David Martínez Díaz

- Ejercicios de inducción:

1.1.

1]- Todo número natural es 0 o es el siguiente de un número natural.

$A = \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N} : x = 0 \text{ o } \exists m \in \mathbb{N}(x = \sigma(m))\}$

→ Tenemos que $0 = 0$; por tanto $0 \in \mathbb{N}$

→ Si tenemos $n \in \mathbb{N}$, $[n = 0 \text{ o } n = \sigma(m)]$, donde de cualquier manera $\sigma(n) = \sigma(n)$, por tanto, $\sigma(n) \in \mathbb{N}$

2] $m + 0 = 0 + m = m$

$A = \{x \in \mathbb{N} : x + 0 = x\} \Rightarrow 0 + 0 = 0$

→ Supongamos $n \in A$, vemos para $n+1$:

$\underbrace{0 + \sigma(n)}_{\text{def.}} = \underbrace{\sigma(0+n)}_{\text{H.I}} = \sigma(n) \Rightarrow \sigma(n) \in A \Rightarrow \mathbb{N} = A;$

3] $m + 1 = 1 + m = \sigma(m)$

$m + 1 = m + \sigma(0) \rightarrow \sigma(m+0) = \sigma(m);$

$A = \{x \in \mathbb{N} : 1 + x = \sigma(x)\}$

$1 + 0 = 1 = \sigma(0) \Rightarrow \emptyset \in A$

→ Supongo $n \in A$: $1 + \sigma(n) = \sigma(1+n) = \sigma(\sigma(n)) \rightsquigarrow \sigma(n) \in A$

$A = \mathbb{N}$

4] $(m+n)+p = m+(n+p)$; ⇒ Inducción en p

→ Supongo $p = 0$:

$(m+n)+0 = m+n = m + (n+0) \Rightarrow m+n$

→ Supongo para p y demuestro para $\sigma(p)$:

$(m+n) + \sigma(p) = \sigma((m+n)+p) = \sigma(m+(n+p)) = m + \sigma(n+p) = m + (n+\sigma(p));$

*Por definición

5] $m+n=n+m$; $\Rightarrow$ Inducción en n

$\Rightarrow$ Suponga $n=0$; $m+0=0+m \Rightarrow m=m$; * Por definición

Para $n+1$ } $\sigma(n)$:

$m+\sigma(n)=\sigma(m+n)=\sigma(n+m)=n+\sigma(m)=n+(1+m)$;

$(n+1)+m=\sigma(n)+m$.

6] $m+p=n+p$, entonces $m=n \Rightarrow$ Inducción en p

Para $p=0$:

$\left.\begin{array}{l} m+0 \Rightarrow m=n \\ n+0 \Rightarrow \end{array}\right\}$ Se cumple para $p=0$;

$\sigma(p)$ si $m+\sigma(p)=n+\sigma(p)$, entonces $m=n$.

$\underbrace{\sigma(m+p)=\sigma(n+p)}_{\text{R. de los } \mathbb{N}} \rightarrow \underbrace{m+p=n+p \rightarrow m=n}_{\text{Por H.I}}$

7] $m+n=0$, entonces $m=n=0$;

$\Rightarrow$ Inducción en n:

$\Rightarrow$ Para suponer $n=0$:

$m+0=0 \Rightarrow m=0 \Rightarrow m=n=0$

$\Rightarrow$ Para suponer para $n+1$ } $\sigma(n)$

$m+(n+1)=0 \Rightarrow m+\sigma(n)=0 \Rightarrow \sigma(m+n)=0$

$\sigma(m+n)+0=0 \Rightarrow m+n=0 \Rightarrow m=n \Rightarrow 0$;

$m=n=0$

3] $0\cdot m=m\cdot 0=0$;

$0\cdot m=m\cdot 0+0 \Rightarrow$ Demostrado anteriormente

Como $m\in\mathbb{N}$ $\exists -m$ tal que $m+(-m)=0$;

$m\cdot 0=m\cdot 0+m+(-m) \Rightarrow m\cdot 0=m-m \Rightarrow m\cdot 0=0$

Queda demostrado

$m=m$

$m+0=m$ Por definición

Escaneado con CamScanner

9) $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$

$A = \{x \in \mathbb{N} : x = 0 \text{ o } 1 \cdot x = x\}$

→ $x = 0$:

$1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

→ $x+1$:

$1 \cdot (x+1) = (x+1) \Rightarrow 1 \cdot \sigma(x) = \sigma(x)$;

$(1 \cdot x) + 1 = \sigma(x)$

$(\sigma(0) \cdot x) + \sigma(0) = \sigma(x)$

$(x \cdot 0 + x) + \sigma(0) = x+1 \Rightarrow x+1 = x+1$

$B = \{x \in \mathbb{N} : x = 0 \text{ o } x \cdot 1 = x\}$

→ $x = 0$

$0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

→ $x+1$:

$(x+1) \cdot 1 = (x+1)$;

$\sigma(x) \cdot 1 = \sigma(x) \Rightarrow (1 \cdot x) + 1 = \sigma(x)$

$(\sigma(0) \cdot x) + \sigma(0) = \sigma(x)$

$(x \cdot 0 + x) + \sigma(0) = x+1 \Rightarrow x+1 = x+1$

---

10) $(m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$;

· Inducción sobre p

→ $p = 0$

$(m+n) \cdot 0 = m \cdot 0 + n \cdot 0$; $\Rightarrow 0 = 0$

→ $p+1$:

$(m+n) \cdot \sigma(p) = m \cdot \sigma(p) + n \cdot \sigma(p)$;

$(m+n) \cdot p + (m+n) = (m+n) + (m \cdot p) + (n \cdot p)$;

H d I ↳ $(m \cdot p) + (n \cdot p) + (m+n) = (m+n) + (m \cdot p) + (n \cdot p)$

↳ Queda comprobado

---

11) $m \cdot n = n \cdot m$

· Inducción sobre n:

→ $n = 0$: Def.

$m \cdot 0 = 0 \cdot m \Rightarrow 0 = 0$

→ $n+1$:

$m \cdot \sigma(n) = \sigma(n) \cdot m$;

$(m \cdot n) + m = (n \cdot m) + m$;

H d I ↳ $(m \cdot n) + m = (m \cdot n) + m$; $\Rightarrow$ Queda demostrado

12) $(m \cdot n) \cdot p = m\ (n \cdot p)$

· Inducción sobre p:

→ $p = 0$

Por def. $(m \cdot n) \cdot 0 = m \cdot (n \cdot 0)$

↳ $0 = 0$

→ $p+1$:

$(m+n) \cdot \sigma(p) = m \cdot (n \cdot \sigma(p))$

Por def. $(m+n) \cdot p + (m+n) = m \cdot ((n \cdot p) + n)$; * Demostrado anteriormente

$(m \cdot n \cdot p) + (m \cdot n) = (m \cdot n) + (m \cdot n \cdot p)$

↳ Queda demostrado.

13) Si $m \cdot n = 0$; enlonces $m = 0$ o $n = 0$;

Inducción sobre n:

→ $n = 0$ $\begin{cases} m = 0 \rightarrow 0 \cdot 0 \overset{def}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ m \neq 0 \rightarrow m \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$

→ $n+1$ $\begin{cases} m = 0 \rightarrow 0 \cdot \sigma(n) = 0 \Rightarrow 0 \cdot n + 0 \overset{def}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0 \\ m \neq 0 \rightarrow m \cdot \sigma(n) = 0 \Rightarrow m \cdot n + m = 0; \end{cases}$

↳ Queda demostrado que $\boxed{m = 0 \text{ o } n = 0}$

14) $0^0 = 1$

→ Como $m, n, p \in \mathbb{N}$ se cumple:

$m^0 = 1 \Rightarrow 0^0 = 1$

→ Aplicado al ejercicio usamos el teorema $0^0 = 1$;

15) $0^n = 0$ para $1 \leq n$

Inducción sobre n:

→ $n = 1$:

$0^1 = 0 \Rightarrow 0^{\sigma(0)} = 0 \Rightarrow 0^0 \cdot 0 \overset{def}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$

→ $n+1$:

$0^{\sigma(n)} = 0 \Rightarrow 0^n \cdot 0 \overset{def}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$

16) $1^n = 1$;

Inducción sobre n:

→ n=0: Definición

$1^0 = 1 \Rightarrow 1 = 1$

→ n+1:

$1^{\sigma(n)} = 1^n \cdot 1^1$;

$1^n \cdot 1^{\sigma(0)} \Rightarrow 1^n \cdot 0 + 1^n = 1$

$1^n = 1 \Rightarrow$ Queda demostrado

17) $m^{n+p} = m^n \cdot m^p$

Inducción sobre p:

→ p=0:

$m^n = m^n \cdot m^0 \overset{def}{\Rightarrow} m^n = m^n \cdot 1 \overset{def}{\Rightarrow} m^n = m^n$

→ p+1:

$m^{n+\sigma(p)} = m^n \cdot m^{\sigma(p)} \Rightarrow m^{n+\sigma(p)} = m^n \cdot m^p \cdot m$;

$m^{\sigma(n+p)} = m^n \cdot m^p \cdot m$;

H.d.I $m^{n+p} \cdot m = m^n \cdot m^p \cdot m$;

$m^n \cdot m^p \cdot m = m^n \cdot m^p \cdot m$; $\Rightarrow$ Queda demostrado

18. $m^{np} = (m^n)^p$

Inducción sobre p:

→ p=0

$m^{n \cdot 0} = (m^n)^0 \overset{def}{\Rightarrow} 1 = 1$

→ p+1:

$m^{n \cdot p + n} = (m^n)^{\sigma(p)} \Rightarrow (m^n)^p \cdot m^n$

$m^{np} \cdot m^n \overset{H.d.I}{\Rightarrow} (m^n)^p \cdot m^n = (m^n)^p \cdot m^n$

Queda demostrado.

- Ejercicio 2:

1) $m \leq m$

Se puede llegar ya que existe un x tal que:

$m+x \leq m \Rightarrow m+0 \leq m;$

2) Si $m \leq n$ y $n \leq m$, entonces $m=n$

$$\left.\begin{matrix} m \leq n \\ n \leq m \end{matrix}\right\} \Rightarrow m=n$$

$$\left.\begin{matrix} \exists x \in \mathbb{N} & m+x=n \\ \exists y \in \mathbb{N} & n+y=m \end{matrix}\right\} m+x+y=m \Rightarrow x+y=0$$

$x=y=0 \Rightarrow m=n$

3) Si $m \leq n$ y $n \leq p$, entonces $m \leq p$

$$\left\{\begin{matrix} m \leq n \\ n \leq p \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \exists x \in \mathbb{N} & m+x=n \\ \exists y \in \mathbb{N} & n+y=p \end{matrix}\right\}$$

$(m+x)+y=p; \overset{\text{IIdI}}{\;} m+(x+y)=p; \; m \leq p$

4) $m \leq n$ o $n \leq m$

$$\left\{\begin{matrix} m \leq n \\ n \leq m \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \exists x \in \mathbb{N} & m+x=n \\ \exists y \in \mathbb{N} & n+y=m \end{matrix}\right\}$$

{ → Como se necesita una x para que $m=n$.
→ Como se necesita una y para que $n=m$. }

5) Si $m \leq n$, entonces $\exists_1 p \in \mathbb{N}$ $m+p=n$ y lo llamemos n menos m $(n-m)$

$m \leq n \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N} \; m+p=n \} \; p=m-n$ al despejar.

↳ Demostrado

6) Si $m \leq n$, entonces $m+p \leq n+p$

$m \leq n \} \rightarrow \{ \exists p \in \mathbb{N} \; m+p=n \} \rightarrow p=m-n$

$m+p \leq n+p \rightarrow \{ m+(m-n) \leq n+(m-n) \} \rightarrow 2m-n \leq m \rightarrow \underline{m \leq n}$

7. $m \leq n \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}$ tal que $m+q=n$

$(m+q)\cdot p = n\cdot p$

$\hookrightarrow m\cdot p + qp = n\cdot p \Rightarrow m\cdot p \leq n\cdot p \Rightarrow$ Demostrado

8. Como $m\cdot p \leq n\cdot p \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}$ tal que $(m\cdot p)+q = n\cdot p$

$(m\cdot p)+q = n\cdot p \Rightarrow m\cdot \sigma(n) + q = n\cdot \sigma(n)$

$\hookrightarrow m\cdot n + m + q = n\cdot n + n$

$\hookrightarrow m\cdot n + m \leq n\cdot n + n$

$\hookrightarrow m \leq n \Rightarrow$ Demostrado

9. Como es $m \leq n$, tenemos $m\cdot p = n\cdot p \Rightarrow m\cdot p \leq n\cdot p$

$\hookrightarrow m \leq n \Rightarrow$ Por lo que análogamente para $m \geq n$

$\hookrightarrow$ llegamos a que $m=n$

- Ejercicio 3:

1. $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\rightarrow$ Para $n=1 \Rightarrow \frac{2}{2} = 1$ [se cumple]

$\rightarrow$ Para $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \Rightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \Rightarrow \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

Coinciden

---

2. $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\rightarrow$ Para $n=1 \Rightarrow \frac{6}{6} = 1$ [se cumple]

$\rightarrow$ Para $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)n}{6} + (n+1)^2 \Rightarrow \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} + (n^2+2n+1)$$

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6} + n^2+2n+1 \Rightarrow \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} \Rightarrow$$ Coinciden

---

3. $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$\rightarrow$ Para $n=1 \rightarrow \left(\frac{(1+1)\cdot 1}{2}\right)^2 \Rightarrow 1$ [se cumple]

$\rightarrow$ Para $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$$

$$k^3 = (n+1)^3$$

$$\left(\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \Rightarrow \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} + (n^2+2n+1)(n+1)$$

$$\frac{n^4+2n^3+4n^3+n^2+12n^2+12n+4}{4}$$

$$\frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4} \Rightarrow$$ Coinciden

Escaneado con CamScanner

4. $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k^5 + \sum_{k=1}^{n} k^7 = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4$

$\Rightarrow$ Suponemos para $n=1 \Rightarrow 2$ [se cumple]

$\Rightarrow$ Para $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n} = 2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^4 \Rightarrow 2\left(\frac{n^2+3n+2}{2}\right)^4 \Rightarrow \frac{(n^2+3n+2)^4}{2}$$

$$\frac{n^8+12n^7+62n^6+180n^5+321n^4+360n^3+246n^2+96n+16}{8}$$

$$\sum_{k=1}^{n} = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^4 \cdot 2 + (n+1)^5 + 2\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^4 + (n+1)^7$$

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{n^8+4n^7+6n^6+4n^5+n^4}{8} + n^7+7n^6+22n^5+40n^4+45n^3+31n^2+12n+2$$

$\hookrightarrow$ $\frac{n^8+12n^7+62n^6+180n^5+321n^4+360n^3+248n^2+96n+16}{8} \Rightarrow$ Coincide

---

5. $\forall n \geq 0, \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}+1}{a-1}$ siendo $a \neq 1$

$\Rightarrow$ Para $n=0$ $\quad \frac{a-1}{a-1} = a^0 = 1$ [se cumple]

$\Rightarrow$ Para $n+1$ $\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{n+1+1}-1}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1} \Rightarrow$ Coinciden

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1+a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1}$$

---

6. $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} (k \cdot k!) = (n+1)! - 1$

$\Rightarrow$ Para $n=1 \Rightarrow 1 \cdot 1! = (2)! - 1 = 1$

$\Rightarrow$ Para $n+1$;

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k \cdot k!) = \sum_{k=1}^{n} (k \cdot k!) + (n+1)(n+1)! \Rightarrow (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$n+1 \Rightarrow x$; $\Rightarrow x - 1 + (n+1)x \Rightarrow x - 1 + nx + x \Rightarrow (n+2)x - 1$;

$$\left.\begin{array}{l}(n+2)(n+1)! - 1 \Rightarrow (n+2)! - 1 \\ (n+1+1)! - 1 \Rightarrow (n+2)! - 1\end{array}\right\} \text{Coinciden}$$

7. $\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$

→ Supongo $n = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} \Rightarrow 1'41'42$

→ Supongo para $n+1$:

$\sum_{k=1}^{n} = \sqrt{n+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{n+1}}$

$\frac{\sqrt{n^2+n} + 1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} \Rightarrow \sqrt{n^2+n} + 1 > n+1 \Rightarrow \sqrt{n^2+n} > n$

$n^2+n > n^2 \Rightarrow n > 0 \Rightarrow$ Se cumple

---

8. $\forall n \in \mathbb{N} \geq 4, \quad 2^n \geq n^2$

→ Probamos para $n=4$ $\quad 2^4 \geq 4^2 \rightarrow 16 \geq 16$ [Se cumple]

→ Suponemos $n+1$:

$2^{(n+1)} \geq (n+1)^2 \Rightarrow 2^n \cdot 2 \geq (n+1)^2 = 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$

$n = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \begin{cases} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{cases}$

$+ \quad - \quad +$

$1+\sqrt{2}$

Se cumple para $n > 4$

---

9. $\forall n \geq 4, \quad n! > 2^n$

→ Probamos para $n = 4 \Rightarrow 24 > 16$ [Se cumple]

→ Para $n+1$:

$2^{n+1} < (n+1)! \Rightarrow 2^n \cdot 2 \underset{H.I}{<} 2 \cdot n! < (n+1)\, n! = (n+1)!$

Como podemos ver, se cumple siempre dicha condición.

- Ejercicio 4:

a) $3^{2n} - 2^{n}$ es divisible por 7.

* Comprobamos para $n=1 \Rightarrow 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$ [Se cumple]

Por hipotesis de inducción

$3^{2n} - 2^{n} = 7K \Rightarrow 3^{2n} = 7k + 2^{n}$;

$\Rightarrow$ Para $n+1$: $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ ¿mod 7?

$3^{2n} \cdot 9 - 2^{n+1} \Rightarrow (7K + 2^{n}) \cdot 9 - 2^{n+1} \Rightarrow 63K + 9 \cdot 2^{n} - 2^{n} \cdot 2$

$63K + 2^{n}(7) \Rightarrow 7(9K + 2^{n}) \Rightarrow$ Demostrado

---

b) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.

* Para $n=1 \Rightarrow 27 + 8 = 35$ [Se cumple]

Por hipotesis de inducción

$3^{2n} \cdot 3 + 2^{n+2} = 7K \Rightarrow 3^{2n+1} = 7k - 2^{n+2}$;

$\Rightarrow$ Para $n+1$:

$3^{2(n+1)+1} + 2^{n+1+2} \Rightarrow 3^{2n+3} + 2^{n+3}$

$(7K - 2^{n+2}) \cdot 9 + 2^{n+3} \Rightarrow 63K - 9 \cdot 2^{n+2} + 2^{n+3}$;

$63K - 2^{n+2}(7) \Rightarrow 7(9K - 2^{n+2}) \Rightarrow$ Demostrado

---

c) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es divisible por 11

* Comprobamos $n=1 \Rightarrow 209$ [Se cumple]

Suponemos $n=K \Rightarrow n+1$;

HdI $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11K \Rightarrow 3^{2n+2} = 11k - 2^{6n+1}$

$\Rightarrow 3^{2n+4} + 2^{6n+7} \Rightarrow 9(11K - 2^{6n+1}) + 2^{6n+7}$;

$99K - 9 \cdot 2^{6n+1} + 2^{6} \cdot 2^{6n+1} \Rightarrow 99K + 55 \cdot 2^{6n+1} \Rightarrow$ Demostrado

---

d) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por 17

* Comprobamos $n=1 \Rightarrow 391$ [se cumple]

Por H.I $\Rightarrow 3 \cdot 5^{2n+1} = 17K - 2^{3n+1}$

$\Rightarrow$ Para $n+1$:

$3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4} \Rightarrow 25(17K - 2^{3n+1}) + 8 \cdot 2^{3n+1}$

$425K + 2^{3n+1} \cdot 17 \Rightarrow \underbrace{17(25K + 2^{3n+1})}_{\text{Demostrado}}$

Escaneado con CamScanner

e) $n(n^2+2)$ es multiplo de 3.

$n^3+2n=3K$ / * Comprobemos para n=1 → 3 [Se cumple]

→ Para n+1:

$(n+1)((n+1)^2+2) \Rightarrow n^3+2n^2+3n+n^2+2n+3;$

$\underbrace{(n^3+2n)}+(3n^2+3n+3)$

$3K+3n^2+3n+3 \Rightarrow 3[K+n^2+n+1] \Rightarrow$ Demostrado

f) $5^{n+1}+2\cdot 3^n+1$ es múltiplo de 8

H.I $\Rightarrow 5^{n+1}=8k-2\cdot 3^n-1$

→ Para n+1:

$5^{n+2}+2+3^{n+1}+1;\ 5\cdot 5^{n+1}+2\cdot 3^{n+1}+1 \Rightarrow -3^n(2\cdot 6)+8k$

$8K+3^n(4) \Rightarrow 4(4K+3^n) \Rightarrow$ Demostrado

g) $7^{2n}+16n-1$ es multiplo de 64 * Comprobemos para n=1 → 64 [Se cumple]

$7^{2n}=64K-16n-1$ /

→ Para n+1:

$7^{2n+2}+16(n+1)-1 \Rightarrow 49(64k-16n-1)+16n+15$

$3136K-768n+64 \Rightarrow 64[49k-12n+2] \Rightarrow$ Demostrado

h) $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)$ es multiplo de 2^n

→ Suponemos para $n=1 \Rightarrow 1+1=2$ [Se cumple]

→ Suponemos para n+1; H.I

$(n+1)(n+2)\ldots(n+n+1) \Rightarrow (n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^nk;$

$$\frac{2^nk}{(n+n)}=(n+1)(n+2)\ldots(n+n);$$

$$\frac{2^nk}{(n+\cancel{n})}(n+\cancel{n})(n+n+1) \Rightarrow 2^nk(n+n+1) \Rightarrow \text{[Se cumple]}$$

↳ Queda Demostrado

i) $4^{2n} - 2^n$ es divisible por 7

$4^{2n} = 7k + 2^n$

→ Comprobamos para $n=1$ ⇒ $16 - 2 = 14 / 7$ ⇒ [Se cumple]

→ Supongo $n+1$:

$4^{2n+2} - 2^{n+1}$ ⇒ $16 \cdot 4^{2n} - 2 \cdot 2^n$ ⇒ $16[7k + 2^n] - 2 \cdot 2^n$

$112k + 2^n(16-2)$ ⇒ $7(16k + 2^{n+1})$ ⇒ Queda demostrado

---

j) $2^{3n} - 14^n$ es divisible por 6

→ Supongo para $n=1$ ⇒ $8 - 14 = -6 / 6$ ⇒ [Se cumple]

→ Supongo para $n+1$:

$2^{3n+3} - 14^{n+1}$ ⇒ $8 \cdot 2^{3n} - 14 \cdot 14^n$ ⇒ $8(6k + 14^n) - 14 \cdot 14^n$;

$48k + 8 \cdot 14^n - 14 \cdot 14^n$ ⇒ $48k + 14^n(-6)$ ⇒ $6(8k - 14^n)$

Queda demostrado

Escaneado con CamScanner

- Ejercicio 5:

1. a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

Para $2 \Rightarrow 2\cdot 2-1=3 \Rightarrow 1+3=4;\ 2^2 \Rightarrow 4$ [se cumple]

$\Rightarrow$ Suponemos para $n+1$:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)(2(n+1)-1)=(n+1)^2$$

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)(2n+1)}=n^2+2n+1$$

$$\underbrace{n^2+2n+1=n^2+2n+1}$$

Se cumple y queda demostrado.

---

b) $\exists k\in\mathbb{N} \mid \begin{array}{l|l} k & 2 \\ \hline q & x \end{array}$ $\Rightarrow$ Por definición: $\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}}$ = cociente + $\frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$

Queremos demostrar $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\text{dividendo} = 2^k \\ \text{divisor} = 3\end{array}\right\}$ resto $\Rightarrow 1$

$\Rightarrow$ Hipótesis de Inducción:

$k=2 \Rightarrow 2^k-3$ cociente $=1$

$2^2-3\cdot 1=1 \Rightarrow \boxed{1=1} \Rightarrow$ [se cumple]

$\Rightarrow k+2 \Rightarrow 2^{k+2}=(1+3)\cdot$ cociente $\Rightarrow 2^k=\frac{1+3\cdot\text{cociente}}{2^2}$

Sabemos que $2^k=1+3\cdot x$ siendo x el cociente de $2^k/3$ y siendo el cociente de: $\frac{2^{k+2}}{3}$. Por lo que $\Rightarrow \frac{1+3\cdot y}{2^2}=1+3x$

$\Rightarrow$ Para concluir:

$$\frac{2^{k\cancel{+2}}}{3}=x-\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{2^x-1}{3}$$

$$\frac{2^n\cdot 2^2}{3}=y+\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{2^n\cdot 2^2-1}{3}$$

$\Rightarrow$ Sustituyendo $\Rightarrow 2^k=2^k \Rightarrow$ Demostrado

c) $\exists k \in \mathbb{N} \mid$ $k \,\underline{|\, 2}$; $1, \; x$ $\Rightarrow$ $2^k \,\underline{|\, 3}$; $2, \; x$

-> Como hemos demostrado en el apartado anterior:

$2^k - 3 \cdot \text{cociente} = 2$

-> Suponemos para $k=1 \Rightarrow 2 - 3 \cdot 0 = 2 \Rightarrow \boxed{2 = 2} \rightarrow$ [Se cumple]

-> Suponemos ahora para $2k-1$, ya que ha de ser impar $\Rightarrow 2^{2k-1} - 3 \cdot \text{cociente}$

$2^k = \sqrt{\frac{2+3\,\text{coc}}{2}} \Rightarrow \sqrt{(2+3y)\cdot 2} \Rightarrow 2+3x$

-> Suponemos para demostrarlo $k=3 \Rightarrow$

Por lo que $x=2$ e $y=10$:

$\sqrt{2+3\cdot(10)\cdot 2} = 2+3\cdot 2 \Rightarrow \boxed{8=8} \Rightarrow$ Queda demostrado