David Martínez Díaz

5. a) $\begin{cases} \text{Maximizar: } & x+4y+3z \\ \text{S.A: } & x^2+2y^2+\frac{1}{3}z^2=9 \end{cases}$

* Puntos singulares:

$\nabla g(2x, 4y, \frac{2}{3}z) = (0,0,0)$

No satisface; No hay puntos

→ Procedamos a crear la ecuación de L'Grange:

$L = x+4y+3z-\lambda(x^2+2y^2+\frac{1}{3}z^2-9);$

$$\begin{cases} 1-2\lambda x=0 & \Rightarrow x=\frac{1}{2\lambda} \\ 4-4\lambda y=0 & \Rightarrow y=\frac{1}{\lambda} \\ 3-\frac{2}{3}\lambda z=0 & \Rightarrow z=\frac{9}{2\lambda} \\ x^2+2y^2+\frac{1}{3}z^2-9=0 & \Rightarrow \text{Sustituimos} \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2}+\frac{27}{4\lambda^2}-9=0; \end{cases}$$

$\frac{9}{\lambda^2}-9=0; \quad \lambda=\sqrt{1}=\pm 1;$

• Para $\lambda=1 \Rightarrow (1/2, 1, 9/2);$ $\nabla g(1,4,3);$

La Hess $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Hess}_{orl} \begin{pmatrix} 0 & 2x & 4y & 2/3z \\ 2x & 0 & 0 & 0 \\ 4y & 0 & 0 & 0 \\ 2/3z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \Rightarrow \text{Det}=0;$

• Para $\lambda=-1$; Sale igual que para $\lambda=1$;

Scanned by TapScanner

David Martínez Díaz

• Ejercicios:

5.b) $\begin{cases} \text{Optimizar: } xy+z; \\ \text{S.A}: x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

* Primero comprobamos los puntos singulares:

$\nabla g\,(2x, 2y, 2z)$;

$2x=0 \quad 2y=0 \quad 2z=0$

El punto $P(0,0,0) \Rightarrow$ No satisface: $0 \neq 1$ Absurdo

- Creamos la función de L'Grange:

$L \Rightarrow xy + z - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$;

- Sacamos las distintas ecuaciones, derivando parcialmente y sacamos "λ":

$\begin{cases} y - 2x\lambda = 0 \\ x - 2y\lambda = 0 \\ 1 - 2z\lambda = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow y = 2x\lambda$; Despejando $\Rightarrow x - 2\cdot(2x\lambda)\lambda = 0$;

$x - 4x\lambda^2 = 0; \Rightarrow x(1-4\lambda^2)=0; \lambda = \sqrt{\frac{1}{4}}$;

$\lambda = \pm\frac{1}{2}$;

- Aunque nos haya salido dos resultados de "λ", no implicara ningun en la x, y; pero si para la z:

• Sustituimos: Para $\lambda = \frac{1}{2}$; y Para $\lambda = -\frac{1}{2}$;

$x - 4x\lambda^2 = 0; \Rightarrow x - \frac{4}{4}x = 0; \quad x - x = 0$; Se cumple para cualquier valor de x y lo mismo para "y"

$y - 4y\lambda^2 = 0; \quad y - y = 0$;

• Sin embargo, para $z \Rightarrow$

$\rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$;

$1 - 2\cdot\frac{1}{2}z = 0; \quad 1 - z = 0; \quad z = 1$;

$\rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$;

$1 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)z \Rightarrow 1 + z = 0; \quad z = -1$;

*Para $\lambda = \frac{1}{2}$;

$\boxed{x = -y}$

$\boxed{y = 0} \Rightarrow \boxed{x = 0}$

• Para $\lambda = \frac{1}{2}$;

Sol: $[\,x(\cancel{\text{cualq. valor}} \Rightarrow 0),\ y(\cancel{\text{cualq. valor}} \Rightarrow 0),\ z(1),\ \lambda(\tfrac{1}{2})\,]$; $\cancel{\text{[illegible]}}$

• Para $\lambda = -1/2$;

Sol: $[\,x(\text{cualq. valor}),\ y(\text{cualq. valor}),\ z(-1),\ \lambda(-1/2)\,]$;

$\nabla f = (y, x, 1)$; Hess $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det}(A) = 0$;

→ $\text{Hess}_{\text{orl}} \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & 0 & 1 & 0 \\ 2y & 1 & 0 & 0 \\ 2z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det}(4) \rightarrow$ Para el ~~[illegible]~~ punto;

Por tanto, es un máximo local.

12. $\begin{cases} \text{Optimiza: } U = q_A + 12\ln(q_B \cdot q_C); \\ S.A: 10q_A + 12q_B + 6q_C = 1000 \end{cases}$

* Puntos singulares: $\nabla L(q_A, q_B, q_C, \lambda)$; $(0,0,0,0)$; No hay puntos sing.

a) Creamos función de L'Grange:

$$L = q_A + 12\ln(q_B \cdot q_C) - \lambda(10q_A + 12q_B + 6q_C - 1000);$$

- Creamos las ecuaciones derivando:

$$\begin{cases} 1 - 10\lambda = 0 & \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{10}}; \\ \frac{12q_C}{q_B \cdot q_C} - 12\lambda = 0 & \rightarrow \frac{12}{q_B} - \frac{12}{10} = 0;\ 12q_B = 120;\ \boxed{q_B = 10} \\ \frac{12q_B}{q_B \cdot q_C} - 6\lambda = 0 & \rightarrow \frac{12}{q_C} - \frac{6}{10} = 0;\ 6q_C = 120;\ \boxed{q_C = 20} \\ 10q_A + 12q_B + 6q_C - 1000 = 0 & \rightarrow 10q_A + 120 + 120 = 1000;\ \boxed{q_A = 76} \end{cases}$$

b) Para calcular su utilidad máxima: Sustituimos.

$$U(76, 10, 20) \Rightarrow 76 + 12\ln(10 \cdot 20) = \boxed{139'6}$$

* a) $\nabla U(q_A, q_B, q_C) = \left(1, \frac{12}{q_B}, \frac{12}{q_C}\right);$

$$Hess(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{q_B^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{q_B^2} \end{pmatrix} = \begin{cases} H_1 = 0 \\ H_2 = 0 \\ H_3 = 0 \end{cases} \text{ Indefinida}$$

$$Hess_{ORL} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 12 & 6 \\ 10 & -0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & -\frac{12}{100} & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -\frac{12}{400} \end{pmatrix} = -\frac{9}{25} < 0;$$

Convexa, por tanto es un ~~[illegible]~~ local, máximo

$H_3 = 12 > 0$

c) El multiplicador de LaGrange:

$\boxed{\lambda = \frac{1}{10}} \Rightarrow$ Su variación por unidad va a ser $0'1\%$.

David Martínez Díaz

15. $\begin{cases} \text{Optimizar} \Rightarrow U = 4x^2 + y^2 + z^2 - 3; \\ \text{S.A} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$

* Puntos singulares:

$\nabla g \Rightarrow (2x, 2y, 2z) = (0,0,0)$

No hay puntos singulares. $0 \neq 16$

a) Elaboramos la ecuación de L'Grange:

$L = 4x^2 + y^2 + z^2 - 3 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 16);$

- Sacamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} 8x - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ 2z - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(4-\lambda) = 0 \\ 2y(1-\lambda) = 0 \\ 2z(1-\lambda) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

Si $\lambda = 1; \Rightarrow (0, y, z)$

$\begin{cases} \cdot\ y, z = \infty; \\ \cdot\ x = 0 \end{cases}$ $\boxed{y^2 + z^2 = 16;}$

Si $\lambda = 4; \Rightarrow (x, 0, 0); \Rightarrow (\pm 4, 0, 0)$

$\begin{cases} \cdot\ \Rightarrow x^2 = 16;\ x = \pm 4 \\ \cdot\ y, z = 0 \end{cases}$

$\nabla U(8x, 2y, 2z)$

$$\text{Hess}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H_1 = 8 \\ H_2 = 16 \\ H_3 = 32 \end{cases}$$

Definida Positiva.

Al ser convexa, no hay maximo global, sino que buscaremos en la orlada.

$$\text{Hess}_{ORL}\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & 8 & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 2 & 0 \\ 2z & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{Para } (4,0,0) \Rightarrow -256 < 0 \text{ Máx.} \\ \text{Para } (-4,0,0) \Rightarrow -256 < 0 \text{ Max} \end{array}\right\}$ Locales.

b) Como Q es cerrada y acotada, además cumple el Tª de Weirstrass por lo que son puntos estacionarios.

Ademas estos son regulares porque cumplen la función de La Grange.

c) $U(4,0,0) \Rightarrow 61;$

Scanned by TapScanner