WUOLAH

Tema-3-Resumen.pdf

Blancabril

Lógica y Métodos Discretos

1º Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.


PRESUME DE SONRISA
Escanea este código y estrena tu ortodoncia invisible
AL TERMINAR TU TRATAMIENTO
BLANQUEAMIENTO* DENTAL GRATIS
*Blanqueamiento bajo prescripción médica. Promoción no acumulable a otros descuentos y/o promociones. CS10715
VITALDENT Queremos verte sonreír
VITALDENT Queremos verte sonreír

1. Introducción

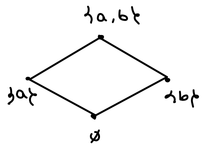
Un grafo viene dado por un conjunto V al que llamamos conjunto de vértices y L es un conjunto al que llamaremos conjunto de lados que unen nodos pertenecientes a V.

Los grafos se pueden representar con:

1. Se puede hacer el diagrama de Hasse de un conjunto ordenado $(A, \leq)$. En este caso $V := A$ y L es el conjunto de pares ordenados $(a_i, a_j) \in A \times A$ tal que $a_i < a_j$ y no existe ningún elemento $a_k \in A \to a_i < a_k < a_j$

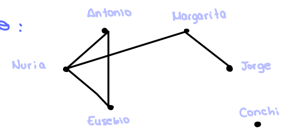
Ejemplo: $(P(\{a,b\}, \subseteq)$.

$V = P(\{a,b\})$ y $L = \{(\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\}), (\{a\}, \{a,b\}), (\{b\}, \{a,b\})\}$



2. En un conjunto se considera la relación binaria $a R b$ que en un conjunto de personas e indica que la persona a conoce a la persona b. Por lo tanto, R es simétrica

Ejemplo:

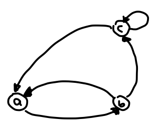


V = {Antonio, Margarita, Jorge, Conchi, Eusebio, Nuria}

$L = \{\{a,b\} : a, b \in X,\ a \neq b,\ a$ y b se conocen$\}$

- En esta situación:
  - → Eusebio conoce a Nuria y Antonio.
  - → Antonio conoce a Eusebio y a Nuria.
  - → Nuria conoce a Antonio, Eusebio y Margarita.
  - → Margarita conoce a Nuria y Jorge
  - → Jorge conoce a Margarita
  - → Conchi esta sola.

3. En un mapa turístico de una ciudad señalamos lugares más emblemáticos (puntos), y lineas de autobús y calles para circular (lados) y tambien puede haber calles con circulación en 2 sentidos o 1 sentido.



Teniendo esto vemos que a y b son de doble sentido entre ellas.
Y de "b" a "c" y de "c" a "a" es de único sentido.

Un grafo dirigido o u orientado viene dado por conjuntos V (conjunto de vértices) y L (conjunto de lados) y por dos aplicaciones $ini : L \to V$ y $fin : L \to V$ y se denominan aplicaciones de incidencia. Si $\ell \in L \to ini(\ell)$ y $fin(\ell)$ son el vértice inicial y final del lado ℓ.

Para dibujar un grafo ponemos un punto por cada elemento de V y un segmento por cada elemento $\ell \in L$ que va del punto $ini(\ell)$ hasta $fin(\ell)$.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

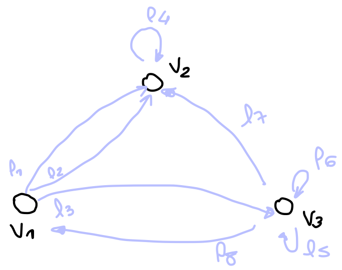
Ejemplo: Sea el grafo G:

$V = \{v_1, v_2, v_3\}$

$L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8\}$

Aplicaciones $ini, fin : L \to V$ son:

- $ini(l_1) = v_1$; $ini(l_2) = v_1$; $ini(l_3) = v_1$; $ini(l_4) = v_2$;
- $fin(l_1) = v_2$; $fin(l_2) = v_2$; $fin(l_3) = v_3$; $fin(l_4) = v_2$;
- $ini(l_5) = v_3$; $ini(l_6) = v_3$; $ini(l_7) = v_3$; $ini(l_8) = v_3$;
- $fin(l_5) = v_3$; $fin(l_6) = v_3$; $fin(l_7) = v_2$; $fin(l_8) = v_1$;



También es posible definir un grafo dirigido G con los conjuntos V y L de vértices y lados y una aplicación $\varphi : L \to V \times V \;\to\; \varphi(l) = (ini(l), fin(l))$.

Escribimos $G(V, L, \varphi)$.

Ejemplo: Usando el ejemplo anterior:

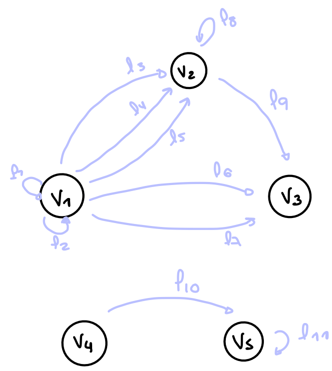
$\varphi(l_1) = (v_1, v_2)$; $\varphi(l_2) = (v_1, v_2)$; $\varphi(l_3) = (v_1, v_3)$; $\varphi(l_4) = (v_2, v_2)$; $\varphi(l_5) = (v_3, v_3)$; $\varphi(l_6) = (v_3, v_2)$;
$\varphi(l_7) = (v_3, v_2)$; $\varphi(l_8) = (v_3, v_1)$;

Un grafo no dirigido o multigrafo son 2 conjuntos V y L de vertices y de lados y una aplicación:
$f : L \to \{\{v\} : v \in V\} \cup \{\{u, v\} : u, v \in V, \text{ con } u \neq v\}$

Con un grafo multigrafo se representa con un punto por cada elemento de V, y a continuación para cada elemento de V y para cada elemento de $l \in L$ dibujamos un segmento que une los puntos u y v si $f(l) = \{u, v\}$, o bien el punto correspondiente a v consigo mismo si $f(l) = \{u\}$.

Ejemplo: Sea el multigrafo G dado por:

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
- $L = \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, l_{10}, l_{11}\}$
- Aplicación: $f(l_1) = f(l_2) = \{v_1\}$; $f(l_3) = f(l_4) = f(l_5) = \{v_1, v_2\}$
  $f(l_6) = f(l_7) = \{v_1, v_3\}$; $f(l_8) = \{v_2\}$, $f(l_9) = \{v_2, v_3\}$
  $f(l_{10}) = \{v_4, v_5\}$ $f(l_{11}) = \{v_5\}$.



Dado un grafo dirigido o no dirigido, $V(G)$ es el conjunto de los vértices de G y por $L(G)$ el conjunto de los lados.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Compra Coins y descarga sin publicidad.

2. Conceptos básicos

Sea G un grafo no dirigido. Si $\ell \in L(G)$ y $f(\ell) = \{u\}$ se dice que ℓ es un autolazo de G. Si ℓ_1 y $\ell_2 \in L(G)$ y $f(\ell_1) = f(\ell_2) = \{u, w\}$ con $v \neq w$ se dice que ℓ_1 y ℓ_2 son lados pararelos de G.

En el ejemplo anterior los autolazos son $\ell_1, \ell_2, \ell_8, \ell_{11}$ osea que es con el mismo. Por otra parte, ℓ_3, ℓ_4 y ℓ_5 son lados pararelos entre sí.

Grafo $\longrightarrow$ grafo no dirigido sin autolazos ni lados parazelos.

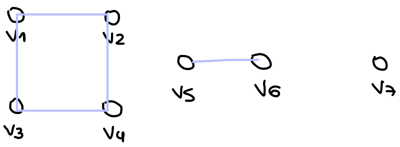
Un grafo G viene dado por conjuntos V y L, siendo V un conjunto cuyos elementos se denominan vértices y L un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de V de cardinal 2. Escribimos $G = (V, L)$.

Dos vértices son adyacentes $u, v \in V(G)$ si $\{u, v\} \in L(G)$ y se escribe $u \sim v$.
Dos lados son adyacentes si tienen un vértice en común.

El grado de un vértice $v \in V(G)$ es el número de vértices de G que son adyacentes con v. Designaremos por $gr_G(v)$ el grado del vértice v de G. Un grafo G se dice que es regular de grado d si todo vértice G tiene grado d.

Si $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ diremos que $gr_G(v_1), \dots, gr_G(v_n)$ es una secuencia de grados.

Ejemplo: Sea el grafo $G = (V, L)$ donde:
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ y $L = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_5, v_6\}\}$



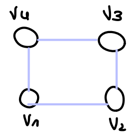
- v_2 y v_3 son adyacentes.
- El grado de $v_1, v_2, v_3, v_4 = 2$

  El grado de $v_5, v_6 = 1$

  El grado de $v_7 = 0$.

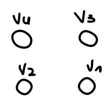
Por lo tanto G no es un grafo regular.

Ejemplo: El grafo G dado por el siguiente dibujo y de grado 2:



La secuencia es 2, 2, 2, 2

Ejemplo: El grafo G dado por el siguiente dibujo es regular de grado 0:



La secuencia es 0, 0, 0, 0

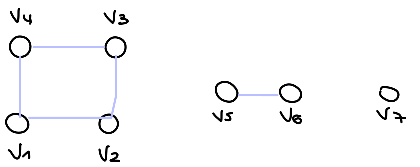
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Compra Coins y descarga sin publicidad.

Proposición 1: Teorema de Euler. En todo grafo G se verifica que: $\boxed{\sum_{v\in V(G)} gr(v) = 2.|L(G)|}$
Osea que cada lado de G aporta 2 unidades a la suma total de grados.

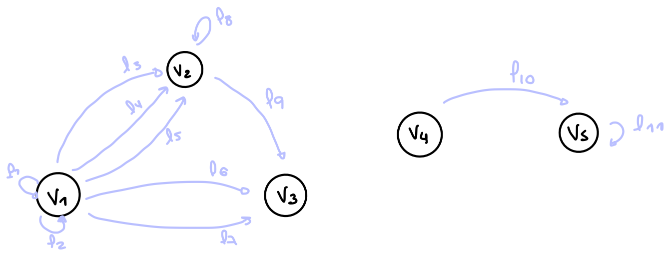
Ejemplo: Ilustramos el teorema de Euler para el grafo de G siguiente:



$$\sum_{v\in V(G)} gr_G(v) = 2+2+2+2+1+1 = 10$$

Como $|L(G)| = 5 = 2.5 = 10$

El teorema de Euler puede ser extendido al caso de multigrafos. Para ello, cada autolazo aporta 2 unidades al grado del vértice.



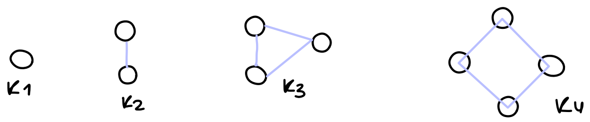
$gr(V_1) = 9$ $gr(V_2) = 6$ $gr(V_3) = 3$ $gr(V_4) = 1$

$gr(V_5) = 3$

$$\sum_{v\in V(G)} gr_G(v) = 9+6+3+1+3 = 22$$

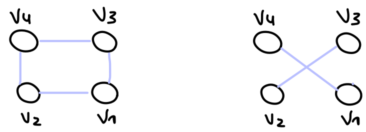
Un grafo es completo cuando dos vértices de G distintos son adyacentes y se le representa como K_n.

Ejemplo:



Proposición 2: K_n es un grafo regular de grado $n-1$. Es un nuevo grafo denotado por $\overline{G}$ y definido por
$V(\overline{G}) = V(G)$
$L(\overline{G}) = \{\{u,v\} : u,v \in V(G),\ u\neq v,\ \{u,v\} \in L(G)\}$
Es decir, $\overline{G}$ es un nuevo grafo cuyos vértices son los mismos de G y cuyos lados son aquellos que le faltan a G para ser un grafo completo. $\overline{\overline{G}} = G$.

Ejemplo: Los dos siguientes son complementarios:



Dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos de G_1 y G_2. Es inmediato probar que φ^{-1} es un isomorfismo de G_2 en G_1. Escribimos $G_1 \cong G_2$ para que G_1 y G_2 son isomorfos. Osea son isomorfos cuando la representación gráfica es la misma. Es como "superponer" un grafo sobre el otro.

Si $\varphi : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$ es un isomorfismo del grafo G_1 en G_2, entonces para cualquier $v \in V(G_1)$ y se verifica que $gr_{G_1}(v) = gr_{G_2}(\varphi(v))$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Compra Coins y descarga sin publicidad.

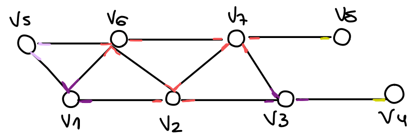
PRESUME DE SONRISA
Escanea este código y estrena tu ortodoncia invisible
AL TERMINAR TU TRATAMIENTO
BLANQUEAMIENTO* DENTAL GRATIS
*Blanqueamiento bajo prescripción médica. Promoción no acumulable a otros descuentos y/o promociones. CS10715
VITALDENT Queremos verte sonreír
VITALDENT Queremos verte sonreír

Proposición 3: Si los grafos G_1 y G_2 son isomorfos $\begin{cases} 1. |V(G_1)| = |V(G_2)| \\ 2. |L(G_1)| = |L(G_2)| \\ 3. \text{Para todo } d \in \mathbb{N}, \text{ nº de vértices } G_1 = \\ \quad \text{nº vértices } G_2 \text{ con grado } d \text{ ambos.} \end{cases}$

3. Secuencias de grados

Def: La secuencia de grados de un grafo es aquella formada por todos los grados de sus vértices ordenados de manera decreciente. Si tenemos una lista con los grados de los vértices de un grafo y no ordenamos → secuencia de grados.

Ejemplo:



4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1 → 1, 2, 4, 3, 4, 3, 1, 4

Y por tanto, dos grafos pueden tener la misma secuencia de grados y no ser isomorfos.

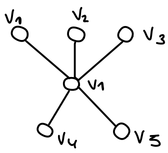
Una secuencia de números naturales se dice que es gráfica, si es secuencia de grados de algún grafo.

Ejemplo:
Una secuencia de ceros o $2n$ es gráfica mientras que una secuencia $2n+1$ (1, 3, 5, ...), no es gráfica porque en cualquier grafo el número de vértices ha de ser par.
Por tanto, la secuencia 4, 3, 3, 2, 2, 1 no es gráfica mientras que la secuencia 2, 2, 2, 2, 2 es gráfica. También la secuencia 5, 4, 3, 2, 2 no es gráfica pues en un grafo de 5 vértices el grafo mayor es 4.

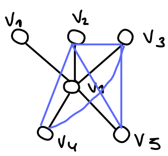
Dep: Si $d_1, d_2, \dots, d_n$ es una secuencia gráfica entonces $\begin{cases} - \sum_{j=1}^{n} d_j \text{ es par} \\ - 0 \le d_j \le n-1 \text{ para todo } j = 1, \dots, n \end{cases}$

↳ No es suficiente como vemos ahora:

Ejemplo: La secuencia 5, 4, 4, 2, 2, 1 no es una gráfica aunque cada valor esté entre 0 y 6 − 1 y la suma sea par.



$gr(V_1) = 1$ y $gr(V_2) = gr(V_3) = 4$
$gr(V_4) = 2$ $\quad gr(V_5) = 2$ →



$gr(V_4) = gr(V_5) = 3$
↓
No gráfica
Suma grados = 19

WUOLAH
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Teorema de Havel-Hakimi: Sea $s: d_1, d_2, \dots, d_n$ una secuencia decreciente de números naturales. Entonces s es gráfica si y sólo si la secuencia $s': d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$ es gráfica.

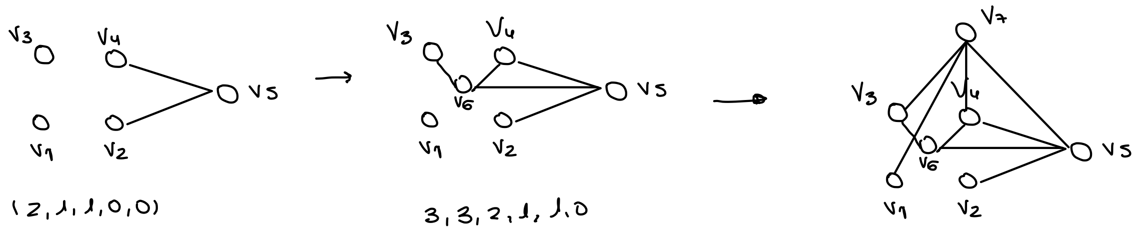
Ejemplo: la secuencia 5, 4, 4, 2, 2, 1:

$5, \overbrace{4, 4, 2, 2, 1} \longrightarrow 3, \overbrace{3, 1, 1}, 0 \longrightarrow 2, 0, 0, 0$. Como 2, 0, 0, 0 no es gráfica, por el teorema de Havel-Hakimi deducimos que la secuencia inicial tampoco.

Ejemplo: Tenemos la siguiente secuencia 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1

$5, \overbrace{4, 4, 3, 2, 1}, 1 \longrightarrow 3, \overbrace{3, 2, 1}, 0, 1 \longrightarrow 2, 1, 0, 1, 0 \longrightarrow 2, \overbrace{1, 1}, 0, 0 \longrightarrow 0, 0, 0, 0$

Como 0, 0, 0, 0 es una secuencia gráfica, por el Teorema de Havel-Hakimi tenemos que la secuencia dada también lo es.



Algoritmo de Havel-Hakimi

Entrada: una secuencia decreciente de números naturales.
Salida: Si en caso de que sea gráfica y No en caso de que no lo sea.

1. $s' := s$
2. Si en s' aparece algún elemento mayor que $l-1$, donde la longitud l es la longitud de s', devolver NO.
3. Si s' está formado todo por ceros, devolver Si.
4. Si s' contiene algún numero negativo, devolver No.
5. Reordenar s' cuando sea necesario.
6. Eliminar el primer elemento d_1 en s' y restarle 1 a cada uno de los elementos siguientes.

4. Caminos en un grafo F

Un camino de longitud k es un grafo G es una secuencia formada por k lados $l_1, l_2, \dots, l_k$ de G tales que l_j y l_{j+1} son adyacentes para todo $j = 1, \dots, k-1$.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Compra Coins y descarga sin publicidad.

Pero si consideramos que no hay grafos sin lados paralelos nos sale de la forma $\ell_j = \{v_{j-1}, v_j\}$ para $\boxed{j = 1, \dots, k}$ → $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$ y es un camino de v_0 a v_k.

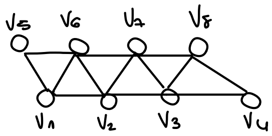
Si $u, v \in V(G)$ son dos vértices distintos, entonces u y v están conectados si existe en G al menos un camino de u a v. Entonces cualquier camino de longitud mínima que conecta u y v es una geodésica.

La distancia entre dos vértices conectados es $\boxed{d(u,v)}$ y es la mínima longitud

Def: Todo vértice $v \in V(G)$ está conectado consigo mismo mediante un camino vacío, donde no hay ningún lado y la longitud es 0 → $\boxed{d(v,v) = 0.}$

Si dos vértices dentro de un grafo están conectados, el grafo es conexo.

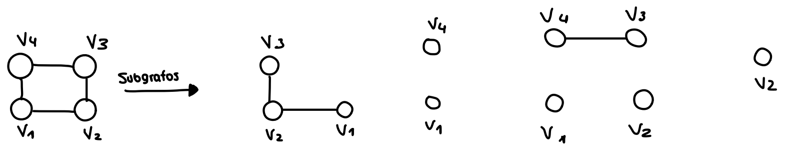
Ejemplo:



→ La secuencia es: v_1, v_5, v_6, v_7, v_8 → es un camino de longitud 6.
Para encontrar las geodésicas buscamos el camino mínimo para conectar v_1 con v_8. Sería: v_1, v_6, v_7, v_8 ó v_1, v_2, v_3, v_8.

Por tanto, la distancia de v_1 y v_8 = 3 → $d(v_1, v_8) = 3$.
Por otro lado, (v_2, v_3, v_7, v_2) y $(v_2, v_3, v_7, v_2, v_3, v_7, v_2)$ son caminos de v_2 a v_2.

Ejemplo: Sea el grafo G siguiente:



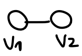
• Para que sea un subgrafo, los lados y los puntos tienen que aparecer en el grafo.

Un componente conexa de un grafo G es un subgrafo conexo maximal de G, es decir, es un subgrafo H de G tal que:

1. H es conexo.
2. Si H' es un subgrafo conexo de G tal que $H \subseteq H'$ → $H = H'$

Entonces un grafo G es conexo sii G consta de una única componente conexa.

Ejemplo:

• En G hay 3 componentes conexas, ya que hay 2 vértices conectados.
• Los vértices v_1 y v_5 no están conectados.
•  es un subgrafo.

•  es conexa.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

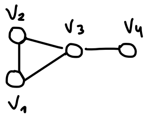
Compra Coins y descarga sin publicidad.

Dado un grafo $G(V,L)$, con $V=\{v_1,\dots,v_n\}$, la matriz adyacencia de G, denotada por $\Delta(G)$, es una matriz $n\times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. Si $\Delta(G)=(a_{ij})$:

$$a_{ij}\begin{cases} 0 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i\neq j \text{ y } \{v_i,v_j\}\notin L(G) \\ 1 \text{ si } i\neq j \text{ y } \{v_i,v_j\}\in L(G)\end{cases}$$

$\Delta(G)$ es simétrica y el número de 1 en la fila (columna) i-ésima de $\Delta(G)$ es igual a $gr_G(v_i)$ para cada $i=1\dots n$.

Ejemplo:



para la matriz adyacencia:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

para la ordenación v_1,v_2,v_3,v_4

y para el orden v_3,v_2,v_4,v_1 $\rightarrow$

$$B=\begin{array}{c} \begin{matrix} v_3 & v_2 & v_4 & v_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

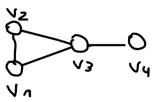
Proposición: Teoría del número de caminos. Sea el grafo $G(V,L)$ con $V=\{v_1,\dots,v_n\}$. Entonces para todo $k\in\mathbb{N}$, el número de caminos en G de longitud k desde v_i a v_j viene dado por el elemento que aparece en la fila i-enésima y en la columna j-ésima de la matriz $\Delta(G)^k$.

Ejemplo: Consideramos el ejemplo anterior:

$$\Delta=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ Calculamos la potencia:

$$\Delta^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad \Delta^3=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\quad \Delta^4=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 7 & 6 & 4 \\ 6 & 6 & 11 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\quad \Delta^4=\begin{pmatrix} 12 & 13 & 17 & 6 \\ 13 & 12 & 17 & 6 \\ 17 & 17 & 14 & 11 \\ 6 & 6 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

La representación es:



De aquí obtenemos que:

1. Los valores de la diagonal principal Δ^2 son los grados de los vértices.
2. Fila 2, Columna 3 de Δ^3 nos dice que hay 4 caminos de longitud 3 en v_2 hasta v_3 y son
   - v_2, v_3, v_2, v_3
   - v_2, v_3, v_4, v_3
   - v_2, v_3, v_1, v_3
   - v_2, v_1, v_2, v_3
3. 2 caminos empiezan y acaban en v_4: $\begin{cases} v_4, v_3, v_1, v_2, v_3, v_4 \\ v_4, v_3, v_2, v_1, v_3, v_4 \end{cases}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

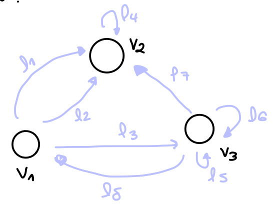
WUOLAH

Compra Coins y descarga sin publicidad.


PRESUME DE SONRISA
Escanea este código y estrena tu ortodoncia invisible
AL TERMINAR TU TRATAMIENTO
BLANQUEAMIENTO* DENTAL GRATIS
*Blanqueamiento bajo prescripción médica. Promoción no acumulable a otros descuentos y/o promociones. CS10715
VITALDENT Queremos verte sonreír
VITALDENT Queremos verte sonreír

5. Grafos dirigidos

Si G es un grafo dirigido y $v \in V(G)$, el **grado de salida** $gr^+_G(v)$ de v como el número de flechas que salen de v y el **grado de entrada** $gr^-_G(v)$ de v es el número de flechas que llegan a v.



salen 3

$gr^+_G(v_1) = 3$ $\quad gr^+_G(v_2) = 1$ $\quad gr^+_G(v_3) = 4$

$gr^-_G(v_1) = 1$ $\quad gr^-_G(v_2) = 4$ $\quad gr^-_G(v_3) = 3$

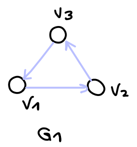
llega 1

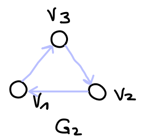
Proposición: Teorema de Euler para grafos dirigidos. En todo grafo dirigido G se verifica que $\sum_{v \in V(G)} gr^+_G(v) = |L(G)| = \sum_{v \in V(G)} gr^-_G(v)$

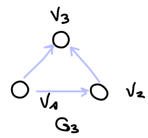
Si aplicamos esto al grafo anterior $1+4+3=8$, $3+4+1=8$

Isomorfismo de grafos dirigidos: dos grafos dirigidos $G_1 = (V_1, L_1, \varphi_1)$ y $G_2 = (V_2, L_2, \varphi_2)$ son isomorfos si existen aplicaciones biyectivas $\theta = V_1 \to V_2$ y $\sigma = L_1 \to L_2$ tq $\varphi_1(l) = (u,v)$ y si $\varphi_2(\sigma(l)) = \theta$ para todo $l \in L_1$ y $u, v \in V_1$. En tal caso, se escribe $G_1 \cong G_2$.

Ejemplo:

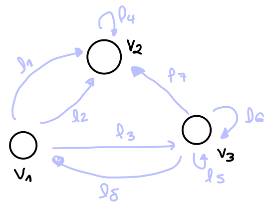






entonces G_1 y G_2 son isomorfos, pero G_3 no lo es. Ya que siguiendo el camino de las flechas no se puede llegar a v_1.

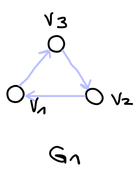
Ejemplo:

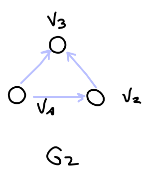


- La secuencia l_1, l_4, l_4 es un camino de longitud 3 para llegar a v_2 desde v_1.
- $d(v_1, v_2) = 1$ ya que es el camino de longitud mínima.
- El vértice v_1 esta conectado a v_2 pero no al contrario.

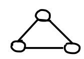
Un grafo dirigido es **conexo** cuando su grafo asociado también lo es. Y es **fuertemente conexo** si para $v_i, v_j \in V(G)$ existe algún camino dirigido de v_i a v_j.

Ejemplo:





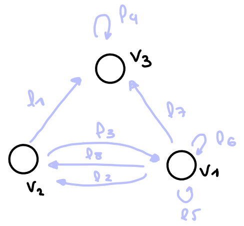
G_1 y G_2 tienen el mismo grafo asociado →



El grafo G_1 es fuertemente conexo ya que hay caminos para llegar a v_1, v_2 y v_3 mientras que grafo G_2 no.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

Ejemplo:



Si ordenamos v_1, v_2, v_3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición: Teorema del número de caminos para grafos dirigidos. Sea $G = (V, L, ini, fin)$ un grafo dirigido con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, el número de caminos dirigidos en G de longitud k desde v_i hasta v_j viene dado por el elemento que aparece en la fila i-enésima y en la columna j-enésima de la matriz $A(G)^k$.

6. Tipos de caminos en un grafo.

Un **camino abierto** se da cuando el nodo de inicio es diferente al nodo de llegada y es un **camino cerrado** cuando el nodo de inicio coincide con la llegada.

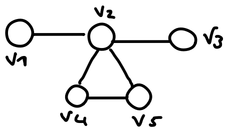
Un **camino de Euler** es aquel que pasa por cada lado de G una sola vez. Si es cerrado, se denomina **camino cerrado de Euler**.

Para que en G pueda existir un camino de Euler, tiene que G ser conexo (vertices estén conectados).

Teorema: Sea G un multigrafo conexo:

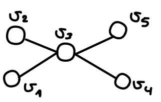
- En G hay un lazo de Euler sii el grado de cada vértice es par.
- En G hay un camino de Euler entre 2 vértices u y v con $u \neq v$ sii u y v son los únicos vértices de G de grado impar.

Ejemplo: El grafo siguiente es conexo y además sus vértices tienen grado par excepto v_1 y v_3 que tienen grado impar.



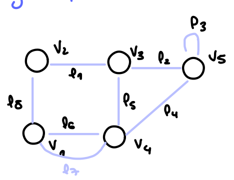
→ Por tanto hay un camino de Euler de v_1 a v_3: v_1, v_2, v_4, v_5, v_3 o $v_1, v_2, v_5, v_4, v_2, v_3$.

Ejemplo: El siguiente grafo es conexo y todos sus vértices tienen grado par, por lo cual hay un lazo de Euler ó camino cerrado de Euler.



Por ejemplo, un lazo de Euler es: $\boxed{v_3, v_4, v_5, v_3, v_2, v_1, v_3}$ ← Cada autolazo aporta dos unidades al grado del vértice correspondiente.

Ejemplo: El multigrafo es conexo (hay vértices conectados) y v_1 y v_3 son de grado impar.



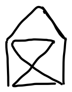
Camino de Euler del vértice v_1 a v_3: $l_7, l_6, l_8, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$. De esta manera, pasa por todos los caminos una sola vez.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Compra Coins y descarga sin publicidad.

Ejemplo: Dibujar un sobre abierto en un solo trazo.



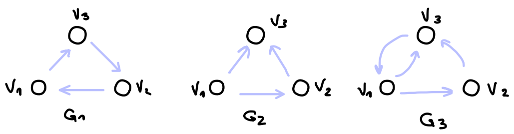
Como se aprecia el problema tiene solución ya que la figura es un grafo conexo en el que todos los vértices tienen grado par exceptos los 2 inferiores que tienen grado impar.

Un recorrido de Euler es aquel que pasa por cada flecha de G una sola vez. Si es cerrado se denomina camino cerrado de Euler.

Proposición: Sea G un grafo dirigido conexo. Entonces:

1. En G hay un lazo de Euler sii para todo $v \in V(G) \rightarrow gr_G^+(v) = gr_G^-(v)$
2. En G hay un camino de Euler de v_i a v_j con $i \neq j$ sii:
   - $\rightarrow gr_G^+(v_i) = 1 + gr_G^-(v_i)$
   - $\rightarrow gr_G^-(v_j) = 1 + gr_G^+(v_j)$
   - $\rightarrow$ Para todo $v \in V(G) \setminus \{v_i, v_j\}$, $gr_G^-(v) = gr_G^+(v)$

Ejemplo: Sean los grafos:

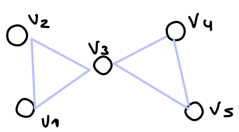


Tanto G_1, G_2 y G_3 son conexos. Para G_1 se verifica que $gr_G^+(v) = gr_G^-(v)$ para cualquier vértice v, por lo que hay un lazo de Euler. Para el G_2 no se verifica ninguna condición.

En G_3 observamos que $gr_G^+(v_2) = gr_G^-(v_2)$ y por otra parte $gr^+(v_1) = 1 + gr_G^-(v_1)$ y $gr_G^-(v_3) = 1 + gr_G^+(v_3)$.

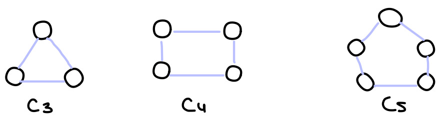
Por lo que en G_3 existe un camino abierto de Euler del vértice v_1 al v_3.

Ejemplo: En el grafo la secuencia de vértices v_1, v_2, v_3, v_1 es un ciclo pero $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_1$ no lo es.



Para todo entero $n \geq 3$ definimos $C_n \rightarrow V(C_n) = \{1, 2, \dots, n\}$ y $L(C_n) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$

Diremos que C_n, así como otro grafo isomorfo a él, es un grafo de ciclo de n vértices.



Un camino abierto se denomina de Hamilton si pasa por cada vértice 1 sola vez.

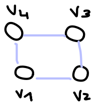
Un **ciclo de Hamilton** es un camino cerrado que pasa por cada vértice 1 sola vez, salvo el inicial y el final.

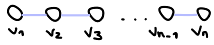
Recorridos de Hamilton: son los caminos abiertos y los ciclos.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

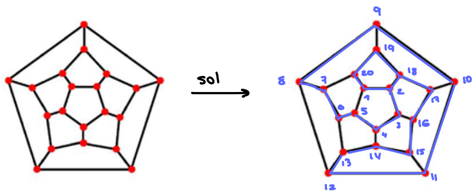
WUOLAH

Compra Coins y descarga sin publicidad.

Ejemplo: Para el grafo C_4  la secuencia de vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 es un camino abierto de Hamilton ya que pasa por cada vértice una vez excepto inicial y final que es el mismo 2 veces (ciclo) y en el segundo caso, pasa por todos los caminos una sola vez (camino abierto).

Para todo $n \geq 1$ definimos $P_n \to V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $L(P_n) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$ $\to$ 

Ejemplo: Dado un dodecaedro, poliedro formado por 12 caras que son pentágonos, se trata de partir de uno de sus vértices, viajar a través de las aristas y recorrer cada uno de los vértices restantes una sola vez, terminando en el vértice inicial.



Proposición: sea G un grafo tal que $|V(G)| = n \geq 3$ y para todo $v \in V(G)$ se verifica $gr_G(v) \geq n/2$. Entonces G tiene un ciclo de Hamilton.

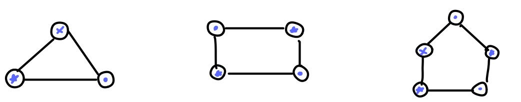
Pero, hay grafos G en los que hay ciclos de Hamilton pero no se verifica la condición de la proposición anterior.

7. Coloración de grafos

Una coloración de un grafo $G = (V, L)$ es una aplicación $f: V \to E$ donde E es un conjunto finito llamado conjunto de colores tal que si $\boxed{\{u, v\} \in L \to f(u) \neq f(v)}$. Osea se asigna un color a cada vértice y los vértices adyacentes tienen colores diferentes.

El número cromático de un grafo G es el menor cardinal que puede tener un conjunto de colores E de forma que se pueda definir una coloración en G.

Ejemplo: Supongamos el conjunto de colores $E = \{\times, \bullet, *\}$.



$\chi(C_3) = 3$ $\quad$ $\chi(C_4) = 2$ $\quad$ $\chi(C_5) = 3$

Ejemplo:

Para $n \geq 1$, $\chi(K_n) = n$. Para $n \geq 3$, $\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \to n: \text{par} \\ 3 \to n: \text{impar} \end{cases}$

Para $n \geq 1$, $\chi(P_n) = \begin{cases} 1 \to n = 1 \\ 2 \to n \geq 2 \end{cases}$

Proposición: Sea G un grafo y sea $\delta(G)$ el máximo de los grados de los vértices de G. Entonces $\chi(G) \leq \delta(G) + 1$.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Estudiar sin publi es posible. Compra Coins.

PRESUME DE SONRISA
Escanea este código y estrena tu ortodoncia invisible
AL TERMINAR TU TRATAMIENTO
BLANQUEAMIENTO* DENTAL GRATIS
*Blanqueamiento bajo prescripción médica. Promoción no acumulable a otros descuentos y/o promociones. CS10715

VITALDENT Queremos verte sonreír
VITALDENT Queremos verte sonreír

Proposición:

1. Si $G_1 \simeq G_2$ entonces $\chi(G_1) = \chi(G_2)$.
2. Si G_1 es un subgrafo de G_2, entonces $\chi(G_1) \leq \chi(G_2)$.
3. Si $G_1, \dots, G_r$ son las componentes conexas de un grafo G entonces $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \dots, \chi(G_r)\}$

Ejemplo: Si G_1 y G_2 son las componentes conexas de un grafo G, y se verifica que $G_1 \simeq P_4$ y $\underbrace{G_2 \simeq C_3}_{\text{aprox}}$ entonces $\chi(G) = \max\{2, 3\} = 3$.

Si x representa una variable en $\mathbb{N}$, el polinomio cromático de un grafo G, denotado por $p(G,x)$, es el número de formas de colorear los vértices de G usando a lo sumo x colores.

Ejemplo:

$p(\overline{K_n}, x) = x^n$

$p(K_n, x) = x \cdot (x-1) \dots (x-n+1)$

$p(P_n, x) = x(x-1)^{n-1}$

$p(C_3, x) = x(x-1)(x-2)$

Proposición: Si $G_1, \dots, G_r$ son las componentes conexas de un grafo de G entonces $p(G,x) = p(G_1, x) \dots p(G_r, x)$.

Ejemplo: Si G_1 y G_2 son componentes conexas de un grafo G con $G_1 \cong P_4$ y $G_2 \cong C_3$ entonces $p(G,x) = p(G_1, x) \cdot p(G_2, x) = x \cdot (x-1)^3 \cdot x \cdot (x-1)(x-2)$.

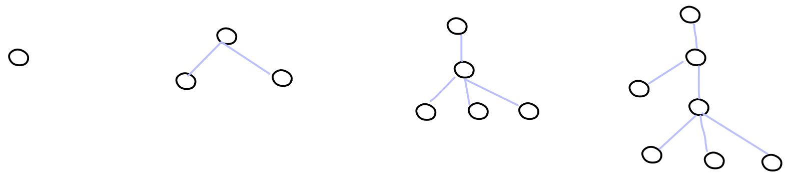
Y para un grafo, ¿qué relación hay entre $\chi(G)$ y $p(G,x)$? $\chi(G)$ es el menor número natural d tal que $p(G,d) > 0$.

Ejemplo: Sabemos que $p(K_4, x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Resulta: $p(K_4, 1) = p(K_4, 2) = p(K_4, 3) = 0$ y $p(K_4, 4) = 4! = 24 > 0$. Y por tanto, $\chi(K_4) = 4$.

8. Árboles y grafos bipartidos

Un árbol es un grafo conexo que no contiene ciclos.

Ejemplo: Los cuatro grafos siguientes son árboles



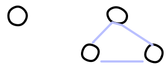
Proposición: Si G es un árbol, entonces $\boxed{|L(G)| = |V(G)| - 1}$.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Si G es un grafo se verifica que $|L(G)| = |V(G)| - 1$, esto no implica que G sea un árbol.

Ejemplo: El grafo siguiente es convexo y $|L(G)| = 3$ (lados) y $|V(G)| - 1 = 3$ (vértices).



Proposición: Sea G un grafo. Son equivalentes:

1. G es un árbol.
2. Dos nodos cualesquiera de G están conectados por un único camino en el que no se repiten vértices.
3. G es conexo y se verifica que $|L(G)| = |V(G)| - 1$.

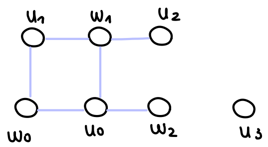
Un bosque es un grafo que no contiene ciclos, es decir, un grafo cuyas componentes son árboles.

Proposición: Si G es un bosque, entonces $|L(G)| = |V(G)| - c$, siendo c el número de componentes conexas de G.

El grafo bipartido es posible descomponer el conjunto $V(G)$ como $V(G) = V_1 \cup V_2$ tal que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y si $\{u,v\} \in L(G)$, entonces $u \in V_1$ y $v \in V_2$, o bien $u \in V_2$ y $v \in V_1$.

Es decir, todo lado de G (si hay) es incidente con un vértice V_1 y con otro de V_2.

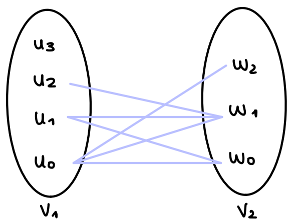
Ejemplo: Consideremos el grafo



El conjunto de vértices sería $V = \{u_0, u_1, u_2, u_3, w_0, w_1, w_2\}$ y lo podemos particionar $V = V_1 \cup V_2$ donde $V_1 = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ y $V_2 = \{w_0, w_1, w_2\}$.

Además ningún vértice de V_1 es adyacente de V_2

grafo bipartido.



* Nota: como el vértice u_3 está aislado, lo podíamos haber puesto en V_2 o en V_1.

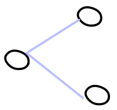
Comentario: Un grafo que consta de un único vértice de v es un grafo bipartido, donde podemos tomar $V_1 = \{v\}$ y $V_2 = \{\}$ o al contrario.

Si en un gráfico bipartido G para todo $u \in V_1$ y $v \in V_2$ se verifica que $\{u,v\} \in L(G)$ entonces es bipartido - completo. A este grafo se le suele denotar por $K_{m,n}$ tal que $|V_1| = m$ y $|V_2| = n$

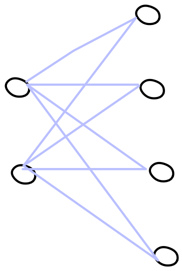
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Compra Coins y descarga sin publicidad.

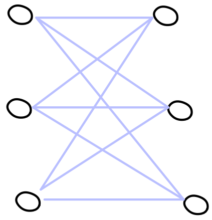
Ejemplo: Tenemos 3 grafos bipartidos completos:



$K_{1,2}$



$K_{2,4}$



$K_{3,3}$

- Los grafos bipartidos se usan para representar relaciones entre 2 conjuntos disjuntos.

Ej: empleos y gente que demanda empleo.

Proposición: Para un grafo G, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

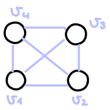
1. G es bipartido.
2. En G no hay ciclos de longitud impar.
3. $\chi(G) \leq 2$.

Como un bosque no tiene ciclos, un bosque es un grafo bipartido.

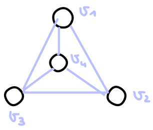
9. Grafos Planos

Un grafo plano se da cuando se puede representar en el plano sin que se crucen 2 lados, y por lo tanto nos sale una representación plana de G.

Ejemplo.



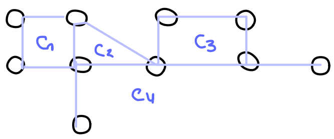
Pero también es posible



Toda representación plana de un grafo plano de G divide el plano en un número finito de caras. y la única cara infinita que aparece se denomina cara exterior.

Teorema: Sea G un grafo plano conexo. Supongamos que es una representación plana de G aparecen c caras $\rightarrow$ $\boxed{|V(G)| - |L(G)| + c = 2}$

Ejemplo:



$V(G) = 10$ $\quad L(G) = 12$ $\quad c = 4$

$\boxed{10 - 12 + 4 = 2}$ Se verifica el teorema.

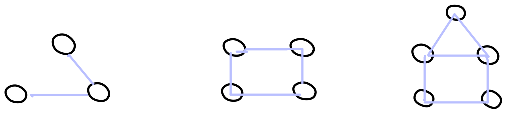
Teorema: Sea G un grafo formado por T componentes conexas. Supongamos que en una representación plana de G aparecen c caras. $\rightarrow$ $\boxed{|V(G)| - |L(G)| + c = 1 + T.}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Compra Coins y descarga sin publicidad.

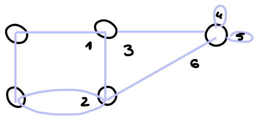
Ejemplo: Sea el grafo siguiente con 3 componentes conexas.



$|V(G)| = 12 \quad |L(G)| = 12 \quad c = 4$

$\boxed{12 - 12 + 4 = 1 + T} \to T = 3$ que coincide con componentes conexas.

Ejemplo:



$|V(G)| = 5$

$|L(G)| = 9 \quad \to \boxed{5 - 9 + 6 = 1 + t} \to t = 1$

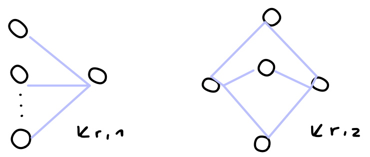
$c = 6$

Proposición: Si G es un grafo con al menos 3 vértices entonces $|L(G)| \leq 3 \cdot [|V(G)| - 2]$.

Un grafo plano se dice **maximal** si cualquiera $u, v \in V(G)$ tales que $u \neq v$, si $\ell = \{u, v\} \notin L(G) \to G' = (V(G), L(G) \cup \{\ell\})$ no es plano. Es decir, si hay 2 vértices no adyacentes y los unimos por un lado $\to$ $\boxed{\text{grafo no plano.}}$

Proposición: Si G es un grafo plano con al menos 3 vértices y en el que no hay ciclos de longitud 3 $\to \boxed{|L(G)| \leq 2\,[|V(G)| - 2].}$

Ejemplo: ¿Qué grafos bipartido-completos son planos?



Ambos son planos

Si probamos con $K_{33} \to |V(G)| = 6 \quad |L(G)| = 9 \to 9 \leq 2 \cdot (6 - 2) \Rightarrow 9 \leq 8$. Como no es cierto, entonces no es plano.

Por lo tanto, ni $K_{r,3}$ ni $K_{3,s}$ son planos para $r, s \geq 3$.

Una **subdivisión** de un lado $\ell = \{u, v\}$ de un grafo G, consiste en eliminar el lado ℓ de G y añadir un nuevo vértice w así como los lados $\{u, w\}$ y $\{v, w\}$ $\to \boxed{V(\tilde{G}) = V(G) \cup \{w\}}$ y $L(\tilde{G}) = (L(G) \setminus \{\ell\}) \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\}$

Dos grafos G_1 y G_2 son **homeomorfos** si existe un grafo H:

1. G_1 es isomorfo a H ó es obtenible a partir de H aplicando un número finito de subdivisiones de lados.

2. G_2 es isomorfo a H ó es obtenible a partir de H aplicando un número finito de subdivisiones de lados.

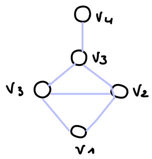
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

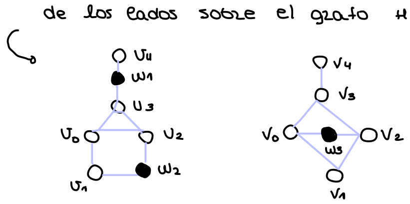
Compra Coins y descarga sin publicidad.

VITALDENT Queremos verte sonreír
VITALDENT Queremos verte sonreír

Ejemplo: Sea el siguiente grafo H:

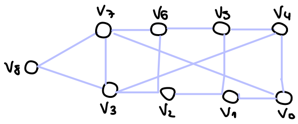


Cada uno de los grafos siguientes G_1 y G_2 se obtienen aplicando ciertas subdivisiones de los lados sobre el grafo H_1 y H_2.

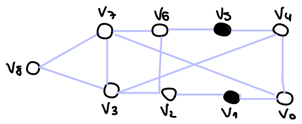


Teorema: Un grafo G es plano si y sólo si ninguno de sus subgrafos es homeoformo a K_5 ni $K_{3,3}$.

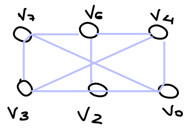
Ejemplo: Consideramos el grafo G:



→ Queremos saber si es plano. Para ello cogemos un subgrafo:



H ha sido obtenido mediante 2 subdivisiones



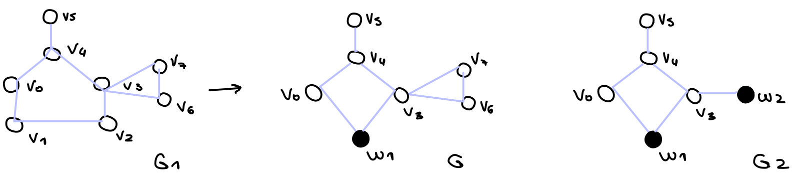
es isomorfo

- Otra forma equivalente:

1. Eliminar el lado $\{u,v\}$ del conjunto L.
2. Reemplazar cada aparición de los vértices u y v en los lados de L por un nuevo vértice w.
3. Quitar los vértices u y w del conjunto V.
4. Añadir w a V.

Un grafo G_1 es contraible al grafo G_2, si G_2 puede ser obtenido a partir de G_1 mediante una secuencia de contracciones elementales.

Ejemplo: El grafo G_1 se contrae al grafo G_2 aplicando 2 contracciones elementales:



En primer lugar hemos aplicado contracción elemental $\{v_1, v_2\}$ de G_1 para obtener G. Y después hemos aplicado la contracción sobre el lado $\{v_6, v_7\}$ de G para obtener G_2.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

Teorema: Un grafo G es plano sii ninguno de sus subgrafos es contraíble a K_5 ni $K_{3,3}$.

9.1 Una pequeña historia con historia

Todo mapa se puede colorear usando a lo sumo 4 colores. Osea que si G es un grafo plano $\to \chi(G) \leq 4$.

Teorema: Si G es un grafo plano $\to \chi(G) \leq 5$

↳ adyacentes van en distinto color.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Compra Coins y descarga sin publicidad.