David Martínez Díaz

<u>Relación Tema 4: Parte 2</u>

4.14.

1. $(\beta \to \alpha \vee \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to ((\gamma \to \beta) \to \gamma)))$

$\models (\beta \to \alpha \vee \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to ((\gamma \to \beta) \to \gamma)))$

$\beta \to \alpha \vee \gamma \models (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to ((\gamma \to \beta) \to \gamma))$

$\beta \to \alpha \vee \gamma, a \to \beta, \alpha \to \beta, \alpha \models (\gamma \to \beta) \to \gamma$

$\neg\beta \vee \alpha \vee \gamma, \neg\alpha \vee \beta, \alpha, \neg\gamma \vee \beta \models \gamma$

→ Por Davis-Putnam, comprobamos si es insatisfacible:

$\{\neg\beta \vee z \vee \gamma, \neg\alpha \vee \beta, \alpha, \neg\gamma \vee \beta, \neg\gamma\}$

↳ $\alpha = 1$ (Regla 1)

$\{\beta, \neg\gamma \vee \beta, \neg\gamma\}$

↳ $\gamma = 0$ (Regla 1)

$\{\beta\}$

↳ $\beta = 1$

$\{\}$

* Como Γ no es insatisfacible, la fórmula inicial no es consecuencia del vacío y por tanto no es una tautología.

2. $(\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \beta)) \to \alpha)$

$\neg\beta \vee \neg\alpha,\ \alpha \vee \neg(\neg\alpha \vee \beta) \models \alpha$

↳ $\neg\beta \vee \neg\alpha,\ \alpha \vee (\alpha \wedge \neg\beta) \models \alpha$

$\{\neg\beta \vee \neg\alpha,\ \alpha,\ \alpha \vee \neg\beta,\ \neg\alpha\}$

⇒ Por Davis - Putnam: Hay un literal (α) y su contrario por lo que es insatisfacible.

⇒ Por Resolución:

Es insatisfacible.

---

3. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

$\neg\alpha \vee \beta,\ \neg\beta \vee \alpha \models \alpha \to \gamma$;

$\neg\alpha \vee \beta,\ \neg\beta \vee \alpha,\ \alpha \models$

↳ El conjunto $\Gamma = \{\neg\alpha \vee \beta,\ \neg\beta \vee \alpha,\ \alpha,\ \neg\gamma\}$ es insatisfacible.

⇒ **Davis - Putnam:**

$\alpha = 1$ (Regla 1)

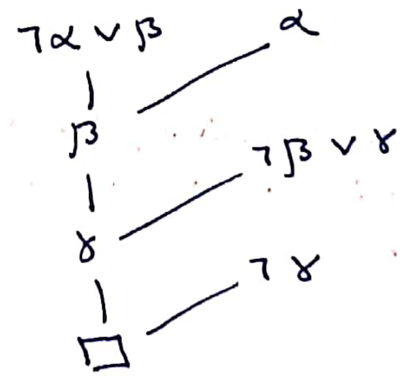
$\{\beta,\ \neg\beta \vee \gamma,\ \neg\gamma\}$

↓ $\beta = 1$

$\{\gamma,\ \neg\gamma\}$

Insatisfacible

⇒ **Resolución:**



⇒ El conjunto original es consecuencia del vacío, o sea, una tautología.

4. $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

$(\alpha \to \beta) \to \alpha \models \alpha \Rightarrow \alpha \wedge (\alpha \vee \neg\beta) \models \alpha$

$\alpha, \alpha \vee \neg\beta \models \alpha$

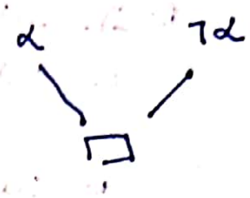
↳ Es una tautología si es insatisfacible el conjunto $\{\alpha, \neg\alpha, \alpha \vee \neg\beta\}$

⇒ <u>Davis - Putnam</u>

Aparece un literal y su contrario.

* Insatisfacible

⇒ <u>Resolución:</u>



* Insatisfacible.

⇒ Es una tautología

---

8. $\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$

↳ $\neg(\alpha \to \beta) \models (\neg\alpha \to \neg\beta) \Rightarrow \alpha, \neg\beta, \neg\alpha \models \beta$

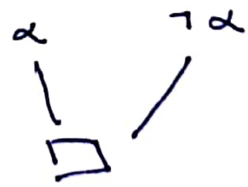
Será tautología si es insatisfacible $\{\alpha, \neg\beta, \beta, \neg\alpha\}$

⇒ <u>Davis - Putnam:</u>

Aparece un literal y su negación.

* Insatisfacible

⇒ <u>Resolución:</u>



⇒ De nuevo la fórmula de partida o consecuencia del vacío y por tanto tautología.

4.15.

1. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \models \neg a \wedge \neg c$

$\hookrightarrow \{\neg a \vee \neg b, \neg c \vee a, b, a \vee c\}$

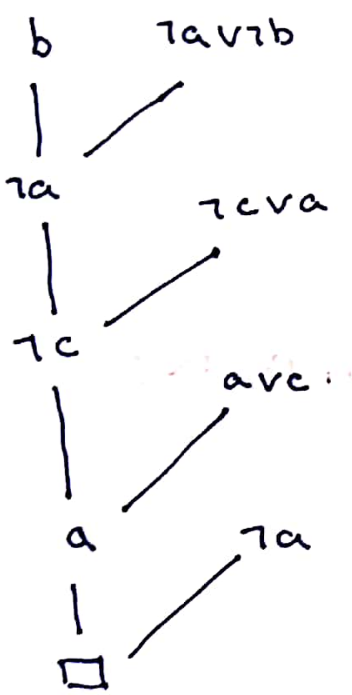
$\downarrow b = 1$

$\{\neg a, a \vee \neg c, a \vee c\}$

$\downarrow a = 0$

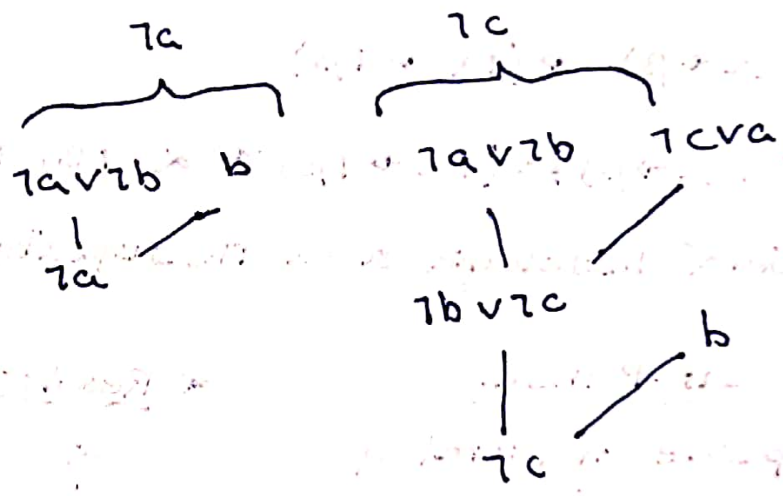
$\{\neg c, c\} \Rightarrow$ Insatisfacible: la consecuencia es cierta.

$\Rightarrow$ Clausula vacía:



$\Rightarrow \neg a \wedge \neg c$ a partir del conjunto de premisas:

$\{\neg a \vee \neg b, \neg c \vee a, b\}$



2. $\{\neg(a \wedge b),\ \neg c \vee a,\ b\} \models \neg a \rightarrow \neg c$

$\hookrightarrow \{\neg a \vee \neg b,\ \neg c \vee a,\ b,\ \neg a\} \models \neg c$

Ver si es insatisfacible el conjunto de premisas y negación de la conclusión.

$\{\neg a \vee \neg b,\ \neg c \vee a,\ b,\ \neg a,\ c\}$

$\hookrightarrow c = \bot$ (Regla 1)

$\{\neg a \vee \neg b,\ a,\ b,\ \neg a\}$

* Como tenemos $\{a, \neg a\} \Rightarrow$ Insatisfacible

$\Rightarrow$ Clausula vacía a partir de premisas y negación de la conclusión

$\neg c \vee a$ $\quad$ c

a $\quad$ $\neg a$

$\square$

$\Rightarrow$ Demostración de la conclusión por resolución

$\{\neg a \vee \neg b,\ \neg c \vee a,\ b\}$

$\Rightarrow$ Quiero demostrar $\neg a \rightarrow \neg c$ que es equivalente a

$\neg\neg a \vee \neg c \equiv a \vee \neg c \equiv \neg c \vee a$

y ya es una premisa

4.16.

1. $\{a \to b,\ a \to \neg b\} \models \neg a$

↳ Debe ser insatisfacible:

$\{\neg a \vee b,\ \neg a \vee \neg b,\ a\}$

↳ $a = 1$ (Regla 1)

$\{b, \neg b\}$

↳ Insatisfacible

* La afirmación es cierta.

⇒ Demostrar la conclusión:

$\neg a \vee b$ $\quad$ $\neg a \vee \neg b$

$\neg a$

Por lo tanto la implicación es cierta

⇒ Demostración de la cláusula vacía partiendo de premisas y negación de la conclusión.

$\neg a \vee b$ $\quad$ a

b $\quad$ $\neg a \vee \neg b$

$\neg a$ $\quad$ a

$\square$

* Insatisfacible

2. $\{a \to b,\ a \vee b\} \models b$

↳ $b = 0$ (Regla 1)

$\{\neg a, a\}$ ⇒ Insatisfacible, la afirmación es cierta

⇒ Demostrar por resolución:

$\{\neg a \vee b,\ a \vee b\}$

$\neg a \vee b$ $\quad$ $a \vee b$

b

⇒ Cláusula vacía a partir de:

$\{\neg a \vee b,\ a \vee b,\ \neg b\}$

$a \vee b$ $\quad$ $\neg b$

a $\quad$ $\neg a \vee b$

b $\quad$ $\neg b$

$\square$

3. $\{a \to \neg b,\ a \wedge b\} \models c$

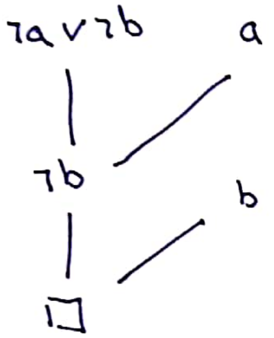
↳ $\{\neg a \vee \neg b,\ a,\ b,\ \neg c\}$

↳ $a=1$ (Regla 1)

$\{\neg b,\ b,\ \neg c\}$

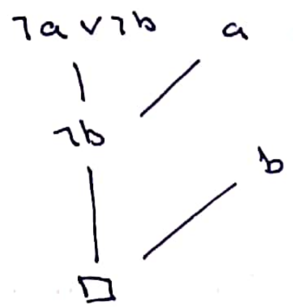
Insatisfacible ⇒ Por tanto, la afirmación es cierta.

⇒ <u>Demostración</u>



* Las premisas en sí son insatisfacibles, ya que si va a dar algo falso, podríamos deducir c.

⇒ Cláusula vacía desde premisas y negación de la conclusión:



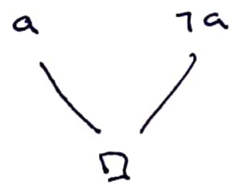
10. $\{(a \vee c) \to \neg a,\ c \to \neg a,\ b \to \neg a\} \models \neg a$

↳ $\{\neg(a \vee c) \vee \neg a,\ \neg c \vee \neg a,\ \neg b \vee \neg a,\ a\}$

↳ $\{(\neg a \wedge \neg c) \vee \neg a,\ \neg c \vee \neg a,\ \neg b \vee \neg a,\ a\}$ ⇒ $\{\neg a,\ \neg c \vee \neg a,\ \neg b \vee \neg a,\ a\}$

↳ Insatisfacible ⇒ La afirmación es cierta.

⇒ Cláusula vacía a partir de premisas y conclusión:



⇒ Demostrar conclusión a partir de premisas:

$\neg a \longrightarrow \neg a$

Ya es una premisa.

16. $\{a \to (b \vee c), d \vee \neg c, b \vee d\} \models a \to d$

$\to \{\neg a \vee b \vee c, d \vee c, b \vee d, \neg(\neg a \vee d)\}$

$\to \{\neg a \vee b \vee c, d \vee \neg c, b \vee d, a, \neg d\}$

$\Rightarrow$ Si este conjunto es insatisfacible, la afirmación es cierta, sino, no lo es.

$\to a = 1$

$\{b \vee c, d \vee \neg c, b \vee d, \neg d\}$

$\to d = 0$

$\{b \vee c, \neg c, b\}$

$\to c = 0$

$\{\}$

$\Rightarrow$ En conclusión, el conjunto es satisfacible, la afirmación es falsa. Entonces en el Mundo donde:

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{La afirmación es falsa.}$$