David Martínez Díaz G11 - ADE

- Ejercicios:

20. $f(x,y) = (x-y)^4 + (x-y)^2;$

a)
$$\text{Hess} f = \begin{pmatrix} 12(x-y)^2+2 & -12(x-y)^2-2 \\ -12(x-y)^2-2 & 12(x-y)^2+2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ D_1 = 4(x-y)^3 + 2(x-y) \\ \bullet\ D_2 = 12(x-y)^2+2 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet\ D_2 = -4(x-y)^3 - 2(x-y) \\ \bullet\ D_2 = 12(x-y)^2+2 \end{array} \right\}$$

$\bullet\ D_{12} = -12(x-y)^2 - 2$

$\nabla f(x,y) = \left(4(x-y)^3 + 2(x-y),\ -4(x-y)^3 - 2(x-y)\right);$

$\Rightarrow$ Igualamos a cero:

$4(x-y)^3 + 2(x-y) = 0;\ (x-y)\cdot(4(x-y)^2+2) = 0;\ \Rightarrow \boxed{x=y}$

$4(x-y)^2+2=0; \Rightarrow\ 2(x-y)^2+1=0;\ 2(0)^2+1=0 \notin \mathbb{R}$

$\text{Hess} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} H_1 = + ; \\ H_2 = 0; \end{array}$ S. Definida. Positiva Convexa

b) Para calcular los puntos críticos, lo hemos hallado anteriormente, ya que cual al ser $\boxed{x=y}$ y al ser la matriz semi-definida positiva, podemos decir que será o un mínimo local o un punto de silla.

Esta ~~[illegible]~~ posee mínimos globales en la recta dada $x=y;$

c) $P_{Taylor} \Rightarrow f(a,b) + \nabla f(a,b)\cdot(x-a, y-b) + \left[\frac{1}{2}(x-a, y-b)\cdot Hess(a,b)(x-a, y-b)^2\right]$ *

$\Rightarrow f(a,b)=0$

$\Rightarrow \nabla f(a,b) = (0,0)$

* $\Rightarrow \dfrac{2(x-1)^2+2(y-1)^2-4(x-1)(y-1)}{2}$;

$P_{Taylor} \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2-2(x-1)(y-2);$

21. $f(x,y,z) = ax^2+ay^2+z^2+2xy+2z;$

a)

$$Hess f = \begin{pmatrix} 2a & 2 & 0 \\ 2 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} H_1 = (+) \Rightarrow 2a>0 \\ H_2 = 4a^2-4>0 \Rightarrow \text{* se cumple} \\ H_3 = 8a^2-8>0 \text{ * se cumple} \end{array}\right\} a>1$$

$\nabla f(x,y,z) = (2ax+2y,\ 2ay+2x,\ 2z+2);$

$2ax+2y=0$

$ax=-y$

$a(ay)=-y$

$-a^2y=-y;$

$y(-a^2+1)=0; \Rightarrow \boxed{y=0;}$

$-ay=+x$

$\boxed{x=0;}$

$2z+2=0$

$\boxed{z=-1}$

Definida Positiva y Convexa:

$P(0,0,1)$= Mín Global;

b)

$$Hess f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} H_1 = 2>0\ (+); \\ H_2 = 4-4=0; \\ H_3 = 8-8=0; \end{array}$$

* Por el metodo que estamos utilizando, no se puede calcular, debido que este caso no esta contemplado en el criterio de los menores principales por lo que el criterio no da información para clasificar los puntos críticos.

22. $f(x,y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + 1;$

a) $\nabla f(x,y) = (2axy + by + 2y^2, ax^2 + bx + 4xy);$

$$Hess \begin{pmatrix} 2ay & 2ax+b+4y \\ 2ax+b+4y & 4x \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} H_1 > 0 & 2ay > 0 & 2a > 0 \text{ * se cumple} \\ H_2 > 0 & & \underline{\text{D. Positiva}} \end{matrix}$$

$$Hess(1,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2a+b+4 \\ 2a+b+4 & 4 \end{pmatrix} = (-4a^2 - 8a - 4ab - b^2 - 8b - 16) > 0; \Rightarrow 12 > 0$$

$$\nabla f(x,y) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a+b+2=0 \\ a+b-4=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2a+b=-2 \\ a+b=-4 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 2a-b=-2 \\ -a+b=4 \end{matrix}$$

$$b=-6 \qquad a=2$$

$P_{Taylor}(x,y) = f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (x-a, y-b) + \frac{1}{2}(x-a, y-b) \cdot Hess(a,b) \cdot (x-a, y-b)^2;$

$P_{Taylor} \Rightarrow -1 + 2(x-1)^2 + 2(y-1)^2 + 2(x-1)(y-1);$

b) $a=1$ y $b=0;$

- Tenemos:

$$Hess = \begin{pmatrix} 2ay & 2ax+b+4y \\ 2a+b+4y & 4x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2y & 2x+4y \\ 2x+4y & 4x \end{pmatrix};$$

$H_1 > 0 \Rightarrow 2y > 0 \Rightarrow +$

$$H_2 \Rightarrow (8xy - (4x^2 + 16xy + 16y^2)) \Rightarrow \left.\begin{matrix} -4x^2 - 8xy - 16y^2 \\ * x,y > 0 \end{matrix}\right\} < 0$$

Indefinida