WUOLAH

irenegallegoskh
www.wuolah.com/student/irenegallegoskh

6812

Tema-1.pdf

Tema 1

1º Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas

Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
Universidad de Granada

WUOLAH + #QuédateEnCasa

#KeepCalm #EstudiaUnPoquito

Enhorabuena, por ponerte a estudiar te **regalamos un cartel** incluído entre estos apuntes para estos días.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Tema 1 CONJUNTOS, RELACIONES Y APLICACIONES

Un conjunto es una colección de objetos a los que llamaremos elementos del conjunto.
Si X es un elemento de un conjunto A escribiremos $X \in A$
Diremos que un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B, $A \subseteq B$, si todo elemento de $A \in B$.
Diremos que dos conjuntos A y B son iguales, $A = B$, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
Admitiremos la existencia de un conjunto sin elementos, lo llamaremos conjunto vacío $\emptyset$.
El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Ejemplos.

→ $\emptyset$ no tiene elementos

$2 \in \{1, 2, 3\}$	$\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$	$\emptyset \subseteq \emptyset$	$\{\{1\}\} \neq \{1\}$
$4 \notin \{1, 2, 3\}$	$\emptyset \subseteq \{1, 2, 3\}$	$\emptyset \notin \emptyset$	$1 \neq \{1\}$
$\{1\} \notin \{1, 2, 3\}$	$\emptyset \notin \{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 1, 3\} = \{1, 2, 3\}$	

→ **Operaciones con conjuntos**

Sean A y B dos conjuntos:

① Intersección A y B.

$A \cap B = \{x \text{ tg } x \in A \text{ y } x \in B\}$

tal que

② Unión A y B

$A \cup B = \{x \text{ tg } x \in A \text{ ó } x \in B\}$

③ Diferencia de A y B

$A \setminus B = \{x \in A \text{ tg } x \in B\}$ diferentes subconjuntos que puedes hacer con un conjunto

④ Conjunto de partes de A (conjunto potencia de A)

$P(A) = \{X \text{ tg } X \subseteq A\}$

⑤ Producto cartesiano de A y B

$A \times B = \{(a, b) \text{ tg } a \in A \text{ y } b \in B\}$

A los elementos de $A \times B$ se les llama pares ordenados.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

Formación Manuel Pozo

ACADEMIA UNIVERSITARIA MP

Academia especializada en grados universitarios. Cursos intensivos y clases particulares.

Profesores especializados en más de 150 asignaturas.
Consulta todas tus asignaturas.

- Matemáticas
- Química
- Física
- Bilología
- Bioquímica
- Ambientales
- Geología
- Óptica
- Estadística
- Tecnología
- Farmacia
- Nutrición
- Ingeniería
- Economía
- Medicina
- Odontología
- Psicología
- Magisterio.

www.formaciónmanuelpozo.com 615 14 96 76 Granada

⑥ Si $A_1, A_2 \dots A_n$ son conjuntos entonces el producto cartesiano de todos ellos es

$$A_1 \times A_2 \times A_n = \{\underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_n)}_{} \text{ tq } a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \dots a_n \in A_n\}$$

A sus elementos se les llama n-tuplas

Ejemplos:

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 3, 5, 7\}$

$A \cap B = \{1, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$A \setminus B = \{2\}$

$B \setminus A = \{5, 7\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (2,1), (2,3), (2,5), (2,7), (3,1), (3,3), (3,5), (3,7)\}$

$A^3 = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), \dots, (2,1,1), \dots (3,1,2), \dots\}$

- El cardinal de un conjunto es el número de elementos de dicho conjunto. $\# X \rightarrow$ cardinal del conjunto X

$\# \{1, 2, 3, 4, 5\} = 5$

nº elementos del conjunto

$\# \mathbb{N} = \infty$

- Proposición

① A $\# P(A) = 2^{\# A}$

② $A_1, A_2 \dots A_n$ son conjuntos $\#(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N) = \# A_1 \cdot \# A_2 \cdot \dots \cdot \# A_N$

Ejercicio

$\rightarrow \# P(\{1, 2, 3, 4\}) = 2^4 = 16$

$\rightarrow$ Si $A = \{1, 2, 3\}$

$\# A^3 = \#(A \times A \times A) = \# A \cdot \# A \cdot \# A = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Recordatorio de Wuolah: HOY SI QUE ERES UN CRACK #KeepCalm y #estudiaUnPoquito

Relaciones de equivalencia:

Sea A un conjunto, una relación binaria sobre el conjunto A es un subconjunto de R de $A \times A$.

Si $(x, y) \in R$ escribiremos xRy y diremos que x está relacionado con y.

Ejemplo:

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ entonces $R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (4,5), (5,2)\}$ es una relación binaria sobre el conjunto A.

$1R2 \quad 4\not R 3 \quad 2\not R 1$

Una relación binaria R sobre un conjunto A diremos que es una relación de equivalencia si verifica las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: Si $a \in A$ entonces aRa. Todo elemento de A debe estar relacionado consigo mismo.
2. Simétrica: Si aRb entonces bRa.
3. Transitiva: Si aRb y bRc entonces aRc

Si R es una relación de equivalencia sobre el conjunto A y $a \in A$ entonces llamaremos clase del elemento a al conjunto $[a] = \{x \in A \text{ tg } xRa\}$

• Proposición. Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, entonces:

1. aRb si y solo si $[a] = [b]$
2. $a\not R b$ si y solo si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A entonces llamaremos conjunto cociente $\frac{A}{R} = \{[a] \text{ tg } a \in A\}$

Ejercicio. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (5,6), (6,5)\}$ una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Calcular el cardinal del conjunto cociente.

1 $\frac{A}{R} = \{[a] \text{ tg } a \in A\} = \{[1], [2], [3], [4], [5], [6]\}$ 3 $= \{\{1,2,3\}, \{4\}, \{5,6\}\}$

2 $[1] = \{1, 2, 3\} = [2] = [3] \quad [4] = \{4\} \quad [5] = \{5, 6\} = [6]$ $\boxed{\text{cardinal es } 3}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Recordatorio de Wuolah: HOY SI QUE ERES UN CRACK #KeepCalm y #estudiaUnPoquito

Formación Manuel Pozo
ACADEMIA UNIVERSITARIA MP
Academia especializada en grados universitarios.
Cursos intensivos y clases particulares.
Profesores especializados en más de 150 asignaturas | Consulta todas tus asignaturas

Ejercicio. En el conjunto $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ definimos la siguiente relación binaria: xRy si $x-y$ es múltiplo de 3.

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathbb{Z}$.

b) Calcular la clase del $[0]$

c) Calcular el cardinal del cojunto cociente

a) Reflexiva: si $z \in \mathbb{Z}$ entonces $z - z = 0$ que es múltiplo de 3, por tanto zRz

Simétrica: si aRb entonces $\Rightarrow$ $a-b$ es múltiplo de 3, por tanto $-(a-b)$ es múltiplo de 3, por consiguiente $b-a$ es múltiplo de 3, en consecuencia bRa.

Transitiva: si aRb y bRc $\Rightarrow$ $a-b$ es múltiplo de 3 y $b-c$ es multiplo de 3 $\Rightarrow$ $a-b+b-c$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow$ $a-c$ es múltiplo de 3 $\Rightarrow$ aRc

b) $[0] = \{z \in \mathbb{Z} \text{ tq } zR0\} = \{3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$

los múltiplos de 3 están relacionados con el 0.

c) $\frac{\mathbb{Z}}{R} = \{[z] \text{ tq } z \in \mathbb{Z}\}$

$[0] = \{3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$

$[1] = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots, -2, -5, -8\} = \{1+3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$

$[2] = \{2, 5, 8, 11, \dots, -1, -4, -7\dots\} = 2+3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}$

Como al dividir un número entero entre 3 el resto me da 0, 1 o 2 entonces todo número entero está en $[0]$, $[1]$ ó $[2]$. Por tanto el cojunto cociente tiene 3 elementos:

$\frac{A}{R} = \{[0], [1], [2]\} = \{\{3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}, \{1+3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}, \{2+3k \text{ tq } k \in \mathbb{Z}\}\}$

Respuesta: $\# \frac{\mathbb{Z}}{A} = 3$

www.formaciónmanuelpozo.com 615 14 96 76 Granada
Matemáticas, química, física, bilología, bioquímica, ambientales, geología, óptica, estadística, tecnología, farmacia, nutrición, ingeniería, economía, medicina, odontología, psicología, magisterio.
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH

Relaciones de orden:
Una relación binaria $\leq$ sobre un conjunto A diremos que es una relación de orden si verifica las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: Si $a \in A$ entonces $a \leq a$
2. Antisimétrica: Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$
3. Transitiva: Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$

Un conjunto ordenado es un par $(A, \leq)$ donde A es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden sobre dicho conjunto.

Ejemplos de conjuntos ordenados.

$(\mathbb{N}, \leq_u)$ $(\mathbb{Z}, \leq_u)$ $(\mathbb{Q}, \leq_u)$ $(\mathbb{R}, \leq_u)$

↳ orden usual

→números naturales

Ejemplo. En el conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ definimos la siguiente relación binaria: $a \leq_m b$ si b es un múltiplo de a.
Demostrar que $(\mathbb{N}, \leq_m)$ es un conjunto ordenado.

1. Reflexiva: si $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a$ es múltiplo de $a \Rightarrow a \leq_m a$
2. Antisimétrica: si $a \leq_m b$ y $b \leq_m a \Rightarrow b$ es múltiplo de a y a es múltiplo de $b \Rightarrow a = b$
3. Transitiva: si $a \leq_m b$ y $b \leq_m c \Rightarrow b$ es múltiplo de a y c es múltiplo de $b \Rightarrow c$ es múltiplo de $a \Rightarrow a \leq_m c$

Un conjunto ordenado $(A, \leq)$ diremos que es totalmente ordenado si para todo $(a, b) \in A \times A$ se verifica que $a \leq b$ ó $b \leq a$.

Ejemplo. $(\mathbb{N}, \leq_u)$ es totalmente ordenado. Sin embargo, $(\mathbb{N}, \leq_m)$ no es totalmente ordenado ya que $2 \not\leq_m 7$ y $7 \not\leq_m 2$.

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
Recordatorio de Wuolah: HOY SI QUE ERES UN CRACK #KeepCalm y #estudiaUnPoquito

Elementos notables de un conjunto ordenado.

Si $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado y B es un subconjunto no $\emptyset$ de A entonces:

1. Un elemento $\beta \in B$ diremos que es un elemento maximal de B si verifica lo siguiente:
   - Si $b \in B$ y $\beta \leq b \Rightarrow \beta = b$.
2. Un elemento $\beta \in B$ diremos que es un elemento minimal de B si verifica lo siguiente:
   - Si $b \in B$ y $b \leq \beta \Rightarrow \beta = b$
3. Un elemento $\beta \in B$ diremos que es el máximo de B si $b \leq \beta$ para todo $b \in B$.
4. Un elemento $\beta \in B$ diremos que es el mínimo de B si $\beta \leq b$ para todo $b \in B$.
5. Un elemento $a \in A$ diremos que es una cota superior de B si $b \leq a$ para todo $b \in B$.
6. El supremo de B $Sup(B)$ es el mínimo del conjunto formado por todas las cotas superiores de B.
7. Un elemento $a \in A$ diremos que es una cota inferior de B si $a \leq b$ para todo $b \in B$.
8. El ínfimo de B $Inf(B)$ es el máximo del conjunto formado por todas las cotas inferiores de B.

Ejemplo. Dado el conjunto ordenado $(\mathbb{N}, \leq_m)$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ calcular los elementos notables de B.

1. $Maximales(B) = \{3, 4, 5\}$
2. $Minimales(B) = \{1\}$
3. $\nexists$ $Máximo(B)$
4. $Mínimo(B) = 1$
5. Cotas superiores de $B = \{0, 60, 120, 180, \ldots\} = \{60k \text{ tq } k \in \mathbb{N}\}$
6. $Sup(B) = 60$
7. Cotas inferiores de $B = \{1\}$
8. $Inf(B) = 1$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Recordatorio de Wuolah: HOY SI QUE ERES UN CRACK #KeepCalm y #estudiaUnPoquito

→ Orden producto cartesiano.

Si $(A_1 \leq_1), (A_2 \leq_2), \dots (A_n, \leq_n)$ son conjuntos ordenados entonces en el conjunto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ podemos definir una relación de orden de la siguiente forma:

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_p (b_1, b_2, \dots, b_n)$ si $a_1 \leq_1 b_1, a_2 \leq_2 b_2, \dots, a_n \leq_n b_n$

A: dicho orden lo llamaremos orden producto cartesiano.

Ejemplo. Dados los conjuntos ordenados $(\mathbb{Z}, \leq_u)$ y $(\mathbb{N}, \leq_m)$ entonces $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ lo podemos ordenar con el orden producto cartesiano: $(a, b) \leq_p (c, d)$ si $a \leq_u c$ y $b \leq_m d$ $(-2,4) \leq_p (0,8)$

$\mathbb{Z}$ $\mathbb{N}$ $(2,5) \not\leq_p (3,9)$

Calcular los elementos notables del conjunto

$B = \{(2,3), (3,6), (-1,-1), (4,7)\}$

Maximales $(B) = \{(3,6), (4,7)\}$

$\nexists$ Máximo (B)

Minimales $(B) = \{(-1,-1)\}$

Mínimo $(B) = (-1,-1)$

(Cotas sup. de $B) = \{(a,b)$ tq $4 \leq_u a$ y b múltiplo de $42\}$

$Sup(B) = (4,42)$

(Cotas inf. de $B) = \{(a,b)$ tq $a \leq_u -1$ y $b = 1\}$

$Inf(B) = (-1,-1)$

→ Orden lexicografico

El orden producto cartesiano en $\mathbb{N}^n$ es $(a_1, a_2, \dots a_n) \leq (b_1, b_2, \dots, b_n)$ si $a_1 \leq_u b_1, a_2 \leq_u b_2, \dots, a_n \leq_u b_n$. Este orden no es total ya que por ejemplo en $\mathbb{N}^3$ $(2,3,-1) \leq_p (1,4,0)$ y $(1,4,0) \not\leq_p (2,3,-1)$.

Existen órdenes en $\mathbb{N}^n$ que son totales, por ejemplo, el orden lexicografico que se define de la siguiente forma:

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_{lex} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ si
$$\begin{cases} a_1 <_u b_1 \\ \text{ó} \\ \exists i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ tq } a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \dots, a_i = b_i \text{ y } a_{i+1} < b_{i+1} \\ \text{ó} \\ a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n \end{cases}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Recordatorio de Wuolah: HOY SI QUE ERES UN CRACK #KeepCalm y #estudiaUnPoquito

Formación Manuel Pozo
ACADEMIA UNIVERSITARIA MP
Academia especializada en grados universitarios.
Cursos intensivos y clases particulares.
Profesores especializados en más de 150 asignaturas | Consulta todas tus asignaturas

www.formacionmanuelpozo.com 615 14 96 76 Granada
Matemáticas, química, física, bilología, bioquímica, ambientales, geología, óptica, estadística, tecnología, farmacia, nutrición, ingeniería, economía, medicina, odontología, psicología, magisterio.

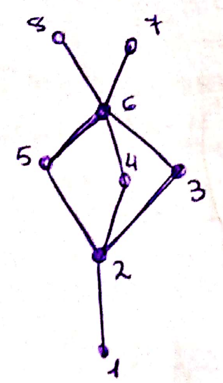
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Ejemplo. Ordenar de menor a mayor con el orden lexicográfico los elementos del siguiente conjunto

$\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,2),(2,3,1),(1,0,4)\}$

$(0,0,2) \leq_{lex} (0,1,1) \leq_{lex} (1,0,4) \leq_{lex} (1,1,1) \leq_{lex} (2,3,1)$

→ Representación gráfica de órdenes.



$2 \leq 6 \quad 4 \not\leq 5 \quad 1 \leq 8 \quad 7 \not\leq 8$

Calcular los elementos notables de $B = \{2,3,4\}$

$Maximales(B) = \{3,4\}$

$\nexists$ Máximo (B)

$Minimales(B) = \{2\}$

$Mínimo(B) = 2$

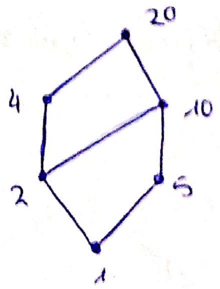
$(Cotas\ sup\ de\ B) = \{6,7,8\}$

$Sup(B) = 6$

$(Cotas\ inf.\ de\ B) = \{1,2\}$

$Inf(B) = 2$

Ejercicio. Representar gráficamente el siguiente conjunto ordenado: $(\{1,2,4,5,10,20\}, \leq_m)$

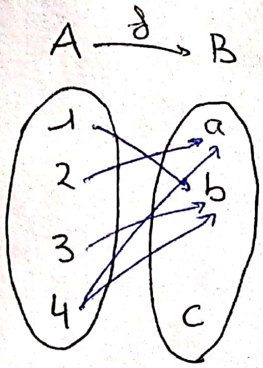


WUOLAH

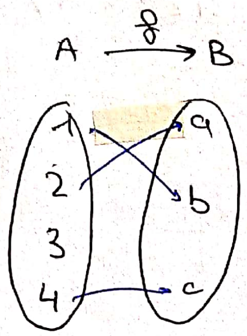
→ Aplicaciones entre conjuntos.

Sean A y B dos conjuntos, una aplicación f de A en B que denotaremos $f: A \longrightarrow B$ es una correspondencia que a cada elemento del conjunto A le asocia un único elemento del conjunto B

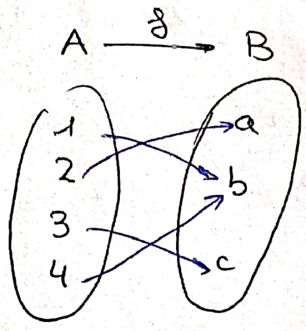
• Ejemplos



NO es aplicación



NO es aplicación



Sí es aplicación

Si $a \in A$ entonces al elemento que le asocia f en B lo denotaremos por $f(a)$ y diremos que es la Imagen del elemento a

A los conjuntos A y B los llamaremos el Dominio y el codominio de f respectivamente

La Imagen de f es $Im(f) = \{f(a) \text{ tq } a \in A\}$

Ejercicio. Dada la aplicación $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(n) = 2n+1$. Calcular $Im(f)$

$$Im(f) = \{f(n) \text{ tq } n \in \mathbb{N}\} = \{2n+1 \text{ tq } n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Recordatorio de Wuolah: HOY SI QUE ERES UN CRACK #KeepCalm y #estudiaUnPoquito

→ Tipos especiales de aplicaciones.

Una aplicación $f: A \longrightarrow B$ diremos que es:

1. Inyectiva: si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$
2. Sobreyectiva: si $Im(f) = B$ (esto equivale a que $B \subseteq Im(f)$)
3. Biyectiva: si es inyectiva y sobreyectiva

Ejemplo. Demostrar que la aplicación $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$ es inyectiva y no es sobreyectiva

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{2a+1}{3} = \frac{2b+1}{3} \overset{\times 3}{\Rightarrow} 2a+1 = 2b+1 \Rightarrow$$

$$\overset{-1}{\Rightarrow} 2a = 2b \overset{:2}{\Rightarrow} a = b$$

Comprobamos que no es sobreyectiva:

Para demostrar que una aplicación no es sobreyectiva hay que dar un elemento del codominio que no esté en la imagen.

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ y $\sqrt{2} \notin Im(f)$ ya que si un número racional lo multiplico $\times 2$, le sumo 1 y lo divido $:3$ me vuelve a dar un nº racional y sabemos que $\sqrt{2}$ es irracional.

Ejemplo. Demuestra que la aplicación $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva.

Como $f(2) = f(-2)$ la aplicación no es inyectiva.

$3 \in \mathbb{N}$ y $3 \notin Im(f)$ ya que 3 no es el cuadrado de un nº entero.

Ejemplo. Demuestra que la aplicación $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(x) = \dfrac{7x-5}{2}$ es biyectiva

Inyectiva:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{7a-5}{2} = \frac{7b-5}{2} \overset{\times 2}{\Rightarrow} 7a-5 = 7b-5 \overset{+5}{\Rightarrow} 7a = 7b \Rightarrow$$

$$\overset{:7}{\Rightarrow} a = b$$

Por tanto f es inyectiva.

WUOLAH

Recordatorio de Wuolah: HOY SI QUE ERES UN CRACK #KeepCalm y #estudiaUnPoquito

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Para demostrar que f es sobreyectiva deberemos de probar que $\mathbb{Q} \subseteq Im(f)$

Si $g \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{2g+5}{7} \in \mathbb{Q}$ y $f\left(\frac{2g+5}{7}\right) = g \Rightarrow$

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$\frac{7?-5}{2} = g \Rightarrow ? = \frac{2g+5}{7}$

$\Rightarrow g \in Im(f)$

Sean $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ dos aplicaciones. La aplicación composición de f y g es la aplicación $g \circ f: A \longrightarrow C$ definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x^2$ y $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $g(x) = \frac{2n+1}{3}$, calcular $g \circ f$

$Dom(g \circ f) \cdot \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(z^2) = \frac{2z^2+1}{3}$$

Nota: Obsérvese que una cosa es $g \circ f$ y otra cosa es $f \circ g$. Por ejemplo en el ejemplo anterior $f \circ g$ no tiene sentido.

Por oposición la composición de aplicaciones es asociativa y no es conmutativa.

Nota:

1. Decir que la composición de aplicaciones es asociativa significa que si tenemos 3 aplicaciones $f: A \rightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ y $h: C \longrightarrow D \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

2. Decir que la composición de aplicaciones no es conmutativa significa que aún en el caso en que $g \circ f$ y $f \circ g$ tengan sentido en general $g \circ f \neq f \circ g$ Como muestra el siguiente ejemplo:

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ y $g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$f(x) = x+1$ $\quad g(y) = y^2$

$g \circ f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g(z+1) = (z+1)^2$

$f \circ g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(z^2) = z^2+1$

$f \circ g \neq g \circ f$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Recordatorio de Wuolah: HOY SI QUE ERES UN CRACK #KeepCalm y #estudiaUnPoquito

Formación Manuel Pozo

ACADEMIA UNIVERSITARIA MP
Academia especializada en grados universitarios.
Cursos intensivos y clases particulares.
Profesores especializados en más de 150 asignaturas | Consulta todas tus asignaturas

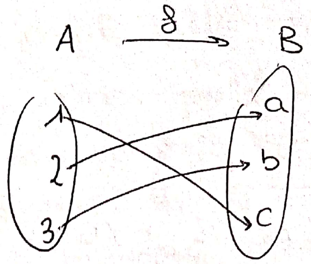
www.formaciónmanuelpozo.com 615 14 96 76 Granada
Matemáticas, química, física, biología, bioquímica, ambientales, geología, óptica, estadística, tecnología, farmacia, nutrición, ingeniería, economía, medicina, odontología, psicología, magisterio.

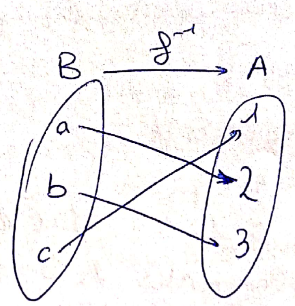
Sea A un conjunto la aplicación identidad sobre el conjunto A es la aplicación $1_A : A \longrightarrow A$ definida por $1_A(a) = a$.

Proposición: si $f: A \longrightarrow B$ es una aplicación biyectiva $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists$ una única aplicación $g: B \rightarrow A$ verificando que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$

La aplicación g de la proposición anterior diremos que es la inversa de f: f^{-1}

Ejemplo.





$f^{-1} \circ f = 1_A$

$f \circ f^{-1} = 1_B$

Ejercicio Dada la aplicación biyectiva $f: \overset{?}{\mathbb{Q}} \rightarrow \overset{y}{\mathbb{Q}}$

$f(x) = \dfrac{3x+2}{5}$ calcular f^{-1}

$f(?) = y \Rightarrow \dfrac{3? + 2}{5} = y$

$\Rightarrow ? = \dfrac{5y-2}{3}$

$f^{-1}: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$f^{-1}(y) = \dfrac{5y-2}{3}$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH