# TEMA-3-resumen.pdf

PAODELK28

Métodos Cuantitativos

3º Grado en Administración y Dirección de Empresas

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Granada

# TEMA 3 – TEORÍA DE JUEGOS

## 1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS.

La teoría de juegos trata problemas de decisión:

- En los que varios agentes toman decisiones (jugadores).
- La decisión tomada por cada uno de estos agentes afecta al resto (interdependencia estratégica).
- Existen ciertas regulaciones sobre las acciones de los agentes (reglas del juego).
- Cada agente tiene sus propias preferencias sobre el conjunto de resultados.

Un juego es cualquier situación gobernada por reglas con un resultado bien definido caracterizado por una interdependencia estratégica. Existen dos ramas de la Teoría de Juegos:

- Cooperativos: los agentes disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes.
- No cooperativos: los agentes no disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes.

<u>Elementos de un juego</u>:

- Jugadores: los individuos que toman las decisiones tratando de maximizar su utilidad.
- Acción: cada una de las opciones que el jugador tiene disponible para alcanzar el objetivo buscado. El orden del juego determinará en qué momento esas acciones están disponibles.
- Información: el conocimiento, en un determinado momento, de los valores de las distintas variables, los distintos valores que el jugador cree que son posibles.
- Estrategia: es un conjunto de acciones a tomar en cada momento del juego dada la información disponible. El perfil de estrategias es un conjunto de una estrategia por cada uno de los jugadores del juego.
- Recompensa o pago: es la utilidad que reciben los jugadores al completar el juego, la evaluación posterior a la realización de la acción sobre si el objetivo buscado fue alcanzado. La recompensa o pago esperado es quien realmente motiva la acción.
- Equilibrio: perfil de estrategias integrado por la mejor estrategia para cada uno de los jugadores del juego.

<u>Representaciones de un juego</u>:

Forma estratégica → se representa en funciones de pagos que recogen la recompensa que recibe el jugador i-ésimo si los jugadores escogen un perfil de estrategias. $\pi_i(s_1, \dots, s_n)$. Se usa en juegos estáticos.

Matriz de pagos del juego bipersonal → se representan dos funciones, cuando el juego es de dos jugadores y los conjuntos de estrategias finitos, en una matriz de pagos. Las filas representan las estrategias del primero jugador y las columnas las del segundo. Se usa en juegos estáticos.

Forma extensiva → representación gráfica en forma de árbol de decisión donde cada nodo representa los posibles cursos de acción de cada trabajador, encontrándose al final del árbol los pagos de cada jugador. Se usa en juegos dinámicos.

<u>Tipos de juegos</u>:

- Por el número de jugadores: bipersonales o N-personales.
- Por el número de estrategias de los jugadores: finitos o infinitos.
- Por su evolución en el tiempo: estáticos o dinámicos (durante el juego algún jugador gana información).
- Por la relación de intercambio de información entre jugadores: cooperativos o no cooperativos.
- Por la variación de la riqueza del conjunto de jugadores: suma no constante (en el juego se genera o pierde la riqueza del conjunto) o de suma constante (hay una cantidad que repartir y el problema es saber cómo se repartirá). Caso particular de suma constante – suma nula (la riqueza del conjunto es cero, por lo que toda la ganancia de un jugador es pérdida del otro).
- Por la cantidad de información de que disponen los jugadores: con información completa (todos los jugadores conocen las ganancias) o incompleta (al menos un jugador no conoce las ganancias del otro).
- Por la cantidad de información que adquieren durante el juego (en juegos dinámicos o repetidos): de información perfecta (el jugador conoce la historia completa) o imperfecta.

**2. JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA.**

En ellos los jugadores realizan sus jugadas simultáneamente. La solución del juego son las estrategias en equilibrio (punto de equilibrio o punto de silla). Un conjunto de estrategias están en equilibrio (de Nash) si ningún jugador quiere cambiar su estrategia, es decir todos los jugadores están satisfechos con su estrategia, no pueden mejorar su resultado individual cambiando ellos solos su estrategia.

En algunos casos pueden existir más de un par de estrategias en equilibrio. Si sólo hay un par o hay más de un par pero con los mismos pagos, el acuerdo es posible entre los jugadores. En caso de que no ocurra así, la solución no sería única y no se llegaría a un acuerdo entre los jugadores. Otros juegos pueden no tener un equilibrio de Nash.

Ante esto, se definen las estrategias mixtas. Éstas permiten establecer la distribución de probabilidad óptima de cada jugador. Con ella se puede calcular el pago esperado del jugador como: pago 1 * probabilidad A1 * probabilidad B1 + pago 2 * probabilidad A2 * probabilidad B2…

Un conjunto de estrategias mixtas serán estrategias mixtas en equilibrio de Nash si ningún jugador está interesado en cambiar unilateralmente de estrategia mixta. El equilibrio de Nash aquí es aquel en el que cada agente elige la frecuencia óptima con la que seguirá sus estrategias, dadas la frecuencia que elija el otro.

**→ ESTRATEGIAS ESTRICTAMENTE DOMINADAS.**

Una estrategia es dominada si existe una estrategia mixta que proporciona mejores pagos. Para buscar la solución, se eliminan las estrategias dominadas. Una estrategia estrictamente dominante es la que resulta óptima para un jugador independientemente de lo que hagan sus adversarios.

No siempre es posible encontrar la solución con esta estrategia, pero sí sirve siempre para reducir las dimensiones del problema. En caso de encontrar la solución, es decir en caso de llegar a un solo par con la eliminación de estrategias dominadas, se habría llegado al único equilibrio de Nash del juego.

**3. ESTRATEGIAS MAXIMIN.**

La estrategia maximin de un jugador es la que maximiza su mínima ganancia. En estas estrategias los jugadores están enfrentados, cada uno busca lo mejor para sí mismo (lo peor para el resto). Es decir, cada jugador juega partiendo de que su adversario va a escoger la estrategia que más le perjudique. Así, el objetivo del jugador es garantizarse el mejor pago bajo esas circunstancias.

En juegos finitos bipersonales la estrategia maximin del jugador 1 es $\max_{i\in S_1} \min_{j\in S_2} a_{ij}$ y la del jugador 2 es $\max_{j\in S_2} \min_{i\in S_1} b_{ij}$.

**4. JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA NULA.**

Los juegos de suma constante son en los que intervienen dos jugadores y hay una cantidad constante a repartir entre ambos jugadores. En caso de que esa cantidad fuera 0, se llaman "juegos de suma nula". Esto quiere decir que lo que gana un jugador, se lo paga el otro.

En estos juegos hay que tener en cuenta que la matriz de pagos de un jugador es la opuesta a la del otro, considerándose siempre que se da la matriz del primer jugador.

Aquí, cada jugador espera o peor del otro (lo mejor para el otro jugador), por lo que para buscar estrategias en equilibrio se usa el criterio pesimista, es decir el criterio maximin. Las condiciones de búsqueda maximin son:

Jugador 1 → $\max_{i\in S_1} \min_{j\in S_2} a_{ij}$

Jugador 2 → $min_{j\in S_2} \max_{i\in S_1} a_{ij}$.

Llamando "punto de silla" al perfil de estrategias maximin de los jugadores. En caso de llegar a una solución, sería el equivalente al equilibrio de Nash.
En cambio, no siempre existe equilibrio puro, en este caso se buscaría la solución con **ESTRATEGIAS MIXTAS**.

Las estrategias mixtas maximin son:

Jugador 1 → $\max_{x\in X_1} \min_{y\in Y} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij}$

Jugador 2 → $\mathrm{min}_{\mathrm{y}\in \mathrm{Y}}\ \mathrm{max}_{\mathrm{x}\in \mathrm{X}_1} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{x_i y_j a_{ij}}$

Entonces cuando $\max_{x\in X_1} \min_{y\in Y} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij} = min_{y\in Y}\, max_{x\in X_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij} = v$ hay un equilibrio mixto de Nash, siendo v el valor del juego (lo que gana el jugador 1, lo que pierde el jugador 2). Por ello, para buscar equilibrios mixtos en juegos bipersonales de suma nula hay que analizar las estrategias maximin de los jugadores y establecer si coinciden sus pagos esperados. ¿Cuándo coinciden sus pagos esperados? Para ello hay que obtener las estrategias mixtas maximin de ambos jugadores, siendo:

Jugador 1 = $\sum a_{im} x_i$.

Jugador 2 = $\sum a_{nj} y_j$

El jugador 2 intenta elegir la opción que minimice los pagos esperados del jugador 1 ($\min \sum a_{im} x_i$). El jugador 1 quiere maximizar el valor del juego (v) ya que es lo que gana.

El jugador 1 intenta elegir el máximo ($\max \sum a_{nj} y_j$). El jugador 2 intenta minimizar el valor del juego (v) ya que es lo que tiene que pagar.

Así, para encontrar el equilibrio mixto de Nash (que siempre existe en juegos bipersonales de suma nula) se establecen los siguientes problemas de programación lineal, que son duales entre sí.

| JUGADOR 1 | JUGADOR 2 |
|---|---|
| $\max v$<br>$\text{s.a. } v \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i, \forall j = 1, \ldots, m,$<br>$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$<br>$0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n.$ | $\min w$<br>$\text{s.a. } w \geq \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j, \forall i = 1, \ldots, n,$<br>$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1,$<br>$0 \leq y_j \leq 1, j = 1, \ldots, m.$ |

Al ser duales entre sí, con el Teorema de Dualidad de la Programación Lineal (máxv=mínw) establecemos que siempre hay equilibrio mixto de Nash en juegos bipersonales de suma nula.

Para facilitar los cálculos se puede en cualquier momento reducir las dimensiones del problema eliminando estrategias dominadas.

**5. JUEGOS COOPERATIVOS.**

En muchos casos de competencia hay más de dos competidores, y además la posibilidad de cooperar entre ellos. En estos juegos la solución pasa por analizar las posibles coaliciones que pueden plantearse. La solución del juego será el pago que recibirá cada uno de los jugadores.

Los elementos importantes de los juegos cooperativos son:

- **LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA**: sea N=$\{1, \ldots, n\}$ el conjunto de jugadores. La función característica $v$ de un juego indica para cada subconjunto $S \subseteq N$ la cantidad $v(S)$ que los miembros de S pueden estar seguros de recibir si actúan unidos formando una coalición (sin ayuda de los jugadores fuera de la coalición).
  Para que una función sea función característica de un juego ha de cumplir la <u>propiedad de la superaditividad</u>: para todo par de conjuntos A y B tales que $A \cap B = \emptyset$ (que no tengan jugadores en común), ha de cumplirse:
  $$v(A \cap B) \geq v(A) + v(B)$$
  Es decir, si dos coaliciones con intersección vacía se unen, el beneficio o ganancia de la nueva coalición es al menos igual a la suma de los beneficios de las coaliciones que se unen. INTERESA ALIARSE ENTRE JUGADORES.
- **LAS IMPUTACIONES**: (son las soluciones) un vector de pagos $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es una imputación si se verifica:
  - $v(N) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ → <u>principio de eficiencia</u>: el valor de la coalición total tiene que ser igual a la suma de lo que ganan por separado.
  - $x_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N$ → <u>principio de individualidad racional</u>: el pago del jugador i ha de ser al menos lo que gana él solo. Es decir, lo que gana el jugador i al entrar en la coalición es mayor o igual a lo que ganaría el solo.
- **EL VALOR DE SHAPLEY:** para cualquier función característica, la función de asignación de pagos $(x_1, \ldots, x_n)$ debe cumplir:
  - Axioma 1. (<u>Simetría</u>): los pagos para dos jugadores que realicen aportaciones equivalentes a la coalición deben ser iguales.

- Axioma 2. (<u>Eficiencia</u>): lo que se paga a la coalición total coincide con la suma de lo que se paga a cada uno.
- Axioma 3. (<u>Tratamiento del jugador pasivo</u>): si un jugador no aporta beneficio adicional a la coalición, no debe recibir ningún pago adicional, sino que recibiría lo que ganaría el sólo.
- Axioma 4. (<u>Aditividad</u>): la función de asignación debe ser invariante a cualquier descomposición aleatoria del juego.

Dado cualquier juego n-personal con función característica $v$ existe un único vector de pagos, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ que satisface ciertas condiciones de estabilidad (axiomas J. Cooperativos), el valor de Shapley, donde el pago del i-ésimo jugador viene dado por la expresión:

$$x_i - \sum_{S/i \notin S} p_n(S) \left(v(S \cup \{i]) - v(S)\right)$$

Siendo $p_n(S) = \frac{s!(n-s-1)!}{n!}$ donde s=nº jugadores en S.

El valor Shapley puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar. (El pago del jugador i debe ser la cantidad esperada con la que contribuiría el jugador).

$\left(v(S \cup \{i]) - v(S)\right)$ es la contribución marginal efectiva de i al incorporarse a S, es decir es lo que gana el grupo con i – lo que gana el grupo sin i. El factor $p_n(S)$ es la probabilidad de que a i le toque incorporarse precisamente a S.