RP3 Ejercicio 3

a) Calculamos $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Si sumamos $A^2 + A$

$$A^2 + A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \neq \beta I$$

Pero si intentamos anular las posiciones 12 y 21

$$A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot I$$

Luego en $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$

podemos tomar $\underline{\alpha = -2}$ $\underline{\beta = 3}$

$$A^2 - 2A + 3I = 0$$

Manipulamos esta ecuación

$$A^2 - 2A = -3I$$

$$-\frac{1}{3}\left[A^2 - 2A\right] = I$$

$$-\frac{1}{3}\left[A \cdot A - 2 \cdot I \cdot A\right] = I$$

$$\boxed{-\frac{1}{3}\left[A - 2I\right]} \cdot A = I$$

actúa como inversa a izquierda

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\left[A - 2I\right] = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Solución

RP3. Ejercicio 5

1. Si $A$ es idempotente $A^2 = A$

Si $A$ es regular, podemos multiplicar en ambos miembros por $A^{-1}$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot [A}_{= I} \cdot A] = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{= I}$$

$$A = I$$

2. Para comprobar que $B = I - A$ es idempotente calculamos $B^2$

$$B^2 = (I-A)(I-A) = \underbrace{I^2}_{= I} - \underbrace{A \cdot I}_{= A} - \underbrace{IA}_{= A} + \underbrace{A^2}_{= A}$$

$$= I - 2A + A = I - A = B$$

luego $B$ es idempotente.

$$A \cdot B = A(I-A) = A - A^2 =$$
$$= A - A = 0$$

3. En $\mathbb{Z}_2$

el planteamiento $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

nos da 4 ecuaciones NO Lineales con 4 incógnitas.

Como sólo hay 16 matrices y las idempotentes forman parejas $(A, I-A)$, podemos examinar todas las posibilidades

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son idempotentes

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son idempotentes

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son idempotentes

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ son idempotentes

Las matrices
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ; $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son <u>regulares</u>
luego ni ellas ni sus "parejas" $I-A$ son idempotentes.

4. Por ejemplo

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, su pareja $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

RP3 Ejercicio 8. (Idea para resolverlo).

$\boxed{\mathbb{Z}_3}$ Nos piden la matriz de paso de $A$ a $B$ mediante o.e. de filas puesto que $P$ aparece a la izq. de $A$

$$P \cdot A = B.$$

Como no hay un algoritmo que nos permita pasar de $A$ a $B$ usaremos la siguiente técnica:

1º Calculamos $P_1$ la matriz de paso de $A$ a su f. de Hermite por filas

$$P_1 \cdot A = H_A$$

2º Calculamos $P_2$ la matriz de paso de $B$ a su f. de Hermite por filas

$$P_2 \cdot B = H_B$$

3º Si $H_A = H_B$ entonces

$$P_1 \cdot A = P_2 \cdot B$$

y podemos despejar $B$

$$\boxed{P_2^{-1} \cdot P_1} \cdot A = B$$

luego $P = P_2^{-1} \cdot P_1$

4º Si $H_A \neq H_B$ no existe $P$ regular.

RP3. Ejercicio 48.

$\boxed{\mathbb{Z}_3}$ La matriz ampliada del sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Calculamos su forma escalonada reducida por filas:

$$\sim_f \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & a+1 & 2 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_3 - aF_2 \to F_3}{\sim_f}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -a^2-a & -2a+1 \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2+a & 2a-1 \end{array}\right]$$

En la tercera fila solo podemos hacer un pivote en la posición 33 si $a^2+a \neq 0$

Como estamos en $\mathbb{Z}_3$ podemos observar todos los valores posibles de $a$

| $a$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $a^2+a$ | 0 | 2 | 0 |

Para $a=0,2$ el elemento en la posición 33 es 0, veamos qué ocurre con $2a-1$

| $a$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $2a-1$ | 2 | 1 | 0 |

Así que nos quedan 3 casos posibles

$\underline{a=0}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\underline{\underline{\text{I.}}}$

$\underline{a=1}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ $\underline{\underline{\text{C.D.}}}$

$\underline{a=2}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\underline{\underline{\text{C.I.}}}$

---

También puede resolverse usando determinantes.

Si $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A)=3$ y como $[A|B]$ no puede tener un rango mayor que 3 por su orden $3\times 4$, entonces $rg(A|B)=3$ y será C.D.

Calculamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = a\cdot(a+1)$$

Si $a \neq 0,2$ (o sea $a=1$) $\Rightarrow$ C.D.

Quedarían por estudiar los casos $a=0$ y $a=2$. (ya resueltos por el método anterior).