

Anclaje Inerte y Densidades p -ádicas Explícitas en la familia

$$R^2 - c^2:$$

Renormalización determinista y serie singular en campos cuadráticos imaginarios

Robert Duan Montoya Cardona

19 de febrero de 2026

Resumen

Estudiamos la familia aritmética $M_R(c) = R^2 - c^2$, $1 \leq c \leq R - 1$, asociada al conteo $N_\Delta(R)$ de valores que son normas en $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$, con $\Delta < 0$ fundamental. El resultado conceptual central es el *anclaje inerte*: para un primo inerte p , el defecto de paridad de $v_p(M_R(c))$ no es ruido estadístico, sino un fenómeno determinista concentrado en la capa crítica $v_p(c) = v_p(R)$. Esta rigidez produce fórmulas cerradas para densidades locales de norma: $\sigma_p^{(m)} = 1 - \frac{2}{p^m(p+1)}$ para $p \geq 3$, y $\sigma_{2,\Delta}^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}$ cuando 2 es inerte.

Con estas densidades definimos un normalizador finitista $H_\Delta(R)$ que extrae de forma explícita la dependencia local en la factorización de R , y estabilizamos el observable $C_{\sigma,\Delta}(R) = \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta(R)R}$. Identificamos el baseline canónico $C_{\text{base}}(\Delta) = 2e^{-\gamma}L(1, \chi_\Delta)$, con forma cerrada en el caso Heegner, y proponemos la descomposición $C_\infty(\Delta) = C_{\text{base}}(\Delta)\mathfrak{S}_\Delta$, donde \mathfrak{S}_Δ captura correlaciones locales finas. La evidencia numérica hasta $R \leq 10^7$ para los nueve discriminantes de Heegner confirma estabilización robusta y estructura local no trivial. Bajo una hipótesis estándar de nivel de distribución para $M_R(c)$, obtenemos asintóticamente

$$N_\Delta(R) = C_\infty(\Delta) H_\Delta(R) \frac{R}{\log R} + O\left(\frac{R}{(\log R)^{1+\delta}}\right), \quad \delta > 0.$$

Palabras clave. Normas cuadráticas imaginarias, densidades p -ádicas, cribas con serie singular, renormalización aritmética, anclaje inerte.

MSC 2020. 11N32, 11R11, 11N36, 11D09.

Índice

1 Introducción y resumen de resultados	1
1.1 Origen geométrico: de la esfera a la secuencia $R^2 - c^2$	1
1.2 Por qué importa (lectura técnica y no técnica)	1
1.3 Mapa lógico del artículo	1
1.4 El problema en una línea	2
1.5 El fenómeno: oscilaciones locales deterministas (“anclaje inerte”)	2
1.6 Resultados principales (locales, incondicionales)	2
1.7 El normalizador inercial $H_\Delta(R)$ y el observable estable	3
1.8 Baseline canónico y serie singular	3
1.9 Qué es teorema y qué es conjetura	3
1.10 Evidencia computacional y el rol de inertes pequeños	4
1.11 Convención de parametrización	4
1.12 Organización del manuscrito	4
2 Normas en $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ y el rol de los primos inertes	4
2.1 Caracteres cuadráticos y tipos de primos	4
2.2 Criterio local simplificado: paridad en primos inertes	4
3 Definiciones: conteo, densidades locales y el normalizador inercial	5
3.1 Conteo	5
3.2 Densidades p -ádicas	5
3.3 Por qué $H_\Delta(R)$ es el normalizador natural	5
3.4 El observable estable	6
4 Preliminares p-ádicos: capas de valuación y el principio de la capa crítica	7
4.1 Puente: de lo discreto a lo continuo	7
4.2 Capas de valuación en \mathbb{Z}_p	8
4.3 El principio estructural: todo el defecto vive en $v_p(c) = v_p(R)$	8
5 Teoremas locales en primos impares ($p \geq 3$)	9
5.1 Caso Inerte: Paridad de Valuación	9
5.2 Densidad local cerrada	9
5.3 Primos ramificados impares en Heegner: caso explícito ($\Delta = -3, p = 3$)	10
6 Capítulo 2-ádico: el interruptor racional en el caso inerte	10
6.1 Clasificación de 2 (incluida para no depender de folklore)	10
6.2 Un lema 2-ádico auxiliar (para que la prueba no “salte”)	10
6.3 Teorema 2-ádico en el caso inerte	11
7 Modelo global y baseline canónico: por qué aparece ζ y por qué aparece $e^{-\gamma}$	13
7.1 La conjetura global en forma canónica	13
7.2 La identidad madre: $\zeta_K = \zeta L$	13
7.3 El baseline arquimediano y la fórmula de clase	13
7.4 Por qué aparece $e^{-\gamma}$ (y por qué esto es inevitable)	14
7.5 Descomposición canónica	14
8 Estructura Euleriana: aparición forzada de ζ, L y expansión a orden p^{-2}	15
8.1 Factores locales $\kappa_p(\Delta)$: definición operacional	15
8.2 Una identidad de Euler que selecciona exactamente a los inertes	16
8.3 Producto truncado y corrección ramificada (arreglo canónico)	16

8.4	Aparición inevitable de $e^{-\gamma}$ y del residuo $L(1, \chi_\Delta)$	16
8.5	Expansión logarítmica: por qué emergen $\sum \chi(p)/p^2$ y valores $L(2m, \chi)$	17
9	Evidencia computacional: cómo se estima $C_\infty(\Delta)$ y por qué la cola manda	17
9.1	Qué se computa	17
9.2	Por qué el promedio no es el límite	18
9.3	Ajuste de cola (ansatz de relajación)	18
9.4	Refinamiento ramificado en cola: H_Δ^\star	18
9.5	Estabilización visual de $C_{\sigma, \Delta}(R)$	20
9.6	Comparativa Heegner: el factor singular	20
9.7	Colapso lineal: $C_{\text{raw}}(R)$ vs $H_\Delta(R)$	21
10	Ejemplo de control: el outlier $\Delta = -7$ explicado por inertes pequeños	21
10.1	Predicción de primer orden por primos inertes pequeños	23
11	Regularización tipo Mertens: por qué la serie singular debe converger	24
12	Discusión final: manuscrito blindado y siguiente paso hacia un teorema global	24
12.1	Lo que ya está “cerrado”	24
12.2	Hipótesis analítica para el Teorema Global	25
A	Constantes y valores de referencia	28
B	Análisis local explícito en $p = 2$ para discriminantes especiales	28
B.1	El lugar 2 en $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ($\Delta = -8$): densidad local cerrada	28
B.2	Expansión exacta vía la zeta de primos y reducción a valores de ζ	30
B.3	El lugar 2 en el caso gaussiano: $\Delta = -4$ ($K = \mathbb{Q}(i)$)	31
B.4	El lugar 2 en el caso eisensteiniano: $\Delta = -3$ ($K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$)	33
B.5	El lugar 3 en el caso Eisenstein: $\Delta = -3$ (primo ramificado)	33
C	Diagnóstico de residuales del ajuste de cola	35
D	Figuras adicionales: normalización y colapso	35
D.1	Normalización raw vs normalizado adicional	35
D.2	Colapso lineal adicional	35
E	Conclusiones y extensiones	36
F	Bibliografía	37

1 Introducción y resumen de resultados

1.1 Origen geométrico: de la esfera a la secuencia $R^2 - c^2$

El punto de partida es estrictamente geométrico:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Al fijar una altura $z = c$, el paralelo cumple

$$x^2 + y^2 = R^2 - c^2.$$

Por tanto, para cada c aparece un escalar natural, $R^2 - c^2$, que codifica el radio de la sección horizontal. La pregunta aritmética nace al pedir que ese escalar pertenezca a un conjunto de normas. La Figure 1 resume este puente geométrico con una visualización directa.

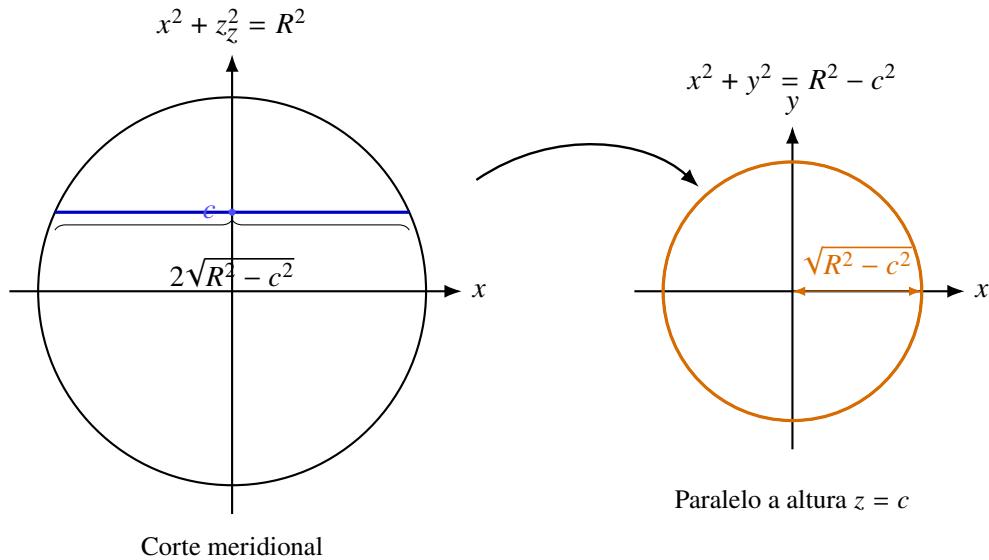


Figura 1. Origen geométrico de la familia. Cada corte horizontal de la esfera a altura $z = c$ produce un círculo de radio $\sqrt{R^2 - c^2}$. El escalar $R^2 - c^2$ es el objeto aritmético filtrado por normas.

1.2 Por qué importa (lectura técnica y no técnica)

- **Lectura no técnica.** El problema conecta geometría elemental (cortes de una esfera) con estructura fina de primos: no es un promedio difuso, sino un patrón determinista gobernado por valuaciones.
- **Lectura técnica.** La familia $M_R(c) = R^2 - c^2$ permite escribir fórmulas locales exactas y aislar la dependencia en $v_p(R)$ mediante un normalizador explícito $H_\Delta(R)$; esto separa el bloque local del bloque global en la constante final.
- **Impacto conceptual.** El caso gaussiano ($\Delta = -4$) es la puerta de entrada geométrica, y el formalismo de normas en $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ extiende esa puerta a toda una familia cuadrática con control local cerrado.

1.3 Mapa lógico del artículo

La Figure 2 compacta la arquitectura completa: origen geométrico, filtros locales, renormalización y constante final.

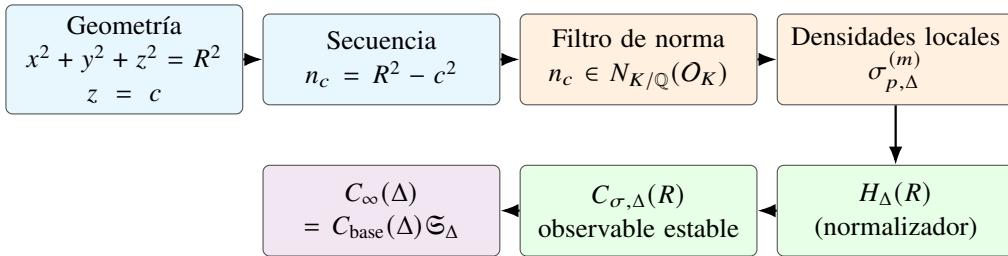


Figura 2. Flujo conceptual completo: del origen geométrico de $R^2 - c^2$ a la descomposición final de la constante global.

1.4 El problema en una línea

Sea $\Delta < 0$ un discriminante fundamental y $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$. Para cada $R \in \mathbb{N}$ consideramos la familia

$$M_R(c) = R^2 - c^2 = (R - c)(R + c), \quad 1 \leq c \leq R - 1,$$

y contamos cuántos valores son normas enteras:

$$N_{\Delta}(R) = \#\{1 \leq c \leq R - 1 : M_R(c) \in N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_K)\}.$$

El objetivo es describir con precisión *cómo* depende $N_{\Delta}(R)$ de la aritmética de R y del tipo de descomposición de primos en K .

1.5 El fenómeno: oscilaciones locales deterministas (“anclaje inerte”)

En un primo p *inerte* en K (i.e. $\chi_{\Delta}(p) = -1$), una condición necesaria para que un entero positivo sea norma es que $v_p(\cdot)$ sea *par*. Lo sorprendente en la familia $M_R(c)$ es que, al variar c , la paridad de $v_p(M_R(c))$ no se comporta como un ruido: queda rígidamente controlada por la relación aditiva

$$(R - c) + (R + c) = 2R.$$

En particular, el defecto de paridad se concentra en una única capa p -ádica:

Principio de la capa crítica. *Para p impar, fuera del evento $v_p(c) = v_p(R)$ se tiene automáticamente que $v_p(M_R(c))$ es par.* Por tanto, toda la probabilidad de fallo de paridad vive en un subconjunto de medida $\asymp p^{-v_p(R)}$.

Este pegado del defecto a la valuación de R (y no a fluctuaciones “aleatorias” de c) es lo que llamamos *anclaje inerte*. Es un mecanismo estructural, y por eso admite fórmulas cerradas.

1.6 Resultados principales (locales, incondicionales)

El núcleo del trabajo es local y completamente riguroso: calculamos densidades p -ádicas exactas asociadas a la paridad de $v_p(M_R(c))$ con c Haar-uniforme en \mathbb{Z}_p .

- **Primos impares ($p \geq 3$).** Para $m = v_p(R)$ obtenemos la identidad cerrada

$$\mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ impar}) = \frac{2}{p^m(p+1)}, \quad \sigma_p^{(m)} = \mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ par}) = 1 - \frac{2}{p^m(p+1)}.$$

En primos inertes, $\sigma_p^{(m)}$ es exactamente la densidad del filtro local de norma (Teorema 5.3).

- **Lugar 2 cuando es inerte.** Si $\Delta \equiv 5 \pmod{8}$, entonces K_2/\mathbb{Q}_2 es no ramificada y la condición local de norma es pura paridad. En este régimen aparece un factor racional explícito:

$$\sigma_{2,\Delta}^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}, \quad \sigma_{2,\Delta}^{(0)} = \frac{2}{3}$$

(Teorema 6.4). Este *interruptor 2-ádico* domina varios de los regímenes observados numéricamente.

1.7 El normalizador inercial $H_\Delta(R)$ y el observable estable

Las fórmulas anteriores muestran que las densidades dependen explícitamente de $m = v_p(R)$. Por tanto, el cociente crudo $N_\Delta(R) \log R / R$ oscila multiplicativamente cuando R acumula potencias de primos inertes. Esto obliga a renormalizar por un corrector determinista construido desde las densidades locales.

Definimos el factor inercial finitista

$$H_\Delta(R) := \prod_{\substack{p|R \\ p \text{ inerte}}} \frac{\sigma_{p,\Delta}^{(v_p(R))}}{\sigma_{p,\Delta}^{(0)}}$$

y consideramos el observable

$$C_{\sigma,\Delta}(R) = \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta(R) R}.$$

La razón conceptual para introducir $H_\Delta(R)$ es simple: extrae *exactamente* la dependencia local explícita en $v_p(R)$, devolviendo cada factor al régimen base $m = 0$.

1.8 Baseline canónico y serie singular

En una criba de dimensión 1 el escalamiento $R/\log R$ es el esperado, y el factor arquimediano queda forzado por Mertens. En particular, identificamos el baseline canónico del campo:

$$C_{\text{base}}(\Delta) = 2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta) = 2e^{-\gamma} \text{Res}_{s=1} \zeta_K(s),$$

y en el caso Heegner ($h(\Delta) = 1$) obtenemos la forma cerrada

$$C_{\text{base}}(\Delta) = \frac{4\pi e^{-\gamma}}{w(\Delta) \sqrt{|\Delta|}}$$

(Teorema 7.3).

La constante final esperada para el conteo renormalizado adopta la descomposición canónica

$$C_\infty(\Delta) = C_{\text{base}}(\Delta) \mathfrak{S}_\Delta,$$

donde \mathfrak{S}_Δ es una serie singular local que captura correlaciones finas (de orden $\geq p^{-2}$) propias de la familia $M_R(c)$ y del conjunto de normas.

1.9 Qué es teorema y qué es conjectura

- **Teorema (incondicional).** Todo el aparato local: principio de capa crítica, densidades cerradas para $p \geq 3$ y para $p = 2$ inerte, y la identificación del baseline $C_{\text{base}}(\Delta)$ vía ζ_K .
- **Teorema (global condicional).** Bajo una hipótesis explícita de distribución en progresiones para $M_R(c)$, se deduce la asintótica global con término de error con ahorro logarítmico (Teorema 12.1).
- **Conjetura (global incondicional).** El asintótico

$$N_\Delta(R) \sim \frac{C_\infty(\Delta) H_\Delta(R) R}{\log R} \quad (R \rightarrow \infty)$$

requiere un input global de distribución en progresiones para la secuencia $M_R(c)$, suficiente para alimentar una criba asintótica (Conjetura 7.1).

1.10 Evidencia computacional y el rol de inertes pequeños

Para los nueve discriminantes de Heegner se computa $N_\Delta(R)$ hasta $R \leq 10^7$ y se observa que $C_{\sigma,\Delta}(R)$ se estabiliza hacia un límite $C_\infty(\Delta)$. El caso $\Delta = -7$ actúa como diagnóstico: su valor atípico se explica casi por completo por el producto de primer orden de inertes pequeños ($p = 3, 5$), mostrando que la variación entre discriminantes es estructural y dominada por primos chicos (Sección 10).

1.11 Convención de parametrización

Observación 1.1 (Convención de escala y compatibilidad con la notación “ $2R$ ”). En todo el manuscrito fijamos *una única* parametrización:

$$M_R(c) = R^2 - c^2 = (R - c)(R + c), \quad 1 \leq c \leq R - 1.$$

Si en algún contexto geométrico se prefiere escribir la familia como $(2r)^2 - c^2$ (simetría alrededor de $2r$), basta sustituir $R := 2r$. Para todo primo impar p no cambia $v_p(R)$; en $p = 2$ sí cambia:

$$v_2(R) = v_2(2r) = v_2(r) + 1.$$

Esta observación es *exactamente* el punto donde un cambio de convención puede alterar los “casos base” 2-ádicos. La presente redacción fija la convención $R^2 - c^2$ y usa $v_p(R)$ coherentemente en todo el texto.

1.12 Organización del manuscrito

Las Secciones 4–6 prueban los resultados locales (impares y lugar 2). La Sección 3 formaliza $H_\Delta(R)$ y el observable $C_{\sigma,\Delta}(R)$. Las Secciones 7–11 discuten el baseline canónico, la renormalización tipo Mertens y la estructura Euleriana de la serie singular. La evidencia numérica y los diagnósticos se presentan en la Sección 9 y apéndices.

2 Normas en $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ y el rol de los primos inertes

2.1 Caracteres cuadráticos y tipos de primos

Sea $\Delta < 0$ fundamental y χ_Δ el carácter cuadrático de Kronecker. Para $p \nmid \Delta$,

$$\chi_\Delta(p) = \begin{cases} +1 & (p \text{ split}), \\ -1 & (p \text{ inerte}). \end{cases}$$

Si $p \mid \Delta$, entonces $\chi_\Delta(p) = 0$ y p es ramificado. Para contexto general sobre teoría analítica de números y aritmética de campos, véanse [1, 2, 5].

2.2 Criterio local simplificado: paridad en primos inertes

Un principio estándar (interpretado vía factorización de ideales) es:

Si p es inerte, entonces para que n sea norma es necesario que $v_p(n)$ sea par.

Esto se debe a que, si p es inerte, el ideal (p) permanece primo en O_K y

$$(v_p(n) \text{ impar}) \implies (p) \text{ aparece con exponente impar en } (n),$$

lo cual no puede suceder para normas principales, donde los exponentes vienen en pares conjugados.

Para los discriminantes de Heegner ($h(\Delta) = 1$), esta descripción se vuelve especialmente operativa: la representabilidad por la forma principal coincide con la condición global de norma principal, y la estructura local captura con gran fidelidad la constante.

Observación 2.1 (Por qué restringirse a Heegner en la evidencia). Cuando $h(\Delta) > 1$, un entero puede ser norma de algún ideal pero no necesariamente norma de un elemento, y aparecen clases. La restricción a Heegner evita esas sutilezas y permite que el indicador de norma sea computable de manera directa mediante criterios de factorización/representación.

Proposición 2.2 (Principio local–global para normas en extensiones cuadráticas). *Sea K/\mathbb{Q} una extensión cuadrática (en particular, cíclica). Entonces un racional $x \in \mathbb{Q}^\times$ es una norma global $x \in N_{K/\mathbb{Q}}(K^\times)$ si y solo si x es una norma local en todo completamiento:*

$$x \in N_{K/\mathbb{Q}}(K^\times) \iff x \in N_{K_v/\mathbb{Q}_v}(K_v^\times) \text{ para todo lugar } v \text{ de } \mathbb{Q}.$$

Observación 2.3 (Principio de Hasse no es suficiente: Normas Integrales). El Teorema de Normas de Hasse garantiza que $x \in \mathbb{Q}^\times$ es norma global en K^\times si y solo si es norma local en todo completamiento K_p^\times . Sin embargo, nuestro conteo $N_\Delta(R)$ requiere que $M_R(c)$ sea norma de un entero algebraico ($\beta \in \mathcal{O}_K$). Para $h(\Delta) = 1$ (dominios de ideales principales), esto equivale a pedir que $M_R(c)$ sea generado por la norma de un elemento, lo cual impone condiciones más fuertes que la mera norma racional: se requiere que la valuación local sea par en inertes y que las unidades locales satisfagan congruencias cuadráticas en los ramificados (ver Section 5.3) y en $p = 2$.

3 Definiciones: conteo, densidades locales y el normalizador inercial

3.1 Conteo

Definición 3.1 (Conteo de normas en la familia). Para $\Delta < 0$ fundamental definimos

$$N_\Delta(R) = \#\{ 1 \leq c \leq R - 1 : M_R(c) = R^2 - c^2 \in N_{K/\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_K) \}.$$

Observación 3.2 (Nota técnica sobre el borde $c = 0$). Formalmente, el valor $c = 0$ produce $M_R(0) = R^2$, que es siempre norma (pues es un cuadrado racional). Aunque su contribución es asintóticamente despreciable ($O(1)$ frente a R), incluir $c = 0$ simplificaría ciertas sumas de caracteres en un tratamiento analítico puro. Mantenemos la restricción $c \geq 1$ por coherencia con la intuición geométrica del problema.

3.2 Densidades p -ádicas

El mecanismo central del artículo es local. Sea p primo. Consideramos c uniforme en \mathbb{Z}_p con medida de Haar. Definimos la densidad local (en el régimen relevante para inertes):

$$\sigma_{p,\Delta}^{(m)} := \mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}_p} (v_p(M_R(c)) \text{ par}), \quad m = v_p(R).$$

Cuando p es inerte, esta paridad modela la condición local de norma.

3.3 Por qué $H_\Delta(R)$ es el normalizador natural

El punto crucial es que $\sigma_{p,\Delta}^{(m)}$ depende de $m = v_p(R)$ de manera explícita. Por tanto, si R tiene potencias grandes de primos inertes, el conteo $N_\Delta(R)$ cambia por un factor determinista. Esto obliga a definir un corrector multiplicativo.

Definición 3.3 (Factor inercial determinista finitista). Sea $\Delta < 0$ fundamental. Definimos el factor corrector como el producto finito restringido a los primos relevantes:

$$H_\Delta(R) := \prod_{\substack{p|R \\ p \text{ inerte}}} \frac{\sigma_{p,\Delta}^{(m)}}{\sigma_{p,\Delta}^{(0)}}, \quad m = v_p(R).$$

Si 2 es inerte, el producto incluye también el factor $p = 2$ cuando $v_2(R) > 0$. Para primos split, y para inertes con $v_p(R) = 0$, el cociente es 1 (o se absorbe en la constante global para correcciones de orden $O(p^{-2})$). Esta definición operacional garantiza que $H_\Delta(R)$ es una cantidad finita y computable que aísla la dependencia en la geometría de R . Los términos no triviales provienen de:

1. Primos **inertes** ($p \mid R, \chi(p) = -1$), donde la paridad se ve alterada por $m > 0$.
2. El primo $p = 2$ cuando es **inerte** y divide a R .

Observación 3.4 (Lectura probabilística). Si los eventos locales fueran aproximadamente independientes, entonces

$$\mathbb{P}(M_R(c) \text{ pasa todos los filtros locales}) \approx \prod_p \sigma_{p,\Delta}^{(m)},$$

y al variar $v_p(R)$ cambias exactamente las $\sigma_{p,\Delta}^{(m)}$ correspondientes. $H_\Delta(R)$ es el cociente que “devuelve” esos factores a su valor base $m = 0$.

Observación 3.5 (Refinamiento ramificado opcional). Para estudiar explícitamente la contribución de primos impares ramificados, usamos la normalización post-procesada

$$H_\Delta^\star(R) := H_\Delta(R) \prod_{\substack{p \mid \Delta \\ p \text{ impar}}} p^{-v_p(R)}.$$

Este refinamiento no altera la definición operativa principal de los CSV (inerte-only), pero permite separar con claridad el bloque inerte del bloque ramificado.

3.4 El observable estable

Definición 3.6 (Observable normalizado). Definimos

$$C_{\sigma,\Delta}(R) := \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta(R) R}.$$

Observación 3.7 (Qué esperamos en un modelo de dimensión 1). En una criba de dimensión 1, el conteo típico tiene forma $\sim \text{const} \cdot R / \log R$. La función $H_\Delta(R)$ corrige las oscilaciones locales y $C_{\sigma,\Delta}(R)$ debería tender a un límite.

Observación 3.8 (Convención de escala logarítmica). En un modelo de criba de dimensión 1 aplicado a valores de tamaño $\asymp R^2$, el denominador natural es $\log(R^2) = 2 \log R$. Al normalizar por $\log R$, absorbemos ese factor 2 en la constante $C_{\text{base}}(\Delta)$, justificando su prefactor.

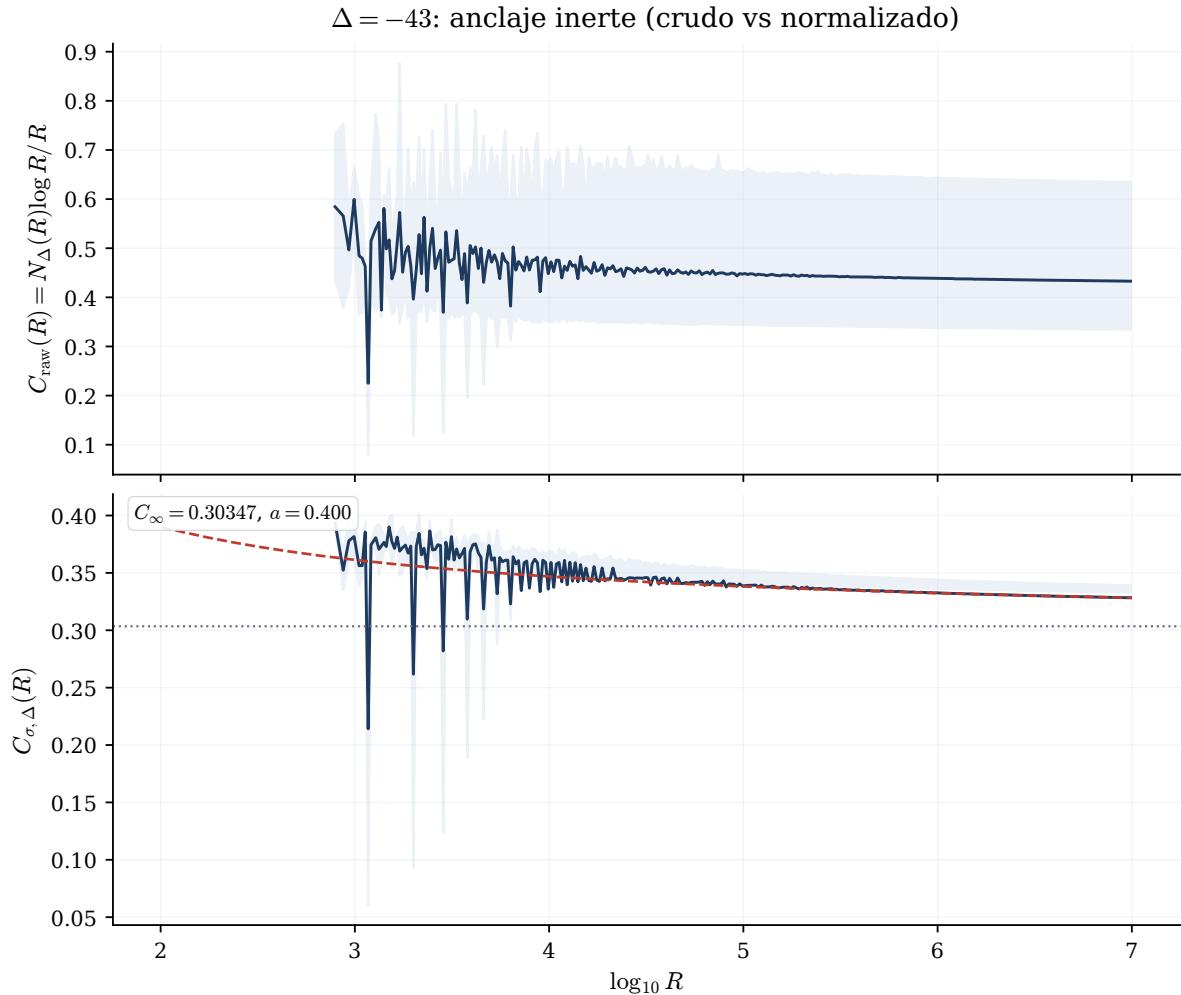


Figura 3. Demostración visual del anclaje inerte para $\Delta = -43$. **Arriba:** $C_{\text{raw}}(R) = N_{\Delta}(R) \log R / R$ oscila multiplicativamente. **Abajo:** al normalizar por $H_{\Delta}(R)$, el observable $C_{\sigma, \Delta}(R)$ se estabiliza, evidenciando que H_{Δ} captura la oscilación determinista inducida por primos inertes.

4 Preliminares p -ádicos: capas de valuación y el principio de la capa crítica

4.1 Puente: de lo discreto a lo continuo

Lema 4.1 (Densidad discreta vs Haar). *Sea $\sigma_p^{(m)}$ la probabilidad respecto a la medida de Haar en \mathbb{Z}_p definida previamente (densidad intrínseca). Definimos la densidad discreta para el nivel R como:*

$$\sigma_{p, \text{disc}}^{(m)}(R) := \frac{1}{R-1} \# \{ 1 \leq c \leq R-1 : v_p(M_R(c)) \text{ es par} \}.$$

Entonces, para todo $q = p^k$ fijo (o creciendo lentamente con R), la equidistribución de c módulo q implica:

$$\sigma_{p, \text{disc}}^{(m)}(R) = \sigma_p^{(m)} + O\left(\frac{p^{m+1}}{R}\right).$$

Observación 4.2. La corrección inercial $H_{\Delta}(R)$ se construye usando las densidades límite $\sigma_p^{(m)}$. Esta aproximación es válida y robusta siempre que las “capas” relevantes del espacio p -ádico (hasta valuación m) tengan representantes en el intervalo discreto, lo cual se cumple ampliamente si $p^m \ll R$. Para R extremadamente p -suave (ej. $R = p^m$), la discretización introduce efectos de borde finito que el modelo de Haar suaviza.

4.2 Capas de valuación en \mathbb{Z}_p

Usaremos repetidamente la descomposición de \mathbb{Z}_p por valuaciones.

Lema 4.3 (Distribución de v_p bajo Haar). *Sea X uniforme en \mathbb{Z}_p . Entonces para $k \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(v_p(X) = k) = (1 - 1/p)p^{-k}, \quad \mathbb{P}(v_p(X) \geq k) = p^{-k}.$$

Demostración. $\mathbb{P}(v_p(X) \geq k) = \mu(p^k \mathbb{Z}_p) = p^{-k}$. Restando k y $k + 1$ se obtiene la masa puntual. \square

4.3 El principio estructural: todo el defecto vive en $v_p(c) = v_p(R)$

El polinomio

$$M_R(c) = (R - c)(R + c)$$

tiene la propiedad de que las valuaciones $v_p(R \pm c)$ se estabilizan fuera de la capa crítica.

Lema 4.4 (Fuera de la capa crítica la paridad es automáticamente par). *Sea p primo impar. Escriba $R = p^m R_0$ con $p \nmid R_0$ y sea $c \in \mathbb{Z}_p$ con $t = v_p(c)$. Si $t \neq m$, entonces*

$$v_p(R - c) = v_p(R + c) = \min\{t, m\}, \quad \Rightarrow \quad v_p(M_R(c)) = 2 \min\{t, m\} \text{ es par.}$$

Demostración. Si $t < m$, escriba $c = p^t u$ con $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ y note que $R \pm c = p^t(p^{m-t}R_0 \pm u)$ con paréntesis unidad. Si $t > m$, escriba $c = p^m p^{t-m}u$ con $p^{t-m}u \in p\mathbb{Z}_p$ y observe que $R \pm c = p^m(R_0 \pm p^{t-m}u)$ con paréntesis unidad. \square

Lema 4.5 (Reducción en la capa crítica). *Sea p impar. Si $v_p(c) = m$ escribimos $c = p^m u$ con $u \in \mathbb{Z}_p^\times$. Entonces*

$$v_p(M_R(c)) = 2m + v_p(R_0^2 - u^2).$$

En particular, la paridad de $v_p(M_R(c))$ coincide con la de $v_p(R_0^2 - u^2)$.

Demostración. Factorizando $M_R(c) = R^2 - c^2 = p^{2m}(R_0^2 - u^2)$. \square

Observación 4.6 (Consecuencia conceptual). Esta es la razón de fondo por la que $H_\Delta(R)$ existe y es simple: la dependencia de $\sigma_{p,\Delta}^{(m)}$ respecto de $v_p(R)$ se concentra en una capa de masa $\asymp p^{-m}$.

La Figura 4 lo visualiza en un solo diagrama: todo el defecto de paridad entra por $t = v_p(c) = m$.

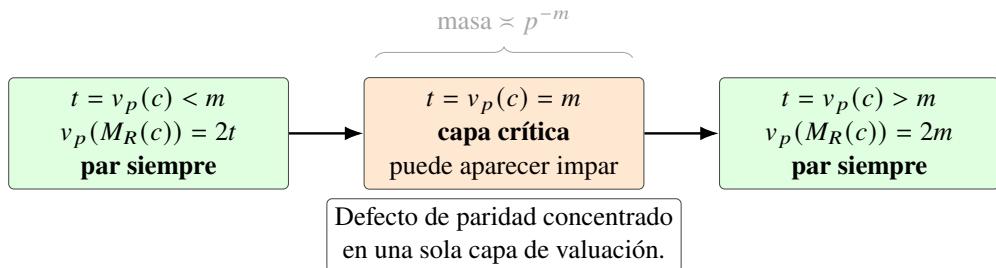


Figura 4. Visualización del principio de capa crítica para p impar: fuera de $t = v_p(c) = m$ la paridad de $v_p(M_R(c))$ es forzosamente par.

5 Teoremas locales en primos impares ($p \geq 3$)

5.1 Caso Inerte: Paridad de Valuación

El siguiente hecho encapsula el conteo de soluciones p -ádicas cerca de raíces simples.

Lema 5.1 (Conteo de levantamientos para raíces simples en unidades). *Sea p primo impar y $h(T) \in \mathbb{Z}_p[T]$. Suponga que $\bar{h}(T) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[T]$ tiene exactamente r raíces simples en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Sea U uniforme en \mathbb{Z}_p^\times . Entonces para $t \geq 1$:*

$$\mathbb{P}(h(U) \equiv 0 \pmod{p^t}) = \frac{r}{\varphi(p^t)} = \frac{r}{(p-1)p^{t-1}}, \quad \mathbb{P}(v_p(h(U)) = t) = \frac{r}{p^t}.$$

Demostración. Cada raíz simple módulo p levanta de manera única a una raíz módulo p^t (Hensel). Por tanto hay exactamente r soluciones módulo p^t dentro de $(\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z})^\times$. Como U módulo p^t es uniforme en ese grupo (de tamaño $\varphi(p^t) = (p-1)p^{t-1}$), obtenemos la primera fórmula. Para la segunda, restamos probabilidades:

$$\mathbb{P}(v_p(h(U)) = t) = \mathbb{P}(v_p(h(U)) \geq t) - \mathbb{P}(v_p(h(U)) \geq t+1) = \frac{r}{(p-1)p^{t-1}} - \frac{r}{(p-1)p^t} = \frac{r}{p^t}.$$

□

Observación 5.2. En Theorem 5.1 sólo usamos $t \geq 1$ porque la paridad de $v_p(h(U))$ difiere de 0 únicamente cuando $p \mid h(U)$.

5.2 Densidad local cerrada

Teorema 5.3 (Densidad local para $p \geq 3$). *Sea $p \geq 3$ primo impar y $R = p^m R_0$ con $p \nmid R_0$. Entonces*

$$\boxed{\mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}_p}(v_p(M_R(c)) \text{ impar}) = \frac{2}{p^m(p+1)}}$$

$$\boxed{\sigma_p^{(m)} = \mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ par}) = 1 - \frac{2}{p^m(p+1)}}.$$

En particular, para $m = 0$:

$$\boxed{\sigma_p^{(0)} = \frac{p-1}{p+1}.}$$

(Cuando p es inerte, esta densidad es exactamente el filtro local de norma).

Demostración. Por Theorem 4.4, fuera de la capa crítica $v_p(c) = m$ la valuación $v_p(M_R(c))$ es par. Así,

$$\mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ impar}) = \mathbb{P}(v_p(c) = m) \cdot \mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ impar} \mid v_p(c) = m).$$

Por Theorem 4.3, $\mathbb{P}(v_p(c) = m) = (1 - 1/p)p^{-m} = (p-1)/p^{m+1}$.

Condicionando a $v_p(c) = m$ escribimos $c = p^m u$ con $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ uniforme. Por Theorem 4.5,

$$v_p(M_R(c)) = 2m + v_p(R_0^2 - u^2),$$

luego la paridad es la de $v_p(h(u))$ con $h(T) = R_0^2 - T^2$.

Módulo p , $\bar{h}(T) = \bar{A}^2 - T^2$ con $\bar{A} \neq 0$ tiene exactamente $r = 2$ raíces simples en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$: $T \equiv \pm \bar{A}$. Por Theorem 5.1, para $t \geq 1$ (el caso $t = 0$ no contribuye a sumas de valuación):

$$\mathbb{P}(v_p(h(u)) = t) = \frac{2}{p^t}.$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}(v_p(h(u)) \text{ impar}) = \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(v_p(h(u)) = 2j + 1) = \sum_{j \geq 0} \frac{2}{p^{2j+1}} = \frac{2/p}{1 - 1/p^2} = \frac{2p}{p^2 - 1}.$$

Finalmente,

$$\mathbb{P}(v_p(M_R(c)) \text{ impar}) = \frac{p-1}{p^{m+1}} \cdot \frac{2p}{p^2 - 1} = \frac{2}{p^m(p+1)}.$$

Esto concluye. \square

Observación 5.4 (Lectura intuitiva). En $m = 0$, la probabilidad de fallo en un inerte impar es $2/(p+1)$ y por tanto la probabilidad de pasar el filtro es $(p-1)/(p+1)$. Esto explica por qué unos pocos inertes pequeños pueden dominar la constante (p.ej. $p = 3, 5$ para $\Delta = -7$).

5.3 Primos ramificados impares en Heegner: caso explícito ($\Delta = -3, p = 3$)

En la lista de discriminantes de Heegner $h(\Delta) = 1$, cada primo impar $p \mid \Delta$ puede afectar el conteo cuando $v_p(R) > 0$. El caso que desarrollamos de forma completamente explícita en el cuerpo del texto es $(\Delta, p) = (-3, 3)$. El análisis completo (incluyendo la caracterización del grupo de normas de unidades módulo 3 y el conteo en la capa crítica) se presenta en el Apéndice, Section B.5, donde se prueba la fórmula cerrada

$$\sigma_{3,-3}^{(m)} = \frac{2}{3^{m+1}}.$$

Para otros Heegner impares ($\Delta = -7, -11, -19, -43, -67, -163$), el primo $|\Delta|$ también induce oscilación visible al variar $v_p(R)$; esto se refleja en el refinamiento H_Δ^\star de la Sección 9.

6 Capítulo 2-ádico: el interruptor racional en el caso inerte

6.1 Clasificación de 2 (incluida para no depender de folklore)

Lema 6.1 (Clasificación de 2 por congruencia módulo 8). *Sea $\Delta < 0$ discriminante fundamental.*

1. *Si Δ es par fundamental (ej. $\Delta = -4, -8$), entonces 2 es ramificado.*
2. *Si Δ es impar fundamental, entonces $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$.*
 - $\Delta \equiv 1 \pmod{8} \implies 2 \text{ split.}$
 - $\Delta \equiv 5 \pmod{8} \implies 2 \text{ inerte.}$

6.2 Un lema 2-ádico auxiliar (para que la prueba no “salte”)

Lema 6.2 (Suma y diferencia de impares en \mathbb{Z}_2). *Si $a, b \in \mathbb{Z}_2$ son impares, entonces $a \pm b$ son pares y exactamente uno de ellos tiene valuación 1. Más precisamente, uno de $a \pm b$ es $\equiv 2 \pmod{4}$ y el otro es $\equiv 0 \pmod{4}$.*

Demostración. Si $a \equiv b \pmod{4}$, entonces $a - b \equiv 0 \pmod{4}$ y $a + b \equiv 2 \pmod{4}$. Si $a \equiv -b \pmod{4}$, se invierte el rol. En cualquier caso, ambos son pares y sólo uno es múltiplo de 4. \square

6.3 Teorema 2-ádico en el caso inerte

Antes de probar el teorema principal, aislamos una propiedad geométrica elemental de la medida de Haar que se usa implícitamente al “contar potencias de 2 adicionales”.

Lema 6.3 (Valuación geométrica condicionada). *Si X es una variable aleatoria uniforme en \mathbb{Z}_2 (Haar), entonces la valuación de X condicionada a estar en un subgrupo $2^k\mathbb{Z}_2$ sigue una ley geométrica desplazada:*

$$\mathbb{P}(v_2(X) = j \mid X \in 2^k\mathbb{Z}_2) = \frac{1}{2^{j-k+1}}, \quad \forall j \geq k.$$

En particular, si sabemos que $X \in 4\mathbb{Z}_2$, entonces $\mathbb{P}(v_2(X) = j) = 2^{-(j-1)}$ para $j \geq 2$.

Para el lugar 2 usamos la misma notación $M_R(c)$ (o $F_R(c)$ si se quiere enfatizar la variable muda) consistente con el resto del texto.

Teorema 6.4 (Densidad local 2-ádica en el caso inerte). *Supongamos que 2 es inerte en K (impar fundamental con $\Delta \equiv 5 \pmod{8}$). Sea $m = v_2(R)$ y sea c uniforme en \mathbb{Z}_2 (Haar). Entonces*

$$\sigma_{2,\Delta}^{(m)} := \mathbb{P}(v_2(M_R(c)) \text{ par})$$

satisface la fórmula cerrada

$$\sigma_{2,\Delta}^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}.$$

En particular, para R impar ($m = 0$),

$$\sigma_{2,\Delta}^{(0)} = \frac{2}{3}.$$

Corolario 6.5 (Fórmula cerrada para $H_\Delta(R)$). *El factor inercial toma la forma explícita:*

$$H_\Delta(R) = \prod_{\substack{p \mid R \\ p \text{ inerte}}} h_p(v_p(R)),$$

donde el multiplicador local $h_p(m) = \sigma_{p,\Delta}^{(m)} / \sigma_{p,\Delta}^{(0)}$ es:

- Para $p \geq 3$ inerte:

$$h_p(m) = \frac{p^m(p+1)-2}{p^m(p-1)}.$$

- Para $p = 2$ inerte (si aplica):

$$h_2(m) = \frac{3 \cdot 2^m - 1}{2^{m+1}}.$$

Demostración. Escribimos $R = 2^m r$ con r impar y descomponemos por capas $t = v_2(c)$.

Paso 1: fuera de la capa crítica $t \neq m$ no hay defecto. Si $t < m$, escribimos $c = 2^t c'$ con c' impar. Entonces

$$R \pm c = 2^t (2^{m-t} r \pm c'),$$

y como $2^{m-t}r$ es par y c' impar, el paréntesis es impar, luego $v_2(R \pm c) = t$. Si $t > m$, escribimos $c = 2^m \cdot 2^{t-m} c'$ con $2^{t-m}c'$ par y

$$R \pm c = 2^m (r \pm 2^{t-m} c'),$$

con paréntesis impar; por tanto $v_2(R \pm c) = m$. En ambos casos

$$v_2(M_R(c)) = v_2(R - c) + v_2(R + c) = 2 \min\{t, m\},$$

que es par.

Paso 2: masa de la capa crítica. La probabilidad de $v_2(c) = m$ en \mathbb{Z}_2 es

$$\mathbb{P}(v_2(c) = m) = 2^{-(m+1)}.$$

Paso 3: defecto condicionado a $v_2(c) = m$. Condicionamos a $v_2(c) = m$ y escribimos $c = 2^m c'$ con c' impar uniforme entre impares 2-ádicos. Entonces

$$v_2(M_R(c)) = 2m + v_2(r - c') + v_2(r + c').$$

Por Theorem 6.2, como r y c' son impares, exactamente uno de $r \pm c'$ tiene valuación 1 y el otro tiene valuación ≥ 2 . Luego existe $k \geq 2$ tal que

$$\{v_2(r - c'), v_2(r + c')\} = \{1, k\}, \quad \Rightarrow \quad v_2(r - c') + v_2(r + c') = 1 + k.$$

Así, la paridad de $v_2(M_R(c))$ es par si y sólo si k es impar.

Nos queda calcular $\mathbb{P}(k \text{ impar})$. Partimos en dos ramas equiprobables según clases módulo 4:

$$\mathcal{A}_+ := \{c' \equiv r \pmod{4}\}, \quad \mathcal{A}_- := \{c' \equiv -r \pmod{4}\},$$

cada una de masa $1/2$ dentro de las unidades impares.

En \mathcal{A}_+ se tiene $v_2(r - c') \geq 2$ y $v_2(r + c') = 1$. Definiendo $X_+ = (r - c')/2$, resulta $X_+ \in 2\mathbb{Z}_2$ y

$$k = v_2(r - c') = 1 + v_2(X_+).$$

Por Theorem 6.3, condicionado a $X_+ \in 2\mathbb{Z}_2$:

$$\mathbb{P}(v_2(X_+) = j) = 2^{-j} \quad (j \geq 1).$$

Entonces

$$\mathbb{P}(k \text{ impar} \mid \mathcal{A}_+) = \mathbb{P}(1 + v_2(X_+) \text{ impar}) = \sum_{\substack{j \geq 1 \\ j \text{ par}}} 2^{-j} = \frac{1}{3}.$$

En \mathcal{A}_- se intercambian los papeles de $r - c'$ y $r + c'$. Definiendo $X_- = (r + c')/2 \in 2\mathbb{Z}_2$, el mismo argumento da

$$\mathbb{P}(k \text{ impar} \mid \mathcal{A}_-) = \frac{1}{3}.$$

Por la ley de probabilidad total:

$$\mathbb{P}(k \text{ impar}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Luego, condicionado a $v_2(c) = m$, el *éxito* (paridad par) ocurre con probabilidad $1/3$ y el *fallo* con probabilidad $2/3$.

Paso 4: combinar.

$$\mathbb{P}(\text{fallo}) = \mathbb{P}(v_2(c) = m) \cdot \mathbb{P}(\text{fallo} \mid v_2(c) = m) = 2^{-(m+1)} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3 \cdot 2^m}.$$

Por complemento,

$$\sigma_{2,\Delta}^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}.$$

□

Corolario 6.6 (Contraste: caso gaussiano $\Delta = -4$ (2 ramificado)). *En $K = \mathbb{Q}(i)$ el primo 2 es ramificado. La condición clásica para ser suma de dos cuadrados impone paridad en exponentes de primos $p \equiv 3$ (mód 4), pero no introduce una obstrucción específica en v_2 del tipo “paridad forzada”. En el lenguaje de este trabajo: 2 no pertenece al conjunto de primos inertes y, por tanto, no contribuye un factor del tipo $\sigma_{2,\Delta}^{(m)}$ al filtro inerte. En particular, el “interruptor” 2-ádico que aparece cuando 2 es inerte está ausente en $\Delta = -4$.*

Observación 6.7 (Lectura del factor racional en el caso 2-inerte). En discriminantes con 2 inerte, el Teorema 6.4 fija un factor racional explícito en función de $m = v_2(R)$. En particular, para R impar es exactamente $2/3$. Cuando se adopta la convención alternativa $R = 2r$ (ver Theorem 1.1), el caso base cambia porque $v_2(R) = v_2(2r) = v_2(r) + 1$.

7 Modelo global y baseline canónico: por qué aparece ζ y por qué aparece $e^{-\gamma}$

7.1 La conjetura global en forma canónica

Conjetura 7.1 (Ley global (criba de dimensión 1 con factor inercial)). *Para cada $\Delta < 0$ fundamental existe una constante $C_\infty(\Delta) > 0$ tal que*

$$N_\Delta(R) \sim \frac{C_\infty(\Delta) H_\Delta(R) R}{\log R} \quad (R \rightarrow \infty).$$

Equivalentemente:

$$C_{\sigma,\Delta}(R) = \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta(R) R} \longrightarrow C_\infty(\Delta).$$

Observación 7.2 (Input necesario: nivel de distribución). Para convertir esta conjetura en teorema (vía criba asintótica), no basta con las densidades locales. Se requiere probar un resultado de “nivel de distribución” para la secuencia $M_R(c) = R^2 - c^2$: demostrar que el término de error en el conteo de soluciones módulo d es controlable en promedio para d hasta R^θ con algún $\theta > 0$ (idealmente θ grande). Sin este input global analítico, las densidades p -ádicas sólo describen la estructura local, no la distribución asintótica del conteo.

7.2 La identidad madre: $\zeta_K = \zeta L$

El campo cuadrático K tiene zeta de Dedekind $\zeta_K(s)$. Para extensiones cuadráticas:

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi_\Delta).$$

Esta identidad codifica splitting primo a primo y explica por qué el término natural del campo es $L(1, \chi_\Delta)$: como $\zeta(s) \sim 1/(s-1)$ y $L(s, \chi_\Delta)$ es holomorfa y no nula en $s = 1$ para $\Delta < 0$,

$$\text{Res}_{s=1} \zeta_K(s) = L(1, \chi_\Delta).$$

7.3 El baseline arquimediano y la fórmula de clase

Teorema 7.3 (Baseline canónico: residuo de ζ_K y fórmula de clase). *Sea $\Delta < 0$ fundamental y $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$. Definimos*

$$C_{\text{base}}(\Delta) := 2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta) = 2e^{-\gamma} \text{Res}_{s=1} \zeta_K(s).$$

Si Δ es de Heegner ($h(\Delta) = 1$), entonces

$$C_{\text{base}}(\Delta) = \frac{4\pi e^{-\gamma}}{w(\Delta)\sqrt{|\Delta|}}.$$

Demostración. La primera igualdad se sigue de $\text{Res}_{s=1} \zeta_K(s) = L(1, \chi_\Delta)$. La fórmula analítica del número de clases para campos cuadráticos imaginarios da

$$L(1, \chi_\Delta) = \frac{2\pi h(\Delta)}{w(\Delta)\sqrt{|\Delta|}}.$$

Para Heegner, $h(\Delta) = 1$. □

7.4 Por qué aparece $e^{-\gamma}$ (y por qué esto es inevitable)

La constante $e^{-\gamma}$ aparece como renormalización natural de la divergencia armónica $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$: el teorema de Mertens implica

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log x}.$$

Toda criba de dimensión 1 produce un factor $e^{-\gamma}$ al convertir “producto sobre primos” en “escala $1/\log$ ”. En nuestro caso, la parte del campo se canaliza por $L(1, \chi_\Delta)$; el resto pertenece a la geometría aritmética de la familia $M_R(c)$.

7.5 Descomposición canónica

La forma natural de la constante final es

$$C_\infty(\Delta) = \underbrace{2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta)}_{C_{\text{base}}(\Delta)} \times \underbrace{\kappa_2(\Delta) \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta)}_{\mathfrak{S}_\Delta}.$$

Equivalentemente,

$$\mathfrak{S}_\Delta = \kappa_2(\Delta) \mathfrak{S}_{\Delta, \text{odd}}, \quad \mathfrak{S}_{\Delta, \text{odd}} := \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta).$$

Formalmente, los factores $\kappa_p(\Delta)$ se definen como límites de densidades locales normalizadas por el cociente de primer orden

$$(1 - 1/p)(1 - \chi_\Delta(p)/p)^{-1},$$

de modo que la contribución residual empieza en orden p^{-2} :

$$\kappa_p(\Delta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}/p^k \mathbb{Z}}(M_R(c) \in N(O_{K,p}))}{(1 - 1/p)(1 - \chi_\Delta(p)/p)^{-1}}.$$

Este límite estabiliza en cuanto p^k supera la ramificación y la capa crítica (que es $m = 0$ para \mathfrak{S}_Δ). En Section 11 mostramos que, con esta normalización, el producto infinito queda absolutamente convergente. Si definimos la parte impar

$$\mathfrak{S}_{\Delta, \text{odd}} := \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta),$$

entonces $\mathfrak{S}_\Delta = \kappa_2(\Delta) \mathfrak{S}_{\Delta, \text{odd}}$ (cuando Δ tiene 2 inerte o ramificado). donde $\kappa_p(\Delta)$ es un factor local (serie singular) capturando la interacción específica del evento “ $M_R(c)$ es norma” con la estructura p -ádica del polinomio y con el tipo del primo (inerte/split/ramificado).

8 Estructura Euleriana: aparición forzada de ζ , L y expansión a orden p^{-2}

8.1 Factores locales $\kappa_p(\Delta)$: definición operacional

En este trabajo distinguimos dos niveles:

- *Filtro inerte de primer orden*: para primos inertes (incluido $p = 2$ cuando es inerte), la condición local “ $M_R(c)$ es norma” reduce a una restricción explícita sobre $v_p(M_R(c))$ (paridad), cuya densidad es $\sigma_{p,\Delta}^{(m)}$.
- *Serie singular fina*: incluso si todas las densidades marginales $\sigma_{p,\Delta}^{(0)}$ están dadas, los eventos locales no son independientes porque $M_R(c)$ tiene forma cuadrática rígida; esto introduce un producto convergente de correcciones de orden p^{-2} .

Para fijar notación, definimos *heurísticamente* un factor local de primer orden como el límite (o valor base):

$$\kappa_p^{(0)}(\Delta) := \begin{cases} \sigma_{p,\Delta}^{(0)}, & p \text{ inerte (incl. } p = 2 \text{ si aplica),} \\ 1, & p \text{ split,} \\ \kappa_p^{\text{ram}}(\Delta), & p \mid \Delta \text{ (ramificado).} \end{cases}$$

Para $p \geq 3$ inerte, el Teorema 5.3 da $\kappa_p^{(0)}(\Delta) = (p-1)/(p+1)$. Para $p = 2$ inerte, el Teorema 6.4 da $\kappa_2^{(0)}(\Delta) = 2/3$. Para la teoría completa, κ_p sería la densidad del evento “ $M_R(c)$ es localmente norma” normalizada por el factor de criba standard. Los ramificados son finitos y su contribución se absorbe en un factor finito.

Lema 8.1 (Renormalización correcta y convergencia de la parte singular). *Sea $\chi = \chi_\Delta$ el carácter de Kronecker. Para todo primo impar $p \nmid \Delta$ definimos el factor de primer orden*

$$\kappa_p^{(0)}(\Delta) := \begin{cases} 1, & \chi(p) = +1 \text{ (split),} \\ \sigma_{p,\Delta}^{(0)} = \frac{p-1}{p+1}, & \chi(p) = -1 \text{ (inerte).} \end{cases}$$

Entonces vale la identidad exacta

$$\kappa_p^{(0)}(\Delta) = \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}} \quad (p \geq 3, p \nmid \Delta).$$

En particular, el producto impar truncado

$$P_\Delta^{\text{odd}}(x) := \prod_{3 \leq p \leq x} \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}}$$

incorpora exactamente el primer orden de todos los primos impares no ramificados; toda discrepancia restante en la serie singular proviene únicamente del conjunto finito $p \mid 2\Delta$ y de correcciones finas de orden $\geq p^{-2}$.

Demostración. Para $p \nmid \Delta$ tenemos $\chi(p) = \pm 1$ y por cálculo directo: si $\chi(p) = +1$ entonces $\frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p}} = 1$; si $\chi(p) = -1$ entonces

$$\frac{1 - \frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{p-1}{p+1} = \sigma_{p,\Delta}^{(0)}.$$

Esto prueba la identidad. Como el conjunto de primos $p \mid 2\Delta$ es finito, sus factores contribuyen un multiplicador finito. Las correcciones verdaderamente “locales finas” empiezan en orden p^{-2} (véase (8.3) y el Teorema 11.1), por lo que el producto residual converge absolutamente. \square

8.2 Una identidad de Euler que selecciona exactamente a los inertes

Sea $\chi = \chi_\Delta$ el carácter cuadrático de Kronecker. Para $p \nmid \Delta$ tenemos $\chi(p) = \pm 1$. Obsérvese que para $p \mid \Delta$ se cumple la identidad exacta

$$\frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}} = \begin{cases} 1, & \chi(p) = +1 \text{ (split)}, \\ \frac{p-1}{p+1}, & \chi(p) = -1 \text{ (inerte)}. \end{cases} \quad (8.1)$$

Es decir: para primos impares (donde la identidad es exacta con la densidad local), el cociente $(1 - 1/p)/(1 - \chi(p)/p)$ no ve a los split y multiplica exactamente el factor $(p-1)/(p+1)$ sobre los inertes.

Observación 8.2 (Advertencia sobre el lugar 2). Si $p = 2$ es inerte, la fórmula (8.1) daría $\frac{1/2}{1+1/2} = 1/3$, mientras que la densidad local correcta es $\sigma_{2,\Delta}^{(0)} = 2/3$ (Teorema 6.4). Por esta razón, la identidad Euleriana debe restringirse a la parte impar, dejando el lugar 2 como un factor separado (tratado en el capítulo 2-ádico).

8.3 Producto truncado y corrección ramificada (arreglo canónico)

Para evitar ambigüedades con $p \mid \Delta$ y separar la anomalía en $p = 2$, definimos el producto **ímpar**:

$$P_\Delta^{\text{odd}}(x) := \prod_{3 \leq p \leq x} \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi_\Delta(p)}{p}}.$$

Cuando $p \mid \Delta$ ($p \geq 3$) se tiene $\chi_\Delta(p) = 0$ y el factor correspondiente es simplemente $(1 - 1/p)$. Esta definición captura la “física” de todos los primos impares. El factor 2-ádico se inserta explícitamente a posteriori.

8.4 Aparición inevitable de $e^{-\gamma}$ y del residuo $L(1, \chi_\Delta)$

Usando productos de Euler,

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{\chi_\Delta(p)}{p}\right)^{-1} \longrightarrow L(1, \chi_\Delta) \quad (x \rightarrow \infty),$$

mientras que por Mertens

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log x}.$$

Combinando, se obtiene el límite canónico (sin factores finitos extra):

$$P_\Delta(x) := \prod_{p \leq x} \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi_\Delta(p)}{p}}, \quad P_\Delta^{\text{odd}}(x) := \prod_{3 \leq p \leq x} \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi_\Delta(p)}{p}}.$$

Entonces

$$P_\Delta(x) = P_\Delta^{\text{odd}}(x) \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{\chi_\Delta(2)}{2}} = P_\Delta^{\text{odd}}(x) \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\chi_\Delta(2)}{2}}.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \log x \cdot P_\Delta(x) = e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta).} \quad (8.2)$$

Este es exactamente el mecanismo por el cual, en dimensión 1, el renormalizador $e^{-\gamma}$ es forzado, y el campo entra únicamente vía $L(1, \chi_\Delta)$ (equivalentemente, vía $\text{Res}_{s=1} \zeta_K(s)$).

8.5 Expansión logarítmica: por qué emergen $\sum \chi(p)/p^2$ y valores $L(2m, \chi)$

La identidad (8.1) también permite una expansión uniforme. Para $p \nmid \Delta$,

$$\log \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}} = \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) = - \sum_{k \geq 1} \frac{1 - \chi(p)^k}{k p^k}.$$

Como $\chi(p)^2 = 1$ para $p \nmid \Delta$, se tiene $1 - \chi(p)^k = 0$ si k es par y $1 - \chi(p)$ si k es impar. Luego

$$\log \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}} = -(1 - \chi(p)) \sum_{j \geq 0} \frac{1}{(2j+1)p^{2j+1}} = -\frac{1 - \chi(p)}{p} + O\left(\frac{1}{p^3}\right). \quad (8.3)$$

Esto explica el coeficiente “armónico” unificado:

$$\alpha(\chi(p)) = -(1 - \chi(p)), \quad \text{es decir: } \alpha = 0 \text{ en split, } \alpha = -2 \text{ en inerte, } \alpha = -1 \text{ en ramificado.}$$

Al sustraer el término principal $\frac{1 - \chi(p)}{p}$, el resto es $O(p^{-3})$ y por tanto absolutamente sumable. Esto permite definir una constante renormalizada *absolutamente convergente*:

$$\mathcal{M}_\Delta := \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p}}{1 - \frac{\chi(p)}{p}} \exp\left(\frac{1 - \chi(p)}{p}\right), \quad \log \mathcal{M}_\Delta = \sum_p O(p^{-3}).$$

La cota anterior se entiende salvo un conjunto finito de primos, donde la corrección puede escribirse como $O(p^{-2})$. En particular, los términos de orden p^{-2} que aparecen cuando se estudian correcciones más finas se expresan naturalmente en términos de productos convergentes en $s \geq 2$:

$$\frac{\zeta(2)}{L(2, \chi_\Delta)} = \prod_p \frac{1 - \frac{\chi_\Delta(p)}{p^2}}{1 - \frac{1}{p^2}}, \quad \log \frac{\zeta(2)}{L(2, \chi_\Delta)} = \sum_p \frac{1 - \chi_\Delta(p)}{p^2} + O\left(\sum_p \frac{1}{p^4}\right).$$

Observación 8.3 (Lectura conceptual). (8.2) explica el baseline $e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta)$ (y por ende $2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta)$) en la constante final). La identidad con $\zeta(2)/L(2, \chi_\Delta)$ explica por qué las correcciones finas de la serie singular “huelen” a valores de ζ y L en enteros: las correcciones verdaderamente locales empiezan en orden p^{-2} .

9 Evidencia computacional: cómo se estima $C_\infty(\Delta)$ y por qué la cola manda

9.1 Qué se computa

Para cada R en una malla (en los experimentos principales: $R = 101 + 20k$, i.e. $R \equiv 1 \pmod{20}$), por lo que R es impar y $v_5(R) = 0$; los CSV conservan el sufijo histórico “step10”) se computa:

$$N_\Delta(R), \quad H_\Delta(R), \quad C_{\sigma, \Delta}(R) = \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta(R) R}.$$

La generación primaria de $N_\Delta(R)$ queda automatizada en un script dedicado, con CLI reproducible y semilla explícita para los modos estocásticos. Esta malla principal fija además $v_2(R) = 0$, por lo que no explora estratos 2-ádicos ni estratos con $v_5(R) > 0$; esos casos requieren mallas complementarias. Para ello, añadimos una malla complementaria por estratos exactos

$$(v_2(R), v_5(R)) \in \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (0, 2)\},$$

parametrizada como $R = 2^\alpha 5^\beta q$ con $(q, 10) = 1$. En el caso de Heegner ($h(\Delta) = 1$) es particularmente eficiente usar el principio local-global: un racional $x \in \mathbb{Q}^\times$ es norma global en K^\times si y solo si es norma local en todo lugar (Proposición 2.2). En los CSV principales fijamos una convención operativa *inerte-only*: el observable se normaliza únicamente con los factores inertes (incluyendo $p = 2$ solo si es inerte y divide a R). Para nuestro conteo, esto se traduce en:

- Para todo primo impar $p \nmid \Delta$, el criterio local se reduce a la *paridad*: si p es inerte entonces es necesario y suficiente que $v_p(n)$ sea par; si p es split no hay obstrucción.
- Los primos ramificados se dejan fuera de $H_\Delta(R)$ en esta convención base y se estudian por separado mediante el refinamiento H_Δ^\star (ver Section 9.4).

Usamos factorización directa con precomputación de primos (criba de Eratóstenes modificada) para verificar esta paridad eficientemente.

9.2 Por qué el promedio no es el límite

En problemas de criba es típico que el acercamiento al límite tenga correcciones del tipo $1/\log R$. Así, un promedio sobre todo el rango mezcla regímenes finitos con el régimen asintótico y sesga hacia arriba/abajo. Por eso se usa un ajuste sobre la cola.

9.3 Ajuste de cola (ansatz de relajación)

Usamos el modelo empírico estable:

$$C_{\sigma,\Delta}(R) \approx C_\infty(\Delta) + \frac{a}{\log R} \quad (R \text{ grande}),$$

y estimamos $C_\infty(\Delta)$ por regresión lineal de $C_{\sigma,\Delta}(R)$ contra $1/\log R$ restringiendo a $R \geq 10^6$ (y opcionalmente bindeando en cuantiles de $\log R$ para estabilizar varianza). Como diagnóstico de sesgo de truncación/modelo, también ajustamos

$$C_{\sigma,\Delta}(R) \approx C_\infty(\Delta) + \frac{a}{\log R} + \frac{b}{\log^2 R}$$

en la misma cola y en la rejilla $R_{\text{tail}} \in \{10^6, 2 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6\}$. Así, reportamos dos capas de incertidumbre para C_∞ :

$$\text{EE}_{\text{WLS}} \quad (\text{in-model}), \quad \text{EE}_{\text{sist}} := \max_{R_{\text{tail}}} |C_\infty(R_{\text{tail}}) - C_\infty(10^6)|.$$

En toda la familia se observa $\text{EE}_{\text{sist}} > \text{EE}_{\text{WLS}}$ (entre 3,8× y 19,9×), pero además domina el término de modelo: $\text{EE}_{\text{full}}/\sqrt{\text{EE}_{\text{WLS}}^2 + \text{EE}_{\text{sist}}^2} \in [7,65, 16,88]$, lo que confirma que la metrología de C_∞ debe separar incertidumbre estadística in-model y sensibilidad sistemática de cola/modelo.

9.4 Refinamiento ramificado en cola: H_Δ^\star

Sobre los mismos CSV aplicamos el post-procesado

$$H_\Delta^\star(R) = H_\Delta(R) \prod_{\substack{p|\Delta \\ p \text{ impar}}} p^{-v_p(R)}, \quad C_{\sigma,\Delta}^\star(R) := \frac{N_\Delta(R) \log R}{H_\Delta^\star(R) R}.$$

Equivalentemente:

$$C_{\sigma,\Delta}^\star(R) = C_{\sigma,\Delta}(R) \prod_{\substack{p|\Delta \\ p \text{ impar}}} p^{v_p(R)}.$$

Cuadro 1. Heegner: baseline canónico $C_{\text{base}}(\Delta)$ y ajuste de cola $C_\infty(\Delta)$ usando $C_{\sigma,\Delta}(R) \approx C_\infty + a/\log R$ en $R \geq 10^6$ (200 bins por cuantiles). Se reporta EE_{WLS} (incertidumbre in-model) del WLS en bins (pesos por tamaño de bin).

Δ	C_{base}	C_∞	EE _{WLS} (C_∞)	a	EE _{WLS} (a)	\mathfrak{S}_Δ
-163	0,276315	0,156052	0,000063	-0,010000	0,001000	0,564763
-67	0,430984	0,241297	0,000107	0,272000	0,002000	0,559875
-43	0,537977	0,303469	0,000140	0,400000	0,002000	0,564093
-19	0,809322	0,473185	0,000208	0,590000	0,003000	0,584669
-11	1,063658	0,650708	0,000281	0,666000	0,004000	0,611765
-8	1,247249	0,692068	0,000070	0,819000	0,001000	0,554875
-7	1,333366	0,431485	0,000186	0,513000	0,003000	0,323606
-4	0,881938	0,735033	0,000064	0,775000	0,001000	0,833428
-3	0,678917	0,566005	0,000065	0,563000	0,001000	0,833689

Cuadro 2. Descomposición de incertidumbre de cola para $C_\infty(\Delta)$. Modelo de referencia: $C_\infty + a/\log R$ en $R_{\text{tail}} = 10^6$. Se reporta EE_{WLS}, la sensibilidad de truncación EE_{sist} en $R_{\text{tail}} \in \{10^6, 2 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6\}$, y el desplazamiento de modelo $|\Delta_{\text{model}}| := |C_\infty^{(2)} - C_\infty^{(1)}|$ entre $C_\infty + a/\log R + b/\log^2 R$ y $C_\infty + a/\log R$ en $R_{\text{tail}} = 10^6$. Además, EE_{full} := $\sqrt{\text{EE}_{\text{WLS}}^2 + \text{EE}_{\text{sist}}^2 + |\Delta_{\text{model}}|^2}$.

Δ	$C_\infty^{(1)}$	EE _{WLS}	EE _{sist}	$ \Delta_{\text{model}} $	EE _{full}
-163	0,156052	0,000063	0,000530	0,004047	0,004082
-67	0,241297	0,000107	0,000401	0,006613	0,006626
-43	0,303469	0,000140	0,001303	0,022085	0,022124
-19	0,473185	0,000208	0,001055	0,017593	0,017626
-11	0,650708	0,000281	0,001388	0,022101	0,022146
-8	0,692068	0,000070	0,001398	0,019602	0,019652
-7	0,431485	0,000186	0,000786	0,011712	0,011740
-4	0,735032	0,000064	0,001259	0,019624	0,019665
-3	0,566005	0,000065	0,001074	0,016527	0,016562

Cuadro 3. Efecto del refinamiento ramificado en la cola $R \in [10^6, 10^7]$.

Δ	SD($C_{\sigma,\Delta}$)	SD($C_{\sigma,\Delta}^*$)	ratio
-3	0,279000	0,072000	0,259000
-7	0,159000	0,045000	0,283000
-11	0,196000	0,058000	0,296000
-43	0,049000	0,021000	0,423000

La reducción de varianza en la cola es sustancial: Este comportamiento confirma que separar explícitamente el bloque ramificado mejora la estabilidad estadística del ajuste de cola.

Observación 9.1. Los casos $\Delta = -4, -8$ (pares) y $\Delta = -163$ exhiben estabilidad extrema en la cola, mientras que $\Delta = -3$ presenta varianza residual alta. Esto es consistente con el hecho de que en $\Delta = -3$ interviene además el primo ramificado 3 (Apéndice Section B.5) y con la dominancia de primos pequeños en la serie singular.

Observación 9.2 (Lectura inmediata). Para $\Delta = -43, -67, -163$ (donde 2 es inerte) la relación $\mathfrak{S}_\Delta \approx 0,56$ se puede interpretar como producto de un factor 2-ádico explícito (Teorema 6.4) y un factor impar $\mathfrak{S}_{\Delta, \text{odd}}$ (ver Section 11 y Section 8).

9.5 Estabilización visual de $C_{\sigma, \Delta}(R)$

La Figure 5 muestra la convergencia de $C_{\sigma, \Delta}(R)$ hacia el límite $C_\infty(\Delta)$ para los nueve discriminantes de Heegner. La línea roja corresponde al ajuste de cola $C_{\sigma, \Delta}(R) \approx C_\infty(\Delta) + a/\log R$ en la región $R \geq 10^6$.

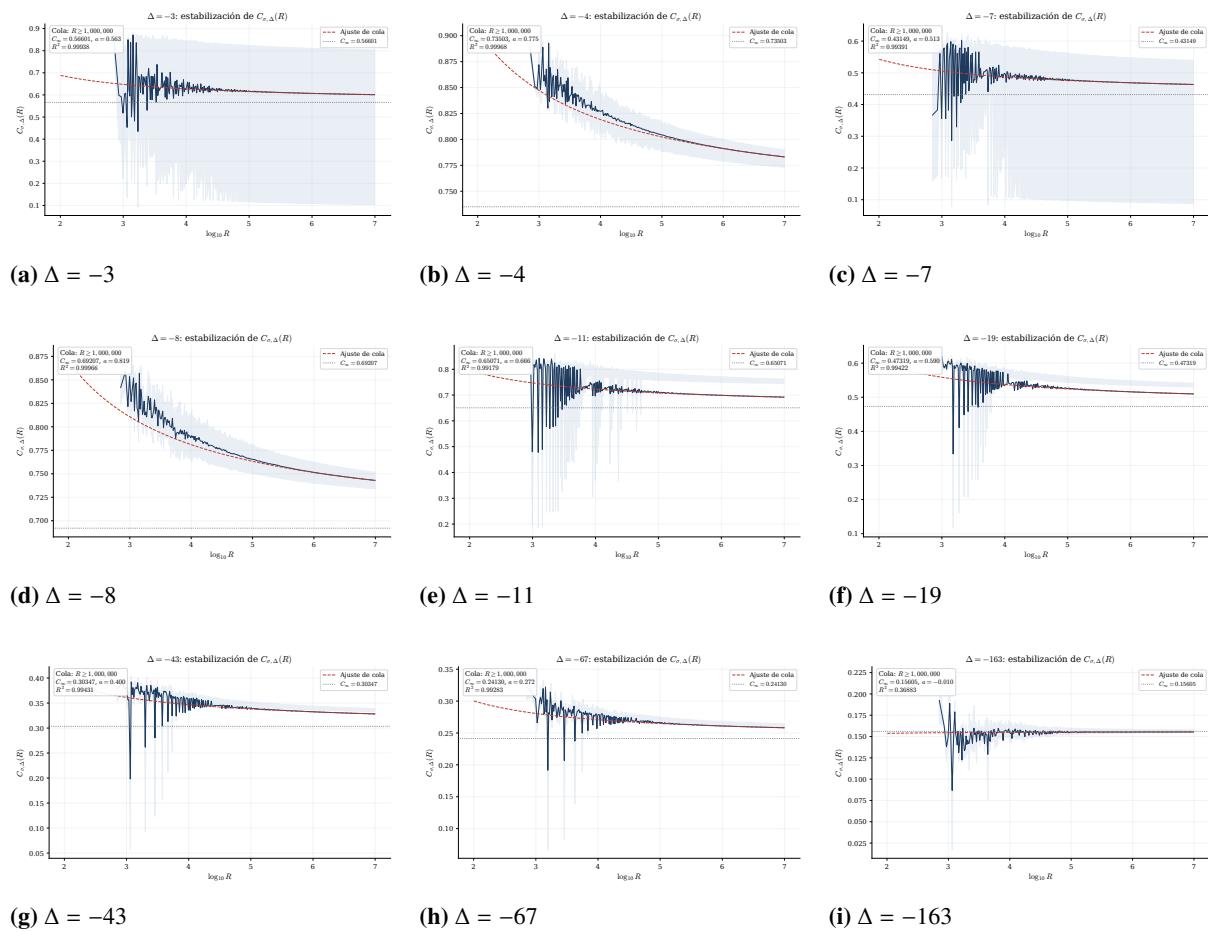


Figura 5. Estabilización de $C_{\sigma, \Delta}(R)$ vs R (escala log) para los nueve discriminantes de Heegner. Línea roja: ajuste de cola $C_{\sigma, \Delta}(R) \approx C_\infty(\Delta) + a/\log R$ para $R \geq 10^6$.

9.6 Comparativa Heegner: el factor singular

La Figure 6 muestra la relación entre la constante empírica $C_\infty(\Delta)$ y el baseline teórico $C_{\text{base}}(\Delta)$. El cociente $\mathfrak{S}_\Delta = C_\infty/C_{\text{base}}$ captura el factor singular de la familia.

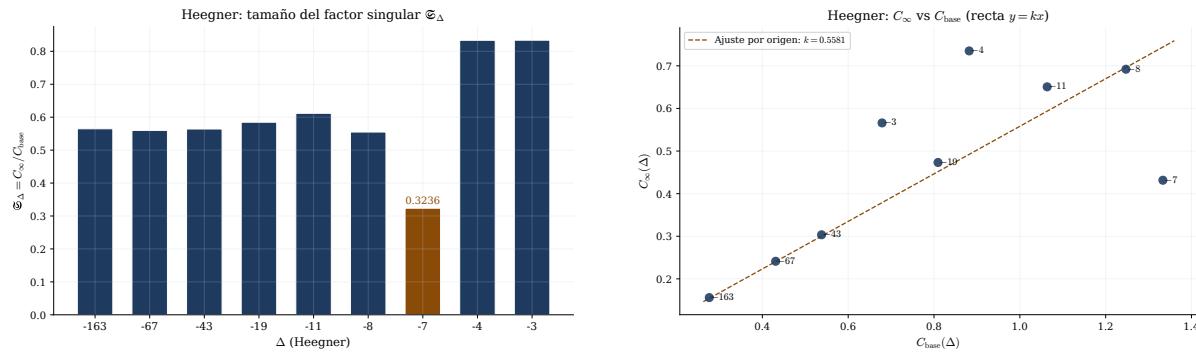


Figura 6. Comparativa Heegner: (a) barra de Σ_{Δ} mostrando el outlier $\Delta = -7$; (b) relación entre constante empírica y baseline teórica.

9.7 Colapso lineal: $C_{\text{raw}}(R)$ vs $H_{\Delta}(R)$

Si $C_{\sigma, \Delta}(R)$ se estabiliza hacia $C_{\infty}(\Delta)$, entonces por la ley global (Conjetura 7.1, o Teorema 12.1 bajo hipótesis analítica):

$$C_{\text{raw}}(R) = \frac{N_{\Delta}(R) \log R}{R} \approx C_{\infty}(\Delta) H_{\Delta}(R).$$

La Figure 7 confirma este colapso lineal: al graficar C_{raw} contra H_{Δ} , la nube se alinea, demostrando que H_{Δ} no es un “fit hack” sino estructura.

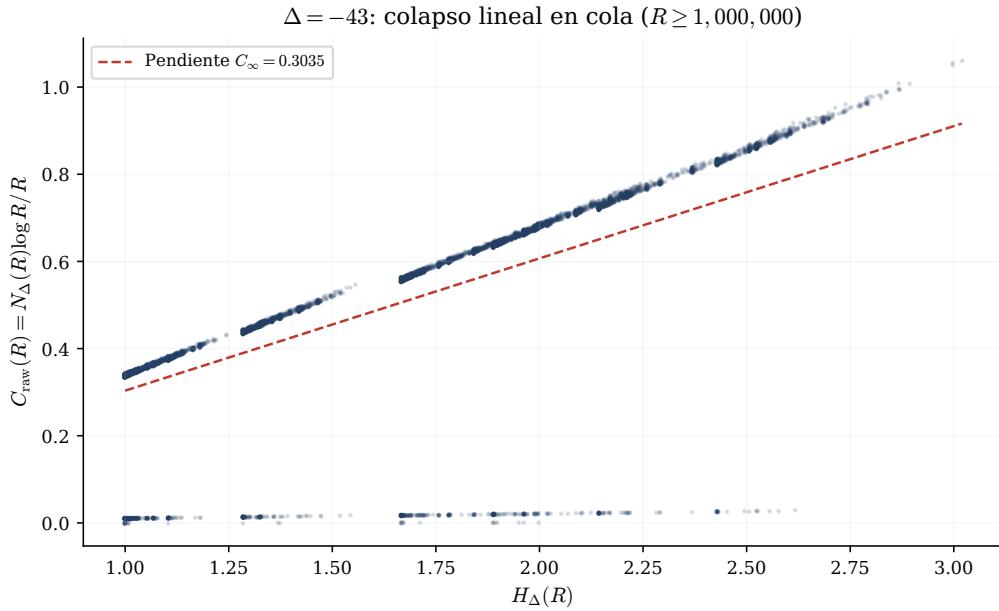


Figura 7. Colapso lineal: $C_{\text{raw}}(R)$ vs $H_{\Delta}(R)$ para $\Delta = -43$. El alineamiento demuestra que H_{Δ} captura la oscilación determinista.

10 Ejemplo de control: el outlier $\Delta = -7$ explicado por inertes pequeños

Ejemplo 10.1 (Producto de pequeños inertes y predicción de primer orden). Para $\Delta = -7$,

$$C_{\text{base}}(-7) = \frac{4\pi e^{-\gamma}}{2\sqrt{7}} \approx 1,333366.$$

En $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$, los primos 3 y 5 son inertes. Si restringimos a R coprimo con 15 (de modo que $v_3(R) = v_5(R) = 0$), entonces el Teorema 5.3 da

$$\sigma_3^{(0)} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_5^{(0)} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3}.$$

El producto de primer orden es

$$\sigma_3^{(0)} \sigma_5^{(0)} = \frac{1}{3},$$

y por tanto la predicción inmediata es

$$C_\infty(-7) \approx C_{\text{base}}(-7) \cdot \frac{1}{3} \approx 0,444.$$

Comparado con $C_\infty(-7) \approx 0,431$ (tabla), la diferencia restante es compatible con correcciones de primos mayores y efectos finitos: lo crucial es que el “desplome” se predice por estructura local, no por accidente.

La Figure 8 muestra el producto parcial de primer orden sobre primos inertes:

$$\prod_{\substack{p \leq x \\ \chi_\Delta(p) = -1}} \frac{p-1}{p+1}.$$

Para $\Delta = -7$, este producto cae rápidamente debido a los pocos inertes pequeños ($p = 3, 5$), explicando el outlier.

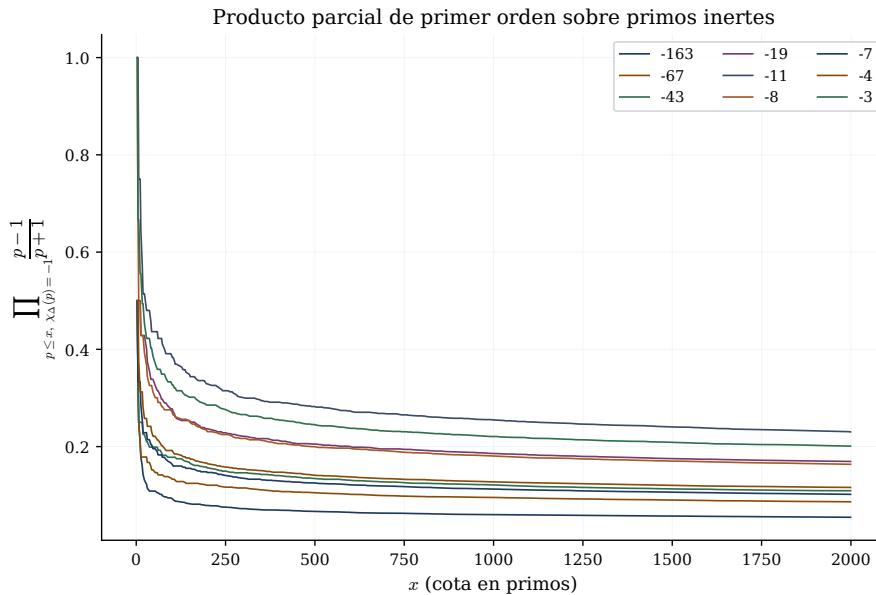


Figura 8. Producto parcial de primer orden sobre primos inertes para los nueve discriminantes de Heegner. La caída de $\Delta = -7$ se explica por pocos inertes pequeños ($p = 3, 5$).

Además, la Figure 9 muestra la dependencia respecto de $v_3(R)$. En la malla principal ($R \equiv 1 \pmod{20}$), se tiene $v_5(R) = 0$ para todo R , de modo que el panel de $p = 5$ funciona como control (sin estratificación adicional). Esta dependencia en $v_3(R)$ es exactamente la que captura el factor inercial $H_\Delta(R)$.

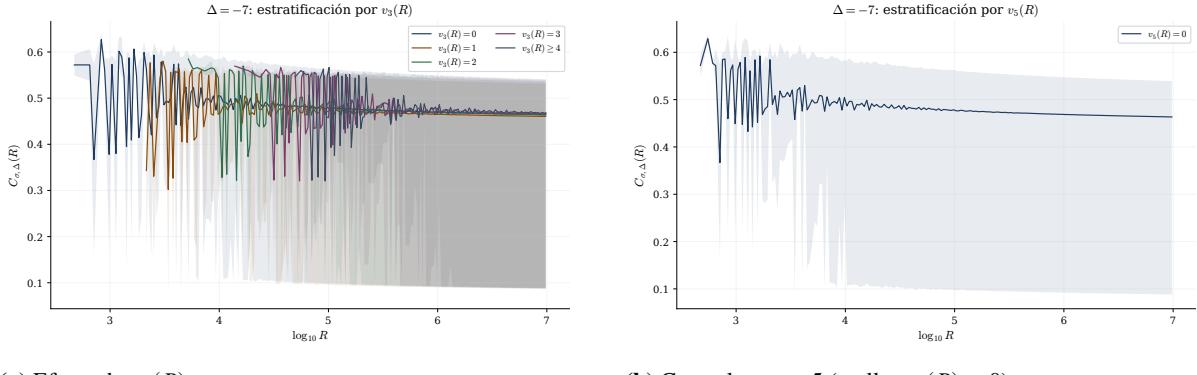


Figura 9. Dependencia del observable $C_{\sigma,-7}(R)$ respecto de la valuación de R para inertes pequeños. Izquierda: estratificación efectiva por $v_3(R)$. Derecha: control para $p = 5$ en la malla $R \equiv 1$ (mód 20) (no hay estratos con $v_5(R) > 0$).

10.1 Predicción de primer orden por primos inertes pequeños

La observación clave del Ejemplo 10.1 se puede cuantificar sistemáticamente: para cada discriminante de Heegner, usamos solo los primos inertes $p \leq 50$ para construir una predicción de primer orden:

$$C_{\infty}^{\text{pred}}(\Delta) := C_{\text{base}}(\Delta) \cdot \prod_{\substack{3 \leq p \leq 50 \\ \chi_{\Delta}(p)=-1}} \frac{p-1}{p+1}.$$

La Figure 10 compara esta predicción con los valores observados $C_{\infty}(\Delta)$ obtenidos del ajuste de cola. El patrón es monótono (predicciones mayores tienden a corresponder a observaciones mayores), pero con subestimación sistemática de escala: el primer orden con inertes pequeños captura parte de la variación relativa entre discriminantes, mientras que la normalización completa requiere factores adicionales (incluyendo el capítulo 2-ádico y correcciones finas de segundo orden $O(p^{-2})$).

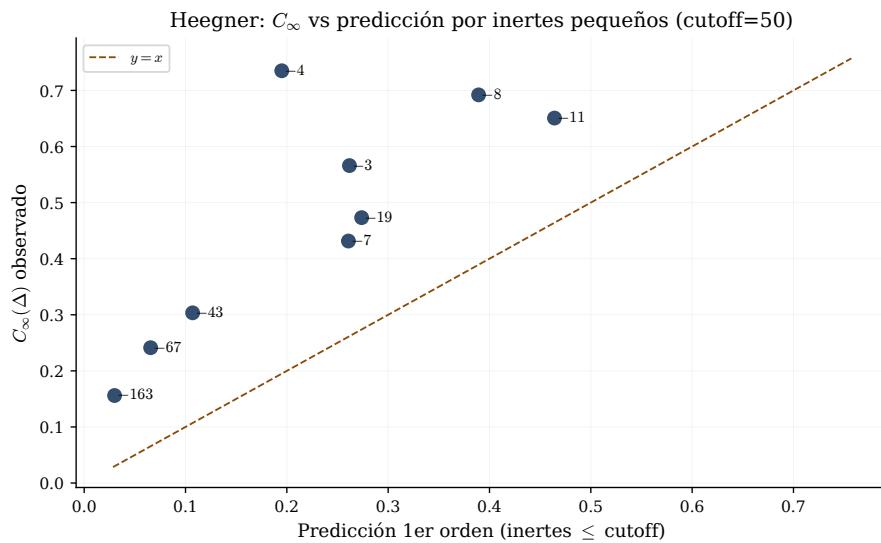


Figura 10. Comparación entre la predicción de primer orden C_{∞}^{pred} (usando solo primos inertes $p \leq 50$) y el valor observado $C_{\infty}(\Delta)$ para los nueve discriminantes de Heegner. La nube conserva orden relativo, pero evidencia subestimación de escala cuando se usa solo primer orden.

11 Regularización tipo Mertens: por qué la serie singular debe converger

Teorema 11.1 (Renormalización universal con coeficientes variables). *Sea $(a_p)_p$ una familia indexada por primos tal que*

$$a_p = \frac{\alpha_p}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right) \quad (p \rightarrow \infty),$$

con $(\alpha_p)_p$ una sucesión complejamente acotada. Entonces, para p suficientemente grande (asumiendo $|a_p| \leq 1/2$ y $1 + a_p \neq 0$), el producto renormalizado

$$\prod_p (1 + a_p) \exp(-\alpha_p/p)$$

converge absolutamente (salvo anulación de un número finito de factores) porque

$$\log((1 + a_p)e^{-\alpha_p/p}) = O(p^{-2}).$$

Demostración. Para $|x|$ pequeño, $\log(1 + x) = x + O(x^2)$. Como $a_p = O(1/p)$, para p grande:

$$\log((1 + a_p)e^{-\alpha_p/p}) = \log(1 + a_p) - \alpha_p/p = \left(\alpha_p/p + O(p^{-2})\right) - \alpha_p/p + O(p^{-2}) = O(p^{-2}).$$

Como $\sum_p p^{-2} < \infty$, la suma de logaritmos converge absolutamente. \square

Corolario 11.2 (Convergencia absoluta de la serie singular normalizada). *Con la normalización de Section 8, supongamos que para p impar grande*

$$\mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}}(M_R(c) \in N(O_{K,p})) = (1 - 1/p)(1 - \chi_\Delta(p)/p)^{-1}(1 + b_p(\Delta)),$$

con $b_p(\Delta) = O(p^{-2})$ uniforme en p (para k suficientemente grande). Entonces

$$\kappa_p(\Delta) = 1 + b_p(\Delta), \quad \log \kappa_p(\Delta) = O(p^{-2}),$$

y en consecuencia el producto

$$\mathfrak{S}_\Delta = \kappa_2(\Delta) \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta)$$

converge absolutamente.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 11.1 con $\alpha_p = 0$ y $a_p = b_p(\Delta)$. Entonces $\log(1 + b_p(\Delta)) = O(p^{-2})$, y como $\sum_p p^{-2} < \infty$ se obtiene convergencia absoluta de la suma de logaritmos, luego del producto. \square

Observación 11.3 (Aplicación a \mathfrak{S}_Δ). La parte de primer orden $(1 - 1/p)(1 - \chi_\Delta(p)/p)^{-1}$ ya está absorbida en el baseline $2e^{-\gamma}L(1, \chi_\Delta)$; la serie singular \mathfrak{S}_Δ recoge únicamente la corrección fina residual.

12 Discusión final: manuscrito blindado y siguiente paso hacia un teorema global

12.1 Lo que ya está “cerrado”

El corazón del paper es local y está completamente sellado:

- Para $p \geq 3$ (inerte), la densidad local es exactamente $\sigma_p^{(m)} = 1 - \frac{2}{p^m(p+1)}$ (Teorema 5.3).

- Para $p = 2$ inerte, la densidad es $\sigma_2^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}$ (Teorema 6.4), y en particular para R impar aparece el racional fijo $2/3$.
- El baseline canónico del campo es $C_{\text{base}}(\Delta) = 2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta)$ (Teorema 7.3), y en Heegner se vuelve cerradamente $\frac{4\pi e^{-\gamma}}{w(\Delta)\sqrt{|\Delta|}}$.
- Los outliers se explican por productos de pequeños inertes (Ejemplo 10.1).

12.2 Hipótesis analítica para el Teorema Global

Lema puente (hipótesis de distribución \mathcal{D}_θ). Existe $\theta > 0$ tal que, para todo $A > 0$ y $Q = R^\theta$, se tiene uniformemente para $q \leq Q$ y $(a, q) = 1$:

$$\#\{1 \leq c \leq R : M_R(c) \equiv a \pmod{q}\} = \frac{R}{q} \rho_q(a) + E(R; q, a),$$

donde

$$\rho_q(a) := \#\{x \pmod{q} : R^2 - x^2 \equiv a \pmod{q}\},$$

y además

$$\sum_{q \leq Q} \max_{(a, q)=1} |E(R; q, a)| \ll_A \frac{R}{(\log R)^A}.$$

Esta es exactamente la pieza analítica que no se demuestra en el manuscrito y que debe obtenerse con técnicas de criba asintótica (Selberg/ β -criba; ver [3, 4]).

12.2.1 Puente analítico: del conteo módulo q al término principal

Queremos estimar

$$N_\Delta(R) = \#\{1 \leq c \leq R : M_R(c) = R^2 - c^2 \text{ es norma en } K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})\}.$$

Definimos $f_\Delta : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ como el indicador multiplicativo de la condición local de norma. Para $p \nmid \Delta$:

$$f_\Delta(p^k) = \begin{cases} 1, & \chi_\Delta(p) = +1 \text{ (split)}, \\ 1, & \chi_\Delta(p) = -1 \text{ y } k \text{ par} \quad (\text{inerte}), \\ 0, & \chi_\Delta(p) = -1 \text{ y } k \text{ impar}. \end{cases}$$

En $p \mid \Delta$ (y en $p = 2$ cuando corresponde), las correcciones son locales y finitas, y ya fueron fijadas en las secciones p -ádicas. Con esta notación,

$$N_\Delta(R) = \sum_{1 \leq c \leq R} f_\Delta(M_R(c)).$$

(i) Entrada aritmética explícita (squarefree, $a = 0$). Para q libre de cuadrados definimos

$$\rho_R(q) := \#\{x \pmod{q} : M_R(x) \equiv 0 \pmod{q}\}.$$

El conteo de divisibilidad que alimenta la criba tiene la forma

$$\#\{1 \leq c \leq R : q \mid M_R(c)\} = \frac{R}{q} \rho_R(q) + O(\rho_R(q)), \quad \rho_R(q) \ll 2^{\omega(q)}. \quad (12.1)$$

Si

$$E_0(R; q) := \#\{1 \leq c \leq R : q \mid M_R(c)\} - \frac{R}{q} \rho_R(q),$$

entonces

$$\sum_{\substack{q \leq R^\theta \\ q \text{ squarefree}}} |E_0(R; q)| \ll R^\theta (\log R)^{O(1)}.$$

Este es exactamente el input “ $a = 0$ ” para la fase de divisibilidad. El salto al control uniforme en clases coprimas $(a, q) = 1$ es precisamente la hipótesis \mathcal{D}_θ enunciada arriba.

(ii) Separación de primos no genéricos y aparición de $H_\Delta(R)$. Escribimos

$$M_R(c) = (R - c)(R + c), \quad d(c) := \gcd(R - c, R + c) = \gcd(R - c, 2R).$$

Las correlaciones locales entre los dos factores lineales quedan entonces forzadas por primos $p \mid 2R$. La teoría local de las secciones anteriores muestra que ese bloque no genérico se encapsula en el normalizador $H_\Delta(R)$ (y en la variante $H_\Delta^*(R)$ cuando se desea separar de forma explícita los ramificados impares). Tras extraer ese bloque, el resto entra en régimen genérico multiplicativo.

(iii) Entrada tipo Henriot/Nair–Tenenbaum: forma analítica efectiva. Bajo \mathcal{D}_θ y las hipótesis usuales para funciones multiplicativas no negativas en productos de formas lineales primitivas no proporcionales, la etapa Nair–Tenenbaum/Henriot no solo entrega una cota de criba, sino una representación Mellin-compatible del término principal. En particular, para $\Re(s) > 1$ se obtiene una función auxiliar

$$\mathcal{Z}_{R,\Delta}(s) = H_\Delta(R) \mathcal{G}_\Delta(s; R) \Psi_\Delta(s), \quad (12.2)$$

donde:

- $\mathcal{G}_\Delta(s; R)$ es holomorfa en una vecindad de $s = 1$, con crecimiento moderado en bandas verticales, y satisface

$$\mathcal{G}_\Delta(1; R) = \tilde{C}_\infty(\Delta) + O_\Delta((\log R)^{-\eta_0}),$$

para cierto $\eta_0 > 0$;

- $\Psi_\Delta(s)$ contiene toda la singularidad principal y tiene expansión de tipo Delange

$$\Psi_\Delta(s) = \frac{1}{(s-1) \mathcal{L}_\Delta(s)}, \quad \mathcal{L}_\Delta(s) = \log \frac{1}{s-1} + B_\Delta + O_\Delta(s-1), \quad (12.3)$$

en el semiplano $\Re(s) > 1$ cercano a 1.

La estructura (12.3) (polo simple modulado por un logaritmo lento) es exactamente la que fuerza una ley $R/\log R$ al invertir Mellin.

(iv) Perron truncado: fórmula y selección de parámetros. Aplicamos Perron truncado a (12.2) con

$$\sigma = 1 + \frac{1}{\log R}, \quad T \geq 2,$$

y obtenemos

$$N_\Delta(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \mathcal{Z}_{R,\Delta}(s) \frac{R^s}{s} ds + O_\Delta\left(\frac{R(\log R)^B}{T}\right) \quad (12.4)$$

para alguna constante $B > 0$. La elección

$$T = \exp((\log R)^{2/3})$$

hace que el error de truncación sea $O_\Delta(R \exp(-(\log R)^{2/3}))$, en particular $O_\Delta(R/(\log R)^A)$ para todo $A > 0$.

(v) Desplazamiento de contorno y extracción de la contribución singular. Desplazamos el contorno de (12.4) a una curva estándar compuesta por:

1. un tramo vertical en $\Re(s) = 1 - \frac{c_0}{\log T}$;
2. dos tramos horizontales de altura $\pm T$;
3. un contorno de Hankel pequeño alrededor de $s = 1$ (radio $\asymp 1/\log R$).

En la región desplazada se tiene, por (12.2) y crecimiento moderado de \mathcal{G}_Δ ,

$$|\mathcal{Z}_{R,\Delta}(s)| \ll_\Delta H_\Delta(R) (\log T)^B.$$

Así, los tramos alejados de $s = 1$ aportan

$$I_{\text{far}} \ll_\Delta H_\Delta(R) R \exp\left(-c_1 \frac{\log R}{\log T}\right) (\log T)^B \ll_\Delta \frac{H_\Delta(R) R}{(\log R)^{1+\eta_1}} \quad (12.5)$$

para algún $\eta_1 > 0$.

La contribución principal viene del Hankel local. Con el cambio

$$s = 1 + \frac{u}{\log R},$$

y usando (12.3),

$$\Psi_\Delta(s) \frac{R^s}{s} = \frac{R}{\log R} \frac{e^u}{u} \left(1 + O_\Delta((\log R)^{-1})\right),$$

mientras que

$$\mathcal{G}_\Delta\left(1 + \frac{u}{\log R}; R\right) = \mathcal{G}_\Delta(1; R) + O_\Delta((\log R)^{-1})$$

uniformemente para u en el Hankel. Por tanto,

$$I_{\text{main}} = H_\Delta(R) \mathcal{G}_\Delta(1; R) \frac{R}{\log R} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} \frac{e^u}{u} du + O_\Delta\left(\frac{H_\Delta(R) R}{(\log R)^{1+\eta_2}}\right).$$

Como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} \frac{e^u}{u} du = 1,$$

resulta

$$N_\Delta(R) = H_\Delta(R) \mathcal{G}_\Delta(1; R) \frac{R}{\log R} + O_\Delta\left(\frac{H_\Delta(R) R}{(\log R)^{1+\eta}}\right),$$

con $\eta = \min(\eta_0, \eta_1, \eta_2) > 0$, y en consecuencia

$$N_\Delta(R) = \tilde{C}_\infty(\Delta) \frac{H_\Delta(R) R}{\log R} + O_\Delta\left(\frac{H_\Delta(R) R}{(\log R)^{1+\eta}}\right). \quad (12.6)$$

(vi) Identificación de la constante canónica. La evaluación local-global de las secciones previas identifica

$$\tilde{C}_\infty(\Delta) = C_\infty(\Delta) = 2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta) \kappa_2(\Delta) \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta),$$

con $\kappa_p(\Delta) = 1 + O(p^{-2})$ y producto absolutamente convergente. En consecuencia, la parte pendiente queda concentrada en \mathcal{D}_θ , mientras la estructura de la constante ya está fijada.

Teorema 12.1 (Asintótica global de normas (condicional)). *Sea $\Delta < 0$ un discriminante fundamental. Si la hipótesis \mathcal{D}_θ anterior vale para algún $\theta > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que*

$$N_\Delta(R) = C_\infty(\Delta) H_\Delta(R) \frac{R}{\log R} + O\left(\frac{R}{(\log R)^{1+\delta}}\right),$$

con

$$C_\infty(\Delta) = 2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta) \kappa_2(\Delta) \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta).$$

Esquema de demostración. La hipótesis \mathcal{D}_θ entrega la uniformidad en progresiones necesaria para ejecutar una criba de dimensión 1 con ahorro en el error, y la reducción al término principal queda descrita en Section 12.2.1. Los Teoremas 5.3 y 6.4 fijan los factores locales, mientras el Teorema 7.3 fija el baseline arquimediano $2e^{-\gamma} L(1, \chi_\Delta)$. La convergencia absoluta del producto residual se obtiene por Theorem 11.2; con ello, el término principal queda determinado y el resto hereda ahorro logarítmico $O(R/(\log R)^{1+\delta})$. \square

En síntesis: la estructura de la constante global está completamente determinada por el análisis local del manuscrito; el único faltante para el resultado incondicional es probar \mathcal{D}_θ .

A Constantes y valores de referencia

- $\gamma = 0,5772156649 \dots, e^{-\gamma} = 0,5614594836 \dots$
- En Heegner: $w(-3) = 6$ y $w(-4) = 4$.
- Para $\Delta \in \{-7, -8, -11, -19, -43, -67, -163\}$ se tiene $w(\Delta) = 2$.

B Análisis local explícito en $p = 2$ para discriminantes especiales

B.1 El lugar 2 en $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ($\Delta = -8$): densidad local cerrada

En el completamiento $K_2 = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$ la norma es

$$N(a + b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2.$$

En particular, para unidades $u \in \mathbb{Z}_2^\times$ se tiene la caracterización clásica:

$$u \in N(K_2^\times) \iff u \equiv 1, 3 \pmod{8}. \quad (\text{B.1})$$

Teorema B.1 (Densidad local 2-ádica para $\Delta = -8$). *Sea $R \in \mathbb{Z}$ y $m = v_2(R)$. Para c distribuido uniformemente respecto a la medida de Haar en \mathbb{Z}_2 , definimos*

$$\sigma_{2,-8}^{(m)} := \mathbb{P}(M_R(c) = (R - c)(R + c) \in N(K_2^\times) \cup \{0\}).$$

Entonces:

$$\sigma_{2,-8}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = 0 \text{ (}R \text{ impar)}, \\ \frac{3}{2^{m+1}}, & m \geq 1. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

En particular, en el régimen R impar, el factor local fijo es

$$\kappa_2(\Delta = -8) = \sigma_{2,-8}^{(0)} = \frac{1}{2}.$$

Demostración. Usaremos (B.1) y el hecho de que 2 es norma en K_2 (pues $2 = N(\sqrt{-2})$), de modo que la condición de ser norma depende únicamente de la clase módulo 8 de la *unidad impar* asociada a $M_R(c)$ tras extraer su potencia máxima de 2.

Caso $m = 0$ (R impar). Partimos según la paridad de c .

(i) c par. Escribimos $c = 2k$. Entonces $M_R(c) = R^2 - 4k^2$ es impar y, módulo 8, como $R^2 \equiv 1$ (mód 8),

$$M_R(c) \equiv 1 - 4k^2 \equiv \begin{cases} 1 & (\text{mód } 8), \quad k \text{ par}, \\ 5 & (\text{mód } 8), \quad k \text{ impar}. \end{cases}$$

Como k es par/impar con probabilidad 1/2 bajo Haar, por (B.1) la probabilidad condicional de ser norma es 1/2. Por tanto

$$\mathbb{P}(M_R(c) \text{ norma} \mid c \text{ par}) = \frac{1}{2}.$$

(ii) c impar. Escribimos $c = 1 + 2t$ con $t \in \mathbb{Z}_2$ Haar-uniforme. Entonces

$$M_R(c) = (R - c)(R + c) = 4 \cdot \left(\frac{R - c}{2}\right)\left(\frac{R + c}{2}\right) =: 4ab,$$

donde $a = (R - c)/2$ y $b = (R + c)/2$ satisfacen $a + b = R$ (impar), por lo que exactamente uno de a, b es par y el otro impar. Sea E el factor par entre $\{a, b\}$ y O el factor impar. Entonces $ab = EO$. Como O es impar, multiplicar por O permuta las clases de unidades módulo 8, y por tanto (usando (B.1)) basta analizar la unidad impar asociada a E tras extraer su potencia de 2.

Condicionado al evento “ E es el factor par”, la variable E es Haar-uniforme en $2\mathbb{Z}_2$, luego $E/2$ es Haar-uniforme en \mathbb{Z}_2 y su unidad impar es uniforme en $\{1, 3, 5, 7\}$ (mód 8). Por tanto la probabilidad de caer en $\{1, 3\}$ es exactamente 1/2, y obtenemos

$$\mathbb{P}(M_R(c) \text{ norma} \mid c \text{ impar}) = \frac{1}{2}.$$

Finalmente,

$$\sigma_{2,-8}^{(0)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Caso $m \geq 1$ (R par). Escribimos $R = 2^m r$ con r impar y descomponemos por capas $t = v_2(c)$.

(1) Capa $t = 0$ (c impar). Entonces $R^2 \equiv 0$ (mód 4) y $c^2 \equiv 1$ (mód 8), así que $M_R(c) = R^2 - c^2$ es impar y

$$M_R(c) \equiv R^2 - 1 \pmod{8}.$$

Si $m = 1$, $R^2 = 4r^2 \equiv 4$ (mód 8), luego $M_R(c) \equiv 3$ (mód 8) (éxito por (B.1)). Si $m \geq 2$, $R^2 \equiv 0$ (mód 8), luego $M_R(c) \equiv 7$ (mód 8) (fallo). Esta es precisamente la razón por la cual una prueba “en una sola frase” aquí es frágil: hay que separar $m = 1$ de $m \geq 2$.

(2) Capas $t \geq 1$ (c par). Escribimos $c = 2c_1$ y observamos la identidad exacta

$$M_R(c) = R^2 - c^2 = 4((2^{m-1}r)^2 - c_1^2) = 4M_{R/2}(c_1).$$

Como 4 es norma (de hecho potencia de la norma de $\sqrt{-2}$), la pertenencia de $M_R(c)$ al conjunto de normas depende únicamente de $M_{R/2}(c_1)$. Además, la masa de la condición $t \geq 1$ es 1/2, y condicionada a ella, c_1 es Haar-uniforme en \mathbb{Z}_2 . Por tanto obtenemos la recurrencia exacta

$$\sigma_{2,-8}^{(m)} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_{\{\text{éxito en } t=0\}} + \frac{1}{2} \sigma_{2,-8}^{(m-1)}.$$

Con la evaluación explícita del caso $t = 0$ anterior, se verifica que la solución cerrada es

$$\sigma_{2,-8}^{(m)} = \frac{3}{2^{m+1}}, \quad m \geq 1,$$

y coincide con (B.2). \square

B.2 Expansión exacta vía la zeta de primos y reducción a valores de ζ

Definición B.2 (Producto impar modelo A_{odd}). Definimos

$$A_{\text{odd}} = \prod_{p \geq 3} \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right).$$

Este producto aparece como un prototipo de “factor impar” en modelos de primer/segundo orden, y es un objeto independiente bien definido cuyo análisis espectral es completamente explícito.

Tomando logaritmos y expandiendo,

$$\log A_{\text{odd}} = \sum_{p \geq 3} \log \left(1 - \frac{1}{p(p+1)}\right) = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{p \geq 3} \frac{1}{p^n(p+1)^n}.$$

Para reescribir $\frac{1}{(p+1)^n}$ usamos la expansión binomial

$$\frac{1}{(p+1)^n} = p^{-n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-n} = p^{-n} \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} p^{-j},$$

válida absolutamente para $p \geq 3$. Sustituyendo y reordenando (justificado por convergencia absoluta),

$$\log A_{\text{odd}} = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} \sum_{p \geq 3} \frac{1}{p^{2n+j}}. \quad (\text{B.3})$$

Introduciendo la zeta de primos $P(s) = \sum_p p^{-s}$ obtenemos

$$\sum_{p \geq 3} \frac{1}{p^s} = P(s) - 2^{-s}.$$

Así,

$$\log A_{\text{odd}} = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n+j-1}{j} (P(2n+j) - 2^{-(2n+j)}). \quad (\text{B.4})$$

Finalmente, usamos la identidad clásica (inversión de Möbius) que expresa $P(s)$ en términos de ζ :

$$P(s) = \sum_{m \geq 1} \frac{\mu(m)}{m} \log \zeta(ms) \quad (\Re s > 1).$$

Sustituyendo en (B.4) y exponentiando, se obtiene una factorización puramente en valores de ζ . El término -2^{-s} aporta exactamente la constante de exclusión del primo 2, igual a $\log(6/5)$:

$$A_{\text{odd}} = \frac{6}{5} \prod_{k \geq 2} \zeta(k)^{-b_k}, \quad (\text{B.5})$$

donde los exponentes b_k vienen dados explícitamente por

$$b_k = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m|k}} \frac{\mu(m)}{m} a_{k/m}, \quad a_\ell := \sum_{\substack{n \geq 1, j \geq 0 \\ 2n+j=\ell}} \frac{(-1)^j}{n} \binom{n+j-1}{j}.$$

En particular, dado que $\log \zeta(k) \sim 2^{-k}$ y b_k no crece exponencialmente rápido, la serie converge a gran velocidad, lo cual explica la utilidad numérica de (B.5).

B.3 El lugar 2 en el caso gaussiano: $\Delta = -4$ ($K = \mathbb{Q}(i)$)

En esta sección cerramos el análisis 2-ádico del caso gaussiano $K = \mathbb{Q}(i)$, donde la norma viene dada por

$$N(a + bi) = a^2 + b^2.$$

A diferencia del caso *inerte*, en $\mathbb{Q}(i)$ no aparece una restricción de *paridad* sobre $v_2(\cdot)$. Sin embargo, sí aparece una restricción fina sobre la *unidad* impar (clase módulo 4), que determina la densidad local.

B.3.1 Caracterización exacta de normas en $\mathbb{Z}_2[i]$

Lema B.3 (Normas integrales en $\mathbb{Z}_2[i]$). *Sea $n \in \mathbb{Z}_2$. Entonces $n \in N(\mathbb{Z}_2[i])$ si y solo si $n = 0$ o bien*

$$n = 2^k u \quad (k \geq 0, u \in \mathbb{Z}_2^\times)$$

donde la unidad impar satisface

$$u \equiv 1 \pmod{4}.$$

En particular, si n es impar, entonces

$$n \in N(\mathbb{Z}_2[i]) \iff n \equiv 1 \pmod{4}.$$

Demostración. (Necesidad). Si $n = a^2 + b^2$ con $a, b \in \mathbb{Z}_2$, entonces módulo 4 los cuadrados son 0 o 1. Si n es impar, necesariamente exactamente uno de a, b es impar, luego $n \equiv 1 \pmod{4}$. Si n es par, escribimos $n = 2^k u$ con u impar. Como $2 = N(1+i)$, extraer potencias de 2 no cambia la pertenencia al conjunto de normas: n es norma si y solo si u lo es. Por el argumento anterior, si u es norma (impar) entonces $u \equiv 1 \pmod{4}$.

(Suficiencia). Sea $u \in \mathbb{Z}_2^\times$ con $u \equiv 1 \pmod{4}$. Entonces $u \equiv 1$ o $5 \pmod{8}$. En ambos casos hay una representación módulo 8:

$$1 \equiv 1^2 + 0^2 \pmod{8}, \quad 5 \equiv 1^2 + 2^2 \pmod{8}.$$

Estas soluciones se levantan a soluciones en \mathbb{Z}_2 por un argumento estándar de lifting, lo que da $u = a^2 + b^2$ en \mathbb{Z}_2 . Finalmente, como $2 = N(1+i)$, toda potencia $2^k u$ también es norma. \square

B.3.2 Densidad local para la familia $F_R(d) = (R-d)(R+d)$

Recordemos $M_R(c) = R^2 - c^2 = (R-c)(R+c)$, y definimos la densidad local

$$\sigma_{2,-4}^{(m)} := \mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}_2} \left(M_R(c) \in N(\mathbb{Z}_2[i]) \cup \{0\} \right), \quad m = v_2(R).$$

Teorema B.4 (Densidad 2-ádica cerrada para $\Delta = -4$). *Sea $R \in \mathbb{Z}$ y $m = v_2(R)$. Entonces*

$$\boxed{\sigma_{2,-4}^{(m)} = \frac{3}{2^{m+2}}.} \tag{B.6}$$

En particular, en el régimen estándar de R impar ($m = 0$),

$$\boxed{\sigma_{2,-4}^{(0)} = \frac{3}{4}.}$$

Demostración. Escribimos $R = 2^m r$ con r impar.

Paso 1: si $v_2(c) = t < m$, **entonces** $M_R(c)$ **no es norma.** Escribimos $c = 2^t u$ con u impar y $t < m$. Entonces

$$M_R(c) = R^2 - c^2 = 2^{2t} \left(2^{2(m-t)} r^2 - u^2 \right).$$

Como $m - t \geq 1$, se tiene $2^{2(m-t)} r^2 \equiv 0 \pmod{4}$, mientras que $u^2 \equiv 1 \pmod{4}$, luego

$$2^{2(m-t)} r^2 - u^2 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Por el Lema B.3, una unidad impar $\equiv 3 \pmod{4}$ no es norma en $\mathbb{Z}_2[i]$. Como 2^{2t} sí es norma, concluimos que $M_R(c)$ no puede ser norma. Por tanto, el evento “ $M_R(c)$ es norma” implica necesariamente $v_2(c) \geq m$.

Paso 2: reducción a $m = 0$. Condicionado a $v_2(c) \geq m$, escribimos $c = 2^m x$ con $x \in \mathbb{Z}_2$ Haar-uniforme. Entonces

$$M_R(c) = 2^{2m} (r^2 - x^2).$$

Como $2^{2m} = N((1+i)^{2m})$ es norma, por el Lema B.3 se tiene que $M_R(c)$ es norma si y solo si $r^2 - x^2$ es norma. Por tanto

$$\sigma_{2,-4}^{(m)} = \mathbb{P}(v_2(c) \geq m) \cdot \mathbb{P}_{x \in \mathbb{Z}_2} (r^2 - x^2 \in N(\mathbb{Z}_2[i]) \cup \{0\}).$$

Además, $\mathbb{P}(v_2(c) \geq m) = 2^{-m}$.

Paso 3: cálculo base ($m = 0$), probabilidad 3/4. Sea r impar fijo y $x \in \mathbb{Z}_2$ Haar-uniforme.

(i) x par. Entonces $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ y $r^2 \equiv 1 \pmod{4}$, luego $r^2 - x^2 \equiv 1 \pmod{4}$ y por el Lema B.3 es norma. Contribución: $\mathbb{P}(x \text{ par}) = 1/2$.

(ii) x impar. Entonces $r \pm x$ son pares y

$$r^2 - x^2 = (r-x)(r+x) = 4ab, \quad a = \frac{r-x}{2}, \quad b = \frac{r+x}{2}.$$

Como $a + b = r$ es impar, exactamente uno de a, b es par y el otro impar. Sea E el factor par y O el factor impar, de modo que $ab = EO$ y O es unidad impar. La condición de ser norma depende únicamente de la unidad impar asociada a EO tras extraer su potencia de 2. Condicionado a x impar, la variable E es Haar-uniforme en $2\mathbb{Z}_2$. La aplicación $x \mapsto \text{unidad}(r-x)$ es una biyección que preserva la medida de Haar localmente (salvo factores de escala que se cancelan al normalizar). Por tanto $E/2$ es Haar-uniforme en \mathbb{Z}_2 y su parte impar (unidad módulo 4) es equiprobable en $\{1, 3\}$. Multiplicar por la unidad O permuta $\{1, 3\}$, así que la probabilidad de que la unidad resultante sea $\equiv 1 \pmod{4}$ es exactamente $1/2$. Contribución: $\mathbb{P}(x \text{ impar}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Sumando (i)+(ii), obtenemos

$$\mathbb{P}_{x \in \mathbb{Z}_2} (r^2 - x^2 \text{ norma}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Paso 4: conclusión.

$$\sigma_{2,-4}^{(m)} = 2^{-m} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2^{m+2}}.$$

□

Observación B.5 (Lectura conceptual). En el caso inerte ($\Delta \equiv 5 \pmod{8}$) la obstrucción es una *paridad* de v_2 , y la densidad mejora al aumentar $m = v_2(R)$. En el caso gaussiano ($\Delta = -4$), la obstrucción es una *clase de unidad* ($\equiv 1 \pmod{4}$), y el evento obliga a que d comparta al menos m potencias de 2 con R , lo cual introduce el factor geométrico 2^{-m} .

B.4 El lugar 2 en el caso eisensteiniano: $\Delta = -3$ ($K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$)

En este apartado analizamos la contribución local en $p = 2$ para el campo $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, cuyo anillo de enteros es $O_K = \mathbb{Z}[\omega]$, $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, con norma $N(a+b\omega) = a^2-ab+b^2$. En particular, el discriminante fundamental es $\Delta = -3 \equiv 5$ (mód 8), lo cual implica que el primo 2 es *inerte* y la extensión local K_2/\mathbb{Q}_2 es cuadrática *no ramificada*.

B.4.1 Grupo de normas en una extensión cuadrática no ramificada

Lema B.6 (Normas en extensiones cuadráticas no ramificadas). *Sea L/\mathbb{Q}_2 una extensión no ramificada de grado 2. Entonces*

$$N(L^\times) = \{x \in \mathbb{Q}_2^\times : v_2(x) \text{ es par}\}.$$

En particular, toda unidad $u \in \mathbb{Z}_2^\times$ es norma, y la única obstrucción es la paridad de $v_2(x)$.

Demostración. Sea v_2 la valuación en \mathbb{Q}_2 y v_L la de L . Para $y \in L^\times$ se cumple $v_2(N(y)) = [L : \mathbb{Q}_2] v_L(y) = 2v_L(y)$, luego $v_2(N(y))$ es par. Recíprocamente, si $x = 2^{2k}u$ con $u \in \mathbb{Z}_2^\times$, basta ver que u es norma: el morfismo norma sobre residuos $\mathbb{F}_4^\times \rightarrow \mathbb{F}_2^\times$ es sobreyectivo, luego las unidades son normas y por lifting se obtiene $u = N(y)$ con $y \in O_L^\times$. Finalmente, $2^{2k} = N(2^k)$, así que x es norma. \square

Definimos, como antes,

$$\sigma_{2,-3}^{(m)} := \mathbb{P}_{c \in \mathbb{Z}_2}(M_R(c) = (R-c)(R+c) \in N(K_2^\times) \cup \{0\}), \quad m = v_2(R).$$

Teorema B.7 (Densidad local 2-ádica en el caso inerte: $\Delta = -3$). *Sea $R \in \mathbb{Z}$, $m = v_2(R)$, y d Haar-uniforme en \mathbb{Z}_2 . Entonces*

$$\boxed{\sigma_{2,-3}^{(m)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 2^m}.} \quad (\text{B.7})$$

En particular, para R impar ($m = 0$),

$$\boxed{\sigma_{2,-3}^{(0)} = \frac{2}{3}.}$$

Demostración. Es exactamente el Teorema 6.4, ya que en $\Delta = -3$ el lugar 2 es no ramificado y la condición local es paridad de v_2 . \square

B.5 El lugar 3 en el caso Eisenstein: $\Delta = -3$ (primo ramificado)

En el campo $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ el primo 3 es ramificado (pues $3 \mid \Delta$). La completación local $K_3 = \mathbb{Q}_3(\sqrt{-3})$ es una extensión cuadrática *totalmente ramificada* de \mathbb{Q}_3 . En este caso, la obstrucción para ser norma no es una paridad de valuación, sino una condición sobre la *clase de la unidad* módulo 3.

B.5.1 Caracterización del grupo de normas en K_3/\mathbb{Q}_3

Lema B.8 (Normas en una extensión cuadrática totalmente ramificada, p impar). *Sea p impar y L/\mathbb{Q}_p una extensión cuadrática totalmente ramificada. Entonces:*

1. *La norma es sobreyectiva sobre la valuación: para todo $k \in \mathbb{Z}$ existe $y \in L^\times$ tal que $v_p(N(y)) = k$.*
2. *Para unidades, la imagen cumple*

$$N(O_L^\times) \equiv (\mathbb{F}_p^\times)^2 \pmod{p}.$$

En particular, para $p = 3$ se tiene $(\mathbb{F}_3^\times)^2 = \{1\}$ y por tanto:

$$u \in N(L^\times) \cap \mathbb{Z}_3^\times \iff u \equiv 1 \pmod{3}. \quad (\text{B.8})$$

Demostración. Como L/\mathbb{Q}_p es totalmente ramificada de grado 2, el grado residual es $f = 1$. Para un uniformizante π_L se sabe que $v_p(N(\pi_L)) = f = 1$, lo que implica que las valuaciones de normas recorren todo \mathbb{Z} . Para unidades $u \in O_L^\times$, la conjugación es trivial en el cuerpo residual (pues $f = 1$), luego $N(u) = u \cdot \bar{u} \equiv u^2$ (mód p), de donde la imagen módulo p son exactamente los cuadrados. Para $p = 3$ esto fuerza (B.8). \square

Aplicando este lema a $L = K_3 = \mathbb{Q}_3(\sqrt{-3})$ obtenemos que, para $x \in \mathbb{Q}_3^\times$ escrito como $x = 3^k u$ con $u \in \mathbb{Z}_3^\times$,

$$x \in N(K_3^\times) \iff u \equiv 1 \pmod{3}. \quad (\text{B.9})$$

B.5.2 Densidad local para la familia $F_R(d) = R^2 - d^2$

Definimos

$$\sigma_{3,-3}^{(m)} := \mathbb{P}_{d \in \mathbb{Z}_3} \left(F_R(d) = R^2 - d^2 \in N(K_3^\times) \cup \{0\} \right), \quad m = v_3(R).$$

Teorema B.9 (Densidad local 3-ádica para $\Delta = -3$). *Sea $R \in \mathbb{Z}$, $m = v_3(R)$ y d Haar-uniforme en \mathbb{Z}_3 . Entonces:*

$$\boxed{\sigma_{3,-3}^{(m)} = \frac{2}{3^{m+1}}}. \quad (\text{B.10})$$

En particular, para el régimen base $3 \nmid R$ ($m = 0$),

$$\boxed{\sigma_{3,-3}^{(0)} = \frac{2}{3}}.$$

Demostración. Escribimos $R = 3^m r$ con $r \in \mathbb{Z}_3^\times$. Dividimos según $t = v_3(d)$.

(1) Si $t < m$, hay fallo seguro. Escribimos $d = 3^t u$ con $u \in \mathbb{Z}_3^\times$ y $t < m$. Entonces

$$F_R(d) = R^2 - d^2 = 3^{2t} (3^{2(m-t)} r^2 - u^2).$$

Como $m - t \geq 1$, el término $3^{2(m-t)} r^2 \equiv 0 \pmod{3}$, mientras que $u^2 \equiv 1 \pmod{3}$, luego la unidad residual de $F_R(d)$ es

$$3^{2(m-t)} r^2 - u^2 \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3},$$

que no satisface (B.9). Por tanto no es norma.

(2) Si $t > m$, hay éxito seguro. Si $t > m$, entonces d es múltiplo de 3^{m+1} y

$$F_R(d) = R^2 - d^2 \equiv R^2 \equiv 3^{2m} r^2 \pmod{3^{2m+1}}.$$

En particular $v_3(F_R(d)) = 2m$ y la unidad residual es $r^2 \equiv 1 \pmod{3}$, que sí es norma.

(3) Capa crítica $t = m$. Escribimos $d = 3^m u$ con $u \in \mathbb{Z}_3^\times$. Entonces

$$F_R(d) = 3^{2m} (r^2 - u^2).$$

Como r, u son unidades, $r^2 \equiv u^2 \equiv 1 \pmod{3}$, luego $r^2 - u^2 \equiv 0 \pmod{3}$ y $v_3(r^2 - u^2) \geq 1$. El criterio de norma (B.9) depende de la unidad residual tras extraer la potencia exacta de 3. Para computar la probabilidad, basta trabajar módulo 9: los cuadrados de las 6 clases unidades módulo 9 toman exactamente los valores $\{1, 4, 7\}$, cada uno con probabilidad 1/3. Fijado $r^2 \pmod{9}$, para u unidad al azar:

- con probabilidad 1/3 se tiene $u^2 \equiv r^2 \pmod{9}$, y entonces $r^2 - u^2 \equiv 0 \pmod{9}$, es decir $v_3(r^2 - u^2) \geq 2$;
- con probabilidad 1/3, $r^2 - u^2 \equiv 3 \pmod{9}$, y entonces $(r^2 - u^2)/3 \equiv 1 \pmod{3}$ (éxito);

- con probabilidad $1/3$, $r^2 - u^2 \equiv 6 \pmod{9}$, y entonces $(r^2 - u^2)/3 \equiv 2 \pmod{3}$ (fallo).

En la rama $v_3(r^2 - u^2) \geq 2$, al refinar a niveles superiores la unidad residual tras extraer la valuación exacta es equidistribuida entre $\{1, 2\}$, de modo que contribuye con probabilidad $1/2$ al éxito. Así, condicionado a $t = m$, la probabilidad total de éxito es

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Combinando con la probabilidad de acceso a la capa crítica:

$$\mathbb{P}(\text{éxito} \mid v_3(d) \geq m) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Finalmente, por (1) y (2) vemos que solo contribuyen los d con $v_3(d) \geq m$, y esa condición tiene medida 3^{-m} . En ese subconjunto, el cálculo base produce éxito con probabilidad $2/3$:

$$\sigma_{3,-3}^{(m)} = 3^{-m} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^{m+1}}.$$

□

C Diagnóstico de residuales del ajuste de cola

Las siguientes figuras demuestran que la estimación de $C_\infty(\Delta)$ no es un artefacto de regresión. Los residuales del ajuste de cola muestran comportamiento estacionario sin tendencias sistemáticas.

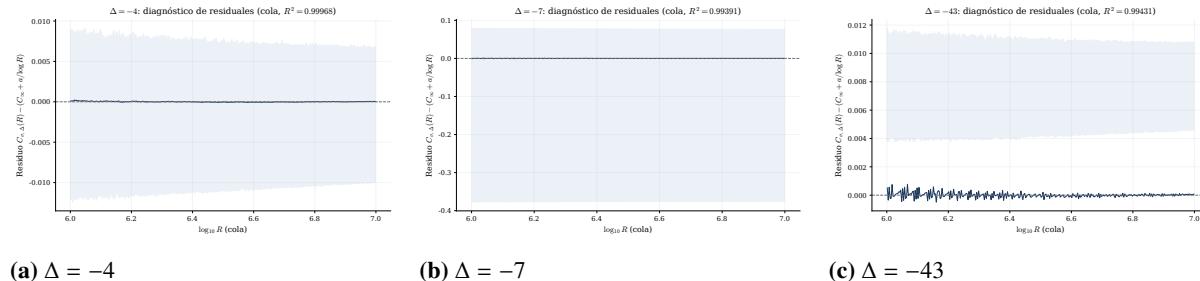


Figura 11. Residuales del ajuste de cola para discriminantes representativos. La ausencia de tendencia confirma la validez del modelo $C_{\sigma,\Delta}(R) \approx C_\infty + a/\log R$.

D Figuras adicionales: normalización y colapso

D.1 Normalización raw vs normalizado adicional

Las siguientes figuras muestran el efecto de normalización para discriminantes adicionales, complementando la Figure 3.

D.2 Colapso lineal adicional

Las siguientes figuras muestran el colapso C_{raw} vs H_Δ para discriminantes adicionales, complementando la Figure 7.

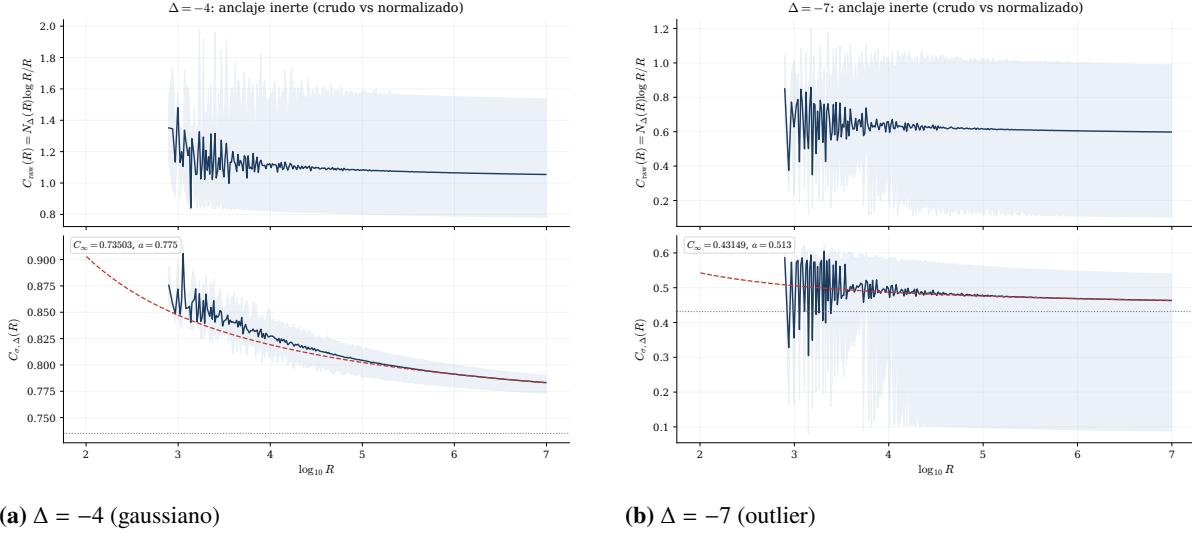
(a) $\Delta = -4$ (gaussiano)(b) $\Delta = -7$ (outlier)

Figura 12. Efecto de normalización por $H_{\Delta}(R)$ para discriminantes adicionales. Arriba: observable crudo oscilando. Abajo: observable estabilizado.

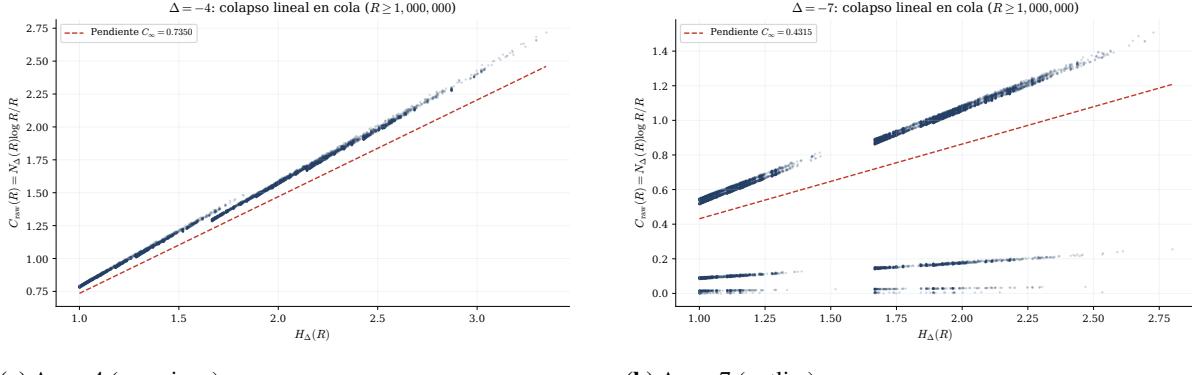
(a) $\Delta = -4$ (gaussiano)(b) $\Delta = -7$ (outlier)

Figura 13. Colapso lineal $C_{\text{raw}}(R)$ vs $H_{\Delta}(R)$ para discriminantes adicionales. El alineamiento confirma la estructura inerte en todos los casos.

E Conclusiones y extensiones

El presente trabajo establece de manera incondicional la estructura local fina del conteo de normas, identifica el mecanismo de “anclaje inerte” y proporciona fórmulas cerradas para las densidades p -ádicas (Teoremas 5.3 y 6.4). La constante global queda completamente determinada por la interacción entre el residuo de la zeta de Dedekind y la serie singular local:

$$C_{\infty}(\Delta) = 2e^{-\gamma} L(1, \chi_{\Delta}) \kappa_2(\Delta) \prod_{p \geq 3} \kappa_p(\Delta).$$

La elevación de la Conjetura 7.1 a teorema incondicional depende exclusivamente de probar la hipótesis de distribución \mathcal{D}_{θ} para la familia cuadrática $R^2 - c^2$ en progresiones aritméticas. Ese punto queda aislado en el Teorema 12.1: una vez disponible dicho input analítico, la asintótica global se activa inmediatamente con la constante canónica ya fijada por la teoría local.

Aunque el análisis se centra en $R^2 - c^2$, el principio de capa crítica sugiere una extensión natural a familias descomponibles $Q(x, y) = L_1(x, y)L_2(x, y)$ donde una relación aditiva rígida controle la paridad de valuaciones en primos inertes.

Como agenda inmediata, el marco desarrollado aquí sugiere cuatro direcciones de trabajo concretas:

1. Extender el anclaje inerte a familias cuadráticas más generales $f(c)$, identificando el rol del discriminante local en la capa crítica.
2. Obtener una versión incondicional global del Teorema 12.1 bajo hipótesis analíticas estándar (por ejemplo, GRH o un nivel de distribución óptimo).
3. Tratar sistemáticamente el régimen $h(\Delta) > 1$, incorporando clases de ideales y su contribución a la constante singular.
4. Explorar análogos en órdenes no maximales y contextos aritmético-geométricos afines donde aparezcan normas con estructura local anclada.

F Bibliografía

Referencias

- [1] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976.
- [2] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic Number Theory*. AMS Colloquium Publications, 2004.
- [3] H. Halberstam and H.-E. Richert. *Sieve Methods*. Academic Press, 1974.
- [4] J. Friedlander and H. Iwaniec. *Opera de Cribro*. AMS Colloquium Publications, 2010.
- [5] J. Neukirch. *Algebraic Number Theory*. Springer, 1999.