David Martínez Díaz

- Cuestionario Tema 4

· Ejercicio 6:

$$\begin{cases} Max: & x+y, \\ s.a: & L(x^2+y)=0; \end{cases}$$

a) Esto no se cumple ya que su Hess:

$$Hess(x,y) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 0, \left\{\begin{array}{l} \text{Por tanto, esta es indefinida.} \\ \text{No es cóncava ni convexa.} \\ \text{Es un plano.} \end{array}\right\}$$

b) Si se cumple ya que; aplicando la propiedad del logaritmo:

$Ln(x^2+y)=0; \Rightarrow e^{Ln(x^2+y)} = e^0;$

$x^2+y=1;$ Luego al ser iguales, si lo cumple.

c) Creamos la función LaGrange; $\quad Hess_{normal} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ * No da información;

$L(x,y,\lambda) = x+y-\lambda(x^2+y-1);$

$$\left\{\begin{array}{l} 1-2x\lambda=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ 1-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1 \\ x^2+y=1 \Rightarrow y=\frac{3}{4} \end{array}\right\}$$

· Calculamos la Hess;

$$Hess_{L}(x,y) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1=-2 \\ H_2=0 \end{Bmatrix} S.D.N$$

$Max: x+(1-x^2);$ $\quad Hess_{ORL} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2x}{x^2+y} & \frac{1}{x^2+y} \\ \frac{2x}{x^2+y} & -2\lambda & 0 \\ \frac{1}{x^2+y} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2>0$ $\quad$ Máx ~~global~~ Local

$1-2x=0; \Rightarrow x=\frac{1}{2}; \quad f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}+(1-\frac{1}{4}) = \frac{5}{4};$

Como los puntos son ~~diferentes~~ iguales, el programa ~~no~~ sí es equivalente. Ya que sustituyendo en la restricción si coinciden.

d) Tampoco es, ya que el $P(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ es un máximo ~~global~~ local comprobado anteriormente.

Scanned by TapScanner

- Ejercicio 7:

$$\begin{cases} \text{Min:} & xy + z \\ \text{s.a:} & x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

a) Para saber si es compacta, al ser una esfera, esta se cumple y para saber si es convexa:

$$Hess(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{cases} H_1 = + \\ H_2 = + \\ H_3 = + \end{cases}$$ Def. Positiva

[~~[illegible]~~]

* Al ser una esfera su interior no pertenece al conjunto y ademas no es convexa

b) Miremos su Hess: para comprobar su convexidad.

$$Hess(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} H_1 = 0 \\ H_2 = - \\ H_3 = 0 \end{cases}$$ Indefinida

c) $L(x,y,z,\lambda) = xy + z - \lambda(x^2+y^2+z^2-4)$;

$$\begin{cases} y - 2x\lambda = 0 & \Rightarrow y = 2\lambda x \\ x - 2y\lambda = 0 & \Rightarrow x = 2\lambda y \\ 1 - 2z\lambda = 0 & \Rightarrow 1 = 2\lambda z;\ \lambda, z \neq 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \quad y = 2\lambda(2\lambda y)$$

$y(1-4\lambda^2) = 0$;

- Distinguimos casos:

- $y = 0 \Rightarrow x = 0;\ z^2 = 4;\ z = \pm 2;\ \lambda = \pm \frac{1}{4}$;

$P(0,0,2)_{\lambda=\frac{1}{4}}$ $P(0,0,-2)_{\lambda=-\frac{1}{4}}$

- $y \neq 0 \Rightarrow 1 - 4\lambda^2 = 0; \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$;

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 1 \end{cases}$ $x^2 + x^2 + 1 = 4;$ $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$P(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$ $P(-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2}, 1)$;

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x^2 + 1 = 4;\ x = \pm\sqrt{3/2}$

$P(\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2}, -1)$ $P(-\sqrt{3/2}, +\sqrt{3/2}, -1)$; $\Rightarrow$ Valor Mínimo $= 2'5$

d) $x^2+y^2+z^2 = 2$;

* Sustituyendo

$$\begin{cases} x^2 + x^2 + 1 = 2; \\ 2x^2 = 1; \\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

El valor mínimo es:

$$\underbrace{P(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \sqrt{1/2}, -1) \text{ y } P(\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}, -1)}_{[1'5]}$$

No lo cumple

- Ejercicio 9:

$$\begin{cases} \text{Min} & 2K + 8L \\ \text{s.a:} & KL = 20 \\ & K, L > 0 \end{cases}$$

a) $12 \cdot 3 = 36$;
No satisface las condiciones de lagrange.

b) Tampoco se cumple $\boxed{\lambda > 7}$

- Calculamos la ecuación de LG:

$LG(K, L) = 2K + 8L - \lambda(KL - 20)$;

$$\begin{cases} 2 - \lambda L = 0 \Rightarrow L = \frac{2}{\lambda} \\ 8 - \lambda K = 0 \Rightarrow K = \frac{8}{\lambda} \\ KL = 20 \Rightarrow \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{8}{\lambda} = 20; \quad 16 = 20\lambda^2; \quad \lambda = \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}; \end{cases}$$

- Si $\lambda = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\begin{cases} L = \sqrt{5} \\ K = 4\sqrt{5} \end{cases}$
- Si $\lambda = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\begin{cases} L = -\sqrt{5} \\ K = -4\sqrt{5} \end{cases}$ No nos vale

$Hess_N \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ *No da información.

- Calculamos la Hess:

$$Hess(K, L) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} H_1 = 0 \\ H_2 = - \end{cases}$$

S. Def. Negativo

Alcanza ~~Max~~ Local.
Min

*

c) Al no tener ni máximos ni mínimos globales, si cumple este apartado

d) Con $KL = 20 \Rightarrow$ El óptimo es $16\sqrt{5}$
Para $\lambda = 2/\sqrt{5}$;

Entonces sería $KL = 23$;
$3 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$ + Opt. Anterior;

Se produce un incremento de:

$\frac{32}{\sqrt{5}} = 2'68 \Rightarrow$ se cumple.

*
$$Hess_{ORL} \begin{pmatrix} 0 & L & K \\ L & 0 & -\lambda \\ K & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = -35 < 0$$

Los puntos al final son mínimos locales.