TEMA 3

Relación de problemas de Sistemas de ecuaciones y matrices

Ejercicio 1. Encuentra matrices cuadradas A y B para las que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ y $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$. Explica por qué, en general, no se da la igualdad.

Ejercicio 2. Da un ejemplo de dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$, distintas de cero, tales que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

Ejercicio 3. Prueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ satisface una ecuación de la forma

$$A^2 + \alpha A + \beta \mathrm{Id} = 0$$

Utiliza este hecho para ver que A es regular y calcular su inversa.

Ejercicio 4. Da un ejemplo de tres matrices A, P, Q, con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, de forma que P y Q sean regulares y distintas, A sea distinta de cero y $PA = QA$.

Ejercicio 5. Una matriz se dice idempotente si $A^2 = A$.

1. Prueba que si A es idempotente y regular entonces $A = \mathrm{Id}$.
2. Prueba que si A es idempotente, y $B = \mathrm{Id} - A$ entonces B es idempotente y $AB = 0$.
3. Calcula todas las matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ idempotentes.
4. Encuentra $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$, $A \neq 0$, $A \neq \mathrm{Id}$ que sea idempotente.

Ejercicio 6. Una matriz A se llama nilpotente si $A^n = 0$ para algún número natural n. Probar que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es nilpotente y calcular el menor número natural tal que $A^n = 0$. Deducir que también es nilpotente cualquier matriz de la forma

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Determina para que valores de a, b, c, d se verifica que $A \cdot B = B \cdot A$.

Ejercicio 8. Encuentra, si es posible, $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_3)$, regular, tal que $PA = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 1 \\ x + 2y + az = 4 \\ 3x + (a+2)y + 2z = 2 \end{cases}$$

Discútelo según el valor del parámetro a. Si para $a = 4$ es compatible, resuélvelo.

Preguntas de exámenes tipo test

Ejercicio 10. Acerca del siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{cccc} x & +ay & -z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & a \end{array}\right\}$$

podemos afirmar que:

a) Independientemente del valor de a, es compatible determinado.

b) Independientemente del valor de a, es compatible indeterminado.

c) Es siempre incompatible.

d) La compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a.

Ejercicio 11. Dadas dos matrices A y B en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y tales que

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A-B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces A^2-B^2 es igual a

a) $\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 12. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ tal que

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de A es

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 13. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$$

vale

a) -9 b) -3 c) 0 d) 3

Ejercicio 14. Dado el sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{aligned} x+y-z&=1\\ x+2y+2z&=2\\ 2x+3y+z&=3 \end{aligned}$$

¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) Es compatible determinado.

b) Es incompatible.

c) Es compatible indeterminado.

d) Tiene exactamente 35 soluciones.

Ejercicio 15. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Entonces

1. $X = B$ es la única solución de la ecuación matricial $AB = AX$.
2. $X = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $AB = AX$.
3. Tanto B como C son soluciones de la ecuación matricial $AB = AX$.
4. La ecuación matricial $AB = AX$ no tiene solución.

Ejercicio 16. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 6 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_p)$$

La matriz A es singular (es decir, no tiene inversa para el producto) para el siguiente valor de p

a) $p = 2$ b) $p = 3$ c) $p = 5$ d) $p = 7$

Ejercicio 17. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$. Entonces $(A \cdot B)^{-1}$

a) No existe.

b) vale $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

c) vale $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) vale $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + ay + 2z & = & 6 \\ 4x + 5y + az & = & 1 \end{array} \right.$$

la respuesta correcta es:

a) El sistema es compatible indeterminado y tiene exactamente 7 soluciones.

b) Es siempre compatible, pero depende del valor de a que sea compatible determinado o compatible indeterminado.

c) Dependiendo del valor de a puede ser compatible o incompatible.

d) Es compatible indeterminado, y el número de soluciones depende del valor de a.

Ejercicio 19. Señala la afirmación verdadera. La matriz en $\mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) No tiene inversa para ningún valor de a.

b) Tiene inversa para todo valor de a.

c) Sólo tiene inversa para $a = 1$.

d) Tiene inversa sólo cuando $a \neq 0$.

Ejercicio 20. En $\mathbb{R}$ el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 1 & b & b \\ 1 & 1 & a+b & b-a \end{pmatrix}$$

es

a) Depende de los valores de a y b.

b) 3.

c) 2.

d) 4.

Ejercicio 21. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$ tal que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) Los datos del enunciado no permiten calcular A.

Ejercicio 22. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Entonces:

a) La matriz $I - A + A^t$ es simétrica.

b) La matriz $I - (A \cdot A^t)$ es simétrica.

c) La matriz $I - A^2$ es simétrica.

d) La matriz $I - 2A$ es simétrica.

Ejercicio 23. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$ es regular para

a) $p = 5$.

b) $p = 7$.

c) $p = 3$.

d) $p = 2$.

Ejercicio 24. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite por filas es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 25. Sea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

1. $X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-25}{11} & \frac{-2}{11} \\ \frac{-23}{11} & \frac{-3}{11} \end{pmatrix}$.

3. $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. La matriz X no es regular.

Ejercicio 26. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{cases} 3x + y + 5z = 6 \\ 2x + 3y + z = a^2 + 1 \end{cases}$$

(a) El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a, pero el número de soluciones depende de a.

(b) El sistema es incompatible, independientemente del valor de a.

(c) El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de a, y tiene 7 soluciones.

(d) Según el valor de a el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible.

Ejercicio 27. Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ verifica que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces A^{-1} es igual a:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 28. Dados los sistemas de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 3 \\ 3x + y + 2z = 5 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + (b+5)z = 5b + 4 \\ x + 3y + (b+2)z = 2b + 4 \\ 2x + 4y + 5z = 5b \end{cases}$$

1. Son equivalentes para $b = 3$.

2. Son equivalentes para $b = 4$.

3. Son equivalentes para $b = 5$.

4. No son equivalentes para ningún valor de b.

Ejercicio 29. Di qué vale $a \in \mathbb{Z}_{11}$ para que los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2z + t = 0 \\ 3x + y + az + 2t = 5 \\ 4x + 8z + t = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 4y + 8z + 3t = 3 \\ 2x + y + t = 5 \\ y + 7z + 2t = 2 \end{cases}$$

sean equivalentes:

(a) 4.

(b) 10.

(c) 2.

(d) 1.

Ejercicio 30. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} ax + y + z &= b \\ x + by + z &= a \end{aligned}$$

(a) El sistema es siempre compatible indeterminado.

(b) Si $a = b = 1$ el sistema es incompatible.

(c) Existen valores de a y b para los que el sistema es compatible determinado.

(d) El sistema es compatible indeterminado si, y sólo si, $a \cdot b = 1$.

Ejercicio 31. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -a & 3 & 7 & 3 \\ 1 & a & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

(a) Para $a = 2$ las matrices A y B son equivalentes por filas.

(b) Para $a = -1$ las matrices A y B son equivalentes por filas.

(c) No existe ningún valor de a para el que las matrices A y B sean equivalentes por filas.

(d) Para $a = 1$ las matrices A y B no son equivalentes por columnas.

Ejercicio 32. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 4x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$

a) Para $p = 2$ el sistema tiene dos soluciones.

b) Para $p = 3$ el sistema tiene tres soluciones.

c) Para $p = 5$ el sistema tiene cinco soluciones.

d) Para $p = 7$ el sistema tiene siete soluciones.

Ejercicio 33. Sea $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ tal que $P \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces:

(a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) La matriz P no tiene inversa.

(d) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 34. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 3 & a+1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}_7)$.

Entonces la matriz A es regular:

a) Para cualquier valor de $a \in \mathbb{Z}_7$.

b) Para $a = 1, 3, 4, 5, 6$.

c) Para $a = 3, 4, 5, 6$.

d) Para $a = 0, 2, 3, 5, 6$.

Ejercicio 35. Sea la matriz con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces el rango de A es igual a

a) 2 b) 4 c) 1 d) 3

Ejercicio 36. El rango de la matriz con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es igual a

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Ejercicio 37. Acerca del siguiente sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{cccccc} x & +ay & +(a-1)z & & = & a \\ x & +ay & +az & +2at & = & a \end{array}\right\}$$

podemos afirmar que:

a) Independientemente del valor de a, es compatible determinado.

b) Independientemente del valor de a, es compatible indeterminado.

c) Es siempre incompatible.

d) La compatibilidad o incompatibilidad depende del valor de a.

Ejercicio 38. El sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & +ay & +3az & = & a+3 \\ & ay & +2az & = & a+1 \end{array}\right\}$$

podemos afirmar que:

a) Independientemente del valor de a, es compatible determinado.

b) Independientemente del valor de a, es compatible indeterminado.

c) Es incompatible independientemente del valor de a.

d) La compatibilidad depende del valor de a.

Ejercicio 39. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$$

es

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Ejercicio 40. El determinante de la matriz con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) es 0.

b) es $4!$.

c) es congruente con 4^4 módulo 7.

d) es congruente con 3^3 módulo 7.

Ejercicio 41. El sistema con coeficientes en $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 0 \\ x + ay + 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

a) es siempre compatible determinado.

b) siempre es compatible indeterminado.

c) es incompatible para algunos valores de a.

d) es compatible, pero es determinado o indeterminado dependiendo de a.

Ejercicio 42. El rango de la matriz sobre $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a) no puede calcularse.

b) es 4.

c) es 3.

d) es 2.

Ejercicio 43. El determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyos coeficientes están en $\mathbb{Z}_7$, es:

a) 0 b) 2 c) 4 d) 6

Ejercicio 44. El sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rl} ax + y + z = & 1 \\ -x + ay + z = & 0 \\ x - y + z = & -1 \end{array} \right.$$

con coeficientes en $\mathbb{R}$,

a) siempre es compatible determinado.

b) siempre es compatible indeterminado.

c) es incompatible para algunos valores de a.

d) es compatible, aunque puede ser determinado o indeterminado dependiendo de a.

Ejercicio 45. El rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyos coeficientes están en $\mathbb{Z}_5$:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Ejercicio 46. El sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + az & = & -a \\ y + bz & = & b \\ x + y + (a+b)z & = & b - a \end{array} \right.$$

a) Es siempre compatible indeterminado.

b) Es compatible determinado para algunos valores de a y b.

c) Es incompatible para algunos valores de a y b.

d) Nunca es compatible indeterminado.

Ejercicio 47. El valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

en $\mathbb{R}$ es

a) 5.

b) 1.

c) No puede calcularse.

d) 0.

Ejercicio 48. Dado el sistema de ecuaciones con coeficientes en $\mathbb{Z}_3$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \end{array},$$

a) depende del valor de a que sea compatible determinado o incompatible, pero nunca es compatible indeterminado.

b) según el valor de a puede ser compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

c) es siempre compatible. Depende del valor de a que sea compatible determinado o indeterminado.

d) el rango de la matriz de coeficientes vale 2. Por tanto, o es compatible indeterminado o es incompatible.

Ejercicio 49. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Entonces

(a) Existe un número real a para el que el rango de A vale 1.

(b) Existe $a \in \mathbb{R}$ para el que el rango de A vale 2.

(c) El rango de A vale 4 para cualquier valor real del parámetro a.

(d) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el rango de A vale 3.

Ejercicio 50. Sean A y B dos matrices cuadradas 2×2 con coeficientes reales tales que

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

(a) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$.

(b) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$.

(c) No existen matrices con las condiciones que nos da el enunciado.

(d) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 51. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times4}(\mathbb{Z}_7)$, su forma normal de Hermite por filas es:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 52. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ es

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4