Tema 3. Teoria de Juegos.pdf

fita220608

Métodos Cuantitativos

3º Grado en Administración y Dirección de Empresas

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Granada

Tema 3. Teoría de juegos

3.1 Introducción a la teoría de juegos

La teoría de los juegos surge a partir de los años 40 del siglo XX para ver cómo podían tomar decisiones varias personas a la vez, en situaciones donde la decisión tomada por una persona (jugador) afecta al resto de personas (jugadores). Algunos acontecimientos históricos importantes en la teoría de juegos fueron el establecimiento del equilibrio de Nash en los años 50 y el estudio de juegos no cooperativos y cooperativos. Un dato que se puede destacar es que las investigaciones sobre teoría de juegos fueron financiadas por el departamento de defensa de los Estados Unidos.

La teoría de juegos empezó estudiando las decisiones tomadas por los jugadores de diversos juegos de azar, en los que siempre hay una serie de normas o reglas que deben ser cumplidas y en las que es posible establecer una serie de estrategias, para conseguir unos resultados (que depende de las estrategias de los demás jugadores)

Con todo lo visto anteriormente es posible definir **juego** como: cualquier situación gobernada por reglas con un resultado bien definido, caracterizado por una interdependencia estratégica

Son varios los motivos que hacen que se puedan estudiar **teoría de juegos**: la ciencia que estudia el comportamiento racional en situaciones de interdependencia estratégica, de los participantes de un juego que intentan conseguir el mejor resultado posible. Entre los motivos podemos encontrar principalmente a que las actuaciones de las empresas se asemejan a un juego donde las empresas compiten entre sí, con unas normas, donde cada empresa puede establecer una estrategia y donde el resultado depende de la actuación de los demás.

--- Elementos de un juego---
Jugadores: los individuos que toman las decisiones tratando de obtener el mejor resultado posible (es el agente)
Acción: es una de las opciones que el jugador tiene disponible para alcanzar el objetivo buscado (alternativas).
Información: Los distintos valores que el jugador cree que son posibles.
Estrategia: es un conjunto de acciones a tomar en cada momento del juego dada la información disponible. Por otro lado se definen <u>un conjunto de estrategias</u> como todas las estrategias disponibles en un determinado momento. Un perfil de estrategias es un conjunto de estrategias de todos los jugadores del juego.
Pago o recompensa: es la utilidad que reciben los jugadores al completar el juego,
Equilibrio: es un perfil de estrategias integrado por la mejor estrategia para cada uno de los jugadores del juego.

La forma normal o estratégica del juego, es el listado con las estrategias de los jugadores y sus correspondientes ganancias.
X conjunto de estrategias para el jugador 1
Y conjunto de estrategias para el jugador 2

- Pagos o utilidades de los pares de estrategias
  Para cada jugador hay una función de pagos.

Normalmente los juegos se suelen representar en una tabla como esta

		Jugador 2	
		Acción 1	Acción 2
Jugador 1	Acción 1	*pago*	*pago*
	Acción 2	*pago*	*pago*

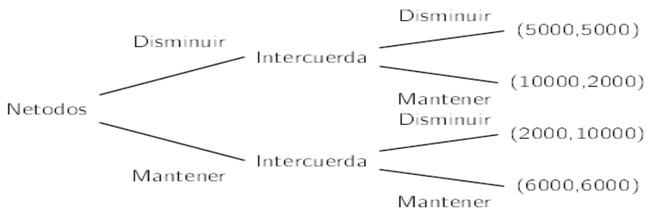
Ejemplo

En una ciudad pequeña del país Florenzuela operan únicamente dos grandes compañías que suministran el servicio de telefonía por cable: Netodos y Intercuerda. En los actuales momentos ambas empresas cobran una misma tarifa sus servicios. No obstante, Netodos está analizando la conveniencia de colocar una tarifa más baja que la competencia o dejar su tarifa en el mismo nivel actual. El gerente de Intercuerda que tiene espías en Netodos se ha enterado de esta situación por lo cual está también analizando la posibilidad de reducir o no sus tarifas. Si ambas empresas disminuyen las tarifas sus ganancias individuales serán de 5000e. Si ambas mantienen las tarifas actuales ganaran 6000e. Si sólo una disminuye su tarifa, la que la disminuye ganará 10000e y la que mantiene la tarifa actual ganará sólo 2000e.

La matriz de pagos sería la siguiente

		Intercuerda	
		Dism. Tarifas	Mant. Tarifas
Netodos	Dism. Tarifas	(5000, 5000)	(10000, 2000)
	Mant. Tarifas	(2000,10000)	(6000,6000)

Aunque también se puede expresar mediante un árbol de decisión



--- Clasificación de los juegos ---

- ➔ Por el número de jugadores: Los juegos pueden ser bipersonales o N-personales.
- ➔ Por el número de estrategias de los jugadores: pueden ser juegos finitos si los conjuntos de estrategias son finitas o infinitos.
- ➔ Por su evolución en el tiempo: pueden ser juegos estáticos o dinámicos, entendiéndose por juego dinámico aquél en el que en el transcurso del juego existe una ganancia de información por parte de algún jugador.
- ➔ Por la relación de intercambio información entre jugadores: los juegos pueden ser cooperativos, que quiere decir que los jugadores intercambian información y pueden colaborar, o que no tengan intereses comunes: juegos no cooperativos.
- ➔ En función de la variación de la riqueza pueden ser de suma no constante pueden ser de suma constante (o suma nula)

--- El equilibrio de NASH ---

El equilibrio de Nash es una situación donde se optimizan los pagos para cada jugador expresado de manera matemática es una situación:

$$u_1(x^*, y^*) \geq u_1(x, y^*) \quad \forall x \in X$$
$$u_2(x^*, y^*) \geq u_2(x^*, y) \quad \forall y \in Y$$

Para buscar el equilibrio de Nash hay que buscar cada columna de pagos/recompensas del primer jugador el mejor valor. Si la posición de éste coincide con el mejor valor en esa la para el segundo jugador (el segundo valor de la pareja de números), tenemos un equilibrio. Este un proceso que deber realizar para todas las columnas y en función de esto, se pueden tener:

- 1 equilibrio
- Varios equilibrios
- Ningún equilibrio

Ejemplo

Dos empresas, supongamos la empresa A y la empresa B venden productos rivales y tienen que decidir si emprenden o no una campaña publicitaria. La decisión que tome cada una afectará a la de la otra. Si la matriz de ganancia está representada por el cuadro siguiente, identifique las estrategias que constituyen el equilibrio de Nash.

	Publicidad	No Publicidad
Publicidad	(10,5)	(5,0)
No Publicidad	(6,8)	(20,2)

Paso 1. Se mira la primera acción, el jugador 1, si escoge publicidad gana 10 y si no gana 6, por tanto 10 es mejor que 6.
Paso 2. Donde mismo se ha empezado a mirar para el jugador 1, se mira que si el jugador 2 escoge publicidad gana 5 y si no escoge publicidad gana 0. 5 es mejor que 0
Paso 3. Al escoger esta acción cada jugador gana más, que en cualquier otro acción, por tanto <u>hay un equilibrio de NASH</u>

Por ejemplo si el jugador 1 escoge no publicidad y el otro escoge también no publicidad ganaría 20, que es mejor que 5, pero en cambio el jugador 2, ganaría 2 que es peor que 8, por tanto no hay equilibrio.

- *Situación donde puede haber 2 equilibrios*

Un matrimonio desea salir una noche juntos; él quiere ir al boxeo y ella al ballet; hay un conflicto pues, sobre todo, desean ir juntos, así que plantean las utilidades para ellos de las posibles combinaciones formando la siguiente matriz de pagos:

		Mujer	
		Boxeo	Ballet
Hombre	Boxeo	(2,1)	(0,0)
	Ballet	(0,0)	(1,2)

- también puede haber situaciones donde no hay equilibrio de NASH

Hay dos jugadores y cada jugador tiene dos estrategias puras: Cara y Cruz. Cada jugador se juega una cantidad fija, un euro. Si ambos jugadores eligen Cara o ambos eligen Cruz (lo que se llama empate), el jugador 1 gana la apuesta. Si no hay pareja, el jugador 2 gana la apuesta del jugador 1.

		Jugador 2	
		Cara	Cruz
Jugador 1	Cara	(+1,-1)	(-1,+1)
	Cruz	(-1,+1)	(+1,-1)

--- Estrategias mixtas ---
Una estrategia mixta para J1 es una distribución de probabilidad sobre sus estrategias originales, denominadas puras. Una estrategia mixta consiste en determinar en términos de probabilidad las veces que se hará una determinada acción. Siendo las sumas de todas las probabilidades igual a 1.

Esta misma definición se puede aplicar para la estrategia mixta para el jugador 2.

El pago esperado es lo que recibirá el jugador por haber escogido cada acción disponible en función de la probabilidad que se haya fijado.

Ejemplo
Si tenemos la siguiente tala de pagos

$$\begin{pmatrix} (2,-2) & (4,-4) & (3,-3) \\ (7,-7) & (2,-2) & (5,-5) \end{pmatrix}$$

Y el par de estrategias: $x = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ e $y = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$.
Pagos Esperado:

$$E_{J_1}[x,y] = 2\frac{1}{4}\frac{1}{5} + 4\frac{1}{4}\frac{2}{5} + 3\frac{1}{4}\frac{2}{5} + 7\frac{3}{4}\frac{1}{5} + 2\frac{3}{4}\frac{2}{5} + 5\frac{3}{4}\frac{2}{5} = 3.95$$

Para que haya un equilibrio de Nash es necesario que el pago esperado para cada jugador sea el mismo. Para ello se debe comprobar que:

$$E_{J_1}[x^*, y^*] \geq E_{J_1}[x, y^*], \quad \forall x \in X$$
$$E_{J_2}[x^*, y^*] \geq E_{J_2}[x^*, y], \quad \forall y \in Y$$

--- Estrategia dominada—
Una estrategia pura es una estrategia dominada si existe una estrategia mixta (una combinación lineal convexa) que proporciona mejores pagos. Estas estrategias podemos descartarlas en la búsqueda de estrategias óptimas. O en otras palabras, una estrategia dominante es aquella que resulta óptima para un jugador independientemente de lo que hagan sus adversarios

$$\begin{pmatrix} (2,-2) & (-1,1) & (0,0) \\ (3,-3) & (4,-4) & (5,-5) \\ (2,-2) & (5,-5) & (2,-2) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (3,-3) & (4,-4) & (5,-5) \\ (2,-2) & (5,-5) & (2,-2) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (3,-3) \\ (2,-2) \end{pmatrix}$$

3.2 Juegos no cooperativos

Dentro de los juegos no cooperativos tenemos los juegos de suma nula: donde lo que gana un jugador lo paga directamente el otro jugador.

Las Estrategias maxi-min: Son estrategias en la cual el jugador maximiza la ganancia mínima que se puede obtener en un juego.
Una estrategia maxi-min es conservadora (evita riesgos) no maximiza beneficios.

Un ejemplo de esto lo tenemos en lo siguiente

	Izquierda	Derecha
Arriba	(1,0)	(1,1)
Abajo	(-2000,0)	(2,1)

El jugador A puede escoger arriba cuando el otro jugador escoja izquierda ganando 1 o puede escoger abajo perdiendo -20000. Cuando el jugador arriba escoja arriba y el otro jugador haya escogido derecha puede ganar 1, y si en esta misma circunstancia el jugador escoger abajo, puede ganar 2

			Mínima ganancia por estrategia
Arriba	1	1	**1**
Abajo	-2000	2	-2000

Por filas se escoge lo peor
Y una vez hecho esto, de lo peor se escoge lo mejor.

El jugador B se pondrá en la situación contraria y escogerá por columnas lo mejor sabiendo que los valores para el son pérdidas y no ganancias. De este modo escogerá 0 en la primera columna y en la segunda columna escogerá 1 (es mejor perder 1 que 2). Una vez hecho esto, se escoge lo peor que es 1

	Izquierda	Derecha
	0	1
	0	2
Mínima ganancia por estrategia	0	**1**

Estrategias mini-max: Son estrategias en la cual el jugador minimiza la ganancia máxima que se puede obtener en un juego.

Existirá un equilibrio de Nash si el Maximin A = Minimax B (valor del juego)

Ejemplo para saber el valor del juego:
Sea la siguiente matriz de pagos de un juego de suma nula, donde al final de cada de cada juego se ha escrito el mínimo de ella, y al final de cada columna el máximo

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 3 & 5 & 5 \end{array} & \end{array}$$

En la columna de al lado se ha escogido lo peor de cada fila. Dentro de lo perores se escogería el 3.

En la fila de abajo se escogido lo mejor por columnas. Dentro de esto habría que escoger lo peor el 3.

Como ambos valores coinciden hay un equilibrio de NASH y el valor del juego sería por tanto 3.

--- Estrategias mixtas óptimas ---

Se dice que una estrategia X* e Y* son estrategias óptimas para J1 y J2 si:

$$E[x, y^*] \leq E[x^*, y^*] \leq E[x^*, y], \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

siendo $v = E[x^*, y^*]$ el valor del juego.

LO QUE SE PRETENDE ES DETERMINAR LA PROBABILIDAD CON LA QUE SE DEBE JUGAR CADA ACCIÓN.

Ejemplo de cara o cruz

		Y1	*Y2*
		Cara	*Cruz*
X1	*Cara*	*1*	*-1*
X2	*Cruz*	*-1*	*1*

<u>JUGADOR 1</u>

	Cara	*Cruz*	
Tabla de alternativas (X1, X2)	*X1-X2*	*-X1+X2*	*Min (X1-X2, -X1+X2)*

El objetivo será Max Min(X1-X2, -X1+X2) o dicho de otro modo Max V
Siendo V min (X1-X2, -X1+X2)
En este caso V es el valor más pequeño entre los posibles.

Max V ***ESTRATEGIA MAXIMIN***
S.a
V < X1 –X2 Menor o igual
V <-X1 +X2 Menor o igual
X1 + X2 = 1
0<X1<1 Menor o igual
0<X2<1 Menor o igual

<u>JUGADOR 2</u>

	Y1 Y2
Cara	*Y1- Y2*
Cruz	*-Y1+Y2*
	Max (Y1-Y2;-Y1+Y2)

El objetivo será Min MAX (Y1-Y2, -Y1+Y2) o dicho de otro modo Max V
Siendo W min (Y1-Y2, -Y1+Y2)
En este caso W es el valor más pequeño entre los posibles.

Max W
Max V ***ESTRATEGIA MINIMAX***
S.a
V < Y1 –Y2 Menor o igual
V <-Y1 +Y2 Menor o igual
Y1 + Y2 = 1
0<Y1<1 Menor o igual

0<Y2<1 Menor o igual

Para resolver estos problemas, hay que en primer lugar quitar una variable, poniendo una en función de otra y utilizar los procedimientos gráficos.

JUGADOR 1

La sustitución sale de X1+X2 = 1 → X2= 1-X1

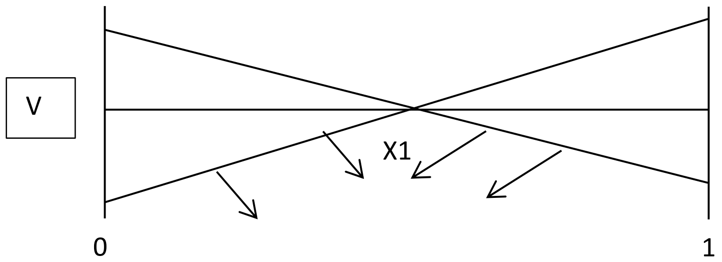
Max V

V< X1- (1-X1) → <u>2X1 -1</u>

V< -X1+(1-X2= <u>→-2X1+1</u>

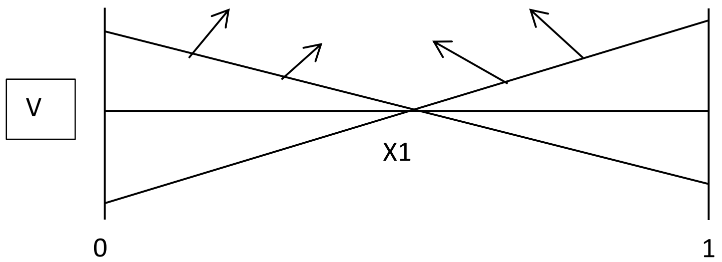
0<X1<1

Una vez hecho lo anterior hay que representar de manera gráfica las dos inecuaciones anteriores. Lo cual nos daría el valor de X 1 y de V. Por consiguiente también daría el valor de X2



X1 = 0,5
X2= 0,5
V= 0

Para el segundo jugador se hace lo mismo: se abrevia y se representa



Y1 = 0,5
Y2= 0,5
W= 0

En este caso hay equilibrio puesto que la estrategia maximin del J1 como la estrategia minimax de J1 tienen el mismo valor.

Ejemplo completo

Se parte de esta tabla

		Y1	*Y2*	*Y3*	
		I	*II*	*III*	*Minimax*
X1	*A*	*-4*	*5*	*8*	*-4*
X2	*B*	*9*	*-5*	*5*	*-5*
X3	*C*	*5*	*1*	*3*	*1*
	Maxmin	*9*	*5*	*8*	

Lo primero que hay que hacer, es ver si hay estrategias dominadas, en este caso vemos que el jugador 1 nunca escogería la opción C, porque se siempre hay una alternativa que tiene más beneficio. El jugador 2 nunca escogería la opción III porque hay siempre una alternativa que tiene menos costes.

De este modo quedaría una tabla así :

		Y1	*Y2*	
		I	*II*	*Minimax*
X1	*A*	*-4*	*5*	*-4*
X2	*B*	*9*	*-5*	*-5*
	Maxmin	*9*	*5*	

	I	***II***
(X1, X2)	$-4X_1+9X_2$	$5X_1-5X_2$

Max V

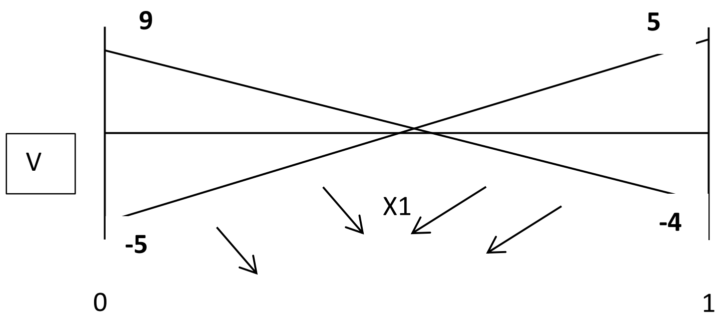
Sa $V < -4X_1 + 9X_2$

$V < 5X_1 - 5X_2$

$X_1 + X_2 = 1 \rightarrow X_2 = 1 - X_1$

Por tanto $V < -13X_1 + 9$

$V < 10X_1 - 5$



$-13X_1 + 9 = 10X_1 - 5$

$23X_1 = 14 \rightarrow X_1 = 0{,}60869$

$X_2 = 0{,}391305$

$V = 1{,}08695$

Para el jugador 2 sería

I	- *4Y1 + 5Y2*
II	*9Y1-5Y2*

Min W

SA

W>-4Y1 +5Y2
W>9 Y1 -5Y2
Y1+Y2 = 1

Al representarlo debe Salir W= 1,08695

Sabiendo que -4y1 +5y2 < 1,08695
9y1-5y2 < 1,08695

-4y1 +5(1-y1) < 1,08695 → *-9y1+5 < 1,08695*
9y1-5(1-y1) < 1,08695 → *14y1 -5 < 1,08695*

Y1 = 0,434782   Y2 = 0,565217

3.3 Juegos cooperativos.

En muchos juegos variaos jugadores se pueden aliar para obtener una serie de ventajas, que son mayores a las que ellos obtendrían de manera aislada de este modo, resulta muy interesante ver cuáles serían las mejores alianzas que pueden surgir y el pago o coste que soportará cada uno.

En los juegos cooperativos hay que saber que:

- Existe un conjunto de jugadores N (que va desde 1 a hasta N)
- Un conjunto de posibles combinaciones de alianzas de jugadores 2 ^n combinaciones
- Función de características que indican lo que los miembros de la alianza recibirán si actúan unidos formando una coalición

  Es necesario que se dé la condición de $\nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B)$.
  Con la unión de dos jugadores se tiene que recibir más que con la unión de las partes.
- Existe una serie de imputaciones.
- A cada combinación se le asigna una probabilidad.

  $$p_n(S) = \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \text{ donde } s = \text{núm. jugadores en } S.$$

  N es el número de jugadores totales.

EJEMPLO DE RESOLUCIÓN DE JUEGOS COOPERATIVOS (ejercicio típico)

EJEMPLO 1

Supóngase que el jugador 1 es el propietario de un terreno que valora en 100000e. El jugador 2 es una promotora que puede urbanizar el terreno dándole un valor de 200000e y el jugador 3 otra promotora que puede urbanizar dando un valor de 300000e.

La función característica del juego sería

$$\nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = \nu(\{2,3\}) = 0.$$
$$\nu(\{1\}) = 100000$$
$$\nu(\{1,2\}) = 200000$$
$$\nu(\{1,3\}) = \nu(\{1,2,3\}) = 300000$$

Este problema se resuelve construyendo una tabla

1. En la primera Columna se pone las distintas combinaciones de jugadores
2. En la segunda columna se pone los valores V asignados a cada combinación (en este caso ya vienen dados)
3. Se calcula la probabilidad con la fórmula $p_n(S) = \frac{s!(n-s-1)!}{n!}$

   Se calcula para combinación que tiene un número distinto de jugadores

   Combinación de 0 jugadores de 1,2,3
4. Se ve para cada jugador empezando por el 1, que combinaciones de jugadores no está y se calcula la diferencia entre lo que la combinación de jugadores ganaría y lo que ganaría esa misma combinación al incluir al jugador que no está.
5. Se multiplica para cada jugador lo obtenido en cada columna V lo obtenidos por la inclusión del nuevo jugador por la probabilidad.

S	V Función característica	Probabilidad	V1	V2	V3
Nada	0	1/3	100	0	0
1	100	1/6		100	200
2	0	1/6	200		0
3	0	1/6	300	0	
1,2	200	1/3			100
1,3	300	1/3		0	
2,3	0	1/3	300		
1,2,3	300		216,6666 72,22222%	16.6666 5,55555%	66.6666 22,2222%

Los valores de V1 se han obtenido con el siguiente planteamiento, en la combinación nada si se mete el jugador 1, de no ganar nada ya se gana 100, si alía el jugado1 y el 2, de no ganar nada el jugador 2, ahora entre los 2 ya ganarían 200mil. Si el jugador 1 se alía con el 3, se pasaría de ganar 0 por parte del jugador 3 a ganar 300…. Así se haría sucesivamente

En el caso de V2, si el jugador 2 se mete en nada ganaría 0, si el jugador 2 se alía con el jugador 1 se ganaría 200 en total, pero el jugador 1 ya ganaba 100, por lo que el sobre beneficio sería 100 que es lo que se pone.

El valor 216,666 de abajo ha salido de 100 x 1/3 + 200x 1/6 + 300 x1/6 + 300x1/3

El resto de valores se han obtenido igual pero multiplicando su V por la probabilidad asociada.

OTRO EJEMPLO
Supongamos que tres tipos de aviones usan un aeropuerto. El avión de tipo 1 necesita 100 metros de pista, el tipo 2 150 m. y el tipo 3 400 metros. Supongamos que el coste de mantenimiento de la pista es proporcional a la longitud de ésta. Como a ese aeropuerto llegan aviones de tipo 3 la longitud de la pista ha de ser de 400 metros. Supongamos por simplificar que al aeropuerto llegan por día uno de cada uno de esos aviones. El objetivo es decidir qué parte del coste de mantenimiento corresponde a cada avión. Esta situación puede representarse como un juego con la siguiente función característica, donde se anota como ganancia negativa el coste para que se cumpla la propiedad de la superaditividad

En este caso se hace lo mismo pero se mira el sobre coste.

S	V Función característica	Probabilidad	V1	V2	V3
Nada	0	1/3	100	150	400
1	100	1/6		50	300
2	150	1/6	0		250
3	400	1/6	0	0	
1,2	150	1/3			2500
1,3	400	1/3		0	
2,3	400	1/3	0		
1,2,3	400		33,333 8,333%	58.3333 14,5833%	308,3333 77,088%

,