

# Anclaje Inerte y Densidades $p$ -ádicas Explícitas en la familia

$$R^2 - c^2:$$

Renormalización determinista y serie singular en campos cuadráticos imaginarios

Robert Duan Montoya Cardona

18 de febrero de 2026

## Resumen

Estudiamos la familia aritmética  $M_R(c) = R^2 - c^2$ ,  $1 \leq c \leq R - 1$ , asociada al conteo  $N_\Delta(R)$  de valores que son normas en  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ , con  $\Delta < 0$  fundamental. El resultado conceptual central es el *anclaje inerte*: para un primo inerte  $p$ , el defecto de paridad de  $v_p(M_R(c))$  no es ruido estadístico, sino un fenómeno determinista concentrado en la capa crítica  $v_p(c) = v_p(R)$ . Esta rigidez produce fórmulas cerradas para densidades locales de norma:  $\sigma_p^{(m)} = 1 - \frac{2}{p^m(p+1)}$  para  $p \geq 3$ , y  $\sigma_{2,\Delta}^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}$  cuando 2 es inerte.

Con estas densidades definimos un normalizador finitista  $H_\Delta(R)$  que extrae de forma explícita la dependencia local en la factorización de  $R$ , y estabilizamos el observable  $C_{\sigma,\Delta}(R) = \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta(R)R}$ . Identificamos el baseline canónico  $C_{\text{base}}(\Delta) = 2e^{-\gamma}L(1, \chi_\Delta)$ , con forma cerrada en el caso Heegner, y proponemos la descomposición  $C_\infty(\Delta) = C_{\text{base}}(\Delta)\mathfrak{S}_\Delta$ , donde  $\mathfrak{S}_\Delta$  captura correlaciones locales finas. La evidencia numérica hasta  $R \leq 10^7$  para los nueve discriminantes de Heegner confirma estabilización robusta y estructura local no trivial. Bajo una hipótesis estándar de nivel de distribución para  $M_R(c)$ , obtenemos asintóticamente

$$N_\Delta(R) = C_\infty(\Delta) H_\Delta(R) \frac{R}{\log R} + O\left(\frac{R}{(\log R)^{1+\delta}}\right), \quad \delta > 0.$$

**Palabras clave.** Normas cuadráticas imaginarias, densidades  $p$ -ádicas, cribas con serie singular, renormalización aritmética, anclaje inerte.

**MSC 2020.** 11N32, 11R11, 11N36, 11D09.

# Índice

<b>1 Introducción y resumen de resultados</b>	<b>1</b>
1.1 Origen geométrico: de la esfera a la secuencia $R^2 - c^2$	1
1.2 Por qué importa (lectura técnica y no técnica)	1
1.3 Mapa lógico del artículo	1
1.4 El problema en una línea	2
1.5 El fenómeno: oscilaciones locales deterministas (“anclaje inerte”)	2
1.6 Resultados principales (locales, incondicionales)	2
1.7 El normalizador inercial $H_\Delta(R)$ y el observable estable	3
1.8 Baseline canónico y serie singular	3
1.9 Qué es teorema y qué es conjetura	3
1.10 Evidencia computacional y el rol de inertes pequeños	4
1.11 Convención de parametrización	4
1.12 Organización del manuscrito	4
<b>2 Normas en <math>K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})</math> y el rol de los primos inertes</b>	<b>4</b>
2.1 Caracteres cuadráticos y tipos de primos	4
2.2 Criterio local simplificado: paridad en primos inertes	4
<b>3 Definiciones: conteo, densidades locales y el normalizador inercial</b>	<b>5</b>
3.1 Conteo	5
3.2 Densidades $p$ -ádicas	5
3.3 Por qué $H_\Delta(R)$ es el normalizador natural	5
3.4 El observable estable	6
<b>4 Preliminares <math>p</math>-ádicos: capas de valuación y el principio de la capa crítica</b>	<b>7</b>
4.1 Puente: de lo discreto a lo continuo	7
4.2 Capas de valuación en $\mathbb{Z}_p$	8
4.3 El principio estructural: todo el defecto vive en $v_p(c) = v_p(R)$	8
<b>5 Teoremas locales en primos impares (<math>p \geq 3</math>)</b>	<b>9</b>
5.1 Caso Inerte: Paridad de Valuación	9
5.2 Densidad local cerrada	9
5.3 Primos ramificados impares en Heegner: caso explícito ( $\Delta = -3, p = 3$ )	10
<b>6 Capítulo 2-ádico: el interruptor racional en el caso inerte</b>	<b>10</b>
6.1 Clasificación de 2 (incluida para no depender de folklore)	10
6.2 Un lema 2-ádico auxiliar (para que la prueba no “salte”)	10
6.3 Teorema 2-ádico en el caso inerte	11
<b>7 Modelo global y baseline canónico: por qué aparece <math>\zeta</math> y por qué aparece <math>e^{-\gamma}</math></b>	<b>13</b>
7.1 La conjetura global en forma canónica	13
7.2 La identidad madre: $\zeta_K = \zeta L$	13
7.3 El baseline arquimediano y la fórmula de clase	13
7.4 Por qué aparece $e^{-\gamma}$ (y por qué esto es inevitable)	14
7.5 Descomposición canónica	14
<b>8 Estructura Euleriana: aparición forzada de <math>\zeta, L</math> y expansión a orden <math>p^{-2}</math></b>	<b>15</b>
8.1 Factores locales $\kappa_p(\Delta)$ : definición operacional	15
8.2 Una identidad de Euler que selecciona exactamente a los inertes	16
8.3 Producto truncado y corrección ramificada (arreglo canónico)	16

8.4	Aparición inevitable de $e^{-\gamma}$ y del residuo $L(1, \chi_\Delta)$	16
8.5	Expansión logarítmica: por qué emergen $\sum \chi(p)/p^2$ y valores $L(2m, \chi)$	17
<b>9</b>	<b>Evidencia computacional: cómo se estima <math>C_\infty(\Delta)</math> y por qué la cola manda</b>	<b>17</b>
9.1	Qué se computa	17
9.2	Por qué el promedio no es el límite	18
9.3	Ajuste de cola (ansatz de relajación)	18
9.4	Refinamiento ramificado en cola: $H_\Delta^\star$	18
9.5	Estabilización visual de $C_{\sigma, \Delta}(R)$	20
9.6	Comparativa Heegner: el factor singular	20
9.7	Colapso lineal: $C_{\text{raw}}(R)$ vs $H_\Delta(R)$	21
<b>10</b>	<b>Ejemplo de control: el outlier <math>\Delta = -7</math> explicado por inertes pequeños</b>	<b>21</b>
10.1	Predicción de primer orden por primos inertes pequeños	23
<b>11</b>	<b>Regularización tipo Mertens: por qué la serie singular debe converger</b>	<b>24</b>
<b>12</b>	<b>Discusión final: manuscrito blindado y siguiente paso hacia un teorema global</b>	<b>24</b>
12.1	Lo que ya está “cerrado”	24
12.2	Hipótesis analítica para el Teorema Global	25
<b>A</b>	<b>Constantes y valores de referencia</b>	<b>25</b>
<b>B</b>	<b>Análisis local explícito en <math>p = 2</math> para discriminantes especiales</b>	<b>26</b>
B.1	El lugar 2 en $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ( $\Delta = -8$ ): densidad local cerrada	26
B.2	Expansión exacta vía la zeta de primos y reducción a valores de $\zeta$	27
B.3	El lugar 2 en el caso gaussiano: $\Delta = -4$ ( $K = \mathbb{Q}(i)$ )	28
B.4	El lugar 2 en el caso eisensteiniano: $\Delta = -3$ ( $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ )	30
B.5	El lugar 3 en el caso Eisenstein: $\Delta = -3$ (primo ramificado)	31
<b>C</b>	<b>Diagnóstico de residuales del ajuste de cola</b>	<b>32</b>
<b>D</b>	<b>Figuras adicionales: normalización y colapso</b>	<b>33</b>
D.1	Normalización raw vs normalizado adicional	33
D.2	Colapso lineal adicional	33
<b>E</b>	<b>Conclusiones y extensiones</b>	<b>34</b>
<b>F</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>34</b>

## 1 Introducción y resumen de resultados

### 1.1 Origen geométrico: de la esfera a la secuencia $R^2 - c^2$

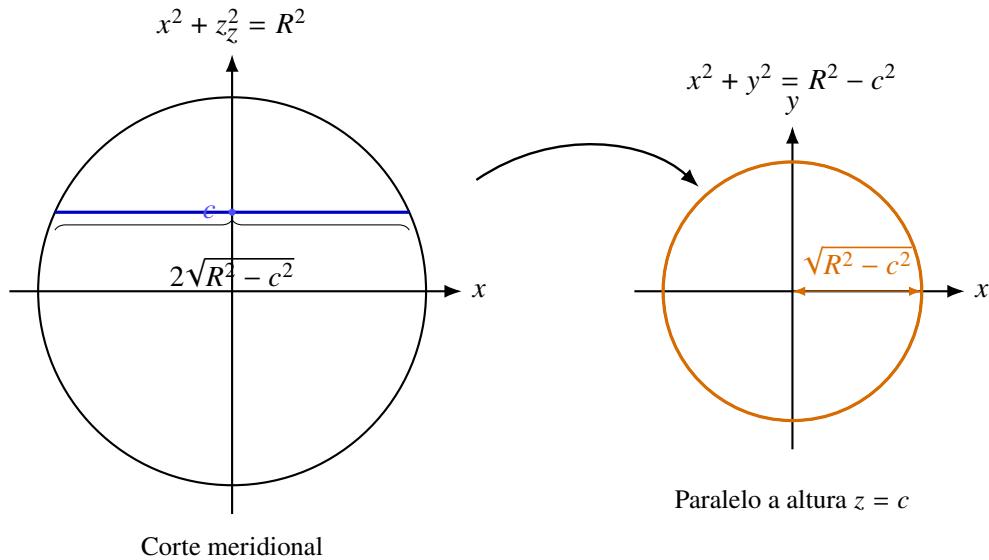
El punto de partida es estrictamente geométrico:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Al fijar una altura  $z = c$ , el paralelo cumple

$$x^2 + y^2 = R^2 - c^2.$$

Por tanto, para cada  $c$  aparece un escalar natural,  $R^2 - c^2$ , que codifica el radio de la sección horizontal. La pregunta aritmética nace al pedir que ese escalar pertenezca a un conjunto de normas. La Figure 1 resume este puente geométrico con una visualización directa.



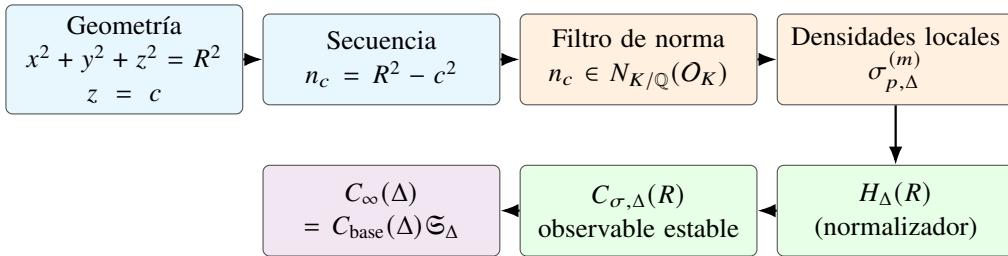
**Figura 1.** Origen geométrico de la familia. Cada corte horizontal de la esfera a altura  $z = c$  produce un círculo de radio  $\sqrt{R^2 - c^2}$ . El escalar  $R^2 - c^2$  es el objeto aritmético filtrado por normas.

### 1.2 Por qué importa (lectura técnica y no técnica)

- **Lectura no técnica.** El problema conecta geometría elemental (cortes de una esfera) con estructura fina de primos: no es un promedio difuso, sino un patrón determinista gobernado por valuaciones.
- **Lectura técnica.** La familia  $M_R(c) = R^2 - c^2$  permite escribir fórmulas locales exactas y aislar la dependencia en  $v_p(R)$  mediante un normalizador explícito  $H_\Delta(R)$ ; esto separa el bloque local del bloque global en la constante final.
- **Impacto conceptual.** El caso gaussiano ( $\Delta = -4$ ) es la puerta de entrada geométrica, y el formalismo de normas en  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$  extiende esa puerta a toda una familia cuadrática con control local cerrado.

### 1.3 Mapa lógico del artículo

La Figure 2 compacta la arquitectura completa: origen geométrico, filtros locales, renormalización y constante final.



**Figura 2.** Flujo conceptual completo: del origen geométrico de  $R^2 - c^2$  a la descomposición final de la constante global.

## 1.4 El problema en una línea

Sea  $\Delta < 0$  un discriminante fundamental y  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ . Para cada  $R \in \mathbb{N}$  consideramos la familia

$$M_R(c) = R^2 - c^2 = (R - c)(R + c), \quad 1 \leq c \leq R - 1,$$

y contamos cuántos valores son normas enteras:

$$N_{\Delta}(R) = \#\{1 \leq c \leq R - 1 : M_R(c) \in N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_K)\}.$$

El objetivo es describir con precisión *cómo* depende  $N_{\Delta}(R)$  de la aritmética de  $R$  y del tipo de descomposición de primos en  $K$ .

## 1.5 El fenómeno: oscilaciones locales deterministas (“anclaje inerte”)

En un primo  $p$  *inerte* en  $K$  (i.e.  $\chi_{\Delta}(p) = -1$ ), una condición necesaria para que un entero positivo sea norma es que  $v_p(\cdot)$  sea *par*. Lo sorprendente en la familia  $M_R(c)$  es que, al variar  $c$ , la paridad de  $v_p(M_R(c))$  no se comporta como un ruido: queda rígidamente controlada por la relación aditiva

$$(R - c) + (R + c) = 2R.$$

En particular, el defecto de paridad se concentra en una única capa  $p$ -ádica:

**Principio de la capa crítica.** *Para  $p$  impar, fuera del evento  $v_p(c) = v_p(R)$  se tiene automáticamente que  $v_p(M_R(c))$  es par.* Por tanto, toda la probabilidad de fallo de paridad vive en un subconjunto de medida  $\asymp p^{-v_p(R)}$ .

Este pegado del defecto a la valuación de  $R$  (y no a fluctuaciones “aleatorias” de  $c$ ) es lo que llamamos *anclaje inerte*. Es un mecanismo estructural, y por eso admite fórmulas cerradas.

## 1.6 Resultados principales (locales, incondicionales)

El núcleo del trabajo es local y completamente riguroso: calculamos densidades  $p$ -ádicas exactas asociadas a la paridad de  $v_p(M_R(c))$  con  $c$  Haar-uniforme en  $\mathbb{Z}_p$ .

- **Primos impares ( $p \geq 3$ ).** Para  $m = v_p(R)$  obtenemos la identidad cerrada

$$\mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ impar}) = \frac{2}{p^m(p+1)}, \quad \sigma_p^{(m)} = \mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ par}) = 1 - \frac{2}{p^m(p+1)}.$$

En primos inertes,  $\sigma_p^{(m)}$  es exactamente la densidad del filtro local de norma (Teorema 5.3).

- **Lugar 2 cuando es inerte.** Si  $\Delta \equiv 5 \pmod{8}$ , entonces  $K_2/\mathbb{Q}_2$  es no ramificada y la condición local de norma es pura paridad. En este régimen aparece un factor racional explícito:

$$\sigma_{2,\Delta}^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}, \quad \sigma_{2,\Delta}^{(0)} = \frac{2}{3}$$

(Teorema 6.4). Este *interruptor 2-ádico* domina varios de los regímenes observados numéricamente.

## 1.7 El normalizador inercial $H_\Delta(R)$ y el observable estable

Las fórmulas anteriores muestran que las densidades dependen explícitamente de  $m = v_p(R)$ . Por tanto, el cociente crudo  $N_\Delta(R) \log R / R$  oscila multiplicativamente cuando  $R$  acumula potencias de primos inertes. Esto obliga a renormalizar por un corrector determinista construido desde las densidades locales.

Definimos el factor inercial finitista

$$H_\Delta(R) := \prod_{\substack{p|R \\ p \text{ inerte}}} \frac{\sigma_{p,\Delta}^{(v_p(R))}}{\sigma_{p,\Delta}^{(0)}}$$

y consideramos el observable

$$C_{\sigma,\Delta}(R) = \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta(R) R}.$$

La razón conceptual para introducir  $H_\Delta(R)$  es simple: extrae *exactamente* la dependencia local explícita en  $v_p(R)$ , devolviendo cada factor al régimen base  $m = 0$ .

## 1.8 Baseline canónico y serie singular

En una criba de dimensión 1 el escalamiento  $R/\log R$  es el esperado, y el factor arquimediano queda forzado por Mertens. En particular, identificamos el baseline canónico del campo:

$$C_{\text{base}}(\Delta) = 2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta) = 2e^{-\gamma} \text{Res}_{s=1} \zeta_K(s),$$

y en el caso Heegner ( $h(\Delta) = 1$ ) obtenemos la forma cerrada

$$C_{\text{base}}(\Delta) = \frac{4\pi e^{-\gamma}}{w(\Delta) \sqrt{|\Delta|}}$$

(Teorema 7.3).

La constante final esperada para el conteo renormalizado adopta la descomposición canónica

$$C_\infty(\Delta) = C_{\text{base}}(\Delta) \mathfrak{S}_\Delta,$$

donde  $\mathfrak{S}_\Delta$  es una serie singular local que captura correlaciones finas (de orden  $\geq p^{-2}$ ) propias de la familia  $M_R(c)$  y del conjunto de normas.

## 1.9 Qué es teorema y qué es conjectura

- **Teorema (incondicional).** Todo el aparato local: principio de capa crítica, densidades cerradas para  $p \geq 3$  y para  $p = 2$  inerte, y la identificación del baseline  $C_{\text{base}}(\Delta)$  vía  $\zeta_K$ .
- **Teorema (global condicional).** Bajo una hipótesis explícita de distribución en progresiones para  $M_R(c)$ , se deduce la asintótica global con término de error con ahorro logarítmico (Teorema 12.1).
- **Conjetura (global incondicional).** El asintótico

$$N_\Delta(R) \sim \frac{C_\infty(\Delta) H_\Delta(R) R}{\log R} \quad (R \rightarrow \infty)$$

requiere un input global de distribución en progresiones para la secuencia  $M_R(c)$ , suficiente para alimentar una criba asintótica (Conjetura 7.1).

## 1.10 Evidencia computacional y el rol de inertes pequeños

Para los nueve discriminantes de Heegner se computa  $N_\Delta(R)$  hasta  $R \leq 10^7$  y se observa que  $C_{\sigma,\Delta}(R)$  se estabiliza hacia un límite  $C_\infty(\Delta)$ . El caso  $\Delta = -7$  actúa como diagnóstico: su valor atípico se explica casi por completo por el producto de primer orden de inertes pequeños ( $p = 3, 5$ ), mostrando que la variación entre discriminantes es estructural y dominada por primos chicos (Sección 10).

## 1.11 Convención de parametrización

*Observación 1.1* (Convención de escala y compatibilidad con la notación “ $2R$ ”). En todo el manuscrito fijamos *una única* parametrización:

$$M_R(c) = R^2 - c^2 = (R - c)(R + c), \quad 1 \leq c \leq R - 1.$$

Si en algún contexto geométrico se prefiere escribir la familia como  $(2r)^2 - c^2$  (simetría alrededor de  $2r$ ), basta sustituir  $R := 2r$ . Para todo primo impar  $p$  no cambia  $v_p(R)$ ; en  $p = 2$  sí cambia:

$$v_2(R) = v_2(2r) = v_2(r) + 1.$$

Esta observación es *exactamente* el punto donde un cambio de convención puede alterar los “casos base” 2-ádicos. La presente redacción fija la convención  $R^2 - c^2$  y usa  $v_p(R)$  coherentemente en todo el texto.

## 1.12 Organización del manuscrito

Las Secciones 4–6 prueban los resultados locales (impares y lugar 2). La Sección 3 formaliza  $H_\Delta(R)$  y el observable  $C_{\sigma,\Delta}(R)$ . Las Secciones 7–11 discuten el baseline canónico, la renormalización tipo Mertens y la estructura Euleriana de la serie singular. La evidencia numérica y los diagnósticos se presentan en la Sección 9 y apéndices.

# 2 Normas en $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ y el rol de los primos inertes

## 2.1 Caracteres cuadráticos y tipos de primos

Sea  $\Delta < 0$  fundamental y  $\chi_\Delta$  el carácter cuadrático de Kronecker. Para  $p \nmid \Delta$ ,

$$\chi_\Delta(p) = \begin{cases} +1 & (p \text{ split}), \\ -1 & (p \text{ inerte}). \end{cases}$$

Si  $p \mid \Delta$ , entonces  $\chi_\Delta(p) = 0$  y  $p$  es ramificado. Para contexto general sobre teoría analítica de números y aritmética de campos, véanse [1, 2, 5].

## 2.2 Criterio local simplificado: paridad en primos inertes

Un principio estándar (interpretado vía factorización de ideales) es:

*Si  $p$  es inerte, entonces para que  $n$  sea norma es necesario que  $v_p(n)$  sea par.*

Esto se debe a que, si  $p$  es inerte, el ideal  $(p)$  permanece primo en  $O_K$  y

$$(v_p(n) \text{ impar}) \implies (p) \text{ aparece con exponente impar en } (n),$$

lo cual no puede suceder para normas principales, donde los exponentes vienen en pares conjugados.

Para los discriminantes de Heegner ( $h(\Delta) = 1$ ), esta descripción se vuelve especialmente operativa: la representabilidad por la forma principal coincide con la condición global de norma principal, y la estructura local captura con gran fidelidad la constante.

*Observación 2.1* (Por qué restringirse a Heegner en la evidencia). Cuando  $h(\Delta) > 1$ , un entero puede ser norma de algún ideal pero no necesariamente norma de un elemento, y aparecen clases. La restricción a Heegner evita esas sutilezas y permite que el indicador de norma sea computable de manera directa mediante criterios de factorización/representación.

**Proposición 2.2** (Principio local–global para normas en extensiones cuadráticas). *Sea  $K/\mathbb{Q}$  una extensión cuadrática (en particular, cíclica). Entonces un racional  $x \in \mathbb{Q}^\times$  es una norma global  $x \in N_{K/\mathbb{Q}}(K^\times)$  si y solo si  $x$  es una norma local en todo completamiento:*

$$x \in N_{K/\mathbb{Q}}(K^\times) \iff x \in N_{K_v/\mathbb{Q}_v}(K_v^\times) \text{ para todo lugar } v \text{ de } \mathbb{Q}.$$

*Observación 2.3* (Principio de Hasse no es suficiente: Normas Integrales). El Teorema de Normas de Hasse garantiza que  $x \in \mathbb{Q}^\times$  es norma global en  $K^\times$  si y solo si es norma local en todo completamiento  $K_p^\times$ . Sin embargo, nuestro conteo  $N_\Delta(R)$  requiere que  $M_R(c)$  sea norma de un entero algebraico ( $\beta \in \mathcal{O}_K$ ). Para  $h(\Delta) = 1$  (dominios de ideales principales), esto equivale a pedir que  $M_R(c)$  sea generado por la norma de un elemento, lo cual impone condiciones más fuertes que la mera norma racional: se requiere que la valuación local sea par en inertes y que las unidades locales satisfagan congruencias cuadráticas en los ramificados (ver Section 5.3) y en  $p = 2$ .

### 3 Definiciones: conteo, densidades locales y el normalizador inercial

#### 3.1 Conteo

**Definición 3.1** (Conteo de normas en la familia). Para  $\Delta < 0$  fundamental definimos

$$N_\Delta(R) = \#\{ 1 \leq c \leq R - 1 : M_R(c) = R^2 - c^2 \in N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_K) \}.$$

*Observación 3.2* (Nota técnica sobre el borde  $c = 0$ ). Formalmente, el valor  $c = 0$  produce  $M_R(0) = R^2$ , que es siempre norma (pues es un cuadrado racional). Aunque su contribución es asintóticamente despreciable ( $O(1)$  frente a  $R$ ), incluir  $c = 0$  simplificaría ciertas sumas de caracteres en un tratamiento analítico puro. Mantenemos la restricción  $c \geq 1$  por coherencia con la intuición geométrica del problema.

#### 3.2 Densidades $p$ -ádicas

El mecanismo central del artículo es local. Sea  $p$  primo. Consideramos  $c$  uniforme en  $\mathbb{Z}_p$  con medida de Haar. Definimos la densidad local (en el régimen relevante para inertes):

$$\sigma_{p,\Delta}^{(m)} := \mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}_p} (v_p(M_R(c)) \text{ par}), \quad m = v_p(R).$$

Cuando  $p$  es inerte, esta paridad modela la condición local de norma.

#### 3.3 Por qué $H_\Delta(R)$ es el normalizador natural

El punto crucial es que  $\sigma_{p,\Delta}^{(m)}$  depende de  $m = v_p(R)$  de manera explícita. Por tanto, si  $R$  tiene potencias grandes de primos inertes, el conteo  $N_\Delta(R)$  cambia por un factor determinista. Esto obliga a definir un corrector multiplicativo.

**Definición 3.3** (Factor inercial determinista finitista). Sea  $\Delta < 0$  fundamental. Definimos el factor corrector como el producto finito restringido a los primos relevantes:

$$H_\Delta(R) := \prod_{\substack{p|R \\ p \text{ inerte}}} \frac{\sigma_{p,\Delta}^{(m)}}{\sigma_{p,\Delta}^{(0)}}, \quad m = v_p(R).$$

Si 2 es inerte, el producto incluye también el factor  $p = 2$  cuando  $v_2(R) > 0$ . Para primos split, y para inertes con  $v_p(R) = 0$ , el cociente es 1 (o se absorbe en la constante global para correcciones de orden  $O(p^{-2})$ ). Esta definición operacional garantiza que  $H_\Delta(R)$  es una cantidad finita y computable que aísla la dependencia en la geometría de  $R$ . Los términos no triviales provienen de:

1. Primos **inertes** ( $p \mid R, \chi(p) = -1$ ), donde la paridad se ve alterada por  $m > 0$ .
2. El primo  $p = 2$  cuando es **inerte** y divide a  $R$ .

*Observación 3.4* (Lectura probabilística). Si los eventos locales fueran aproximadamente independientes, entonces

$$\mathbb{P}(M_R(c) \text{ pasa todos los filtros locales}) \approx \prod_p \sigma_{p,\Delta}^{(m)},$$

y al variar  $v_p(R)$  cambias exactamente las  $\sigma_{p,\Delta}^{(m)}$  correspondientes.  $H_\Delta(R)$  es el cociente que “devuelve” esos factores a su valor base  $m = 0$ .

*Observación 3.5* (Refinamiento ramificado opcional). Para estudiar explícitamente la contribución de primos impares ramificados, usamos la normalización post-procesada

$$H_\Delta^\star(R) := H_\Delta(R) \prod_{\substack{p \mid \Delta \\ p \text{ impar}}} p^{-v_p(R)}.$$

Este refinamiento no altera la definición operativa principal de los CSV (inerte-only), pero permite separar con claridad el bloque inerte del bloque ramificado.

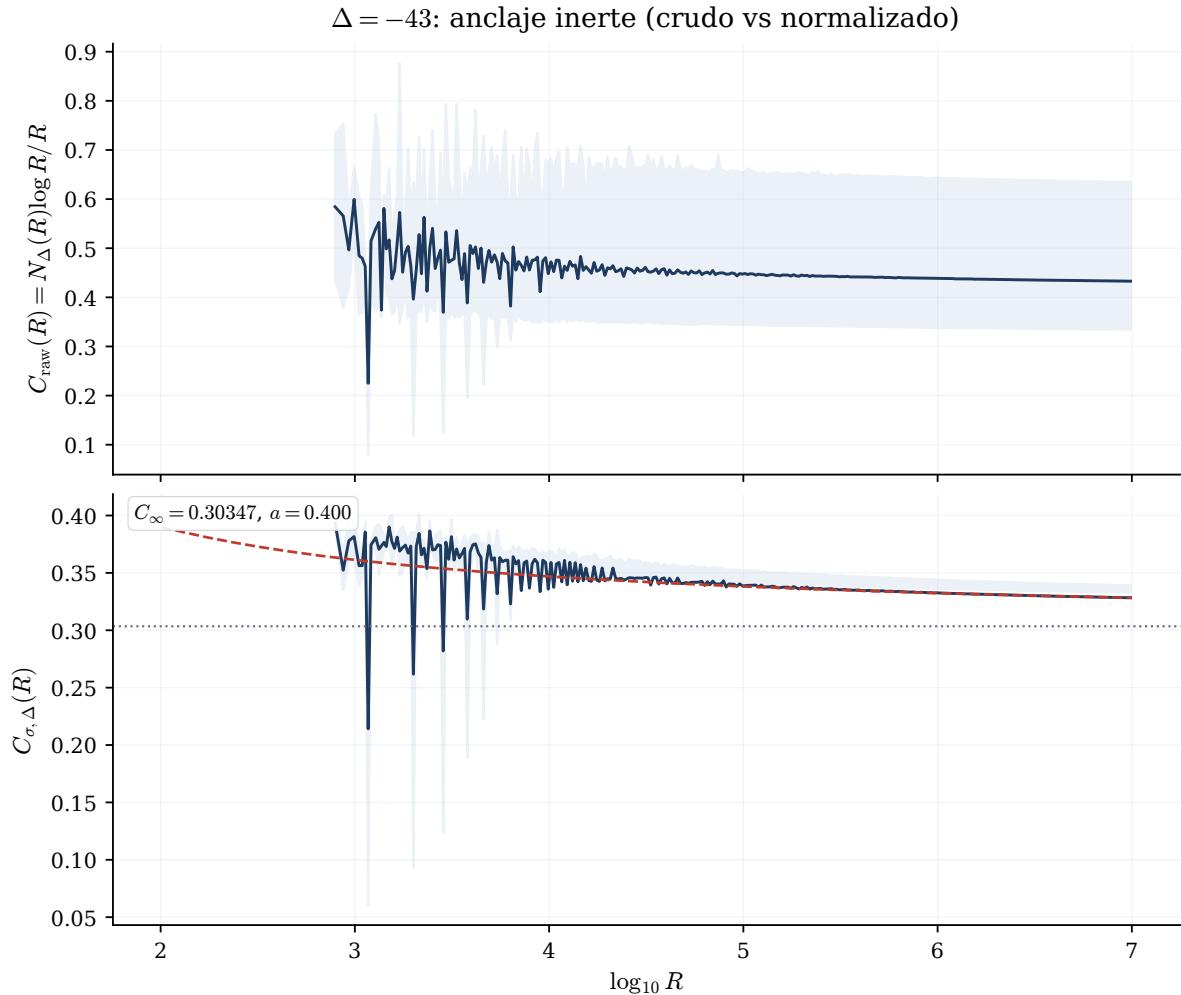
### 3.4 El observable estable

**Definición 3.6** (Observable normalizado). Definimos

$$C_{\sigma,\Delta}(R) := \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta(R) R}.$$

*Observación 3.7* (Qué esperamos en un modelo de dimensión 1). En una criba de dimensión 1, el conteo típico tiene forma  $\sim \text{const} \cdot R / \log R$ . La función  $H_\Delta(R)$  corrige las oscilaciones locales y  $C_{\sigma,\Delta}(R)$  debería tender a un límite.

*Observación 3.8* (Convención de escala logarítmica). En un modelo de criba de dimensión 1 aplicado a valores de tamaño  $\asymp R^2$ , el denominador natural es  $\log(R^2) = 2 \log R$ . Al normalizar por  $\log R$ , absorbemos ese factor 2 en la constante  $C_{\text{base}}(\Delta)$ , justificando su prefactor.



**Figura 3.** Demostración visual del anclaje inerte para  $\Delta = -43$ . **Arriba:**  $C_{\text{raw}}(R) = N_{\Delta}(R) \log R / R$  oscila multiplicativamente. **Abajo:** al normalizar por  $H_{\Delta}(R)$ , el observable  $C_{\sigma, \Delta}(R)$  se estabiliza, evidenciando que  $H_{\Delta}$  captura la oscilación determinista inducida por primos inertes.

## 4 Preliminares $p$ -ádicos: capas de valuación y el principio de la capa crítica

### 4.1 Puente: de lo discreto a lo continuo

**Lema 4.1** (Densidad discreta vs Haar). *Sea  $\sigma_p^{(m)}$  la probabilidad respecto a la medida de Haar en  $\mathbb{Z}_p$  definida previamente (densidad intrínseca). Definimos la densidad discreta para el nivel  $R$  como:*

$$\sigma_{p, \text{disc}}^{(m)}(R) := \frac{1}{R-1} \# \{ 1 \leq c \leq R-1 : v_p(M_R(c)) \text{ es par} \}.$$

Entonces, para todo  $q = p^k$  fijo (o creciendo lentamente con  $R$ ), la equidistribución de  $c$  módulo  $q$  implica:

$$\sigma_{p, \text{disc}}^{(m)}(R) = \sigma_p^{(m)} + O\left(\frac{p^{m+1}}{R}\right).$$

*Observación 4.2.* La corrección inercial  $H_{\Delta}(R)$  se construye usando las densidades límite  $\sigma_p^{(m)}$ . Esta aproximación es válida y robusta siempre que las “capas” relevantes del espacio  $p$ -ádico (hasta valuación  $m$ ) tengan representantes en el intervalo discreto, lo cual se cumple ampliamente si  $p^m \ll R$ . Para  $R$  extremadamente  $p$ -suave (ej.  $R = p^m$ ), la discretización introduce efectos de borde finito que el modelo de Haar suaviza.

## 4.2 Capas de valuación en $\mathbb{Z}_p$

Usaremos repetidamente la descomposición de  $\mathbb{Z}_p$  por valuaciones.

**Lema 4.3** (Distribución de  $v_p$  bajo Haar). *Sea  $X$  uniforme en  $\mathbb{Z}_p$ . Entonces para  $k \geq 0$ ,*

$$\mathbb{P}(v_p(X) = k) = (1 - 1/p)p^{-k}, \quad \mathbb{P}(v_p(X) \geq k) = p^{-k}.$$

*Demostración.*  $\mathbb{P}(v_p(X) \geq k) = \mu(p^k \mathbb{Z}_p) = p^{-k}$ . Restando  $k$  y  $k + 1$  se obtiene la masa puntual.  $\square$

## 4.3 El principio estructural: todo el defecto vive en $v_p(c) = v_p(R)$

El polinomio

$$M_R(c) = (R - c)(R + c)$$

tiene la propiedad de que las valuaciones  $v_p(R \pm c)$  se estabilizan fuera de la capa crítica.

**Lema 4.4** (Fuera de la capa crítica la paridad es automáticamente par). *Sea  $p$  primo impar. Escriba  $R = p^m R_0$  con  $p \nmid R_0$  y sea  $c \in \mathbb{Z}_p$  con  $t = v_p(c)$ . Si  $t \neq m$ , entonces*

$$v_p(R - c) = v_p(R + c) = \min\{t, m\}, \quad \Rightarrow \quad v_p(M_R(c)) = 2 \min\{t, m\} \text{ es par.}$$

*Demostración.* Si  $t < m$ , escriba  $c = p^t u$  con  $u \in \mathbb{Z}_p^\times$  y note que  $R \pm c = p^t(p^{m-t}R_0 \pm u)$  con paréntesis unidad. Si  $t > m$ , escriba  $c = p^m p^{t-m}u$  con  $p^{t-m}u \in p\mathbb{Z}_p$  y observe que  $R \pm c = p^m(R_0 \pm p^{t-m}u)$  con paréntesis unidad.  $\square$

**Lema 4.5** (Reducción en la capa crítica). *Sea  $p$  impar. Si  $v_p(c) = m$  escribimos  $c = p^m u$  con  $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ . Entonces*

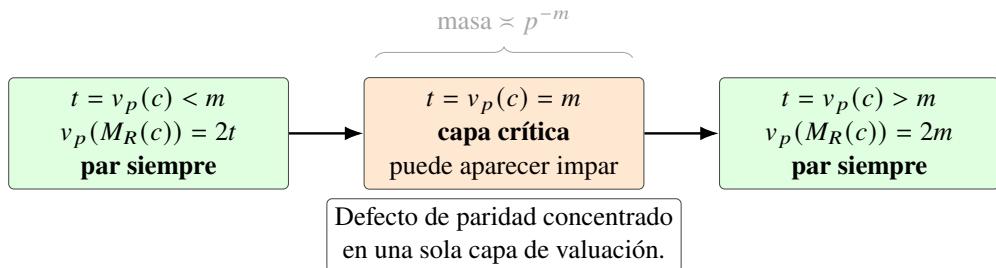
$$v_p(M_R(c)) = 2m + v_p(R_0^2 - u^2).$$

*En particular, la paridad de  $v_p(M_R(c))$  coincide con la de  $v_p(R_0^2 - u^2)$ .*

*Demostración.* Factorizando  $M_R(c) = R^2 - c^2 = p^{2m}(R_0^2 - u^2)$ .  $\square$

**Observación 4.6** (Consecuencia conceptual). Esta es la razón de fondo por la que  $H_\Delta(R)$  existe y es simple: la dependencia de  $\sigma_{p,\Delta}^{(m)}$  respecto de  $v_p(R)$  se concentra en una capa de masa  $\asymp p^{-m}$ .

La Figura 4 lo visualiza en un solo diagrama: todo el defecto de paridad entra por  $t = v_p(c) = m$ .



**Figura 4.** Visualización del principio de capa crítica para  $p$  impar: fuera de  $t = v_p(c) = m$  la paridad de  $v_p(M_R(c))$  es forzosamente par.

## 5 Teoremas locales en primos impares ( $p \geq 3$ )

### 5.1 Caso Inerte: Paridad de Valuación

El siguiente hecho encapsula el conteo de soluciones  $p$ -ádicas cerca de raíces simples.

**Lema 5.1** (Conteo de levantamientos para raíces simples en unidades). *Sea  $p$  primo impar y  $h(T) \in \mathbb{Z}_p[T]$ . Supongamos que  $\bar{h}(T) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[T]$  tiene exactamente  $r$  raíces simples en  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ . Sea  $U$  uniforme en  $\mathbb{Z}_p^\times$ . Entonces para  $t \geq 1$ :*

$$\mathbb{P}(h(U) \equiv 0 \pmod{p^t}) = \frac{r}{\varphi(p^t)} = \frac{r}{(p-1)p^{t-1}}, \quad \mathbb{P}(v_p(h(U)) = t) = \frac{r}{p^t}.$$

*Demostración.* Cada raíz simple módulo  $p$  levanta de manera única a una raíz módulo  $p^t$  (Hensel). Por tanto hay exactamente  $r$  soluciones módulo  $p^t$  dentro de  $(\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z})^\times$ . Como  $U$  módulo  $p^t$  es uniforme en ese grupo (de tamaño  $\varphi(p^t) = (p-1)p^{t-1}$ ), obtenemos la primera fórmula. Para la segunda, restamos probabilidades:

$$\mathbb{P}(v_p(h(U)) = t) = \mathbb{P}(v_p(h(U)) \geq t) - \mathbb{P}(v_p(h(U)) \geq t+1) = \frac{r}{(p-1)p^{t-1}} - \frac{r}{(p-1)p^t} = \frac{r}{p^t}.$$

□

*Observación 5.2.* En Theorem 5.1 sólo usamos  $t \geq 1$  porque la paridad de  $v_p(h(U))$  difiere de 0 únicamente cuando  $p \mid h(U)$ .

### 5.2 Densidad local cerrada

**Teorema 5.3** (Densidad local para  $p \geq 3$ ). *Sea  $p \geq 3$  primo impar y  $R = p^m R_0$  con  $p \nmid R_0$ . Entonces*

$$\boxed{\mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}_p}(v_p(M_R(c)) \text{ impar}) = \frac{2}{p^m(p+1)}}$$

$$\boxed{\sigma_p^{(m)} = \mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ par}) = 1 - \frac{2}{p^m(p+1)}}.$$

En particular, para  $m = 0$ :

$$\boxed{\sigma_p^{(0)} = \frac{p-1}{p+1}.}$$

(Cuando  $p$  es inerte, esta densidad es exactamente el filtro local de norma).

*Demostración.* Por Theorem 4.4, fuera de la capa crítica  $v_p(c) = m$  la valuación  $v_p(M_R(c))$  es par. Así,

$$\mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ impar}) = \mathbb{P}(v_p(c) = m) \cdot \mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ impar} \mid v_p(c) = m).$$

Por Theorem 4.3,  $\mathbb{P}(v_p(c) = m) = (1 - 1/p)p^{-m} = (p-1)/p^{m+1}$ .

Condicionando a  $v_p(c) = m$  escribimos  $c = p^m u$  con  $u \in \mathbb{Z}_p^\times$  uniforme. Por Theorem 4.5,

$$v_p(M_R(c)) = 2m + v_p(R_0^2 - u^2),$$

luego la paridad es la de  $v_p(h(u))$  con  $h(T) = R_0^2 - T^2$ .

Módulo  $p$ ,  $\bar{h}(T) = \bar{A}^2 - T^2$  con  $\bar{A} \neq 0$  tiene exactamente  $r = 2$  raíces simples en  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ :  $T \equiv \pm \bar{A}$ . Por Theorem 5.1, para  $t \geq 1$  (el caso  $t = 0$  no contribuye a sumas de valuación):

$$\mathbb{P}(v_p(h(u)) = t) = \frac{2}{p^t}.$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}(v_p(h(u)) \text{ impar}) = \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(v_p(h(u)) = 2j + 1) = \sum_{j \geq 0} \frac{2}{p^{2j+1}} = \frac{2/p}{1 - 1/p^2} = \frac{2p}{p^2 - 1}.$$

Finalmente,

$$\mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ impar}) = \frac{p-1}{p^{m+1}} \cdot \frac{2p}{p^2 - 1} = \frac{2}{p^m(p+1)}.$$

Esto concluye.  $\square$

*Observación 5.4* (Lectura intuitiva). En  $m = 0$ , la probabilidad de fallo en un inerte impar es  $2/(p+1)$  y por tanto la probabilidad de pasar el filtro es  $(p-1)/(p+1)$ . Esto explica por qué unos pocos inertes pequeños pueden dominar la constante (p.ej.  $p = 3, 5$  para  $\Delta = -7$ ).

### 5.3 Primos ramificados impares en Heegner: caso explícito ( $\Delta = -3, p = 3$ )

En la lista de discriminantes de Heegner  $h(\Delta) = 1$ , cada primo impar  $p \mid \Delta$  puede afectar el conteo cuando  $v_p(R) > 0$ . El caso que desarrollamos de forma completamente explícita en el cuerpo del texto es  $(\Delta, p) = (-3, 3)$ . El análisis completo (incluyendo la caracterización del grupo de normas de unidades módulo 3 y el conteo en la capa crítica) se presenta en el Apéndice, Section B.5, donde se prueba la fórmula cerrada

$$\sigma_{3,-3}^{(m)} = \frac{2}{3^{m+1}}.$$

Para otros Heegner impares ( $\Delta = -7, -11, -19, -43, -67, -163$ ), el primo  $|\Delta|$  también induce oscilación visible al variar  $v_p(R)$ ; esto se refleja en el refinamiento  $H_\Delta^\star$  de la Sección 9.

## 6 Capítulo 2-ádico: el interruptor racional en el caso inerte

### 6.1 Clasificación de 2 (incluida para no depender de folklore)

**Lema 6.1** (Clasificación de 2 por congruencia módulo 8). *Sea  $\Delta < 0$  discriminante fundamental.*

1. *Si  $\Delta$  es par fundamental (ej.  $\Delta = -4, -8$ ), entonces 2 es ramificado.*
2. *Si  $\Delta$  es impar fundamental, entonces  $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$ .*
  - $\Delta \equiv 1 \pmod{8} \implies 2 \text{ split.}$
  - $\Delta \equiv 5 \pmod{8} \implies 2 \text{ inerte.}$

### 6.2 Un lema 2-ádico auxiliar (para que la prueba no “salte”)

**Lema 6.2** (Suma y diferencia de impares en  $\mathbb{Z}_2$ ). *Si  $a, b \in \mathbb{Z}_2$  son impares, entonces  $a \pm b$  son pares y exactamente uno de ellos tiene valuación 1. Más precisamente, uno de  $a \pm b$  es  $\equiv 2 \pmod{4}$  y el otro es  $\equiv 0 \pmod{4}$ .*

*Demostración.* Si  $a \equiv b \pmod{4}$ , entonces  $a - b \equiv 0 \pmod{4}$  y  $a + b \equiv 2 \pmod{4}$ . Si  $a \equiv -b \pmod{4}$ , se invierte el rol. En cualquier caso, ambos son pares y sólo uno es múltiplo de 4.  $\square$

### 6.3 Teorema 2-ádico en el caso inerte

Antes de probar el teorema principal, aislamos una propiedad geométrica elemental de la medida de Haar que se usa implícitamente al “contar potencias de 2 adicionales”.

**Lema 6.3** (Valuación geométrica condicionada). *Si  $X$  es una variable aleatoria uniforme en  $\mathbb{Z}_2$  (Haar), entonces la valuación de  $X$  condicionada a estar en un subgrupo  $2^k\mathbb{Z}_2$  sigue una ley geométrica desplazada:*

$$\mathbb{P}(v_2(X) = j \mid X \in 2^k\mathbb{Z}_2) = \frac{1}{2^{j-k+1}}, \quad \forall j \geq k.$$

En particular, si sabemos que  $X \in 4\mathbb{Z}_2$ , entonces  $\mathbb{P}(v_2(X) = j) = 2^{-(j-1)}$  para  $j \geq 2$ .

Para el lugar 2 usamos la misma notación  $M_R(c)$  (o  $F_R(c)$  si se quiere enfatizar la variable muda) consistente con el resto del texto.

**Teorema 6.4** (Densidad local 2-ádica en el caso inerte). *Supongamos que 2 es inerte en  $K$  (impar fundamental con  $\Delta \equiv 5 \pmod{8}$ ). Sea  $m = v_2(R)$  y sea  $c$  uniforme en  $\mathbb{Z}_2$  (Haar). Entonces*

$$\sigma_{2,\Delta}^{(m)} := \mathbb{P}(v_2(M_R(c)) \text{ par})$$

satisface la fórmula cerrada

$$\sigma_{2,\Delta}^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}.$$

En particular, para  $R$  impar ( $m = 0$ ),

$$\sigma_{2,\Delta}^{(0)} = \frac{2}{3}.$$

**Corolario 6.5** (Fórmula cerrada para  $H_\Delta(R)$ ). *El factor inercial toma la forma explícita:*

$$H_\Delta(R) = \prod_{\substack{p \mid R \\ p \text{ inerte}}} h_p(v_p(R)),$$

donde el multiplicador local  $h_p(m) = \sigma_{p,\Delta}^{(m)} / \sigma_{p,\Delta}^{(0)}$  es:

- Para  $p \geq 3$  inerte:

$$h_p(m) = \frac{p^m(p+1)-2}{p^m(p-1)}.$$

- Para  $p = 2$  inerte (si aplica):

$$h_2(m) = \frac{3 \cdot 2^m - 1}{2^{m+1}}.$$

*Demostración.* Escribimos  $R = 2^m r$  con  $r$  impar y descomponemos por capas  $t = v_2(c)$ .

**Paso 1: fuera de la capa crítica  $t \neq m$  no hay defecto.** Si  $t < m$ , escribimos  $c = 2^t c'$  con  $c'$  impar. Entonces

$$R \pm c = 2^t (2^{m-t} r \pm c'),$$

y como  $2^{m-t}r$  es par y  $c'$  impar, el paréntesis es impar, luego  $v_2(R \pm c) = t$ . Si  $t > m$ , escribimos  $c = 2^m \cdot 2^{t-m} c'$  con  $2^{t-m}c'$  par y

$$R \pm c = 2^m (r \pm 2^{t-m} c'),$$

con paréntesis impar; por tanto  $v_2(R \pm c) = m$ . En ambos casos

$$v_2(M_R(c)) = v_2(R - c) + v_2(R + c) = 2 \min\{t, m\},$$

que es par.

**Paso 2: masa de la capa crítica.** La probabilidad de  $v_2(c) = m$  en  $\mathbb{Z}_2$  es

$$\mathbb{P}(v_2(c) = m) = 2^{-(m+1)}.$$

**Paso 3: defecto condicionado a  $v_2(c) = m$ .** Condicionamos a  $v_2(c) = m$  y escribimos  $c = 2^m c'$  con  $c'$  impar uniforme entre impares 2-ádicos. Entonces

$$v_2(M_R(c)) = 2m + v_2(r - c') + v_2(r + c').$$

Por Theorem 6.2, como  $r$  y  $c'$  son impares, exactamente uno de  $r \pm c'$  tiene valuación 1 y el otro tiene valuación  $\geq 2$ . Luego existe  $k \geq 2$  tal que

$$\{v_2(r - c'), v_2(r + c')\} = \{1, k\}, \quad \Rightarrow \quad v_2(r - c') + v_2(r + c') = 1 + k.$$

Así, la paridad de  $v_2(M_R(c))$  es par si y sólo si  $k$  es impar.

Nos queda calcular  $\mathbb{P}(k \text{ impar})$ . Partimos en dos ramas equiprobables según clases módulo 4:

$$\mathcal{A}_+ := \{c' \equiv r \pmod{4}\}, \quad \mathcal{A}_- := \{c' \equiv -r \pmod{4}\},$$

cada una de masa  $1/2$  dentro de las unidades impares.

En  $\mathcal{A}_+$  se tiene  $v_2(r - c') \geq 2$  y  $v_2(r + c') = 1$ . Definiendo  $X_+ = (r - c')/2$ , resulta  $X_+ \in 2\mathbb{Z}_2$  y

$$k = v_2(r - c') = 1 + v_2(X_+).$$

Por Theorem 6.3, condicionado a  $X_+ \in 2\mathbb{Z}_2$ :

$$\mathbb{P}(v_2(X_+) = j) = 2^{-j} \quad (j \geq 1).$$

Entonces

$$\mathbb{P}(k \text{ impar} \mid \mathcal{A}_+) = \mathbb{P}(1 + v_2(X_+) \text{ impar}) = \sum_{\substack{j \geq 1 \\ j \text{ par}}} 2^{-j} = \frac{1}{3}.$$

En  $\mathcal{A}_-$  se intercambian los papeles de  $r - c'$  y  $r + c'$ . Definiendo  $X_- = (r + c')/2 \in 2\mathbb{Z}_2$ , el mismo argumento da

$$\mathbb{P}(k \text{ impar} \mid \mathcal{A}_-) = \frac{1}{3}.$$

Por la ley de probabilidad total:

$$\mathbb{P}(k \text{ impar}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Luego, condicionado a  $v_2(c) = m$ , el *éxito* (paridad par) ocurre con probabilidad  $1/3$  y el *fallo* con probabilidad  $2/3$ .

**Paso 4: combinar.**

$$\mathbb{P}(\text{fallo}) = \mathbb{P}(v_2(c) = m) \cdot \mathbb{P}(\text{fallo} \mid v_2(c) = m) = 2^{-(m+1)} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3 \cdot 2^m}.$$

Por complemento,

$$\sigma_{2,\Delta}^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}.$$

□

**Corolario 6.6** (Contraste: caso gaussiano  $\Delta = -4$  (2 ramificado)). *En  $K = \mathbb{Q}(i)$  el primo 2 es ramificado. La condición clásica para ser suma de dos cuadrados impone paridad en exponentes de primos  $p \equiv 3$  (mód 4), pero no introduce una obstrucción específica en  $v_2$  del tipo “paridad forzada”. En el lenguaje de este trabajo: 2 no pertenece al conjunto de primos inertes y, por tanto, no contribuye un factor del tipo  $\sigma_{2,\Delta}^{(m)}$  al filtro inerte. En particular, el “interruptor” 2-ádico que aparece cuando 2 es inerte está ausente en  $\Delta = -4$ .*

*Observación 6.7* (Lectura del factor racional en el caso 2-inerte). En discriminantes con 2 inerte, el Teorema 6.4 fija un factor racional explícito en función de  $m = v_2(R)$ . En particular, para  $R$  impar es exactamente  $2/3$ . Cuando se adopta la convención alternativa  $R = 2r$  (ver Theorem 1.1), el caso base cambia porque  $v_2(R) = v_2(2r) = v_2(r) + 1$ .

## 7 Modelo global y baseline canónico: por qué aparece $\zeta$ y por qué aparece $e^{-\gamma}$

### 7.1 La conjetura global en forma canónica

**Conjetura 7.1** (Ley global (criba de dimensión 1 con factor inercial)). *Para cada  $\Delta < 0$  fundamental existe una constante  $C_\infty(\Delta) > 0$  tal que*

$$N_\Delta(R) \sim \frac{C_\infty(\Delta) H_\Delta(R) R}{\log R} \quad (R \rightarrow \infty).$$

Equivalentemente:

$$C_{\sigma,\Delta}(R) = \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta(R) R} \longrightarrow C_\infty(\Delta).$$

*Observación 7.2* (Input necesario: nivel de distribución). Para convertir esta conjetura en teorema (vía criba asintótica), no basta con las densidades locales. Se requiere probar un resultado de “nivel de distribución” para la secuencia  $M_R(c) = R^2 - c^2$ : demostrar que el término de error en el conteo de soluciones módulo  $d$  es controlable en promedio para  $d$  hasta  $R^\theta$  con algún  $\theta > 0$  (idealmente  $\theta$  grande). Sin este input global analítico, las densidades  $p$ -ádicas sólo describen la estructura local, no la distribución asintótica del conteo.

### 7.2 La identidad madre: $\zeta_K = \zeta L$

El campo cuadrático  $K$  tiene zeta de Dedekind  $\zeta_K(s)$ . Para extensiones cuadráticas:

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi_\Delta).$$

Esta identidad codifica splitting primo a primo y explica por qué el término natural del campo es  $L(1, \chi_\Delta)$ : como  $\zeta(s) \sim 1/(s-1)$  y  $L(s, \chi_\Delta)$  es holomorfa y no nula en  $s = 1$  para  $\Delta < 0$ ,

$$\text{Res}_{s=1} \zeta_K(s) = L(1, \chi_\Delta).$$

### 7.3 El baseline arquimediano y la fórmula de clase

**Teorema 7.3** (Baseline canónico: residuo de  $\zeta_K$  y fórmula de clase). *Sea  $\Delta < 0$  fundamental y  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ . Definimos*

$$C_{\text{base}}(\Delta) := 2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta) = 2e^{-\gamma} \text{Res}_{s=1} \zeta_K(s).$$

Si  $\Delta$  es de Heegner ( $h(\Delta) = 1$ ), entonces

$$C_{\text{base}}(\Delta) = \frac{4\pi e^{-\gamma}}{w(\Delta)\sqrt{|\Delta|}}.$$

*Demostración.* La primera igualdad se sigue de  $\text{Res}_{s=1} \zeta_K(s) = L(1, \chi_\Delta)$ . La fórmula analítica del número de clases para campos cuadráticos imaginarios da

$$L(1, \chi_\Delta) = \frac{2\pi h(\Delta)}{w(\Delta)\sqrt{|\Delta|}}.$$

Para Heegner,  $h(\Delta) = 1$ . □

#### 7.4 Por qué aparece $e^{-\gamma}$ (y por qué esto es inevitable)

La constante  $e^{-\gamma}$  aparece como renormalización natural de la divergencia armónica  $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$ : el teorema de Mertens implica

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log x}.$$

Toda criba de dimensión 1 produce un factor  $e^{-\gamma}$  al convertir “producto sobre primos” en “escala  $1/\log$ ”. En nuestro caso, la parte del campo se canaliza por  $L(1, \chi_\Delta)$ ; el resto pertenece a la geometría aritmética de la familia  $M_R(c)$ .

#### 7.5 Descomposición canónica

La forma natural de la constante final es

$$C_\infty(\Delta) = \underbrace{2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta)}_{C_{\text{base}}(\Delta)} \times \underbrace{\kappa_2(\Delta) \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta)}_{\mathfrak{S}_\Delta}.$$

Equivalentemente,

$$\mathfrak{S}_\Delta = \kappa_2(\Delta) \mathfrak{S}_{\Delta, \text{odd}}, \quad \mathfrak{S}_{\Delta, \text{odd}} := \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta).$$

Formalmente, los factores  $\kappa_p(\Delta)$  se definen como límites de densidades locales normalizadas por el cociente de primer orden

$$(1 - 1/p)(1 - \chi_\Delta(p)/p)^{-1},$$

de modo que la contribución residual empieza en orden  $p^{-2}$ :

$$\kappa_p(\Delta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}/p^k \mathbb{Z}}(M_R(c) \in N(O_{K,p}))}{(1 - 1/p)(1 - \chi_\Delta(p)/p)^{-1}}.$$

Este límite estabiliza en cuanto  $p^k$  supera la ramificación y la capa crítica (que es  $m = 0$  para  $\mathfrak{S}_\Delta$ ). En Section 11 mostramos que, con esta normalización, el producto infinito queda absolutamente convergente. Si definimos la parte impar

$$\mathfrak{S}_{\Delta, \text{odd}} := \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta),$$

entonces  $\mathfrak{S}_\Delta = \kappa_2(\Delta) \mathfrak{S}_{\Delta, \text{odd}}$  (cuando  $\Delta$  tiene 2 inerte o ramificado). donde  $\kappa_p(\Delta)$  es un factor local (serie singular) capturando la interacción específica del evento “ $M_R(c)$  es norma” con la estructura  $p$ -ádica del polinomio y con el tipo del primo (inerte/split/ramificado).

## 8 Estructura Euleriana: aparición forzada de $\zeta$ , $L$ y expansión a orden $p^{-2}$

### 8.1 Factores locales $\kappa_p(\Delta)$ : definición operacional

En este trabajo distinguimos dos niveles:

- *Filtro inerte de primer orden*: para primos inertes (incluido  $p = 2$  cuando es inerte), la condición local “ $M_R(c)$  es norma” reduce a una restricción explícita sobre  $v_p(M_R(c))$  (paridad), cuya densidad es  $\sigma_{p,\Delta}^{(m)}$ .
- *Serie singular fina*: incluso si todas las densidades marginales  $\sigma_{p,\Delta}^{(0)}$  están dadas, los eventos locales no son independientes porque  $M_R(c)$  tiene forma cuadrática rígida; esto introduce un producto convergente de correcciones de orden  $p^{-2}$ .

Para fijar notación, definimos *heurísticamente* un factor local de primer orden como el límite (o valor base):

$$\kappa_p^{(0)}(\Delta) := \begin{cases} \sigma_{p,\Delta}^{(0)}, & p \text{ inerte (incl. } p = 2 \text{ si aplica),} \\ 1, & p \text{ split,} \\ \kappa_p^{\text{ram}}(\Delta), & p \mid \Delta \text{ (ramificado).} \end{cases}$$

Para  $p \geq 3$  inerte, el Teorema 5.3 da  $\kappa_p^{(0)}(\Delta) = (p-1)/(p+1)$ . Para  $p = 2$  inerte, el Teorema 6.4 da  $\kappa_2^{(0)}(\Delta) = 2/3$ . Para la teoría completa,  $\kappa_p$  sería la densidad del evento “ $M_R(c)$  es localmente norma” normalizada por el factor de criba standard. Los ramificados son finitos y su contribución se absorbe en un factor finito.

**Lema 8.1** (Renormalización correcta y convergencia de la parte singular). *Sea  $\chi = \chi_\Delta$  el carácter de Kronecker. Para todo primo impar  $p \nmid \Delta$  definimos el factor de primer orden*

$$\kappa_p^{(0)}(\Delta) := \begin{cases} 1, & \chi(p) = +1 \text{ (split),} \\ \sigma_{p,\Delta}^{(0)} = \frac{p-1}{p+1}, & \chi(p) = -1 \text{ (inerte).} \end{cases}$$

Entonces vale la identidad exacta

$$\kappa_p^{(0)}(\Delta) = \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}} \quad (p \geq 3, p \nmid \Delta).$$

En particular, el producto impar truncado

$$P_\Delta^{\text{odd}}(x) := \prod_{3 \leq p \leq x} \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}}$$

incorpora exactamente el primer orden de todos los primos impares no ramificados; toda discrepancia restante en la serie singular proviene únicamente del conjunto finito  $p \mid 2\Delta$  y de correcciones finas de orden  $\geq p^{-2}$ .

*Demostración.* Para  $p \nmid \Delta$  tenemos  $\chi(p) = \pm 1$  y por cálculo directo: si  $\chi(p) = +1$  entonces  $\frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p}} = 1$ ; si  $\chi(p) = -1$  entonces

$$\frac{1 - \frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{p-1}{p+1} = \sigma_{p,\Delta}^{(0)}.$$

Esto prueba la identidad. Como el conjunto de primos  $p \mid 2\Delta$  es finito, sus factores contribuyen un multiplicador finito. Las correcciones verdaderamente “locales finas” empiezan en orden  $p^{-2}$  (véase (8.3) y el Teorema 11.1), por lo que el producto residual converge absolutamente.  $\square$

## 8.2 Una identidad de Euler que selecciona exactamente a los inertes

Sea  $\chi = \chi_\Delta$  el carácter cuadrático de Kronecker. Para  $p \nmid \Delta$  tenemos  $\chi(p) = \pm 1$ . Obsérvese que para  $p \mid \Delta$  se cumple la identidad exacta

$$\frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}} = \begin{cases} 1, & \chi(p) = +1 \text{ (split)}, \\ \frac{p-1}{p+1}, & \chi(p) = -1 \text{ (inerte)}. \end{cases} \quad (8.1)$$

Es decir: para primos impares (donde la identidad es exacta con la densidad local), el cociente  $(1 - 1/p)/(1 - \chi(p)/p)$  no ve a los split y multiplica exactamente el factor  $(p-1)/(p+1)$  sobre los inertes.

*Observación 8.2* (Advertencia sobre el lugar 2). Si  $p = 2$  es inerte, la fórmula (8.1) daría  $\frac{1/2}{1+1/2} = 1/3$ , mientras que la densidad local correcta es  $\sigma_{2,\Delta}^{(0)} = 2/3$  (Teorema 6.4). Por esta razón, la identidad Euleriana debe restringirse a la parte impar, dejando el lugar 2 como un factor separado (tratado en el capítulo 2-ádico).

## 8.3 Producto truncado y corrección ramificada (arreglo canónico)

Para evitar ambigüedades con  $p \mid \Delta$  y separar la anomalía en  $p = 2$ , definimos el producto **ímpar**:

$$P_\Delta^{\text{odd}}(x) := \prod_{3 \leq p \leq x} \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi_\Delta(p)}{p}}.$$

Cuando  $p \mid \Delta$  ( $p \geq 3$ ) se tiene  $\chi_\Delta(p) = 0$  y el factor correspondiente es simplemente  $(1 - 1/p)$ . Esta definición captura la “física” de todos los primos impares. El factor 2-ádico se inserta explícitamente a posteriori.

## 8.4 Aparición inevitable de $e^{-\gamma}$ y del residuo $L(1, \chi_\Delta)$

Usando productos de Euler,

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{\chi_\Delta(p)}{p}\right)^{-1} \longrightarrow L(1, \chi_\Delta) \quad (x \rightarrow \infty),$$

mientras que por Mertens

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log x}.$$

Combinando, se obtiene el límite canónico (sin factores finitos extra):

$$P_\Delta(x) := \prod_{p \leq x} \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi_\Delta(p)}{p}}, \quad P_\Delta^{\text{odd}}(x) := \prod_{3 \leq p \leq x} \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi_\Delta(p)}{p}}.$$

Entonces

$$P_\Delta(x) = P_\Delta^{\text{odd}}(x) \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{\chi_\Delta(2)}{2}} = P_\Delta^{\text{odd}}(x) \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\chi_\Delta(2)}{2}}.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \log x \cdot P_\Delta(x) = e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta).} \quad (8.2)$$

Este es exactamente el mecanismo por el cual, en dimensión 1, el renormalizador  $e^{-\gamma}$  es forzado, y el campo entra únicamente vía  $L(1, \chi_\Delta)$  (equivalentemente, vía  $\text{Res}_{s=1} \zeta_K(s)$ ).

## 8.5 Expansión logarítmica: por qué emergen $\sum \chi(p)/p^2$ y valores $L(2m, \chi)$

La identidad (8.1) también permite una expansión uniforme. Para  $p \nmid \Delta$ ,

$$\log \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}} = \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) = - \sum_{k \geq 1} \frac{1 - \chi(p)^k}{k p^k}.$$

Como  $\chi(p)^2 = 1$  para  $p \nmid \Delta$ , se tiene  $1 - \chi(p)^k = 0$  si  $k$  es par y  $1 - \chi(p)$  si  $k$  es impar. Luego

$$\log \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}} = -(1 - \chi(p)) \sum_{j \geq 0} \frac{1}{(2j+1)p^{2j+1}} = -\frac{1 - \chi(p)}{p} + O\left(\frac{1}{p^3}\right). \quad (8.3)$$

Esto explica el coeficiente “armónico” unificado:

$$\alpha(\chi(p)) = -(1 - \chi(p)), \quad \text{es decir: } \alpha = 0 \text{ en split, } \alpha = -2 \text{ en inerte, } \alpha = -1 \text{ en ramificado.}$$

Al sustraer el término principal  $\frac{1 - \chi(p)}{p}$ , el resto es  $O(p^{-3})$  y por tanto absolutamente sumable. Esto permite definir una constante renormalizada *absolutamente convergente*:

$$\mathcal{M}_\Delta := \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}} \exp\left(\frac{1 - \chi(p)}{p}\right), \quad \log \mathcal{M}_\Delta = \sum_p O(p^{-3}).$$

La cota anterior se entiende salvo un conjunto finito de primos, donde la corrección puede escribirse como  $O(p^{-2})$ . En particular, los términos de orden  $p^{-2}$  que aparecen cuando se estudian correcciones más finas se expresan naturalmente en términos de productos convergentes en  $s \geq 2$ :

$$\frac{\zeta(2)}{L(2, \chi_\Delta)} = \prod_p \frac{1 - \frac{\chi_\Delta(p)}{p^2}}{1 - \frac{1}{p^2}}, \quad \log \frac{\zeta(2)}{L(2, \chi_\Delta)} = \sum_p \frac{1 - \chi_\Delta(p)}{p^2} + O\left(\sum_p \frac{1}{p^4}\right).$$

*Observación 8.3* (Lectura conceptual). (8.2) explica el baseline  $e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta)$  (y por ende  $2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta)$ ) en la constante final). La identidad con  $\zeta(2)/L(2, \chi_\Delta)$  explica por qué las correcciones finas de la serie singular “huelen” a valores de  $\zeta$  y  $L$  en enteros: las correcciones verdaderamente locales empiezan en orden  $p^{-2}$ .

## 9 Evidencia computacional: cómo se estima $C_\infty(\Delta)$ y por qué la cola manda

### 9.1 Qué se computa

Para cada  $R$  en una malla (en los experimentos principales:  $R = 101 + 20k$ , i.e.  $R \equiv 1 \pmod{20}$ ), por lo que  $R$  es impar y  $v_5(R) = 0$ ; los CSV conservan el sufijo histórico “step10”) se computa:

$$N_\Delta(R), \quad H_\Delta(R), \quad C_{\sigma, \Delta}(R) = \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta(R) R}.$$

La generación primaria de  $N_\Delta(R)$  queda automatizada en un script dedicado, con CLI reproducible y semilla explícita para los modos estocásticos. Esta malla principal fija además  $v_2(R) = 0$ , por lo que no explora estratos 2-ádicos ni estratos con  $v_5(R) > 0$ ; esos casos requieren mallas complementarias. Para ello, añadimos una malla complementaria por estratos exactos

$$(v_2(R), v_5(R)) \in \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (0, 2)\},$$

parametrizada como  $R = 2^\alpha 5^\beta q$  con  $(q, 10) = 1$ . En el caso de Heegner ( $h(\Delta) = 1$ ) es particularmente eficiente usar el principio local-global: un racional  $x \in \mathbb{Q}^\times$  es norma global en  $K^\times$  si y solo si es norma local en todo lugar (Proposición 2.2). En los CSV principales fijamos una convención operativa *inerte-only*: el observable se normaliza únicamente con los factores inertes (incluyendo  $p = 2$  solo si es inerte y divide a  $R$ ). Para nuestro conteo, esto se traduce en:

- Para todo primo impar  $p \nmid \Delta$ , el criterio local se reduce a la *paridad*: si  $p$  es inerte entonces es necesario y suficiente que  $v_p(n)$  sea par; si  $p$  es split no hay obstrucción.
- Los primos ramificados se dejan fuera de  $H_\Delta(R)$  en esta convención base y se estudian por separado mediante el refinamiento  $H_\Delta^*$  (ver Section 9.4).

Usamos factorización directa con precomputación de primos (criba de Eratóstenes modificada) para verificar esta paridad eficientemente.

## 9.2 Por qué el promedio no es el límite

En problemas de criba es típico que el acercamiento al límite tenga correcciones del tipo  $1/\log R$ . Así, un promedio sobre todo el rango mezcla regímenes finitos con el régimen asintótico y sesga hacia arriba/abajo. Por eso se usa un ajuste sobre la cola.

## 9.3 Ajuste de cola (ansatz de relajación)

Usamos el modelo empírico estable:

$$C_{\sigma,\Delta}(R) \approx C_\infty(\Delta) + \frac{a}{\log R} \quad (R \text{ grande}),$$

y estimamos  $C_\infty(\Delta)$  por regresión lineal de  $C_{\sigma,\Delta}(R)$  contra  $1/\log R$  restringiendo a  $R \geq 10^6$  (y opcionalmente bindeando en cuantiles de  $\log R$  para estabilizar varianza). Como diagnóstico de sesgo de truncación/modelo, también ajustamos

$$C_{\sigma,\Delta}(R) \approx C_\infty(\Delta) + \frac{a}{\log R} + \frac{b}{\log^2 R}$$

en la misma cola y en la rejilla  $R_{\text{tail}} \in \{10^6, 2 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6\}$ . Así, reportamos dos capas de incertidumbre para  $C_\infty$ :

$$\text{EE}_{\text{WLS}} \quad (\text{in-model}), \quad \text{EE}_{\text{sist}} := \max_{R_{\text{tail}}} |C_\infty(R_{\text{tail}}) - C_\infty(10^6)|.$$

En toda la familia se observa  $\text{EE}_{\text{sist}} > \text{EE}_{\text{WLS}}$  (entre 3,8× y 19,9×), pero además domina el término de modelo:  $\text{EE}_{\text{full}}/\sqrt{\text{EE}_{\text{WLS}}^2 + \text{EE}_{\text{sist}}^2} \in [7,65, 16,88]$ , lo que confirma que la metroología de  $C_\infty$  debe separar incertidumbre estadística in-model y sensibilidad sistemática de cola/modelo.

## 9.4 Refinamiento ramificado en cola: $H_\Delta^*$

Sobre los mismos CSV aplicamos el post-procesado

$$H_\Delta^*(R) = H_\Delta(R) \prod_{\substack{p|\Delta \\ p \text{ impar}}} p^{-v_p(R)}, \quad C_{\sigma,\Delta}^*(R) := \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta^*(R) R}.$$

Equivalentemente:

$$C_{\sigma,\Delta}^*(R) = C_{\sigma,\Delta}(R) \prod_{\substack{p|\Delta \\ p \text{ impar}}} p^{v_p(R)}.$$

**Cuadro 1.** Heegner: baseline canónico  $C_{\text{base}}(\Delta)$  y ajuste de cola  $C_\infty(\Delta)$  usando  $C_{\sigma,\Delta}(R) \approx C_\infty + a/\log R$  en  $R \geq 10^6$  (200 bins por cuantiles). Se reporta EE<sub>WLS</sub> (incertidumbre in-model) del WLS en bins (pesos por tamaño de bin).

$\Delta$	$C_{\text{base}}$	$C_\infty$	EE <sub>WLS</sub> ( $C_\infty$ )	$a$	EE <sub>WLS</sub> ( $a$ )	$\mathfrak{S}_\Delta$
-163	0,276315	0,156052	0,000063	-0,010000	0,001000	0,564763
-67	0,430984	0,241297	0,000107	0,272000	0,002000	0,559875
-43	0,537977	0,303469	0,000140	0,400000	0,002000	0,564093
-19	0,809322	0,473185	0,000208	0,590000	0,003000	0,584669
-11	1,063658	0,650708	0,000281	0,666000	0,004000	0,611765
-8	1,247249	0,692068	0,000070	0,819000	0,001000	0,554875
-7	1,333366	0,431485	0,000186	0,513000	0,003000	0,323606
-4	0,881938	0,735033	0,000064	0,775000	0,001000	0,833428
-3	0,678917	0,566005	0,000065	0,563000	0,001000	0,833689

**Cuadro 2.** Descomposición de incertidumbre de cola para  $C_\infty(\Delta)$ . Modelo de referencia:  $C_\infty + a/\log R$  en  $R_{\text{tail}} = 10^6$ . Se reporta EE<sub>WLS</sub>, la sensibilidad de truncación EE<sub>sist</sub> en  $R_{\text{tail}} \in \{10^6, 2 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6\}$ , y el desplazamiento de modelo  $|\Delta_{\text{model}}| := |C_\infty^{(2)} - C_\infty^{(1)}|$  entre  $C_\infty + a/\log R + b/\log^2 R$  y  $C_\infty + a/\log R$  en  $R_{\text{tail}} = 10^6$ . Además, EE<sub>full</sub> :=  $\sqrt{\text{EE}_{\text{WLS}}^2 + \text{EE}_{\text{sist}}^2 + |\Delta_{\text{model}}|^2}$ .

$\Delta$	$C_\infty^{(1)}$	EE <sub>WLS</sub>	EE <sub>sist</sub>	$ \Delta_{\text{model}} $	EE <sub>full</sub>
-163	0,156052	0,000063	0,000530	0,004047	0,004082
-67	0,241297	0,000107	0,000401	0,006613	0,006626
-43	0,303469	0,000140	0,001303	0,022085	0,022124
-19	0,473185	0,000208	0,001055	0,017593	0,017626
-11	0,650708	0,000281	0,001388	0,022101	0,022146
-8	0,692068	0,000070	0,001398	0,019602	0,019652
-7	0,431485	0,000186	0,000786	0,011712	0,011740
-4	0,735032	0,000064	0,001259	0,019624	0,019665
-3	0,566005	0,000065	0,001074	0,016527	0,016562

**Cuadro 3.** Efecto del refinamiento ramificado en la cola  $R \in [10^6, 10^7]$ .

$\Delta$	SD( $C_{\sigma,\Delta}$ )	SD( $C_{\sigma,\Delta}^*$ )	ratio
-3	0,279000	0,072000	0,259000
-7	0,159000	0,045000	0,283000
-11	0,196000	0,058000	0,296000
-43	0,049000	0,021000	0,423000

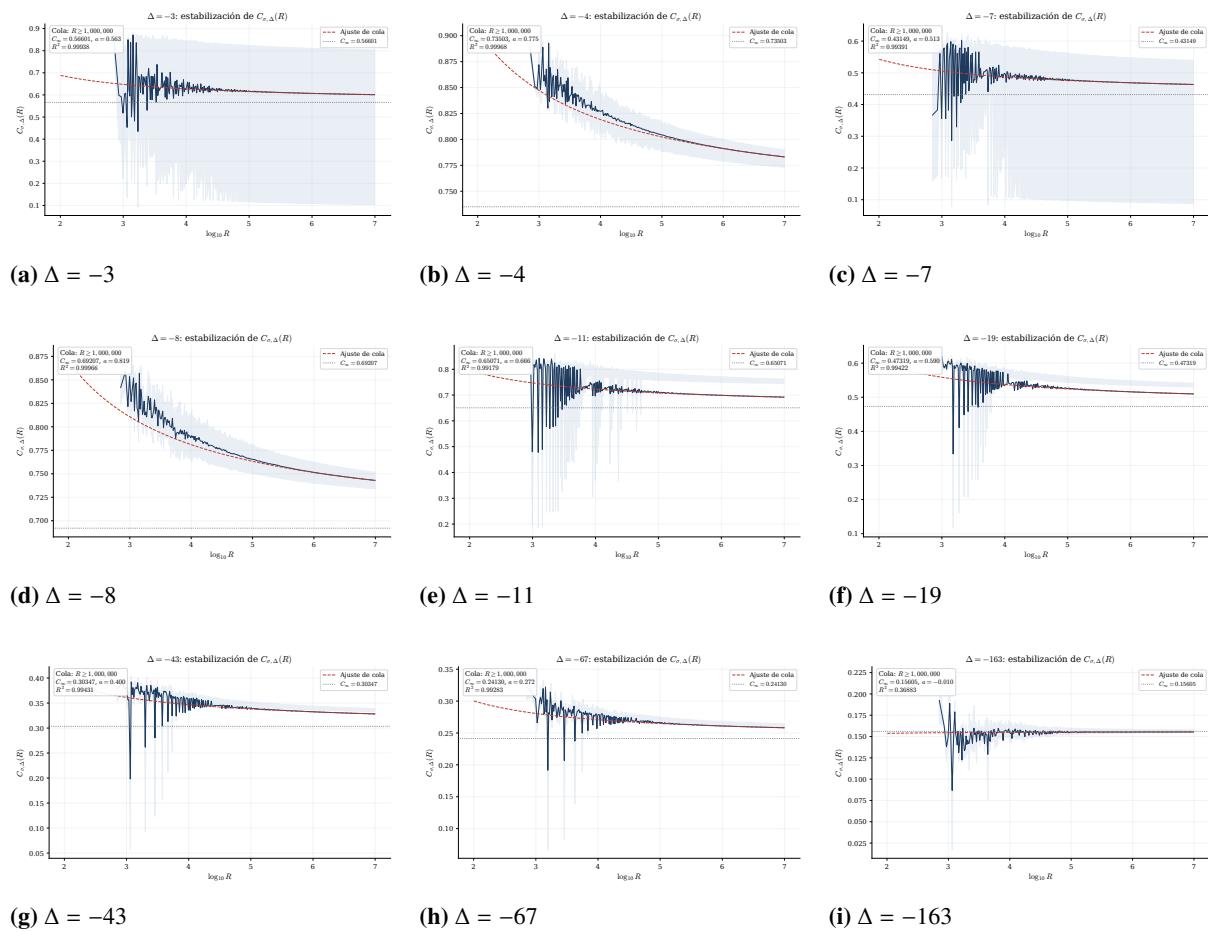
La reducción de varianza en la cola es sustancial: Este comportamiento confirma que separar explícitamente el bloque ramificado mejora la estabilidad estadística del ajuste de cola.

*Observación 9.1.* Los casos  $\Delta = -4, -8$  (pares) y  $\Delta = -163$  exhiben estabilidad extrema en la cola, mientras que  $\Delta = -3$  presenta varianza residual alta. Esto es consistente con el hecho de que en  $\Delta = -3$  interviene además el primo ramificado 3 (Apéndice Section B.5) y con la dominancia de primos pequeños en la serie singular.

*Observación 9.2 (Lectura inmediata).* Para  $\Delta = -43, -67, -163$  (donde 2 es inerte) la relación  $\mathfrak{S}_\Delta \approx 0,56$  se puede interpretar como producto de un factor 2-ádico explícito (Teorema 6.4) y un factor impar  $\mathfrak{S}_{\Delta, \text{odd}}$  (ver Section 11 y Section 8).

## 9.5 Estabilización visual de $C_{\sigma, \Delta}(R)$

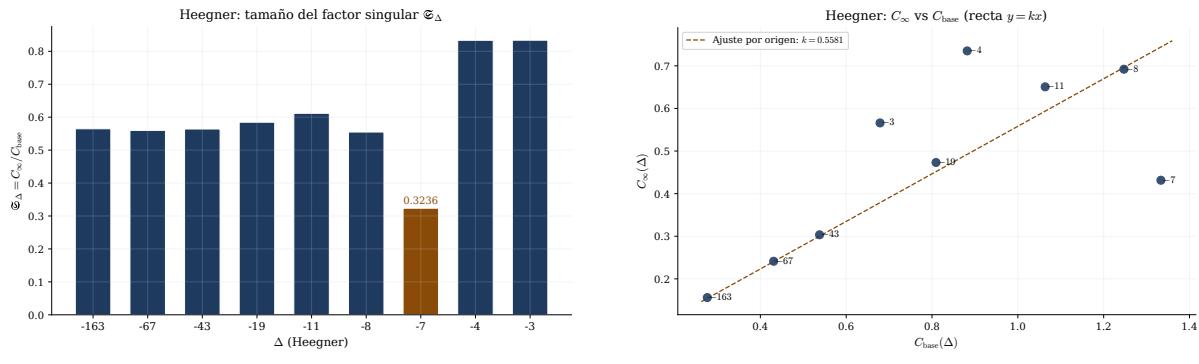
La Figure 5 muestra la convergencia de  $C_{\sigma, \Delta}(R)$  hacia el límite  $C_\infty(\Delta)$  para los nueve discriminantes de Heegner. La línea roja corresponde al ajuste de cola  $C_{\sigma, \Delta}(R) \approx C_\infty(\Delta) + a/\log R$  en la región  $R \geq 10^6$ .



**Figura 5.** Estabilización de  $C_{\sigma, \Delta}(R)$  vs  $R$  (escala log) para los nueve discriminantes de Heegner. Línea roja: ajuste de cola  $C_{\sigma, \Delta}(R) \approx C_\infty(\Delta) + a/\log R$  para  $R \geq 10^6$ .

## 9.6 Comparativa Heegner: el factor singular

La Figure 6 muestra la relación entre la constante empírica  $C_\infty(\Delta)$  y el baseline teórico  $C_{\text{base}}(\Delta)$ . El cociente  $\mathfrak{S}_\Delta = C_\infty/C_{\text{base}}$  captura el factor singular de la familia.



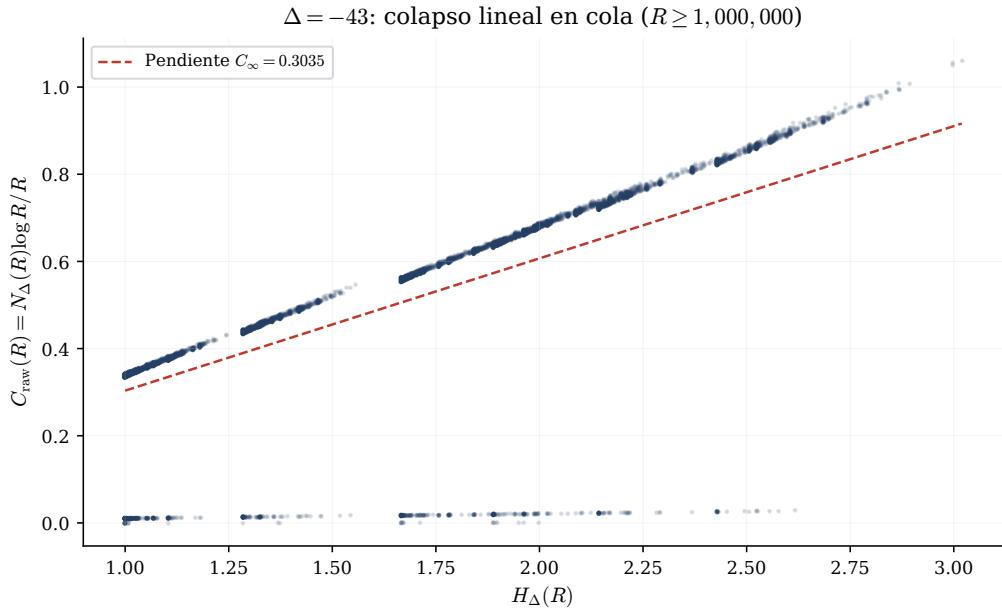
**Figura 6.** Comparativa Heegner: (a) barra de  $\Sigma_{\Delta}$  mostrando el outlier  $\Delta = -7$ ; (b) relación entre constante empírica y baseline teórica.

### 9.7 Colapso lineal: $C_{\text{raw}}(R)$ vs $H_{\Delta}(R)$

Si  $C_{\sigma, \Delta}(R)$  se estabiliza hacia  $C_{\infty}(\Delta)$ , entonces por la ley global (Conjetura 7.1, o Teorema 12.1 bajo hipótesis analítica):

$$C_{\text{raw}}(R) = \frac{N_{\Delta}(R) \log R}{R} \approx C_{\infty}(\Delta) H_{\Delta}(R).$$

La Figure 7 confirma este colapso lineal: al graficar  $C_{\text{raw}}$  contra  $H_{\Delta}$ , la nube se alinea, demostrando que  $H_{\Delta}$  no es un “fit hack” sino estructura.



**Figura 7.** Colapso lineal:  $C_{\text{raw}}(R)$  vs  $H_{\Delta}(R)$  para  $\Delta = -43$ . El alineamiento demuestra que  $H_{\Delta}$  captura la oscilación determinista.

## 10 Ejemplo de control: el outlier $\Delta = -7$ explicado por inertes pequeños

**Ejemplo 10.1** (Producto de pequeños inertes y predicción de primer orden). Para  $\Delta = -7$ ,

$$C_{\text{base}}(-7) = \frac{4\pi e^{-\gamma}}{2\sqrt{7}} \approx 1,333366.$$

En  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ , los primos 3 y 5 son inertes. Si restringimos a  $R$  coprimo con 15 (de modo que  $v_3(R) = v_5(R) = 0$ ), entonces el Teorema 5.3 da

$$\sigma_3^{(0)} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_5^{(0)} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3}.$$

El producto de primer orden es

$$\sigma_3^{(0)} \sigma_5^{(0)} = \frac{1}{3},$$

y por tanto la predicción inmediata es

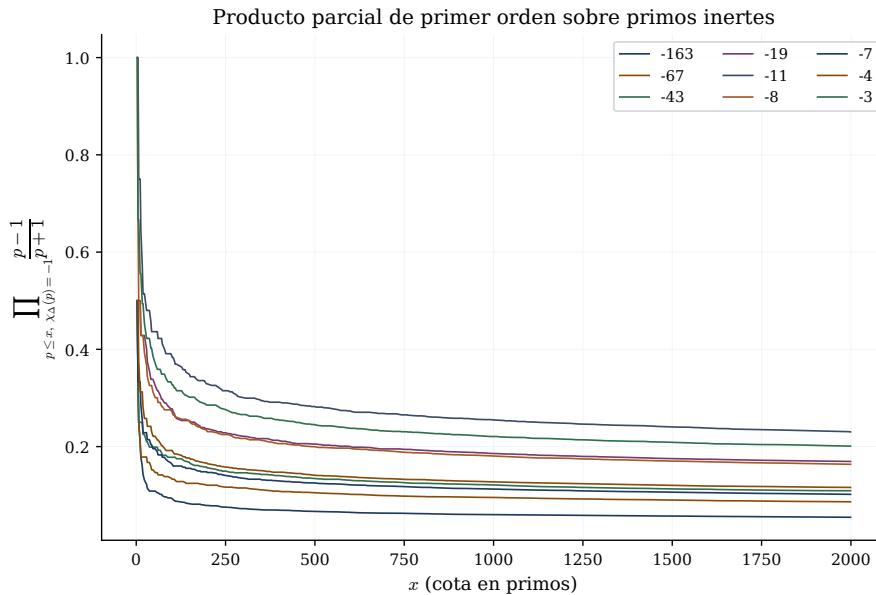
$$C_\infty(-7) \approx C_{\text{base}}(-7) \cdot \frac{1}{3} \approx 0,444.$$

Comparado con  $C_\infty(-7) \approx 0,431$  (tabla), la diferencia restante es compatible con correcciones de primos mayores y efectos finitos: lo crucial es que el “desplome” se predice por estructura local, no por accidente.

La Figure 8 muestra el producto parcial de primer orden sobre primos inertes:

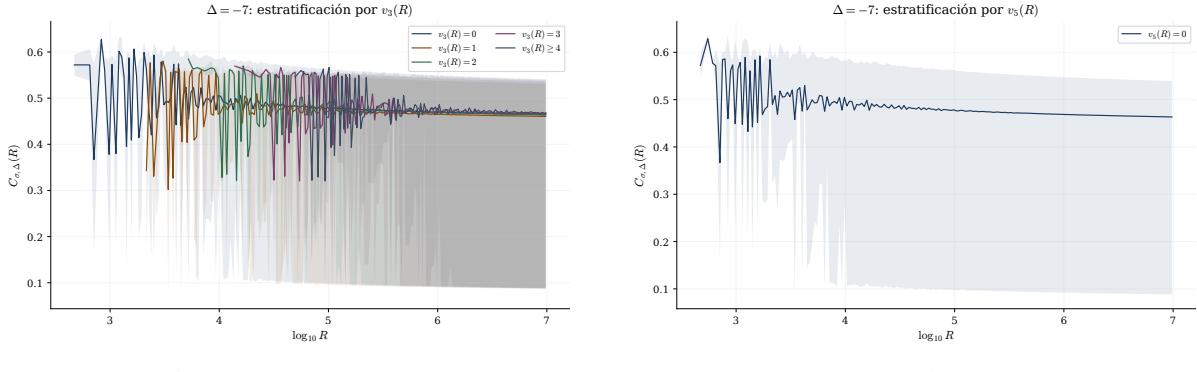
$$\prod_{\substack{p \leq x \\ \chi_\Delta(p) = -1}} \frac{p-1}{p+1}.$$

Para  $\Delta = -7$ , este producto cae rápidamente debido a los pocos inertes pequeños ( $p = 3, 5$ ), explicando el outlier.



**Figura 8.** Producto parcial de primer orden sobre primos inertes para los nueve discriminantes de Heegner. La caída de  $\Delta = -7$  se explica por pocos inertes pequeños ( $p = 3, 5$ ).

Además, la Figure 9 muestra la dependencia respecto de  $v_3(R)$ . En la malla principal ( $R \equiv 1 \pmod{20}$ ), se tiene  $v_5(R) = 0$  para todo  $R$ , de modo que el panel de  $p = 5$  funciona como control (sin estratificación adicional). Esta dependencia en  $v_3(R)$  es exactamente la que captura el factor inercial  $H_\Delta(R)$ .



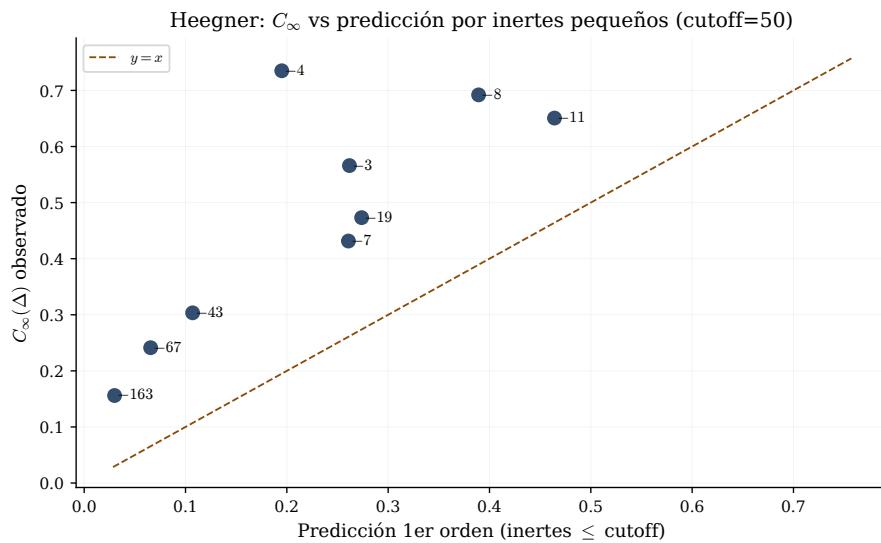
**Figura 9.** Dependencia del observable  $C_{\sigma,-7}(R)$  respecto de la valuación de  $R$  para inertes pequeños. Izquierda: estratificación efectiva por  $v_3(R)$ . Derecha: control para  $p = 5$  en la malla  $R \equiv 1$  (mód 20) (no hay estratos con  $v_5(R) > 0$ ).

### 10.1 Predicción de primer orden por primos inertes pequeños

La observación clave del Ejemplo 10.1 se puede cuantificar sistemáticamente: para cada discriminante de Heegner, usamos solo los primos inertes  $p \leq 50$  para construir una predicción de primer orden:

$$C_{\infty}^{\text{pred}}(\Delta) := C_{\text{base}}(\Delta) \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq 50 \\ \chi_{\Delta}(p)=-1}} \frac{p-1}{p+1}.$$

La Figure 10 compara esta predicción con los valores observados  $C_{\infty}(\Delta)$  obtenidos del ajuste de cola. El patrón es monótono (predicciones mayores tienden a corresponder a observaciones mayores), pero con subestimación sistemática de escala: el primer orden con inertes pequeños captura parte de la variación relativa entre discriminantes, mientras que la normalización completa requiere factores adicionales (incluyendo el capítulo 2-ádico y correcciones finas de segundo orden  $O(p^{-2})$ ).



**Figura 10.** Comparación entre la predicción de primer orden  $C_{\infty}^{\text{pred}}$  (usando solo primos inertes  $p \leq 50$ ) y el valor observado  $C_{\infty}(\Delta)$  para los nueve discriminantes de Heegner. La nube conserva orden relativo, pero evidencia subestimación de escala cuando se usa solo primer orden.

## 11 Regularización tipo Mertens: por qué la serie singular debe converger

**Teorema 11.1** (Renormalización universal con coeficientes variables). *Sea  $(a_p)_p$  una familia indexada por primos tal que*

$$a_p = \frac{\alpha_p}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad (p \rightarrow \infty),$$

*con  $(\alpha_p)_p$  una sucesión complejamente acotada. Entonces, para  $p$  suficientemente grande (asumiendo  $|a_p| \leq 1/2$  y  $1 + a_p \neq 0$ ), el producto renormalizado*

$$\prod_p (1 + a_p) \exp(-\alpha_p/p)$$

*converge absolutamente (salvo anulación de un número finito de factores) porque*

$$\log((1 + a_p)e^{-\alpha_p/p}) = O(p^{-2}).$$

*Demostración.* Para  $|x|$  pequeño,  $\log(1 + x) = x + O(x^2)$ . Como  $a_p = O(1/p)$ , para  $p$  grande:

$$\log((1 + a_p)e^{-\alpha_p/p}) = \log(1 + a_p) - \alpha_p/p = \left(\alpha_p/p + O(p^{-2})\right) - \alpha_p/p + O(p^{-2}) = O(p^{-2}).$$

Como  $\sum_p p^{-2} < \infty$ , la suma de logaritmos converge absolutamente.  $\square$

**Corolario 11.2** (Convergencia absoluta de la serie singular normalizada). *Con la normalización de Section 8, supongamos que para  $p$  impar grande*

$$\mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}}(M_R(c) \in N(O_{K,p})) = (1 - 1/p)(1 - \chi_\Delta(p)/p)^{-1}(1 + b_p(\Delta)),$$

*con  $b_p(\Delta) = O(p^{-2})$  uniforme en  $p$  (para  $k$  suficientemente grande). Entonces*

$$\kappa_p(\Delta) = 1 + b_p(\Delta), \quad \log \kappa_p(\Delta) = O(p^{-2}),$$

*y en consecuencia el producto*

$$\mathfrak{S}_\Delta = \kappa_2(\Delta) \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta)$$

*converge absolutamente.*

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema 11.1 con  $\alpha_p = 0$  y  $a_p = b_p(\Delta)$ . Entonces  $\log(1 + b_p(\Delta)) = O(p^{-2})$ , y como  $\sum_p p^{-2} < \infty$  se obtiene convergencia absoluta de la suma de logaritmos, luego del producto.  $\square$

*Observación 11.3* (Aplicación a  $\mathfrak{S}_\Delta$ ). La parte de primer orden  $(1 - 1/p)(1 - \chi_\Delta(p)/p)^{-1}$  ya está absorbida en el baseline  $2e^{-\gamma}L(1, \chi_\Delta)$ ; la serie singular  $\mathfrak{S}_\Delta$  recoge únicamente la corrección fina residual.

## 12 Discusión final: manuscrito blindado y siguiente paso hacia un teorema global

### 12.1 Lo que ya está “cerrado”

El corazón del paper es local y está completamente sellado:

- Para  $p \geq 3$  (inerte), la densidad local es exactamente  $\sigma_p^{(m)} = 1 - \frac{2}{p^m(p+1)}$  (Teorema 5.3).

- Para  $p = 2$  inerte, la densidad es  $\sigma_2^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}$  (Teorema 6.4), y en particular para  $R$  impar aparece el racional fijo  $2/3$ .
- El baseline canónico del campo es  $C_{\text{base}}(\Delta) = 2e^{-\gamma}L(1, \chi_\Delta)$  (Teorema 7.3), y en Heegner se vuelve cerradamente  $\frac{4\pi e^{-\gamma}}{w(\Delta)\sqrt{|\Delta|}}$ .
- Los outliers se explican por productos de pequeños inertes (Ejemplo 10.1).

## 12.2 Hipótesis analítica para el Teorema Global

**Lema puente (hipótesis de distribución  $\mathcal{D}_\theta$ ).** Existe  $\theta > 0$  tal que, para todo  $A > 0$  y  $Q = R^\theta$ , se tiene uniformemente para  $q \leq Q$  y  $(a, q) = 1$ :

$$\#\{1 \leq c \leq R : M_R(c) \equiv a \pmod{q}\} = \frac{R}{q} \rho_q(a) + E(R; q, a),$$

donde

$$\rho_q(a) := \#\{x \pmod{q} : R^2 - x^2 \equiv a \pmod{q}\},$$

y además

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a, q)=1} |E(R; q, a)| \ll_A \frac{R}{(\log R)^A}.$$

Esta es exactamente la pieza analítica que no se demuestra en el manuscrito y que debe obtenerse con técnicas de criba asintótica (Selberg/ $\beta$ -criba; ver [3, 4]).

**Teorema 12.1** (Asintótica global de normas (condicional)). *Sea  $\Delta < 0$  un discriminante fundamental. Si la hipótesis  $\mathcal{D}_\theta$  anterior vale para algún  $\theta > 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que*

$$N_\Delta(R) = C_\infty(\Delta) H_\Delta(R) \frac{R}{\log R} + O\left(\frac{R}{(\log R)^{1+\delta}}\right),$$

con

$$C_\infty(\Delta) = 2e^{-\gamma}L(1, \chi_\Delta) \kappa_2(\Delta) \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta).$$

*Esquema de demostración.* La hipótesis  $\mathcal{D}_\theta$  entrega la uniformidad en progresiones requerida para cerrar una criba de dimensión 1 con ahorro en el error. Los Teoremas 5.3 y 6.4 fijan los factores locales inertes, y el Teorema 7.3 fuerza el baseline arquimediano  $2e^{-\gamma}L(1, \chi_\Delta)$ . La convergencia absoluta del producto residual se obtiene por Theorem 11.2. Con esto, el término principal queda determinado y el error hereda un ahorro logarítmico  $O(R/(\log R)^{1+\delta})$ .  $\square$

En síntesis: la estructura de la constante global está completamente determinada por el análisis local del manuscrito; el único faltante para el resultado incondicional es probar  $\mathcal{D}_\theta$ .

## A Constantes y valores de referencia

- $\gamma = 0,5772156649 \dots, e^{-\gamma} = 0,5614594836 \dots$
- En Heegner:  $w(-3) = 6$  y  $w(-4) = 4$ .
- Para  $\Delta \in \{-7, -8, -11, -19, -43, -67, -163\}$  se tiene  $w(\Delta) = 2$ .

## B Análisis local explícito en $p = 2$ para discriminantes especiales

### B.1 El lugar 2 en $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ( $\Delta = -8$ ): densidad local cerrada

En el completamiento  $K_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$  la norma es

$$N(a + b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2.$$

En particular, para unidades  $u \in \mathbb{Z}_2^\times$  se tiene la caracterización clásica:

$$u \in N(K_2^\times) \iff u \equiv 1, 3 \pmod{8}. \quad (\text{B.1})$$

**Teorema B.1** (Densidad local 2-ádica para  $\Delta = -8$ ). *Sea  $R \in \mathbb{Z}$  y  $m = v_2(R)$ . Para  $c$  distribuido uniformemente respecto a la medida de Haar en  $\mathbb{Z}_2$ , definimos*

$$\sigma_{2,-8}^{(m)} := \mathbb{P}(M_R(c) = (R - c)(R + c) \in N(K_2^\times) \cup \{0\}).$$

Entonces:

$$\sigma_{2,-8}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = 0 \text{ (} R \text{ impar)}, \\ \frac{3}{2^{m+1}}, & m \geq 1. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

En particular, en el régimen  $R$  impar, el factor local fijo es

$$\kappa_2(\Delta = -8) = \sigma_{2,-8}^{(0)} = \frac{1}{2}.$$

*Demostración.* Usaremos (B.1) y el hecho de que 2 es norma en  $K_2$  (pues  $2 = N(\sqrt{-2})$ ), de modo que la condición de ser norma depende únicamente de la clase módulo 8 de la *unidad impar* asociada a  $M_R(c)$  tras extraer su potencia máxima de 2.

Caso  $m = 0$  ( $R$  impar). Partimos según la paridad de  $c$ .

(i)  $c$  par. Escribimos  $c = 2k$ . Entonces  $M_R(c) = R^2 - 4k^2$  es impar y, módulo 8, como  $R^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ,

$$M_R(c) \equiv 1 - 4k^2 \equiv \begin{cases} 1 \pmod{8}, & k \text{ par}, \\ 5 \pmod{8}, & k \text{ impar}. \end{cases}$$

Como  $k$  es par/impar con probabilidad 1/2 bajo Haar, por (B.1) la probabilidad condicional de ser norma es 1/2. Por tanto

$$\mathbb{P}(M_R(c) \text{ norma} \mid c \text{ par}) = \frac{1}{2}.$$

(ii)  $c$  impar. Escribimos  $c = 1 + 2t$  con  $t \in \mathbb{Z}_2$  Haar-uniforme. Entonces

$$M_R(c) = (R - c)(R + c) = 4 \cdot \left(\frac{R - c}{2}\right) \left(\frac{R + c}{2}\right) =: 4ab,$$

donde  $a = (R - c)/2$  y  $b = (R + c)/2$  satisfacen  $a + b = R$  (impar), por lo que exactamente uno de  $a, b$  es par y el otro impar. Sea  $E$  el factor par entre  $\{a, b\}$  y  $O$  el factor impar. Entonces  $ab = EO$ . Como  $O$  es impar, multiplicar por  $O$  permuta las clases de unidades módulo 8, y por tanto (usando (B.1)) basta analizar la unidad impar asociada a  $E$  tras extraer su potencia de 2.

Condicionado al evento “ $E$  es el factor par”, la variable  $E$  es Haar-uniforme en  $2\mathbb{Z}_2$ , luego  $E/2$  es Haar-uniforme en  $\mathbb{Z}_2$  y su unidad impar es uniforme en  $\{1, 3, 5, 7\} \pmod{8}$ . Por tanto la probabilidad de caer en  $\{1, 3\}$  es exactamente 1/2, y obtenemos

$$\mathbb{P}(M_R(c) \text{ norma} \mid c \text{ impar}) = \frac{1}{2}.$$

Finalmente,

$$\sigma_{2,-8}^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

*Caso  $m \geq 1$  ( $R$  par).* Escribimos  $R = 2^m r$  con  $r$  impar y descomponemos por capas  $t = v_2(c)$ .

(1) Capa  $t = 0$  ( $c$  impar). Entonces  $R^2 \equiv 0 \pmod{4}$  y  $c^2 \equiv 1 \pmod{8}$ , así que  $M_R(c) = R^2 - c^2$  es impar y

$$M_R(c) \equiv R^2 - 1 \pmod{8}.$$

Si  $m = 1$ ,  $R^2 = 4r^2 \equiv 4 \pmod{8}$ , luego  $M_R(c) \equiv 3 \pmod{8}$  (éxito por (B.1)). Si  $m \geq 2$ ,  $R^2 \equiv 0 \pmod{8}$ , luego  $M_R(c) \equiv 7 \pmod{8}$  (fallo). Esta es precisamente la razón por la cual una prueba “en una sola frase” aquí es frágil: hay que separar  $m = 1$  de  $m \geq 2$ .

(2) Capas  $t \geq 1$  ( $c$  par). Escribimos  $c = 2c_1$  y observamos la identidad exacta

$$M_R(c) = R^2 - c^2 = 4((2^{m-1}r)^2 - c_1^2) = 4M_{R/2}(c_1).$$

Como 4 es norma (de hecho potencia de la norma de  $\sqrt{-2}$ ), la pertenencia de  $M_R(c)$  al conjunto de normas depende únicamente de  $M_{R/2}(c_1)$ . Además, la masa de la condición  $t \geq 1$  es  $1/2$ , y condicionada a ella,  $c_1$  es Haar-uniforme en  $\mathbb{Z}_2$ . Por tanto obtenemos la recurrencia exacta

$$\sigma_{2,-8}^{(m)} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{\{\text{éxito en } t=0\}} + \frac{1}{2} \sigma_{2,-8}^{(m-1)}.$$

Con la evaluación explícita del caso  $t = 0$  anterior, se verifica que la solución cerrada es

$$\sigma_{2,-8}^{(m)} = \frac{3}{2^{m+1}}, \quad m \geq 1,$$

y coincide con (B.2). □

## B.2 Expansión exacta vía la zeta de primos y reducción a valores de $\zeta$

**Definición B.2** (Producto impar modelo  $A_{\text{odd}}$ ). Definimos

$$A_{\text{odd}} = \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right).$$

Este producto aparece como un prototipo de “factor impar” en modelos de primer/segundo orden, y es un objeto independiente bien definido cuyo análisis espectral es completamente explícito.

Tomando logaritmos y expandiendo,

$$\log A_{\text{odd}} = \sum_{p \geq 3} \log \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right) = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{p \geq 3} \frac{1}{p^n(p+1)^n}.$$

Para reescribir  $\frac{1}{(p+1)^n}$  usamos la expansión binomial

$$\frac{1}{(p+1)^n} = p^{-n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-n} = p^{-n} \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} p^{-j},$$

válida absolutamente para  $p \geq 3$ . Sustituyendo y reordenando (justificado por convergencia absoluta),

$$\log A_{\text{odd}} = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} \sum_{p \geq 3} \frac{1}{p^{2n+j}}. \quad (\text{B.3})$$

Introduciendo la zeta de primos  $P(s) = \sum_p p^{-s}$  obtenemos

$$\sum_{p \geq 3} \frac{1}{p^s} = P(s) - 2^{-s}.$$

Así,

$$\log A_{\text{odd}} = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} (P(2n+j) - 2^{-(2n+j)}). \quad (\text{B.4})$$

Finalmente, usamos la identidad clásica (inversión de Möbius) que expresa  $P(s)$  en términos de  $\zeta$ :

$$P(s) = \sum_{m \geq 1} \frac{\mu(m)}{m} \log \zeta(ms) \quad (\Re s > 1).$$

Sustituyendo en (B.4) y exponenciando, se obtiene una factorización puramente en valores de  $\zeta$ . El término  $-2^{-s}$  aporta exactamente la constante de exclusión del primo 2, igual a  $\log(6/5)$ :

$$A_{\text{odd}} = \frac{6}{5} \prod_{k \geq 2} \zeta(k)^{-b_k}, \quad (\text{B.5})$$

donde los exponentes  $b_k$  vienen dados explícitamente por

$$b_k = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m|k}} \frac{\mu(m)}{m} a_{k/m}, \quad a_\ell := \sum_{\substack{n \geq 1, j \geq 0 \\ 2n+j=\ell}} \frac{(-1)^j}{n} \binom{n+j-1}{j}.$$

En particular, dado que  $\log \zeta(k) \sim 2^{-k}$  y  $b_k$  no crece exponencialmente rápido, la serie converge a gran velocidad, lo cual explica la utilidad numérica de (B.5).

### B.3 El lugar 2 en el caso gaussiano: $\Delta = -4$ ( $K = \mathbb{Q}(i)$ )

En esta sección cerramos el análisis 2-ádico del caso gaussiano  $K = \mathbb{Q}(i)$ , donde la norma viene dada por

$$N(a+bi) = a^2 + b^2.$$

A diferencia del caso *inerte*, en  $\mathbb{Q}(i)$  no aparece una restricción de *paridad* sobre  $v_2(\cdot)$ . Sin embargo, sí aparece una restricción fina sobre la *unidad* impar (clase módulo 4), que determina la densidad local.

#### B.3.1 Caracterización exacta de normas en $\mathbb{Z}_2[i]$

**Lema B.3** (Normas integrales en  $\mathbb{Z}_2[i]$ ). *Sea  $n \in \mathbb{Z}_2$ . Entonces  $n \in N(\mathbb{Z}_2[i])$  si y solo si  $n = 0$  o bien*

$$n = 2^k u \quad (k \geq 0, u \in \mathbb{Z}_2^\times)$$

donde la unidad impar satisface

$$u \equiv 1 \pmod{4}.$$

En particular, si  $n$  es impar, entonces

$$n \in N(\mathbb{Z}_2[i]) \iff n \equiv 1 \pmod{4}.$$

*Demostración.* (*Necesidad*). Si  $n = a^2 + b^2$  con  $a, b \in \mathbb{Z}_2$ , entonces módulo 4 los cuadrados son 0 o 1. Si  $n$  es impar, necesariamente exactamente uno de  $a, b$  es impar, luego  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Si  $n$  es par, escribimos  $n = 2^k u$  con  $u$  impar. Como  $2 = N(1+i)$ , extraer potencias de 2 no cambia la pertenencia al conjunto de normas:  $n$  es norma si y solo si  $u$  lo es. Por el argumento anterior, si  $u$  es norma (impar) entonces  $u \equiv 1 \pmod{4}$ .

(*Suficiencia*). Sea  $u \in \mathbb{Z}_2^\times$  con  $u \equiv 1 \pmod{4}$ . Entonces  $u \equiv 1$  o  $5 \pmod{8}$ . En ambos casos hay una representación módulo 8:

$$1 \equiv 1^2 + 0^2 \pmod{8}, \quad 5 \equiv 1^2 + 2^2 \pmod{8}.$$

Estas soluciones se levantan a soluciones en  $\mathbb{Z}_2$  por un argumento estándar de lifting, lo que da  $u = a^2 + b^2$  en  $\mathbb{Z}_2$ . Finalmente, como  $2 = N(1+i)$ , toda potencia  $2^k u$  también es norma.  $\square$

### B.3.2 Densidad local para la familia $F_R(d) = (R-d)(R+d)$

Recordemos  $M_R(c) = R^2 - c^2 = (R-c)(R+c)$ , y definimos la densidad local

$$\sigma_{2,-4}^{(m)} := \mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}_2} \left( M_R(c) \in N(\mathbb{Z}_2[i]) \cup \{0\} \right), \quad m = v_2(R).$$

**Teorema B.4** (Densidad 2-ádica cerrada para  $\Delta = -4$ ). *Sea  $R \in \mathbb{Z}$  y  $m = v_2(R)$ . Entonces*

$$\boxed{\sigma_{2,-4}^{(m)} = \frac{3}{2^{m+2}}}. \quad (\text{B.6})$$

En particular, en el régimen estándar de  $R$  impar ( $m = 0$ ),

$$\boxed{\sigma_{2,-4}^{(0)} = \frac{3}{4}}.$$

*Demostración.* Escribimos  $R = 2^m r$  con  $r$  impar.

**Paso 1: si**  $v_2(c) = t < m$ , **entonces**  $M_R(c)$  **no es norma**. Escribimos  $c = 2^t u$  con  $u$  impar y  $t < m$ . Entonces

$$M_R(c) = R^2 - c^2 = 2^{2t} \left( 2^{2(m-t)} r^2 - u^2 \right).$$

Como  $m - t \geq 1$ , se tiene  $2^{2(m-t)} r^2 \equiv 0 \pmod{4}$ , mientras que  $u^2 \equiv 1 \pmod{4}$ , luego

$$2^{2(m-t)} r^2 - u^2 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Por el Lema B.3, una unidad impar  $\equiv 3 \pmod{4}$  no es norma en  $\mathbb{Z}_2[i]$ . Como  $2^{2t}$  sí es norma, concluimos que  $M_R(c)$  no puede ser norma. Por tanto, el evento “ $M_R(c)$  es norma” implica necesariamente  $v_2(c) \geq m$ .

**Paso 2: reducción a  $m = 0$ .** Condicionado a  $v_2(c) \geq m$ , escribimos  $c = 2^m x$  con  $x \in \mathbb{Z}_2$  Haar-uniforme. Entonces

$$M_R(c) = 2^{2m} (r^2 - x^2).$$

Como  $2^{2m} = N((1+i)^{2m})$  es norma, por el Lema B.3 se tiene que  $M_R(c)$  es norma si y solo si  $r^2 - x^2$  es norma. Por tanto

$$\sigma_{2,-4}^{(m)} = \mathbb{P}(v_2(c) \geq m) \cdot \mathbb{P}_{x \in \mathbb{Z}_2} (r^2 - x^2 \in N(\mathbb{Z}_2[i]) \cup \{0\}).$$

Además,  $\mathbb{P}(v_2(c) \geq m) = 2^{-m}$ .

**Paso 3: cálculo base ( $m = 0$ ), probabilidad 3/4.** Sea  $r$  impar fijo y  $x \in \mathbb{Z}_2$  Haar-uniforme.

(i)  $x$  par. Entonces  $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$  y  $r^2 \equiv 1 \pmod{4}$ , luego  $r^2 - x^2 \equiv 1 \pmod{4}$  y por el Lema B.3 es norma. Contribución:  $\mathbb{P}(x \text{ par}) = 1/2$ .

(ii)  $x$  impar. Entonces  $r \pm x$  son pares y

$$r^2 - x^2 = (r-x)(r+x) = 4ab, \quad a = \frac{r-x}{2}, \quad b = \frac{r+x}{2}.$$

Como  $a+b=r$  es impar, exactamente uno de  $a, b$  es par y el otro impar. Sea  $E$  el factor par y  $O$  el factor impar, de modo que  $ab=EO$  y  $O$  es unidad impar. La condición de ser norma depende únicamente de la unidad impar asociada a  $EO$  tras extraer su potencia de 2. Condicionado a  $x$  impar, la variable  $E$  es Haar-uniforme en  $2\mathbb{Z}_2$ . La aplicación  $x \mapsto \text{unidad}(r-x)$  es una biyección que preserva la medida de Haar localmente (salvo factores de escala que se cancelan al normalizar). Por tanto  $E/2$  es Haar-uniforme en  $\mathbb{Z}_2$  y su parte impar (unidad módulo 4) es equiprobable en  $\{1, 3\}$ . Multiplicar por la unidad  $O$  permuta  $\{1, 3\}$ , así que la probabilidad de que la unidad resultante sea  $\equiv 1 \pmod{4}$  es exactamente  $1/2$ . Contribución:  $\mathbb{P}(x \text{ impar}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ .

Sumando (i)+(ii), obtenemos

$$\mathbb{P}_{x \in \mathbb{Z}_2}(r^2 - x^2 \text{ norma}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

#### Paso 4: conclusión.

$$\sigma_{2,-4}^{(m)} = 2^{-m} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2^{m+2}}.$$

□

*Observación B.5* (Lectura conceptual). En el caso inerte ( $\Delta \equiv 5 \pmod{8}$ ) la obstrucción es una *paridad* de  $v_2$ , y la densidad mejora al aumentar  $m = v_2(R)$ . En el caso gaussiano ( $\Delta = -4$ ), la obstrucción es una *clase de unidad* ( $\equiv 1 \pmod{4}$ ), y el evento obliga a que  $d$  comparta al menos  $m$  potencias de 2 con  $R$ , lo cual introduce el factor geométrico  $2^{-m}$ .

## B.4 El lugar 2 en el caso eisensteiniano: $\Delta = -3$ ( $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ )

En este apartado analizamos la contribución local en  $p = 2$  para el campo  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ , cuyo anillo de enteros es  $O_K = \mathbb{Z}[\omega]$ ,  $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ , con norma  $N(a+b\omega) = a^2 - ab + b^2$ . En particular, el discriminante fundamental es  $\Delta = -3 \equiv 5 \pmod{8}$ , lo cual implica que el primo 2 es *inerte* y la extensión local  $K_2/\mathbb{Q}_2$  es cuadrática *no ramificada*.

### B.4.1 Grupo de normas en una extensión cuadrática no ramificada

**Lema B.6** (Normas en extensiones cuadráticas no ramificadas). *Sea  $L/\mathbb{Q}_2$  una extensión no ramificada de grado 2. Entonces*

$$N(L^\times) = \{x \in \mathbb{Q}_2^\times : v_2(x) \text{ es par}\}.$$

*En particular, toda unidad  $u \in \mathbb{Z}_2^\times$  es norma, y la única obstrucción es la paridad de  $v_2(x)$ .*

*Demostración.* Sea  $v_2$  la valuación en  $\mathbb{Q}_2$  y  $v_L$  la de  $L$ . Para  $y \in L^\times$  se cumple  $v_2(N(y)) = [L : \mathbb{Q}_2] v_L(y) = 2v_L(y)$ , luego  $v_2(N(y))$  es par. Recíprocamente, si  $x = 2^{2k}u$  con  $u \in \mathbb{Z}_2^\times$ , basta ver que  $u$  es norma: el morfismo norma sobre residuos  $\mathbb{F}_4^\times \rightarrow \mathbb{F}_2^\times$  es sobreyectivo, luego las unidades son normas y por lifting se obtiene  $u = N(y)$  con  $y \in O_L^\times$ . Finalmente,  $2^{2k} = N(2^k)$ , así que  $x$  es norma. □

Definimos, como antes,

$$\sigma_{2,-3}^{(m)} := \mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}_2}(M_R(c) = (R-c)(R+c) \in N(K_2^\times) \cup \{0\}), \quad m = v_2(R).$$

**Teorema B.7** (Densidad local 2-ádica en el caso inerte:  $\Delta = -3$ ). *Sea  $R \in \mathbb{Z}$ ,  $m = v_2(R)$ , y  $d$  Haar-uniforme en  $\mathbb{Z}_2$ . Entonces*

$$\sigma_{2,-3}^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}. \quad (\text{B.7})$$

En particular, para  $R$  impar ( $m = 0$ ),

$$\sigma_{2,-3}^{(0)} = \frac{2}{3}.$$

*Demostración.* Es exactamente el Teorema 6.4, ya que en  $\Delta = -3$  el lugar 2 es no ramificado y la condición local es paridad de  $v_2$ .  $\square$

## B.5 El lugar 3 en el caso Eisenstein: $\Delta = -3$ (primo ramificado)

En el campo  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  el primo 3 es ramificado (pues  $3 \mid \Delta$ ). La completación local  $K_3 = \mathbb{Q}_3(\sqrt{-3})$  es una extensión cuadrática *totalmente ramificada* de  $\mathbb{Q}_3$ . En este caso, la obstrucción para ser norma no es una paridad de valuación, sino una condición sobre la *clase de la unidad* módulo 3.

### B.5.1 Caracterización del grupo de normas en $K_3/\mathbb{Q}_3$

**Lema B.8** (Normas en una extensión cuadrática totalmente ramificada,  $p$  impar). *Sea  $p$  impar y  $L/\mathbb{Q}_p$  una extensión cuadrática totalmente ramificada. Entonces:*

1. *La norma es sobreyectiva sobre la valuación: para todo  $k \in \mathbb{Z}$  existe  $y \in L^\times$  tal que  $v_p(N(y)) = k$ .*
2. *Para unidades, la imagen cumple*

$$N(O_L^\times) \equiv (\mathbb{F}_p^\times)^2 \pmod{p}.$$

En particular, para  $p = 3$  se tiene  $(\mathbb{F}_3^\times)^2 = \{1\}$  y por tanto:

$$u \in N(L^\times) \cap \mathbb{Z}_3^\times \iff u \equiv 1 \pmod{3}. \quad (\text{B.8})$$

*Demostración.* Como  $L/\mathbb{Q}_p$  es totalmente ramificada de grado 2, el grado residual es  $f = 1$ . Para un uniformizante  $\pi_L$  se sabe que  $v_p(N(\pi_L)) = f = 1$ , lo que implica que las valuaciones de normas recorren todo  $\mathbb{Z}$ . Para unidades  $u \in O_L^\times$ , la conjugación es trivial en el cuerpo residual (pues  $f = 1$ ), luego  $N(u) = u \cdot \bar{u} \equiv u^2 \pmod{p}$ , de donde la imagen módulo  $p$  son exactamente los cuadrados. Para  $p = 3$  esto fuerza (B.8).  $\square$

Aplicando este lema a  $L = K_3 = \mathbb{Q}_3(\sqrt{-3})$  obtenemos que, para  $x \in \mathbb{Q}_3^\times$  escrito como  $x = 3^k u$  con  $u \in \mathbb{Z}_3^\times$ ,

$$x \in N(K_3^\times) \iff u \equiv 1 \pmod{3}. \quad (\text{B.9})$$

### B.5.2 Densidad local para la familia $F_R(d) = R^2 - d^2$

Definimos

$$\sigma_{3,-3}^{(m)} := \mathbb{P}_{d \in \mathbb{Z}_3} \left( F_R(d) = R^2 - d^2 \in N(K_3^\times) \cup \{0\} \right), \quad m = v_3(R).$$

**Teorema B.9** (Densidad local 3-ádica para  $\Delta = -3$ ). *Sea  $R \in \mathbb{Z}$ ,  $m = v_3(R)$  y  $d$  Haar-uniforme en  $\mathbb{Z}_3$ . Entonces:*

$$\sigma_{3,-3}^{(m)} = \frac{2}{3^{m+1}}. \quad (\text{B.10})$$

En particular, para el régimen base  $3 \nmid R$  ( $m = 0$ ),

$$\boxed{\sigma_{3,-3}^{(0)} = \frac{2}{3}}.$$

*Demostración.* Escribimos  $R = 3^m r$  con  $r \in \mathbb{Z}_3^\times$ . Dividimos según  $t = v_3(d)$ .

(1) Si  $t < m$ , hay fallo seguro. Escribimos  $d = 3^t u$  con  $u \in \mathbb{Z}_3^\times$  y  $t < m$ . Entonces

$$F_R(d) = R^2 - d^2 = 3^{2t} (3^{2(m-t)} r^2 - u^2).$$

Como  $m - t \geq 1$ , el término  $3^{2(m-t)} r^2 \equiv 0$  (mód 3), mientras que  $u^2 \equiv 1$  (mód 3), luego la unidad residual de  $F_R(d)$  es

$$3^{2(m-t)} r^2 - u^2 \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3},$$

que no satisface (B.9). Por tanto no es norma.

(2) Si  $t > m$ , hay éxito seguro. Si  $t > m$ , entonces  $d$  es múltiplo de  $3^{m+1}$  y

$$F_R(d) = R^2 - d^2 \equiv R^2 \equiv 3^{2m} r^2 \pmod{3^{2m+1}}.$$

En particular  $v_3(F_R(d)) = 2m$  y la unidad residual es  $r^2 \equiv 1$  (mód 3), que sí es norma.

(3) Capa crítica  $t = m$ . Escribimos  $d = 3^m u$  con  $u \in \mathbb{Z}_3^\times$ . Entonces

$$F_R(d) = 3^{2m} (r^2 - u^2).$$

Como  $r, u$  son unidades,  $r^2 \equiv u^2 \equiv 1$  (mód 3), luego  $r^2 - u^2 \equiv 0$  (mód 3) y  $v_3(r^2 - u^2) \geq 1$ . El criterio de norma (B.9) depende de la unidad residual tras extraer la potencia exacta de 3. Para computar la probabilidad, basta trabajar módulo 9: los cuadrados de las 6 clases unidades módulo 9 toman exactamente los valores  $\{1, 4, 7\}$ , cada uno con probabilidad 1/3. Fijado  $r^2$  (mod 9), para  $u$  unidad al azar:

- con probabilidad 1/3 se tiene  $u^2 \equiv r^2$  (mod 9), y entonces  $r^2 - u^2 \equiv 0$  (mod 9), es decir  $v_3(r^2 - u^2) \geq 2$ ;
- con probabilidad 1/3,  $r^2 - u^2 \equiv 3$  (mod 9), y entonces  $(r^2 - u^2)/3 \equiv 1$  (mod 3) (éxito);
- con probabilidad 1/3,  $r^2 - u^2 \equiv 6$  (mod 9), y entonces  $(r^2 - u^2)/3 \equiv 2$  (mod 3) (fallo).

En la rama  $v_3(r^2 - u^2) \geq 2$ , al refinar a niveles superiores la unidad residual tras extraer la valuación exacta es equidistribuida entre  $\{1, 2\}$ , de modo que contribuye con probabilidad 1/2 al éxito. Así, condicionado a  $t = m$ , la probabilidad total de éxito es

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Combinando con la probabilidad de acceso a la capa crítica:

$$\mathbb{P}(\text{éxito} \mid v_3(d) \geq m) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

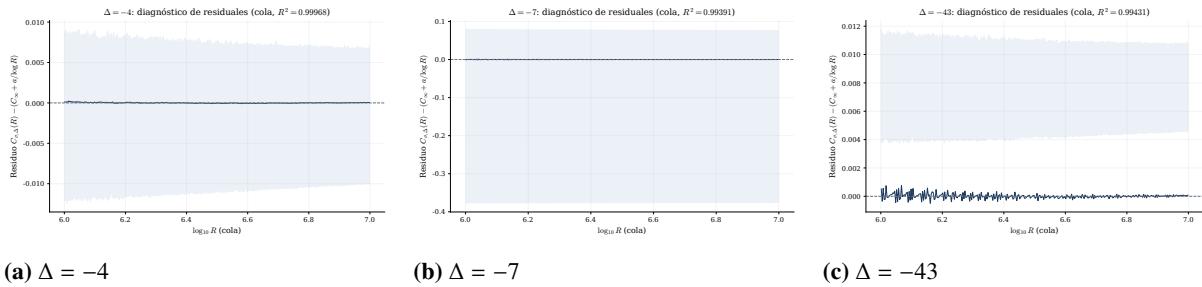
Finalmente, por (1) y (2) vemos que solo contribuyen los  $d$  con  $v_3(d) \geq m$ , y esa condición tiene medida  $3^{-m}$ . En ese subconjunto, el cálculo base produce éxito con probabilidad 2/3:

$$\sigma_{3,-3}^{(m)} = 3^{-m} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{m+1}}.$$

□

## C Diagnóstico de residuales del ajuste de cola

Las siguientes figuras demuestran que la estimación de  $C_\infty(\Delta)$  no es un artefacto de regresión. Los residuales del ajuste de cola muestran comportamiento estacionario sin tendencias sistemáticas.

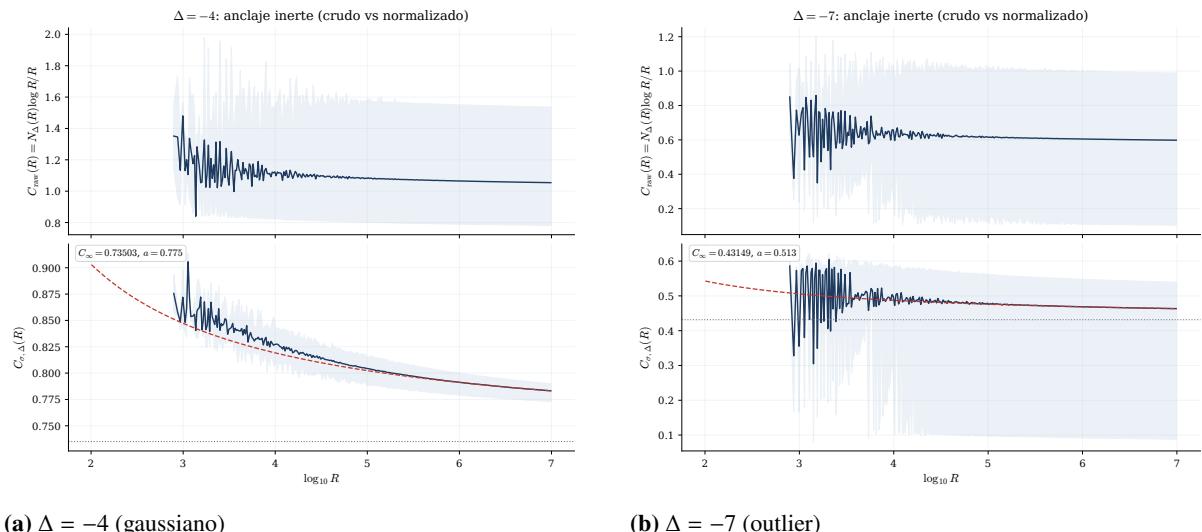


**Figura 11.** Residuales del ajuste de cola para discriminantes representativos. La ausencia de tendencia confirma la validez del modelo  $C_{\sigma,\Delta}(R) \approx C_\infty + a/\log R$ .

## D Figuras adicionales: normalización y colapso

### D.1 Normalización raw vs normalizado adicional

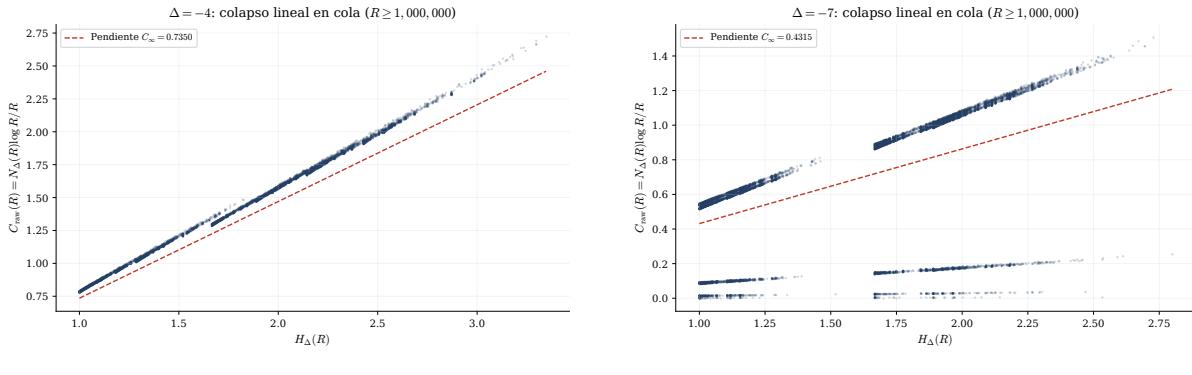
Las siguientes figuras muestran el efecto de normalización para discriminantes adicionales, complementando la Figure 3.



**Figura 12.** Efecto de normalización por  $H_\Delta(R)$  para discriminantes adicionales. Arriba: observable crudo oscilando. Abajo: observable estabilizado.

### D.2 Colapso lineal adicional

Las siguientes figuras muestran el colapso  $C_{\text{raw}}$  vs  $H_\Delta$  para discriminantes adicionales, complementando la Figure 7.



**Figura 13.** Colapso lineal  $C_{\text{raw}}(R)$  vs  $H_{\Delta}(R)$  para discriminantes adicionales. El alineamiento confirma la estructura inerte en todos los casos.

## E Conclusiones y extensiones

El presente trabajo establece de manera incondicional la estructura local fina del conteo de normas, identifica el mecanismo de “anclaje inerte” y proporciona fórmulas cerradas para las densidades  $p$ -ádicas (Teoremas 5.3 y 6.4). La constante global queda completamente determinada por la interacción entre el residuo de la zeta de Dedekind y la serie singular local:

$$C_{\infty}(\Delta) = 2e^{-\gamma} L(1, \chi_{\Delta}) \kappa_2(\Delta) \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta).$$

La elevación de la Conjetura 7.1 a teorema incondicional depende exclusivamente de probar la hipótesis de distribución  $\mathcal{D}_{\theta}$  para la familia cuadrática  $R^2 - c^2$  en progresiones aritméticas. Ese punto queda aislado en el Teorema 12.1: una vez disponible dicho input analítico, la asintótica global se activa inmediatamente con la constante canónica ya fijada por la teoría local.

Aunque el análisis se centra en  $R^2 - c^2$ , el principio de capa crítica sugiere una extensión natural a familias descomponibles  $Q(x, y) = L_1(x, y)L_2(x, y)$  donde una relación aditiva rígida controle la paridad de valuaciones en primos inertes.

Como agenda inmediata, el marco desarrollado aquí sugiere cuatro direcciones de trabajo concretas:

1. Extender el anclaje inerte a familias cuadráticas más generales  $f(c)$ , identificando el rol del discriminante local en la capa crítica.
2. Obtener una versión incondicional global del Teorema 12.1 bajo hipótesis analíticas estándar (por ejemplo, GRH o un nivel de distribución óptimo).
3. Tratar sistemáticamente el régimen  $h(\Delta) > 1$ , incorporando clases de ideales y su contribución a la constante singular.
4. Explorar análogos en órdenes no maximales y contextos aritmético-geométricos afines donde aparezcan normas con estructura local anclada.

## F Bibliografía

### Referencias

- [1] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.

- [2] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic Number Theory*. AMS Colloquium Publications, 2004.
- [3] H. Halberstam and H.-E. Richert. *Sieve Methods*. Academic Press, 1974.
- [4] J. Friedlander and H. Iwaniec. *Opera de Cribro*. AMS Colloquium Publications, 2010.
- [5] J. Neukirch. *Algebraic Number Theory*. Springer, 1999.