David Martínez Díaz

- Ejercicios:

2.1. Sea I, un intervalo cerrado $[0,1]$. Para todo $a, b \in I$ definimos $a \vee b = \max\{a,b\}$, $a \wedge b = \min\{a,b\}$ y $\bar{a} = 1-a$, es un algebra de Boole.

* Para demostrar que es un Álgebra de Boole, se deben de cumplir las 8 generalidades de Huntington:

⇒ Si comprobamos la propiedad de complementación:

$$a \vee a^* = 1 \quad \Big\}$$ No se puede cumplir como caso general, solo en el caso que $a=1$ y $a^* = 1-1=0$;

↳ $a \in [0,1]$ $\quad a \vee a^* = 1$

* Por tanto al no cumplirse la Prop. complementación no es un Álgebra de Boole

---

2.2. Demuestra la propiedad asociativa de $\vee$ y $\wedge$.

$$a + (b+c) = (a+b)+c \qquad a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$$

* Ahora aplicamos una multiplicación en cada parte de la igualación en la ecuación:

$$a\cdot(a+(b+c)) = a\cdot((a+b)+c)$$

* $\boxed{a\cdot(a+(b+c)) = a}$

↳ Ley de absorción

$$a = a + (a\cdot c) = (a\cdot(a+b)) + (a\cdot c) \Rightarrow a\cdot((a+b)+c)$$

$$a + (a\cdot(b\cdot c)) = a + ((a\cdot b)\cdot c)$$

$$a + (a\cdot(b\cdot c)) = a = a\cdot(a+c) = (a+b\cdot a)(a+c)$$

↳ Ley absorción

$$\Rightarrow \boxed{a + ((a\cdot b)\cdot c}$$

* Queda demostrado

2.3. Si $(A, \vee, \wedge, {}^*, 0, 1)$. Para todo $a, b, c \in A$

1. Si $a \vee x = 1$ y $a \wedge x = 0$ entonces $x = a^*$

$\Rightarrow$ Suponemos $a = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 + x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 1} \\ 0 \cdot x = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0} \end{array}\right\} x = a^* = 1$

$\Rightarrow$ Suponemos $a = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 + x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ 1 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}\right\} x = a^* = 0$

* Queda demostrado

---

2. $0^* = 1$ y $1^* = 0$

*Utilizamos la propiedad de complementación:
$a \vee a^* = 1$

$\Rightarrow$ Suponemos $a = 0 \Rightarrow 0 + 0^* = 1 \rightarrow \boxed{0^* = 1}$
$\Rightarrow$ Suponemos $a = 1 \Rightarrow 1 + 1^* = 1 \rightarrow \boxed{1^* = 0}$

* Queda demostrado.

---

3. $(a^*)^* = a$

$(a^*)^* \Rightarrow (a^* \wedge 1)^* \Rightarrow (a^* \wedge (a \vee 1))^* \Rightarrow ((a^* \wedge a) \vee (a^* \wedge 1))^*$
$\Rightarrow (0 \vee a^*)^* = (a^* \vee 0)^* \Rightarrow a \wedge 1 \Rightarrow a$

*Queda demostrado

---

4. Si $a^* = b^*$ entonces $a = b$
$a^* = b^* \Rightarrow (a^*)^* = (b^*)^* \Rightarrow$ Utilizando el ejercicio anterior
$\boxed{a = b} \Rightarrow$ [Queda demostrado]

---

5. Leyes de Morgan: $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$ $\quad (a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$

* Por la prop. Complementación $a \cdot a^* = 0$:

$\Rightarrow$ Sea $(a+b)^* \Rightarrow x = (a+b)^* \Rightarrow (a+b) \cdot (a^* \cdot b^*) \Rightarrow (\underbrace{a \cdot a^*}_{0} \cdot b^*) + (\underbrace{b \cdot b^*}_{0} \cdot a^*)$
$\boxed{0 = 0}$ [Queda demostrado]

$\Rightarrow (a \cdot b)^* = a^* + b^* \Rightarrow (a \cdot b)^* \Rightarrow x = (a \cdot b)^*$

$(a \cdot b) \cdot x = 0 \Rightarrow$ Suponemos $x = a^* + b^*$

$(a \cdot b) \cdot (a^* + b^*) \Rightarrow (a \cdot a^* \cdot b) + (a \cdot b^* \cdot b)$

$\boxed{0 = 0} \Rightarrow$ [Queda demostrado].

2.4. Si $(A, \vee, \wedge, {}^*, 0, 1)$ es un álgebra de Boole.

1. $0 \leq a \leq 1$

Nos encontramos un conjunto $A = \{0, 1\}$, donde 'a' $\exists a \in A$, entonces podemos suponer que $a \geq 0 \Rightarrow a = 0$ o $a = 1$ y lo mismo para $a \leq 1$

$0 \leq a \rightarrow a \wedge a^* = 0$

$a \leq 1 \rightarrow a \vee a^* = 1$

2. Isotonía. Si $a \leq b$, entonces $a \vee c \leq b \vee c$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$

$\Rightarrow a + c \leq b + c \Rightarrow$ Por la propiedad. complementación $\Rightarrow a + (c + c^*) \leq b + (c + c^*)$

$a + 1 \leq b + 1 \Rightarrow \boxed{a \leq b}$ [Queda demostrado]

$\Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \Rightarrow$ Aplicamos De Morgan: $a^* + c^* \leq b^* + c^*$,

Podemos volver a sumar las c en ambos lados.

$a^* + 1 \leq b^* + 1 \Rightarrow a^* \leq b^* \Rightarrow \boxed{a \leq b^*}$

* [Queda demostrado]

3. $a \leq b \Leftrightarrow b^* \leq a^*$

$a \leq b \Rightarrow a + (-b) \leq 0 \Rightarrow \{$ Si $b \in A \Rightarrow (-b) = b^*$

$a + b^* \geq 0 \Rightarrow b^* \leq a^*$

$\hookrightarrow a \leq b \Rightarrow a^* \geq b^* \Rightarrow$ [Queda Demostrado]

4. $a \wedge b \leq c \Leftrightarrow a \leq b^* \vee c$

Si $a \wedge b = c \Rightarrow a \geq b^* \vee c \Rightarrow a = b^* \vee (a \wedge b)$;

$\hookrightarrow a = (b^* \vee a) \wedge (b^* \vee b) \Rightarrow a = (b^* \vee a) \wedge 1 \Rightarrow a \vee b^* = a$;

$\hookrightarrow a \geq c \Rightarrow a = a \vee b^* \Rightarrow a \wedge b$

[Queda Demostrado]

2.5. Sea $A \Rightarrow$ Algebra de Bool, con $a, b \in A$, definimos
$a \oplus b = (a \cdot b^*) + (a^* \cdot b)$

1. $a \oplus b = b \oplus a$

$(a \cdot b^*) + (a^* \cdot b) \Rightarrow$ * Propiedad Conmutatividad $\Rightarrow (b^* \cdot a) + (b \cdot a^*)$

$(b \cdot a^*) + (b^* \cdot a) \Rightarrow \boxed{b \oplus a}$

* Queda demostrado

2. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

$\Rightarrow a \oplus (b \oplus c) \Rightarrow (a \cdot (b \oplus c)^*) + (a^* \cdot (b \oplus c)) \Rightarrow (a \cdot [(b \cdot c^*) + (b^* \cdot c)]^* +$
$(a^* \cdot [(b \cdot c^*) + (b^* \cdot c)]) \Rightarrow \boxed{b^* \cdot c^* \cdot a + b \cdot c \cdot a + a^* \cdot b \cdot c^* + a^* b c}$

$\Rightarrow (a \oplus b) \oplus c \Rightarrow ([(a \cdot b^*) + (a^* \cdot b)] \cdot c^*)$
$\hookrightarrow [(a \cdot b^*) + (a^* \cdot b)]^* \cdot c) \Rightarrow \boxed{a b^* c^* + a^* \cdot b \cdot c^* + b \cdot c \cdot a + a^* b^* c}$

3. $a \wedge (b \oplus c) = (a \wedge b) \oplus (a \wedge c)$

$\Rightarrow a \cdot [(b \cdot c^*) + (b^* \cdot c)] \Rightarrow \boxed{a \cdot b \cdot c^* + a b^* c}$

$\Rightarrow (a \cdot b) \oplus (a \cdot c) \Rightarrow [(a \cdot b) \cdot (a^* + c^*)] + (a^* + b^*) \cdot (a \cdot c);$
$\hookrightarrow \boxed{a \cdot b \cdot c^* + a b^* c}$

* Queda demostrado

4. $\Rightarrow a \oplus a = 0 \Rightarrow (a \cdot a^*) + (a^* \cdot a) \overset{\text{Prop. complementación}}{=} 0 + 0 = \boxed{0}$

$\Rightarrow a \oplus 0 = a \Rightarrow (a \cdot \bar{0}) + (\bar{a} \cdot 0) = a \cdot 1 + 0 = \boxed{a}$

$\Rightarrow a \oplus a^* = 1 \Rightarrow (a \cdot a^{**}) + (a^* \cdot a^*) = 1$

$\hookrightarrow$ * La operación booleana, siempre va a dar 1, ya que dichas operaciones son inversas entre sí.

$\Rightarrow a \oplus 1 = a^* \Rightarrow (a \cdot 1^*) + (a^* \cdot 1) = a \cdot 0 + a^* \cdot 1 \Rightarrow \boxed{a}$

* Queda demostrado.

5. $x \oplus a = b$ si y solo si $x = a \oplus b$

$(a\oplus b)\oplus a \Rightarrow ([(a\cdot b^*)+(a^*\cdot b)]\cdot a^*) + ([a\cdot b^*]+[a^*\cdot b]\cdot a) \Rightarrow a^*\cdot a^*\cdot b +$

$(a^*+b)\cdot(a+b^*)\cdot a \Rightarrow a^*\cdot a^*\cdot b + (a^*\cdot b^* + a\cdot b)$

$\Rightarrow a^*\cdot a^*\cdot b + a\cdot a\cdot b = 0\cdot 0\cdot b + 1\cdot 1 = b \Rightarrow \boxed{b}$

↳ Como hemos resuelto en casos anteriores, con estas operaciones, quiere como $\boxed{x\oplus a = b \text{ si } x = a+b}$

*Queda demostrado.

---

6. $a = b$ si y solo si $a\oplus b = 0$

$a\oplus b \Rightarrow (a\cdot b^*) + (a^*\cdot b)$ si $a=b \Rightarrow (b\cdot b^*) + (b^*\cdot b) = 0+0=0$

*Queda demostrado

2.6 Sea D(70) el conjunto de nº naturales, con $x^* = 70/x$, con $0=1$ y $1=70$

1. Para comprobar si es álgebra de Boole, vemos sus divisores y si alguno se repite:

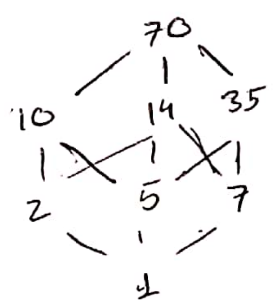
   $D(70) \Rightarrow 70 = 2\cdot 5\cdot 7$

   ↳ Es Algebra de Bool

   Átomos$(D(70)) \Rightarrow \{2,5,7\} \Rightarrow$ coAt$(D(70)) \Rightarrow \{35,14,10\}$

   $2 \Rightarrow 2^* \Rightarrow \frac{70}{2} = 35,\ 5^* = \frac{70}{5} = 14,\ 7^* = \frac{70}{7} = 10$

2.



3. $35\wedge(2\vee 7) \Rightarrow 35\wedge 14 \Rightarrow \boxed{7}$

$(2\vee 7)\wedge(14\wedge 10) \Rightarrow 14\wedge 2 \Rightarrow \boxed{2}$

*{Ya que $\vee \Rightarrow$ m.c.m y $\wedge \Rightarrow$ m.c.d [Queda Demostrado]}

2.7. Para justificar que D(210) es un Algebra de Boole:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} At \Rightarrow \{2, 3, 5, 7\} \\ CoAt \Rightarrow \{105, 70, 42, 30\} \end{array} \right.$$

1. $30 \vee (15 \wedge 10) \Rightarrow 30 \vee 5 \Rightarrow \boxed{30}$
2. $14^* \wedge 21 \Rightarrow (\frac{210}{14} \wedge 21) \Rightarrow \boxed{3}$
3. $(6^* \vee 35^*)^* \vee 10 \Rightarrow \dfrac{210}{(\frac{210}{6} \vee 35)} = \frac{210}{35} = 6 \vee 10 = \boxed{30}$
4. $((3 \vee 10)^* \vee 2)^* \Rightarrow \dfrac{210}{(3 \vee 10)} \Rightarrow 7 \Rightarrow \dfrac{210}{(7 \vee 2)} \Rightarrow \boxed{15}$

Elemento 21 $\begin{cases} m.c.m(3,7) = 21 \\ m.c.d(42,105) = 21 \end{cases}$ Elemento 35 $\begin{cases} m.c.m(5,7) = 35 \\ m.c.d(105,70) = 35 \end{cases}$

2.8.

1. $D(2310) \Rightarrow \{2, 3, 5, 7, 11\}$

$\hookrightarrow At \Rightarrow \{2, 3, 5, 7, 11\} \Rightarrow CoAt \Rightarrow \{1155, 770, 462, 330, 210\}$

2. • $21 \vee (165 \wedge 77^*) \Rightarrow 21 \vee 15 \Rightarrow \boxed{105}$

• $770 \wedge (3 \vee 14)^* \Rightarrow 770 \wedge \frac{2310}{42} \Rightarrow 770 \wedge 55 \Rightarrow \boxed{55}$

• $(15 \wedge 110)^* \Rightarrow \dfrac{2310}{15 \wedge 110} \Rightarrow \boxed{462}$

• $15^* \wedge 110^* \Rightarrow 154 \wedge 21 \Rightarrow \boxed{7}$

• $385 \vee (1155 \wedge 42) \Rightarrow \boxed{1155}$

• $(385 \vee 1155) \wedge (385 \vee 42) \Rightarrow \boxed{1155}$

3

$5 = \begin{cases} m.c.m(5,5) \\ m.c.d \Rightarrow No \end{cases}$ $154 = \begin{cases} m.c.m \Rightarrow No \\ m.c.d \Rightarrow (770,462) = 154 \end{cases}$ $35 = \begin{cases} m.c.m(5,7) = 35 \\ m.c.d \Rightarrow No \end{cases}$

$231 = \begin{cases} m.c.m \Rightarrow No \\ m.c.d \Rightarrow (1155, 462) \end{cases}$ $1155 = \begin{cases} m.c.m \Rightarrow No \\ m.c.d \Rightarrow No \end{cases}$

2.9.

1. Si tenemos un Álgebra de Boole con 32 elementos, los átomos de dicho conjunto son los conjuntos unitarios $\{b\}$, con $b \in B$. Toda Álgebra de Boole tiene 2^n elementos, donde n es el número de elementos:

$2^n = 32$ elementos, $\Rightarrow$ 5 átomos de Álgebra de Boole

2. Un Álgebra de Boole cuyos átomos son a_1, a_2, a_3, a_4:

$\Rightarrow$ Tiene 4 coátomos y se calculan de la siguiente forma:

$$C_1 = \frac{P(B)}{a_1}, \dots \frac{P(B)}{a_n};$$

2.10. Para calcular el conjunto, realizamos el m.c.m de los dos coátomos:

$m.c.m(105, 42) \Rightarrow 210 \Rightarrow D(n) \Rightarrow D(210) \Rightarrow \{2, 3, 5, 7\}$

$At \Rightarrow \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow CoAt \Rightarrow \{105, 70, 42, 30\}$

$x \in D(210) \Rightarrow 105^* \vee x = 42 \Rightarrow 2 \vee x = 42$

$$\left\{\begin{matrix} m.c.m(2, 21) \Rightarrow 42 \\ m.c.m(2, 42) \Rightarrow 42 \end{matrix}\right\}$$

2.11. $f(x, y, z) = xy + z^* \Rightarrow$ *Aplicamos las leyes de De Morgan 2 veces.

1. $xy + z^* \Rightarrow [(x^* + y^*) \cdot z]^* \Rightarrow \underline{(x^* + y^*)^* + z^*};$

2. $xy + z^* \Rightarrow [(xy)^* \cdot z]^*$

[*Queda demostrado]

2.12. Por ejemplo, para este ejercicio definimos una función booleana como producto/suma de otras funciones

$\Rightarrow$ Ej: $f(x, y, z) \Rightarrow xy + zx \Rightarrow g(xyz) + w(x, y, z);$

si queremos dejarlo en xy complemento aplicamos de De Morgan y las funciones que no tengas el +, a la g y w en este caso, son las que debemos cambiar lo que hay y dejarlo como está en complemento.

Escaneado con CamScanner

2.13.

$\Rightarrow$ Para el caso NAND $\Rightarrow (a \wedge b)^*$

$\rightarrow$ Tenemos que demostrar las operaciones del Álgebra de Boole:

- $a^* = (a \wedge a)^* \Rightarrow$ [Queda Demostrado]
- $a + b \Rightarrow (a^* \wedge b^*)^* \Rightarrow$ A traves de De Morgan [Queda Demostrado]
- $a \cdot b \Rightarrow (a \wedge b)^* \wedge 1 \Rightarrow$ [Queda Demostrado]

$\Rightarrow$ Para el caso NOR $\Rightarrow (a \vee b)^*$

- $a^* \Rightarrow (a \vee 0)^* \Rightarrow$ [Queda Demostrado]
- $a + b \Rightarrow [(a \vee b)^* \vee 0]^* \Rightarrow$ [Queda Demostrado]
- $a \cdot b \Rightarrow (a^* \vee b^*)^* \Rightarrow$ [Queda Demostrado]

2.14. Expresa $f(x, y, z) = xy + z^*$ en NAND y NOR

$\Rightarrow$ Para la puerta NAND:

$$f(x,y,z) = xy + z^* \Rightarrow \cancel{[(x^*+y^*)z \Rightarrow ((x^*+y^*)^*+z^*)]}\ [(x \cdot y)^* \cdot z]^*$$

* Se aplica dos veces la ley de De Morgan, teniendo como resultado dos puertas NAND

$\Rightarrow$ Para la puerta NOR:

$$f(x,y,z) = xy + z^* \Rightarrow (x^* + y^*) \cdot z \Rightarrow (x^* + y^*)^* + z^*$$

$$\hookrightarrow \{[(x^* + y^*)^* + z^*]^* + 0\}^*$$

Con esto conseguimos deshacernos de la puerta OR, realizando 4 leyes de De Morgan, por ultimo le añadimos un 0 y lo complementamos todo consiguiendo:

3 puertas NOR

*Queda Demostrado