
Ejercicios tipo de Aritmética

Ejercicio 1. Da la expresión en bases 4, 8 y 16 de los naturales que en base 2 se escriben:

1. 101101100010011010111
2. 10001000000100110
3. 1011101111011111

Ejercicio 2. Escribe en las bases 2, 8 y 16 los números naturales que en base 10 se escriben:

1. 23
2. 512
3. 65537

Ejercicio 3. Sean $x = 48572_{16}$ e $y = 95883_{16}$. Expresa el valor de $x + y$ en base 8.

Ejercicio 4. Encuentra los sistemas o bases de numeración, si existe alguno, para los que se verifica cada una de las siguientes igualdades:

1. $3 \times 4 = 22$,
2. $41 \times 14 = 1224$,
3. $52 \times 25 = 1693$,

Ejercicio 5. Enumera los divisores positivos de 120, y calcula cuántos divisores tiene el número 118800.

Ejercicio 6. Determina la factorización como producto de números primos de $10!$ y $15!$. ¿Cuántos divisores tiene cada uno de ellos?

Ejercicio 7. Encuentra todas las parejas de números a, b tales que $\text{mcd}(a, b) = 210$ y $\text{mcm}(a, b) = 840$.

Ejercicio 8. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tal que b es divisor de a y $a + 2$. Demuestra que $b = 1$ ó $b = 2$.

Ejercicio 9. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ primos relativos. Demuestra que si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$. Estudia que pasa si $\text{mcd}(a, b) \neq 1$.

Ejercicio 10. Dado un número entero n , demuestra que $\text{mcd}(8n + 3, 5n + 2) = 1$.

Ejercicio 11. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Demuestra que el máximo común divisor de $35a + 57$ y $45a + 76$ vale 1 ó 19. ¿Para que valores de a es este máximo común divisor igual a 19?

Ejercicio 12. Calcula las soluciones enteras de cada una de las siguientes ecuaciones diofánticas:

1. $2x + 3y = 7$.
2. $6x + 10y = 16$.

3. $232x - 341y = 17$.

Ejercicio 13. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación diofántica

$$210x - 91y = 77$$

que verifiquen que $-500 \leq x, y \leq 500$?

Ejercicio 14. En \mathbb{Z}_{300} realiza, si es posible, los siguientes cálculos:

- $25 \cdot 60$.
- $127 \cdot (-100)$.
- 237^{-1} .
- $13 - 50 \cdot 101^{-1}$.
- Encuentra $x \neq 0$ tal que $111 \cdot x = 0$.
- Encuentra x tal que $13x + 25 = 32x - 50$.
- Encuentra x tal que $11x - 100 = 45x + 12$.

Ejercicio 15. Calcula, si es posible, 1392^{-1} en \mathbb{Z}_{7585} .

Ejercicio 16. Calcula el resto de dividir 4225^{1850} entre 1237.

Ejercicio 17. Demuestra que:

1. Un número escrito en base 10 es un múltiplo de 3 si, y sólo si, la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
2. Un número escrito en base 10 es un múltiplo de 9 si, y sólo si, la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.

Ejercicio 18. Resuelve las siguientes congruencias:

1. $3x \equiv 2 \pmod{5}$,
2. $17x \equiv 45 \pmod{92}$,
3. $3276x \equiv 1239 \pmod{531}$.

Ejercicio 19. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en congruencias:

1.
$$\begin{cases} x \equiv 1 & (\text{mód } 2) \\ 6x \equiv 3 & (\text{mód } 9) \\ 3x \equiv 3 & (\text{mód } 5) \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x \equiv 123 & (\text{mód } 371) \\ x \equiv 331 & (\text{mód } 644) \end{cases}$$

Ejercicio 20. Resuelve la congruencia $1211^{399}n \equiv 20 \pmod{17}$.

Ejercicio 21. Encuentra un número entero cuyo resto al dividirlo entre 5 sea 3 y que al multiplicarlo por 3 y dividirlo entre 4 dé resto 1.

Ejercicio 22. Calcula los números que hay entre 20000 y 30000 que terminen en 39, al escribirlos en base 4 terminan en 33, y al escribirlos en base 8 acaban en 37.

Ejercicio 23. Calcula las raíces en \mathbb{Z}_5 del polinomio $x^2 + x + 4$.

Ejercicio 24. Calcula en $\mathbb{Z}_7[x]$ el resto de dividir

1. $x^7 + x^2 + 1$ entre $x - 1$,
2. $x^n + 1$ entre $x - 1$.

Ejercicio 25. Calcula el resto de dividir el polinomio $x^{1321} + 5$ por el polinomio $x + 3$ en el anillo $\mathbb{Z}_7[x]$.

Ejercicio 26. Calcula todos los polinomios irreducibles de grado dos en $\mathbb{Z}_2[x]$

Ejercicio 27. Demuestra que el polinomio $x^4 + x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$.

Ejercicio 28. Calcula un máximo común divisor de $a(x)$ y $b(x)$ en los siguientes casos:

1. $a(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $b(x) = x^4 - 1$ en $\mathbb{Z}_5[x]$.
2. $a(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $b(x) = x^2 + 2$ en $\mathbb{Z}_3[x]$.

Ejercicio 29. Sea $A = \mathbb{Z}_2[x]_{x^3+1}$.

1. Calcula las unidades de A , y da, en cada caso, su inverso. ¿Es la suma de dos unidades una unidad? ¿Y el producto?
2. Calcula los divisores de cero. Para cada uno de ellos, encuentra un elemento no nulo de A que al multiplicarlo por él de cero. ¿Es la suma de dos divisores de cero un divisor de cero? ¿Y el producto?.