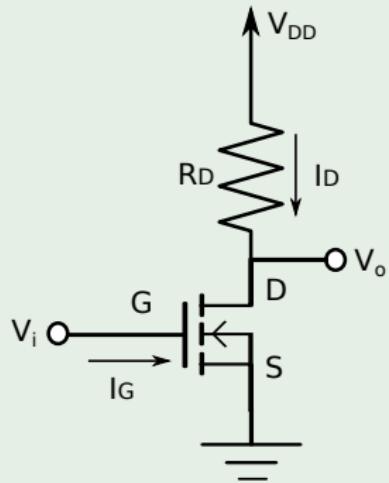


# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. III

## Ecuaciones generales

- $V_{DD} = I_D R_D + V_{DS}$
- $V_{GS} = V_i$
- $V_{DS} = V_o \Rightarrow V_{DD} = I_D R_D + V_o$

## Ejemplo 6



# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. III

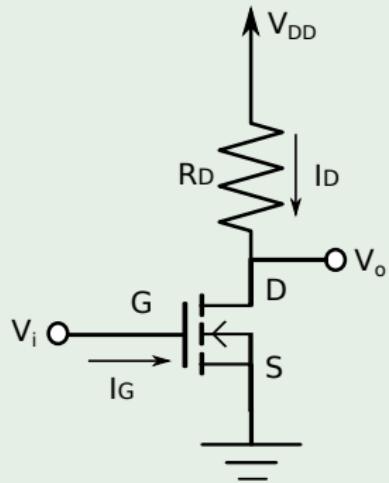
## Corte

$$V_{GS} < V_T \Rightarrow V_i < 2V$$

$$I_D = 0 \Rightarrow V_{DD} = 0 \cdot R_D + V_o$$

$$V_{DD} = V_o \Rightarrow V_o = 15V$$

## Ejemplo 6



# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. III

## Saturación

$$V_{GS} > V_T \Rightarrow V_i > 2V$$

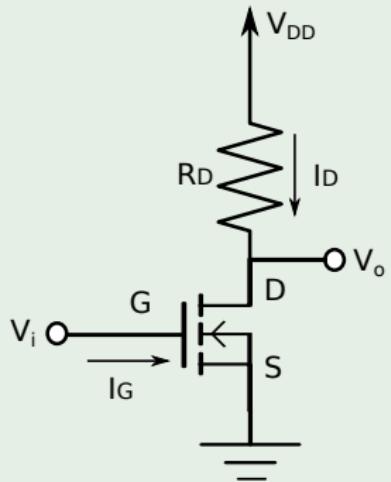
$$V_{DS} > V_{GS} - V_T \Rightarrow V_o > V_i - 2V$$

$$I_D = \frac{k}{2} (V_{GS} - V_T)^2 \Rightarrow I_D = \frac{k}{2} (V_i - 2V)^2$$

$$V_{DD} = I_D R_D + V_o$$

$$V_o = 15V - 2(V_i - 2V)^2$$

## Ejemplo 6



# Ejemplos de resolución de problemas con MOSFETs. III

## Lineal

$$V_{GS} > V_T \Rightarrow V_i > 2V$$

$$V_{DS} < V_{GS} - V_T \Rightarrow V_o < V_i - 2V$$

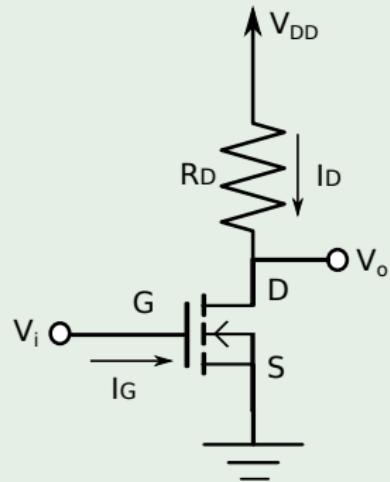
$$I_D = \frac{k}{2} [2(V_i - 2V) V_o - V_o^2]$$

$$V_{DD} = I_D R_D + V_o$$

$$V_o = \frac{(4V_i - 7) \pm \sqrt{(4V_i - 7)^2 - 120}}{4}$$

Para  $V_i$  grandes,  $V_o \rightarrow 0V$

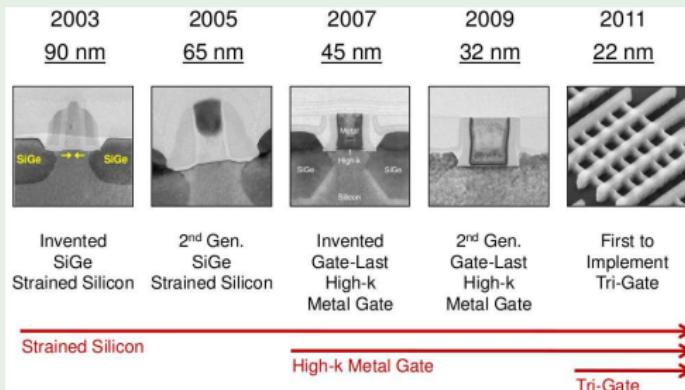
## Ejemplo 6



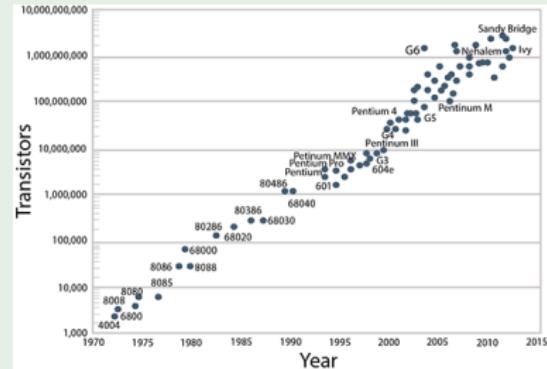
# Transistores en la industria

- Escalado de los MOSFETs.

## Escalado



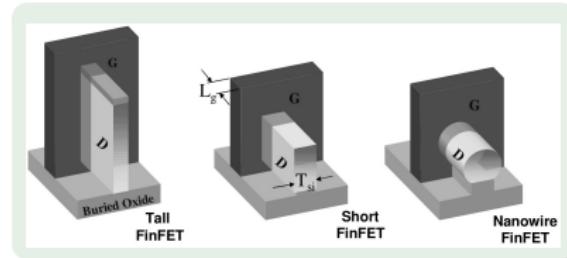
## Ley de Moore



- Por qué es interesante el escalado? Reducción de la velocidad de los circuitos integrados debida a la disminución de la capacidad del MOSFET ⇒ Mismas prestaciones en menor espacio o mayores prestaciones en el mismo espacio.
- Ley de Moore. (¿Límite entre 3nm-0.3nm?)

# Transistores en la industria

- **Evolución:** **10  $\mu\text{m}$  en 1971** (Intel 4004), **3  $\mu\text{m}$  en 1975** (Intel 8085), **1.5  $\mu\text{m}$  en 1982** (Intel 80286), **1  $\mu\text{m}$  en 1985** (Intel 80386)...., **65 nm en 2006** (Intel Pentium 4, Pentium D, Celeron, Core, Core 2, Xeon, AMD Athlon 64, Turion 64 X2, Phenom, Xbox 360 con Falcon, Opus, Jasper CPUs), **45 nm en 2008** (Intel Core i7 y i5 750, AMD Deneb, Shanghai ...), Xenon en Xbox 360S, PlayStation 3 Slim...), **32 nm en 2010** (Intel Core i3 y i5 Arrandale y Clarkdale, i7 980x, ..), **22 nm en 2011** (Intel Ivy Bridge (2011), Intel Haswell (2013)), **14 nm en 2014-2015** (Intel Core M), **10 nm en 2016-2017**
- **Problemas:** en el control de la fabricación, en el control de las características de los dispositivos, problemas de modelado, aumenta la conducción subumbral, aumentan las fugas entre óxido y puerta, aumento del calor (problemas de disipación),...
- **Soluciones:** dispositivos multipuerta, strain, nuevos materiales, high K, etc...



# Fundamentos Físicos y Tecnológicos

## Tema 5. Fundamentos de Electrónica Digital

Isabel M. Tienda Luna

Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores  
Universidad de Granada

[isabelt@ugr.es](mailto:isabelt@ugr.es)

Grado en Informática  
Curso 2012-2013

## 1 Introducción

## 2 Caracterización de un circuito lógico

## 3 Puertas Lógicas básicas con tecnología MOSFET

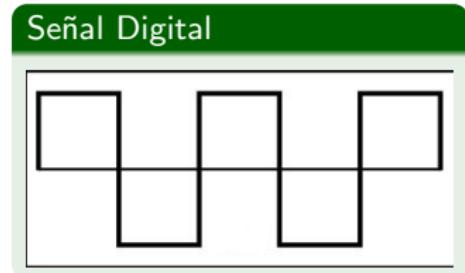
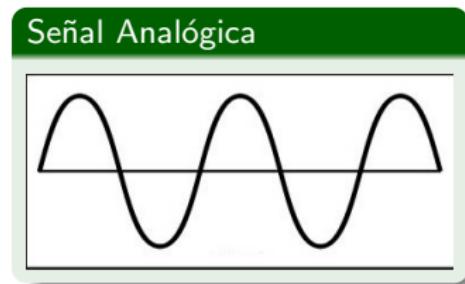
## 1 Introducción

## 2 Caracterización de un circuito lógico

## 3 Puertas Lógicas básicas con tecnología MOSFET

# Señales Analógicas y Señales Digitales

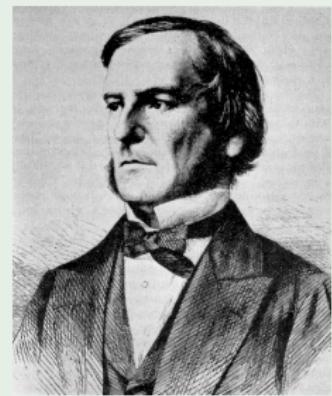
- Una **señal analógica** es aquella que puede tomar infinitos valores a lo largo del tiempo, esto es, que cambia de forma continua.
- Una **señal digital** es aquella que tiene un número finito de valores definidos y cambia de valor por saltos. A esos valores se les llama *estados* o *niveles lógicos*.
- ¿Por qué se ha impuesto la electrónica digital?
  - Inmunidad frente al ruido.
  - Menor complejidad en el diseño.
  - Facilidad de acoplamiento de unos bloques con otros.
  - Integración. Escalas de integración:
    - *SSI*: 100 componentes/chip
    - *MSI*: 100-1000 componentes/chip
    - *LSI*: 1000-10000 componentes/chip
    - *VLSI*: más de 10000 componentes/chip



# Álgebra de Boole

- George Boole desarrolló un álgebra para investigar las leyes fundamentales de las operaciones de la mente humana que rigen los razonamientos (*Álgebra de Boole*).
- *Objetivo:* definir una serie de símbolos para representar objetos o fenómenos que, encadenados convenientemente, dan lugar a expresiones matemáticas más complejas (*funciones*  $\Rightarrow$  tabla de verdad).
- *Herramientas:* relaciones lógicas.
- *Variables binarias:* pueden tomar sólo dos valores distintos, verdadero (1) y falso (0). El 1 y el 0 **no** expresan cantidades sino estados de las variables.

George Boole



# Álgebra de Boole

- Operadores en álgebra de Boole (+), (·) y ( $\overline{\quad}$ )

A	B	$A+B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	$A \cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

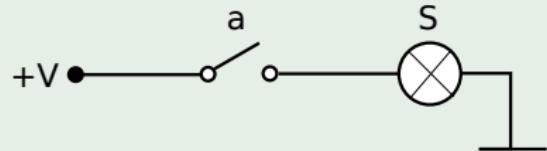
A	$\overline{A}$
1	0
0	1

- Propiedad comutativa:  $A + B = B + A$  y  $A \cdot B = B \cdot A$
- Propiedad distributiva:  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  y  $A + B \cdot C = (A + B)(A + C)$
- Elementos neutros:  $A + 0 = A$  y  $A \cdot 1 = A$
- Propiedades del operador ( $\overline{\quad}$ ):  $A + \overline{A} = 1$  y  $A \cdot \overline{A} = 0$
- Propiedad de los elementos nulos:  $A + 1 = 1$  y  $A \cdot 0 = 0$
- Propiedad de idempotencia:  $A + A = A$  y  $A \cdot A = A$
- Propiedad de involución:  $A + A \cdot B = A$  y  $A \cdot (A + B) = A$
- $\overline{\overline{A}} = A$

# Funciones Lógicas: ejemplos.

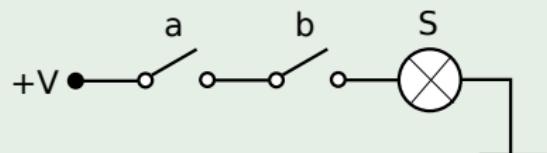
①  $S = a$

Función Igualdad



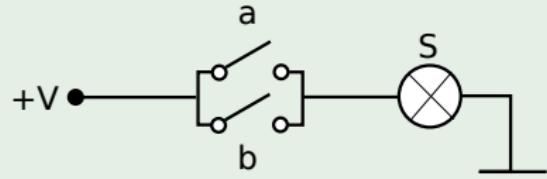
②  $S = a \cdot b$

Función Intersección

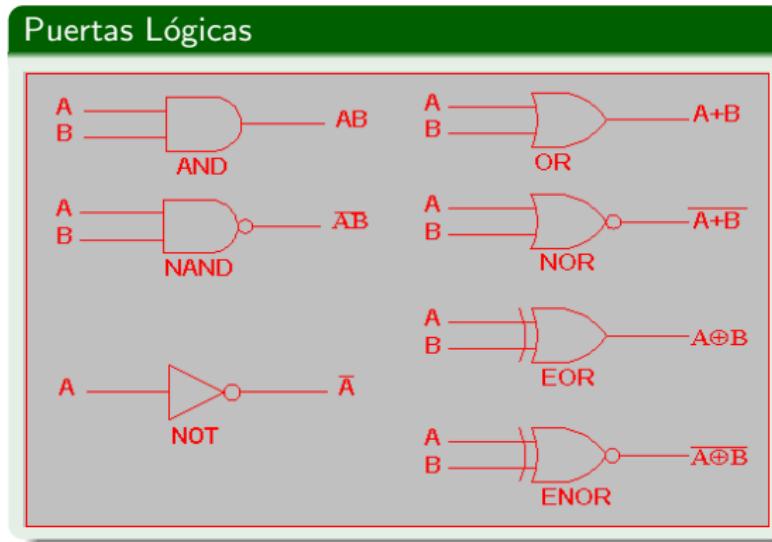


③  $S = a + b$

Función Unión



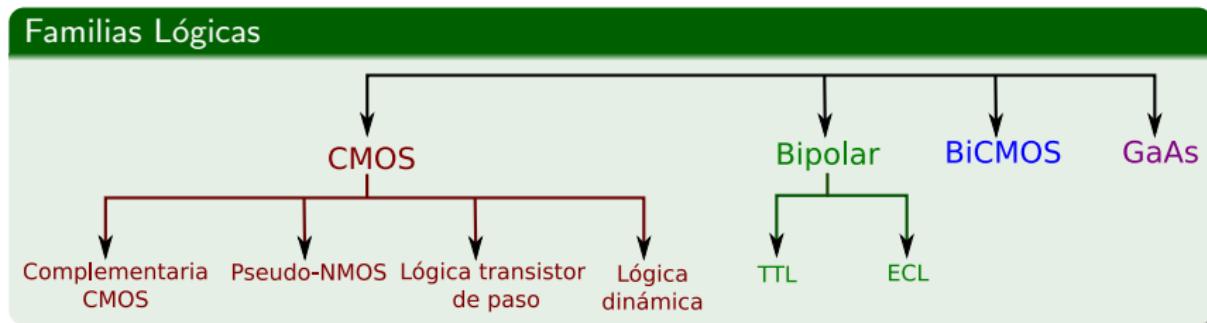
## Funciones Lógicas: representación. Puertas Lógicas



**Links interesantes:** <http://www.autoshop101.com/trainmodules/logicgate/101.html>

[http://www.opamp-electronics.com/tutorials/digital\\_theory\\_ch\\_007.htm](http://www.opamp-electronics.com/tutorials/digital_theory_ch_007.htm)

# Familias Lógicas



- En este tema estudiaremos los circuitos básicos que constituyen las familias lógicas.
- En el tema anterior ya vimos cómo se comportaban inversores básicos creados con BJTs y MOSFETs.
- Estudiaremos las características estáticas y dinámicas de esos inversores.
- Normalmente trabajaremos con lógicas positivas: al mayor valor lógico se le asocia un 1.

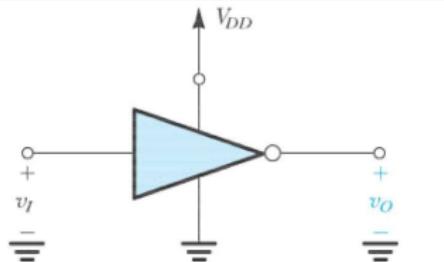
1 Introducción

2 Caracterización de un circuito lógico

3 Puertas Lógicas básicas con tecnología MOSFET

# Niveles lógicos

## Ejemplo: inversor básico



$v_i$	$v_o$
0	1
1	0

- Para un inversor ideal la transición desde el estado alto (que llamaremos  $V_H$ ) al bajo (que llamaremos  $V_L$ ) es abrupta.
- El estado alto,  $V_H$ , representa el 1 lógico.
- El estado bajo,  $V_L$ , representa el 0 lógico.

# Características de transferencia estáticas

- Característica de transferencia de un inversor ideal:

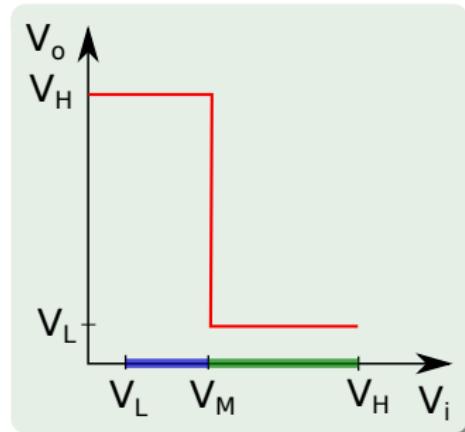
Para cuantificar la inmunidad al ruido de un circuito lógico:

- Margen de ruido de estado alto:

$$NM_H = V_H - V_M$$

- Margen de ruido en estado bajo:

$$NM_L = V_M - V_L$$



- La diferencia no tendría que ser elevada, pero la posibilidad de que se superpongan ruidos obliga a que este margen lógico sea más elevado para garantizar la fiabilidad de la puerta.

# Características de transferencia estáticas

- Característica de transferencia de un inversor real:

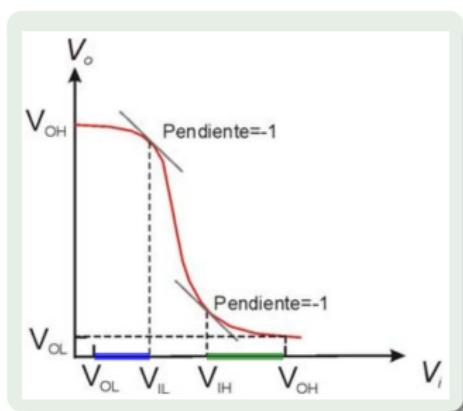
Para cuantificar la inmunidad al ruido de un circuito lógico:

- Margen de ruido de estado alto:

$$NM_H = V_{OH} - V_{IH}$$

- Margen de ruido en estado bajo:

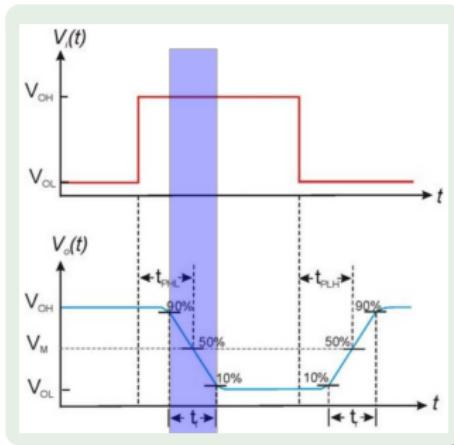
$$NM_L = V_{IL} - V_{OL}$$



- Es necesario que  $V_{OL} < V_{IL}$  y que  $V_{IH} < V_{OH}$  para asegurar que el nivel de salida de una puerta lógica es un nivel de entrada apropiado para una segunda puerta.

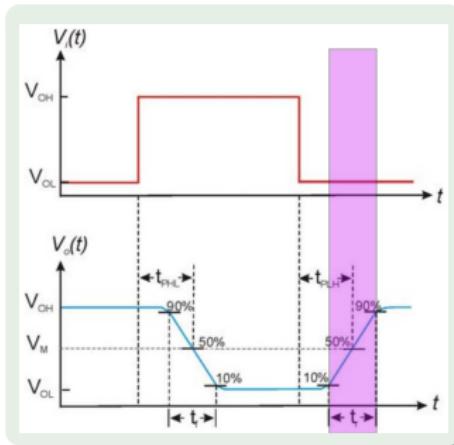
# Características de transferencia dinámicas

- Debido a la no idealidad del inversor básico, las transiciones entre los estados alto y bajo, cuando la señal de entrada es un pulso, no son instantáneas, sino graduales debido a las capacidades parásitas de los dispositivos.
- Se pueden definir algunos tiempos característicos para cuantificar el retardo producido por dichas capacidades:
  - Tiempo de bajada o de caída  $t_f$ .
  - Tiempo de subida  $t_r$ .
  - Tiempo de propagación del nivel alto al bajo  $t_{PHL}$ .
  - Tiempo de propagación del nivel bajo al alto  $t_{PLH}$ .
  - Tiempo de propagación  $t_P = 0,5 \cdot (t_{PHL} + t_{PLH})$



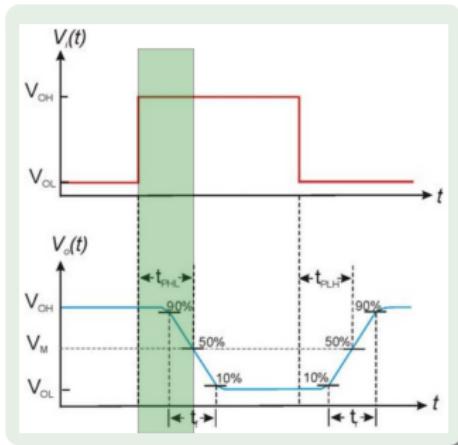
# Características de transferencia dinámicas

- Debido a la no idealidad del inversor básico, las transiciones entre los estados alto y bajo, cuando la señal de entrada es un pulso, no son instantáneas, sino graduales debido a las capacidades parásitas de los dispositivos.
- Se pueden definir algunos tiempos característicos para cuantificar el retardo producido por dichas capacidades:
  - Tiempo de bajada o de caída  $t_f$ .
  - Tiempo de subida  $t_r$ .
  - Tiempo de propagación del nivel alto al bajo  $t_{PHL}$ .
  - Tiempo de propagación del nivel bajo al alto  $t_{PLH}$ .
  - Tiempo de propagación  $t_P = 0,5 \cdot (t_{PHL} + t_{PLH})$



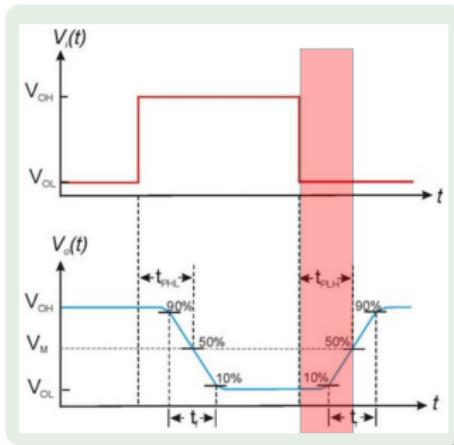
# Características de transferencia dinámicas

- Debido a la no idealidad del inversor básico, las transiciones entre los estados alto y bajo, cuando la señal de entrada es un pulso, no son instantáneas, sino graduales debido a las capacidades parásitas de los dispositivos.
- Se pueden definir algunos tiempos característicos para cuantificar el retardo producido por dichas capacidades:
  - 1 Tiempo de bajada o de caída  $t_f$ .
  - 2 Tiempo de subida  $t_r$ .
  - 3 Tiempo de propagación del nivel alto al bajo  $t_{PHL}$ .
  - 4 Tiempo de propagación del nivel bajo al alto  $t_{PLH}$ .
  - 5 Tiempo de propagación  $t_P = 0,5 \cdot (t_{PHL} + t_{PLH})$



# Características de transferencia dinámicas

- Debido a la no idealidad del inversor básico, las transiciones entre los estados alto y bajo, cuando la señal de entrada es un pulso, no son instantáneas, sino graduales debido a las capacidades parásitas de los dispositivos.
- Se pueden definir algunos tiempos característicos para cuantificar el retardo producido por dichas capacidades:
  - Tiempo de bajada o de caída  $t_f$ .
  - Tiempo de subida  $t_r$ .
  - Tiempo de propagación del nivel alto al bajo  $t_{PHL}$ .
  - Tiempo de propagación del nivel bajo al alto  $t_{PLH}$ .
  - Tiempo de propagación  $t_P = 0,5 \cdot (t_{PHL} + t_{PLH})$



# Fan-in y Fan-out

## Característica de entrada: Fan-in

- Número máximo de puertas que se pueden conectar a la entrada sin estropear el funcionamiento.
- Si se excede este valor la puerta lógica producirá una salida en un estado indeterminado o incorrecto.
- La señal de entrada puede resultar deteriorada por la carga excesiva.

## Característica de salida: Fan-out

- Número máximo de puertas que se pueden conectar a la salida de la puerta.
- Debido a la energía máxima que una puerta puede absorber o consumir se impone un límite en el número máximo de salidas que puede tener una puerta lógica.
- El fan-out depende de la cantidad de corriente que una puerta es capaz de suministrar o consumir al estar conectada a otras puertas.
- Un fan-out mayor que el recomendado puede producir aumento de la temperatura del dispositivo (perjudicando su funcionamiento), aumento de los tiempos de subida y bajada, aumento del retardo, etc..

# Otras características de los circuitos lógicos

- Disipación de potencia. Potencia estática y potencia dinámica.
  - Ventajas de tipo funcional : fuentes menos costosas, mayor autonomía, menor coste en refrigeración.
  - Cuanto más reducido sea el consumo por puerta, más puertas se podrán integrar en un mismo circuito manteniendo constante la capacidad de disipación de calor del mismo.
- Producto retardo-potencia.
  - Cuando uno de ellos aumenta el otro disminuye y viceversa.
  - Parámetro que resume las características mas relevantes de una determinada tecnología.
  - Interesan valores tan pequeños como sea posible.
- Área de Silicio.

## 1 Introducción

## 2 Caracterización de un circuito lógico

## 3 Puertas Lógicas básicas con tecnología MOSFET

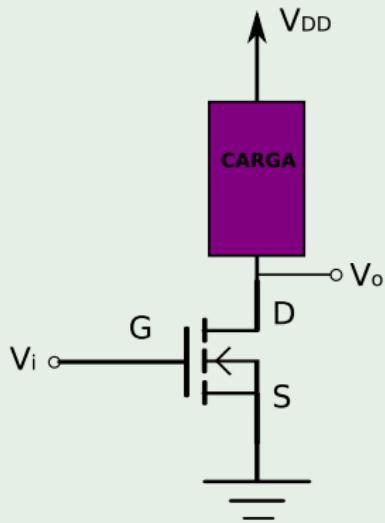
# Lógica MOS

- Es una de las cuatro tecnologías más utilizadas para hacer circuitos digitales.
- Permite implementar con una mayor densidad: Cada transistor NMOS utilizado ocupa un espacio inferior al de los bipolares.
- Simplicidad de la topología.
- Para entender el funcionamiento de esta lógica conviene ver el NMOS como interruptor.

# Recordando el inversor NMOS

- Se cumple que:  $V_i = V_{GS}$  y  $V_o = V_{DS}$ .
- La carga puede ser:
  - ① Una resistencia.
  - ② Un NMOS.
  - ③ Un PMOS: lógica CMOS.

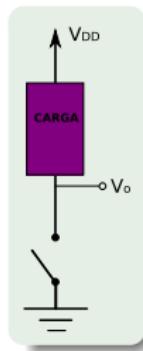
Inversor MOS



# El inversor NMOS. Circuito como interruptor.

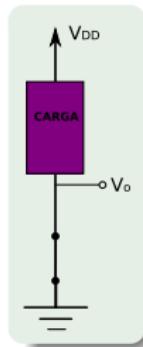
## Análisis Abierto

- Si  $V_i = 0$  lógico  $\Rightarrow V_{GS} < V_T \Rightarrow I_D \simeq 0$
- $V_o = 1$  lógico
- Interruptor Abierto



## Análisis Cerrado

- Si  $V_i = 1$  lógico  $\Rightarrow V_{GS} > V_T \Rightarrow I_D \neq 0$
- $V_o = 0$  lógico
- Dos posibilidades:  $V_{DS} < V_{GS} - V_T$  (Lineal)  
o  $V_{DS} > V_{GS} - V_T$  (Saturación)
- Interruptor Cerrado



# El inversor NMOS. Resistencia como carga.

- ① Si  $V_i = V_{GS} < V_T \Rightarrow$  NMOS OFF  $\Rightarrow I_D \simeq 0 \Rightarrow V_o = V_{DD} = V_{OH}$ .
- ② Si  $V_i = V_{GS} > V_T$  hay dos posibilidades:
  - ① **NMOS Saturación:** al principio,  $V_i = V_{GS} > V_T$  (sólo un poco)  $\Rightarrow$  NMOS ON  $\Rightarrow V_o = V_{DS} > V_{GS} - V_T = V_i - V_T \Rightarrow$  NMOS en Saturación.

$$I_D = \frac{k}{2} (V_{GS} - V_T)^2 = \frac{V_{DD} - V_o}{R_D} \Rightarrow V_o = V_{DD} - \frac{kR_D}{2} (V_i - V_T)^2$$

- ② **NMOS Lineal:** sigue aumentando  $V_i \Rightarrow V_o$  disminuye hasta que  $V_o = V_{DS} = V_{GS} - V_T = V_i - V_T \Rightarrow$  el transistor pasa a la región lineal donde  $V_o = V_{DS} < V_{GS} - V_T = V_i - V_T$ .

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{k}{2} [2(V_{GS} - V_T)V_{DS} - V_{DS}^2] = \frac{V_{DD} - V_o}{R_D} \Rightarrow \\ V_o &= \frac{1 + kR_D(V_i - V_T)}{kR_D} - \frac{\sqrt{(1 + kR_D(V_i - V_T))^2 - 2kR_DV_{DD}}}{kR_D} \end{aligned}$$

# El inversor NMOS. Resistencia como carga.

Puntos de interés:

- ➊ Paso de saturación a lineal. Ocurre cuando  $V_{DS} = V_o = V_{GS} - V_T = V_i - V_T$ . Llamo a  $V_o$  en el que se produce la transición  $V_o^*$  y a  $V_i$  en el que se produce la transición  $V_i^*$ .

$$\begin{aligned}V_o^* &= V_{DD} - R_D I_D = V_{DD} - \frac{kR_D}{2} (V_i^* - V_T)^2 \\V_o^* &= V_i^* - V_T \\V_o^* &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 2kR_D V_{DD}}}{kR_D}\end{aligned}$$

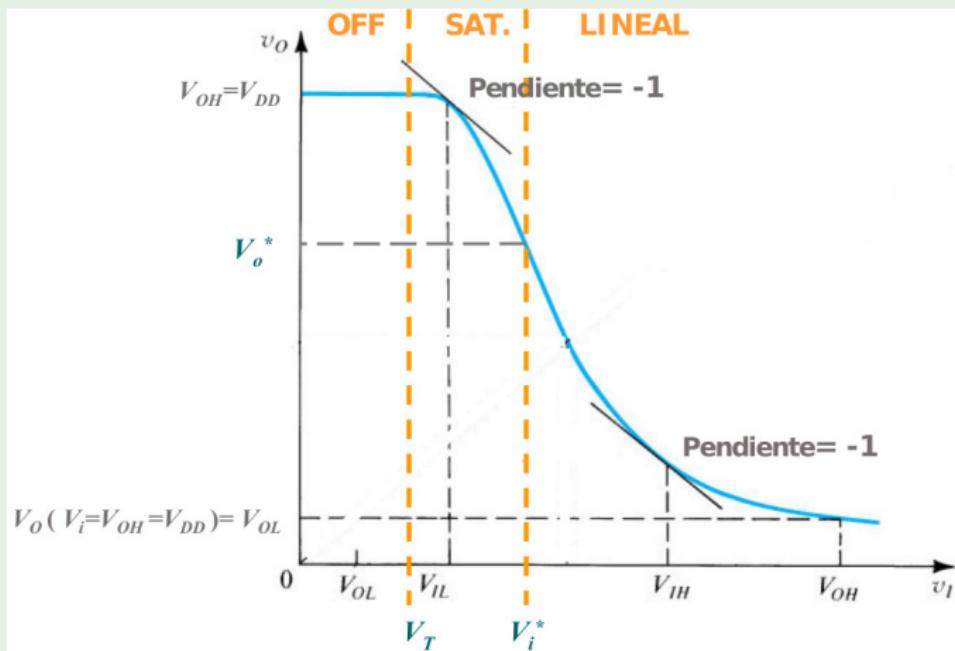
- ➋ En la región Lineal, calculo  $V_{OL}$  como  $V_o$  en el que  $V_i = V_{OH} = V_{DD}$ :

$$V_{OL} = \frac{1 + kR_D(V_{DD} - V_T)}{kR_D} - \frac{\sqrt{(1 + kR_D(V_{DD} - V_T))^2 - 2kR_D V_{DD}}}{kR_D}$$

- Nos interesa  $V_{OL}$  pequeño.
- Con  $R_D$  grandes: se tienen potencias disipadas pequeñas pero causa problemas de integración.

# El inversor NMOS. Resistencia como carga.

## Característica de Transferencia



# El inversor NMOS. Transistor como carga.

## Transistor $M_1$ :

- Actúa como carga
- $V_{GS1} = V_{DS1} \Rightarrow V_{DS1} > V_{GS1} - V_T$
- Si  $M_1$  conduce siempre lo hace en saturación:

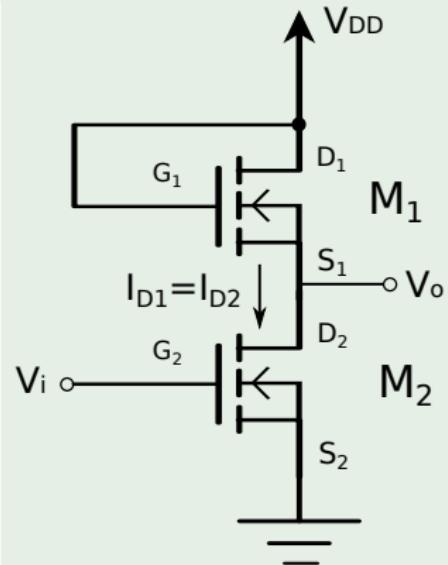
$$I_{D1} = \frac{k_1}{2} (V_{GS1} - V_{T1})^2$$

$$I_{D1} = \frac{k_1}{2} (V_{DD} - V_o - V_{T1})^2$$

## Transistor $M_2$ :

- Funciona como inversor.
- $V_{DS2} = V_o \Rightarrow V_{GS2} = V_i$

## Transistor $M_1$ como carga



# El inversor NMOS. Transistor como carga.

Analizamos el comportamiento del inversor.

- ① Si  $V_i < V_{T2}$   $\Rightarrow M_2$  OFF  $\Rightarrow I_{D2} = I_{D1} = 0 \Rightarrow I_{D1} = \frac{k_1}{2} (V_{DD} - V_o - V_{T1})^2 = 0$   
 $\Rightarrow V_o = V_{DD} - V_{T1} = V_{OH}$
- ② Si  $V_i > V_{T2}$  (sólo un poco mayor)  $\Rightarrow M_2$  ON (En Saturación)  $\Rightarrow$

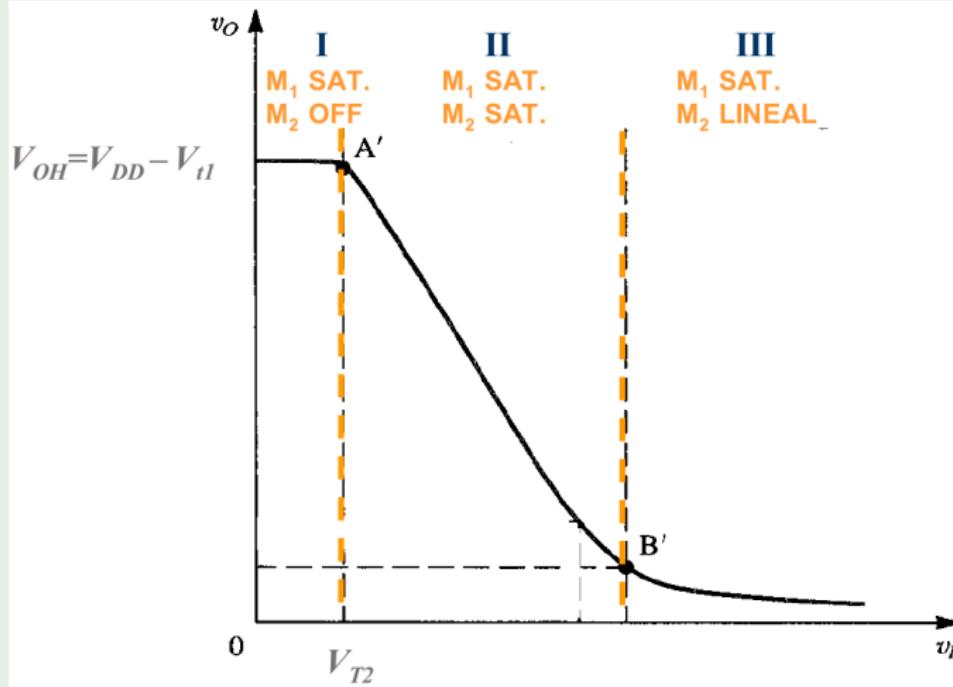
$$\begin{aligned} I_{D2} &= \frac{k_2}{2} (V_i - V_{T2})^2 \\ I_{D2} &= I_{D1} \\ \frac{k_2}{2} (V_i - V_{T2})^2 &= \frac{k_1}{2} (V_{DD} - V_o - V_{T1})^2 \end{aligned}$$

- ③ Si sigo aumentando  $V_i \Rightarrow V_o$  disminuye  $\Rightarrow M_2$  pasa a Lineal

$$\begin{aligned} I_{D2} &= \frac{k_2}{2} \left[ 2(V_i - V_{T2}) V_o - V_o^2 \right] \\ I_{D2} &= I_{D1} \\ \frac{k_2}{2} \left[ 2(V_i - V_{T2}) V_o - V_o^2 \right] &= \frac{k_1}{2} (V_{DD} - V_o - V_{T1})^2 \end{aligned}$$

# El inversor NMOS. Transistor como carga.

## Característica de Transferencia



# El inversor NMOS. Transistor como carga.

Si comparamos el inversor NMOS con la resistencia como carga y el inversor NMOS con el transistor como carga, éste último tiene como:

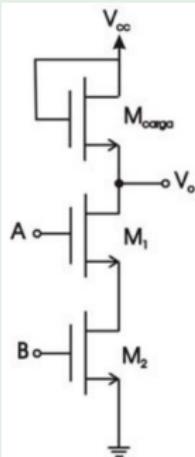
- Ventaja: que ocupa menos área
- Inconveniente: que  $V_{OH}$  es menor

# ¿Cómo construimos una puerta lógica con NMOS?

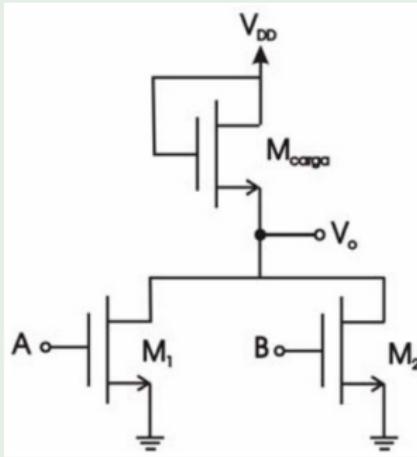
## Regla

Seguimos la filosofía de ver el NMOS como un interruptor. Vemos cuando queremos la salida a 0 y colocamos la red NMOS adecuada teniendo en cuenta que multiplicar es colocar transistores en serie y sumar es colocarlos en paralelo.

Puerta NAND



Puerta NOR

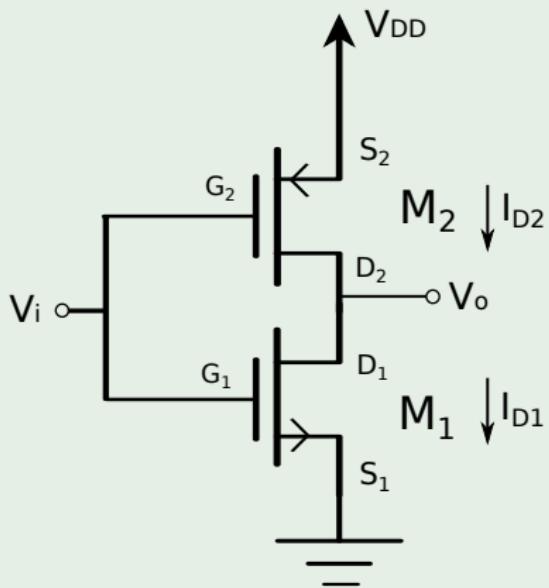


# Lógica CMOS

- Con esta construcción se pretende que el consumo de potencia sea reducido.
- Como carga del CMOS se coloca un PMOS de manera que en reposo (es decir, cuando la salida es 0 o 1 pero no en las transiciones) la potencia consumida sea aproximadamente 0 al poner una corriente aproximadamente igual a 0.
- Esto se consigue gracias a que cuando el transistor NMOS conduce, el PMOS está en corte y viceversa.
- Estudiaremos la configuración más básica: el inversor.

# El inversor CMOS

## Inversor CMOS



- La carga del transistor NMOS ( $M_1$ ) es un PMOS ( $M_2$ ).
- Recordamos que el PMOS funciona como el NMOS usando  $|V_{GS}|$ ,  $|V_{DS}|$ ,  $|V_{Tp}|$ ,  $|I_D|$ .

# Modo de operación de los transistores en el inversor CMOS

## Transistor $M_1$ (NMOS)

- Ecuaciones Generales (analizamos el circuito):

$$\begin{aligned} V_{GS} &= V_i \\ V_{DS} &= V_o \end{aligned}$$

- $M_1$  en **OFF** si  $V_{GS} < V_{Tn} \Rightarrow V_i < V_{Tn}$ .
- $M_1$  en **ON** si  $V_{GS} > V_{Tn} \Rightarrow V_i > V_{Tn}$ . El transistor puede estar en **Lineal** o en **Saturación**:
  - Lineal** si  $V_{DS} < V_{GS} - V_{Tn} \Rightarrow V_o < V_i - V_{Tn} \Rightarrow V_i > V_o + V_{Tn}$
  - $I_D = \frac{k_n}{2} [2(V_i - V_{Tn})V_o - V_o^2]$
- Saturación** si  $V_{DS} > V_{GS} - V_{Tn} \Rightarrow V_o > V_i - V_{Tn} \Rightarrow V_i < V_o + V_{Tn}$
- $I_D = \frac{k_n}{2} (V_i - V_{Tn})^2$

# Modo de operación de los transistores en el inversor CMOS

## Transistor $M_2$ (PMOS)

- Ecuaciones Generales (analizamos el circuito):

$$V_{GS} = V_i - V_{DD} \Rightarrow |V_{GS}| = V_{DD} - V_i$$

$$V_{DS} = V_o - V_{DD} \Rightarrow |V_{DS}| = V_{DD} - V_o$$

- $M_2$  en **OFF** si  $|V_{GS}| < |V_{Tp}| \Rightarrow V_{DD} - V_i < |V_{Tp}| \Rightarrow V_i > V_{DD} - |V_{Tp}|$ .
- $M_2$  en **ON** si  $|V_{GS}| > |V_{Tp}| \Rightarrow V_i < V_{DD} - |V_{Tp}|$ . El transistor puede estar en Lineal o en Saturación:

- Lineal** si  $|V_{DS}| < |V_{GS}| - |V_{Tp}| \Rightarrow V_{DD} - V_o < V_{DD} - V_i - |V_{Tp}| \Rightarrow V_i < V_o - |V_{Tp}|$

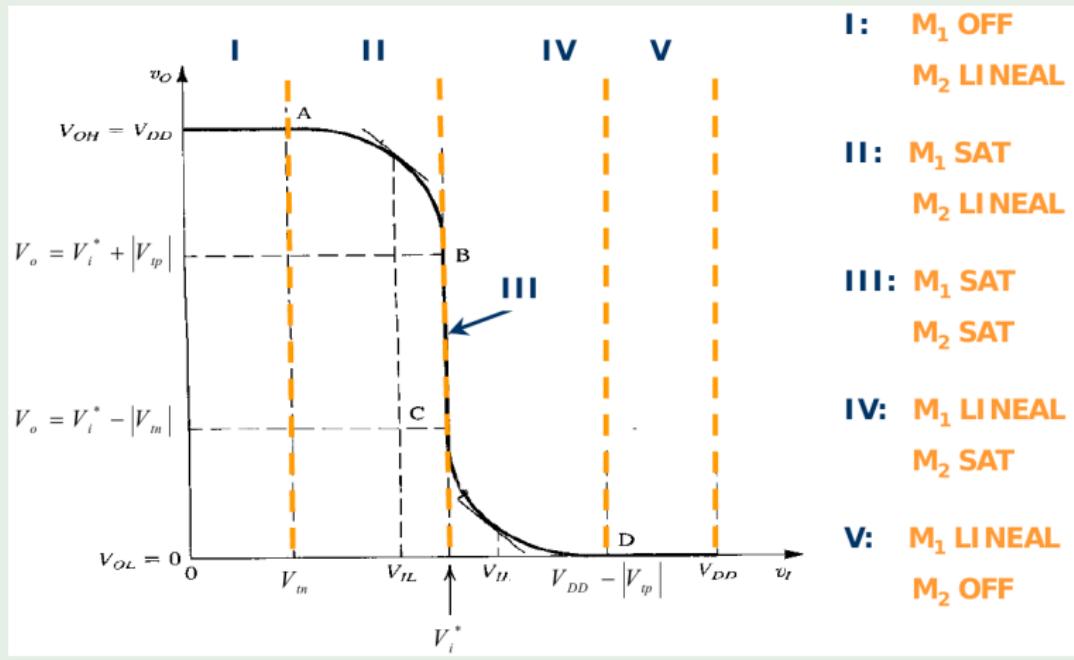
$$I_D = \frac{k_p}{2} [2(V_{DD} - V_i - |V_{Tp}|)(V_{DD} - V_o) - (V_{DD} - V_o)^2]$$

- Saturación** si  $|V_{DS}| > |V_{GS}| - |V_{Tp}| \Rightarrow V_i > V_o + |V_{Tp}|$

$$I_D = \frac{k_p}{2} (V_{DD} - V_i - |V_{Tp}|)^2$$

# Característica de transferencia del inversor CMOS

## Característica de transferencia del inversor CMOS



# Análisis del inversor CMOS

## Región I

- Si  $V_i < V_{Tn} \Rightarrow M_1$  está **OFF**  $\Rightarrow I_{D1} = 0$ .
- Si  $I_{D1} = 0 \Rightarrow I_{D2} = 0$ .
- ¿En qué modo se encuentra  $M_2$ ?
  - No está en corte porque su condición de corte ( $V_i > V_{DD} - |V_{Tp}|$ ) no se cumple.
  - No está en Saturación porque:  $I_{D2} = \frac{k_p}{2} (V_{DD} - V_i - |V_{Tp}|)^2 \neq 0$
  - Por tanto,  $M_2$  está en Lineal:  
$$I_{D2} = \frac{k_p}{2} [2(V_{DD} - V_i - |V_{Tp}|)(V_{DD} - V_o) - (V_{DD} - V_o)^2]$$

Para que se cumpla que  $I_{D2} = 0$ ,  $V_o = V_{DD}$

# Análisis del inversor CMOS

## Región II

- Si  $V_i$  aumenta hasta  $V_i > V_{Tn} \Rightarrow M_1$  está en Saturación.
- $M_2$  sigue en Lineal.
- Usando que  $I_{D1} = I_{D2}$ :

$$\frac{k_n}{2} (V_i - V_{Tn})^2 = \frac{k_p}{2} [2(V_{DD} - V_i - |V_{Tp}|)(V_{DD} - V_o) - (V_{DD} - V_o)^2]$$

- Al despejar  $V_o$  en función de  $V_i$ , se obtiene una función decreciente. Esto es, si  $V_i$  aumenta,  $V_o$  disminuye.

# Análisis del inversor CMOS

## Región III

- Si  $V_i$  aumenta  $M_1$  sigue en Saturación.
- $M_2$  pasa de Lineal a Saturación.
- Usando que  $I_{D1} = I_{D2}$ :

$$\frac{k_n}{2} (V_i - V_{Tn})^2 = \frac{k_p}{2} (V_{DD} - V_i - |V_{Tp}|)^2$$

- Sólo existe un único valor de  $V_i (= V_i^*)$  para el que los dos transistores están saturados:

$$V_i^* = \frac{V_{DD} - |V_{Tp}| + V_{Tn} \sqrt{\frac{k_n}{k_p}}}{1 + \sqrt{\frac{k_n}{k_p}}}$$

- CMOS simétrico si  $V_i^* = V_{DD}/2$ . Ocurre cuando  $V_{Tn} = |V_{Tp}|$  y  $k_n = k_p$ .

# Análisis del inversor CMOS

## Región IV

- Si  $V_i > V_i^*$   $M_1$  pasa a Lineal.
- $M_2$  sigue en Saturación.
- Usando que  $I_{D1} = I_{D2}$ :

$$\frac{k_n}{2} [2(V_i - V_{Tn})V_o - V_o^2] = \frac{k_p}{2} (V_{DD} - V_i - |V_{Tp}|)^2$$

- Si despejamos  $V_o$  en función de  $V_i$ , obtenemos una función decreciente. Esto es, si aumentamos  $V_i$ ,  $V_o$  disminuye.
- $V_o$  va a disminuir hasta que  $M_2$  entra en Corte.

# Análisis del inversor CMOS

## Región V

- Si  $V_i > V_i^*$  sigue aumentando,  $M_1$  sigue en Lineal.
- Al aumentar  $V_i$ , baja  $V_o$  hasta que  $M_2$  entra en Corte  $\Rightarrow I_{D2} = 0$ .
- Usando que  $I_{D1} = I_{D2}$ :

$$I_{D1} = I_{D2} = 0$$

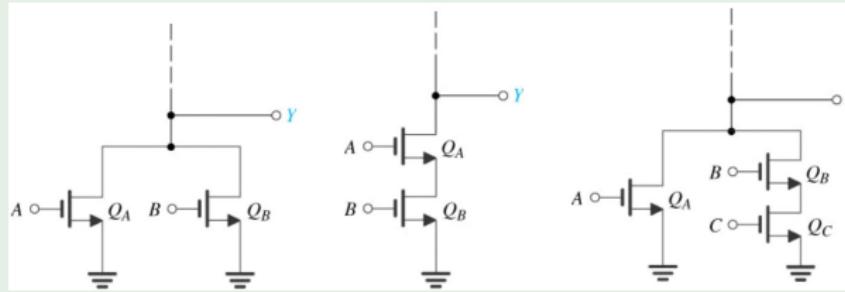
- De la ecuación anterior,  $V_o = 0$ .

# ¿Cómo construimos puertas lógicas con CMOS?

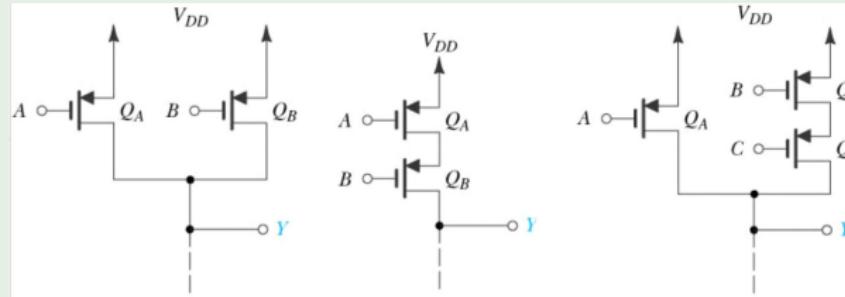
- La idea es similar a la lógica NMOS.
- Cuando queremos **sintetizar una función**:
  - Vemos los 0 que tiene la función e implementamos con la red de NMOS la NOT de la función que queremos.
  - Colocamos una red de transistores PMOS en la carga con una topología complementaria a la de los NMOS.
  - Hay que tener en cuenta que en una red NMOS, los productos se hacen con NMOS en serie y las sumas con NMOS en paralelo.
  - Hay que tener en cuenta que en una red PMOS, los productos se hacen con PMOS en paralelo y las sumas con PMOS en serie.
- Cuando queremos **obtener la función lógica que implementa un circuito**:
  - Vemos los NMOS y los PMOS como interruptores.
  - Para cada combinación de entradas se ve si hay un camino hasta tierra o si es hacia la fuente, sabiendo que por la topología de esta lógica sólo puede irse a uno de los dos.

# Ejemplos

NMOS



PMOS



# ¿Cómo construimos puertas lógicas con CMOS?

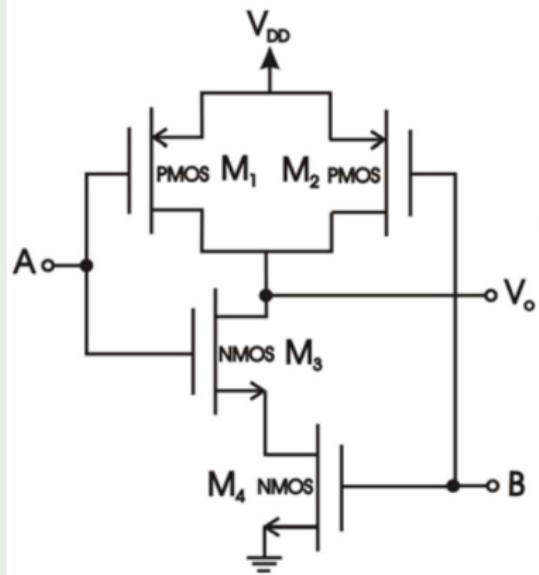
## Algebra de Boole: Algunas reglas útiles.

Identidades OR	Identidades AND
$A + 0 = A$	$A \cdot 0 = 0$
$A + 1 = 1$	$A \cdot 1 = A$
$A + A = A$	$A \cdot A = A$
$A + \overline{A} = A$	$A \cdot \overline{A} = 0$
$\overline{\overline{A}} = A$	
$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
$A + (B + C) = (A + B) + C$	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
$\overline{(A + B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} + \overline{B}$
$A + A \cdot B = A$	$A + \overline{A} \cdot B = A + B$

- Dibujar el circuito que realiza la función:  $Y = \overline{A \cdot B}$
- Dibujar el circuito que realiza la función:  $Y = \overline{A + B}$
- Dibujar el circuito que realiza la función:  $Y = \overline{A \cdot (B + C \cdot D)}$
- Dibujar el circuito que realiza la función:  $Y = \overline{A + B} + \overline{A} \cdot \overline{C}$
- Dibujar el circuito que realiza la función:  $Y = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot C$

# Puerta NAND

## Puerta NAND

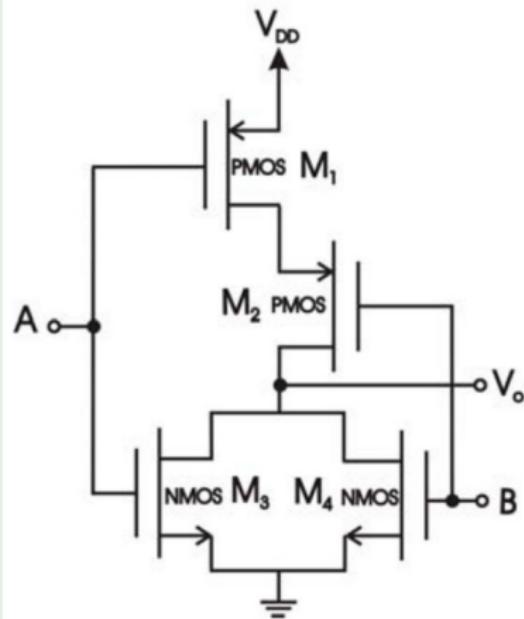


$$V_o = \overline{A \cdot B}$$

A	B	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>	V <sub>o</sub>
0	0	ON	ON	OFF	OFF	1
0	1	ON	OFF	OFF	ON	1
1	0	OFF	ON	ON	OFF	1
1	1	OFF	OFF	ON	ON	0

# Puerta NOR

## Puerta NOR

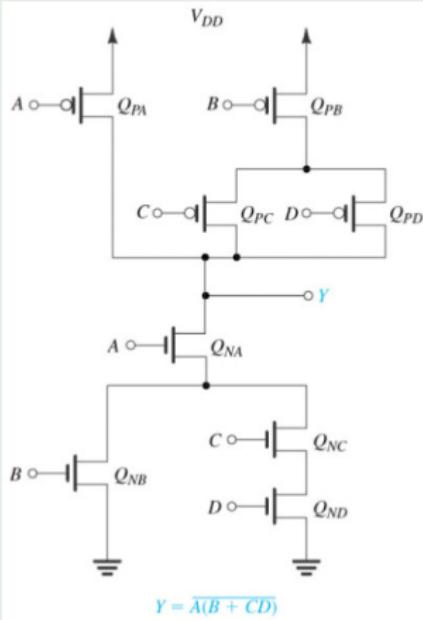


$$V_o = \overline{A + B}$$

A	B	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>	V <sub>o</sub>
0	0	ON	ON	OFF	OFF	1
0	1	ON	OFF	OFF	ON	0
1	0	OFF	ON	ON	OFF	0
1	1	OFF	OFF	ON	ON	0

$$Y = \overline{A \cdot (B + C \cdot D)}$$

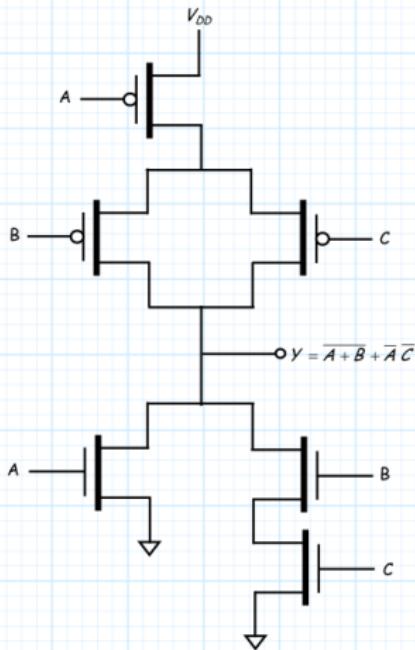
## Círcuito



$$Y = \overline{A \cdot (B + C \cdot D)}$$

$$Y = \overline{A + B} + \overline{A} \cdot \overline{C}$$

## Circuito



$$Y = \overline{\overline{A + B} + \overline{A} \cdot \overline{C}}$$

$$\overline{Y} = \overline{\overline{A + B} + \overline{A} \cdot \overline{C}}$$

$$\overline{Y} = \overline{A + B} \cdot \overline{\overline{A} \cdot \overline{C}}$$

$$\overline{Y} = (A + B) \cdot (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{C}})$$

$$\overline{Y} = (A + B) \cdot (A + C)$$

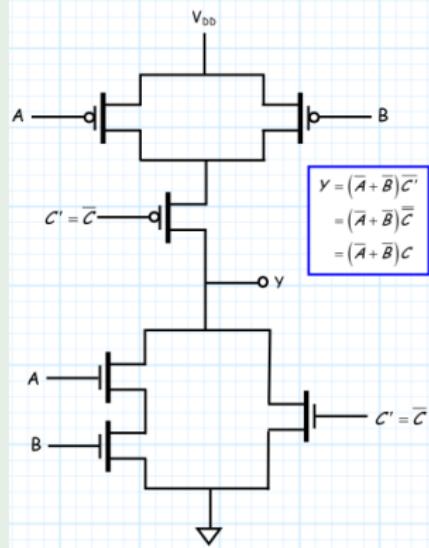
$$\overline{Y} = A \cdot A + A \cdot C + B \cdot A + B \cdot C$$

$$\overline{Y} = A \cdot (A + B + C) + B \cdot C$$

$$\overline{Y} = A + B \cdot C$$

$$Y = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot C$$

## Circuito



$$Y = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot C$$

$$\overline{Y} = \overline{(\overline{A} + \overline{B}) \cdot C}$$

$$\overline{Y} = \overline{(\overline{A} + \overline{B})} + \overline{C}$$

$$\overline{Y} = A \cdot B + \overline{C}$$

# Tema 7. Conversores D/A y A/D

Isabel M. Tienda Luna

Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores  
Universidad de Granada

[isabelt@ugr.es](mailto:isabelt@ugr.es)

Grado en Informática  
Curso 2012-2013

1 Conversión Digital-Analógica

- Tipos de convertidores D/A

2 Conversión Analógico-Digital

- Fases del proceso de la conversión A/D
- Tipos de convertidores A/D

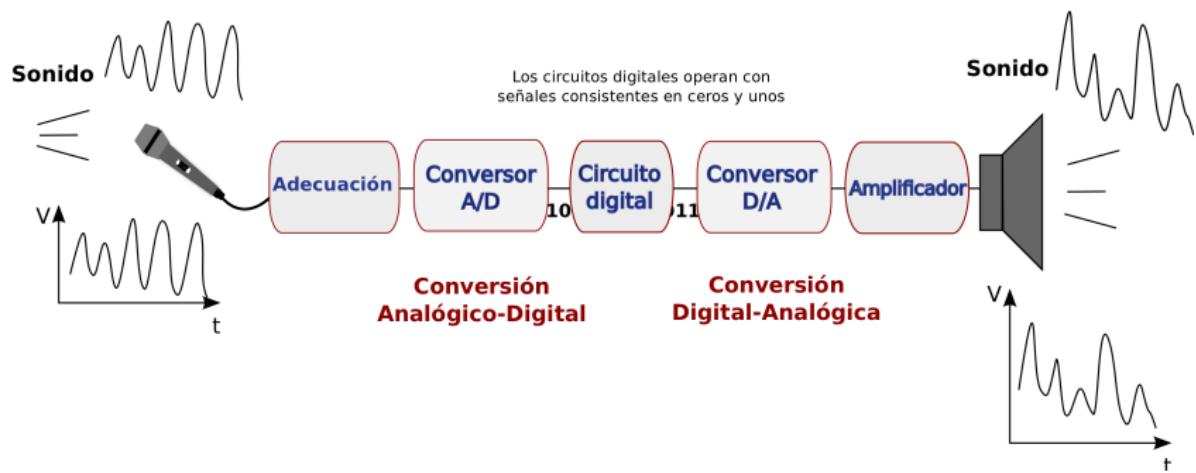
# Introducción

Hasta ahora hemos trabajado con dos tipos de señales en la asignatura:

- Señales analógicas:
  - la señal puede tomar cualquier valor en un intervalo.
  - no sólo nos interesa el estado de los dispositivos.
- Señales digitales:
  - la señal sólo puede tomar ciertos valores.
  - sólo nos interesa el estado de los dispositivos (ON/OFF).
- Ventajas de los sistemas digitales:
  - mayor precisión.
  - más baratos.
  - más fiables.
  - más inmunes al ruido.
  - pueden implementarse funciones complejas más fácilmente.
- Inconveniente de los sistemas digitales: la mayor parte de las señales en la naturaleza son analógicas.

# Introducción

## Ejemplo



## 1 Conversión Digital-Analógica

- Tipos de convertidores D/A

## 2 Conversión Analógico-Digital

- Fases del proceso de la conversión A/D
- Tipos de convertidores A/D

# Conversión Digital-Análogica

## Introducción



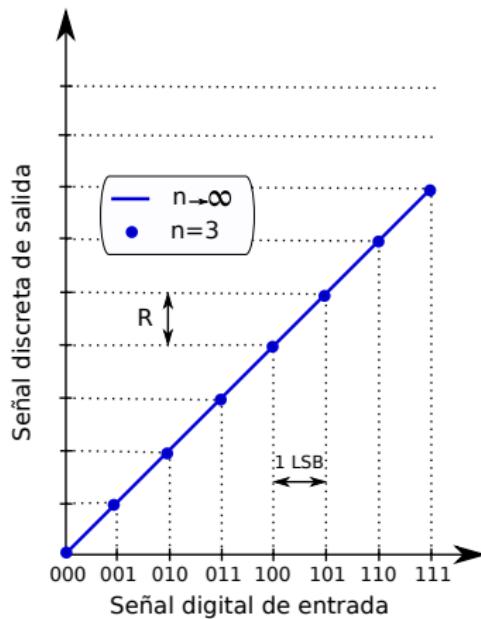
$$V_{\text{out}} = V_{\text{ref}} \left( b_{n-1} 2^{-1} + b_{n-2} 2^{-2} + \dots + b_0 2^{-n} \right) = V_{\text{ref}} B_{\text{in}} \quad (1)$$

- *Most Significant Bit* (MSB).
- *Less Significant Bit* (LSB).
- Fondo de escala (FE) =  $V_{\text{ref}} (1 - 2^{-n})$ .
- $V_{\text{LSB}} \equiv \frac{V_{\text{ref}}}{2^n}$

# Parámetros de un convertidor D/A

## Características estáticas

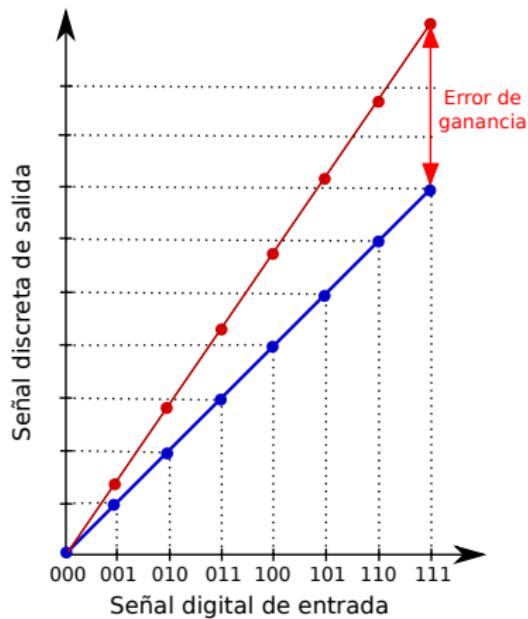
- Resolución.
- Error de ganancia.
- Error de *offset*.
- Monotonidad.



# Parámetros de un convertidor D/A

## Características estáticas

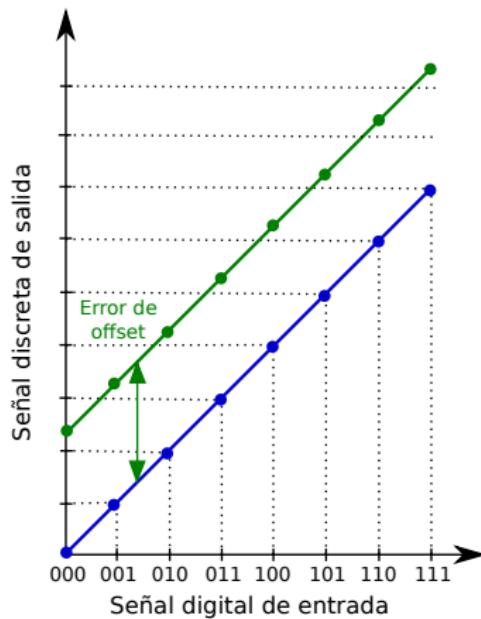
- Resolución.
- Error de ganancia.
- Error de *offset*.
- Monotonidad.



# Parámetros de un convertidor D/A

## Características estáticas

- Resolución.
- Error de ganancia.
- Error de *offset*.
- Monotonidad.



# Parámetros de un convertidor D/A

## Características dinámicas

- **Tiempo de establecimiento:** Es el tiempo que transcurre desde que se produce el cambio de código en la entrada hasta que la salida se encuentra dentro de un margen de error de  $\pm 1/2$  la resolución del convertidor respecto al valor final que debe tomar.
- **Velocidad de cambio de la salida:** Es el cociente entre la tensión de fondo de escala y el tiempo de establecimiento necesario para alcanzar el valor de fondo de escala partiendo de cero.
- **Frecuencia de conversión:** Es la frecuencia máxima a la que se puede cambiar el código digital de entrada obteniendo la salida que le corresponde.

## 1 Conversión Digital-Analógica

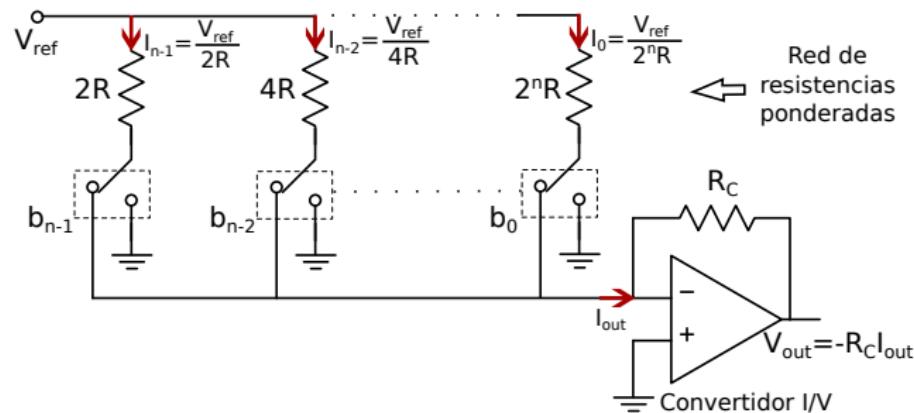
- Tipos de convertidores D/A

## 2 Conversión Analógico-Digital

- Fases del proceso de la conversión A/D
- Tipos de convertidores A/D

# Tipos de convertidores D/A

## Convertidor D/A de resistencias ponderadas

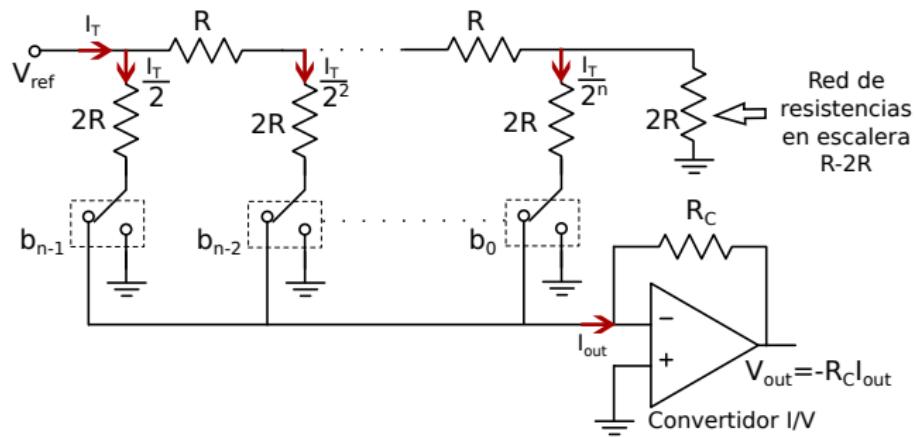


$$V_{\text{out}} = -R_C I_{\text{out}} = -V_{\text{ref}} \frac{R_C}{2^n R} \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i \quad (2)$$

**Inconveniente:** es necesario utilizar resistencias de valores muy distintos y con tolerancias muy pequeñas.

# Tipos de convertidores D/A

## Convertidor D/A en escalera R-2R



$$V_{out} = -R_C I_{out} = -V_{ref} \frac{R_C}{2^n R} \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i \quad (3)$$

# Tipos de convertidores D/A

## Criterios de selección

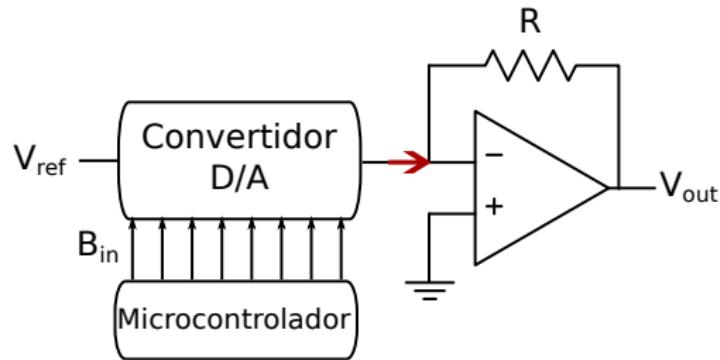
Algunos de los parámetros más importantes que hay que tener en cuenta a la hora de elegir un convertidor D/A son:

- Código digital de entrada.
- Número de bits del convertidor.
- Frecuencia de conversión.
- Alimentación disponible.

# Tipos de convertidores D/A

## Ejemplo de aplicación de los convertidores D/A

- Además de constituir una parte esencial de algunos tipos de conversores A/D, los convertidores D/A se utilizan en muchas otras aplicaciones.
- Aplicaciones más comunes: amplificadores controlados digitalmente, potenciómetros digitales, integradores programables o filtros controlados digitalmente.



## 1 Conversión Digital-Analógica

- Tipos de convertidores D/A

## 2 Conversión Analógico-Digital

- Fases del proceso de la conversión A/D
- Tipos de convertidores A/D

# Conversión Analógico-Digital

## Introducción



$$V_{ref} \left( b_{n-1}2^{-1} + b_{n-2}2^{-2} + \dots + b_02^{-n} \right) = V_{in} \pm V_x \quad (4)$$

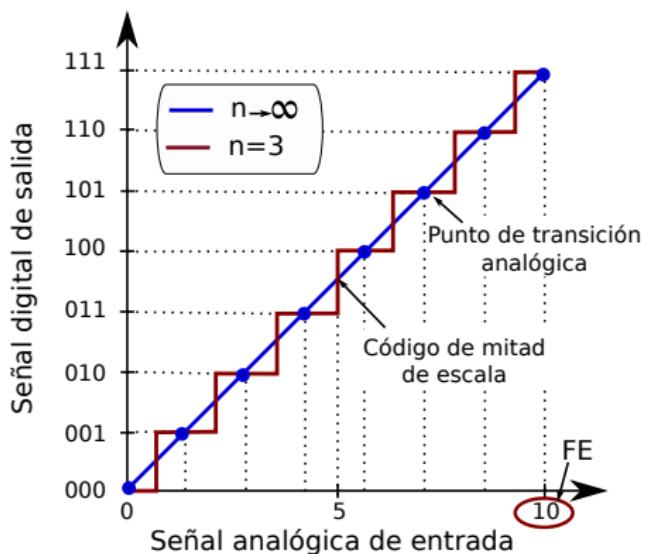
donde

$$-\frac{1}{2}V_{LSB} \leq V_x \leq \frac{1}{2}V_{LSB}$$

# Conversión Analógico-Digital

## Introducción

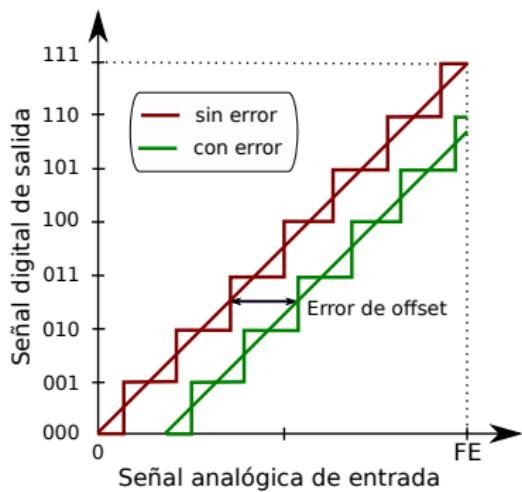
- Error de cuantificación.



# Parámetros de un convertidor A/D

## Características estáticas

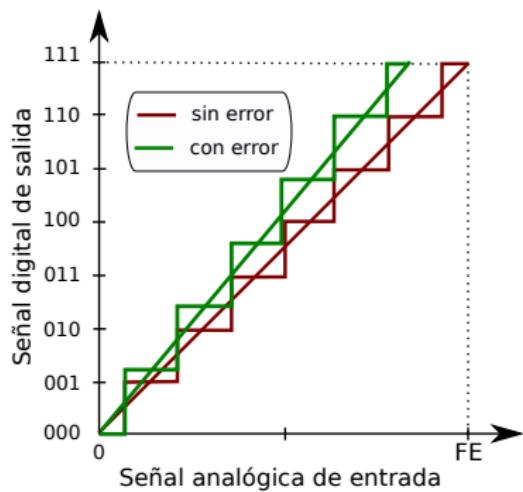
- Margen de entrada.
- Resolución.
- Error de *offset*.
- Error de ganancia.
- Monotonidad.



# Parámetros de un convertidor A/D

## Características estáticas

- Margen de entrada.
- Resolución.
- Error de *offset*.
- Error de ganancia.
- Monotonidad.



# Parámetros de un convertidor A/D

## Características dinámicas

- **Tiempo de conversión:** Es el tiempo necesario para que el convertidor realice una conversión.
- **Frecuencia de conversión:** Es la máxima frecuencia a la cual el convertidor puede ofrecer datos estables en su salida.

## 1 Conversión Digital-Analógica

- Tipos de convertidores D/A

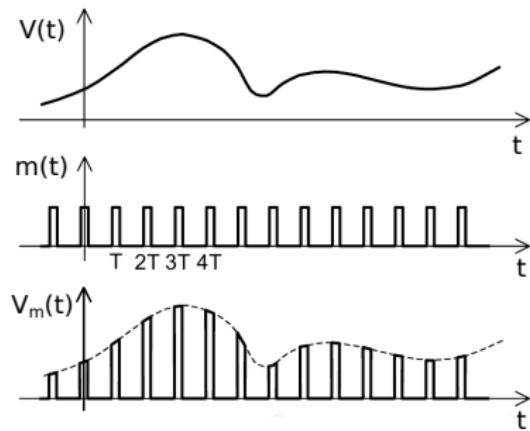
## 2 Conversión Analógico-Digital

- Fases del proceso de la conversión A/D
- Tipos de convertidores A/D

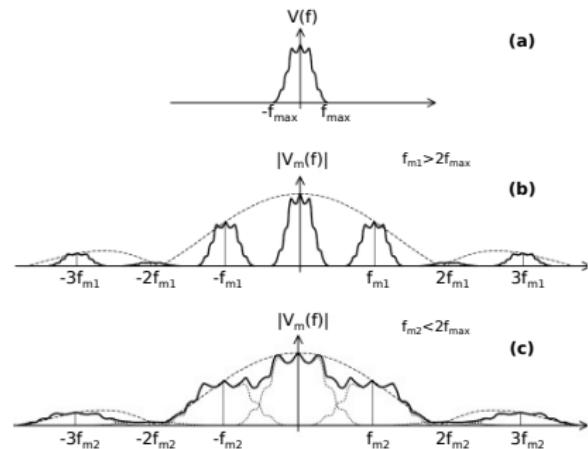
# Fases del proceso de la conversión A/D

## Fase de muestreo

La señal analógica de entrada es discreta: muestreo.



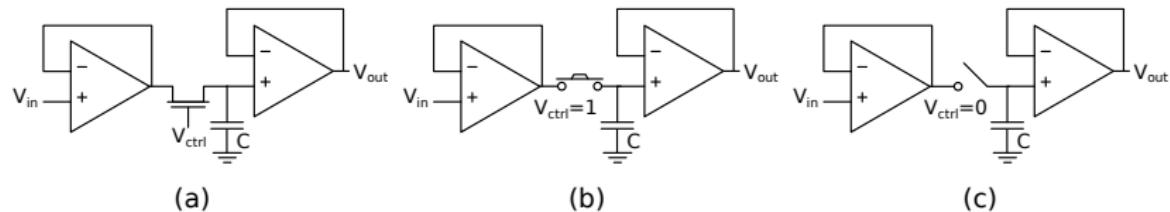
Teorema de Nyquist: *aliasing*



# Fases del proceso de la conversión A/D

## Fase de mantenimiento

- Durante el tiempo que se tarda en transformar la señal analógica a digital, ha de mantenerse el valor de la señal muestreada.
- Circuitos de muestreo y mantenimiento (*Sample & hold*).



# Fases del proceso de la conversión A/D

## Fases de cuantificación y codificación

### Fase de cuantificación

- La cuantificación de una señal consiste en representarla mediante una serie finita de niveles de amplitud o estados de salida.

### Fase de codificación

- La codificación es el proceso de representar de forma unívoca cada uno de los estados de salida (finitos) del cuantificador por un símbolo elegido de un alfabeto finito.
- Códigos unipolares.
- Códigos polares.

## 1 Conversión Digital-Analógica

- Tipos de convertidores D/A

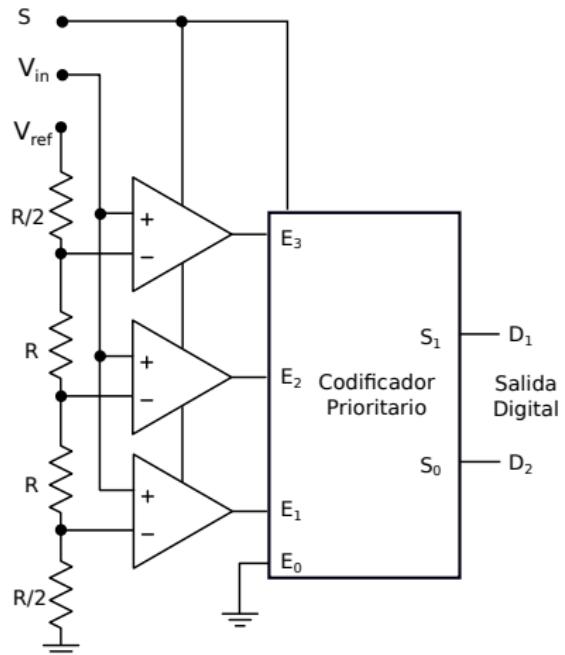
## 2 Conversión Analógico-Digital

- Fases del proceso de la conversión A/D
- Tipos de convertidores A/D

# Tipos de convertidores A/D

## Convertidor A/D paralelo o flash

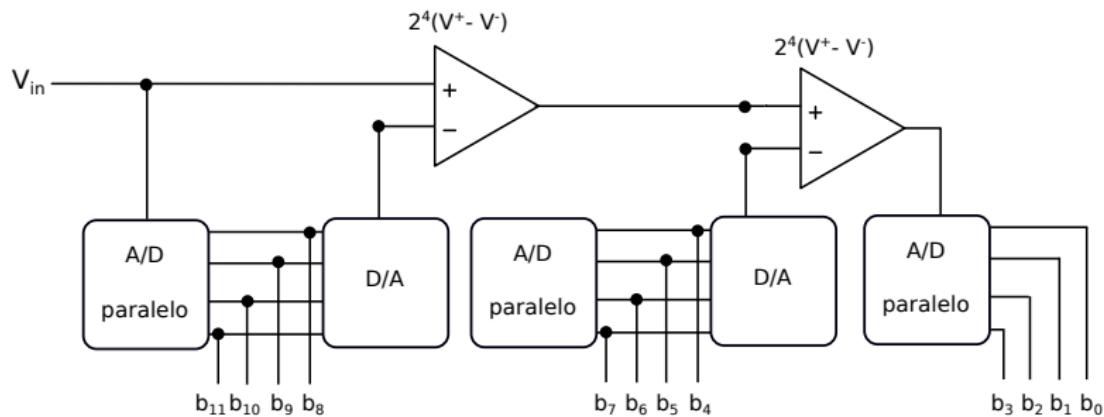
- Se necesitan  $2^n - 1$  comparadores.
- Convertidor muy rápido → consume mucha energía.



# Tipos de convertidores A/D

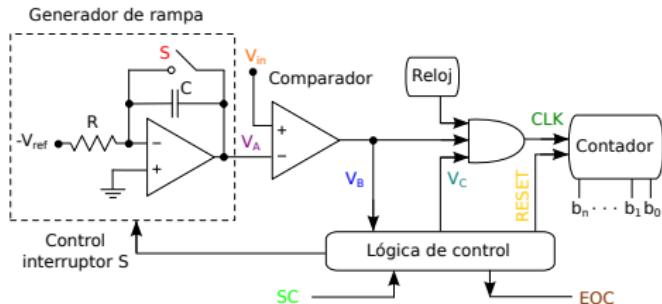
## Convertidor A/D paralelo o half-flash

- Solución para aumentar la resolución manteniendo una velocidad de conversión alta.

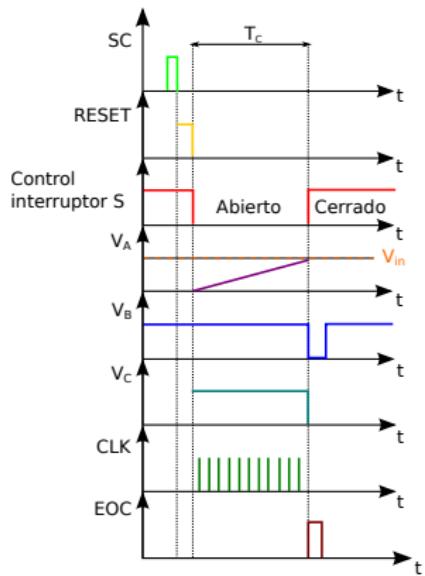


# Tipos de convertidores A/D

## Convertidor A/D de pendiente simple

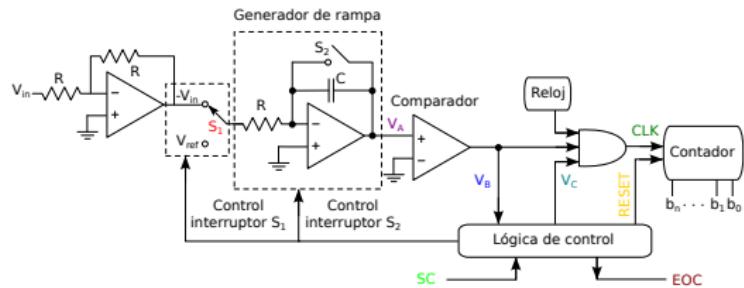


- $N = [f_{CLK} T_C] = \left[ f_{CLK} R C \frac{V_{in}}{V_{ref}} \right]$ .
- Si  $f_{CLK} R C = 2^n$  se obtiene un conversor de  $n$  bits.

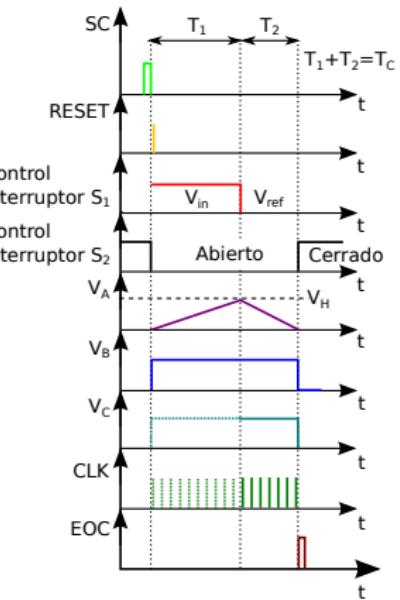


# Tipos de convertidores A/D

## Convertidor A/D de pendiente doble

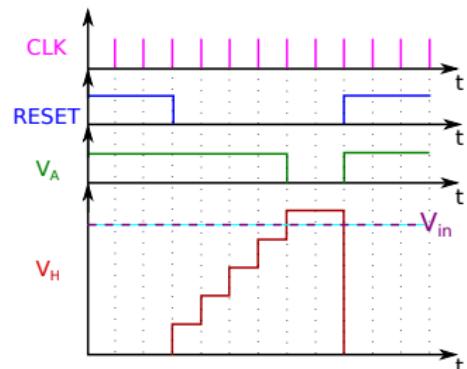
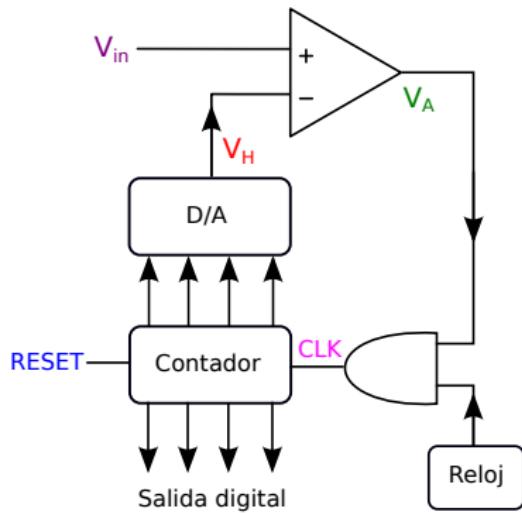


- Subida:  $V_H = \frac{V_{in}}{R C} T_1$ .
- Bajada:  $V_H = \frac{V_{ref}}{R C} T_2$ .
- $N_2 = \left[ \frac{V_{in}}{V_{ref}} N_1 \right]$ .



# Tipos de convertidores A/D

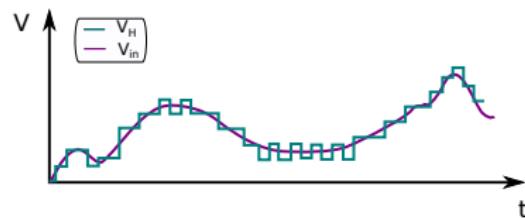
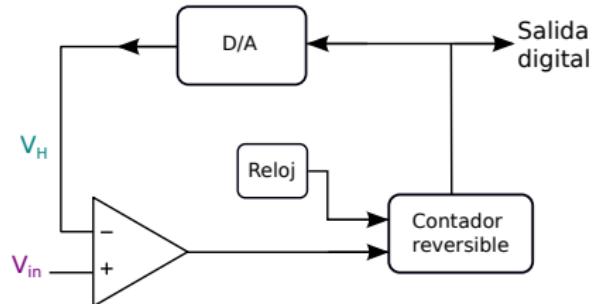
## Convertidor A/D de rampa en escalera



- $T_C$  depende del valor de la señal de entrada.

# Tipos de convertidores A/D

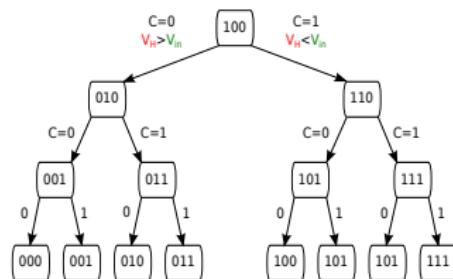
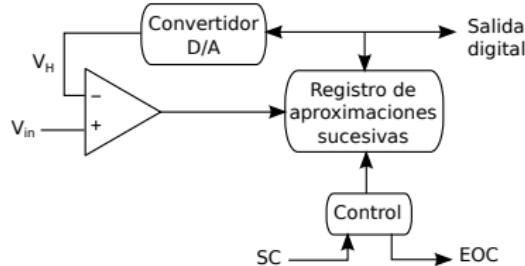
## Convertidor A/D rastreador o de seguimiento



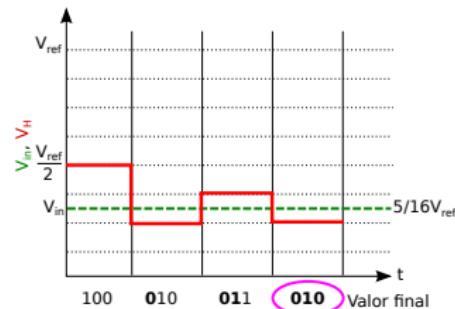
- Ventaja: no es necesario resetear → conversión rápida y continua.
- Inconveniente: señales constantes.

# Tipos de convertidores A/D

## Convertidor A/D de aproximaciones sucesivas



- Permite una velocidad de conversión considerable y una resolución alta a bajo coste.
- Tiene un tiempo de conversión constante y menor que el de otros convertidores A/D realimentados.



# Tipos de convertidores A/D

## Criterios de selección

Algunos de los parámetros más importantes que hay que tener en cuenta a la hora de elegir un convertidor A/D son:

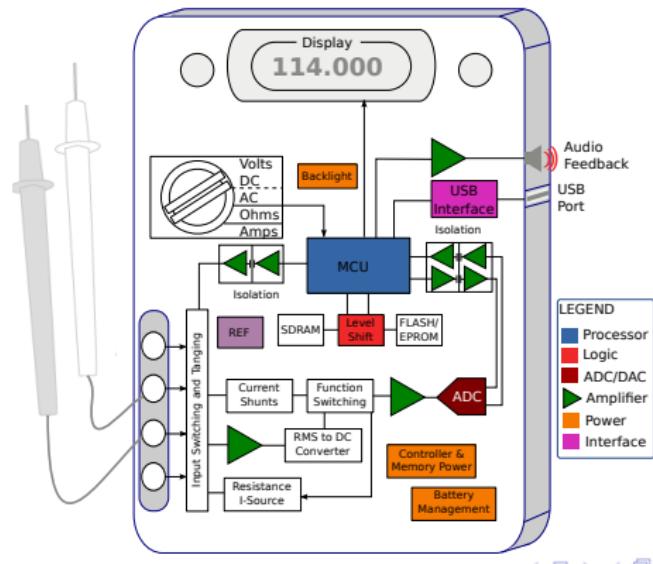
- Coste.
- Velocidad.
- Consumo.
- Resolución.
- Precisión.

Convertidor	Precisión	Nº de bits	Tiempo de conversión
Paralelo	Media	4-8	ns
Semiparalelo	Media	8-14	$\mu$ s
Doble rampa	Media-Alta	8-12	ms
Aprox. Sucesivas	Alta	8-16	$\mu$ s

# Tipos de convertidores A/D

## Ejemplo de aplicación de los convertidores A/D

- Los convertidores A/D están presentes en todos aquellos sistemas donde una señal analógica se quiera procesar, almacenar o transportar de forma digital.
- Análisis de datos analógicos con ordenador, sistemas de comunicaciones digitales, sistemas de reproducción musical, equipos de medida, etc.



# Fundamentos Físicos y Tecnológicos

## Tema 6. El Amplificador Operacional

Isabel M. Tienda Luna

Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores  
Universidad de Granada

[isabelt@ugr.es](mailto:isabelt@ugr.es)

Grado en Informática  
Curso 2012-2013

- 1 Introducción
- 2 Características de los Amplificadores
- 3 El Amplificador Operacional
- 4 Aplicaciones lineales del Amplificador Operacional

## 1 Introducción

## 2 Características de los Amplificadores

## 3 El Amplificador Operacional

## 4 Aplicaciones lineales del Amplificador Operacional

# Introducción

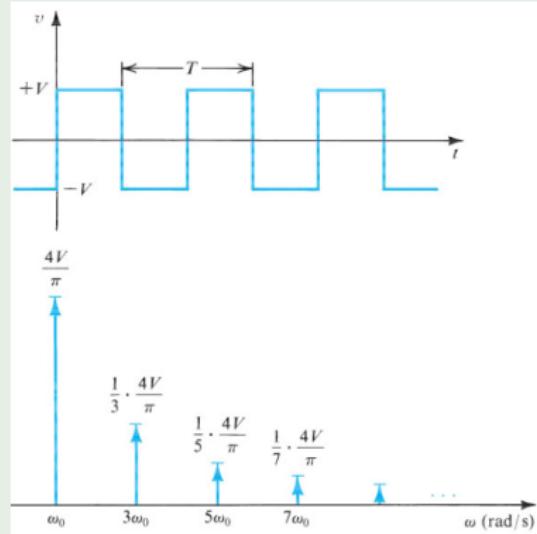
- Las señales contienen información sobre los fenómenos que ocurren en el mundo que nos rodea.
- Para extraer esta información, es necesario procesar dichas señales de la forma más conveniente por sistemas electrónicos.
- Para ello, las señales deben de convertirse en señales eléctricas (voltaje o corriente) por medio de transductores. Pero los transductores producen señales débiles ⇒ Necesitamos **amplificar** las señales.
- Una caracterización muy útil de una señal es en términos de su espectro de frecuencias. El espectro de frecuencias de una señal se calcula mediante una serie de herramientas matemáticas (series de Fourier o transformada de Fourier) que permiten representar la señal como suma de señales sinusoidales de diferentes frecuencias y amplitudes.

$$v(t) = \sum_i V_i \cos(\omega_i t)$$

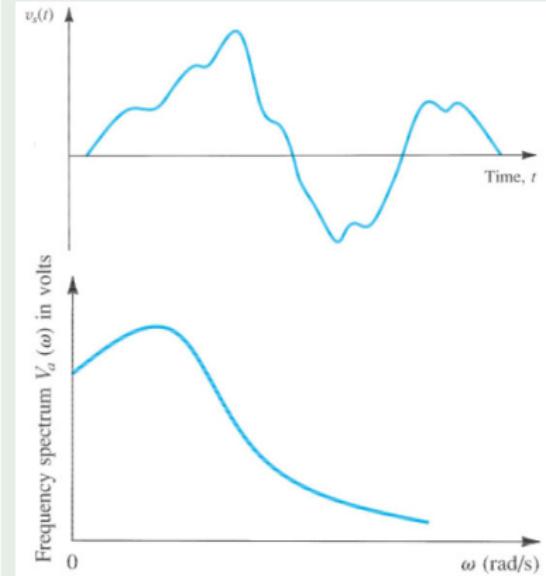
- De esta forma, una señal puede representarse en el dominio del tiempo ( $v(t)$ ) o en el dominio de la frecuencia ( $V(\omega)$ ).

# Introducción

## Señal Periódica



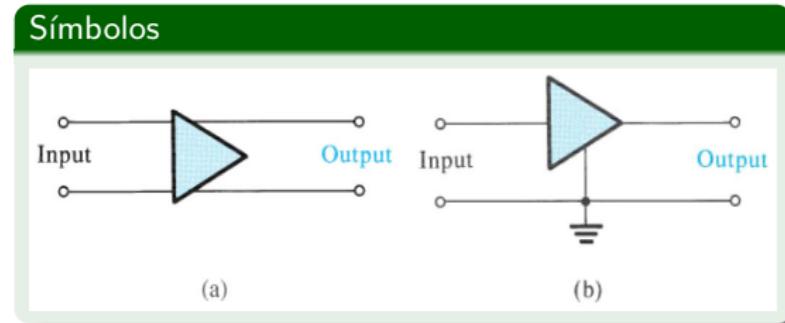
## Señal Arbitraria



- 1 Introducción
- 2 Características de los Amplificadores
- 3 El Amplificador Operacional
- 4 Aplicaciones lineales del Amplificador Operacional

# Generalidades

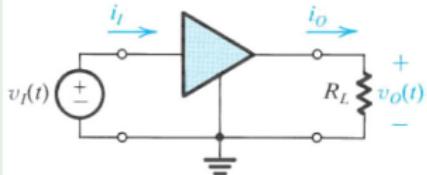
- La amplificación es una función fundamental en el procesado de las señales.
- Símbolo



- En amplificadores lineales, la señal de salida es una réplica exacta de la de entrada, salvo que tiene mayor magnitud.

# Ganancia

Circuito



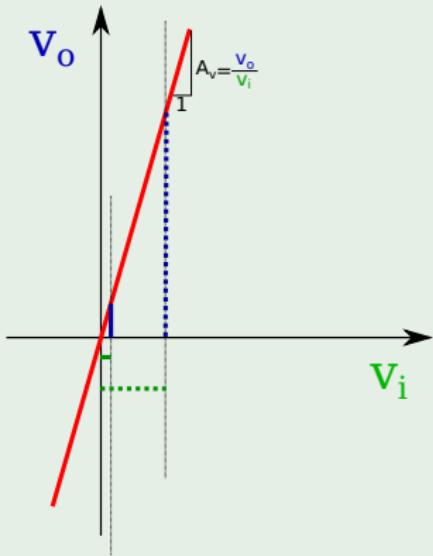
- Ganancia de voltaje.

$$A_v \equiv \frac{v_o}{v_i} \Rightarrow 20 \log |A_v| dB$$

- Ganancia de corriente.

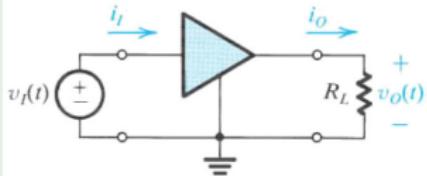
$$A_i \equiv \frac{i_o}{i_i} \Rightarrow 20 \log |A_i| dB$$

Representación gráfica



# Ganancia

Circuito



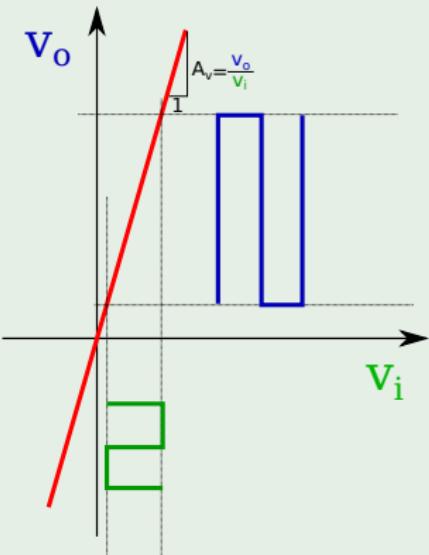
- Ganancia de voltaje.

$$A_v \equiv \frac{v_o}{v_i} \Rightarrow 20 \log |A_v| dB$$

- Ganancia de corriente.

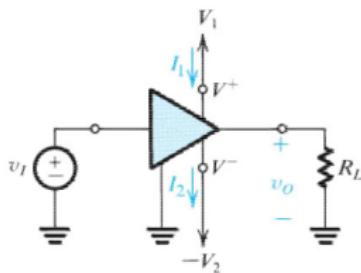
$$A_i \equiv \frac{i_o}{i_i} \Rightarrow 20 \log |A_i| dB$$

Representación gráfica



# Saturación

- Fenómeno de Saturación. La característica de transferencia permanece lineal sólo un intervalo limitado de voltajes de entrada y salida. Alimentación.

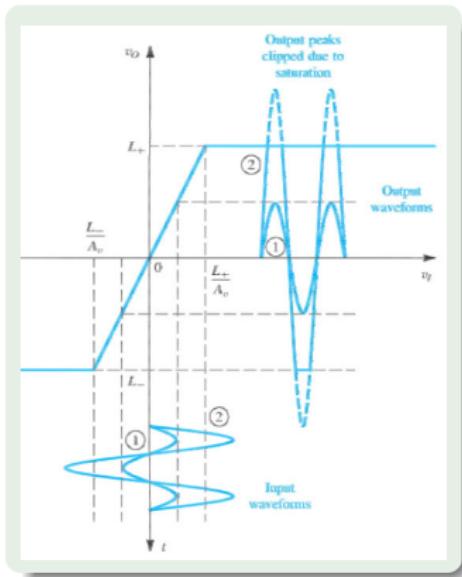


- $L_-$  y  $L_+$  son los valores de saturación positivos y negativos respectivamente.

$$L_- \leq v_o \leq L_+$$

- Para evitar la distorsión:

$$\frac{L_-}{A_v} \leq v_i \leq \frac{L_+}{A_v}$$



# Saturación: ejemplo

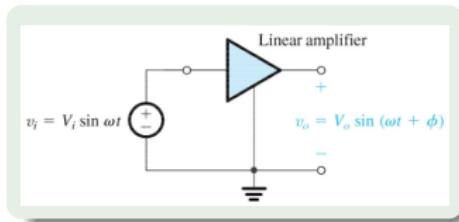
Supongamos que  $A_v = \frac{v_o}{v_i} = 3$ ,  $L_+ = 15V$  y  $L_- = -15V$ , entonces:

- Si  $v_i = 2V \Rightarrow v_o = 3 \cdot 2V = 6V$ , como  $6V < L_+ \Rightarrow v_o = 6V$
- Si  $v_i = 4V \Rightarrow v_o = 3 \cdot 4V = 12V$ , como  $12V < L_+ \Rightarrow v_o = 12V$
- Si  $v_i = 6V \Rightarrow v_o = 3 \cdot 6V = 18V$ , como  $18V > L_+ \Rightarrow v_o = L_+ = 15V$
- Si  $v_i = -4V \Rightarrow v_o = 3 \cdot (-4V) = -12V$ , como  $-12V > L_- \Rightarrow v_o = -12V$
- Si  $v_i = -6V \Rightarrow v_o = 3 \cdot (-6V) = -18V$ , como  $-18V < L_- \Rightarrow v_o = L_- = -15V$

En este caso, para evitar la distorsión:

$$\begin{aligned} \frac{L_-}{A_v} &\leq v_i \leq \frac{L_+}{A_v} \\ \frac{-15V}{3} &\leq v_i \leq \frac{15V}{3} \\ -5V &\leq v_i \leq 5V \end{aligned}$$

# Respuesta en frecuencia



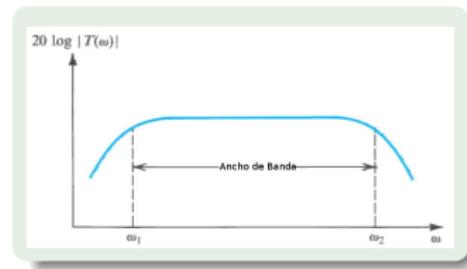
- La **respuesta en frecuencia** es una caracterización importante del amplificador en términos de su respuesta a señales sinusoidales de entrada de frecuencias diferentes.
- Matemáticamente la caracterizamos a través de la **función de transferencia del propio amplificador** ( $T(\omega)$ ) que describe la respuesta del amplificador a una señal sinusoidal de frecuencia  $\omega$ .

$$|T(\omega)| = \frac{V_o}{V_i} \quad \arg(T(\omega)) = \phi$$

- Para calcular  $T(\omega)$  es necesario analizar el modelo de circuito equivalente del amplificador: analizar en el dominio de la frecuencia con impedancias y/o admitancias para obtener la función de transferencia.

# Respuesta en frecuencia

- Para representar la respuesta en frecuencia se usa el diagrama de Bode, tanto en amplitud como en fase.
- El **ancho de banda** del amplificador es la banda de frecuencias sobre la que la ganancia del amplificador es casi constante, a menos de cierto número de decibelios (por lo general 3dB).



1 Introducción

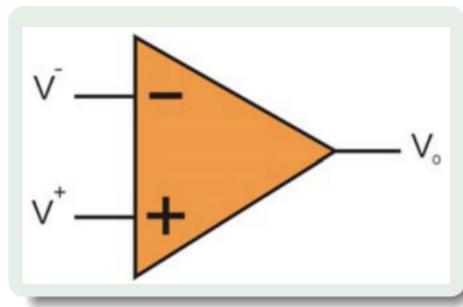
2 Características de los Amplificadores

3 El Amplificador Operacional

4 Aplicaciones lineales del Amplificador Operacional

# Generalidades

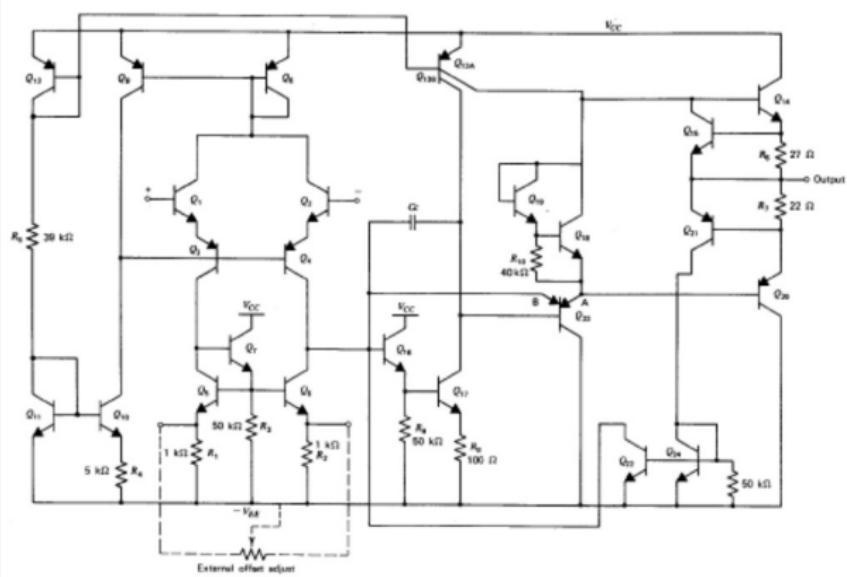
- El Amplificador Operacional (AO) es un amplificador de gran ganancia, utilizado para realizar operaciones lineales y no lineales sin más que cambiar los elementos externos tales como resistencias, condensadores, diodos, etc.
- Símbolo del Amplificador Operacional:



# Esquemático

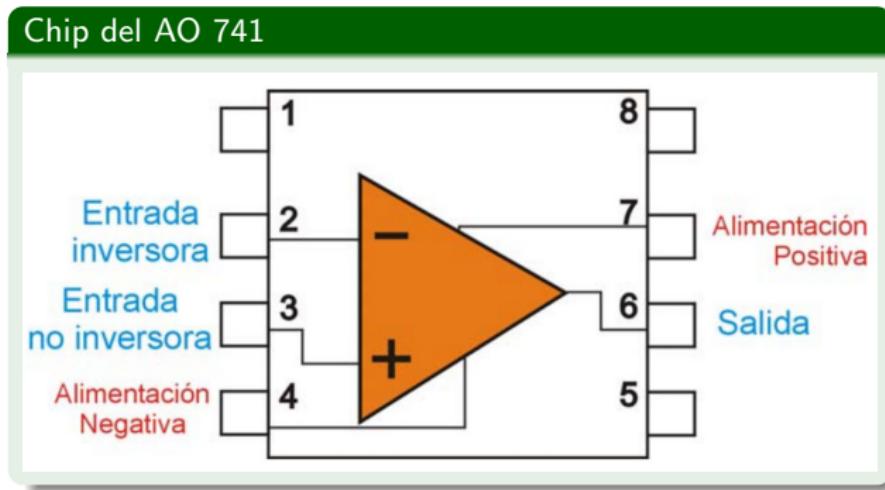
El amplificador operacional está compuesto por muchos transistores.

Esquemático del AO 741: 24 transistores



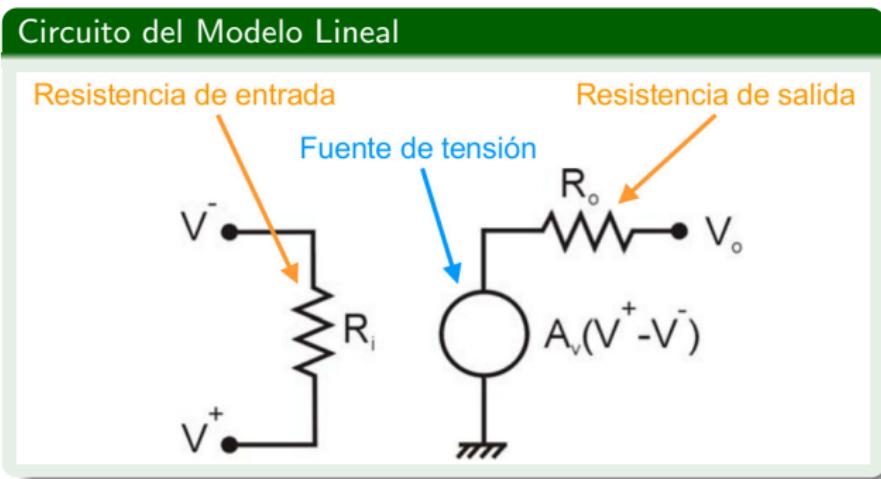
# Chip

En el laboratorio se trabaja con un chip.



# Modelo Lineal

Cuando el comportamiento del AO es **lineal**, se puede sustituir por el siguiente modelo lineal:

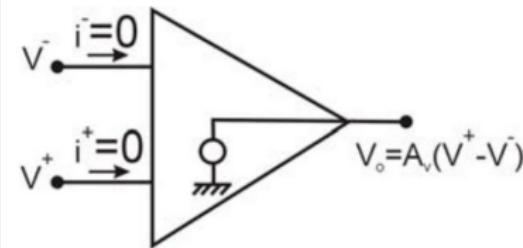


# Modelo Ideal

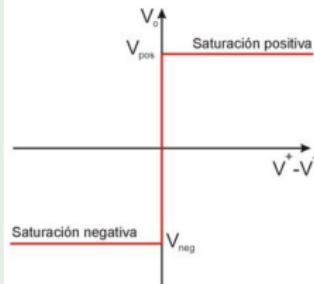
En el modelo ideal del AO se realizan las siguientes aproximaciones:

- Los límites de saturación son los voltajes de alimentación.
- $A_v$  es muy grande  $\Rightarrow A_v \rightarrow \infty$ .
- $R_i$  es muy grande  $\Rightarrow R_i \rightarrow \infty$ .
- $R_o$  es muy pequeña  $\Rightarrow R_o \rightarrow 0$  y  $V_o = A_v(V^+ - V^-)$ .
- Ancho de banda muy grande  $\Rightarrow B \rightarrow \infty$ .

Representación Modelo Ideal

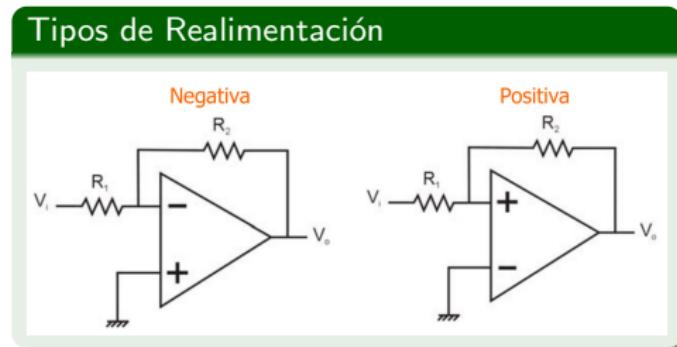


Característica



# Realimentación

- Amplificador Operacional en **lazo abierto**: no existe conexión entre salida y entrada.
- Amplificador Operacional con **realimentación**: se establece una conexión entre salida y entrada.
- Existen dos tipos de realimentación: positiva y negativa.



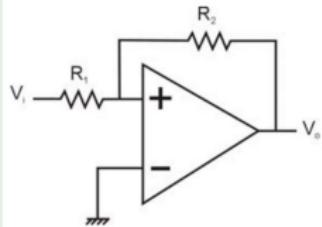
- ¿Para qué sirve conectar la salida y la entrada? Lo vemos a continuación...

# Realimentación

## Realimentación Positiva

- Si  $V^- > V^+ \Rightarrow (V^+ - V^-) < 0 \Rightarrow V_o \downarrow \Rightarrow V^+ \downarrow$   
 $\Rightarrow (V^+ - V^-) \downarrow \Rightarrow V_o \downarrow \Rightarrow V_o$  se limita a  $-V_{cc}$
- Si  $V^- < V^+ \Rightarrow (V^+ - V^-) > 0 \Rightarrow V_o \uparrow \Rightarrow V^+ \uparrow$   
 $\Rightarrow (V^+ - V^-) \uparrow \Rightarrow V_o \uparrow \Rightarrow V_o$  se limita a  $+V_{cc}$

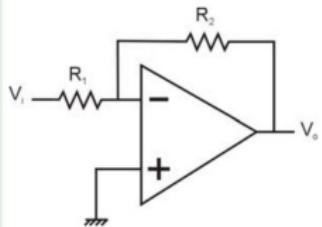
## Realimentación Positiva



## Realimentación Negativa

- Si  $V^- > V^+ \Rightarrow (V^+ - V^-) < 0 \Rightarrow V_o \downarrow \Rightarrow V^- \downarrow$   
 $\Rightarrow (V^+ - V^-) \uparrow \Rightarrow V_o \uparrow \Rightarrow$  Equilibrio  $V^- = V^+$
- Si  $V^- < V^+ \Rightarrow (V^+ - V^-) > 0 \Rightarrow V_o \uparrow \Rightarrow V^- \uparrow$   
 $\Rightarrow (V^+ - V^-) \downarrow \Rightarrow V_o \downarrow \Rightarrow$  Equilibrio  $V^- = V^+$

## Realimentación Negativa



- 1 Introducción
- 2 Características de los Amplificadores
- 3 El Amplificador Operacional
- 4 Aplicaciones lineales del Amplificador Operacional

# Generalidades

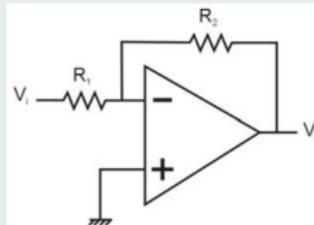
- El comportamiento del AO se considera **ideal** a la hora de analizar los circuitos.
- El AO opera en condiciones de **lazo cerrado**, en concreto con **retroalimentación negativa**.
- Las características del circuito dependerán de los valores externos.
- Las características del circuito son independientes de la ganancia interna del AO y de  $R_i$  y  $R_o$ .
- Los circuitos que vamos a estudiar son:
  - Configuración inversora y configuración no inversora.
  - Sumador inversor y sumador no inversor.
  - Derivador.
  - Integrador.

# Configuración inversora

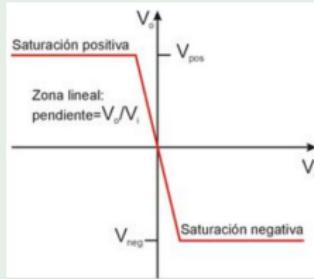
## Análisis del circuito:

- Condiciones ideales:  $i^- = i^+ = 0A$
- Leyes de Kirchoff:  $\frac{V_i - V^-}{R_1} = \frac{V^- - V_o}{R_2}$
- Realimentación negativa:  $V^- = V^+$   
 $\Rightarrow$  como  $V^+ = 0V \Rightarrow V^- = 0V$

## Circuito



## Transferencia

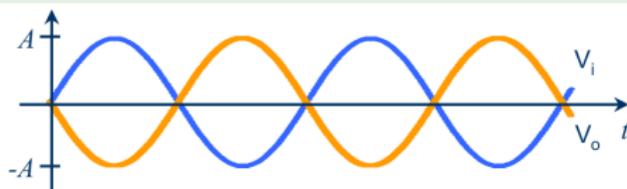


## Característica de transferencia:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

# Configuración inversora

## Ejemplo 1

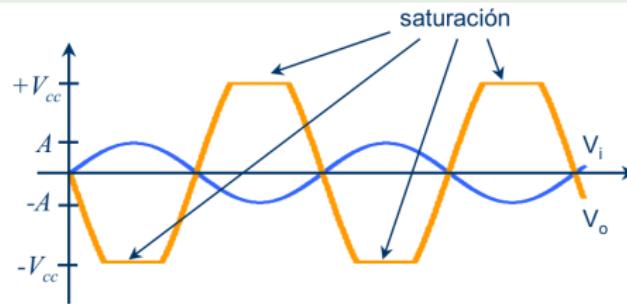


$$V_i = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$A =$$

$$R_l = R_2$$

## Ejemplo 2



$$V_i = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$A = 5$$

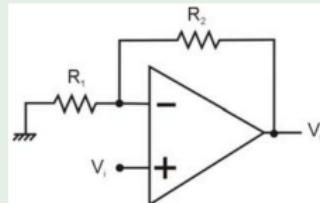
$$R_2 = 4R_1$$

# Configuración no inversora

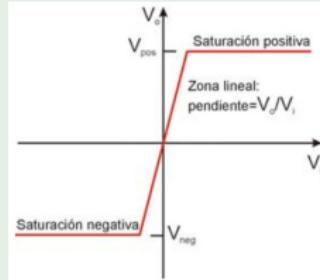
## Análisis del circuito:

- Condiciones ideales:  $i^- = i^+ = 0A$
- Leyes de Kirchoff:  $\frac{0 - V^-}{R_1} = \frac{V^- - V_o}{R_2}$
- Realimentación negativa:  $V^- = V^+$   
 $\Rightarrow$  como  $V^+ = V_i \Rightarrow V^- = V_i$

## Circuito



## Transferencia

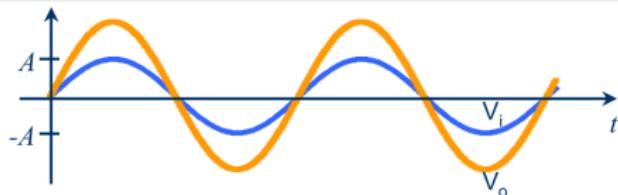


## Característica de transferencia:

$$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

# Configuración no inversora

## Ejemplo 3

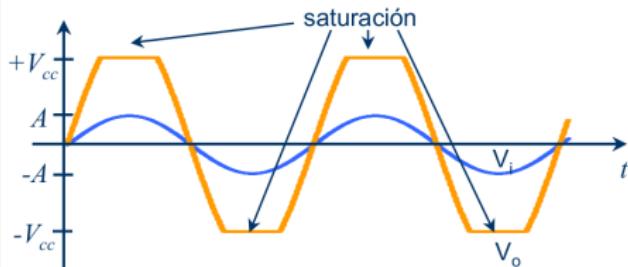


$$V_i = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$A =$$

$$R_2 = R_l$$

## Ejemplo 4



$$V_i = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$A = 5$$

$$R_2 = 3R_l$$

# Sumador

## Análisis del circuito inversor:

- Condiciones ideales:  $i^- = i^+ = 0A$

- Leyes de Kirchoff:

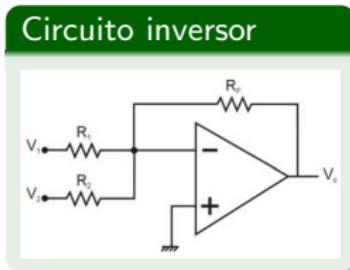
$$\frac{V_1 - V^-}{R_1} + \frac{V_2 - V^-}{R_2} = \frac{V^- - V_o}{R_E}$$

- Realimentación negativa:  $V^- = V^+$   
 $\Rightarrow$  como  $V^+ = 0 \Rightarrow V^- = 0$

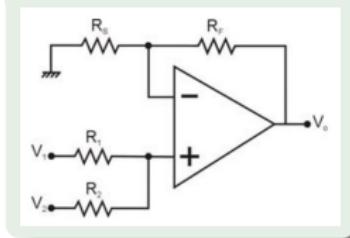
**Característica de transferencia del inversor:**

$$V_o = -R_F \left( \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \right)$$

Si  $R_1 = R_2 = R_F \Rightarrow V_o = -(V_1 + V_2)$   
**Analizar como ejercicio el no inversor:**



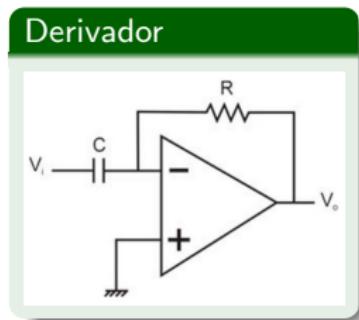
## Circuito no inversor



# Derivador

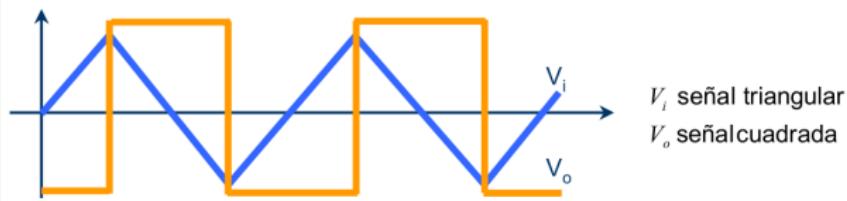
## Análisis del circuito:

- Condiciones ideales:  $i^- = i^+ = 0A$
- Realimentación negativa:  $V^- = V^+ \Rightarrow$  como  $V^+ = 0V \Rightarrow V^- = 0V$
- Ecuación para el condensador:  
 $i_c(t) = C \frac{dv_i(t)}{dt}$
- En el dominio del tiempo: la señal de salida es la derivada de la señal de entrada:  
 $v_o(t) = -RC \frac{dv_i(t)}{dt}$
- En el dominio de la frecuencia:  
 $V_o(\omega) = -RCj\omega V_i(\omega)$



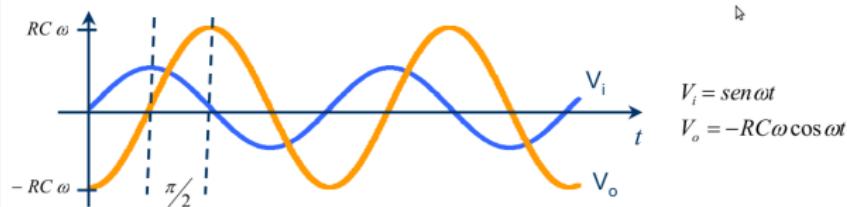
# Derivador

## Ejemplo 5



$V_i$  señal triangular  
 $V_o$  señal cuadrada

## Ejemplo 6

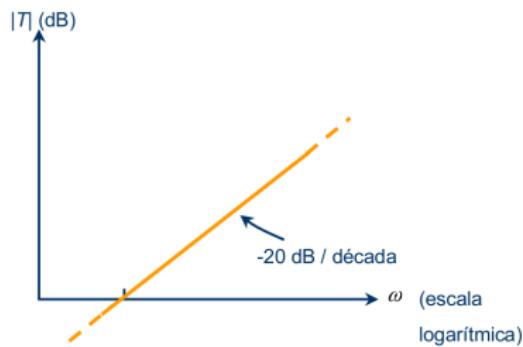


$$V_i = \sin \omega t$$

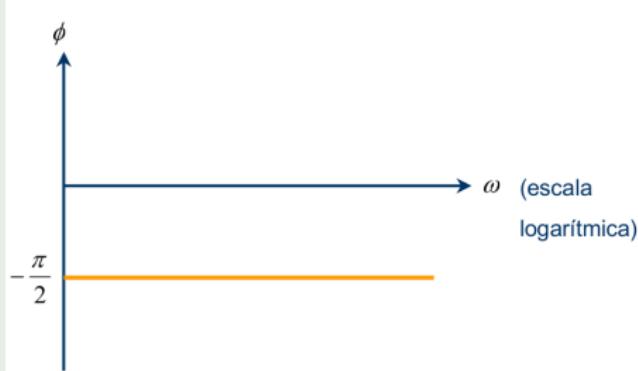
$$V_o = -RC\omega \cos \omega t$$

# Derivador

Bode en amplitud



Bode en fase



$$|T(j\omega)| = RC\omega$$

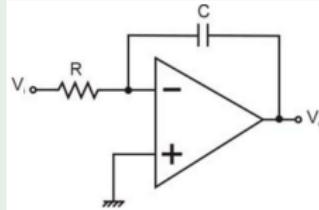
$$\phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

# Integrador

## Análisis del circuito:

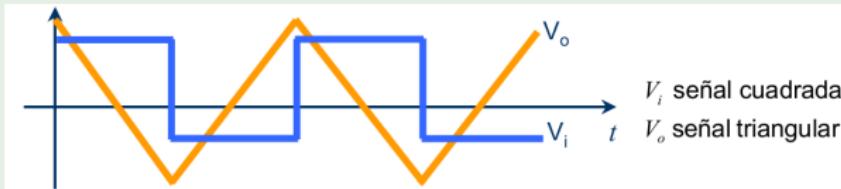
- Condiciones ideales:  $i^- = i^+ = 0A$
- Realimentación negativa:  $V^- = V^+ \Rightarrow$  como  $V^+ = 0V \Rightarrow V^- = 0V$
- Ecuación para el condensador:  
 $i_c(t) = C \frac{dv_o(t)}{dt}$
- En el dominio del tiempo: la señal de salida es la integral de la señal de entrada:  
 $v_i(t) = -RC \frac{dv_o(t)}{dt} \Rightarrow$   
 $v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int v_i(t) dt$
- En el dominio de la frecuencia:  
 $V_o(\omega) = -\frac{1}{RCj\omega} V_i(\omega)$

Integrador

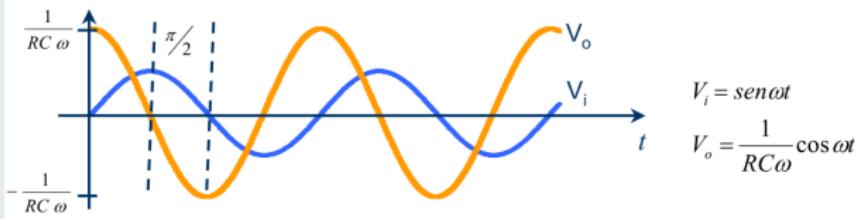


# Integrador

## Ejemplo 7



## Ejemplo 8



# Integrador

- **Problema de estabilidad:** en continua el condensador se comporta como un circuito abierto y no hay realimentación negativa. Cualquier pequeña componente de continua en  $V_i$  teóricamente produce una salida infinita.

$$v_i(t) = \sin(\omega t) + k$$

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int (\sin(\omega t) + k) dt$$

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \left( -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) + kt + V_o(0) \right)$$

- En la práctica, la salida del amplificador se satura a un voltaje cercano  $+V_{cc}$  o  $-V_{cc}$ , dependiendo de la polaridad de la señal de entrada.
- **Solución:** El problema de ganancia muy alta en continua del integrador se resuelve al conectar  $R_2$  en paralelo con el condensador. Esta resistencia cierra el circuito de realimentación y proporciona una ganancia finita en continua de  $-R_2/R_1$ .

# Integrador

- Al introducir la resistencia  $R_2$ , la función de transferencia resultante es:

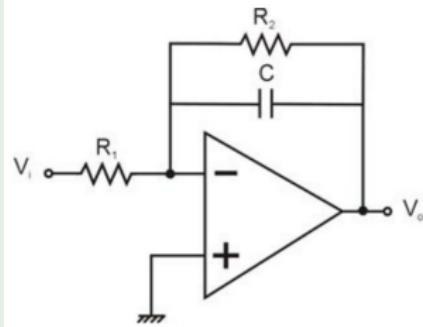
$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1+R_2 C j\omega}$$

- Filtro paso-bajo de frecuencia de corte:  
 $\omega_0 = (R_2 C)^{-1}$

- Si  $\omega > \omega_0 \Rightarrow \frac{V_o}{V_i} \approx -\frac{1}{R_1 C j\omega}$

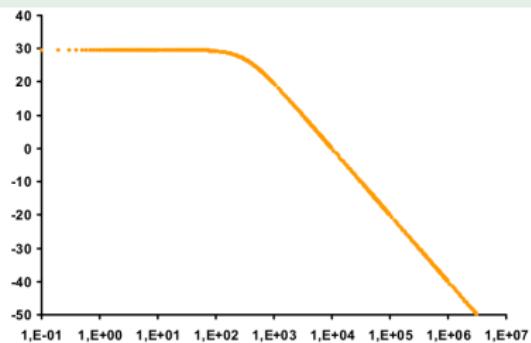
- El integrador resultante ya no es ideal, pero se puede reducir al mínimo la imperfección seleccionando una  $R_2$  tan grande como sea posible.

## Integrador Modificado

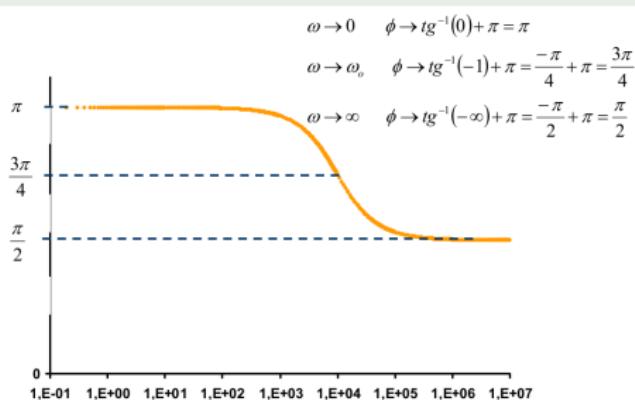


# Integrador

Bode en amplitud



Bode en fase



$$|T(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + (R_2 C \omega)^2}}$$