Stijn Symens

Een cursus

DISCRETE WISKUNDE

voor de eerste bachelor Informatica

Met oefeningen

(Versie 2024-2025)

Universiteit Antwerpen

Inhoudsopgave

5.4 nieuwe verdeling maken overgeslagen

HOOFDSTUK 0

NOTATIES

De volgende notaties zullen doorheen de cursus gebruikt worden

Logische symbolen	
$\neg p$	negatie van p
$p \wedge q$	"en" (conjunctie)
$p \vee q$	"of" (disjunctie)
$p \oplus q$	"exclusieve of" (exclusive or)
$p \implies q$	"als p dan q (implicatie)
$p \iff q$	"p als en slechts als q" (equivalentie)
$\forall x P(x)$	"voor elke x" (universele kwantor van $P(x)$)
$\exists x P(x)$	"er bestaat een x" (existentïele kwantor van $P(x)$)
$\exists! x P(x)$	"er bestaat een unieke x" (existentïele kwantor van $P(x)$)

Verzamelingen	
$x \in S$	x is element van S
$x \notin S$	x is geen element van S
$\{a_1, \ldots, a_n\}$	opsomming van elementen van een verzameling
$\{x \vert P(x)\}$	de verzameling van alle x die voldoen aan $P(x)$
$\mathbb{N}$	de natuurlijke getallen
$\mathbb{N}_0$	de strikt positieve natuurlijke getallen
$\mathbb{Z}$	de gehele getallen
$\mathbb{Z}_0$	de gehele getallen zonder 0
$\mathbb{Z}^+$	de positieve gehele getallen
$\mathbb{Z}^-$	de negatieve gehele getallen
$\mathbb{Z}_0^+$	de strikt positieve gehele getallen
$\mathbb{Z}_0^-$	de strikt negatieve gehele getallen
$\mathbb{Q}$	de rationale getallen
$\mathbb{R}$	de reële getallen
$S = T$	gelijkheid van verzamelingen
$S \subset T$	S is deelverzameling van T
$S \supset T$	S omvat T
$\emptyset$	de lege verzameling
$\vert S \vert$	de kardinaliteit van S
2^S	de machtsverzameling van S
(a, b)	het koppel (a, b)
$(a_1, \ldots, a_n)$	het n-tuple $(a_1, \ldots, a_n)$
$A \times B$	het cartesisch product van A en B
$A \cup B$	de unie van A en B
$A \cap B$	de doorsnede van A en B
$A \setminus B$	het verschil van A en B
$\overline{A}$	het complement van A
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	de unie van $A_1, \ldots, A_n$
$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$	de doorsnede van $A_1, \ldots, A_n$
$A \Delta B$	het symmetrisch verschil van A en B

HOOFDSTUK 1

VERZAMELINGEN

Het onstaan van de verzamelingenleer is terug te voeren tot een aantal wiskundigen uit de negentiende eeuw. Het ging hierbij meestal om verzamelingen van getallen of functies. Het was echter Georg Cantor die als eerste verzamelingen bestudeerde waarvan de elementen willekeurige dingen konden zijn. De stap naar deze algemene verzamelingenleer was fundamenteel voor de ontwikkeling van de wiskunde maar leidde tot een aantal contradicties. De problemen die hierbij onstonden werden opgelost door Zermelo die als eerste de verzamelingenleer invoerde als een axiomatisch systeem. In deze inleiding bekijken we verzamelingen op een intuitieve manier. Om contradicties te vermijden zullen we in de praktijk alleen verzamelingen beschouwen die kunnen opgevat worden als deel van een grotere verzameling die toegelaten is in het axiomatisch systeem van Zermelo.

1.1 DEFINITIES EN NOTATIES

DEFINITIE 1.1 **Een verzameling is een geheel van objecten die om een of andere reden samen beschouwd worden. De objecten noemt men de elementen van de verzameling.**

Verzamelingen duiden we aan met hoofdletters. De elementen van een verzameling duiden we aan met kleine letters.
Als a een element is van een verzameling A dan noteren we dit als $a \in A$.
Als a geen element is van A dan noteren we $a \notin A$.

Als A en B verzamelingen zijn dan zeggen we dat B een deelverzameling is van A als en slechts als elk element van B ook een element is van

A. We noteren : $B \subset A$.

$$B \subset A \iff \forall x : x \in B \Rightarrow x \in A$$

Eén van de axioma's van Zermelo is het zogenaamde *Extensionaliteits-principe :* Twee verzamelingen zijn gelijk als en slechts als ze dezelfde elementen bevatten. Dit betekent dus :

$$A = B \iff (\forall x : x \in A \iff x \in B)$$

of nog

$$A = B \iff A \subset B \text{ en } B \subset A$$

Uit dit extentionaliteitsprincipe volgt dat we om een verzameling te definiëren de elementen van deze verzameling op een ondubbelzinnige moeten vastleggen. Als de verzameling eindig veel elementen heeft dan kunnen we dit doen door de elementen op te sommen.
Als $a_1, \ldots, a_n$ de elementen zijn van een verzameling A dan noteren we deze verzameling als

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

Bovendien heeft de volgorde waarin de elementen opgesomd worden geen belang en als in de opsomming een bepaald element meermaals vernoemd wordt dan mogen we dit element één keer schrappen. Dit verandert de verzameling niet.

VOORBEELD 1.2

$$\{2, 4, 1\} = \{4, 1, 2\} = \{2, 1, 4, 6/3\}$$

We kunnen de elementen van een verzameling ook vastleggen door een beschrijving te geven. Als een verzameling A alle elementen bevat die voldoen aan een voorwaarde P dan noteren we :

$$A = \left\{x \mid x \text{ voldoet aan de voorwaarde } P\right\}$$

VOORBEELD 1.3

$$\{3, 5, 7\} = \left\{x \mid x \text{ is een oneven geheel getal en } 1 < x < 8\right\}$$

DEFINITIE 1.4 **Zij A en B verzamelingen.**

(a) De unie of de vereniging van A en B is de verzameling

$$A \cup B = \left\{x \mid x \in A \textbf{ of } x \in B\right\}$$

(b) De doorsnede van A en B is de verzameling

$$A \cap B = \left\{x \mid x \in A \textbf{ en } x \in B\right\}$$

(c) Het verschil van A en B is de verzameling

$$A\backslash B = \{x \mid x \in A \textbf{ en } x \notin B\}$$

(d) Het symmetrisch verschil van A en B is de verzameling

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

We geven een overzicht van de bijzonderste eigenschappen van unie en doorsnede.

EIGENSCHAP 1.5 *Zij A, B en C verzamelingen.*

(a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(c) $A \cup B = B \cup A$

(d) $A \cap B = B \cap A$

(e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(g) $A \cup A = A$

(h) $A \cap A = A$

Er is precies 1 verzameling zonder elementen.

DEFINITIE 1.6 **De unieke verzameling zonder elementen noemen we de lege verzameling. Deze noteren we als $\emptyset$.**

Een verzameling met slecht 1 element noemen we een singleton.
Om contradicties te vermijden beschouwen we alleen verzamelingen die deelverzameling zijn van een vaste grotere verzameling die toegelaten is in de axiomatische verzamelingenleer. Deze verzameling noemen we een universum.

DEFINITIE 1.7 **Zij V het universum waarin we werken. Als $A \subset V$ een verzameling is dan noemen we**

$$\overline{A} = V \backslash A$$

het complement van A.

EIGENSCHAP 1.8 *Zij V het universum waarin we werken en zij $A, B \subset V$ verzamelingen. Dan geldt:*

(a) $A \cup \emptyset = A$

(b) $A \cap V = A$

(c) $A \cup V = V$

(d) $A \cap \emptyset = \emptyset$

(e) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

(f) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(g) $A \cup \bar{A} = V$

(h) $A \cap \bar{A} = \emptyset$

(i) $\bar{V} = \emptyset$

(j) $\bar{\emptyset} = V$

DEFINITIE 1.9 **Een verzameling waarvan de elementen zelf deelverzamelingen zijn van een universum V noemt men een familie van verzamelingen. Families noteert men dikwijls als $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots$.**
Als $\mathscr{A}$ een familie is dan noteert men

$$\cup\mathscr{A} = \left\{x \mid \exists A \in \mathscr{A} : x \in A\right\}$$

en

$$\cap\mathscr{A} = \left\{x \mid \forall A \in \mathscr{A} : x \in A\right\}$$

Indien de familie $\mathscr{A}$ gegeven wordt door $A_1, \ldots, A_n$ dan noteren we deze unie en doorsnede als

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{en} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

OPMERKING 1.10 Men kan de lege verzameling opvatten als een familie. We vinden dat

$$\cup\emptyset = \emptyset \quad \text{en} \quad \cap\emptyset = V$$

DEFINITIE 1.11 **Zij A een verzameling. De familie**

$$\left\{B \mid B \subset A\right\}$$

noemt men de machtsverzameling van A. Men noteert deze familie als 2^A of als $\mathscr{P}(A)$.

VOORBEELD 1.12 De machtsverzameling 2^A van de verzameling $A = \{0, 1\}$ is de verzameling

$$2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

Het cartesisch product

Uit het extensionaliteitsprincipe volgt dat $\{a, b\} = \{b, a\}$. De volgorde der elementen heeft hier dus geen belang. Vaak is volgorde wel van belang. Als we een collectie van elementen nemen waarbij de volgorde wel van belang is en waarbij zodoende elementen ook meerdere malen, dan zullen we ronde haken gebruiken om dit aan te duiden.
Een geordend stel (a, b) van twee elementen noemt men een koppel. Een geordend stel van n elementen noemt men een n-tupel.

EIGENSCHAP 1.13

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \iff a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$$

DEFINITIE 1.14 **Zij $A_1, \ldots, A_n$ verzamelingen. Het Carthesisch product van $A_1, \ldots, A_n$ is de verzameling**

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \left\{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\right\}$$

OPMERKING 1.15 Als één van de verzamelingen $A_1, \ldots, A_n$ leeg is dan is

$$A_1 \times \ldots \times A_n$$

ook leeg.

1.2 Oefeningen

1.1. Schrijf de volgende logische uitspraken door middel van symbolen en kwantoren.

(a) Voor sommige getallen x valt $\sin x$ samen met $\cos x$.

(b) Elk element van S behoort ook tot T.

(c) Voor elk strikt positief getal x bestaat er een strikt positief getal y zodat $xy \leq 1$.

(d) Er is precies 1 reëel getal waarvan de derdemacht gelijk is aan -8.

(e) Er bestaat een natuurlijk getal dat gelijk is aan zijn drievoud

(f) Het tegengestelde van een som van twee getallen is de som van de tegengestelden van die getallen

(g) Het kwadraat van een niet nul rationaal getal is steeds strikt positief.

(h) De optelling van gehele getallen is associatief.

1.2. Schrijf de volgende verzamelingen op verzamelingtheoretische schrijfwijze:

(a) de oneven getallen tussen 100 en 200.

(b) alle punten op de grafiek van de functie $y = x^2$.

1.3. Vul in: $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $=$.

(a) $\{1\}\ldots\{\{1\},2\}$

(b) $\{1,2\}\ldots\{\{1\},\{2\},1,2,3\}$

(c) $\emptyset\ldots\emptyset$

(d) $\emptyset\ldots\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

(e) $\emptyset\ldots\{\{\emptyset\}\}$

(f) $\{\emptyset\}\ldots\{\{\emptyset\}\}$

(g) $\{1\}\ldots 2^{\{1,2\}}$

(h) $\{\{1\}\}\ldots 2^{\{1,2\}}$

(i) $\{1,2\}\ldots 2^{\{1,2,3\}}$

(j) $\{1\}\ldots 2^{\{1\}}$

(k) $\{\{1\},\{2\}\}\ldots 2^{\{1,2,3\}}$

(l) $2^{\{1,2\}}\ldots 2^{\{1,2,3\}}$

(m) $V\ldots 2^V$

1.4. Voor de verjaardag van mijn grootmoeder ga ik een boeket bloemen geven. Mijn grootmoeder is echter nieuwsgierig over hoeveel bloemen zij zal kunnen schikken..., maar je maakt het haar niet gemakkelijk! Je zegt:

- Alle bloemen beantwoorden minstens aan één van de volgende beschrijvingen: rode bloemen, witte bloemen, tulpen.
- Van de witte bloemen en de tulpen zijn er 11 stuks in totaal, onder wie 2 witte tulpen en 3 witte bloemen dit geen tulpen zijn.
- Er zijn rode tulpen.
- Er zijn 7 bloemen die geen tulpen zijn.

Hoeveel bloemen zijn er?

1.5. Beschrijf over welke verzamelingen dit gaat:

(a) $\{m \mid \exists n \in \mathbb{Z} \text{ zodat } m = 2n\}$

(b) $\{s \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ zodat } s = n^2\}$

(c) $\{s \mid \exists z \in \mathbb{Z}_0 \text{ zodat } s = z^2\}$

(d) $\{q \mid \exists m,n \in \mathbb{N} \text{ zodat } m,n > 1 \wedge q = mn\}$

1.6. We beschouwen de verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$. Noem E de verzameling van even getallen en F de verzameling van de gehele getallen die deelbaar zijn door 5. Gebruik de verzamelingsbewerkingen om volgende verzamelingen te beschrijven:

(a) De positieve gehelen die deelbaar zijn door 5.

(b) De niet gehele rationale getallen.

(c) De positieve gehelen die deelbaar zijn door 10.

(d) De geordende paren waarvan de eerste even is en de tweede oneven.

1.7. (a) Indien A en B twee verzameling zijn met $A \cap B = \emptyset$, wat kan je dan zeggen over $|A|$, $|B|$ en $|A \cup B|$?

(b) Kan je dit algemener maken door naar algemene verzamelingen A en B te kijken die niet noodzakelijk disjunct zijn?

1.8. Schrijf de volgende verzamelingen via de verzamelingtheoretische schrijfwijze. (merk op dat hier vaak meerdere antwoorden mogelijk zijn).

(a) De verzameling van alle koppels met ongelijke gehele getallen.

(b) De verzameling van alle (gehele) tienvouden.

(c) De verzameling van alle tripletten die de zijden van een driehoek kunnen voorstellen.

1.9. Beschouw de verzameling $F = \{a, b\}$. Beschrijf de verzameling 2^F en de verzameling $2^{(2^F)}$.

1.10. Bereken de volgende sommen (oef. 4 p. 49)

(a) $\displaystyle\sum_{\substack{i=3 \\ i \text{ even}}}^{8} (2i^2 + 6)$ (b) $\displaystyle\sum_{\substack{i=3 \\ 3|i \text{ of } 5|i}}^{20} \frac{1}{i^2}$

1.11. Werk elk van de volgende sommen uit voor de gegeven n (oef. 5 p. 49)

(a) $\sum_{j=1}^{n}(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1})$, voor $n = 4$ en $n = 5$

(b) $\sum_{S \subset [n]}(-1)^{|S|}$, voor $n = 2$ en $n = 3$ met $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

(d) $\prod_{j=2}^{n} \frac{j^2-1}{j^2}$, voor $n = 5$ en $n = 6$.

1.12. Schrijf de volgende ongelijkheden in sommatienotatie (oef. 6 p. 49-50)

(a) De ongelijkheid van Cauchy-Schwartz:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

(b) De AM-GM ongelijkheid:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$$

1.13. Herschrijf de som $\sum_{i=0}^{n}(2i + 1)$, door in de vorm $\sum_{i=?}^{?}(2i - 1)$ de vraagtekens in te vullen (oef. 9 p. 50).

1.14. Herschrijf $\sum_{k=0}^{n} 3k + \sum_{j=1}^{n+1} 4j$, zodat je maar één $\sum$-teken nodig hebt. (oef. 10 p. 50).

1.15. Herschrijf

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ oneven}}}^{9} i^2$$

in de vorm $\sum_{j=a}^{b} f(j)$, waarbij a, b constanten zijn en f een functie (oef. 11 p. 50).

1.16. Evalueer de volgende sommen (oef. 12 p. 50)

$$(a) \quad \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{j=1 \\ ij \text{ even}}}^{3} \left\lfloor \left(\frac{i}{j}\right) + \left(\frac{j}{i}\right) \right\rfloor \qquad (b) \quad \sum_{i=1}^{9} \sum_{j=1}^{\lfloor 9/i \rfloor} ij^2$$

1.17. Evalueer de volgende sommen (oef. 13 p. 50)

(a) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}$, voor $n = 3, 4$.

(b) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^k}{j}$, voor $n = 3, 4$.

(c) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi i}{2j}\right)$, voor $n = 3, 4$.

1.18. In deze oefening gebruiken we de volgende (internationale) notatie:

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$

en

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

(merk op de eerste notatie samenvalt met de notatie voor het koppel (a, b). In dit geval moet uit de context blijken of het over een koppel dan wel over een interval gaat.

Evalueer de volgende uitdrukkingen (oef. 17 p. 50)

(a) $\bigcup_{i=1}^{10} (0, i)$

(b) $\bigcup_{j=1}^{5} [2j - 2, 2j]$

(c) $\bigcup_{i=1}^{\infty} (-i, i)$

(d) $\bigcup_{k=1}^{10} [0, 1/k]$

(e) $\bigcap_{k=1}^{10} [0, 1/k]$

(f) $\bigcap_{k=1}^{10} (0, 1/k)$

(g) $\bigcap_{i=1}^{\infty} [0, 1/i]$

(h) $\bigcap_{i=1}^{\infty} (0, 1/i)$

HOOFDSTUK 2

Relaties en functies

2.1 Relaties

DEFINITIE 2.1 **Zij A en B verzamelingen. Een relatie van A naar B is een deelverzameling van het Carthesisch product $A \times B$.**
Men noteert relaties dikwijls met letters $R, S, \ldots$.
Als $R \subset A \times B$ een relatie is en als (a, b) een element is uit de relatie dan noteert men aRb in plaats van $(a, b) \in R$.

VOORBEELDEN 2.2

(a) $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}, y = x^2\}$ is een relatie van $\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{N}$.

(b) $\emptyset$ en $A \times B$ zijn relaties van A naar B.

(c) Zij A een verzameling. Dan is

$$\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

een relatie van A naar zichzelf. Men noemt Δ de diagonaal op A.

DEFINITIE 2.3 **Zij $R \subset A \times B$ een relatie van A naar B.**

$$Dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B \textbf{ zodat } aRb\}$$

$$Ran(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A \textbf{ zodat } aRb\}$$

Men noemt $Dom(R)$ het domein van R en $Ran(R)$ het beeld van R. Men noemt $Ran(R)$ soms ook het codomein van R. Men noteert dan $codom(R)$.

DEFINITIE 2.4 **Zij $R \subset A \times B$ een relatie van A naar B. Men noemt de relatie**

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid aRb\} \subset B \times A$$

de inverse relatie van R.

DEFINITIE 2.5 **Zij $R \subset A \times B$ een relatie van A naar B. Als $U \subset A$ een deelverzameling is dan noteert men**

$$R(U) = \{b \in B \mid \exists a \in U \textbf{ zodat } aRb\}$$

Uit de definities volgt dus dat voor een relatie $R \subset A \times B$ geldt:

$$Ran(R) = R(A) \quad \text{en} \quad Dom(R) = R^{-1}(B)$$

EIGENSCHAP 2.6 ***Zij $R \subset A \times B$ een relatie van A naar B.***

(a) $R(\emptyset) = \emptyset$

(b) $\forall X, Y \subset A : X \subset Y \Rightarrow R(X) \subset R(Y)$

(c) $\forall X, Y \subset B : X \subset Y \Rightarrow R^{-1}(X) \subset R^{-1}(Y)$

(d) $\forall X, Y \subset A : R(X \cup Y) = R(X) \cup R(Y)$

(e) $\forall X, Y \subset A : R(X \cap Y) \subset R(X) \cap R(Y)$

DEFINITIE 2.7 **Zij A, B en C verzamelingen en zij $R \subset A \times B$ en $S \subset B \times C$ relaties. De relatie**

$$S \circ R = \{(a,c) \mid a \in A, c \in C \textbf{en } \exists b \in B \textbf{ zodat } aRb \textbf{ en } bSc\} \subset A \times C$$

noemt men de samenstelling van R en S.

EIGENSCHAP 2.8 ***Zij $R \subset A \times B, S \subset B \times C$ en $T \subset C \times D$ relaties. Dan geldt:***

(a) $(R^{-1})^{-1} = R$

(b) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

(c) $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

We bestuderen verder nog drie bijzondere soorten relaties: functies, equivalentierelaties en partiële ordeningen.

2.2 FUNCTIES

DEFINITIE 2.9 **Een relatie $F \subset A \times B$ heet een functie als**

(a) $Dom(R) = A$

(b) $\forall a \in A$ **en** $b, b' \in B : aRb$ **en** $aRb' \Rightarrow b = b'$

Een functie F van A neer B noteert men als $F : A \to B$.

Uit deze definitie volgt dus dat er voor elke $a \in A$ een uniek element $b \in B$ bestaat zodat (a, b) een element is van F. Men noteert dit element b als $F(a)$. Men zegt dat $F(a)$ het beeld is van a onder de functie F.

DEFINITIE 2.10 **Een functie $F : A \to B$ noemen we**

(a) injectief als

$$\forall a, a' \in A : F(a) = F(a') \Rightarrow a = a'$$

(b) surjectief als $Ran(F) = B$, of formeel gezegd:

$$\forall b \in B : \exists a \in A : F(a) = b$$

(c) bijectief als F zowel injectief als surjectief is

VOORBEELDEN 2.11 (a) $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ met $F(n) = 0$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ is noch injectief noch surjectief.

(b) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ met $F(x) = x^2$ is surjectief maar niet injectief.

(c) $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ met $F(x) = 2x$ is injectief maar niet surjectief.

(d) Zij A een verzameling en zij $X \subset A$ een deelverzameling. Definieer de functie $1_X : A \to \{0, 1\}$ door

$$\begin{cases} 1_X(a) = 0 \text{ als } a \notin X \\ 1_X(a) = 1 \text{ als } a \in X \end{cases}$$

Men noemt 1_X de karakteristieke functie van X.

(e) Als $F : A \to \{0, 1\}$ een functie is dan is

$$X_F = \left\{a \in A \mid F(a) = 1\right\}$$

een deelverzameling van A en de karakterisiteke functie 1_{X_F} van X_F is F zelf.

OPMERKING 2.12 Als $F : A \to B$ een functie is dan kan men kijken naar de inverse relatie $F^{-1} \subset B \times A$. In het algemeen is dit echter geen functie. Men heeft namelijk:

$$F^{-1} \text{ is een functie } \iff F \text{ is bijectief}$$

Als $X \subset A$ en $Y \subset B$ deelverzamelingen zijn dan is

$$F(X) = \{F(x) \mid x \in X\}$$

en

$$F^{-1}(Y) = \{a \in A \mid F(a) \in Y\}$$

DEFINITIE 2.13 **Zij $A \subset A'$ verzamelingen en zij $F : A \to B$ en $G : A' \to B$ functies zodat**

$$\forall a \in A : F(a) = G(a)$$

Dan zegt men dat G een uitbreiding of een extensie is van F tot A'. Men zegt ook dat F de restrictie is van G tot A. Men noteert dikwijls $F = G|_A$.

EIGENSCHAP 2.14 *De samenstelling van twee functies is weer een functie.*

EIGENSCHAP 2.15 *Zij $F : A \to B$ en $G : B \to C$ functies. Dan geldt:*

(a) F, G *injectief* $\implies G \circ F$ *injectief.*

(b) F, G *surjectief* $\implies G \circ F$ *surjectief.*

(c) F, G *bijectief* $\implies G \circ F$ *bijectief.*

(d) $G \circ F$ *injectief* $\implies F$ *injectief.*

(e) $G \circ F$ *surjectief* $\implies G$ *surjectief.*

(f) $G \circ F$ *surjectief en* G *injectief* $\implies F$ *surjectief en* G *bijectief.*

(g) $G \circ F$ *injectief en* F *surjectief* $\implies G$ *injectief en* F *bijectief.*

(h) $G \circ F$ *bijectief en* F *surjectief* $\implies F$ *en* G *bijectief.*

(i) $G \circ F$ *bijectief en* G *injectief* $\implies F$ *en* G *bijectief.*

DEFINITIE 2.16 **Twee verzamelingen X en Y heten *equipotent* als en slechts als er een bijectie tussen X en Y bestaat.**

Twee eindige verzamelingen zijn equipotent als en slechts als ze evenveel elementen hebben.
Het aantal elementen van een eindige verzameling X noteert men $|X|$.

VOORBEELDEN 2.17

(a) De verzamelingen $\{a, b, c\}$ en $\{1, 2, 3\}$ zijn equipotent.

(b) De verzamelingen $\{a, b, c\}$ en $\{1, 2, 3, 4\}$ zijn niet equipotent.

(c) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ zijn equipotent maar $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ zijn niet equipotent.

EIGENSCHAP 2.18

Schroder - Bernstein
Zij X en Y verzamelingen. Als er een injectieve functie $F : X \to Y$ en een injectieve functie $G : Y \to X$ bestaat dan zijn X en Y equipotent.

(Het bewijs hiervan is niet eenvoudig.)

EIGENSCHAP 2.19

Als X een verzameling is dan zijn X en 2^X niet equipotent.

Als X een eindige verzameling is dan dan is $|X| < |2^X|$. We zullen later zien dat $|2^X| = 2^{|X|}$.

EIGENSCHAP 2.20

Pigeon Hole Principe
Zij $F : A \to B$ een functie. Als A en B eindige equipotente verzamelingen zijn dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

(a) F is injectief.

(b) F is surjectief.

(c) F is bijectief.

2.3 EQUIVALENTIERELATIES

DEFINITIE 2.21

Zij R een relatie op een niet lege verzameling X.

(a) R heet reflexief als

$$\forall x \in X : xRx$$

(b) R heet transitief als

$$\forall x, y, z \in X : \left(xRy \textbf{ en } yRz\right) \Rightarrow xRz$$

(c) R heet symmetrisch als

$$\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$$

(d) R heet antisymmetrisch als

$$\forall x, y \in X : \left(xRy \textbf{ en } yRx\right) \Rightarrow x = y$$

DEFINITIE 2.22 **Zij R een relatie op een niet lege verzameling X. Dan heet R een equivalentierelatie als R reflexief, transitief en symmetrisch is. Equivalentierelaties worden dikwijls genoteerd als $\equiv, \sim, \simeq, \ldots$.**

VOORBEELD 2.23 (a) Definieer de relatie $\sim$ op $\mathbb{R}$ door

$$a \sim b \iff a^2 = b^2$$

(b) Definieer de relatie $\equiv$ op $\mathbb{Z}$ door

$$a \equiv b \iff 3|(a-b)$$

DEFINITIE 2.24 **Zij $\sim$ een equivalentierelatie op een verzameling A. Als $a \in A$ dan noemen we de verzameling**

$$\left\{b \in A \mid a \sim b\right\} \subset A$$

de equivalentieklasse van a. We noteren deze equivalentieklasse dikwijls als $[a]$.
De verzameling

$$A/\sim = \left\{[a] \mid a \in A\right\} \subset 2^A$$

noemt men de quotiëntverzameling van A.
De afbeelding $\pi : A \to A/\sim$ die een element $a \in A$ afbeeldt op $\pi(a) = [a]$ noemt men de kanonieke surjectie. (verifieer zelf dat dit een surjectieve afbeelding is.)

VOORBEELD 2.25 (a) Zij $\sim$ de equivalentierelatie op $\mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$a \sim b \iff a^2 = b^2$$

Als $a \in \mathbb{R}$ dan is de equivalentieklasse van a gelijk aan

$$[a] = \{a, -a\}$$

De quotiëntverzameling is dus

$$\mathbb{R}/\sim = \{\{a, -a\} | a \in \mathbb{R}\}$$

(b) Zij $\equiv$ de equivalentierelatie op $\mathbb{Z}$, gedefinieerd door

$$a \equiv b \iff 3|(a-b)$$

Als $a \in \mathbb{Z}$ dan is de equivalentieklasse van a gelijk aan

$$[a] = \left\{a + 3k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

De quotiëntverzameling bevat nu exact 3 verschillende elementen:

$$\mathbb{Z}/\equiv = \left\{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\right\} = \{[0], [1], [2]\}$$

De volgende eigenschap is essentieel in de studie van equivalentierelaties.

EIGENSCHAP 2.26 ***Zij $\sim$ een equivalentierelatie op een verzameling X. Dan geldt:***

(a) $\forall a \in A : a \in [a]$

(b) $\forall a \in A : [a] \neq \emptyset$ ***en*** $\cup_{a \in A} [a] = A$

(c) $\forall a, b \in A : [a] = [b] \iff a \sim b$

(d) $\forall a, b \in A : [a] \neq [b] \iff [a] \cap [b] = \emptyset$

Bewijs. 1) Dit volgt direct uit de reflexiviteit van $\sim$.
2) Dit volgt direct uit (1).
3) Als $[a] = [b]$ dan is $b \in [a]$ en dus is $a \sim b$.
Omgekeerd, onderstel dat $a \sim b$. Als $x \in [b]$ dan is $b \sim x$. Wegens de transitiviteit van de relatie $\sim$ is $a \sim x$ en dus is $x \in [a]$. Hieruit volgt dat $[b] \subset [a]$. Vermits de relatie $\sim$ ook symmetrisch is vinden we op een analoge manier dat $[a] \subset [b]$.
4) Als $[a] \cap [b] = \emptyset$ dan is $[a] \neq [b]$ want $[a], [b] \neq \emptyset$.
Omgekeerd, onderstel dat $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

$$\Rightarrow \exists x \in [a] \cap [b]$$

Bijgevolg is $a \sim x$ en $b \sim x$. Wegens de symmetrie en de transitiviteit van de relatie $\sim$ is dan $a \sim b$ en dus is $[a] = [b]$. ■

DEFINITIE 2.27 **Zij A een niet lege verzameling. Een deelverzameling $\mathscr{A} \subset 2^A$ heet een partitie van A als:**

(a) $\forall X \in \mathscr{A} : X \neq \emptyset$

(b) $A = \cup_{X \in \mathscr{A}} X$

(c) $\forall X, Y \in \mathscr{A} : X \neq Y \iff X \cap Y = \emptyset$

Uit de voorgaande eigenschap volgt dat voor elke equivalentierelatie $\sim$ op een verzameling A de quotiëntverzameling $A/\sim$ een partitie is van A.

Zij $\mathscr{A}$ een partitie van een niet lege verzameling A. Definieer dan de relatie $\sim_{\mathscr{A}}$ op A door

$$x \sim_{\mathscr{A}} y \iff \exists U \in \mathscr{A} \text{ zodat } x, y \in U$$

Dan is $\sim_{\mathscr{A}}$ een equivalentierelatie op A en bovendien is $A/\sim_{\mathscr{A}} = \mathscr{A}$.
Voor elke equivalentierelatie $\sim$ op A is bovendien $\sim_{A/\sim} = \sim$.
We vinden dus dat de begrippen "equivalentierelatie" en "partitie" in essentie dezelfde zijn.

2.4 Partiele ordeningen

DEFINITIE 2.28 **Een relatie $R \subset X \times X$ heet een (partiele) ordening op X als R reflexief, transitief en antisymmetrisch is.**
Als bovendien geldt dat

$$\forall x, y \in X : xRy \text{ of } yRx$$

dan zeggen we dat R een totale ordening is.
Orderelaties worden meestal genoteerd met symbolen $\leq, < \ldots$
Als $\leq$ een ordening is op X, noemen we $(X, \leq)$ een (partieel) geordende verzameling en als $x \leq y$ dan zeggen we dat x kleiner is dan y.

VOORBEELD 2.29

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ zijn totaal geordend voor de gewone ordening.

$\mathbb{C}$ is partieel geordend voor de ordening $\leq$ die gedefinieerd word door:

$$a + bi \leq c + di \iff a \leq c \text{ en } b \leq d$$

Deze ordening is niet totaal.

Zij A een verzameling. De relatie $\subseteq$ op de machtsverzameling 2^A die gedefinieerd is door:

$$U \subseteq V \iff U \text{ is een deelverzameling van } V$$

is een partiele ordening. Men spreekt hier van de inclusieordening.

DEFINITIE 2.30 **Zij $(X, \leq)$ een geordende verzameling en zij $Y \subset X$ een deelverzameling.**

- **Een element $x \in X$ heet een bovengrens (majorant) voor Y als**

$$\forall y \in Y : y \leq x$$

- **Een element $x \in X$ heet een ondergrens (minorant) voor Y als**

$$\forall y \in Y : x \leq y$$

- **een element $a \in Y$ heet een maximum als**

$$\forall y \in Y : y \leq a$$

- **een element $a \in Y$ heet een minimum als**

$$\forall y \in Y : a \leq y$$

- **een element $a \in Y$ heet een maximaal element als**

$$\forall y \in Y : a \leq y \Rightarrow a = y$$

- **een element $a \in Y$ heet een minimaal element als**

$$\forall y \in Y : y \leq a \Rightarrow a = y$$

EIGENSCHAP 2.31 *Zij $(X, \leq)$ een geordende verzameling en zij $Y \subset X$ een deelverzameling. Als $a \in Y$ dan geldt:*

(a) ***a is maximum $\Rightarrow$ a is maximaal element Bovendien bestaat er hoogstens één maximum in Y.***
Als de ordening totaal is dan is een maximaal element ook een maximum.

(b) ***a is minimum $\Rightarrow$ a is minimaal element Bovendien bestaat er hoogstens één minimum in Y.***
Als de ordening totaal is dan is een minimaal element ook een minimum.

VOORBEELD 2.32 Neem X de machtsverzameling van $1, 2, 3$.

$$X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Stel

$$Y = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}$$

Dan zijn $\{1,2\}$ en $\{2,3\}$ maximale elementen voor Y. Het zijn echter geen maxima. Bovendien is $\emptyset$ een minimum.

Uit dit voorbeeld blijkt dat een maximaal element niet altijd een maximum is. Bovendien zijn maximale en minimale elementen in het algemeen niet uniek.

DEFINITIE 2.33 **Zij $(X, \leq)$ een geordende verzameling en zij $a, b \in X$ met $a \leq b$.**

- **De verzameling $[a, b] = \left\{x \in X \mid a \leq x \leq b\right\}$ noemt men het gesloten interval met eindpunten a en b.**
- **De verzameling $]a, b[= \left\{x \in X \mid a < x < b\right\}$ noemt men het open interval met eindpunten a en b.**
- **De verzamelingen $[a, b[= \left\{x \in X \mid a \leq x < b\right\}$ en $]a, b] = \left\{x \in X \mid a < x \leq b\right\}$ noemt men de halfopen intervallen met eindpunten a en b.**

DEFINITIE 2.34 **Zij $(X,\leq)$ een geordende verzameling en zij $Y \subset X$ een deelverzameling. Als de verzameling**

$$\{x \in X \mid x \text{ is bovengrens voor } Y\}$$

een minimum heeft dan noemt men dit minimum het supremum van Y. We noteren dit element als $Sup_X(Y)$.
Als de verzameling

$$\{x \in X \mid x \text{ is ondergrens voor } Y\}$$

een maximum heeft dan noemt men dit maximum het infimum van Y. We noteren dit element als $Inf_X(Y)$.

Het supremum en het infimum van Y hangen af van de grotere verzameling X. Men heeft bijvoorbeeld:

$$Sup_{\mathbb{R}}\left(\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \pi\}\right) = \pi$$

maar

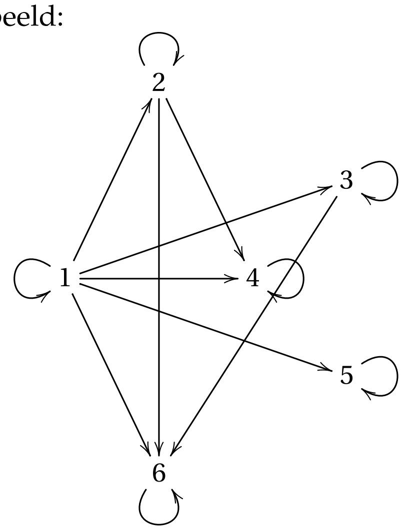
$$Sup_{\mathbb{Q}}\left(\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \pi\}\right)$$

bestaat niet.

2.5 Hassediagram van een eindige ordening

Zij $(A,\leq)$ een eindige partieel geordende verzameling. We kunnen de orderelatie grafisch voorstellen door elk element van A te laten overeenkomen met een punt in het vlak. Twee punten a en b worden dan verbonden door een pijl van a naar b als $a \leq b$.

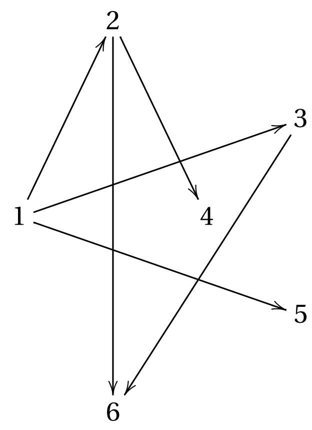
VOORBEELD 2.35 Neem $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ en neem als ordening de deelbaarheidsrelatie $|$, d.w.z. $a|b$ als en slechts als a een deler is van b. De grafische voorstelling is dan bijvoorbeeld:



We zien direct dat dergelijke voorstelling zeer onoverzichtelijk is als $|A|$ groot wordt.
We kunnen een veel eenvoudiger voorstelling maken door niet *alle* pijlen te tekenen. We zullen een pijl tekenen van a naar b als $a \leq b$ en als er geen enkel element x bestaat zodat $a \lneq x \lneq b$. Bovendien laten we lussen weg.

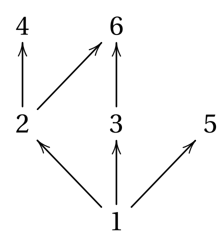
In het algemeen geldt dan: $x \leq y$ als en slechts als er een gerichte weg loopt van y naar x.

VOORBEELD 2.36 De voorstelling van de ordening uit het vorige voorbeeld wordt nu:



We kunnen de voorstelling nog vereenvoudigen door de punten in het vlak zodanig te kiezen dat alle pijlen opwaarts gericht worden. In plaats van pijlen tekenen we dan gewone lijnen.
De voorstelling die we nu bekomen noemen we het *Hassediagram* van de ordening. Nu geldt: $x \leq y$ als en slechts als er een afdalende weg loopt van y naar x.

VOORBEELD 2.37 Het Hassediagram van de ordening uit het voorgaande voorbeeld wordt:



EIGENSCHAP 2.38 ***Zij*** $(A, \leq)$ ***een partieel geordende verzameling.***

(a) Een element $a \in A$ ***is maximaal als in het Hassediagram geen pijl vertrekt uit*** a***.***

(b) Een element $a \in A$ is minimaal als in het Hassediagram geen pijl toekomt in a.

(c) Een element $a \in A$ is een maximum van A als in het Hassediagram vanuit elk punt een pad toekomt a. (Het punt a staat dan helemaal bovenaan in het diagram.)

(d) Een element $a \in A$ is een minimum van A als in het Hassediagram elk punt bereikbaar is vanaf a. (Het punt a staat dan helemaal onderaan in het diagram.)

VOORBEELD 2.39 In het Hassediagram van het vorige voorbeeld kunnen we direct zien dat $4, 5$ en 6 maximale elementen zijn en dat 1 een minimum is.

2.6 Het topologisch zoekalgoritme

In dit stukje zien we hoe we een partiële ordening op een eindige verzameling A kunnen uitbreiden tot een totale ordening.
Als $\leq$ de partiële ordening is op A dan definiëren we een nieuwe ordening $\preceq$ zodat

(a) $\forall a, b \in A : a \leq b \Rightarrow a \preceq b$

(b) $\preceq$ is een totale ordening.

We nummeren eerst de punten van A door toepassing van volgend algoritme.

Stel H het Hassediagram van $\leq$.

Stap 1 Stel $k = 1$. Stel $H_1 = H$.

Stap 2 Kies een punt in H_k waarin geen afdalende lijnen uit H_k aankomen. Noem dit punt v_k.

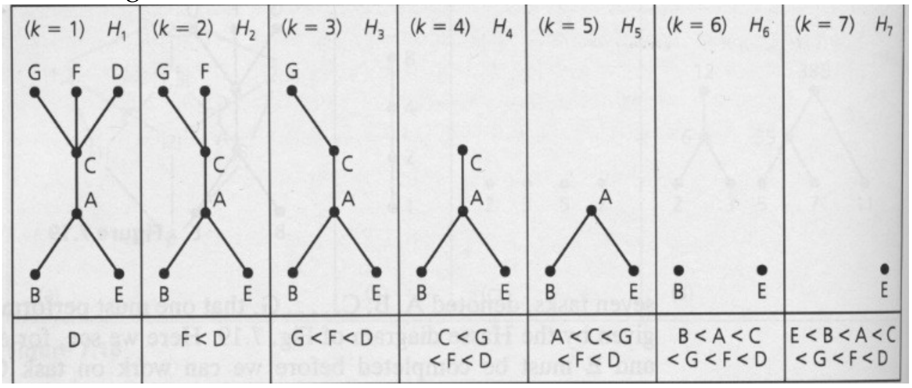
Stap 3 Als $k = n$ dan stopt het algoritme.
Als $k < n$ verwijder dan in H_k het punt v_k en ook alle lijnen die vanuit v_k vertrekken. Noem het nieuwe diagram H_{k+1}. Vergroot k met 1 en keer terug naar stap 2.

Definieer nu de ordening $\preceq$ door $v_k \preceq v_l$ als $k \geq l$. Dit geeft

$$v_n \preceq v_{n-1} \preceq \cdots \preceq v_2 \preceq v_1$$

Verifieer zelf dat $\preceq$ een totale ordening is op A die aan de gestelde eisen voldoet.

VOORBEELD 2.40 De orderelatie op de verzameling $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ is gegeven door het eerste diagram.



TOEPASSING 2.41 ***Een aantal taken moet worden uitgevoerd. De taken zijn partieel geordend door een aantal beperkingen op de volgorde van uitvoering. Bijvoorbeeld bij de assemblage van een auto kan de taak "plaats het linker voorwiel"niet worden uitgevoerd vooraleer de taak "plaats de vooras"klaar is.***
Zoek nu een volgorde om de taken één na één uit te voeren (aan een lopende band) waarbij de opgelegde beperkingen gerespecteerd worden.

2.7 Bijzondere functies

In deze les werden de volgende functies besproken, onder andere via het voorschrift en via grafieken:

(a) De absolute waarde functie $x \longmapsto |x|$

(b) De floor-functie (=ENTIER-functie) $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$

(c) De ceilingfunctie $x \longmapsto \lceil x \rceil$

(d) De mod-functie (rest bij deling door n)

(e) De exponentiële en logaritmische functies

Hiervoor verwijs ik momenteel naar het boek pag 20 tot 27.

2.8 Oefeningen

2.1. Een relatie kan weergegeven worden door Venn-diagrammen, verbonden met pijlen. Geef de volgende relaties weer via Venn-diagrammen.

(a) $S = T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ en de relatie wordt gegeven door $=_m$ waarbij $s =_m t$ als $s - t$ deelbaar is door m. Zulk een relatie is een equivalentierelatie (waarom?). Werk dit bijvoorbeeld uit met $m = 4$.

(b) $S = T = \{$Je grootmoeder langs vaders kant en al haar nakomenlingen$\}$. De relatie is “is een ouder van”. Zulk een relatie beschrijft een boom (waarom?).

2.2. In deze vraag zijn alle functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.

(a) Geef een voorbeeld van een functie die injectief is, maar niet surjectief.

(b) Geef een voorbeeld van een functie die niet injectief is, maar wel surjectief.

(c) Geef een voorbeeld van een functie die bijectief is.

2.3. Toon aan dat (zie ook eigenschap 2.15):

(a) De samenstelling van 2 injectieve functies is terug injectief.

(b) De samenstelling van 2 surjectieve functies is terug surjectief.

(c) Indien $g \circ f$ surjectief is, dan is g surjectief.

(d) Indien $g \circ f$ injectief is, dan is f injectief.

2.4. Geef een tegenvoorbeeld om de volgende stellingen te ontkrachten:

(a) Indien $g \circ f$ surjectief is, dan is f surjectief.

(b) Indien $g \circ f$ injectief is, dan is g injectief.

2.5. In een internaat krijgen alle studenten een kamer toegewezen. Dit kunnen we beschouwen als een functies van de studenten naar de kamers. Wat wil het zeggen dat deze functie injectief is, en wat surjectief? (oef. 31 p. 19)

2.6. Welke van de volgende functies zijn injectief, surjectief, bijectief (oef. 33 p. 19).

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \longmapsto 2n$

(b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \longmapsto n + 1$

(c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : n \longmapsto n + 1$

(d) $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \longmapsto 2^m 5^n$

(e) $q : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \longmapsto 2^m 6^n$

(f) $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \longmapsto (x + y, z)$

2.7. Bekijk de functies $f(x) = 2x$ en $g(x) = x^3 + 1$, beide met $\mathbb{R}$ als domein en beeldverzameling (oef. 38 p. 19).

(a) Geef via grafieken aan waarom f en g inversen hebben.

(b) Bepaal deze inversen.

2.8. Zij X een deelverzameling van A, definieer dan 1_X als de functie

$$1_X : A \to \{0,1\} : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x \in X \\ 0 & \text{als } x \notin X \end{cases}$$

Dit noemen we de *characteristieke functie*.

Schrijf de *absolute waarde functie*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

door gebruik te maken van characteristieke functies.

2.9. Bekijk de functie

$$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \longmapsto x + 1/x$$

Deze functies is niet bijectief, want ze is niet injectief en niet surjectief. Bepaal een gebied $A \subset \mathbb{R}$ en een gebied $B \subset \mathbb{R}$ zodat

$$g : A \to B : x \longmapsto x + 1/x$$

een bijectieve functie is. Bepaal voor deze g ook g^{-1}.

2.10. Gegeven de gehele getallen $\mathbb{Z}$. Definieer de pariteitsrelatie op $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ door: p is in relatie met q als en slechts als $2|(p-q)$. Toon aan dat dit een equivalentierelatie is. Wat zijn de equivalentieklassen? (oef. 23 p. 18)

2.11. Gegeven de relatie die verzamelingen met dezelfde cardinaliteit met elkaar verbindt. Toon aan dat dit een equivalentierelatie is. Je mag veronderstellen dat alle verzamelingen eindig zijn. (oef. 22 p. 18).

2.12. We bekijken 3 relaties in $V = \{1,2,3,4,5,6\}$. Noem ze achtereenvolgens R, S en T.

R	1	2	3	4	5	6
1	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
2	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$
3	$\cdot$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\cdot$	$\bullet$
4	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\cdot$
5	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$
6	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\bullet$

S	1	2	3	4	5	6
1	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$
2	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$
3	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$
4	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$
5	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$
6	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$

T	1	2	3	4	5	6
1	$\cdot$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
2	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\cdot$
3	$\bullet$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\bullet$
4	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
5	$\cdot$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$	$\bullet$	$\cdot$
6	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Geef van elke relatie aan of ze reflexief, transitief, symmetrisch of antisymmetrisch zijn. Welke van deze relaties zijn equivalentierelaties. Geef van de equivalentierelaties ook aan welke partitie ermee overeenkomt.

2.13. De relatie T uit de vorige oefening is verzonnen door gewoon een prentje te maken en dat te vullen met puntjes. Elk prentje dat een deel van $V \times V$ beschrijft levert immers een relatie op. Indien V opnieuw de verzameling $\{1,2,3,4,5,6\}$ voorstelt,

(a) Hoeveel relaties zijn er in totaal op V?

(b) Hoeveel reflexieve relaties zijn er?

(c) Hoeveel symmetrische relaties zijn er?

(d) Hoeveel antisymmetrische relaties zijn er?

(e) Hoeveel functies zijn er op V?

2.14. Welke van de volgende relaties zijn equivalentierelaties? Bepaal indien nodig ook de equivalentieklassen.

(a) $V = \{$rechten in het vlak$\}$, $R =$...is evenwijdig met...

(b) $V = \{$rechten in het vlak$\}$, $R =$...staat loodrecht op...

(c) $V = \mathbb{R}$, $R : \ldots \geq \ldots$

(d) $V = \mathbb{R}$, $R : \ldots = \ldots$

(e) $V = \{$Alle studenten in deze klas$\}$, R :...is van hetzelfde geslacht...

(f) $V = \{$Alle studenten in deze klas$\}$, R :...is verliefd op...

2.15. Controleer of de volgende relaties partiële ordeningen zijn en bepaal hun Hasse-diagram. Welke relaties zijn bovendien totaal geordend?

(a) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $R =$ de relatie R uit oefening 2.12.

(b) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $R = \ldots$is een deler van…

(c) $A =$ de machtsverzameling van $\{a,b,c\}$, $R = \ldots$is een deelverzameling van…

(d) $A = \{12$ en zijn positieve delers$\}$, $R = \ldots$is een deler van…

(e) $A = \{32$ en zijn positieve delers$\}$, $R = \ldots$is een deler van…

(f) $A = \{222$ en zijn positieve delers$\}$, $R = \ldots$is een deler van…

(g) $A = \{120$ en zijn positieve delers$\}$, $R = \ldots$is een deler van…

(h) $A = \{$De partities van $\{1,2,3,4\}\}$, $R = \ldots$is een fijnere partitie dan…

2.16. *Examen eerste zit 2007-2008.*

Geef van de volgende relaties aan of het equivalentierelaties zijn, partieel geordende verzamelingen zijn, beide zijn of geen van beide zijn. Geef in het geval van equivalentrelatie de bijbehorende partitie, in het geval van partiële ordening het bijbehorende Hasse diagram.

(a)

R	a	b	c	d	e	f	g
a	•	·	·	·	·	·	•
b	·	•	•	·	·	•	·
c	·	•	•	·	·	·	·
d	·	·	·	•	·	·	•
e	·	·	·	·	•	·	·
f	·	•	·	·	·	•	·
g	•	·	·	•	·	·	•

(b)

S	a	b	c	d	e	f	g	h
a	•	•	•	·	·	·	•	·
b	·	•	·	·	·	·	•	·
c	·	·	•	·	·	·	•	·
d	·	·	•	•	·	·	•	·
e	•	•	•	•	•	·	•	·
f	·	•	·	·	·	•	•	·
g	·	·	·	·	·	·	•	·
h	•	•	•	•	•	•	•	•

2.17. *Examen tweede zit 2007-2008.*

Gegeven de verzameling $A = \{a, b, c, d, e, f\}$.

(a) Hoeveel injectieve functies zijn er van A naar A?

(b) Hoeveel relaties zijn er op A?

(c) Hoeveel relaties zijn er op A die symmetrisch en reflexief zijn?

2.18. *Examen tweede zit 2008-2009.*

(a) Wat is er fout met de volgende redenering, die zou aantonen dat een relatie R op A die symmetrische en transitief is, ook reflexief is.

> Veronderstel $a \in A$ willekeurig. Kies b zodat $(a, b) \in R$. Uit de symmetrie volgt dat $(b, a) \in R$. Vermits (a, b) en $(b, a) \in R$, volgt uit de transitiviteit dat $(a, a) \in R$. Dit doen we voor elke $a \in A$ en daarom is R reflexief.

Verduidelijk je antwoord.

(b) Zij B een eindige verzameling met $\#B = n$. Hoeveel functies $f : B \to B$ zijn er die ook equivalentierelaties zijn?

2.19. *Tussentijdse test 2009-2010.*

Toon aan dat de inverse relatie van een equivalentierelatie opnieuw een equivalentierelatie is.

2.20. *Examen eerste zit 2009-2010.*

Veronderstel dat P de verzameling van proffen is van deze universiteit en C de verzameling van alle cursussen die aan deze universiteit gedoceerd worden. De relatie $\mathscr{R} \subset C \times P$ wordt beschreven door "…wordt gedoceerd door …".

(a) Wat wil het zeggen dat deze relatie een functie is?

(b) Indien $\mathscr{R}$ overeenkomt met een functie, wat wil het dan zeggen dat deze functie injectief is?

(c) Indien $\mathscr{R}$ overeenkomt met een functie, wat wil het dan zeggen dat deze functie surjectief is?

(d) Kan deze relatie een equivalentierelatie of een partiële ordening zijn?

2.21. *Examen tweede zit 2009-2010.*

Veronderstel dat V de verzameling van alle (levende) mannen op deze aardbol. De relatie $\mathscr{R} \subset V \times V$ wordt beschreven door "... is de (biologische) vader van ...".

(a) Komt deze relatie overeen met het voorschrift van een functie?

(b) Indien $\mathscr{R}$ overeenkomt met een functie, wat wil het dan zeggen dat deze functie injectief is?

(c) Indien $\mathscr{R}$ overeenkomt met een functie, wat wil het dan zeggen dat deze functie surjectief is?

(d) Is deze relatie een equivalentierelatie of een partiële ordening?

2.22. *Examen eerste zit 2010-2011.*

Geef aan welke van de volgende relaties functies zijn, en indien ja, of ze injectief, surjectief, bijectief zijn. Noem hierbij $2\mathbb{Z}$ de verzameling van even gehele getallen. Bewijs je beweringen.

(a) $f : \{0,1,2,3,\dots,63\} \to \{0,1\}^6 : n \longmapsto (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ waarbij $(a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0)_2$ de binaire voorstelling is van het getal n.

(b) $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (n,m) \longmapsto m2^n$.

(c) $h : (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{Z}) \to \mathbb{N} : (n,m) \longmapsto m2^n$.

2.23. Indien $x > 2$, dan kan men een uniek geheel getal k vinden dat voldoet aan

$$3^{k-1} + 2 < x \leq 3^k + 2$$

Schrijf k in functie van x (oef. 13 p. 28).

2.24. De pariteitsfunctie

$$\mathbb{Z} \to \{0,1\} : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \text{ even is} \\ 1 & \text{als } x \text{ oneven is} \end{cases}$$

kunnen we ook op 1 regeltje schrijven als we floors en ceilings toelaten. Hoe? (oef. 11 p. 28)

2.25. Voor elk van de volgende gelijkheden, bepaal voor welke reële getallen ze gelden en voor welke niet (een bewijs is niet nodig) (oef. 14 p. 28).

(b) $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

(d) $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$.

(g) $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.

(h) $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

(k) $\lfloor x/n \rfloor = \lfloor x \rfloor / n$ met n een geheel getal.

2.26. In elk van de volgende problemen zijn er 2 formules gegeven. Schrijf tussen de twee expressies een ongelijkheid die altijd waar is, indien die bestaat. Indien de ongelijkheid niet strikt is (dus $\geq$ of $\leq$), geef dan een voorbeeld waarbij de beide formules gelijk zijn en een voorbeeld waarbij de beide formules ongelijk zijn. Als er geen ongelijkheid tussen bestaat geef dan een voorbeeld voor $<$, voor $=$ en voor $>$ (oef. 15 p. 28).

(a) $\lfloor x+y \rfloor, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$

(d) $\lfloor x-y \rfloor, \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$

(f) $\lfloor xy \rfloor, \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor$

2.27. (oef. 35 p. 29)

(a) Los de volgende vergelijking op in $\mathbb{Z}$:

$$4x \equiv 3 \mod 5.$$

(b) Bewijs dat voor elke k geheel geldt dat

$$k^2 \equiv 0 \text{ of } 1 \mod 4$$

(c) Toon aan dat $x^2 \equiv 45 \mod 100$ nooit een gehele oplossing heeft.

2.28. Geef de waarden van de volgende logaritmes (oef. 36 p. 29):

(a) $\log_5 125$

(b) $\log_{12} 1$

(c) $\log_2 1024$

(d) $\log_8 1024$

2.29. Indien $\log_a x$ voorgesteld wordt door L, beschrijf dan de volgende logaritmes in functie van L. Veronderstel hierbij dat a en b positief zijn en k geheel (oef. 37 p. 29):

(a) $\log_a x^k$

(b) $\log_b x^k$

(c) $\log_a (1/x^k)$

(d) $\log_b (1/x^k)$

2.30. Zonder gebruik te maken van een rekentoestel, (oef. 39 p. 29):

(a) toon aan dat $1 < \log_2 3 < 2$

(b) zoek $\lfloor \log_3 24 \rfloor$

(c) zoek $\lceil \log_4 100 \rceil$

2.31. *Tussentijdse test 2008-2009.*

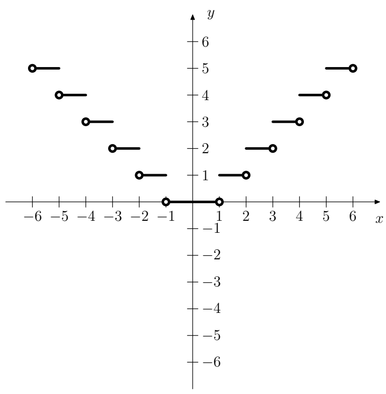
Los op in $\mathbb{Z}$:

$$6x + 3 \equiv 1 \pmod 8$$

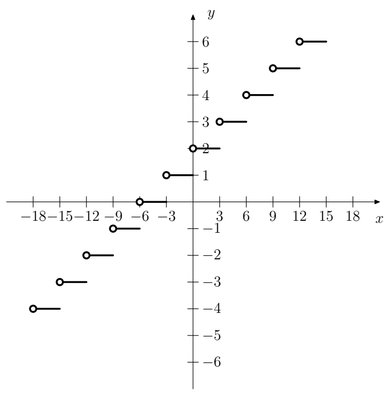
2.32. *Examen eerste zit 2008-2009.*

Elk van de volgende grafieken komt overeen met een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Geef telkens een functievoorschrift dat overeenkomt met deze grafiek.

(a)



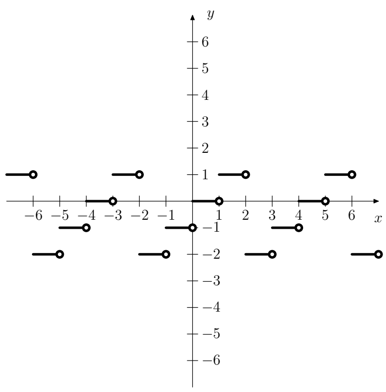
(b)



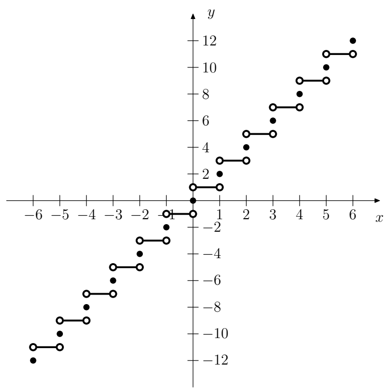
2.33. *Tussentijdse test 2010-2011.*

Elk van de volgende grafieken komt overeen met een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Geef telkens een functievoorschrift dat overeenkomt met deze grafiek.

(a)



(b)



2.34. *Examen tweede zit 2010-2011.*

Bekijk de functie

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \longmapsto |2x - 2| + 3$$

(a) Toon aan dat deze functie niet injectief en niet surjectief is.

(b) Bepaal een zo groot mogelijk gebied $A \subset \mathbb{Z}$ en een gebied $B \subset \mathbb{Z}$ zodat

$$g : A \to B : x \longmapsto |2x - 2| + 3$$

een bijectieve functie is. Bepaal voor deze g ook g^{-1}.

HOOFDSTUK 3

BEWIJSTECHNIEKEN

DEFINITIE 3.1 **(behoorlijk informele definitie)**
Een bewijs van een wiskundige uitspraak is een opeenvolging van sluitende argumenten die aantonen dat een uitspraak waar is. De argumenten moeten gedetailleerd genoeg zijn om het aanhorende publiek te overtuigen.

Er bestaan verschillende methoden om dit te doen. In de volgende secties geven we een overzicht van de courantste methoden.

3.1 TRIVIAAL BEWIJS

Een triviaal bewijs is een bewijs dat geen verder werk nodig heeft.
Dit kan gebaseerd zijn op het feit dat hetgeen dat we willen bewijzen ook al in het gegeven staat (of hier direct uit volgt), of dit kan gebaseerd zijn op het volgende principe:

> Uit een onwaarheid volgt alles.

Als we $P \implies Q$ willen bewijzen, en we weten dat P niet waar is, dan is Q een waarheid.

VOORBEELD 3.2 De volgende voorbeelden kunnen dus bewezen via een triviaal bewijs

(a) Indien x een reëel getal is waarvoor $x^2 + 1 = 0$, dan is $x^4 = \pi$.

(b) Elke mens met vijf hoofden is een genie

(c) Indien $n > 0$ en n is even, dan is $n > 0$.

3.2 Rechtstreeks bewijs

Indien S_n een uitspraak is die we willen bewijzen met een rechtstreeks bewijs, dan gaan we op zoek naar een opeenvolging van uitspraken $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{n-1}$, zodat elke uitspraak S_k *logisch* volgt uit de uitspraken $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$ en uit andere hypotheses, definities en andere uitspraken die men kent uit andere voorafgaande eigenschappen, oefeningen etc.

VOORBEELD 3.3 We noemen een geheel getal n een *samengesteld getal* als $n > 1$ en n geen priemgetal is. Formeler gezegd: We noemen een geheel getal n een *samengesteld getal* als er gehele getallen $a, b > 1$ bestaan zodat $n = ab$.

Kijk naar de volgende eigenschap:

> Indien n een samengesteld getal is, dan heeft n tenminste één priemfactor p zodat $p \leq \sqrt{n}$.

Bewijs. Omdat n samengesteld is, bestaan er gehele getallen $a, b > 1$ zodat $n = ab$. We mogen *zonder verlies van algemeenheid*[1] stellen dat $a \leq b$.
Maar dan is $n = ab \geq a^2$, waardoor $a \leq \sqrt{n}$. Indien a een priemgetal, zijn we klaar. Indien a geen priemgetal is, dan moet a zelf een priemdeler hebben zodat $p < a \leq \sqrt{n}$. Ook in dat geval zijn wel klaar. ∎

3.3 Bewijs door contrapositie

Stel dat we de stelling $P \implies Q$ wensen te bewijzen, dan kunnen we opteren om niet deze stelling te bewijzen, maar om de *contrapositie* hiervan te bewijzen. Dit is de stelling $\neg Q \implies \neg P$. (Niet Q impliceert niet P). In symbolen:

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$$

Het is hierbij wel belangrijk dat je goed kan formuleren wat de negatie is van een uitspraak.

VOORBEELD 3.4 Bewijs de volgende stelling:

> Indien $p > 1$ een geheel getal is dat geen enkele deler d heeft zodat $1 < d \leq \sqrt{p}$, dan is p een priemgetal.

Bewijs. Dit is exact de contrapositie van de eigenschap uit voorbeeld 3.3. Deze eigenschap werd hierboven bewezen. ∎

[1] het zinnetje "zonder verlies van algemeenheid"(kort: wlog (without loss of generality)) betekent dat de veronderstelling die gemaakt wordt niets verandert in de geldigheid van het bewijs. Meestal omdat zo een aantal analoge gevallen in 1 keer ook beschreven worden.

In sommige gevallen is het veel handiger om met de omgekeerde uitspraken te werken van de uitspraken die in de te bewijzen eigenschap gebruikt worden.

3.4 Bewijs door contradictie

Bij een bewijs door contradictie gaan we in het bewijs een veronderstelling maken, als die veronderstelling verderop in het bewijs tot een tegenspraak leidt, dan mogen we de negatie van die veronderstelling als waar aannemen.

VOORBEELD 3.5 Bewijs de volgende stelling:

> Het getal $\sqrt{2}$ is een irrationaal getal.

Het concept "irrationaal" is veel moeilijker om mee te werken dan het concept "rationaal".

Bewijs. Veronderstel dat $\sqrt{2}$ een rationaal getal is. Dan kunnen we $\sqrt{2}$ schrijven als $\frac{a}{b}$, met a en b gehele getallen $(b \neq 0)$ zodat $ggd(a,b) = 1$. We kunnen nu beide leden van $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ vermenigvuldigen met b en dan kwadrateren tot

$$2b^2 = a^2.$$

Aangezien het linkerlid even is, is het rechterlid ook even. a^2 even impliceert dat a even is. Dan is $a = 2c$ voor zeker geheel getal c. De gelijkheid wordt dan

$$2b^2 = 4c^2 \quad \Longrightarrow \quad b^2 = 2c^2.$$

Dan is b^2 even en dus is b even. We vinden dat zowel a als b even is. Dit is in tegenspraak ("*contradictie*") met het feit dat $ggd(a,b) = 1$.
De veronderstelling dat $\sqrt{2}$ een rationaal getal is, is dus niet waar en we kunnen concluderen dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is. ■

3.5 Bewijs door in gevallen te splitsen

In sommige gevallen kan je een uitspraak makkelijker aantonen door de uitspraak op te delen in verschillende gevallen zodat de unie van die gevallen de hele uitspraak is. Bewijs nu die afzonderlijke gevallen.

VOORBEELD 3.6 Bewijs de volgende stelling:

> $\forall n \in \mathbb{Z} : n^3 - n$ is deelbaar door 2.

Bewijs. We onderscheiden twee verschillende gevallen:

- n **even** Indien n even is, kunnen we $n = 2k$ schrijven voor zekere k in $\mathbb{Z}$. Dan geldt:

$$n^3 - n = (2k)^3 - 2k = 8k^3 - 2k = 2(4k^3 - k) = 2m,$$

met $m = 4k^3 - k$, een geheel getal. Dus $n^3 - n$ is even.

- n **oneven** Indien n oneven is, kunnen we $n = 2k+1$ schrijven voor zekere k in $\mathbb{Z}$. Dan geldt:

$$n^3 - n = (2k+1)^3 - (2k+1) = 8k^3 + 12k^2 + 4k = 2(4k^3 + 6k^2 + 2k) = 2m,$$

met $m = 4k^3 + 6k^2 + 2k$, een geheel getal. Dus $n^3 - n$ is even.

■

Hoewel wiskundigen een bewijs waar te veel verschillende gevallen apart bestudeerd worden, minder elegant vinden, toch is het soms noodzakelijk dit te gebruiken. Het extreme geval is het bewijs van de vierkleurenstelling[2] dat in 1976 bewezen werd door Kenneth Appel en Wolfgang Haken. Dit bewijs (waarbij meer dan 1000 uren computertijd nodig waren om dit aan te tonen) resulteerde in meer dan 2000 gevallen, die elk nog duizenden subgevallen opleverden.

3.6 Bewijs door volledige inductie

Vaak bestaat een probleem erin aan te tonen dat een eigenschap geldt voor elk natuurlijk getal.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ldots$$

Hiervoor is inductie vaak de uitgelezen techniek om te gebruiken.

EIGENSCHAP 3.7 ***Inductie***

Veronderstel dat $S(n)$ een wiskundige bewering waarin de variable n in voorkomt, met n een positief geheel getal. Als $S(0)$ waar is, en bovendien telkens $S(k)$ waar is, ook $S(k+1)$ waar is, dan is $S(n)$ waar voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Sommige eigenschappen zijn niet waar voor elke $n \in \mathbb{N}$, maar pas vanaf een welbepaalde waarde n_0. De inductie-eigenschap kan ook iets algemener worden geformuleerd:

EIGENSCHAP 3.8 ***Inductie***

Als $S(n_0)$ waar is, en bovendien telkens $S(k)$ waar is, ook $S(k+1)$ waar is, dan is $S(n)$ waar voor elke $n \in \mathbb{N}$ waarvoor $n \geq n_0$.

[2] De vierkleurenstelling is de stelling in de wiskunde die zegt dat het mogelijk is elke willekeurige landkaart waarin de landen elk een geheel vormen (dus zonder exclaves), met behulp van slechts vier kleuren zo in te kleuren dat geen twee aangrenzende landen dezelfde kleur krijgen.

Inductie kan vaak gebruikt worden bij het aantonen dat een bepaalde gesloten formule klopt voor een gegeven rijtje, zoals volgend voorbeeld aangeeft.

VOORBEELD 3.9 Toon aan dat de som van de eerste n strikt positieve gehele getallen gelijk is aan

$$s_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bewijs. Voor $n = 1$ vinden we direct dat de eigenschap klopt. Stel nu dat we weten dat de eigenschap geldt voor k (*inductiehypothese*), laten we dan nu de eigenschap bewijzen voor $k+1$. We moeten dus aantonen dat

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Dit doen we dan door

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1)\\ &\overset{\text{i.h.}}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},\end{aligned}$$

waarbij de tweede gelijkheid volgt uit de inductiehypothese. ■

Vergelijk dit met een oneindige rij dominostenen die rechtop staan. Als we nu weten dat als er een steentje omvalt ook het volgende omvalt en we laten het eerste steentje omvallen, dan zal elk steentje wel op een bepaald moment omvallen.

VOORBEELD 3.10 **Putnam Olympiade '62**

Het euclidische vlak wordt in gebieden verdeeld door een eindig aantal rechten te tekenen. Toon aan dat het mogelijk is om elk gebied rood of blauw te kleuren zodat 2 naburige vlakjes nooit dezelfde kleur hebben.

Bewijs. Noem n het aantal rechten dat hier beschouwd wordt. De inductie gebeurt dan op n.
Indien $n = 1$ kleur je de twee gebieden in een tegengestelde kleur en dan ben je klaar.
Veronderstel nu dat je de eigenschap bewezen hebt voor $n = k$ (*inductiehypothese*) en neem aan dat $n = k+1$. Van deze $k+1$ rechten $a_1, \ldots, a_{k+1}$ kijk je eerste even naar alleen $a_1, \ldots, a_k$. Volgens de inductiehypothese kan je nu alle gebieden kleuren zodat 2 naburige vlakjes nooit dezelfde kleur hebben. De laatste rechte a_{k+1} verdeelt het vlak in twee gebieden. Verander nu in één van die twee gebieden al het rood in blauw en al het blauw in rood. We vinden dat de gebieden verdeeld door de $k+1$ rechten gekleurd zijn zoals gevraagd. ■

EIGENSCHAP 3.11

Volledige inductie

Als $S(n_0)$ waar is, en als bovendien uit het feit dat $S(1)$, $S(2)$, …, $S(k)$ waar zijn volgt dat ook $S(k+1)$ waar is, dan is $S(n)$ waar voor elke $n \in \mathbb{N}$ waarvoor $n \geq n_0$.

In sommige geval zal je niet enkel $S(1)$ moeten aantonen, maar verschillende van de eerste beweringen, zoals in volgende voorbeelden.

VOORBEELD 3.12

Veronderstel dat de fibonaccigetallen gegeven worden door

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_n &= F_{n-2} + F_{n-1}, \forall n > 2. \end{aligned}$$

Bewijs dat de algemene term van de fibonaccirij ook gegeven kan worden door

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Bewijs. We gebruiken volledige inductie aangezien de recursieve betrekking de twee vorige termen gebruikt. Je controleert makkelijk dat $F_1 = F_2 = 1$. Nu gaan we ervan uit dat de formule klopt voor elke $n \leq k$ en tonen de stelling aan voor $k+1$.

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_{k-1} + F_k \\ &\stackrel{\text{i.h.}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right. \\ &\qquad \left. - \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right) \end{aligned}$$

$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2$

Als we dit laatste herschrijven krijgen we precies

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right)$$

■

VOORBEELD 3.13 **Putnam Olympiade '90**

Stel

$$T_0 = 2, T_1 = 3, T_2 = 6$$

en voor $n \geq 3$,

$$T_n = (n+4)T_{n-1} - 4nT_{n-2} + (4n-8)T_{n-3} \tag{3.1}$$

Zo zijn de eerste termen

$$2, 3, 6, 14, 40, 152, 784.$$

Vind, met bewijs, een formule voor T_n van de vorm $T_n = A_n + B_n$, waar $\{A_n\}$ en $\{B_n\}$ bekende rijtjes zijn.

Omdat de rij zeer snel stijgt kunnen we trachten vermoeden we dat ten minste één van de twee rijtjes $\{A_n\}$ en $\{B_n\}$ exponentieel zijn. Op die manier komen we al snel uit op het vermoeden dat de rij van de vorm

$$T_n = 2^n + n!$$

Bewijs. We tonen dit aan via inductie, maar omdat de recursierelatie (3.1) gebruik maakt van de vorige drie termen is het van belang dat we dit eerst even controleren voor de eerste 3 termen.

- $n = 0: \quad 2 = 2^0 + 0! = 1 + 1$
- $n = 1: \quad 3 = 2^1 + 1! = 2 + 1$
- $n = 2: \quad 6 = 2^2 + 2! = 4 + 2$
- Veronderstel nu dat ons vermoeden klopt voor elke $n \leq k$. We tonen de eigenschap aan voor $k+1$:

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= (n+5)T_n - 4(n+1)T_{n-1} + (4(n+1)-8)T_{n-2} \\
&= (n+5)(2^n + n!) - 4(n+1)(2^{n-1} + (n-1)!) \\
&\quad + (4(n+1)-8)(2^{n-2} + (n-2)!) \\
&= [(n+5) - 2(n+1) + (n+1-2)]2^n \\
&\quad + [(n+5)n! - 4(n+1)(n-1)! + 4(n-1)(n-2)!] \\
&= 2 \cdot 2^n + (n+1)n! \\
&= 2^{n+1} + (n+1)!
\end{aligned}$$

■

3.7 Structurele inductie

Bij de "gewone" en de "volledige" inductie werd er steeds een eigenschap bewezen die geldt voor elk natuurlijk getal (eventueel niet beginnende bij 0, maar bij een groter getal n_0). De *structuur* van de verzameling $\mathbb{N}$ wordt hier impliciet gebruikt.

De verzameling van natuurlijke getallen is namelijk als volgt opgebouwd:

DEFINITIE 3.14

Dit is de recursieve definitie van een natuurlijk getal:

(a) BASISGEVAL: 0 is een natuurlijk getal.

(b) RECURSIE: indien k een natuurlijk getal is, is $k+1$ ook een natuurlijk getal

Voor ons zijn de natuurlijke getallen natuurlijk gewoon de verzameling $\{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$ en in de praktijk zullen we deze definitie nooit zo gebruiken, maar als we een bewijs via inductie formuleren, en we willen een eigenschap voor elke n aantonen doen we dit wel: We bewijzen eerst een basisgeval (voor $n=0$) en dan bewijzen we de inductiestap door van het geval $n=k$ over te gaan naar het geval $n=k+1$.

In het vak gegevensstructeren zijn er wel een aantal voorbeelden van recursief gedefinieerde structuren, waarvoor we iets willen kunnen bewijzen.

Ditzelfde principe kunnen we ook toepassen voor meer ingewikkelde structuren dan de natuurlijke getallen, op voorwaarde dat de structuren ook recursief gedefinieerd zijn.
Een recursieve gedefinieerde structuur wordt als volgt gegeven:

(a) BASISGEVALLEN: één of meerdere elementaire structuren worden gedefinieerd.

(b) RECURSIE: moeilijkere structuren worden gedefinieerd aan de hand van reeds eerder gedefinieerde structuren.

VOORBEELDEN 3.15

boom = tree

(a) Een *boom* is gegevensstructuur die voldoet aan de volgende definitie:

knoop = node
wortel = root

   (a) BASISGEVAL: één enkele knoop is een boom. Deze knoop noemen we de *wortel* van de boom

   (b) RECURSIE: Indien $T_1, T_2, \ldots, T_n$ bomen zijn, dan kunnen we een nieuwe boom maken als volgt:

      i. begin met een nieuwe knoop N. Dit noemen we de wortel van onze boom.

      ii. voor de de bomen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ hier aan toe.

verbinding = edge

      iii. trek verbindingen vanaf N naar de wortels van elke van de bomen $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

(b) We definiëren het begrip *expressie*, een uitdrukking waarin letters, getallen, $*$, $+$ en haakjes mogen gebruikt worden.

   (a) BASISGEVALLEN: Alle getallen en letters (variabelen) zijn expressies.

   (b) RECURSIE: Indien E_1 en E_2 expressies zijn, dan zijn E_1+E_2, $E_1 * E_2$ en (E_1) ook expressies

Indien een groep van structuren wordt bepaald door een recursieve definitie, dan kunnen we stellingen bewijzen over deze structuren via een aangepaste vorm van inductie:

EIGENSCHAP 3.16 ***Structurele inductie***

Indien $S(X)$ een stelling is over structuren X, die recursief gedefinieerd zijn,

(a) BASISSTAP: Indien $S(X)$ geldt voor alle basisgevallen X, en

(b) INDUCTIESTAP: indien een nieuwe structuur door recursie is gevormd door gebruik te maken van eerder bepaalde structuren $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, veronderstel dan dat $S(Y_1), S(Y_2), \ldots, S(Y_n)$ waar zijn en gebruik deze om aan te tonen dat $S(X)$ waar is.

VOORBEELD 3.17 Elke boom heeft precies 1 knoop meer dan het verbindingen heeft.
Dit voorbeeld werd in de les uitgewerkt.

VOORBEELD 3.18 Elke expressie heeft evenveel linker- als rechterhaakjes.
Dit voorbeeld werd in de les uitgewerkt.

3.8 Formules gokken

De methode van de onbepaalde coëfficiënten

Indien je weet dat de gesloten formule van een rijtje gegeven wordt door een veelterm, dan kan de methode van de onbepaalde coëfficiënten gebruikt worden. We illustreren de *methode van de onbepaalde coëfficiënten* aan de hand van een voorbeeld:

VOORBEELD 3.19 Stel gegeven een rijtje

$$-1, -1, 1, 5, 11, 19, 29, \ldots$$

We willen dus een veelterm $P(x)$ opstellen, zodat $P(1) = -1$, $P(2) = -1$, $P(3) = 1$ enzovoort.
Daartoe bepalen we de verschilrij, dit is de rij waarbij er steeds de vorige term van de volgende aftrekken:

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

Indien we nu van deze rij nogmaals de verschilrij bepalen krijgen we

$$2, 2, 2, 2, 2, \ldots$$

Dit is een constante rij. Nu weten we dat de veelterm $P(x)$ die we zoeken van graad twee moet zijn, aangezien we, na twee maal de verschilrij te nemen, tot de constante rij gekomen zijn. Neem nu een willekeurige veelterm, waarvan we de coëfficiënten gaan bepalen:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

We weten dat $P(1) = -1$, $P(2) = -1$ en $P(3) = 1$. Dit invullen levert ons het stelsel

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases}$$

met als oplossing $a = 1$, $b = -3$ en $c = 1$. De veelterm die we zoeken is dus

$$P(x) = x^2 - 3x + 1$$

De algemene formule die we zoeken is dus

$$n^2 - 3n + 1$$

OPMERKING 3.20 De hoogstegraadscoëfficiënt van de veelterm hadden we ook nog op een andere manier kunnen bepalen: Neem de waarde van de constant rij en deel die door $k!$ waarbij k het aantal keer is dat je een verschilrij hebt genomen om tot een constante term te komen.
In ons voorbeeld hebben we tweemaal een verschilrij genomen (en k is dus 2), de constante waarde was ook 2 en we krijgen dus als hoogstegraadscoëfficiënt van onze veelterm $2/2! = 1$.

Op deze manier kunnen we eigenlijk elke start van een rijtje aanvullen met een volgende term gebaseerd op een veeltermfunctie.

VOORBEELD 3.21 Kijk nog eens naar de volgende oefening: vul de volgende rij aan:

$$1 \quad 11 \quad 21 \quad 1211 \quad 111221 \quad 312211 \quad \dots$$

We bepalen achtereenvolgens de verschilrijen:

$$\begin{array}{c} 10 \quad 10 \quad 1190 \quad 110010 \quad 200990 \quad \dots \\ 0 \quad 1180 \quad 108820 \quad 90980 \quad \dots \\ 1180 \quad 107640 \quad -17840 \quad \dots \\ 106460 \quad -125480 \quad \dots \\ -231940 \quad \dots \end{array}$$

en na 5 verschilrijen vinden we een "constante rij". We kunnen de bovenstaande rij dus beschrijven door middel van een vijfdegraadsveelterm

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f.$$

Het oplossen van het stelsel

$$\begin{cases} P(0) = 1 \\ P(1) = 11 \\ P(2) = 21 \\ P(3) = 1211 \\ P(4) = 111221 \\ P(5) = 312211 \end{cases}$$

geeft ons

$$a = -\frac{11597}{6}, b = \frac{142585}{6}, c = -\frac{188135}{2}, d = \frac{869075}{6}, e = -\frac{217799}{3}, f = 1$$

en de veelterm wordt

$$P(x) = -\frac{11597}{6}x^5 + \frac{142585}{6}x^4 - \frac{188135}{2}x^3 + \frac{869075}{6}x^2 - \frac{217799}{3}x + 1.$$

De volgende term uit het rijtje zou dus kunnen zijn

$$P(6) = 228921.$$

Een recursieve formule naar een gesloten formule.

De formule uit voorbeeld 3.12 komt schijnbaar uit de lucht gevallen. Toch is het niet zo moeilijk om deze formule "te gokken".
Hiervoor kan de volgende techniek gebruikt worden. Deze techniek is specifiek voor formules die gegeven worden door een recursief voorschrift. Laten we terugkeren naar voorbeeld 3.12 en dit voorbeeld gebruiken om deze techniek te illustreren.

VOORBEELD 3.22 De *Fibonaccigetallen*

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n > 2.$$

Het eerste dat we gaan doen is de recursiebetrekking omzetten naar een vergelijking. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ wordt dan $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$. Deze betrekking herleid zich tot

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Deze tweedegraadsvergelijking heeft twee oplossingen:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Het algemeen voorschrift van de fibonaccigetallen wordt dan gegeven door

$$F_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Het bepalen van de onbepaalde coëfficiënten α en de β kan je dan doen door de eerste twee waarden in te vullen en zo een stelsel van twee vergelijkingen en twee onbekenden (α en β). In dit geval wordt dat

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \\ \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1 \end{cases}$$

en dit herschrijft zich tot

$$\begin{cases} \alpha\left(1+\sqrt{5}\right)+\beta\left(1-\sqrt{5}\right)=2 \\ \alpha\left(3+\sqrt{5}\right)+\beta\left(3-\sqrt{5}\right)=2 \end{cases}$$

Vermenigvuldig nu de eerste vergelijking met $(3+\sqrt{5})$ en de tweede met $(1+\sqrt{5})$. Trek dan beide vergelijkingen van elkaar af en je vind $\beta=\frac{-1}{\sqrt{5}}$. Invullen geeft dan $\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Zodoende hebben we het algemeen voorschrift

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

VOORBEELD 3.23 De *lucasgetallen* zijn als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 \\ L_2 &= 3 \\ L_n &= L_{n-1}+L_{n-2}, \forall n>2. \end{aligned}$$

Indien voor deze getallenrij een gesloten formule wordt gevraagd kunnen we dezelfde formules gebruiken als hiervoor, enkel het stelsel zal verschillen aangezien we hier een andere waarde voor L_2 hebben. We krijgen:

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1 \\ \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1 \end{cases}$$

en dit herschrijft zich tot

$$\begin{cases} \alpha\left(1+\sqrt{5}\right)+\beta\left(1-\sqrt{5}\right)=2 \\ \alpha\left(3+\sqrt{5}\right)+\beta\left(3-\sqrt{5}\right)=6 \end{cases}$$

Vermenigvuldig nu opnieuw de eerste vergelijking met $(3+\sqrt{5})$ en de tweede met $(1+\sqrt{5})$. Trek dan beide vergelijkingen van elkaar af en je vind $\beta=1$. Invullen geeft dan $\alpha=1$ en we krijgen dus als algemeen voorschrift:

$$L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

OPMERKING 3.24 Het is ook mogelijk dat er recursief voorschrift is waar er meer dan twee termen wordt terug gegaan. Laten we veronderstellen dat er k termen worden terug gegaan en het recursievoorschrift is dus van de vorm

$$P_n = a_1 P_{n-1} + a_2 P_{n-2} + \cdots + a_k P_{n-k},$$

met $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. In dat geval zal het recursieve voorschrift ook aanleiding geven tot wat we de characteristieke vergelijking noemen:

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a2x^{k-2} - \cdots - a_k = 0,$$

en waarvan de oplossingen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ zullen leiden tot een algemeen voorschrift van de vorm

$$P_n = \alpha_1 (x_1)^n + \cdots + \alpha_k (x_k)^n.$$

Hierboven werd de algemene methode uitgelegd, maar een aantal speciale gevallen werden hier niet vermeld. Zo zal je de oplossingsmethode moeten aanpassen indien de oplossingen van de characteristieke vergelijking niet reëel zijn of wanneer er verschillende oplossingen van deze vergelijking samenvallen. Deze specifieke gevallen worden hier weggelaten.

3.9 Heuristieken om aan bewijzen te beginnen

De blikwissel

Door je wiskundige ervaring kan je een heleboel problemen in een oogwenk oplossen. Spijtig genoeg is diezelfde wiskundige ervaring soms ook je vijand. Je beperkt je automatisch tot die oplossingsmethoden die in het verleden altijd hebben gewerkt. Daardoor zie je soms een eenvoudige oplossing over het hoofd. Een belangrijke heuristiek is bijgevolg: het probleem op een andere manier bekijken. We noemen dit *blikwissel*.

VOORBEELD 3.25 **Afvalcompetitie.** 83 ploegen spelen een afvalcompetitie: in elke ronde spelen zoveel mogelijk ploegen, telkens twee tegen elkaar. Als het aantal ploegen in een ronde oneven is, loot een van hen uit om zonder meer in de volgende ronde te spelen. Wie wint komt in de volgende ronde; verliezers vallen af. Hoeveel wedstrijden worden er in totaal gespeeld?

Oplossing Je kan proberen uit te rekenen hoeveel wedstrijden er in de eerste ronde worden gespeeld, hoeveel in de tweede, enzovoort. Maar bekijk het eens anders. Bij elke wedstrijd valt er één ploeg af. Aangezien er 82 ploegen moeten afvallen, worden er 82 wedstrijden gespeeld.

VOORBEELD 3.26 **De vlieg en de treinen.** Twee treinen rijden naar elkaar toe met een snelheid van 100 km/h. Op het moment dat ze 50 km van elkaar af zijn, start een vlieg van de voorkant van een van treinen en vliegt met een snelheid van 120 km/h naar de andere trein. Zodra hij die bereikt, keert hij weer en vliegt weer heen. Enzovoort.
Neem aan dat de treinen op hetzelfde spoor rijden en dus zullen botsen. Hoeveel km heeft die vlieg dan gevlogen voor ze tussen de treinen verpletterd zal worden?

Oplossing Je kan proberen uit te rekenen welke afstand de vlieg moet afleggen in de ene richting, dan in de andere richting, opnieuw in de eerste richting, enzovoort. Maar bekijk het eens anders. De treinen die 50 km van elkaar verwijderd zijn en elk 100 km/h rijden, zullen na 15 minuten botsen, want dan heeft elke trein 25 km gereden. De vlieg, die met een snelheid van 120 km/h vliegt, heeft op die tijd 30 km afgelegd.

De problemen in voorbeelden 3.25 en 3.26 kunnen eenvoudig worden opgelost, op voorwaarde dat je het vanuit een ander standpunt bekijkt.

Opgave	*Voor de hand liggende aanpak*	*Blikwissel*
Afvalcompetitie	Kijk naar de winnende ploegen. Hoeveel wedstrijden worden er in elke ronde gespeeld?	Kijken naar de verliezende ploegen: elke verliezende ploeg 1 wedstrijd.
De vlieg en de trein	Kijk naar de vlieg. Bereken afstanden.	Kijk naar de treinen. Wanneer botsen ze?

Hoe kom je tot blikwissel? Hier zijn enkele tips:

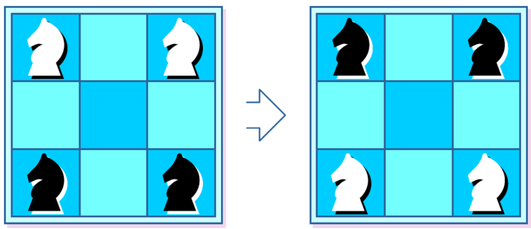
- het probleem eens van een andere kant bekijken;
- leef je in in personen, dieren of zaken die in de vraag voorkomen en bekijk het probleem eens vanuit hun perspectief;
- naar andere dingen kijken, die niet (rechtstreeks) gevraagd zijn;
- van achteren naar voren werken;
- ervan uitgaan dat je de oplossing al kent;
- je afvragen wat de voorlaatste stap van de oplossing zou kunnen zijn;

DE SCHEMATISCHE VOORSTELLING

One picture says more than a thousand words.

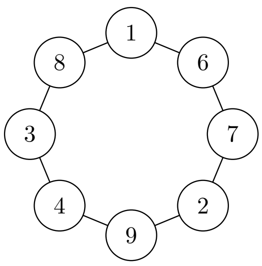
Bij problem-solving draait het vaak om verwerking van informatie. Een visuele voorstelling kan helpen bij het ontdekken van onderlinge verbanden tussen verschillende gegevens en leiden tot een klare kijk op de oplossing. Bij meetkundeoefeningen vinden we dit evident. Ook bij andere problemen kan een visualisatie tot de oplossing leiden. Dit deel wil je aanzetten om gemakkelijker een schets te maken, maar wil ook illustreren welke mogelijkheden tekeningen bieden bij het oplossen van problemen. Een schematische voorstelling kan nuttig zijn bij het oplossen van bijna elk wiskundig probleem.

VOORBEELD 3.27 **De paardensprong.** Op een schaakbord van drie bij drie plaatsen we twee witte paarden en twee zwarte paarden zoals in de eerste opstelling. Doel van het spel is de witte en de zwarte paarden te verwisselen, zodat je uiteindelijk de tweede opstelling verkrijgt.

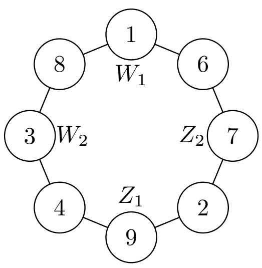


1	2	3
4	5	6
7	8	9

Hoeveel zetten heb je daarvoor nodig? Houd wel rekening met de beperkte bewegingsmogelijkheden van paarden in een schaakspel. (En er mogen natuurlijk nooit twee paarden op hetzelfde vak staan!)
Hoe begin je eraan? Je kunt gewoon starten met paarden te verplaatsen en hopen dat je geluk hebt. Maar als je even nadenkt, kun je het probleem veel gestructureerder oplossen. We nummeren eerst de vakken van het schaakbord.



Nu kunnen we verifiëren wat de mogelijkheden zijn om vanaf een bepaalde plaats naar een andere plaats te springen. We zien bijvoorbeeld dat we van vak 1 zowel naar vak 6 als naar vak 8 kunnen springen. Van 6 kunnen we ofwel naar 7, ofwel weer naar 1. Als we de toegelaten paardensprongen met verbindingslijntjes aanduiden, verkrijgen we nevenstaand diagram. Je ziet dus dat een paard kan springen van 1 naar 6, en dan naar 7, enzovoort. We duiden op de tekening de beginpositie van de paarden aan. (We hebben de witte paarden W_1 en W_2 genoemd en de zwarte paarden Z_1 en Z_2.) Zonder moeite kunnen we nu de oplossing van het probleem uit de nevenstaande diagram aflezen.



stap 1 W_1 gaat naar vak 8, W_2 naar vak 4, Z_1 naar vak 2 en Z_2 naar vak 6;

stap 2 W_1 gaat naar vak 3, W_2 naar vak 9, Z_1, naar vak 7 en Z_2 naar vak 1;

stap 3 W_1 gaat naar vak 4, W_2 naar vak 2, Z_1 naar vak 6 en Z_2 naar vak 8;

stap 4 W_1 gaat naar vak 9, W_2 naar vak 7, Z_1 naar vak 1 en Z_2 naar vak 3.

Na die 16 zetten zijn de twee witte paarden op de plaats van de zwarte paarden geraakt en de zwarte op die van de witte.

HET DUIVENHOKPRINCIPE

Lejeune Dirichlet (1805–1859)

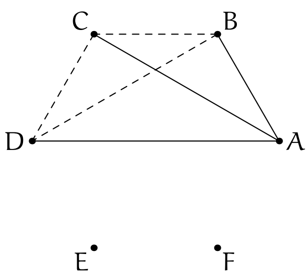
Als je 9 balletjes moet verdelen over 8 bakjes, dan zal er een bakje zijn met minstens twee balletjes. Immers, de eerste 8 balletjes kan je nog in 8 verschillende bakjes plaatsen, maar voor het negende balletje is er geen leeg bakje meer over.
Algemeen: verdeel je meer dan n objecten over n laden dan bevat minstens één lade minstens 2 van die objecten.
Dit principe, waarvan de juistheid vanzelfsprekend is, is een sterk werktuig met zeer veel toepassingen in verschillende takken van de wiskunde. Het principe is gekend als het *ladenprincipe* of *duivenhokprincipe van Dirichlet*.
Dit kan worden veralgemeend. Als je 50 balletjes verdeelt over 7 bakjes, dan zal er een bakje zijn met minstens 8 balletjes. Immers, 49 balletjes zouden over 7 bakjes kunnen worden verdeeld zodat er in elk bakje precies 7 balletjes zitten. Het 50ste balletje echter, zorgt ervoor dat er één bakje 8 balletjes bevat.
Algemeen:

EIGENSCHAP 3.28 ***Als n objecten in k laden geplaatst worden met $n = kq + r$ met $q, r \in \mathbb{N}$ en $0 < r < k$, dan bevat minstens één lade meer dan q objecten.***

VOORBEELD 3.29 Als 5 duiven 4 hokken innemen, dan is er ten minste één hok dat ten minste 2 duiven bevat. Immers: $5 = 4 \cdot 1 + 1$.
In elke groep van 733 mensen hebben ten minste drie mensen dezelfde verjaardag. Immers: $733 = 366 \cdot 2 + 1$ (een schrikkeljaar telt 366 dagen en de andere jaren 365).
Als we drie verschillende paren handschoenen in één doos steken, dan moeten we er maar 4 uithalen om zeker een passend paar te hebben. Immers: $4 = 3 \cdot 1 + 1$.

Ook met oneindig veel objecten is een duivenhokprincipe van kracht: verdeel je oneindig veel objecten over eindig veel laden, dan bevat minstens één lade oneindig veel objecten.

VOORBEELD 3.30 **Kennissen** Bewijs dat onder zes mensen in een kamer er ten minste drie zijn die elkaar kennen of ten minste drie zijn die elkaar niet kennen.



Oplossing Stel de zes personen voor door zes punten A, B, C , D , E en F. Verbind elk paar van verschillende punten door een lijnstuk, een rood lijnstuk als de personen voorgesteld door de punten elkaar kennen, een blauw lijnstuk als ze elkaar niet kennen. Neem nu de lijnstukken vanuit één van de punten, bijvoorbeeld A. Omdat er vijf zulke lijnstukken zijn, moeten er ten minste drie zijn die dezelfde kleur hebben. Immers: $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Neem bijvoorbeeld AB, AC en AD zijn rode lijnstukken. Is nu één van de lijnstukken BC, CD en BD ook rood, zeg bijvoorbeeld CD, dan kennen de drie personen A, C en D elkaar. In het andere geval zijn de drie lijnstukken BC, CD en BD blauw en dan kennen de drie personen B, C en D elkaar niet.

Problemen vereenvoudigen

If there is a problem you can't solve, then there is an easier problem you can solve: find it.
G. Pólya

Als een probleem te moeilijk is om op te lossen, kan de oplossing van een ander, gemakkelijker probleem, vaak inspiratie opleveren om de oorspronkelijke opgave tot een goed einde te brengen. Deze nieuwe oefening moet dan natuurlijk wel iets te maken hebben met de oorspronkelijke opgave. Enkele methoden om zo'n gemakkelijker, verwant probleem op te stellen, zijn de volgende:

- bekijk speciale gevallen;
- laat één van de voorwaarden weg en los dan het probleem op;
- voeg een gegeven toe en los dan het probleem op;
- onderzoek concrete gevallen van het probleem (verander bijvoorbeeld letters door getallen).

VOORBEELD 3.31

Als $a^2+b^2+c^2+d^2 = ab+bc+cd+da$, dan is $a=b=c=d$. Bewijs dit.

Oplossing Aangezien we niet direct weten hoe we hieraan moeten beginnen, kunnen we misschien een kijken naar een eenvoudiger probleem. Misschien is hetzelfde probleem ook wel waar voor minder letters. Indien we dezelfde formule proberen te formuleren voor 2 letters, dan wordt dit

als $a^2+b^2 = ab+ba$, dan is $a=b$.

Dit is makkelijker op te lossen:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 = ab+ba &\iff a^2-2ab+b^2=0 \\ &\iff (a-b)^2=0 \\ &\iff a-b=0 \\ &\iff a=b \end{aligned}$$

Voor het oplossen van het algemeen probleem kunnen we ons laten inspireren door de eenvoudigere variant.
Als $a^2+b^2+c^2+d^2 = ab+bc+cd+da$, dan is

$$\begin{aligned} &(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2 \\ &\quad= (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2cd+d^2)+\ldots \\ &\quad= 2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab-2bc-2cd-2da \\ &\quad= 2\big[(a^2+b^2+c^2+d^2)-(ab+bc+cd+da)\big] \\ &\quad= 0 \end{aligned}$$

en dus is $a=b=c=d$.

3.10 Oefeningen

3.1. Bewijs door contradictie:

(a) Er bestaan oneindig veel priemgetallen.

(b) Er bestaat geen kleinste strikt positief getal.

(c) $\sqrt[3]{2}$ is irrationaal.

(d) $\sqrt{3}$ is irrationaal.

(e) Als x en y rationaal zijn, met $y \neq 0$ dan is $x + y\sqrt{2}$ irrationaal.

(f) Als x rationaal is en y irrationaal, dan is $x + y$ irrationaal.

(g) Er bestaan geen strikt positieve gehele getallen x en y zodat $x^2 - y^2 = 1$.

(h) Er bestaan geen gehele getallen x en y zodat $x^2 - y^2 = 10$.

3.2. Bewijs door contrapositie.

(a) Als het product van twee reële getallen irrationaal is, dan is minstens een van beide irrationaal.

(b) Stel x en y zijn gehele getallen. Als $x + y$ even is, dan zijn x en y ofwel beide even ofwel beide oneven.

(c) Als n^2 even is, dan is n even.

(d) Als n een natuurlijk getal is dat rest 2 geeft bij deling door 3, dan is n geen perfect kwadraat.

3.3. Bewijs door splitsen in gevallen.

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 - n$ is deelbaar door 2.

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : n^7 - n$ is deelbaar door 7.

(c) De derdemacht van een geheel getal is steeds een veelvoud van 9 of is 1 groter of kleiner dan een veelvoud van 9.

(d) $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$.

3.4. Bewijs via inductie dat 6^n eindigt op een 6 voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

3.5. Gok een gesloten formule voor $s_2(n) = 1+4+9+16+\cdots+n^2$ door gebruik te maken van de methode van de onbepaalde coëfficiënten. Bewijs je formule via inductie.

3.6. Gok een gesloten formule voor $s_3(n) = 1+8+27+64+\cdots+n^3$ door gebruik te maken van de methode van de onbepaalde coëfficiënten. Bewijs je formule via inductie.

3.7. Bewijs via inductie de standaardformule voor de som van de eerste $n+1$ termen van een meetkundige reeks met factor $r \neq 1$ (oef. 7 p. 148)

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}$$

3.8. Toon de volgende formule aan met inductie (oef. 10 p. 148)

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{j}{j+1} = \frac{1}{n+1}$$

3.9. (a) Gok een formule voor

$$A_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(n+1)n}$$

Door de eerste A_i's uit te rekenen. Bewijs deze formule via inductie.

(b) Had je dit ook kunnen oplossen via een telescopische som?

(oef. 9 p. 148)

3.10. Geef een formule voor

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

en bewijs deze via inductie (oef. 16 p. 148).

3.11. Voor $n > 1$, welk teken ($<$, $\leq$, $=$, $\geq$ of $>$) moet er staan op de (tweede) puntjes?

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \overset{?}{\ldots} \quad \sqrt{n}$$

Bewijs dit via inductie (oef. 20 p. 149).

3.12. $n^3 - n$ is deelbaar door 3 (oef. 23 p. 149)

(a) Toon dit aan voor positieve getallen door inductie.

(b) Toon dit ook aan voor de negatieve getallen, maar dan door achterwaartse inductie.

(c) Toon aan dat het negatieve geval ook rechtsstreeks uit het positieve geval volgt door een beetje algebra.

(d) Bewijs ook de stelling ook rechtsstreeks, zonder inductie.

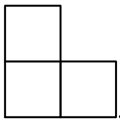
3.13. Toon aan dat indien n even is, dat dan $13^n + 6$ een zevenvoud is (oef. 26 p. 149).

3.14. Toon aan dat

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

waarbij er in het linkerlid n 2's staan.

3.15. Knip een hoekvierkantje uit een $2^n \times 2^n$-bord ($n \geq 1$). Toon aan dat je de overschot van het schaakbord kan overdekken met stukjes van de vorm

.

3.16. Veronderstel dat een functie T voor alle positieve getallen gedefinieerd wordt via de volgende (recursieve) formule

$$\begin{aligned} &T(0) = 0, \\ &T(n) = T(\lfloor n/3 \rfloor) + T(\lfloor n/5 \rfloor) + T(\lfloor n/7 \rfloor) + n, \quad n > 0. \end{aligned}$$

Toon aan dat $T(n) < 4n$ voor $n > 0$ (oef. 22 p. 157).

3.17. Veronderstel de gerichte graph met puntenverzameling $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ zodat er een edge is van elke vertex i naar elke vertex j als en slechts als $i < j$. Hoeveel gerichte paden zijn er van 1 naar n. Ontdek een patroon en bewijs het (oef. 25 p. 157).

3.18. Toon aan dat F_{3n} even is voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

3.19. Welke fibonaccigetallen zijn deelbaar door 3? Bewijs je bewering.

3.20. We bewijzen de volgende uitspraak: "als van een groep van n studenten er één geslaagd is, dan zijn alle studenten uit die groep geslaagd" per inductie. Voor $n = 1$ is de uitspraak evident. Stel dus dat we de uitspraak kennen voor een groep van n studenten. We bekijken dan een willekeurige groep van $n+1$ studenten, waarvan we weten dat er eentje is geslaagd. Uit de groep verwijderen we één student (niet degene waarvan we weten dat die geslaagd is), dan hebben we een groep over van n studenten waarvan er één geslaagd is. Uit de inductiehypothese, weten we dan dat alle studenten uit die groep geslaagd zijn. Daarna verwijderen we een andere student en plaatsen de student die we eerst apart hebben gezet terug in de groep. Deze groep telt dan weer n studenten waarvan er zeker één geslaagd is (er zijn er al $n-1$ geslaagd!) en dus uit de inductiehypothese volgt dan dat ook deze laatste student geslaagd is. We hebben dus ons bewijs afgerond... doch de "realiteit" leert ons dat de uitspraak niet altijd opgaat. Waar zit de fout in het bewijs?

3.21. Klopt het volgende bewijs van de stelling

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n},$$

waarbij n een strikt positief geheel getal is?

We bewijzen via inductie:

BASISSTAP: Het resultaat is waar voor $n=1$ want

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{1}.$$

INDUCTIESTAP: Veronderstel dat de stelling waar is voor n. Dan geldt

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)} &= \frac{3}{2}-\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Dus is het resultaat waar voor $n+1$ en dit vervolledigt het inductiebewijs.

3.22. *Examen eerste zit 2007-2008.*

Bewijs via inductie dat 13 een deler is van $8^{2^n}-5^{2^n}$ voor elke $n\in\mathbb{N}_0$.

3.23. *Examen tweede zit 2007-2008.*

Bewijs via inductie dat

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

3.24. *Tussentijdse test 2008-2009.*

De rij $A_0, A_1, A_2, \ldots$ wordt gegeven door de volgende recursieve definitie:

$$A_0=1, \qquad A_n=A_{n-1}+2n^2-4n+3$$

(a) Schrijf de termen $A_0, A_1, \ldots, A_5$ van deze rij uit en bepaal een veeltermvoorschrift voor deze rij via de methode van de onbepaalde coëfficiënten.

(b) Bewijs via inductie dat dit voorschrift inderdaad het voorschrift is van deze rij.

3.25. *Examen eerste zit 2008-2009.*

Bewijs voor elke $n\in\mathbb{N}_0$ dat

$$\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{2(n+1)}.$$

3.26. *Examen eerste zit 2008-2009.*

Veronderstel dat $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Toon aan dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$M^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 2n+3 & -n \\ 4n & 3-2n \end{pmatrix}$$

Zou je, nu je dit weet, een matrix P kunnen bepalen zodat $P^2 = M$?

3.27. *Examen tweede zit 2008-2009.*

Bewijs voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat 7 een deler is van

$$2^{n+2} + 3^{2n+1}.$$

3.28. *Tussentijdse test 2009-2010.*

Toon aan dat voor $n \geq 2$ geldt dat

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

3.29. *Tussentijdse test 2009-2010.*

Bewijs via inductie dat het aantal diagonalen van een convexe n-hoek gegeven wordt door $\frac{1}{2}n(n-3)$.

3.30. *Examen eerste zit 2009-2010.*

Bewijs *via inductie* dat $n^2 - 1$ deelbaar is door 8 voor elk oneven getal n.

3.31. *Examen tweede zit 2009-2010.*

$n > 2$ verfpotten van identieke vorm en volume zijn gevuld met verschillende verven. Ze zijn elk voor $(n-1)/n$ van hun volume gevuld. Het is toegestaan de verf van de ene pot in de andere over te gieten. Toon aan dat men de verf zó kan overgieten dat er in elke pot hetzelfde mengsel zit.

3.32. *Tussentijdse test 2010-2011.*

Toon aan dat voor $n \geq 1$ steeds geldt dat 9 een deler is van

$$4^n + 15n - 1.$$

3.33. *Examen eerste zit 2010-2011.*

De uitdrukking

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)$$

kan je schrijven in een gesloten formule. Bepaal deze formule via de methode van onbepaalde coëfficiënten. Bewijs de formule ook via inductie.

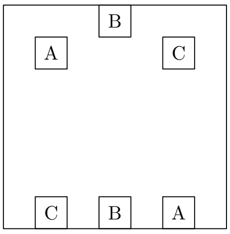
3.34. *Examen tweede zit 2010-2011.*

Een veelhoek noemen we *convex* als alle binnenhoeken kleiner zijn dan 180°. Toon aan via inductie dat het aantal diagonalen van een convexe n-hoek (met $n \geq 4$) gelijk is aan

$$\frac{1}{2}n(n-3)$$

Oefeningen op heuristieken

3.35. Van een schaakbord worden twee vakjes weggeknipt die aan tegenoverstaande hoekpunten liggen. Is het mogelijk het schaakbord te overdekken met dominostenen waarvan de vakjes even groot zijn als de vakjes van het schaakbord?



3.36. Verbind elk rechthoekje met het gelijknamige rechthoekje, zonder dat de lijnen elkaar snijden en door volledig binnen het grote vierkant te blijven.

3.37. Een groentenboer heeft 200 kg komkommers die voor 99 % uit water bestaan. Na een dag uitdrogen in de zon, bestaan de komkommers nog maar uit 98 % water. Hoeveel kg komkommers heeft de groentenboer dan nog?

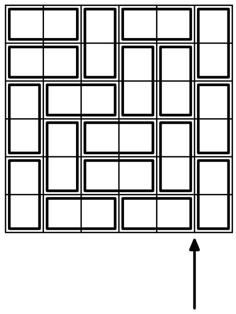
3.38. In een vierkant met zijde 5 liggen 51 punten. Bewijs dat er steeds een drietal punten bestaat zodat de oppervlakte van de driehoek gevormd door die drie punten niet groter dan $1/2$ is.

3.39. Worden er 5 punten in een gelijkzijdige driehoek met zijde 2 geplaatst, dan zijn er steeds 2 punten te vinden, waartussen de afstand kleiner of gelijk aan 1 is. Toon aan.

3.40. 2 van elke zes punten in een rechthoek van 3 bij 4 hebben onderlinge afstand kleiner of gelijk aan $\sqrt{5}$. Bewijs. [*hint:* verdeel de rechthoek in 5 delen.]

3.41. n mensen bevinden zich in een kamer. Toon aan dat er minstens 2 mensen zijn die evenveel kennissen hebben.

3.42. Gegeven een schaakbord van 6 op 6. Het schaakbord wordt gevuld met 18 dominostenen (elk steentje bezet 2 naburige vakjes). Toon aan dat er steeds een lijn kan gevonden worden van de ene kant van het bord naar de andere kant van het bord, die door geen enkele dominosteen wordt gesneden.



3.43. Op het $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-rooster kiezen we 5 punten. Toon aan dat er tussen die 5 punten steeds 2 punten zijn zodat het lijnstuk tussen die 2 punten door een roosterpunt gaat.

3.44. Gegeven 13 verschillende reële getallen. Bewijs dat onder deze getallen, 2 getallen a en b zijn die voldoen aan

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 2 - \sqrt{3}.$$

[*Hint.* Noem $x_1, \ldots, x_{13}$ deze getallen en stel $y_i = \mathrm{Bgtg}(x_i)$. Dan geldt voor elke i dat

$$\frac{\pi}{2} < y_i < \frac{\pi}{2}$$

gebruik nu hier het duivenhokprincipe.]

3.45. *Vlaamse wiskunde olympiade '89.*

Toon aan dat elke deelverzameling met 55 elementen van de verzameling $\{1,2,3,4,\ldots,99,100\}$ twee getallen bevat met verschil 9.

[*hint:* beschouw de restklassen modulo 9]

3.46. Zij n een natuurlijk getal verschillend van nul. Toon aan dat er steeds een getal is dat enkel uit énen en nullen bestaat en bovendien deelbaar is door n.

3.47. Gegeven de verzameling $S = \{1,2,3,\ldots,2n\}$.

(a) Geef een voorbeeld van een deelverzameling S' van S, die n elementen bevat zodat geen enkel element van S' een deler is van een ander element van S'.

(b) Indien een deelverzameling S' van S, $n+1$ elementen heeft, dan moeten er daar 2 elementen van zijn die elkaar delen.

HOOFDSTUK 4

TELLEN

4.1 BASISTECHNIEKEN

EIGENSCHAP 4.1 ***(Somregel) Indien er $n(A)$ manieren zijn om A uit te voeren, verschillend daarvan $n(B)$ manieren om B uit te voeren, dan is het aantal manieren om A OF b uit te voeren gelijk aan $n(A)+n(B)$.***

Deze regel kan ook veralgemeend worden:

> Er zijn $n(A)+n(B)+n(C)$ manieren om A of B of C te doen, etc.

EIGENSCHAP 4.2 ***(Productregel) Indien er $n(A)$ manieren zijn om A uit te voeren en $n(B)$ manieren om B uit te voeren, dan is het aantal manieren om A EN b uit te voeren gelijk aan $n(A)n(B)$. Hierbij is het belangrijk dat het aantal manieren om A en B uit te voeren onafhankelijk is van elkaar; het aantal manieren om B uit te voeren is hetzelfde, ongeacht de keuze die gemaakt werd in A.***

Deze regel kan ook veralgemeend worden:

> Er zijn $n(A)n(B)n(C)$ manieren om A en B en C te doen, etc.

EIGENSCHAP 4.3 ***(Delingsregel) Indien er een $k-1$-correspondentie bestaat tussen objecten van type A en objecten van type B, en er zijn $n(A)$ objecten van type A, dan zijn er $n(B)=n(A)/k$ objecten van het type B.***

Hierbij bedoelen we met een $k-1$-correspondentie een surjectieve functie tussen A en B waarbij elk element van B het beeld is van precies k

elementen uit A.

4.2 Inclusie-Exclusieprincipe

We beginnen met een eenvoudig voorbeeld.

VOORBEELD 4.4 In onze klas hebben er 20 studenten een rijbewijs en 16 studenten een busabonnement. 7 studenten hebben zowel een rijbewijs als een busabonnement als een rijbewijs. Hoeveel studenten hebben een busabonnement of een rijbewijs.
Dit tellen is helemaal niet moeilijk. We tellen gewoon de 20 bij de 16 op, maar omdat we dan 7 studenten dubbel hebben geteld moeten we van dit aantal er nog 7 van aftrekken. We krijgen dus $20+16-7=29$.

EIGENSCHAP 4.5 ***(Inclusie-exclusieprincipe voor 2 verzamelingen)***
Voor verzamelingen A en B geldt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

We hoeven ons niet te beperken tot 2 verzamelingen. Met 3 verzamelingen kunnen we dezelfde redening maken over het "dubbel tellen". Dit leidt tot de algemenere eigenschap:

EIGENSCHAP 4.6 ***(Inclusie-exclusieprincipe voor 3 verzamelingen)***
Voor verzamelingen A, B en C geldt:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Voor een willekeurig aantal verzamelingen krijgen we een gelijkaardige uitdrukking.

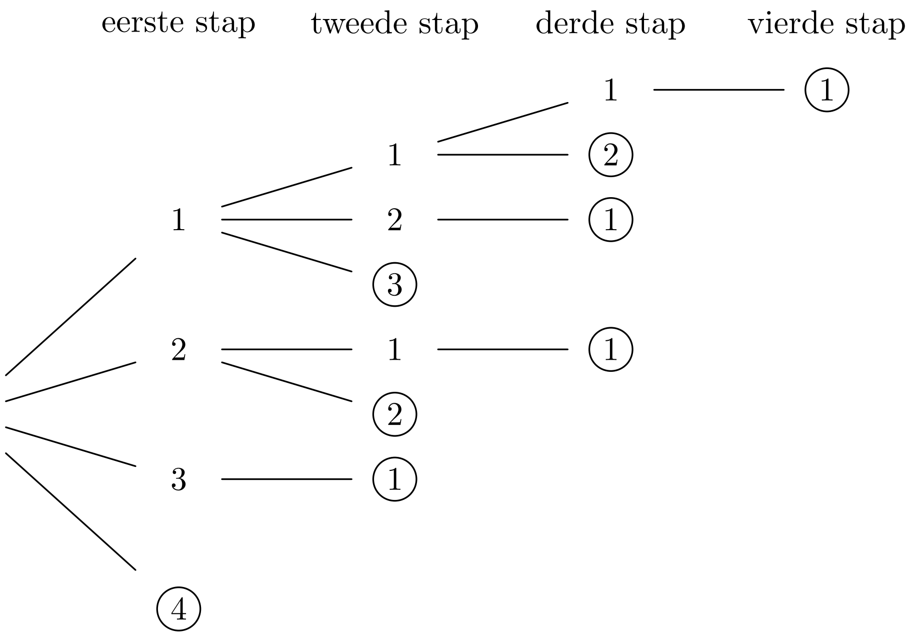
EIGENSCHAP 4.7 ***(Inclusie-exclusieprincipe)***
Voor verzamelingen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ geldt:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

4.3 Beslissingsbomen

VOORBEELD 4.8 Een trap telt 4 treden. Op hoeveel verschillende manieren kan je de trap oplopen als je bij elke stap 1, 2, 3 of 4 treden tegelijk kan opstappen.

We zullen om dit probleempje op te lossen een boom tekenen die schematische de mogelijkheden weergeeft. Voor de eerste stap zijn er 4 mogelijkheden: 1 trede, 2 treden, 3 treden of 4 treden. Enkel wanneer je 4 treden neemt ben je klaar. We omcirkelen daarom de 4. Dan kijken we in elk van de gevallen waar we nog niet boven zijn, wat de mogelijkheden zijn voor de volgende stap, enz. Telkens we boven zijn, tekenen we een cirkel. Het aantal cirkels geeft dan het aantal mogelijke verlopen. In dit geval zijn dit er 8.



4.4 Permutaties en Combinaties

DEFINITIE 4.9 **We noemen een *variatie* van k objecten uit n, een manier om k objecten te kiezen uit n objecten, waarbij de volgorde van belang is en herhaling niet mag. Indien $n = k$, noemen we dit een *permutatie*.**

Omwille van de beperking dat herhaling niet mag is het enkel zinvol dit te definiëren als $k \leq n$.

Het aantal variaties wordt (als direct gevolg van de productregel) gegeven door

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

In het bijzonder is het aantal permutaties $P_n = n!$.

DEFINITIE 4.10 **We noemen een *herhalingsvariatie* van k objecten uit n, een manier om k objecten te kiezen uit n objecten, waarbij de volgorde van belang is en herhaling wel toegestaan is.**

Hierbij is het ook mogelijk dat $k > n$.

Het aantal variaties wordt gegeven door (gebruik opnieuw de productregel).

$$\overline{V}_n^k = \underbrace{n \cdot \cdots \cdot n}_{k} = n^k.$$

Indien we er nu ervan uitgaan dat de volgorde niet van belang is, dan krijgen we gelijkaardigeformules.
Laten we eerst eens kijken op hoeveel manieren we deelverzamelingen met k elementen kunnen maken van verzamelingen met n elementen.

DEFINITIE 4.11 **We noemen een *combinatie* van k objecten uit n, een manier om k objecten te kiezen uit n objecten, waarbij de volgorde niet van belang is en herhaling niet toegestaan is.**

Dit komt dan ook precies overeen met het aantal deelverzamelingen van
Indien we het aantal combinaties willen tellen, gaan we gebruik maken van de delingsregel. Indien we er eerst vanuit gaan dat de volgorde wel van belang is, dan bekomen we het aantal variaties: $n!/(n-k)!$. Verder ontdekken we dat er een $k!$-1-correspondentie is tussen de variaties en de combinaties, aangezien er $k!$ manieren zijn om de volgordes te bepalen. De delingsregel zegt dan:

Het aantal combinaties wordt gegeven door

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{met } k \leq n.$$

Vooral de notatie $\binom{n}{k}$ zullen we meestal gebruiken (en wordt internationaal gezien meestal gebruikt). We noemen deze notatie de binomiaalgetallen of de binomiaalcoëfficiënten.

Indien we nu ook herhaling toelaten krijgen we de volgende definitie:

DEFINITIE 4.12 **We noemen een *herhalingscombinatie* van k objecten uit n, een manier om k objecten te kiezen uit n objecten, waarbij de volgorde niet van belang is en herhaling wel toegestaan is.**

Ook hier kan $k > n$. Om dit aantal te kennen kijken we alsvolgt naar het probleem:

We moeten k objecten kiezen uit n. Dit komt overeen met $n+k-1$ puntjes tekenen en dan op $n-1$ puntjes een verticaal streepje tekenen, zodat er uiteindelijk k puntjes overblijven. Deze k puntjes zijn nu in n groepjes (eventueel lege) verdeeld, gescheiden door een verticaal streep je. Zo zou, bij wijze van voorbeeld ($k = 9, n = 6$) 5 streepjes kunnen zetten op 15 puntjes, zodat je in onderstaande voorbeeld

- 1 object van de eerste soort,
- 2 objecten van de tweede soort,
- 4 objecten van een derde soort,
- 1 object van een vierde soort,
- geen objecten van een vijfde soort, en
- 1 object van een zesde soort

gekozen hebt.

$$\cdot \mid \cdot \;\cdot \mid \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \mid \cdot \mid \mid \cdot$$

Het aantal manieren om een herhalingscombinatie van k uit n te kiezen komt dus overeen met het aantal manieren om een combinatie van $n-1$ uit $n+k-1$ te kiezen.
We noteren hiervoor:

> Het aantal herhalingscombinaties van k uit n is
> $$D_n^k = \overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Hierbij volgt de laatste gelijkheid uit eigenschap 4.16.

DEFINITIE 4.13 **We noemen een *herhalingspermutatie* een manier om k_1 objecten van soort 1, k_2 objecten van soort 2, ..., k_r objecten van soort r te nemen en die in eenzekere volgorde te plaatsen. Hierbij is de volgorde van de objecten van dezelfde soort niet van belang.**

Zo is (met $n = k_1 + \ldots + k_r$), het aantal herhalingspermutaties gelijk aan

$$\overline{P}_n^{k_1,\ldots,k_r} = \binom{n}{k_1,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_r!}$$

We noemen dit, in navolging van de binomiaalcoëfficiënten, de multinomiaalcoëfficiënten. Deze formule kan je alsvolgt bekijken: Alle letters op een plaats zetten kan je op $n!$ manieren doen. Maar volgens de delingsregel moeten we delen door $k_1!$ omdat er een $k_1!$-1-correspondentie is tussen een volgorde die je met de n objecten kan maken en die $k_1!$ manieren waarbij de k_1 objecten van de eerste soort verwisseld zijn. Daarom delen we door $k_1!$. Analoog delen we door $k_2!,\ldots,k_r!$.

VOORBEELD 4.14 Het aantal anagrammen (zonder betekenis) van "PARALLELLEPIPEDUM" is

$$\overline{P}_{17}^{3,2,1,4,3,1,1,1,1} = \frac{17!}{3!2!1!4!3!1!1!1!1!} = \frac{17!}{3!2!4!3!}$$

4.5 Overzicht

k trekken uit n	Volgorde is niet van belang	Volgorde is van belang
Herhaling mag niet	**Combinatie:** $\boxed{C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$	$k \leq n$ **Variatie:** $\boxed{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$
		$k = n$ **Permutatie:** $\boxed{P_n = n!}$
Herhaling mag	**Herhalingscombinatie:** $\boxed{D_n^k = \overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}}$	**Herhalingsvariatie:** $\boxed{\overline{V}_n^k = n^k}$

Herhalingspermutatie:

$$\boxed{\overline{P}_n^{k_1,\ldots,k_r} = \binom{n}{k_1,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}}$$

4.6 Binomiaalgetallen in bijzondere vormen

De algemene formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

hebben we tot hiertoe steeds gebruikt voor algemene $n, k \in \mathbb{N}$ en $0 \leq k \leq n$. We hebben dat $k \in \mathbb{N}$ omdat $k!$ niet gedefinieerd is, en we hebben ook $k \leq n$ omdat anders $(n-k)!$ niet bestaat. Toch kunnen we hier veralgemenen. We herinneren ons immers dat de uitdrukking $\binom{n}{k}$ eigenlijk komt van

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

Dit rechterlid kunnen we uitrekenen voor elke $k \in \mathbb{N}$ en elke $n \in \mathbb{R}$.

NOTATIE 4.15 Voor $k \in \mathbb{N}$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ noteren we

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\prod_{r=0}^{k-1}(\alpha - r)}{k!}$$

4.7 Combinatorische Gelijkheden

In deze sectie zullen we een aantal combinatorische gelijkheden aantonen. De meeste gelijkheden kunnen zowel aangetoond worden door middel van een *algebraïsch bewijs*, als door middel van een *combinatorisch argument*.

EIGENSCHAP 4.16 ***Voor*** $k, n \in \mathbb{N}$ ***en*** $k \leq n$ ***geldt dat***

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Bewijs. (via een algebraïsch argument)

$$LL = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} = RL$$

■

Bewijs. (via een combinatorisch argument)
Het linkerlid (LL) komt overeen met het aantal manieren om uit een verzameling van n elementen een deelverzameling te kiezen van k elementen. We kunnen dit aantal echter ook bepalen indien we niet kijken naar welke elementen WEL in de deelverzameling zitten, maar naar welke elementen NIET in de deelverzameling zitten. Dit aantal wordt gegeven door het rechterlid (RL). ■

EIGENSCHAP 4.17 ***(Gelijkheid van Pascal)***
Voor $k, n \in \mathbb{N}$ ***en*** $1 \leq k \leq n$ ***geldt dat***

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Bewijs. (via een algebraïsch argument)

$$\begin{aligned}
RL = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-1-k)!(n-k)} \\
&= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(k+(n-k))(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = LL
\end{aligned}$$

■

Bewijs. (via een combinatorisch argument)
Het linkerlid stelt het aantal deelverzamelingen met k elementen voor (van een
We kunnen dit echter ook op een andere manier berekenen:
Laten we een vast element $a \in V$ bekijken.

- Het aantal deelverzameling van V die a bevatten: kies $k-1$ elementen uit de overgebleven $n-1$ elementen: $\binom{n-1}{k-1}$.
- Het aantal deelverzameling van V die a niet bevatten: kies k elementen uit de overgebleven $n-1$ elementen: $\binom{n-1}{k}$.

We vinden dus $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, precies het rechterlid van de gelijkheid van Pascal. ■

EIGENSCHAP 4.18 ***Voor*** $k, p, n \in \mathbb{N}$ ***en*** $0 \le k \le p \le n$ ***geldt dat***

$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$$

Bewijs. (via een algebraïsch argument)
We rekenen zowel het linkerlid als het rechterlid uit:

$$\begin{aligned}
LL &= \binom{n}{p}\binom{p}{k} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{n!}{(n-p)!k!(p-k)!} \\
RL &= \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(p-k)!((n-k)-(p-k))!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}
\end{aligned}$$

■

Bewijs. (via een combinatorisch argument)
Laten we het vergelijken met een voetbalteam: de eerste ploeg van een voetbalteam bestaat uit een kern (van n spelers). Uit deze kern wordt er een selectie van p spelers gemaakt (die dan op het wedstrijdblad worden ingevuld). Uit de selectie kan er dan een basis van k spelers

(11 in het geval van voetbal). Laten we nu het aantal manieren om een selectie en een basis te selecteren.
Eerste manier: Kies eerst p spelers uit n om de selectie te bepalen en dan k spelers uit p om uit de selectie de basis te bepalen: $\binom{n}{p}\binom{p}{k}$.
Tweede manier: Kies eerst k spelers uit n om eerst de basis te bepalen en dan $p-k$ spelers uit de $n-k$ niet-basis-spelers de basis aan te vullen met $p-k$ spelers: $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$. ■

EIGENSCHAP 4.19 *Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt dat*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Bewijs. (via een algebraïsch argument)
We werken met inductie naar n.
Indien $n = 0$, geeft het LL: $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \frac{0!}{0!0!} = 1 = 2^0 = RL$
Veronderstel nu dat

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}. \qquad (IH)$$

We berekenen nu de situatie voor voor n:

$j = k-1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n}{n} \\
&= \binom{n-1}{0} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] + \binom{n-1}{n-1} \\
&= \binom{n-1}{0} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} + \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{n-1} \\
&\overset{(IH)}{=} 2^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \overset{(IH)}{=} 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n.
\end{aligned}$$

■

Bewijs. (via een combinatorisch argument)
Het rechterlid komt overeen met het totaal aantal deelverzamelingen van een verzameling van n elementen. Voor elk van de n elementen kan je immers zeggen of het element in of niet in de deelverzameling zit (n keer 2 mogelijkheden), dus 2^n mogelijkheden.
Het linkerlid komt overeen met de som van het aantal deelverzamelingen met i elementen, voor elke i gaande vanaf 0 tot n. ■

Dit combinatorische bewijs kan in een variant ook gebruikt worden in het bewijs van de volgende stelling (het vorige bewijs kan immers ook in een context van deelcomités van een comité met n mensen).

EIGENSCHAP 4.20 *Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt dat*

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Bewijs. (via een combinatorisch argument)
We bewijzen deze stelling door het aantal deelcomités van een comité van n mensen te bepalen en binnen dat deelcomité ook een voorzitter aan te duiden:
Eerste methode: Elk deelcomité van k mensen heeft op k verschillende manieren een voorzitter. Er zijn dus $k \cdot \binom{n}{k}$ comités (met voorzitter) bestaande uit k mensen. In totaal krijgen we dan

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

Tweede methode: Leg nu eerst de voorzitter vast: Dit kan op n manieren. De $n-1$ andere mensen kunnen al dan niet in het deelcomié zitten. Gelijkaardig als in het bewijs van eigenschap 4.21 vinden we dan

$$n \cdot 2^{n-1}.$$

■

EIGENSCHAP 4.21 *Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt dat*

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}.$$

(Denk eens aan een ondervoorziter)

Bewijs. Werk dit eens als oefening uit! ■

EIGENSCHAP 4.22 *Voor $k, n \in \mathbb{N}$ en $n \geq 1$ geldt dat*

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{-n(-n-1)\cdot \ldots \cdot(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}\end{aligned}$$

■

In het bijzonder vinden we

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k \binom{k}{k} = (-1)^k$$
$$\binom{-2}{k} = (-1)^k \binom{k+1}{k} = (-1)^k (k+1)$$

EIGENSCHAP 4.23 ***Voor $k, n, m \in \mathbb{N}$ en $k \leq n + m$ geldt dat***

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

4.8 Het binomium van Newton

We kennen de merkwaardige producten voor de uitwerking van de (lage) macht van een tweeterm:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Dit kunnen we veralgemenen. We noemen de algemene eigenschap het *Binomium van Newton*.

STELLING 4.24 ***(Binomium van Newton)***
Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Bewijs. We bewijzen via inductie naam n. Voor $n = 0$ klopt de stelling overduidelijk ($LR = 1 = LL$).
Veronderstel nu dat stelling bewezen tot en met n. We kijken nu naar

de formule voor $n+1$:

$$LL = (x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) \overset{(IH)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right)(x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1}$$

$l = k+1$

$$= \sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}x^l y^{n-l+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{0}y^{n+1}$$

$$= \binom{n}{n}x^{n+1} + \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}x^l y^{n-l+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{0}y^{n+1}$$

$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}, \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$

$$= \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} + \sum_{l=1}^{n}\left[\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l}\right]x^l y^{n-l+1} + \binom{n+1}{0}y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} + \sum_{l=1}^{n}\binom{n+1}{l}x^l y^{n-l+1} + \binom{n+1}{0}y^{n+1} = \sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}x^l y^{(n+1)-l}$$

■

Bewijs. (alternatief bewijs)

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdot\dots\cdot(x+y)$$

De uitwerking hiervan levert een som van producten. Voor elk product moeten we uit elk haakje een x of een y nemen. Dan zetten we alle gelijke termen samen en we krijgen een formule

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} A_k x^k y^{n-k},$$

Met A_k het aantal manieren om k keer een x te selecteren uit n factoren (en dus $n-k$ keer een y) Dit kan op precies $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ manieren.
We vinden dus

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k},$$

■

OPMERKING 4.25 Met deze stelling kunnen we eigenschap 4.21 onmiddellijk aantonen. Neem immers $x = y = 1$. Dan wordt de formule van het Binomium van Newton

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

Indien we meer variabelen hebben kunnen we deze formule veralgemenen:

STELLING 4.26 ***(Multinomium)***

Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_r \geq 0 \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r}$$

Zo verkrijgen we bijvoorbeeld

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$$
$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3y^2z + 3xz^2 + 3xy^2 + 3yz^2 + 3x^2z + 6xyz$$

EIGENSCHAP 4.27 *(Binomiale reeks)*
Voor $\alpha \in \mathbb{R}$ en $|y| < |x|$ is

$$(x + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha - k} y^k$$

4.9 Oefeningen

De som- en productregel

4.1. Hoeveel functies van de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ naar $\{0, 1\}$?

(a) zijn injectief.

(b) kennen aan 1 en n de waarde 0 toe.

(c) kent 1 toe aan precies 1 getal strikt kleiner dan n.

4.2. Hoeveel deelverzamelingen van een verzameling met 100 elementen heeft meer dan 1 element?

4.3. Zoals elk jaar wordt er bij de koninklijke familie foto's getrokken. Koning Filip en Koningin Mathilde poseren samen met hun twee dochters, Prinses Elisabeth en Prinses Eléonore, en twee zoontjes, Prins Gabriël en Prins Emmanuel. Op hoeveel verschillende manieren kan de fotograaf deze mensen naast elkaar op de foto plaatsen zodat

(a) Filip naast Mathilde staat.

(b) Filip niet naast Mathilde staat.

(c) Filip ergens links van Mathilde staat.

4.4. Het Engelse alfabet bevat 26 letters waaronder 5 klinkers. Hoeveel verschillende "woorden" van 8 letters zijn er

(a) die geen klinkers bevatten, waarbij letters herhaald mogen worden.

(b) die geen klinkers bevatten, waarbij letters niet herhaald mogen worden.
(c) die beginnen met een klinker, indien letters herhaald mogen worden.
(d) die beginnen met een klinker, indien letters niet herhaald mogen worden.
(e) die tenminste 1 klinker bevatten, indien letters herhaald mogen worden.
(f) die tenminste 1 klinker bevatten, indien letters niet herhaald mogen worden.
(g) die met een X starten en minstens 1 klinker bevatten, indien letters herhaald mogen worden.
(h) die met een X starten en minstens 1 klinker bevatten, indien letters niet herhaald mogen worden.

Inclusie - Exclusie

4.5. Hoeveel strikt positieve gehele getallen kleiner dan of gelijk aan 10000 zijn deelbaar door 4 of door 6?

4.6. Hoeveel verschillende bitstrings van lengte 8 zijn er die beginnen met een 1, of eindigen met 2 nullen?

4.7. Hoeveel bitstrings zijn er van lengte 10 zijn er die 5 opeenvolgende énen of 5 opeenvolgende nullen hebben.

4.8. Hoeveel bitstrings zijn er van lengte 8 zijn er die 3 opeenvolgende énen of 4 opeenvolgende nullen hebben.

Beslissingsbomen

4.9. Hoeveel verschillende bitstrings van lengte 4 zijn er zodat er geen 2 opeenvolgende énen in zitten.

4.10. Een playoff tussen 2 teams bestaat uit maximum 5 wedstrijden. Het team dat als eerste 3 wedstrijden wint, wint de playoff. Op hoeveel verschillende manieren kan deze playoff verlopen?

4.11. Maak een beslissingsboom om het aantal deelverzamelingen van

$$\{3, 7, 9, 11, 24\}$$

te bepalen met de eigenschap dat de som van de elementen in zulk een deelverzameling kleiner is dan 28.

Examenvragen voorbije jaren

4.12. *Examen eerste zit 2007-2008.*

In een bepaalde richting kan je als student een aantal keuzevakken kiezen. Drie van die keuzevakken zijn talen. In een klas van 100 studenten zijn er 35 die Frans volgen, 42 die Spaans volgen, 43 die Duits volgen, 17 die Frans en Spaans volgen, 13 die Frans en Duits volgen, 15 die Spaans en Duits volgen en 20 die geen taal hebben gekozen.

(a) Hoeveel studenten volgen Frans of Duits, maar geen Spaans?

(b) Hoeveel studenten volgen precies 1 taal?

(c) Hoeveel studenten volgen precies 2 talen?

4.13. *Examen eerste zit 2008-2009.*

Bepaal het aantal natuurlijke getallen kleiner dan 1 000 000, die niet deelbaar zijn door 2, door 3 of door 5.

4.14. *Examen eerste zit 2008-2009.*

Als variant op de vorige oefening: bepaal het aantal natuurlijke getallen kleiner dan 1 000 000, die niet deelbaar zijn door 10, door 15 of door 25.

4.15. *Examen eerste zit 2010-2011.*

Drie verzamelingen A, B en C voldoen aan de volgende eigenschappen:

- $|A| = 100$, $|B| = 50$ en $|C| = 48$.
- Het aantal elementen dat slechts tot één van de drie verzamelingen behoort is het dubbel van het aantal elementen dat tot precies twee van de drie verzamelingen behoort.
- Het aantal elementen dat slechts tot één van de drie verzamelingen behoort is het drievoud van het aantal elementen dat tot elk van de drie verzamelingen behoort.

Hoeveel elementen behoren tot elk van de drie verzamelingen?

4.16. *Examen tweede zit 2010-2011.*

In België heeft een GSM-nummer 10 cijfers en start steeds met "04". Hoeveel verschillende GSM-nummers die tenminste 1 oneven cijfer bevatten of tenminste één 6 bevatten zijn er dan mogelijk in België?

Permutaties en Combinaties

4.17. Hoeveel manieren zijn er om een comité van 5 mensen te kiezen bestaande uit 3 vrouwen en 2 mannen uit een groep van 10 vrouwen en 7 mannen?

4.18. Bepaal het aantal deelverzamelingen van $S = \{1, 2, \ldots, 19\}$ met evenveel even als oneven getallen.

4.19. Gegeven een deck van 52 speelkaarten. Op hoeveel manier kan je deze kaarten verdelen in

(a) vier gelijke stapels, genummerd A, B, C, D;
(b) vier gelijke stapels, niet genummerd.

4.20. Zoek de coëfficiënt van $a^{17}b^{23}$ in de ontwikkeling van $(3a - 7b)^{40}$.

4.21. Schrijf de ontwikkeling van $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^8$ uit.

4.22. Bij een bepaald type van drukknop-deurslot moet je een code ingeven om de deur te openen. Het slot heeft vijf knoppen, genummerd $1, 2, 3, 4, 5$.

(a) Wanneer je een toegangscode mag kiezen die bestaat uit een opeenvolging van 4 cijfers, herhaling mag, hoeveel mogelijke codes zijn er dan?
(b) Wanneer je een toegangscode mag kiezen die bestaat uit een opeenvolging van 4 cijfers of van 3 cijfers, warrbij je geen cijfers mag herhalen, hoeveel mogelijke codes zijn er dan?
(c) Het slot is zo geprogrameerd dat het zes verschillende 4 cijferige codes toelaat, met herhaling van nummers toegestaan. Hoeveel verschillende verzamelingen van zes codes zijn er?

4.23. Toon aan dat

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$$

(a) Door een combinatorisch argument.
(b) Door de gelijkheid van Pascal $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ te gebruiken.

4.24. Hoeveel manieren zijn er om in het xy-vlak vanaf $(0, 0)$ naar (m, n) te gaan zodat elke manier een opeenvolging is van stappen, met elke stap een beweging met lengte 1 naar boven of een beweging met lengte 1 naar rechts?

Met herhaling

4.25. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

(a) als $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$.

(b) als $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ en $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$ en $x_3 \geq 3$.

4.26. Wat is de waarde van k nadat de volgende pseudocode is uitgevoerd.

```
k:=0
for i_1 :=1 to n
  for i_2 :=1 to i_1
    for i_3 :=1 to i_2
      ...
        for i_m :=1 to i_{m-1}
          k:=k+1
```

4.27. Hoeveel verschillende anagrammen kunnen er gemaakt worden met de letters van het woord

(a) wiskunde?

(b) lepelen?

(c) mississippi?

4.28. Hoeveel verschillende termen zijn er in de uitwerking van $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ nadat alle termen met dezelfde verzameling exponenten bij elkaar zijn opgeteld.

4.29. Naar de gelijkenis van het binomium van Newton

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

kunnen we ook een algemene beschrijving geven van de n-de macht van een som van m termen:

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n \\ n_i \in \{0,1,\ldots,n\}}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$$

Hierbij worden de multinomiaalcoëfficiënten gegeven door

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}.$$

(a) Toon de formule van het multinomium aan.

(b) Wat is de coëfficiënt van $x^3 y^2 z^5$ in $(x+y+z)^{10}$?

(c) Wat is de coëfficiënt van x^4 indien $(x^2 + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})^5$ wordt uitgerekend?

4.30. Een Amerikaan heeft een geldbuidel met 30 pennies, 20 nickels, 20 dimes, and 15 quarters (veronderstel dat munten van dezelfde soort ook hetzelfde zijn).

(a) Hoeveel verschillende manieren zijn er om de 85 muntstukken op een rij te leggen.

(b) Als hij willekeurig 12 munten uit de buidel trekt, op hoeveel verschillende manieren kan hij dat doen (de volgorde speelt dus geen rol)?

4.31. Hoeveel verschillende niet-geordende selecties van n objecten van r verschillende types zijn er die minstens q_1 objecten van type 1, minstens q_2 objecten van type 2, enz. q_r objecten van type r bevatten.

4.32. Toon de volgende gelijkheid aan:

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}.$$

(a) via een combinatorisch bewijs.

(b) via het binomium van Newton.

Examenvragen voorbije jaren

4.33. *Examen tweede zit 2007-2008.*

In een paardenkoers zijn er 4 deelnemende paarden. Op hoeveel verschillende manieren kunnen die over de streep komen? Het is hierbij mogelijk dat verschillende paarden exact op hetzelfde tijdstip over de streep komen (en er dus bv een gedeelde tweede plaats is).

4.34. *Examen tweede zit 2008-2009.*

Uit hoeveel eentermen bestaat de (ontwikkeling van) de veelterm $(x + y + z)^{30}$.

4.35. *Examen tweede zit 2009-2010.*

Een fotograaf wil de 4 jongens en 5 meisjes op de foto zetten. Ze moeten alle 9 naast elkaar staan en bovendien mogen er geen 2 jongens naast elkaar staan. Hoeveel mogelijke opstellingen heeft de fotograaf.

HOOFDSTUK 5

KANSREKENING

5.1 ELEMENTAIRE KANSREKENING

DEFINITIE 5.1 **Via deze definitie willen we een wiskundige formulering geven aan kansen.**

(a) De *sample space*, de *kansruimte* of het *universum* is de verzameling van alle mogelijke uitkomsten van een zeker kanstheoretisch experiment. Deze ruimte noemen we meestal S of Ω.

(b) De *gebeurtenis* A is een deelverzameling van de sample space en bestaat dus uit een selectie van uitkomsten uit het volledige universum.

(c) Een *atomaire gebeurtenis* is 1 van de mogelijke uitkomsten.

(d) Een gebeurtenis die uit 2 of meerdere mogelijke uitkomsten bestaat noemen we soms een *samengestelde gebeurtenis*.

(e) We spreken van disjuncte gebeurtenissen A en B als $A \cap B = \emptyset$.

VOORBEELD 5.2 Veronderstel dat we één dobbelsteen werpen: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. De atomaire gebeurtenissen zijn dan $\{1\},\{2\},\ldots$. Mogelijke andere gebeurtenissen zijn dan

$$A = \{\text{even worpen}\}$$
$$B = \{\text{worpen groter of gelijk aan } 5\}$$

VOORBEELD 5.3

Veronderstel dat we 2 dobbelstenen werpen, dan zijn er verschillende manieren om de kansruimte te beschrijven:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{2,3,\ldots,12\}\\ \Omega_2 &= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}\\ \Omega_3 &= \{\{1,1\},\{1,2\},\ldots,\{6,6\}\}\end{aligned}$$

Bij Ω_1 neem je de som van de waarden van de dobbelsteen, bij Ω_2 de geordende paren (alsof je twee dobbelstenen in verschillende kleuren hebt) en bij Ω_3 de niet-geordende paren (alsof je twee dobbelstenen met dezelfde kleur werpt).

OPMERKING 5.4

In het voorbeeld van de twee dobbelstenen merken we dat Ω_2 de kans op elke atomaire gebeurtenis even groot is. In dit geval spreken we van een *equiprobabele kansruimte*. Bij Ω_1 is de kansruimte niet equiprobabel (de kans op een 2 is kleiner dan de kans op een 7), en ook bij Ω_3 is de kansruimte niet equiprobabel (de kans op $\{1,1\}$ is kleiner dan de kans op een {1,2}).
In sommige gevallen is het echter ook onmogelijk om over een equiprobabele kansmaat te spreken, bijvoorbeeld als men een onzuivere dobbelsteen heeft.

DEFINITIE 5.5

Een *kansmaat* op een universum Ω is een functie $\mathbb{P}: 2^\Omega \to [0,1]$ die voldoet aan

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

indien A en B disjunct zijn.

De laatste voorwaarde kan veralgemeend worden naar

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$$

indien $A_1, \ldots, A_k$ allemaal disjuncte gebeurtenissen zijn.
Op deze manier volstaat het een functie $\mathbb{P}: \Omega \to [0,1]$ te definiëren die de kans op atomaire gebeurtenissen beschrijft. Door kansen op te tellen kunnen we ook de kans nemen van willekeurige (eindige) gebeurtenissen:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{e\} \mid e \in A\} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{e\in A}\{e\}\right) = \sum_{e\in A}\mathbb{P}(\{e\}).$$

Hierdoor kunnen we zowel $\mathbb{P}(e)$ als $\mathbb{P}(\{e\})$ schrijven voor de kans op de atomaire gebeurtenis $\{e\}$.
We kunnen ook opmerken dat deze somregel ook geldt voor de som van een (aftelbaar) oneindige verzameling van disjuncte gebeurtenissen $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Of nog algemener:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i).$$

voor disjuncte $\{A_i \mid i \in I\}$ met I een eindige of aftelbare verzameling. Voor overaftelbare verzameling geldt dit echter niet (zie ook verder bij continue verdelingen).

Rekenen met kansen

De algemene regel voor het rekenen met kansen is de volgende:

EIGENSCHAP 5.6 *In de kansruimte Ω met* **equiprobabele kansmaat** $\mathbb{P}$ *wordt de kans op de gebeurtenis A gegeven door*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Laten we terugkeren naar de vorige voorbeelden:

VOORBEELD 5.7 1 dobbelsteen werpen: $A = \{\text{even worpen}\}$. Dan is $\mathbb{P}(A) = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
2 dobbelsteen werpen: we moeten werken met een equiprobabele kansmaat, maar dus hier best met $\Omega_2 = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$. Er zijn dus 36 mogelijk worden die elk met eenzelfde kans $\frac{1}{36}$ voorkomen. We kunnen de mogelijk uitkomsten in een tabel weergeven (links de eerste worp, bovenaan de tweede worp, in de tabel de som):

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Volgende bovenstaande regel vinden we dan: $\mathbb{P}(2) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(3) = \frac{2}{36}$ etc. In het algemeen zouden we kunnen stellen dat

$$\mathbb{P}(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{36} & \text{als } 2 \le n \le 7 \\ \frac{13-n}{36} & \text{als } 7 \le n \le 12 \end{cases}$$

DEFINITIE 5.8 **We noemen het *complement* van een gebeurtenis A de gebeurtenis $\overline{A} = \Omega \setminus A$.**

EIGENSCHAP 5.9 $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Bewijs. Aangezien Ω kan opgesplitst worden in twee disjuncte delen: $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A)$ geldt voor de kansen:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup (\Omega \setminus A)) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\Omega \setminus A),$$

waaruit het gestelde meteen volgt. ■

Het inclusie-exclusieprincipe, dat we zagen in het hoofdstuk over combinatoriek, vertaalt zich ook naar kansen:

EIGENSCHAP 5.10 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Bewijs. We merken op dat $A \cup B$ kan opgesplitst worden in 3 disjuncte delen: $A \cap B$, $A \setminus B$ en $B \setminus A$. Verder kunnen ook A en B zelf in disjuncte delen worden opgesplitst:

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \quad \text{en} \quad B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

Dan is

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((A \setminus B) \cup (A \cap B)) + \mathbb{P}((B \setminus A) \cup (A \cap B)) \\
&= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B)
\end{aligned}$$

of met anders woorden:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

■

Spijtig genoeg kunnen we de rekenregel uit eigenschap 5.6 niet gebruiken voor oneindig grote verzamelingen (niet voor aftelbaar oneindige verzamelingen en niet voor overaftelbare verzamelingen).

EIGENSCHAP 5.11 ***Er bestaat geen enkele equiprobabele kansmaat op $\mathbb{N}$.***

Bewijs. via contradictie:
Stel er bestaat wel een kansmaat op $\Omega = \mathbb{N}$ die equiprobabel is. Dan bestaat er een ϵ zodat $\mathbb{P}(n) = \epsilon$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan zijn er twee mogelijkheden:

$\epsilon = 0$. dan is

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0.$$

een contradictie.

$\epsilon > 0$. in dit geval zal de totale kans boven 1 uitkomen en dat is uiteraard onmogelijk. Inderdaad, we kunnen een $n \in \mathbb{N}$ vinden zodat tussen $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$. In dat geval is $n\epsilon > 1$ en dus vinden we dat

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{k\}\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{k\}\right) = n\epsilon > 1.$$

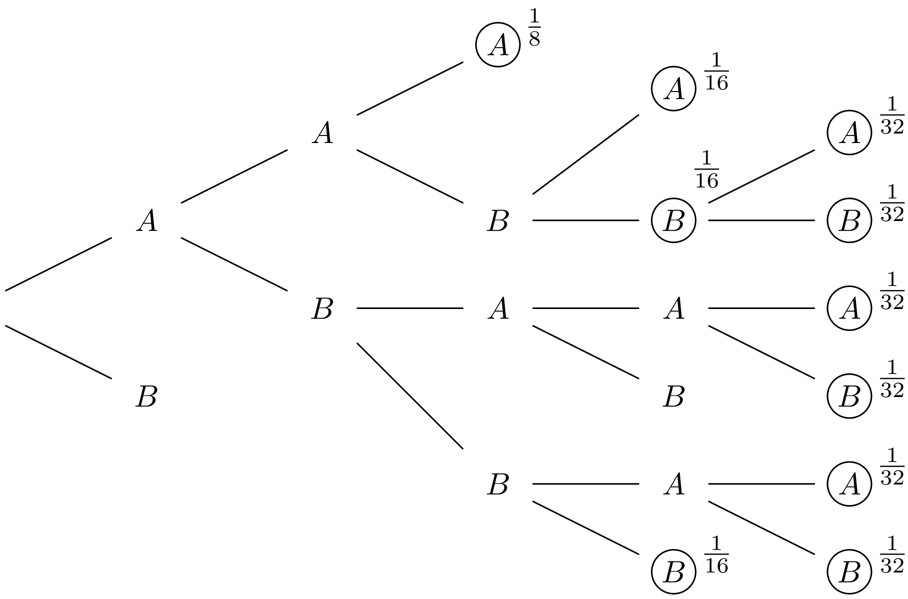
■

Bij oneindig grote verzamelingen zullen we moeten werken met verdelingsfuncties (zie ook verderop in dit hoofdstuk)

KANSEN BEPALEN MET KANSBOMEN

In sommige gevallen is het handig te werken met kansbomen. Dit kunnen we best met een voorbeeld bekijken. We herbekijken het voorbeeld dat we ook bij de beslissingsbomen zijn tegengekomen (oefening 4.10).

VOORBEELD 5.12 Een playoff tussen teams A en B bestaat uit maximum 5 wedstrijden. Het team dat als eerste 3 wedstrijden wint, wint de playoff. Wat is de kans dat de playoff 4 wedstrijden duurt.
Een foutieve redenering hierbij zou zijn dan van de 20 paden die we verkregen, we er precies 6 playoffverlopen zijn die precies 4 wedstrijden en dit aanleiding geeft tot een kans van $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. Het probleem bij deze redenering is dat niet alle gebeurtenissen met de dezelfde kans gebeuren.
De aangepaste oplossing is als volgt. We kregen de volgende beslissingsboom (met het onderste gedeelte identiek aan het bovenste, maar dan met alle A's en B's omgewisseld).



Om de kansen van elk playoff verloop correct te bepalen vermenigvuldigen we de kansen die we bij elke wedstrijden krijgen. Vermits elke wedstrijd in dit geval met kan $1/2$ gewonnen worden door ploeg A en met kans $1/2$ gewonnen worden door ploeg B, krijgen we dat de kans op een wedstrijdverloop van de vorm AAA precies met kans $\mathbb{P}(AAA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Gelijkaardig vinden we dat de kans op een bepaald wedstrijdverloop van 4 wedstrijden met kans $1/16$ voorkomt en de kans op een bepaald wedstrijdverloop van 5 wedstrijden met kans $1/32$ voorkomt.
De correcte kans is dus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(4 \text{ wedstrijden}) &= \mathbb{P}(AABA, ABAA, ABBB, BAAA, BABB, BBAB) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

In het algemeen zullen we dus een beslissingsboom maken, in elke stap zullen we kansen toekennen: wat is de kans dat je van een bepaald punt in de boom naar het volgend punt in de boom gaat (in het vorige voorbeeld is die steeds $1/2$). De kans dat je dan uiteindelijk in een blad van de boom uitkomt is dan het product van de kans. Dit is wel alleen het geval als de opeenvolgende gebeurtenissen *onafhankelijk* zijn. Wat dit precies betekent, wordt toegelicht in de volgende sectie.

5.2 Voorwaardelijke kans

DEFINITIE 5.13 **Gebeurtenissen A en B noemen we onafhankelijk wanneer $\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$.**

VOORBEELD 5.14 Stel dat je een zuiver muntstuk tweemaal opwerpt. De mogelijke uitkomsten zijn voor elke worp K =kop, M =munt. Noem dan

- A de gebeurtenis dat je met de eerste worp K gooit.
- B de gebeurtenis dat je met de tweede worp M gooit.

Dan is $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}((K, M)) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

We vinden dus dat beide gebeurtenissen onafhankelijk zijn. We interpreteren dit door te stellen dat het resultaat van de eerste worp geen invloed heeft op het resultaat van de tweede worp.

VOORBEELD 5.15 Stel dat je met een blauwe en een rode dobbelsteen werpt en de som van de twee dobbelstenen bekijken. Noem dan

- A de gebeurtenis dat je met de blauwe dobbelsteen een 2 gooit.

- B de gebeurtenis dat je met de twee dobbelstenen samen een 8 gooit.

Dan is $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{5}{36}$ (zie ook voorbeeld 5.7) en

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}((2,6)) = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

A en B zijn hier dus geen onafhankelijke gebeurtenissen. Je kan dit interpreteren als volgt: het resultaat van de som wordt beïnvloed door het aantal ogen van de blauwe dobbelsteen. Toch kan het zijn dat in specifieke gevallen de gebeurtenissen toch onafhankelijk zijn. Kijk immers naar de volgende situatie (opnieuw met een blauwe en een rode dobbelsteen).

- A de gebeurtenis dat je met de blauwe dobbelsteen een 2 gooit.
- B de gebeurtenis dat je met de twee dobbelstenen samen een 7 gooit.

Dan is $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (zie ook voorbeeld 5.7) en

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}((2,5)) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

A en B zijn hier dus wel onafhankelijke gebeurtenissen.

Indien gebeurtenissen niet onafhankelijk zijn, dan heeft het zin om te spreken van het volgende.

DEFINITIE 5.16 **Indien A en B gebeurtenissen zijn met $\mathbb{P}(B) \neq 0$, noemen de kans op gebeurtenis A, wetende dat B het geval is als**

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \textbf{als } \mathbb{P}(B) \neq 0,$$

We noemen dit ook de *voorwaardelijke kans* van A wetende B.

Deze definitie stelt ons in staat om ook een andere definitie te geven aan onafhankelijkheid.

EIGENSCHAP 5.17 ***Als $\mathbb{P}(B) \neq 0$, dan zijn A en B onafhankelijk als***

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

m.a.w., het feit dat je weet dat B het geval is heeft helemaal geen invloed op de kans op A.

Bewijs. Stel A en B onafhankelijk, dan is

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$$

brengen we $\mathbb{P}(B)$ naar het andere lid, dan krijgen we

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B).$$

■

VOORBEELD 5.18 We hernemen voorbeeld 5.15 met de blauwe en rode dobbelsteen. In het eerste geval krijgen we:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(\text{blauw} = 2 \,|\, \text{som} = 8) = \frac{\mathbb{P}(\text{blauw} = 2, \text{som} = 8)}{\mathbb{P}(\text{som} = 8)} = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5}$$

We merken dus inderdaad opnieuw dat A en B niet onafhankelijk zijn:

$$\frac{1}{5} = \mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$$

In het tweede geval is

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(\text{blauw} = 2 \,|\, \text{som} = 7) = \frac{\mathbb{P}(\text{blauw} = 2, \text{som} = 7)}{\mathbb{P}(\text{som} = 8)} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}$$

en A en B zijn onafhankelijk:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$$

EIGENSCHAP 5.19 ***(Somregel). Indien de gebeurtenissen*** $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ***een partitie vormt van*** Ω***, dan is***

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

Bewijs. Aangezien $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, is

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

Omdat de A_i allen disjunct zijn, zijn ook alle $B \cap A_i$'s disjunct en bijgevolg is

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) \tag{5.1}$$

Uit de definitie van voorwaardelijke kans krijgen we dan

$$\mathbb{P}(B|A_i) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_i)}{\mathbb{P}(A_i)} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i) \tag{5.2}$$

indien we dit nu invullen in vergelijking (5.1) krijgen we

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

■

EIGENSCHAP 5.20 ***(Regel van Bayes). Indien de gebeurtenissen*** $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ***een partitie vormt van*** Ω***, en*** B ***een gebeurtenis is op*** Ω ***met*** $\mathbb{P}(B) \neq 0$***, dan is voor elke*** $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}$$

Bewijs. We gebruiken de somregel en de formules in het bewijs van de somregel.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_i|B) &= \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &\overset{(5.2)}{=} \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(B)} \\ &\overset{\text{somregel}}{=} \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)} \end{aligned}$$

■

VOORBEELD 5.21 Veronderstel dat bij een dopingtest 99% van de mensen die doping gebruikt positief test en dat 98% van de mensen die geen doping gebruikt negatief test.
Stel dat 0,5% van de sporters doping gebruikt. Bepaal nu de kans dat als een sporter positief wordt bevonden, hij ook effectief doping heeft genomen.
We noemen hier

- A_1 de gebeurtenis dat de sporter doping gebruikt.
- A_2 de gebeurtenis dat de sporter geen doping gebruikt.
- B de gebeurtenis dat de sporter positief test.

We krijgen dat dat

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) &= \frac{1}{200} \\ \mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(\overline{A_1}) = 1 - \mathbb{P}(A_1) = \frac{199}{200} \\ \mathbb{P}(B|A_1) &= \frac{99}{100} \\ \mathbb{P}(B|A_2) &= \frac{2}{100} \end{aligned}$$

Zo vinden we dat

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)} = \frac{\frac{1}{200}\frac{99}{100}}{\frac{1}{200}\frac{99}{100}+\frac{199}{200}\frac{2}{100}} = \frac{99}{99+398} = \frac{99}{497} \approx 0,199\ldots$$

5.3 Enkele kanstheoretische paradoxen

Sommige van de volgende fragmenten werden overgenomen uit de bundel *"Paradoxen" in de wiskunde* van Bart Windels en Stijn Symens

Binnen de discipline van de kanstheorie zullen we merken dat correcte kanstheoretische resultaten vaak tegen ons gevoel in gaan. In zulk geval spreken we van een kanstheoretische *paradox*. We bekijken hier enkele zeer bekende paradoxen.

De Paradox van Simpson

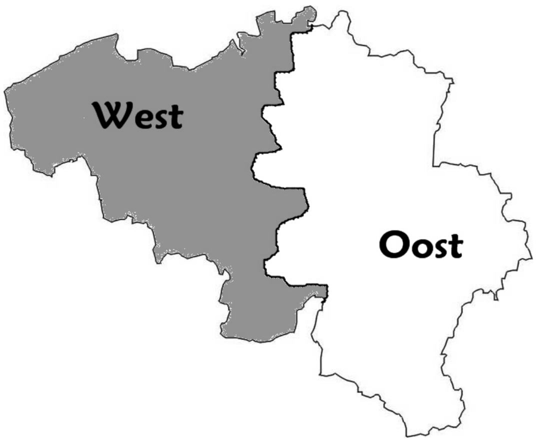
De zogenaamde *paradox van Simpson* is een puur algebraïsche schijnbare tegenspraak. Hij duikt in allerlei contexten op, zoals uit volgende voorbeelden blijkt.

VOORBEELD 5.22 Werkloosheidscijfers

Een federaal land is onderverdeeld in twee delen: het Westen en het Oosten. In beide landsdelen heerst een grote werkloosheid, zoals aangegeven in volgende tabellen (in duizendtallen). De federale regering tracht op basis van deze gegevens te beslissen welk landsdeel de meeste overheidssteun moet ontvangen.

West	diensten	industrie
actieve bevolking	1650	1350
werklozen	375	450

Oost	diensten	industrie
actieve bevolking	1050	2100
werklozen	225	675



Een eerste commissie gaat als volgt te werk. Door de verhouding van het aantal werklozen en de actieve bevolking te berekenen, vinden we de volgende werkloosheidsgraden in West en Oost per sector.

West	diensten	industrie
werkloosheid	22,73 %	33,33 %

Oost	diensten	industrie
werkloosheid	21,43 %	32,14 %

Zowel in de dienstensector als in de industrie is de werkloosheidsgraad in het Westen hoger dan in het Oosten. De eerste commissie beslist daarom dat West iets meer overheidssteun moet krijgen dan Oost.

Een tweede commissie maakt geen onderscheid tussen diensten en industrie. Zij vinden de volgende cijfers

West	allen
actieve bevolking	3000
werklozen	825

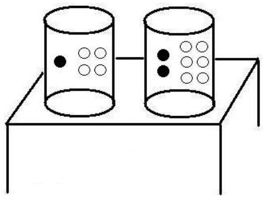
Oost	allen
actieve bevolking	3150
werklozen	900

Zij komen tot een werkloosheidsgraad van 27,57 % voor het Westen en 28,50 % voor het Oosten. De tweede commissie beslist daarom dat Oost iets meer overheidssteun moet krijgen dan West. Dit is net de omgekeerde beslissing als bij de eerste commissie.

VOORBEELD 5.23 Ballenbak

Op twee tafels staan telkens twee bakken met zwarte en witte ballen.

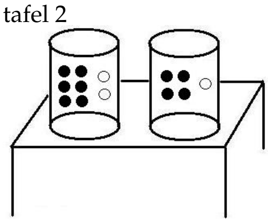
tafel 1



In de linkse bak van de eerste tafel zitten 5 ballen waarvan 1 zwarte. In de rechtse bak van de eerste tafel zitten 8 ballen, waarvan 2 zwarte. De kans om een zwarte bal te trekken is dus groter in de rechts bak, omdat

$$\frac{1}{5} < \frac{2}{8}.$$

tafel 2

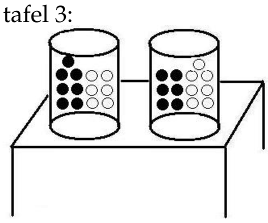


In de linkse bak van de tweede tafel zitten 8 ballen, waarvan 6 zwarte. In de rechtse bak van de tweede tafel zitten 5 ballen waarvan 4 zwarte. De kans om een zwarte bal te trekken is dus opnieuw groter in de rechtse bak, omdat

$$\frac{6}{8} < \frac{4}{5}.$$

Als de twee linkse bakken in één bak worden samengevoegd die links op een derde tafel staat en ook de twee rechtse bakken in één bak worden samengevoegd die rechts op de derde tafel staat, dan wordt de kans om een zwarte bal te trekken plots groter (!) in de linkse bak dan in de rechtse bak. Immers, in de linkse bak zitten 13 ballen, waarvan 7 zwarte en in de rechtse bak zitten ook 13 ballen, waarvan slechts 6 zwarte, en

tafel 3:



$$\frac{7}{13} > \frac{6}{13}.$$

Voorbeelden 3 en 4 tonen aan dat voor sommige gehele getallen a, b, c, d, A, B, C, D geldt dat

$$\frac{a}{b} < \frac{A}{B} \qquad \text{en} \qquad \frac{c}{d} < \frac{C}{D}$$

én dat

$$\frac{a+c}{b+d} > \frac{A+C}{B+D}.$$

In voorbeeld 3 is a het aantal werklozen uit de diensten in Oost, b de actieve bevolking uit de diensten in Oost, A het aantal werklozen uit de diensten in West, B de actieve bevolking uit de diensten in West, c het aantal werklozen uit de industrie in Oost, d de actieve bevolking uit de industrie in Oost, C het aantal werklozen uit de industrie in West en D de actieve bevolking uit de industrie in West.

In voorbeeld 4 stellen a, A, c en C de hoeveelheid zwarte ballen voor in elke bak en b, B, d en D de totale hoeveelheid ballen in elke bak.

Er is hier dus geen sprake van een echte paradox, maar hooguit van een onverwacht resultaat: verhoudingen zijn niet additief. Toch wordt dit verschijnsel door velen als “in tegenstrijd met de intuïtie” ervaren, en het krijgt daardoor de naam *Paradox van Simpson*.

De paradox van Simpson wordt genoemd naar Edward Simpson, die deze beschrijft in een artikel uit 1951. De paradox werd in het begin van de twintigste eeuw echter al beschreven door Yule.

Merk op dat er wél geldt dat

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{c+d} < \frac{c}{d}.$$

De verjaardagsparadox

Wat is de kans dat in een groep van 30 mensen er twee van hen op dezelfde dag jarig zijn?

De meeste mensen schatten deze kans veel te laag in. Wellicht laten zij zich leiden door de kleine kans dat zijzelf, als ze deel uitmaken van een groep van 30 personen, op dezelfde dag verjaren als iemand anders uit de groep. Echter, het aantal de paren waartoe een vaste persoon behoort, is slechts een fractie van het aantal paren uit de hele groep.

We zoeken eerste de kans dat 30 mensen allen een verschillende verjaardag hebben. Het aantal mogelijke keuzen van 30 verschillende dagen is

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 336 \qquad \text{(30 factoren)}$$

Voor de eerste verjaardag kunnen we immers 365 verschillende datums kiezen, voor de tweede blijven er nog 364 datums over, voor de derde 363, enzovoort. Het aantal mogelijke keuzen van 30 (niet noodzakelijk verschillende) verjaardagen is

$$365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 365 \qquad \text{(30 factoren)}$$

De kans op 30 verschillende verjaardagen is dus

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 336}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 365} = 0{,}2936\ldots$$

De kans dat dit niet gebeurt, en dat er minstens twee mensen op dezelfde dag hun verjaardag vieren, is dus

$$1 - 0{,}2936\ldots = 0{,}7063\ldots$$

hetgeen meer is dan de intuïtie van de meeste mensen.

Merk op dat met een beetje computeralgebra de bovenstaande kans eenvoudig kan worden berekend. Immers:

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 336}{365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \cdots \cdot 365} = 1 - \frac{365!}{335! \cdot 365^{30}}.$$

Als de groep groter wordt dan 30 personen, dan worden de kansen spectaculair groot.

n	kans op twee dezelfde verjaardagen in een groep van n personen
10	0,116948177...
20	0,411438383...
30	0,706316242...
40	0,891231809...
50	0,970373579...
60	0,994122660...
100	0,999999692...

Het Monty Hall probleem

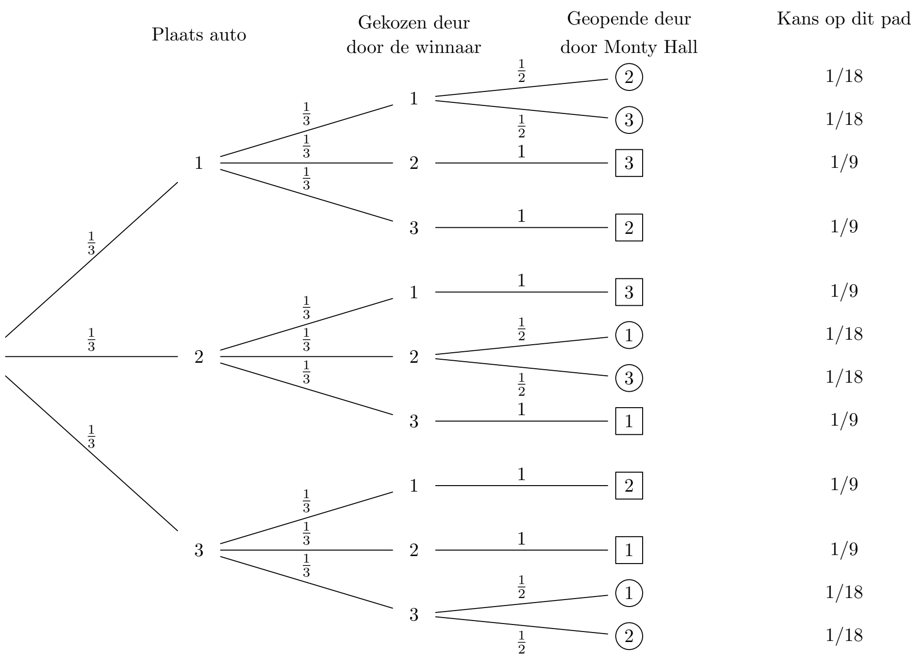
Bij het spelprogramma *"Let's make a deal"* gepresenteerd door Monty Hall, krijgt de winnaar van het spel 3 deuren[1] te zien. Achter één van de deuren zit een prachtige auto, achter de andere twee deuren zit telkens een geit. De winnaar mag een deur kiezen. Op basis van deze keuze opent Monty Hall een andere deur, waar een geit achter zit. De winnaar heeft dan de keuze. Blijven bij de deur die als eerste gekozen is, en met die prijs naar huis gaan, ook van keuze veranderen, opteren voor de andere nog niet geopende deur en met die prijs naar huis gaan.

We stellen ons de volgende vraag:

Blijf je best bij je keuze, of verander je best?

[1] vandaar ook de benaming *driedeurenprobleem*

Het antwoord is éénvoudig: indien je de juiste keuze had gemaakt, blijf je best bij je keuze, indien niet, verander je best.
Helaas kan je dat niet weten en dus kunnen we ons enkel baseren op de kans op winst van de auto.
De naïele redenering zou zijn: er zijn twee deuren om uit te kiezen, en je hebt dus 1 kans op 2 dat je de auto wint. Dit zou enkel het geval zijn als beide deuren evenveel kans hebben om te winnen. Door de voorgeschiedenis is dat echter niet het geval. Het feit dat Monty Hall een deur opent met een geit achter, zorgt ervoor dat de kans niet 1 op 2 is.
Wat zijn de kansen dan wel? Stel dat je zonder verlies van algemeenheid deur 1 hebt gekozen. Dan heb je 1 kans op 3 dat de auto achter deur 1 zit en 2 kansen op 3 dan de auto niet achter deur 1 zit. Monty Hall doet nu een deur open (bv deur 2). Achter deze deur zit steeds een geit. De kans verandert echter niet. Het blijft nog steeds 1 kans op 3 dat de auto achter deur 1 zit. De kans verandert op een auto achter deur 3 is nu verandert in 2/3.
Laten we even een kansboom opmaken om dit te staven.



In deze kansboom kunnen we eerst het onderscheid maken waar de auto zich bevindt, dan bepalen we met 1 kans op 3 de keuze van de winnaar, dan bepaalt Monty Hall de deur die geopend wordt. Indien de winnaar een deur met een geit heeft gekozen, heeft hij slechts 1 keuze. Indien de winnaar de deur met de auto heeft gekozen heeft zijn 2 mogelijke keuze. (Hier telkens met kans 1/2 aangegeven, maar deze kans mag ook anders verdeeld zijn. Monty Hall zou bv steeds de deur met de laagste nummer kunnen kiezen. Dit verandert niets in het eindresultaat.)

Laten we er nu vanuit gaan dat de winnaar bij zijn keuze blijft. Dan zijn in de boom de paden die aanleiding geven tot het winnen van een auto aangeduid met een cirkel. Deze geven totale kans

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

De paden die aanleiding geven tot het winnen van een geit zijn aangeduid met een vierkant en geven totale kans

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Andersom, indien de winnaar van keuze verandert, dan zijn in de boom de paden die aanleiding geven tot het winnen van een auto aangeduid met een vierkant. Deze geven totale kans $\frac{2}{3}$. De paden die aanleiding geven tot het winnen van een geit zijn aangeduid met een cirkel en geven totale kans $\frac{1}{3}$.

Veranderen is dus de boodschap!

5.4 Toevalsveranderlijken en kansverdelingen

DEFINITIE 5.24 **We noemen X een *toevalsveranderlijke* (of een *random variabele*) op een universum Ω als X een reëelwaardige functie is.**

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

We noteren $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{s \in \Omega \mid X(s) = x\})$.

Behalve in de laatste secties van dit hoofdstuk, zullen we in dit hoofdstuk steeds spreken over *discrete* random variabelen. Dit zijn variabele die maar een aftelbaar aantal verschillende mogelijke beelden hebben.

DEFINITIE 5.25 **De *kansdichtheidsfunctie* van een toevalsveranderlijke X is de functie**

$$f_X : \mathbb{R} \to [0,1] : x \longmapsto \mathbb{P}(X = x)$$

Meestal wordt f_X beperkt tot $\mathrm{Im}(X)$. De *verdelingsfunctie* van een toevalsveranderlijke X is de functie

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] : x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$$

Zowel de kansdichtheidsfunctie als de verdelingsfunctie wordt vaak met een grafiek (een staafjesdiagram) weergegeven.
Hoeveel voor het bepalen van kansen de kansdichtheidsfunctie vaak gebruikt, komt ook de verdelingenfunctie soms goed van pas zoals in volgend voorbeeld.

VOORBEELD 5.26 Deze verdeling zijn we reeds tegengekomen in voorbeeld 5.7. Hier hadden we

$$\mathbb{P}(X=i)=\begin{cases}\frac{i-1}{36} & \text{als } 2\leq i\leq 7\\ \frac{13-i}{36} & \text{als } 7\leq i\leq 12\end{cases}$$

De kans dat een worp met twee stenen dat tussen 6 en 10 ligt, kan bepaald worden via

$$\mathbb{P}(6\leq X\leq 10)=\sum_{i=6}^{10}\mathbb{P}(X=i)=\sum_{i=2}^{10}\mathbb{P}(X=i)-\sum_{i=2}^{5}\mathbb{P}(X=i)=\mathbb{P}(X\leq 10)-\mathbb{P}(X\leq 5)$$

De meeste toevalsvariabelen die wij gaan gebruiken voldoen aan een gekende verdeling. Vaak hebben toevalsvariabelen immers een gelijkaardig onderliggende kansruimte. We overlopen hier de courantste discrete verdelingen

De uniforme verdeling

Een toevalsveranderlijke die verdeeld is volgens de *(eindige) uniforme verdeling* heeft een kansdichtheidsfunctie die aan elke mogelijke waarde van X dezelfde kans toekent.
Indien X de n waarden uit de verzameling $\{x_1,\ldots,x_n\}$ kan aannemen, dan komen deze allemaal voor met kans $\frac{1}{n}$. Op deze manier komt de totale kans precies op 1 uit.

VOORBEELD 5.27 Indien we gooien met een dobbelsteen volgt deze een uniforme verdeling: $X\sim U(\{1,2,3,4,5,6\})$.

De Bernoulli-verdeling

Een andere zeer eenvoudige verdeling is de Bernoulli-verdeling. We voeren 1 experiment uit dat kans p heeft om te slagen en kans $q=1-p$ om niet te slagen. We spreken dan van *kans p op succes*.
De toevalsveranderelijke X krijgt waarde 1 bij succes en waarde 0 bij falen. We noteren dan $X\sim B(1,p)$ en de kansdichtheidsfunctie en de verdelingsfunctie wordt dan gegeven door

$$\begin{aligned} f_X(0)&=\mathbb{P}(X=0)=q & \qquad F_X(0)&=\mathbb{P}(X\leq 0)=q\\ f_X(1)&=\mathbb{P}(X=1)=p & \qquad F_X(1)&=\mathbb{P}(X\leq 1)=p+q=1\end{aligned}$$

Voorbeelden zijn:

- een eerlijk muntstuk opgooien, succes komt bijvoorbeeld overeen met het werpen van KOP. Hierbij is $p=q=\frac{1}{2}$
- een 6-zijdige dobbelsteen werpen, succes komt bijvoorbeeld overeen met een worp van 5 of meer. Dan is $p=\frac{1}{3}$ en $q=\frac{2}{3}$.

Het herhaaldelijk toepassen van een Bernoulli-experiment geeft aanleiding tot de binomiale en de negatieve binomiale verdeling.

De binomiale verdeling

Indien we n Bernoulli-experimenten na elkaar doen, allen onafhankelijk van elkaar en allen met dezelfde kans $p \in [0,1]$ op succes (en $q = 1-p$), kunnen we een toevalsveranderlijke X invoeren die het aantal succes telt.
In dit geval is $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0,1\}\}$ en wordt X gegeven door $\sum_{i=1}^n x_i$.
De waarde van X is dus een natuurlijk getal tussen 0 en n.

We noteren: $X \sim B_{n,p}$ of $X \sim B(n,p) \quad (n \in \mathbb{N}_0, p \in [0,1])$.

Wat is nu de kans $\mathbb{P}(X = k)$? Hiervoor moeten we het antwoord vinden op twee vragen:

(a) *Op hoeveel verschillende manier kan ik een n-tupel kiezen zodat*

$$\sum_{i=1}^n x_i = k?$$

Met andere woorden hoeveel elementen van Ω hebben precies k énen en $n-k$ nullen? Of nog anders gesteld, op hoeveel manieren kan ik een deelverzameling van k experimenten kiezen uit de verzameling van n experimenten. Dit kan precies op $\binom{n}{k}$ manieren (herhaling mag niet, volgorde niet van belang).

(b) *Met welke kans komt zo een n-tupel voor?* Er moeten precies k successen zijn (die met kans p voorkomen) en $n-k$ mislukkingen zijn (die met kans $q = 1-p$ voorkomen), zodat de kans op zulk een p-tuple gegeven wordt door $p^k q^{n-k}$.

We krijgen dus voor een $X \sim B(n,p)$ dat $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.
(Het is alsof je in een kansboom alle mogelijk n-tupels beschrijft door een boom met 2^n paden. Van die 2^n zij er $\binom{n}{k}$ paden die precies k keer succes hebben en elk van die paden komt voor met kans $p^k q^{n-k}$, zodat de totale kans gegeven wordt door $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.)

Besluit:
Als $X \sim B_{n,p}$, dan geldt voor elke $0 \leq k \leq n$ dat

$$f_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$F_X(k) = \mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

Dat dit overeenkomt met de kansdichtheidsfunctie kunnen we controleren door alle kansen op te tellen. Die zouden immers moeten sommeren op 1.

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \overset{\text{Binomium}}{=} (p+q)^n = 1^n.$$

VOORBEELD 5.28 Muntstuk 8 keer na elkaar opgooien

VOORBEELD 5.29 Dobbelsteen 20 keer gooien en het aantal zessen tellen

VOORBEELD 5.30 Gokken bij multiple-choicevragen met giscorrectie.

DE NEGATIEVE BINOMIALE VERDELING

Veronderstel dat we Bernoulli-experimenten (allen met dezelfde kans p op succes) herhalen totdat je het n-de succes hebt behaald. Hoeveel experimenten heb je hiervoor nodig gehad? Een toevalsveranderlijke X die dit aantal beschrijft noemen we verdeeld volgens een negatieve binomiale verdeling.
We noteren: $X \sim NB_{n,p}$ of $X \sim NB(n,p)$ $\quad (n \in \mathbb{N}_0, p \in [0,1])$.

Wat is nu de kans $\mathbb{P}(X = k)$? We splitsen dit opnieuw op in deelvragen:

(a) *Op hoeveel verschillende manier kan ik een $n-1$ successen hebben in de eerste $k-1$ experimenten?*

Deze vraag werd precies beantwoord bij de binomiale verdeling. Stel $X' \sim B_{k-1,p}$ een binomiaal verdeelde variabele, dan is de kans op $n-1$ successen precies

$$\mathbb{P}(X' = k-1) = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} q^{(k-1)-(n-1)} = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} q^{k-n}.$$

(b) *Met welke kans is er succes in het k-de succes?*

Deze kans is uiteraard gewoon p.

We krijgen dus voor een $X \sim NB(n,p)$ dat $\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$
Dit is natuurlijk pas geldig voor $k \geq n$. In het geval dat $0 \leq k < n$, is de kans uiteraard 0.

Besluit:
Als $X \sim NB_{n,p}$, dan geldt voor elke $0 \leq k \leq n$ dat

$$f_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq k < n \\ \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} & \text{als } k \geq n \end{cases}$$

Laten we ook hier even controleren dat dit een kansdichtheidsfunctie door alle kansen op te tellen en te kijken of ze sommeren op 1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} = p^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n} \\ &\overset{(\clubsuit)}{=} p^n \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{-n}{l} q^l \\ &\overset{(\spadesuit)}{=} p^n (1-q)^{-n} = p^n p^{-n} = 1. \end{aligned}$$

Hier is de gelijkheid (♣) de hieronder vermelde eigenschap 5.31 en de substitutie $l = k - n$, en is in de gelijkheid (♠) de formule voor de binomiale reeks (eigenschap 4.27) gebruikt.

EIGENSCHAP 5.31 *Voor natuurlijke getallen $k \geq n$ geldt*

$$\binom{k-1}{n-1} = (-1)^{k-n}\binom{-n}{k-n}$$

Bewijs.

$$\binom{k-1}{n-1} = \binom{(n-1)+(k-n)}{n-1} \overset{\text{Eig. 4.16}}{=} \binom{(n-1)+(k-n)}{k-n} \overset{\text{Eig 4.22}}{=} (-1)^{k-n}\binom{-n}{k-n}$$

■

De Poisson-verdeling

Laten we eens kijken naar de volgende twee voorbeelden:

(a) $X_1 \sim$ het aantal klanten die in een juwelierswinkel in ons dorp binnenkomen tussen 10u en 11u, waarbij er gemiddeld 1 klant op zulk ogenblik in deze winkel komt.

(b) $X_2 \sim$ het aantal klanten die in de supermarkt in ons dorp binnenkomen tussen 10u en 11u, waarbij er gemiddeld 200 klanten op zulk ogenblik in deze supermarkt komt.

Dit zijn twee voorbeelden van een algemenere situatie: hoeveel keer doet *een bepaalde situatie* zich voor op een *welbepaalde tijdspanne*, waarbij er gemiddeld λ situaties voordoen op die welbepaalde tijdspanne.
In dat geval zullen we deze verdeling vaak een *Poissonverdeling* toekennen en we noteren dit met $X \sim P(\lambda)$. X kan dan elke gehele waarde tussen 0 en ∞ aannemen.
De dichtheidsfunctie van deze verdeling wordt gegeven door

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Dat dit een kansdichtheidsfunctie is kunnen we aantonen door k te sommeren over $\mathbb{N}$.

Zoals je zal zien in de cursus calculus, wordt de Taylorreeks van e^x gegeven door $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

In de bovenstaande voorbeelden zal dan $X_1 \sim P(1)$ en $X_2 \sim P(200)$.

Besluit:
Als $X \sim P(\lambda)$, dan geldt voor elke $0 \leq k \leq \infty$ dat

$$f_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Later in de cursus zullen we ook zien dat we de Poissonverdeling kunnen bekijken als een limietgeval van de binomiale verdeling.

NIEUWE VERDELINGEN MAKEN MET BESTAANDE VERDELINGEN

In sommige gevallen kunnen we aan de hand van bestaande verdelingen (zoals de uniform, binomiale, negatief binomiale en de Poissonverdeling, nieuwe verdelingen maken. Zoals in het volgende voorbeeld.

VOORBEELD 5.32 Noem

- $X \sim U(\{1,2,3,4,5,6\})$ het resultaat van een eerste dobbelsteenworp.
- $Y \sim U(\{1,2,3,4,5,6\})$ het resultaat van een tweede dobbelsteenworp.
- $Z = X + Y$, de som van de ogen van beide worpen.

Deze verdeling zijn we reeds tegengekomen in voorbeeld 5.26. Hier hadden we

$$\mathbb{P}(Z = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{als } 2 \le k \le 7 \\ \frac{13-k}{36} & \text{als } 7 \le k \le 12 \end{cases}$$

In het algemeen kunnen we de kansdichtheidsfunctie $\mathbb{P}(Z = k)$ voor een toevalsveranderlijke $Z = X + Y$ bepalen door wat we noemen het *convolutieproduct*. We krijgen immers

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(X + Y = k) \\ &= \sum_i \mathbb{P}(X = i \text{ en } Y = k - i) \end{aligned}$$

We sommeren over alle mogelijke waarden i. Uiteraard dien je enkel te sommeren over de waarden van i waarvoor $\mathbb{P}(X = i) > 0$ en $\mathbb{P}(Y = k - i) > 0$.

Indien X en Y bovendien onafhankelijke variabelen zijn (zoals in het voorbeeld van de dobbelstenen hierboven het geval is, dan kunnen we de formule nog herschrijven in

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_i \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i).$$

X en Y zijn onafhankelijke variabelen indien voor elke A en B geldt dat $\mathbb{P}(X \in A \text{ en } Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$, of equivalent hiermee dat voor alle waarden x en y geldt dat $\mathbb{P}(X = x \text{ en } Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$

VOORBEELD 5.33 Laat X en Y onafhankelijke variabelen zijn met $X \sim B_{n,p}$ en $Y =\sim B_{m,p}$, en laten we kijken naar $Z = X + Y$. We vinden dat $Z \sim B_{m+n,p}$.

Inderdaad,

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(k) = \mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_i \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} q^{m-(k-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} p^k q^{m+n-k} \\
&= \binom{m+n}{k} p^k q^{m+n-k}
\end{aligned}$$

Hier volgt de laatste gelijkheid uit eigenschap 4.23.

5.5 De verwachtingswaarde en de variantie

DEFINITIE 5.34 **Voor een discrete toevalsveranderlijke X definiëren we de verwachtingswaarde $\mathbb{E}[X]$ als**

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X=x). \tag{5.3}$$

waarbij we sommeren over alle mogelijke x die X kan aannemen.

We kunnen de verwachtingswaarde interpreteren als het verwachte gemiddelde waarde dat we zouden bekomen indien we het experiment vele malen na elkaar uitvoeren
Nu gaan we van de geziene kansverdelingen uit de vorige sectie de verwachtingswaarde bepalen. Hiervoor zijn enkele lemma's nuttig.

LEMMA 5.35

(a) Voor natuurlijke getallen i, n met $1 \le i \le n$ is

$$i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$$

(b) Voor natuurlijke getallen i, n met $2 \le i \le n$ is

$$i^2\binom{n}{i} = n(n-1)\binom{n-2}{i-2} + n\binom{n-1}{i-1}$$

Bewijs. (a) Explictiet uitrekenen door middel van faculteiten geeft:

$$\begin{aligned} i\binom{n}{i} &= i \cdot \frac{n!}{(n-i)!\,i!} \\ &= \frac{n!}{(n-i)!\,(i-1)!} \\ &= n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-i)!\,(i-1)!} \\ &= n \cdot \binom{n-1}{i-1} \end{aligned}$$

(b) Deze berekening wordt:

$$\begin{aligned} i^2\binom{n}{i} &\overset{(a)}{=} i\,n\binom{n-1}{i-1} \\ &= n(i-1)\binom{n-1}{i-1} + n\binom{n-1}{i-1} \\ &\overset{(a)}{=} n(n-1)\binom{n-2}{i-2} + n\binom{n-1}{i-1} \end{aligned}$$

waarbij in de laatste gelijkheid (a) gebruikt werd met $n-1$ in plaats van met n.

■

EIGENSCHAP 5.36 ***De verwachtingswaarde van een toevalsveranderlijke*** $X \sim U(\{x_1,\ldots,x_n\})$ ***wordt gegeven door het (rekenkundig) gemiddelde van de waarden*** $x_1,\ldots,x_n$***.***

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Bewijs. Vullen we de waarden van X in de formule (5.3) in, dan krijgen we

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$$

■

VOORBEELD 5.37 Indien X het aantal ogen is van een worp met een zeszijdige dobbelsteen, dan is $X \sim U(\{1,2,3,4,5,6\})$ en $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,5$. Indien Z het aantal ogen is van een worp met twee dobbelstenen, hadden we de verdeling

$$\mathbb{P}(Z = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{36} & \text{als } 2 \le k \le 7 \\ \frac{13-k}{36} & \text{als } 7 \le k \le 12 \end{cases}$$

De verwachtingswaarde wordt dan:

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{i=2}^{\infty} = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 7 \cdot \frac{6}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

Om te kijken naar we worp met twee (of meer) dobbelstenen kunnen we echter ook gebruik maken van het resultaat van een worp met één dobbelsteen, maar daar hebben we een extra stelling voor nodig.

STELLING 5.38 ***Als X en Y toevalsveranderlijken zijn, dan is***

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

en

$$\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &= \sum_z z\mathbb{P}(X+Y=z) \\
&= \sum_{x,z} z\mathbb{P}(X = x \text{ en } Y = z-x) \\
&\overset{y=z-x}{=} \sum_{x,y} (x+y)\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y)) \\
&= \sum_{x,y} x\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y)) + \sum_{x,y} y\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y)) \\
&= \sum_x x\sum_y \mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y)) + \sum_y y\sum_x \mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y)) \\
&\overset{\text{somregel}}{=} \sum_x x\mathbb{P}(X=x) + \sum_y y\mathbb{P}(Y=y) \\
&= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[aX] &= \sum_x ax\mathbb{P}(X=x) \\
&= a\sum_x x\mathbb{P}(X=x) = a\mathbb{E}[X]
\end{aligned}$$

■

We kunnen hier ook al meteen opmerken dat in het bewijs nergens gebruikt werd dat X en Y onafhankelijke variabelen zijn.

VOORBEELD 5.39 Indien we nu voorbeeld 5.37 terug oppikken kunnen we Z bekijken als de som van twee uniform verdeelde variabelen:
Stel $X, Y \sim U(\{1,2,3,4,5,6\})$ twee verschillende dobbelsteenworpen met $Z = X + Y$ de som van beide worpen, dan is

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 3,5 + 3,5 = 7$$

GEVOLG 5.40 *Als X en Y toevalsveranderlijken zijn, dan is*

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

Bewijs. Rechtstreeks toepassen van de vorige eigenschap. ■

EIGENSCHAP 5.41 ***De verwachtingswaarde van een toevalsveranderlijke** $X \sim B(n,p)$ **wordt gegeven door***

$$\mathbb{E}[X] = np.$$

Bewijs. Er zijn verschillende manieren om dit te bewijzen:

(a) (*een rechtstreeks bewijs*) We gaan rechtstreeks de formule voor verwachtingswaarde invullen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{n} i\,\mathbb{P}(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \\
&\overset{\text{Lemma 5.35a}}{=} \sum_{i=0}^{n} n \binom{n-1}{i-1} p^i q^{n-i} \\
&\overset{i=0 \text{ valt weg}}{=} n \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^i q^{n-i} \\
&\overset{k=i-1}{=} np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{i-1} q^{n-1-k} \\
&\overset{\text{Binomium}}{=} np(p+q)^{n-1} = np
\end{aligned}$$

(b) (*een bewijs via de Bernoulliverdeling*)

(c) (*een bewijs via een recursiebetrekking*)

■

Gooien we $n = 50$ keer met een eerlijk muntstuk en (de kans op kop os $p = \frac{1}{2}$), dan is

$$\mathbb{E}[X] = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25.$$

Je "verwacht" dus 25 keer kop te gooien.

EIGENSCHAP 5.42 ***De verwachtingswaarde van een toevalsveranderlijke** $X \sim NB(n,p)$ **wordt gegeven door***

$$\mathbb{E}[X] = \frac{n}{p}$$

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} k\binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} \\
&\overset{\text{Lemma 5.35a}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} n\binom{k}{n} p^n q^{k-n} \\
&= np^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} q^{k-n} \\
&\overset{(\heartsuit)}{=} np^n \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-n}\binom{-(n+1)}{k-n} q^{k-n} \\
&\overset{l=k-n}{=} np^n \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-(n+1)}{l} (-q)^l \\
&\overset{\text{Bin. reeks}}{=} np(1-q)^{-(n+1)} = np^n(p)^{-(n+1)} = \frac{n}{p}
\end{aligned}
$$

waarbij gelijkheid ($\heartsuit$) volgt uit de gelijkheid

$$
\binom{k}{n} = \binom{k}{k-n} = \binom{(n+1)+(k-n)-1}{k-n} \overset{\text{Eig. 4.22}}{=} (-1)^{k-n}\binom{-(n+1)}{k-n}
$$

■

EIGENSCHAP 5.43 ***De verwachtingswaarde van een toevalsveranderlijke*** $X \sim P(\lambda)$ ***wordt gegeven door***

$$\mathbb{E}[X] = \lambda$$

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i\,\mathbb{P}(X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i\,\frac{\lambda^{i-1}}{i!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&\overset{k=i-1}{=} \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}
$$

waarbij we opnieuw gebruik maken van de Taylorreeks van e^x. ■

Om niet alleen een idee te hebben over de gemiddelde waarde van een experiment, maar ook over de te verwachten afwijking van het gemiddelde gaan we een tweede begrip invoeren.
Op een idee te krijgen van de gemiddelde afwijking zouden we kunnen kijken naar

$$\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]],$$

letterlijk de te verwachte afwijking van het gemiddelde. Helaas is dit niet goed, want de positieve en de negatieve afwijkingen zullen elkaar opheffen. Dit wordt steeds 0, en daar zijn we niets mee.
Om dit op te lossen zouden we kunnen kijken naar

$$\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|],$$

de gemiddelde absolute waarde van de afwijking. Dit is inderdaad wat we zoeken. Helaas echter is rekenen met de absolute waarden (of hier met de som van absolute waarden) zeer moeilijk. Daarom voeren we het volgende begrip in:

DEFINITIE 5.44 **Voor een discrete randomvariabele** X **definiëren we de** ***variantie*** **van** X**, kortweg** $\mathrm{Var}(X)$ **door**

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_x (x - \mathbb{E}[X])^2 \cdot \mathbb{P}(X = x).$$

waarbij we sommeren over alle mogelijke x **die** X **kan aannemen. De** ***standaardafwijking*** **van** X**, meestal genoteerd via** $\sigma(X)$ **of** σ_X **wordt gedefinieerd door**

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

We kunnen met m.a.w. zeggen dat $\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$**.**

De standaardafwijking $\sigma(X)$ zal ons een goed idee geven over de spreiding van X.
Vaak is het makkelijker om de variantie anders te berekenen. We kunnen de formule van hierboven immers als volgt aanpassen.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_x (x - \mathbb{E}[X])^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_x \left(x^2 - 2x\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2\right) \cdot \mathbb{P}(X = x) \\
&= \underbrace{\sum_x x^2 \cdot \mathbb{P}(X = x)}_{\mathbb{E}[X^2]} - 2\mathbb{E}[X] \underbrace{\sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x)}_{\mathbb{E}[X]} + \mathbb{E}[X]^2 \underbrace{\sum_x \mathbb{P}(X = x)}_{1} \\
&= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2
\end{aligned}$$

EIGENSCHAP 5.45

Voor een toevalsveranderlijke X geldt dat

$$\mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$$

en dus $\sigma(aX) = a\sigma(X)$.

Bewijs.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(aX) &= \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2 \\ &= \mathbb{E}[a^2X^2] - a^2\mathbb{E}[X]^2 \\ &= a^2\mathbb{E}[X^2] - a^2\mathbb{E}[X]^2 \\ &= a^2\left(\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\right) = a^2\,\mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

■

Net als voor de verwachtingswaarde willen we voor de gekende discrete verdelingen formules bepalen voor de variantie.
Voor de uniforme verdeling is dit alvast moeilijk aangezien die heel erg afhankelijk is van de verzameling $\{x_1,\dots,x_n\}$ waarop deze is gedefinieerd. In het geval dat $\{x_1,\dots,x_n\} = \{1,2,3,\dots,n\}$ (zoals bij een dobbelsteen) lukt dit wel aardig.

EIGENSCHAP 5.46 ***Voor een toevalsveranderlijke $X \sim U(\{1,2,3,\dots,n\}$ is***

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Bewijs. We vertrekken van de definitie van variantie.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \mathbb{P}(X=k) - \left(\sum_{k=1}^{n} k \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X=k)}_{\frac{1}{n}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^2}\,\frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= (n+1)\left(\frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4}\right) \\ &= (n+1)\frac{n-1}{12} = \frac{n^2-1}{12}\end{aligned}$$

herinner:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

■

EIGENSCHAP 5.47 ***Voor een toevalsveranderlijke $X \sim B(n,p)$ is***

$$\mathrm{Var}(X) = npq$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \mathbb{P}(X=k) - (np)^2 && \mathbb{E}[X] = np \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - (np)^2 \\
&= \binom{n}{1} pq^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - (np)^2 \\
&= \binom{n}{1} pq^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} - (np)^2 && \text{Lemma 5.35b} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} - (np)^2 && \binom{n}{1} = n = n\binom{n-1}{0} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} p^l q^{n-2-l} + np\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-1-j} - (np)^2 && l = k-2,\ j = k-1. \\
&= n(n-1)p^2 (\underbrace{p+q}_{1})^{n-2} + np(\underbrace{p+q}_{1})^{n+1} - (np)^2 && \text{Binomium} \\
&= n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq
\end{aligned}$$

■

Opnieuw een zeer technische berekening. Gelukkig kan dit ook hier korter bepaald worden, maar dan via hulp van de volgende stelling:

STELLING 5.48 ***Indien X en Y* onafhankelijke *toevalsveranderlijken zijn, dan is***

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]^2 \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2(\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y])
\end{aligned}$$

Het volstaat dus aan te tonen dat $\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$ of anders gezegd, dat $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
X en Y zijn onafhankelijke variabelen, dus er geldt per definitie

$$\mathbb{P}(X = x \text{ en } Y = y) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

Zodoende krijgen we

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{x,y} xy\mathbb{P}(X = x \text{ en } Y = y) \\
&= \sum_{x,y} xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \\
&= \sum_{x} x\mathbb{P}(X = x)\sum_{y} y\mathbb{P}(Y = y) \\
&= \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

■

OPMERKING 5.49 (a) Merk op dat we nu wel effectief nodig hadden dat de variabele onafhankelijk zijn!

(b) Er geldt echter niet dat $\sigma(X+Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$!

(c) De stelling kan ook makkelijk veralgemeend worden naar een groter (eindig) aantal onafhankelijke variabelen $X_1, \ldots, X_n$,

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

of zelfs voor een aftelbaar oneindige verzameling van onafhankelijke toevalsveranderlijken $X_1, \ldots, X_n, \ldots$,

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_i)$$

Hierdoor kunnen we een tweede, kort bewijs van eigenschap 5.47 geven. Als $X \sim B(n,p)$, dan kunnen we X schrijven als

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

met $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijke Bernoullivariabelen (dus verdeeld volgens $B(1,p)$). Nu berekenen we eerst gauw de variantie van X_i:

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \left(\sum_{k=0}^{1} k^2\mathbb{P}(X_i = k)\right) - p^2 = 0^2q + 1^2p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Bijgevolg is

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

EIGENSCHAP 5.50 ***Voor een toevalsveranderlijke*** $X \sim NB(n,p)$ ***is***

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{nq}{p^2},$$

zodat de standaardafwijking $\sigma(X) = \sqrt{nq}/p$.

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} k^2 \cdot \mathbb{P}(X=k) - \left(\frac{n}{p}\right)^2 && \mathbb{E}[X] = \frac{n}{p} \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} k^2 \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} - \frac{n^2}{p^2} \\
&\overset{(\clubsuit)}{=} \sum_{k=n}^{\infty} (n+1)n \binom{k+1}{n+1} p^n q^{k-n} - \sum_{k=n}^{\infty} n \binom{k}{n} p^n q^{k-n} - \frac{n^2}{p^2} \\
&= (n+1)np^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k+1}{n+1} q^{k-n} - \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} k \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}}_{\mathbb{E}[X]=\frac{n}{p}} - \frac{n^2}{p^2} && \text{Lemma 5.35b} \\
&= (n+1)np^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k+1}{n+1} q^{k-n} - \frac{n}{p} - \frac{n^2}{p^2} \\
&\overset{(\diamondsuit)}{=} (n+1)np^n \sum_{k=n}^{\infty} \binom{-(n+2)}{k-n} (-q)^{k-n} - \frac{n}{p} - \frac{n^2}{p^2} \\
&= (n+1)np^n \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-(n+2)}{l} (-q)^{l} - \frac{n}{p} - \frac{n^2}{p^2} && l = k-n \\
&= (n+1)np^n \underbrace{(1-q)}_{p}{}^{-(n+2)} - \frac{n}{p} - \frac{n^2}{p^2} && \text{Binomiale reeks} \\
&= (n^2+n)p^{-2} - \frac{n}{p} - \frac{n^2}{p^2} \\
&= \frac{n^2}{p^2} + \frac{n}{p^2} - \frac{n}{p} - \frac{n^2}{p^2} = \frac{n(1-p)}{p^2} = \frac{nq}{p^2}
\end{aligned}
$$

Hierbij werd gelijkheid ($\clubsuit$) bekomen uit een variant van lemma 5.35b:

$$
k^2 \binom{k-1}{n-1} \overset{5.35a}{=} kn \binom{k}{n} = (k+1)n \binom{k}{n} - n \binom{k}{n} \overset{5.35a}{=} (n+1)n \binom{k+1}{n+1} - n \binom{k}{n}.
$$

Gelijkheid ($\diamondsuit$) is dan weer bekomen uit

$$
\binom{k+1}{n+1} \overset{4.16}{=} \binom{k+1}{k-n} = \binom{(n+2)+(k-n)-1}{k-n} \overset{4.22}{=} (-1)^{k-n} \binom{-(n+2)}{k-n}
$$

■

EIGENSCHAP 5.51 ***Voor een toevalsveranderlijke $X \sim P(\lambda)$ is***

$$
\mathrm{Var}(X) = \lambda,
$$

zodat de standaardafwijking $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \mathbb{P}(X=k) - \lambda^2 && \mathbb{E}[X] = \lambda \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 \\
&= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \right) - \lambda^2 \\
&= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda^2 \\
&= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda^2 \\
&= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right) - \lambda^2 && i = k-2,\ j = k-1 \\
&= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} \right) - \lambda^2 && e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \left(\lambda^2 + \lambda \right) - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}
$$

■

De wet van de grote getallen

STELLING 5.52 *(Chebyshev ongelijkheid)*

Voor een gegeven stochstische variable X met standaardafwijking σ_X, $\alpha > 0$.

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > \alpha\sigma_X) < \frac{1}{\alpha^2}$$

of equivalent

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \leq \alpha\sigma_X) > 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Bewijs. Noem $Y := [X - \mathbb{E}[X]]^2$. Dan is $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[[X - \mathbb{E}[X]]^2] = \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2$. Noem A de gebeurtenis dat $|X - \mathbb{E}[X]| > \alpha\sigma_X$. Als $\mathbb{P}(A) = 0$, dan is vanzelf aan de stelling voldaan, we kunnen dus veronderstellen dat $\mathbb{P}(A) > 0$. We vinden dan

a zijn de atomaire gebeurtenissen

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 = \mathbb{E}[Y] &= \sum_{a\in\Omega} Y(a)\mathbb{P}(a) \\ &= \underbrace{\sum_{a\in A} Y(a)\mathbb{P}(a)}_{C} + \underbrace{\sum_{a\notin A} Y(a)\mathbb{P}(a)}_{D}\end{aligned}$$

Uitwerken van C en D levert dan:

in C: $Y(a) > (\alpha\sigma_X)^2 = \alpha^2\sigma_X^2$ (uit de definitie van A), dus

$$C > \alpha^2\sigma_X^2 \sum_{a\in A} \mathbb{P}(a) = \alpha^2\sigma_X^2\mathbb{P}(A).$$

in D: $Y(a) \geq 0$ (want Y is gedefinieerd als een kwadraat) en $\mathbb{P}(a) \geq 0$ (want het is een kans), dus

$$D \geq 0.$$

Vervangen we nu C en D in de vorige gelijkheid, dan krijgen we

$$\sigma_X^2 > \alpha^2\sigma_X^2\mathbb{P}(A) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A) < \frac{1}{\alpha^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > \alpha\sigma_X) < \frac{1}{\alpha^2}$$

(Merk op dat we hier mochten delen door σ_X. Immers, aangezien $\mathbb{P}(A) > 0$ is $|X - \mathbb{E}[X]| > \alpha\sigma_X \geq 0$ voor zeker $a \in A$ en dus is $\sigma_X = \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|] > 0$.) ■

Hoewel de ongelijkheid van Chebychev een zeer zwakke ongelijkheid is, is ze wel zeer handig om enkele theoretische resultaten aan te tonen. Zo is de volgende eigenschap een rechtstreekse toepassing van Chebychev.

STELLING 5.53 *(De wet van de grote getallen voor Bernoulli experimenten)*

n Bernoulli experimenten worden na elkaar uitgevoerd, allen onafhankelijk van elkaar en met vaste kans op succes p. We noteren $\overline{p}$ voor het waargenomen aandeel van de successen (= #successen/#pogingen). Dan zal voor elke $\epsilon, \delta > 0$ (eventueel zeer klein), als n maar groot genoeg is, gelden dat

$$\mathbb{P}(|p - \overline{p}| \leq \epsilon) > 1 - \delta.$$

Bewijs. Noem $Y = \overline{p}$ (en dus is $Y = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} X_i)$, met $X_i \sim B(1,p)$), dan is $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = p$ en dus $|Y - \mathbb{E}[Y]| = |\overline{p} - p| = |p - \overline{p}|$

Uit de ongelijkheid van Chebychev volgt dan:

$$\mathbb{P}(|p - \overline{p}| \leq \alpha\sigma_Y) > 1 - \frac{1}{\alpha^2} \tag{5.4}$$

We hebben bovendien dat

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)\right) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$$

Dit levert:

$$\sigma_Y = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \leq \sqrt{\frac{1}{4n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \tag{5.5}$$

waarbij de ongelijkheid volgt uit het feit dat $pq = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$. Stel nu dat ϵ en δ gegeven zijn.

$$\Longrightarrow \text{ kies } \alpha \text{ zodat } \frac{1}{\alpha^2} \leq \delta$$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{1}{\alpha^2} \geq 1 - \delta \tag{5.6}$$

$$\Longrightarrow \text{ kies } n \text{ zodat } \alpha\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \epsilon \overset{(5.5)}{\Longrightarrow} \alpha\sigma_Y \leq \epsilon \tag{5.7}$$

$$(\text{kies } n \text{ zodat } n \geq \frac{\alpha^2}{4\epsilon^2})$$

Dan vinden we

$$\mathbb{P}(|p - \overline{p}| \leq \epsilon) \overset{(5.7)}{\geq} \mathbb{P}(|p - \overline{p}| \leq \alpha\sigma_Y) \overset{(5.4)}{>} 1 - \frac{1}{\alpha^2} \overset{(5.6)}{\geq} 1 - \delta.$$

■

Deze eigenschap zegt dus dat als je maar lang genoeg experimenten blijft uitvoeren, je de kans dat het waargenomen gemiddelde slechts weinig (lees ϵ) van kanstheoretisch gemiddelde verschil, zo hoog kan liggen als je wil.

De wet van de grote getallen bestaat ook voor niet-Bernoulli-verdelingen.

5.6 Continue toevalsveranderlijken

Discrete versus continue verdelingen

De toevalsveranderlijken die we tot hiertoe zagen waren allemaal discreet en voldeden aan de volgende eigenschappen:

- Het zijn reëelwaardige functies $X : \Omega \to \mathbb{R}$ die slechts op een eindig aantal of een aftelbaar aantal waarden k een strikt positieve kans hebben. (Of formeler: In elk begrend interval $[a,b]$ zijn er slechts een eindig aantal waarden waar X een strikt positieve kans op heeft.)
- $\sum_k \mathbb{P}(x = k) = 1$
- $\mathbb{E}[X] = \sum_k k\mathbb{P}(x = k)$
- $\mathrm{Var}[X] = \sum_k k^2\mathbb{P}(x = k) - \mathbb{E}[X]^2$

Dit komt niet altijd overeen met de realiteit. Indien we bijvoorbeeld kijken naar de lengte van de volwassen Vlaamse man (in cm), dan kan deze variëren tussen pakweg 60 en 250 cm, maar *elke* waarde in het interval is mogelijk. Maar anderzijds, de kans dat een persoon *precies* gelijk is aan een welbepaalde waarde is 0, omdat je gewoon extra veel cijfers na de komma kan gaan kijken op zoek naar een afwijking van deze waarde. Daarom gaan we nu kijken naar continue toevalsveranderlijken.

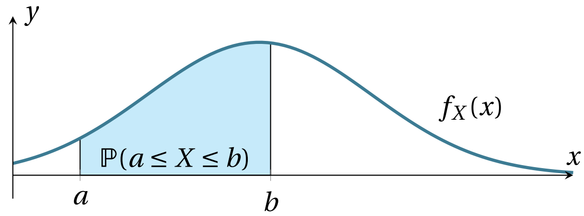
DEFINITIE 5.54 **We noemen een reëelwaardige functie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een *continue toevalsveranderlijke* als X alle waarden kan aannemen in een zeker interval.**

Uiteraard zouden we continue toevalsverandelijken kunnen omzetten naar discrete toevalsveranderlijken door waarden af te ronden. Zo zouden we de lengte van de Vlaamse man kunnen afronden "op de cm", zodat er nu slechts een eindig aantal mogelijkheden zijn en zodoende kunnen we de toevalsveranderlijke als een discrete bekijken.
De kansmaat op een continue toevalsveranderlijke X zal aan elke $x \in \mathbb{R}$ kans 0 toekennen:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = x) = 0.$$

Kansen zullen we immers berekenen op intervallen:

DEFINITIE 5.55 **We noemen een functie $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de *kansdichtheidsfunctie* van X als voor elke $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$ geldt dat $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ overeenkomt met de oppervlakte tussen de grafiek van f_X, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.**



Hierdoor is $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$. Omdat de totale kans 1 moet zijn, moet voor elke stochastische variabele X gelden dat de totale oppervlakte onder de grafiek gelijk is aan 1. Een voorwaarde opdat f een kansdichtheidsfunctie is, is dus dat

$$\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$

We noteren, net als bij discrete toevalsveranderlijken: $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ voor de *verdelingsfunctie* van X, maar bij een continue X wordt dit niet meer berekend met een som, maar met een integraal:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] : x \longmapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

De verdelingsfunctie blijkt bijzonder nuttig voor het berekenen van kansen bij continue stochastische variabelen:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a).$$

Analoog berekenen we

$$\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - F_X(a).$$

Met andere woorden, indien we de verdelingsfunctie kennen, kunnen we ook alle kansen op de intervallen bepalen.

verwachtingswaarde en variantie

Net zoals bij de discrete verdelingen kunnen we ook hier verwachtingswaarden, variantie en standaardafwijking bepalen. We moeten enkel, in plaats van te sommeren over de k's met strikt positieve kans, de integraal nemen over heel $\mathbb{R}$. Zo krijgen we

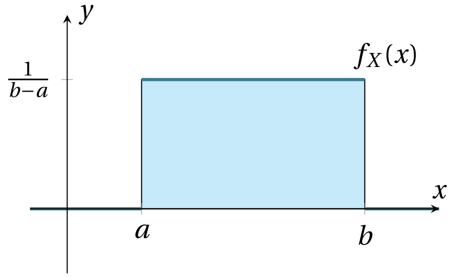
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx \\
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
\sigma(X) &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)}
\end{aligned}$$

De continue uniforme verdeling

We noemen X uniform verdeeld op het interval $[a,b]$ als f_X gegeven wordt door

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \longmapsto \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{als } x \in [a,b] \\ 0 & \text{als } x \notin [a,b] \end{cases}$$

We noteren $X \sim U([a,b])$. Deze kansdichtheidsfunctie ziet er dan uit zoals op de volgende figuur.



Indien we hiervan de verwachtingswaarde en de variantie berekenen krijgen we:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Dit is het midden van het interval. Analoog bepalen we de variantie:

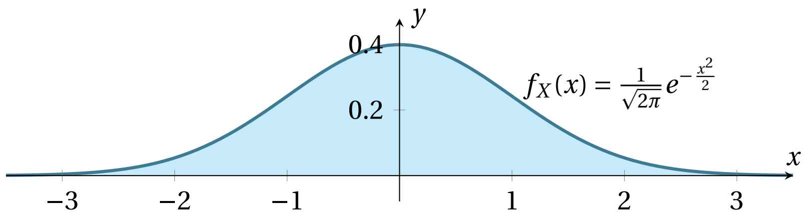
$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\ &= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} \\ \sigma(x) &= \frac{|b-a|}{\sqrt{12}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \end{aligned}$$

De standaardnormale verdeling

De standaardnormale verdeling is een verdeling.met gemiddelde 0, standaardafwijking 1 en is symmetrisch ten opzichte van de y-as. f_X heeft als voorschrift

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : X \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

en heeft een grafiek, waarvan we de vorm de *klokcurve van Gauss* noemen. We noteren dan $X \sim N(0, 1)$.



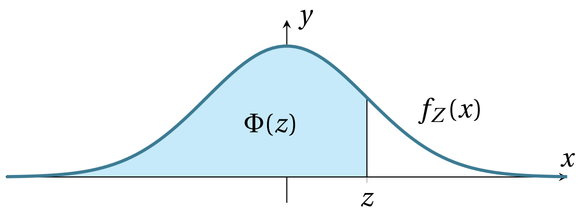
De factor $e^{-\frac{x^2}{2}}$ zorgt voor de vorm van de klokcurve, terwijl de factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ nodig is om ervoor te zorgen dat de totale oppervlakte onder de grafiek precies waarde 1 heeft (zonder bewijs[2]).

We kunnen verder ook opmerken dat de functie $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ geen primitieve functie heeft die we kunnen schrijven door gebruik te maken van gekende functies. We moeten dus gebruik maken van een tabel of een rekentoestel die de verdelingsfunctie kan berekenen.

Voor een variabele $Z \sim N(0, 1)$ noteren

$$\Phi(z) = F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$$

voor de verdelingsfunctie en dus voor de oppervlakte



Uiteraard zouden we hier even goed over een variabele X kunnen spreken, maar een variabele die een standaardnormale verdeling volgt noteren we van met Z. Als we het even verder over de normale verdeling hebben zullen we gebruik maken van de standaardnormale verdeling voor het berekenen van de kansen. De verdelingsfunctie van een standaardnormale verdeling noemen we de Z-score.

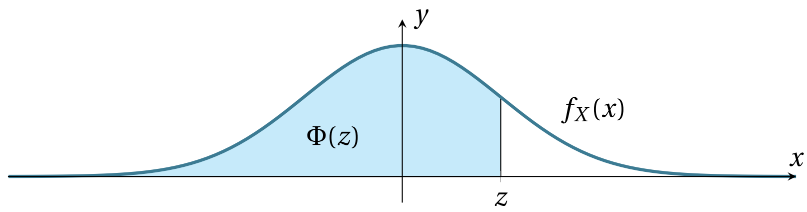
Het bepalen van de kans aan de hand van de Z-score

Hoewel we tegenwoordig met rekentoestellen en computer snel deze kansen kunnen berekenen, zullen we hier (en op het examen gebruik maken van tabel 5.6. Deze geeft alle waarden van $\Phi(z)$ weer voor alle $z \geq 0$, (de z afgerond op 2 decimalen na de komma, de $\Phi(z)$ afgerond op 4 decimalen na de komma).

Hoe bepalen we nu de Z-score?

$\boxed{z \geq 0}$ Gewoon aflezen uit tabel 5.6.

[2]Een mogelijk bewijs hiervoor gebruikt dubbelintegralen, maar dat gaan ons hier te ver leiden.



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

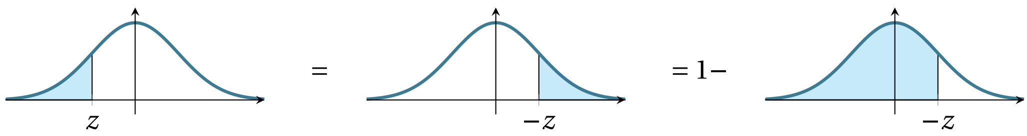
Tabel 5.1: Tabel die gebruikt kan worden om de verdelingsfunctie Φ van de standaardnormale verdeling $N(0,1)$ te bepalen voor $0 \le z$.

$\boxed{z<0}$ We herschrijven de kans:

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) &\overset{\text{symm.}}{=} \mathbb{P}(Z \geq -z)\\ &\overset{\text{compl.}}{=} 1 - \mathbb{P}(Z < -z)\\ &= 1 - \Phi(-z)\end{aligned}$$

Hierbij is $-z \geq 0$ en dit kunnen we dus uit tabel 5.6 aflezen.

Grafisch:



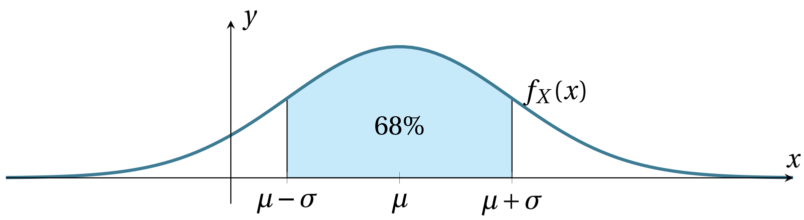
De normale verdeling

In de praktijk zijn variabelen zelden standaardnormaal verdeeld, maar de vorm van f_X als klokcurve is wel erg veel voorkomend. We moeten er enkel voor zorgen dat voor een gegeven gemiddelde μ en een gegeven standaardafwijking σ de klokcurve aangepast wordt.

VOORBEELD 5.56 Op basis van een steekproef heeft men bepaald dat de lengte van volwassen Vlaamse mannen gemiddeld $\mu = 182$ cm zijn, met een standaardafwijking van $\sigma = 7$ cm.

Tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$, willen we net als bij de standaardnormale verdeling hebben dat er ongeveer 68% van de totale oppervlakte zit. De klokcurve dient als het ware opgeschoven worden met μ en horizontaal uitgerekt worden met een factor σ. Omdat we bovendien ook willen dat de totale oppervlakte onder de kromme gegeven wordt door 1, moeten we ook verticaal terug samendrukken met een factor σ. Zo ontstaan een nieuwe verdelingsfunctie:

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}}$$



We noteren $X \sim N(\mu, \sigma)$ en dus ook voor deze functie geldt dat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}} \, dx = 1$$

Dit volgt onmiddellijk uit de substitutie $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, waardoor we terug de integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$ van de standaardnormale verdeling krijgen en dit was gelijk aan 1.
We kunnen dus opmerken dat als

$$X \sim N(\mu, \sigma) \quad \Longrightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

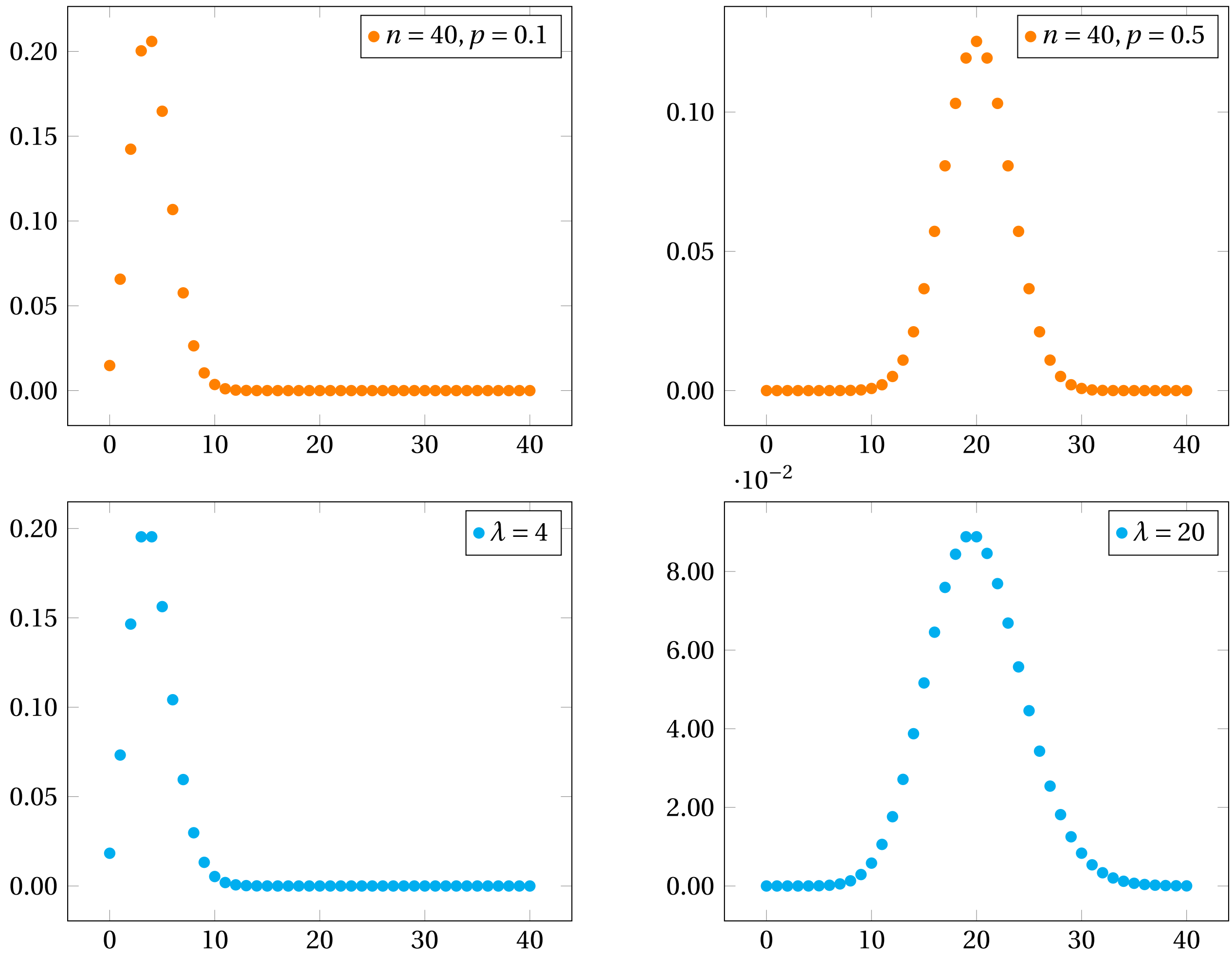
Afhankelijk van de μ en de σ krijgen we dus verschillende klokcurven: Hoe groter de σ, hoe platter en breder de grafiek.
We kijken terug naar het voorbeeld. De lengte van Vlaamse mannen (in cm) wordt gegeven door een toevalsveranderlijke $X \sim N(180, 7)$. Veronderstel dat we willen weten wat de kans is dat een Vlaamse man een lengte heeft tussen 170 cm en 200 cm. Dit doen we dan als volgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(170 \le X \le 200) &= \mathbb{P}\left(\frac{170-180}{7} \le \frac{X-180}{7} \le \frac{200-180}{7}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{10}{7} \le Z \le \frac{20}{7}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{20}{7}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{7}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{20}{7}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{10}{7}\right)\right) \\
&= \Phi(2.86) + \Phi(1.43) - 1 \\
&= 0.9979 + 0.9236 - 1 = 0.9215
\end{aligned}$$

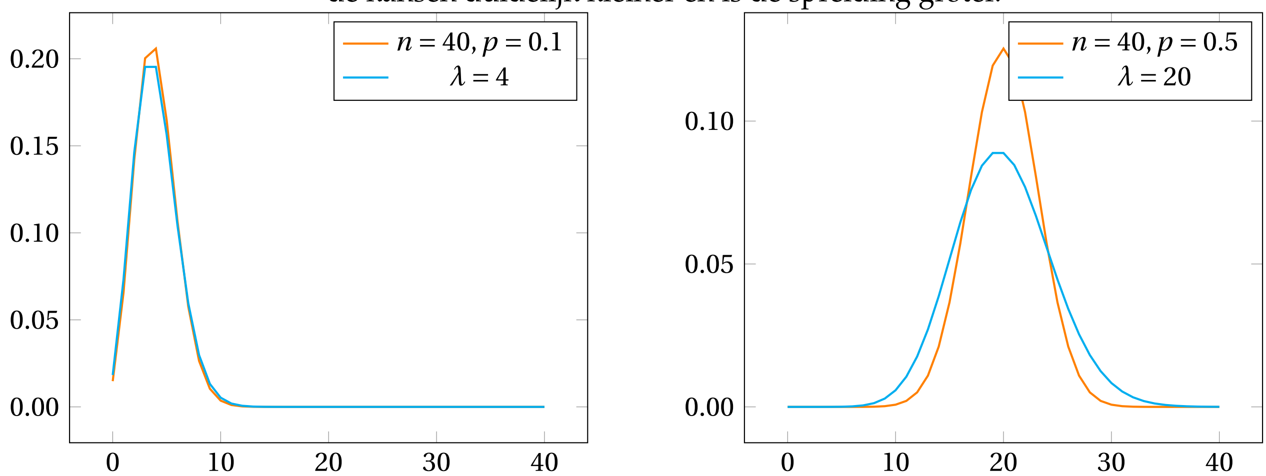
5.7 Het benaderen van de binomiale verdeling

Binomiaal benaderen door Poisson.

Indien we veronderstellen dat $X \sim B(n, p)$ met n groot en p klein, dan kunnen we de Poissonverdeling gebruiken om een binomiale verdeling te benaderen. Om een goede benadering te krijgen moeten we wel λ zo kiezen dat de verwachtingswaarde $\mathbb{E}[X]$ nog steeds hetzelfde blijft. Daarom kiezen we best $\lambda = np$. We zien hieronder de staafdiagrammen van de binomiale verdelingen ($n = 40, p = 0.2$ en $n = 40, p = 0.5$).



Indien we de plots op elkaar plaatsen zien we een groot onderscheid. We merken dat de binomiale verdeling goed benaderd wordt door de Poissonverdeling indien p klein is, maar slechter benaderd wordt indien p groot is. Bij $p = 0.1$ zien we dat de waardes van de kansen zeer gelijklopend zijn, en ook de spreiding valt bijna samen. Bij $p = 0.5$ zijn de kansen duidelijk kleiner en is de spreiding groter.



Het al dan niet grotere verschil in spreiding kunnen we duidelijk merken door in beide gevallen de standaardafwijking te berekenen.

	$B(n,p)$ $\sigma(X)=\sqrt{npq}$	$P(np)$ $\sigma(X)=\sqrt{np}$
$n=40, p=0.1$	1.89	2.00
$n=40, p=0.5$	3.16	4.47

Indien p groter wordt, wordt q kleiner en daardoor zal de afwijking op de variantie npq groter zijn (en dus ook de afwijking op de variantie.) Waarom is de Poissonverdeling een goede benadering in dit geval? Dit volgt uit de volgende eigenschap:

EIGENSCHAP 5.57 ***Voor een vaste k en $\lambda = np$ vast, geldt dat***

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ \lambda=np\ \textit{const.}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^k\left(1-\frac{\lambda}{k}\right)^n}{n^k\left(1-\frac{\lambda}{k}\right)^k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\frac{n!}{n^k(n-k)!}}_{A}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{k}\right)^n}_{B}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{k}\right)^{-k}}_{C}
\end{aligned}$$

we vinden achtereenvolgens dat voor een vaste k:

We gebruiken hier limiet uit de analyse: $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \quad n \quad \cdots \quad n} \\
&= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1 \\
B &= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \left(1+\frac{(-\lambda)}{n}\right)^n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad e^{-\lambda} \\
C &= \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 1^{-k} = 1
\end{aligned}$$

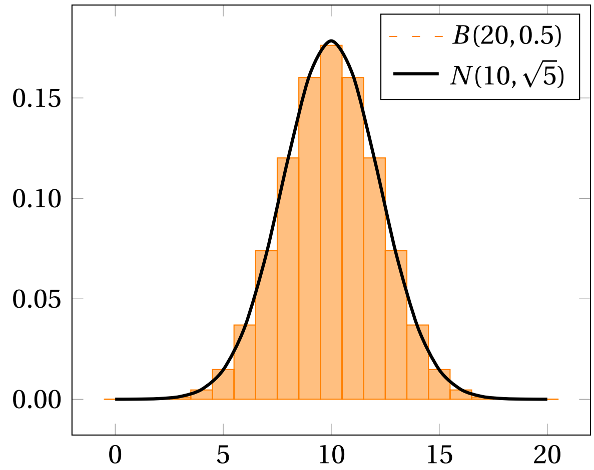
Hieruit vinden we dus dat

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda=np\ \text{const.}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

■

Binomiaal benaderen door normaal

Wanneer we van een binomiaalverdeelde variabele het gemiddelde np en de standaardafwijking $\sqrt{npq}$ hebben bepaald en we gebruiken deze om een normale verdeling te bepalen ($\mu = np$ en $\sigma = \sqrt{npq}$), dan blijken de kansdichtheidsfuncties goed te matchen, zoals je kan zie op de volgende figuur.



In deze figuur hebben de staafjes van het staafdiagram een dikte gekregen. Het staafje van de waarde k wordt begrensd door de verticale rechten $x = k - \frac{1}{2}$ en $x = k + \frac{1}{2}$. Zo heeft elk staafje breedte 1 en komt de oppervlakte van staafje k overeen met de kans op $\mathbb{P}(X = k)$. Op bovenstaande figuur is dus zowel de oppervlakte van de staafjes als de oppervlakte onder de kromme gelijk aan 1.

STELLING 5.58 ***(Centrale limietstelling)***
Indien $X_1, X_2, \ldots$ een rij van onafhankelijke en gelijkverdeelde toevalsveranderlijken zijn met verwachtingswaarde μ en standaardafwijking σ, dan geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(z),$$

met Φ de verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling.

Bewijs. Het bewijs van deze stelling is lastig valt buiten de scope van deze cursus. ■

Wat betekent deze stelling? Indien de X_i's Bernoulli-variabelen zijn ($\mu = p, \sigma = \sqrt{pq}$), dan geldt dat met $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ dat

- $X \sim B(n, p)$

- $\mathbb{E}[X] = np = n\mu$
- $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{pq}\sqrt{n} = \sigma\sqrt{n}$

We merken dus voor grote n de binomiale kans kan bepaald worden door het gemiddelde $\mathbb{E}[X]$ ervan af te trekken en te delen door σ_X, en de Z-scores te berekenen. Dat is precies wat er gebeurd als je de kans wil uitrekenen bij een normaalverdeelde variabele $X' \sim N(\mathbb{E}[X], \sigma_X)$. Deze stelling bevestigd dus de bovenstaande waarneming dat je een binomiaalverdeelde variabele mag benaderen door een normaalverdeelde variabele met dezelfde verwachtingswaarde en dezelfde standaardafwijking.

De continuïteitscorrectie

Bij het gebruik van de normale verdeling bij benadering van de binomiale verdeling, moeten we wel alert zijn. We gaan immers een continue verdeling gebruiken om een discrete verdeling te benaderen.

VOORBEELD 5.59 Een eerlijke dobbelsteen word 600 keer opgeworpen. Wat is de kans dat je tussen 90 en 110 keer 6 gooit (90 en 110 inclusief).
De gevraagde kans is $\mathbb{P}(90 \leq X \leq 110)$, waarbij $X \sim B(600, \frac{1}{6})$. We gaan X benaderen door X' met $X' \sim N(100, \sqrt{500/6}) = N(100, 9.129)$. De kans die we zoeken wordt dan weergegeven door $\mathbb{P}(90 \leq X' \leq 110)$. Echter, omdat we met een discrete variabele werken, kunnen we beter de volgende kans berekenen. $\mathbb{P}(89.5 \leq X' \leq 110.5)$. De berekening is dan

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(89.5 \leq X' \leq 110.5) &= \mathbb{P}\left(\frac{89.5-100}{9.129} \leq \frac{X'-100}{9.129} \leq \frac{110.5-100}{9.129}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-1.15 \leq Z \leq 1.15\right) \qquad \text{met } Z \sim N(0,1) \\
&= \Phi(1.15) - \Phi(-1.15) \\
&= \Phi(1.15) - (1 - \Phi(1.15) \\
&= 2\Phi(1.15) - 1 \\
&= 2 \cdot 0.8749 - 1 = 0.7498
\end{aligned}$$

Ter vergelijking: we hebben:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(90 \leq X \leq 110) &= \sum_{k=90}^{110} \binom{600}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{600-k} = 0.7501 \\
\mathbb{P}(90 \leq X' \leq 110) &= 2 \cdot 0.8632 - 1 = 0.7264 \\
\mathbb{P}(89.5 \leq X' \leq 110.5) &= 2 \cdot 0.8749 - 1 = 0.7498
\end{aligned}$$

We merken dat onze benadering er slechts 3 tienduizendsten naast zit, terwijl, indien we geen gebruik maakten van de continuïteitscorrectie, we er meer dan 2 honderdsten naast zaten.

5.8 Oefeningen

Elementaire kansrekening

5.1. In een roulette is een wiel met 38 nummers opgezet. 18 zijn er rood, 18 zijn er zwart, en de 0 en de 00 zijn geen van beide. De kans dat het rouletteballetje in één bepaald genummerd vakje valt is dus 1/38.

(a) Wat is de kans dat je een rood getal krijgt.
(b) Wat is de kans dat je twee keer op een rij een zwart getal krijgt.
(c) Wat is de kans dat je 0 of 00 krijgt.
(d) Wat is de kans dat je 5 keer op een rij geen 0 of 00 krijgt.
(e) Wat is de kans dat je een getal van 1 tot en met 6 krijgt, en de beurt erna precies niet 1 tot en met 6.

5.2. Wat is de kans dat de hand van een kaartspeler (m.a.w. 13 van 52 kaarten) bestaat uit

(a) alle 13 harten.
(b) 13 kaarten van dezelfde soort.
(c) 7 schoppen en 6 klaveren.
(d) 7 van 1 soort en 6 van een andere soort.
(e) 4 ruiten, 6 harten, 2 schoppen en 1 klaver.
(f) 4 van één soort, 6 van een tweede soort, 2 van een derde soort, 1 van een vierde soort.

5.3. Welke kans is het hoogste? De kans om met 2 dobbelstenen 9 te gooien of de kans om met 3 dobbelstenen 9 te gooien?

5.4. Bepaal de kans dat je de hoofdprijs van Euromillions wint indien je met 1 vakje meedoet. Bij Euromillions kies je willekeurig 5 getallen uit 50 en 2 sterren uit 12.

5.5. Bepaal de kans dat een pokerhand (vijf kaarten) een full house bevat (3 van een soort en 2 van een andere soort).

Voorwaardelijke kans

5.6. Een man heeft 3 kinderen. Als ik jullie vertel dat er zeker 1 jongen bij is, wat is dan de kans dat de andere 2 meisjes zijn? (Je mag aannemen dat de kans op een jongen gelijk is aan de kans op een meisje.)

5.7. Veronderstel dat 6 kaarten getrokken worden uit een deck van 52 kaarten. Wat is de kans dat de 6de kaart, de 3de klaveren is die je trekt?

5.8. Per miljoen euromuntstukken is eentje bij met twee keer kop op (alle andere hebben één keer kop en één keer munt). Iemand gooit 10 keer een eurostuk op en krijgt 10 keer kop. Gebaseerd op deze informatie, wat is de kans dat de munt in kwestie twee keer kop heeft? (oef 14. pg 535)

5.9. Veronderstel dat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n gebeurtenissen zijn met $\mathbb{P}(A_i) > 0$. Toon aan dat

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)\\ &\qquad = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})\end{aligned}$$

5.10. Een ruimtetuig is in de buurt van Neptunus en wil communiceren met de aarde door bitstrings door te sturen. Veronderstel dat het bericht voor één derde uit énen en voor twee derde uit nullen. Wanneer een 0 verzonden wordt, is de kans 0.9 dat die 0 correct wordt ontvangen (en dus 0.1 dat men een 1 i.p.v. een 0 ontvangt). Wanneer een 1 wordt verzonden, is de kans 0.8 dat die 1 correct wordt ontvangen (en dus 0.2 dat men een 0 i.p.v. een 1 ontvangt).

(a) Bepaal de kans dat een 0 ontvangen wordt.

(b) Bepaal de kans dat een 0 gestuurd werd, indien een 0 ontvangen werd.

5.11. Veronderstel dat een verzekeringsmaatschappij zijn autobestuurders classeert als goed, middelmatig of slecht. Veronderstel dat 25% van de bestuurders goed zijn, 50% middelmatig en 25% slecht. Veronderstel dat een goede bestuurder 10% kans heeft op een ongeval (gedurende een jaar), een gemiddelde bestuurder 20% kans, en een slechte bestuurder 30% kans. Als je weet dat Tim het voorbije jaar een ongeval heeft gehad, wat is dan de kans dat hij een goede chauffeur is?

VERDELINGSFUNCTIES

5.12. De verdelingsfunctie F bepaald voor elke x de waarde $\mathbb{P}(X \leq x)$ voor een zekere randomvariabele X. Meestal wordt de vraag echter gesteld wat de kans is om in een bepaald interval te zitten. Gelukkig kan die vraag beantwoord worden door verschillende waarden van de verdelingsfunctie te combineren. Veronderstel dat $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ de verschillende mogelijke waarden zijn van X. Bepaal dan elk van de volgende waarden in functie van $F(X) = \mathbb{P}(X \leq x)$ (oef. 7 p. 553):

(a) $\mathbb{P}(X > x)$

(b) $\mathbb{P}(X \geq x_i)$

(c) $\mathbb{P}(x_i < X \leq x_j)$

(d) $\mathbb{P}(x_i < X < x_j)$

(e) $\mathbb{P}(x_i \leq X < x_j)$

(f) $\mathbb{P}(x_i \leq X \leq x_j)$

5.13. Welke verdeling zou je gebruiken om het volgende probleem op te lossen (oef. 8. p. 553):

(a) Hoeveel verschillende 6's zal ik gooien als ik 10 keer gooi met een eerlijke dobbelsteen.

(b) Hoeveel klanten zal de KBC-bank van Berchem vandaag ontvangen tussen 10u en 11u?

(c) Hoeveel verschillende 7's zal ik gooien als ik 10 keer gooi met twee eerlijke dobbelstenen samen.

(d) Hoeveel moet ik met 2 dobbelstenen gooien totdat ik eens een 7 heb gegooid?

(e) Hoeveel radioactieve deeltjes zal een kilo uranium de komende minuut uitstoten?

5.14. Een verdeling noemt men symmetrisch als $f_X(x) = f_X(-x)$. Indien F_X de verdelingsfunctie is, wat is dan de kanstheoretische interpretatie van

$$G(x) = 2F_X(x) - 1$$

Voor welke x van het domein van de verdeling kan je dit doen? (oef. 17 p. 554)

5.15. Veronderstel dat X een continue uniforme verdeling heeft op het interval $[0, 1]$. Veronderstel dat er een nieuwe continue randomvariabele is, namelijk $Y = 2X$. Bepaal de verdelingsfunctie van Y.

5.16. Veronderstel dat X een continue uniforme verdeling heeft op het interval $[0, 1]$. Veronderstel dat er een nieuwe continue randomvariabele is, namelijk $Y = X^2$. Bepaal de verdelingsfunctie van Y.

5.17. Omdat faculteiten vervelend zijn om te berekenen kunnen we, indien we met grote getallen werken, de volgende benadering doen:

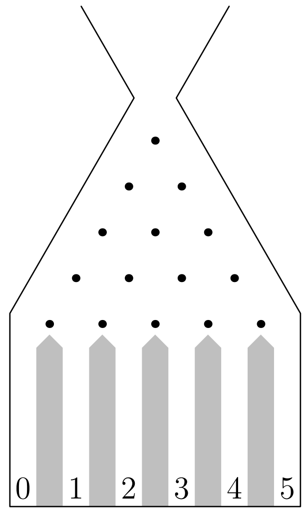
$$n! \approx \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Dit noemt men de *formule van Stirling*.

Stel nu dat je een toevalsveranderelijke X hebt die verdeeld is volgens de binomiale verdeling $B(n, 1/2)$ met n een zeer groot getal. Geef dan een benadering voor $\mathbb{P}(X = \frac{n}{2})$, bv $\mathbb{P}(X = 500)$ indien $n = 1000$.

5.18. *Het Galton bord.*

Op een rechtstaand bord zijn pinnen aangebracht zoals op de figuur.



Door een gleuf laat men knikkers vallen. Die komen dan terecht op de bovenste pin en hebben dan evenveel kans om naar links als naar rechts te vallen. Hetzelfde gebeurt op de pinnen van de tweede rij, enz. Uiteindelijk komen de knikkers terecht in de vakken die genummerd zijn van 0 tot n onderaan (in dit geval $n = 5$). Bepaal de kansverdeling van de stochastische variabele X, die het nummer aangeeft van het vakje waarin de knikker terechtkomt.

Standaardafwijking en variantie.

5.19. Toon aan dat de som van twee onafhankelijke Poisson-verdeelde variabelen (met parameters λ_1 en λ_2) opnieuw een Poisson-verdeelde variabele is. Wat is de bijbehorende parameter?

5.20. De kans op een regenvrije dag is 40%. Hoeveel regenvrije dagen mogen we volgende week verwachten? Je mag ervan uitgaan dat de kans op regen elke dag even veel is, en dus niet afhankelijk is van de vorige dagen (in werkelijkheid is dit niet waar). Bereken ook de standaardafwijking

5.21. De variabele X volgt een binomiale verdeling met verwachtingswaarde 2 en variantie $\frac{24}{13}$. Bepaal $\mathbb{P}(X = 2)$.

5.22. De grote transportfirma B-trans wil een verzekeringscontract afsluiten met een nieuwe maatschappij. De laatste neemt aan dat het aantal wagens dat B-trans per jaar "total loss" rijdt ten gevolge van verkeersongevallen verdeeld is volgens een Poisson-verdeling. Er wordt uitgegaan van een gemiddelde van 2 wagens per jaar. Bereken de kans dat de B-trans het komende jaar (strikt) meer dan 5 wagens total loss rijdt.

5.23. $X \sim B(100; 0,03)$. Bepaal $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 2)$ en $\mathbb{P}(X = 6)$ door gebruik te maken van

(a) de binomiale verdeling.

(b) de Poisson verdeling.

5.24. De kans dat de plaatselijke voetbalploeg geen enkel doelpunt maakt is 30% (Poisson verdeling).

(a) Bepaal het gemiddelde doelpuntensaldo.

(b) Hoe groot is de kans dat de ploeg hoogstens twee maal scoort?

(c) Hoe groot is de kans dat ze minder dan 3 maal scoren in de volgende twee partijen samen.

5.25. In de velden zitten konijnen, gemiddeld 120 per 10.000m^2. Elke dag worden de konijnen binnen een oppervlakte van 100m^2 gevangen. Men kan er echter hoogstens twee meenemen, dus indien er meer zijn, laat men de andere lopen. Wat gevangen werd, kweken de konijnen bij. Bereken de verwachtingswaarde van het aantal gevangen konijnen na 100 dagen en de standaard-afwijking erop.

5.26. Bereken de kans om in 90 pogingen minstens 2 keer een dubbele zes te gooien met twee dobbelstenen. Doe dit eerst met de binomiale verdeling en dan met de Poissonverdeling.

5.27. 123 patienten moeten een aantal taken doen in een psychometrische test. De resultaten daarvan zijn te zien in de volgende tabel:

aantal fouten	0	1	2	3	4	5 of meer
aantal patiënten	5	30	56	15	10	7

Bepaal het gemiddelde en de variantie van het aantal fouten per patient. Benader bovenstaande verdeling door een Poissonverdeling en geef aan of deze verdeling de gegeven data goed benaderd of niet.

EXAMENVRAGEN VOORBIJE JAREN

5.28. *Examen eerste zit 2007-2008.*

Een multiple-choice examen (op 50 punten) heeft 10 vragen, 3 met 4 mogelijke antwoorden en 3 met 5 mogelijke antwoorden en 4 met 6 mogelijke antwoorden. Een student krijgt steeds 5 punten als het antwoord goed is, 0 punt als hij de vraag openlaat en -1 punt bij een foutief antwoord. Een student gokt op elke vraag. Wat is zijn verwacht aantal punten?

5.29. *Examen eerste zit 2007-2008.*

Een 2-eurostuk wordt opgegooid. Als het kop is, wordt een paar dobbelstenen geworpen en de speler krijgt het aantal euro dat overeenkomt met het gezamelijk aantal ogen van de worp. Als het munt is, worden drie munten opgegooid en de speler krijgt 4 euro per kop die gegooid wordt. Als de speler 8 euro heeft gewonnen, wat is dan de kans dat de oorspronkelijke 2-eurostuk op kop landde?

5.30. *Examen tweede zit 2007-2008.*

Het aantal verkeersongevallen in de gemeente "Accidorp" werd in 2007 gemeten. Er werden statistieken bijgehouden van het aantal ongevallen per dag, en dit is weergegeven in de volgende tabel:

aantal verkeersongevallen x	aantal dagen met x verkeersongevallen
0	206
1	108
2	41
3	10
4 of meer	0
totaal	365

Gebruik een gekende verdeling, die typisch is voor dit soort gegevens, om deze gegevens te benaderen. Wat zou, volgens die verdelingsfunctie, de kans zijn dat er 4 of meer verkeersongevallen op één dag gebeuren.

5.31. *Examen tweede zit 2007-2008.*

Veronderstel dat we 2 zakken hebben met witte en zwarte ballen in. In de ene zak zitten 3 keer meer witte ballen dan zwarte. In de andere zak zitten 3 keer meer zwarte ballen dan witte. Veronderstel dat we willekeurig een zak kiezen en dan uit die zak willekeurig 5 ballen nemen (waarbij we een bal steeds terug steken als we hem een genomen hebben). Het resultaat is dat we 4 witte en 1 zwarte bal getrokken hebben. Wat is de kans dat de ballen uit de zak met vooral witte ballen getrokken zijn?

5.32. *Examen eerste zit 2008-2009.*

Via een tipgever uit het milieu is de politie te weten gekomen waar een gangsterbende vergadert. De identiteit van de bendeleden is onbekend. Een agent krijgt de opdracht de leider van de bende te schaduwen. Hij weet enkel dat de bendeleider de grootste is van de vijf personen (allen van verschillende grootte) die op de bendevergadering aanwezig zijn.

Na de vergadering verlaten de gangsters —uit veiligheidsoverwegingen— elk apart het gebouw met een tussenpauze van een kwartier. De agent kan dus niet zien wie de grootste is en besluit de eerste twee leden te laten gaan en dan de eerste te volgen die groter is dan degene die voor hem vertrokken zijn.

Hoe groot is de kans dat de juiste man wordt geschaduwd.

5.33. *Examen eerste zit 2008-2009.*

Men beschikt over 3 urnes:

- In urne I zitten 3 witte en 4 zwarte ballen,
- in urne II zitten 5 witte en 2 zwarte ballen
- in urne III zitten 7 zwarte ballen.

Men gooit nu met een eerlijke (zeszijdige) dobbelsteen.

Gooit men

- 1, dan neemt men een willekeurige bal uit urne I
- 2 of 3, dan neemt men een willekeurige bal uit urne II
- 4,5 of 6, dan neemt men een willekeurige bal uit urne III

(a) Als je weet dat er een zwarte bal getrokken wordt, wat is dan de kans dat een 6 werd gegooid?

(b) Als je weet dat er een zwarte bal getrokken wordt, wat is dan de verwachtingswaarde van de dobbelsteenworp?

5.34. *Examen eerste zit 2008-2009.*

Er zijn 2^n voetbalploegen die een tornooi houden. Wanneer een ploeg een wedstrijd verliest, verlaat hij het tornooi. In elke ronde worden de overgebleven ploegen willekeurig gekoppeld en speelt elk koppel een nieuwe wedstrijd. Veronderstel dat een wedstrijd nooit op een gelijkspel eindigt en dat de kans op winst of verlies steeds 50% is, ongeacht wie tegen wie speelt. Wat is dat de kans dat ik met mijn ploeg tegen jouw ploeg zal moeten spelen tijdens dit tornooi?

5.35. *Examen tweede zit 2008-2009.*

Een man heeft 5 muntstukken, waarvan 2 met tweemaal kop, 1 met tweemaal munt en 2 ordinaire muntstukken.

(a) Hij sluit zijn ogen en neemt willekeurig een muntstuk en gooit het op. Wat is de kans dan de onderzijde van het muntstuk kop is?
(b) Hij opent zijn ogen en ziet dat de bovenkant van het muntstuk kop is. Wat is de kans dan de onderzijde van het muntstuk kop is?
(c) Hij terug sluit zijn ogen gooit hetzelfde muntstuk nog eens op. Wat is de kans dan de onderzijde van het muntstuk kop is?
(d) Hij opent zijn ogen en ziet dat de bovenkant van het muntstuk kop is. Wat is de kans dan de onderzijde van het muntstuk kop is?
(e) Hij doet de munt nu opzij en kiest één van de andere munten en gooit die op. Wat is de kans dat hij nu kop gooit?

5.36. *Examen tweede zit 2008-2009.*

In een zak zitten 3 ballen (een zwarte, een gele en een rode). Wat is de kans dat ik na 10 keer willekeurig een bal uit de zak te trekken (met teruglegging), ik elke kleur minstens 1 maal heb gehad?

5.37. *Examen eerste zit 2009-2010.*

Een boek van 500 pagina's bevat 500 drukfouten. Gebruik de Poisson-verdeling om de kans te bepalen dat er op een willekeurige pagina drie of meer drukfouten staan.

5.38. *Examen eerste zit 2009-2010.*

Een wandelaar kan uit n wegen kiezen om van A naar B te wandelen. De wegen zijn genummerd 1 tot n. Indien de wandelaar weg i neemt, splitst de weg onderweg in 2^i wegen, waarvan er slechts 1 tot B leidt. Als de wandelaar zowel in het begin als in het midden willekeurig een weg kiest. Indien gegeven is dat de wandelaar aankomt, wat is dan de kans dat hij pad i heeft gekozen.

5.39. *Examen eerste zit 2009-2010.*

Je beschikt over 6 (6-zijdige) dobbelstenen met de waarden 1,1,2,2,3,3 op Als je met deze 6 dobbelstenen tegelijk gooit, wat is de kans dat elk van de 3 cijfers minstens 1 keer voorkomen?

5.40. *Examen tweede zit 2009-2010.*

Om aangenomen te worden in een bepaald bedrijf moet je als sollicitant 3 solliciatierondes overleven. Als je een ronde niet overleeft, mag je niet naar de volgende ronde. Als je de drie rondes overleeft, wordt je aangenomen. Ga ervan uit dat de kans om de eerste ronde te overleven 90% is, de kans om de tweede ronde te overleven, op voorwaarde dat je door de eerste ronde geraakt bent, 80% is en de kans dat je de derde ronde overleeft als je de tweede ronde reeds overleeft hebt 70% is.

(a) Wat is de kans dat je aangenomen wordt?

(b) Als je uiteindelijk niet aangenomen wordt, wat is dan de kans dat je de tweede ronde overleefd hebt?

5.41. *Examen tweede zit 2009-2010.*

Een enquête over de huishuren in een grootstad geeft als gemiddelde huishuur 425 euro, met een standaardafwijking van 75 euro. Stel dat de huishuren een normale verdeling volgen. Hoe groot is de kans dat een willekeurige huurder een huur betaalt die tussen de 200 en 275 euro ligt?

5.42. *Examen tweede zit 2009-2010.*

Gemiddeld worden er bij een hamburgerrestaurant *De Wakkere Burger* 6 haren per maand tussen de hamburgers gevonden. Wat is de kans dat er de komende 3 maanden samen 3 of minder haren gevonden worden?

5.43. *Examen eerste zit 2010-2011.*

Bij het spel Yahtzee gooit men met 5 zeszijdige dobbelstenen. We gebruiken de volgende terminologie:

- Een *full house* is een worp waarbij 3 dobbelstenen een gelijk aantal ogen hebben en de twee andere dobbelstenen ook een gelijk aantal ogen hebben.
- Een *carré* is een worp waarbij er minstens 4 dobbelstenen hetzelfde aantal ogen hebben.
- Een *yahtzee* is een worp waarbij de 5 dobbelstenen hetzelfde aantal ogen hebben.

Bepaal de kans dat men bij één worp meteen een full house, een carré of een yahtzee gooit?

5.44. *Examen eerste zit 2010-2011.*

Een HDTV bestaat uit 103 componenten, die elk met een kans van $0,03\%$ defect zijn. De HDTV werkt slechts als al zijn componenten werken. Wat is de kans dat de HDTV defect is?

5.45. *Examen eerste zit 2010-2011.*

Louis neemt regelmatig het vliegtuig en hij houdt ervan zijn zitplaats te upgraden naar eerste klasse. Hij heeft gemerkt dat als hij minstens 2 uur op voorhand inchecked, dat hij dan 75% kans heeft op een upgrade. In het andere geval is de kans op een upgrade slechts 35%. Met Louis zijn zeer druk schema kan hij slechts bij 40% van zijn vluchten meer dan 2 uur op voorhand inchecken.

Veronderstel nu dat Louis geen upgrade heeft kunnen hebben tijdens zijn laatste vlucht. Wat is dan de kans dat hij minstens 2 uur voor vertrekt incheckte?

5.46. *Examen tweede zit 2010-2011.*

Veronderstel dat 60% van de studenten uit eerste bachelor informatica slaagt voor het examen van discrete wiskunde. Van de studenten uit eerste bachelor informatica die slagen voor discrete wiskunde, slaagt 80% ook voor calculus. Van de studenten uit eerste bachelor informatica die niet slagen voor discrete wiskunde, slaagt slechts 20% voor calculus.

(a) Wat is de kans dat als ik een willekeurige student informatica neem, dat deze geslaagd is voor calculus.

(b) Bepaal de kans dat als een student geslaagd is voor calculus, dat deze dan ook geslaagd is voor discrete wiskunde.

5.47. *Examen tweede zit 2010-2011.*

Op een voetbalnamiddag spelen FC KUL en KV UA voetbal. Elke universiteit heeft 4 voetbalploegen.

De wedstrijdorganisator loot de wedstrijden door de namen van de 8 ploegen in een trommel te gooien en dan telkens 2 willekeurig namen uit de trommel te nemen. Zo krijgen we 4 wedstrijden.

(a) Hoe groot is de kans dat er geen wedstrijden zijn waarbij twee ploegen van dezelfde club tegen elkaar spelen?

(b) Hoe groot is de kans dat er precies 3 wedstrijden zijn waarbij twee ploegen van dezelfde club tegen elkaar spelen?

(c) Hoe groot is de kans dat er precies 1 wedstrijd is waarbij twee ploegen van dezelfde club tegen elkaar spelen?

(d) Hoe groot is de kans dat er precies 4 wedstrijden zijn waarbij twee ploegen van dezelfde club tegen elkaar spelen?

(e) Hoe groot is de kans dat er precies 2 wedstrijden zijn waarbij twee ploegen van dezelfde club tegen elkaar spelen?

(f) Wat is het verwacht aantal wedstrijden tussen twee ploegen van dezelfde club (m.a.w. bepaal de verwachtingswaarde van de variabele X die het aantal wedstrijden van ploegen van dezelfde club weergeeft).

De normale verdeling

5.48. De stochastische variabele X heeft een normale verdeling met gemiddelde $\mu = 70$ en standaardafwijking $\sigma = 10$. Bereken de volgende kansen.

(a) $\mathbb{P}(70 < X < 75)$.
(b) $\mathbb{P}(X > 85)$.
(c) $\mathbb{P}(X \leq 60)$.
(d) $\mathbb{P}(80 \leq X \leq 90)$.
(e) $\mathbb{P}(62 < X < 78)$.

5.49. De stochastische variabele X heeft een normale verdeling met gemiddelde 24 en standaardafwijking 6. Bepaal a in elke van de volgende uitdrukkingen.

(a) $\mathbb{P}(24 \leq X \leq a) = 0,25$.
(b) $\mathbb{P}(a \leq X \leq 24) = 0,45$.
(c) $\mathbb{P}(X \geq a) = 0,05$.
(d) $\mathbb{P}(X < a) = 0,025$.
(e) $\mathbb{P}(30 < X < a) = 0,1$.

5.50. Hoe groot is de kans dat men op 100 worpen met een correcte dobbelsteen 25 of meer zessen gooit?

5.51. Een mexicaanse zwemmer beweerde dat hij een haai van $6,5$ meter had gezien. Van de bewuste soort volwassen haaien is geweten dat de lengte een normale verdeling volgt met een gemiddelde van 5 meter en een standaardafwijking van $0,5$ meter.

(a) Wat is de kans dat een willekeurige exemplaar een lengte heeft van meer dan $6,5$ meter?
(b) een lengte tussen de 6 en de 7 meter?
(c) precies $6,5$ meter?

5.52. In de chocoladefabriek van de sint worden chocolade sinten gemaakt.

(a) De grootte van de witte sinten heeft een gemiddelde van 16cm en een standaardafwijking van 0,5cm. Wat is de kans dat als ik een willekeurige witte sint krijg, dat deze 14cm of meer is?
(b) De bruine sinten zijn gemiddeld 12cm groot en 80% van al die chocolade mannetjes zijn tussen 11cm en 13cm. Wat is de kans dat als ik een willekeurige bruine sint krijg, dat deze 14cm of meer is?

(gebruik de normale verdeling)

5.53. Bereken voor een normale verdeelde variabele $X \sim N(12,3)$ de kans $\mathbb{P}(X > 18 \text{ of } X < 6)$. Wat is de grens die je hiervoor zou bekomen via de ongelijkheid van Chebyshev?

5.54. Benader de kans $\mathbb{P}(20 \leq X \leq 30)$ voor een $X \sim B(100, \frac{1}{4})$

(a) Exact via de binomiale verdeling.

(b) Benaderd via een normaalverdeelde variabele waarbij je dezelfde grenzen gebruikt.

(c) Benaderd via een normaalverdeelde variabele waarbij je de grenzen met een halfje aanpast.

HOOFDSTUK 6

BOOLEAANSE ALGEBRA

6.1 BOOLEAANSE UITDRUKKINGEN EN FUNCTIES

DEFINITIE 6.1

We noemen x een *booleaanse variabele* als x enkel de waarde 0 of 1 kan aannemen.
Verder noemen we een uitdrukking een *booleaanse uitdrukking (booleaanse expressie)* indien ze bestaat uit booleaanse variabelen, die verbonden zijn met elkaar via de unaire operator het complement en via de binaire operatoren de som en het product.

- **Het complement $\bar{x}$ van een booleaans variabele x wordt 1 als $x = 0$ en 0 als $x = 1$.**
- **De som $x + y$ van twee booleaanse variabelen x en y wordt gegeven door de volgende tabel.**

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

- **De product $x \cdot y$ of xy van twee booleaanse variabelen x en y wordt gegeven door de volgende tabel.**

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Zo is bijvoorbeeld $1 \cdot 0 + \overline{0 + 1} = 0 + \overline{1} = 0 + 0 = 0$.

DEFINITIE 6.2 **Met $B = \{0,1\}$, noemen we een functie van B^n naar B een *booleaanse functie* van graad n.**

VOORBEELD 6.3 Enkele voorbeelden van booleaanse functies.

- De functie
$$\begin{array}{rccc} F_1: & \{0,1\}^2 & \to & \{0,1\} \\ & (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$
is een functie van graad 2, die met elk koppel (x,y) de waarde van x laat overeenkomen.

  Kijken we nu naar de functie
$$\begin{array}{rccc} F_2: & \{0,1\}^2 & \to & \{0,1\} \\ & (x,y) & \longmapsto & x + x \cdot y, \end{array}$$
dan kunnen we deze volledig beschrijven via een tabel:

x	y	$x \cdot y$	$x + x \cdot y$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

  We merken dat de functiewaarden van F_2 precies overeenkomen met de functiewaarden van F_1 en we kunnen dus stellen dat deze twee functies hetzelfde zijn. Dit geeft nog eens duidelijk het verschil aan tussen een booleaanse expressie en een booleaanse functie. Zoals in dit voorbeeld kunnen verschillende booleaanse expressies overeenkomen met dezelfde functie.

- De functie
$$\begin{array}{rccc} F: & \{0,1\}^3 & \to & \{0,1\} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x + y + x \cdot z \end{array}$$
is dan weer een functie van graad 3. De volgende tabel geeft de functie volledig weer:

x	y	z	$x+y$	$x \cdot z$	$x+y+x \cdot z$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

OPMERKING 6.4 Het aantal verschillende booleaanse functies van graad n is 2^{2^n}. We

weten immers uit hoofdstuk 4 dat het aantal n-tupels met waarden in $\{0,1\}$ precies 2^n is. Omdat een booleaanse functie een toekenning is 0 of 1 aan elk van deze n-tupels, krijgen we dus in totaal 2^{2^n} mogelijkheden.

Identiteiten

Booleaanse expressies die horen bij dezelfde booleaanse functie kunnen in elkaar omgezet worden door gebruik te maken van de volgende identiteiten:

Identiteit	Naam
$\overline{\overline{x}} = x$	Wet van het dubbele complement
$x + x = x$ $x \cdot x = x$	$+$ is idempotent $\cdot$ is idempotent
$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$	identiteitswet
$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	1 opslorpend element voor de $+$ 0 opslorpend element voor de $\cdot$
$x + y = y + x$ $x \cdot y = y \cdot x$	commutativiteit
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$	associativiteit
$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	distributiviteit
$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	wet van De Morgan
$x + xy = x$ $x(x + y) = x$	absorbtiewet
$x + \overline{x} = 1$ $x \cdot \overline{x} = 0$	eenheidswet

VOORBEELD 6.5 Sommigen van deze identiteiten volgen uit anderen: Zo zou je de absorptiewet $x(x+y) = x$ uit de andere identiteiten kunnen laten volgen:

$$\begin{aligned}
x(x+y) &= (x+0)(x+y) && \text{identiteitswet} \\
&= x + 0 \cdot y && \text{distributiviteit} \\
&= x + y \cdot 0 && \text{commutativiteit} \\
&= x + 0 && \text{0 is opslorpend voor +} \\
&= x && \text{identiteitswet}
\end{aligned}$$

Bovenstaande identiteiten kunnen aan de hand van logische tabellen geverifieerd worden.
We kunnen ook opmerken dat de meerderheid van deze identiteiten per twee voorkomt. We spreken telkens van de *duale* identiteit.

DEFINITIE 6.6 **De duale uitdrukking van een booleaanse expressie bekom je door**

alle producten te veranderen in sommen, alle sommen in producten, elke 0 te vervangen door een 1 en elke 1 te vervangen door een 0. Eventueel moeten er haken toegevoegd worden.

VOORBEELD 6.7 De duale uitdrukking van $x(y+0)$ wordt gegeven door $x+(y\cdot 1)$, de duale uitdrukking van $\overline{x}\cdot 1+(\overline{y}+z)$ is $(\overline{x}+0)+(\overline{y}z)$.

EIGENSCHAP 6.8 ***Het dualiteitsprincipe.***
Indien een booleaanse identiteit geldt, dan geldt ook de duale identiteit. Dit is de identiteit waarbij van het linkerlid en van het rechterlid de duale uitdrukking werd genomen.

We zien in de tabel dat de identiteiten steeds per twee voorkomen: een identiteit en zijn duale identiteit.

6.2 Booleaanse functies voorstellen

We kunnen elke booleaanse functie voorstellen door een booleaanse expressie. Kijk maar naar de volgende voorbeelden:

VOORBEELD 6.9 In de volgende tabel worden de functies

$$F:\{0,1\}^3 \to \{0,1\} \quad \text{en} \quad G:\{0,1\}^3 \to \{0,1\}$$

voorgesteld. We zullen voor beide functies een voorschrift geven via een booleaanse expressie.

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Voor F moeten we dus een expressie vinden die 1 wordt als $x=z=1$ en $y=0$, en die 0 wordt voor alle andere waarden van (x,y,z). Deze expressie kunnen we vormen door het booleaanse product van x , $\overline{y}$ en z te nemen. De uitdrukking $x\overline{y}z$ wordt inderdaad 1 als en slechts als (!) $x=\overline{y}=z=1$ en dit gebeurt als en slechts als $x=z=1$ en $y=0$.

Voor G vinden we dat de functie enkel 1 moet worden in twee gevallen. We kunnen weer met producten werken: Het product $xy\overline{z}$ wordt 1 als en slechts als $x=y=1$ en $z=0$, het product $\overline{x}y\overline{z}$ wordt 1 als en slechts als $y = 1$ en $x = z = 0$. De booleaanse som van deze twee uitdrukkingen: $xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$ zal dan precies 1 worden als x, y en z in één van beide gevallen zijn.

In beide gevallen hebben we een booleaanse expressie gevonden die de functie exact beschrijft. Deze techniek kunnen we toepassen voor elke booleaanse functie. We vinden dan steeds een booleaans voorschrift dat kan geschreven worden als som van producten van de booleaanse variabelen of hun complement. Hiervoor geven we de volgende definitie, die in dit geval engelstalige begrippen bepaald.

DEFINITIE 6.10 **We noemen een *literal* een booleaanse variabele of zijn complement. Een *minterm* van de booleaanse variabelen $x_1, \ldots, x_n$ is het booleaans product $y_1 y_2 \cdots y_n$ met $y_i = x_i$ of $y_i = \overline{x}_i$.**

Een minterm wordt (zoals in voorbeeld 6.9) dus 1 in exact 1 van de waarden van de variabelen. Preciezer: de minterm $y_1 y_2 \cdots y_n$ is 1 als en slechts als elke $y_i = 1$, en dit gebeurt indien $x_i = 1$ als $y_i = x_i$ en $x_i = 0$ als $y_i = \overline{x}_i$.
Door nu de booleaanse som te nemen van verschillende minterms kunnen we een booleaanse expressie opbouwen die overeenkomt met een willekeurig gegeven functie. We nemen de som van precies alle verschillende minterms die 1 geven.

DEFINITIE 6.11 **Indien een booleaanse functie wordt gegeven door zulke som-van-producten expressie, dan spreken we van de *disjunctieve normaalvorm (DNF)* van de booleaanse functie. Deze is per constructie uniek (op de volgorde van de termen na).**

OPMERKING 6.12 Bij een expressie in discjunctieve normaalvorm is het dus belangrijk dat in alle producten *alle* variabelen voorkomen, al dan niet met complement.

VOORBEELD 6.13 Laten we bij wijze van voorbeeld de functie $F(x,y,z) = (x+y)\overline{z}$ een schrijven in DNF. Een eerste manier is door gebruik te maken van de identiteiten:

$$\begin{array}{rcll}
F(x,y,z) & = & (x+y)\overline{z} & \\
 & = & x\overline{z} + y\overline{z} & \text{distributiviteit} \\
 & = & x1\overline{z} + 1y\overline{z} & \text{identiteitswet} \\
 & = & x(y+\overline{y})\overline{z} + (x+\overline{x})y\overline{z} & \text{eenheidswet} \\
 & = & xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} & \text{distributiviteit} \\
 & = & xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} & + \text{ is idempotent}
\end{array}$$

Alle termen zijn nu verschillend en in elke term komen alle variabelen precies ééenmaal voor. De uitdrukking staat dus in DNF.
Een tweede manier om dit te bekomen is door eerst voor alle functiewaarde van F te bepalen (bijvoorbeeld door een tabel op te stellen). Op basis van alle tripletten (x,y,z) waarvoor de uitdrukking als waarde 1 heeft, bepaal je dan zoals in voorbeeld 6.9 de DNF. Hier zou de tabel er dan zo uitzien:

x	y	z	$x+y$	$\overline{z}$	$(x+y)\overline{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

en we vinden opnieuw als uitdrukking $xy\overline{z}+x\overline{y}\,\overline{z}+\overline{x}y\overline{z}$.

DEFINITIE 6.14

Een *maxterm* van de booleaanse variabelen $x_1,\ldots,x_n$ is de booleaans som $y_1+y_2+\cdots+y_n$ met $y_i=x_i$ of $y_i=\overline{x}_i$.
Een expressie staat in *conjunctieve normaalvorm (CNF)* als zij geschreven is als product van verschillende maxterms

Voor elke booleaanse functie is er ook een unieke (op de volgorde van de factoren na) voorschift in CNF, in elke som komt elke variabele voor, al dan niet met complement.

VOORBEELD 6.15

We hernemen voorbeeld 6.13. Om de functie F die beschreven wordt door bovenstaande tabel, in CNF te zetten gaan we nu kijken naar alle tripletten die 0 als waarde hebben. Van al deze waarden schrijf je $y_1+y_2+\cdots+y_n$ met $y_i=x_i$ als x_i waarde 0 heeft en $y_i=\overline{x}_i$ als x_i waarde 1 heeft.
De eerste regel uit de tabel geeft dan $\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$, de derde regel in de tabel wordt dan $\overline{x}+y+\overline{z}$, enz. De volledige vorm in CNF wordt dan

$$F(x,y,z)=(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})(\overline{x}+y+\overline{z})(x+\overline{y}+\overline{z})(x+y+\overline{z})(x+y+z)$$

Dit procédé kan je op willekeurige booleaanse functies toepassen.
Dat de hiergevonden CNF en de bovenstaande DNF aan elkaar gelijk zijn volgt uit de Wet van De Morgan (waarvan we hier de versie in 3 variabelen gebruiken ($\overline{x+y+z}=\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ en $\overline{xyz}=\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$):

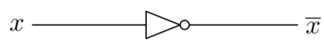
$$\begin{aligned}\overline{F(x,y,z)}&=\overline{(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})(\overline{x}+y+\overline{z})(x+\overline{y}+\overline{z})(x+y+\overline{z})(x+y+z)}\\&=\overline{(\overline{x}+\overline{y}+\overline{z})}+\overline{(\overline{x}+y+\overline{z})}+\overline{(x+\overline{y}+\overline{z})}+\overline{(x+y+\overline{z})}+\overline{(x+y+z)}\\&=xyz+x\overline{y}z+\overline{x}yz+\overline{x}\,\overline{y}z+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\end{aligned}$$

We merken dat we hier precies die producten vinden die 0 geven voor F.

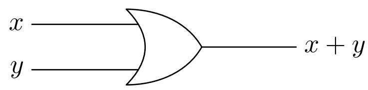
6.3 Logische circuits

booleaans algebra versus NIET, EN en OF poorten.

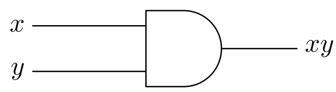
- De NIET-poort (het complement):



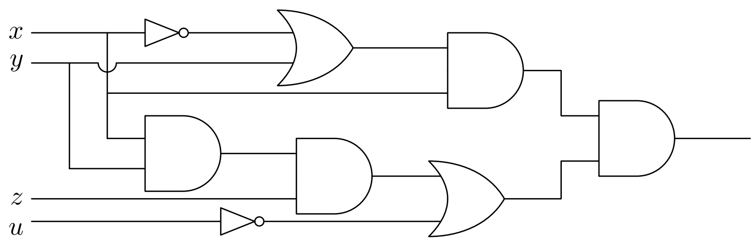
- De OF-poort (de som):



- De EN-poort (het product):



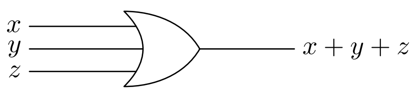
VOORBEELD 6.16 Dit kan dan gecombineerd worden zodat we een circuit krijgen:



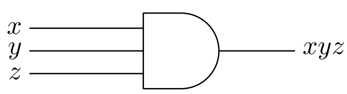
Het circuit in dit voorbeeld komt overeen met

$$((\overline{x} + y) \cdot x)(((x \cdot y) \cdot z) + \overline{u})$$

Om te vermijden dat we veel OF-poorten samen dienen gebruikt te worden, kunnen we ook samengestelde OF-poorten maken.



Hetzelfde geldt voor de EN poorten:



Karnaugh maps

We zoeken naar manieren om een zo eenvoudig mogelijke booleaanse expressies te zoeken die bij een bepaalde booleaanse functie horen. Laten we eens kijken naar het volgende voorbeeld: De zin

$$xyz + x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

staat in DNF en willen we zo kort mogelijk schrijven. In eerste instantie zouden we kunnen kijken naar de lijst van booleaanse identiteiten en die gebruiken om de uitdrukkingen te vereenvoudigen. Zo vinden we bijvoorbeeld (ik negeer de (triviale) associativiteit en commutativiteit:

$$\begin{aligned}
\underbrace{xyz + x\overline{y}z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \underbrace{\overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}} &\overset{\text{(distr.)}}{=} xz(y+\overline{y}) + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}(z+\overline{z}) \\
&\overset{\text{(eenh.)}}{=} xy1 + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}1 \\
&\overset{\text{(ident.)}}{=} xy + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}
\end{aligned}$$

Deze zin verder vereenvoudigen lijkt moeilijk. Hadden we echter anders gestart, dan konden we dit trukje (distributiviteit+eenheidswet) meerder malen toepassen:

$$\begin{aligned}
xyz + \underbrace{x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z}} + \underbrace{\overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}} &\overset{\text{(distr.)}}{=} xyz + x\overline{y}(z+\overline{z}) + \overline{x}\,\overline{y}(z+\overline{z}) \\
&\overset{\text{(eenh.)}}{=} xyz + x\overline{y}1 + \overline{x}\,\overline{y}1 \\
&\overset{\text{(ident.)}}{=} xyz + x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} \\
&\overset{\text{(distr.)}}{=} xyz + (x+\overline{x})\overline{y} \\
&\overset{\text{(eenh.)}}{=} xyz + 1\overline{y} \\
&\overset{\text{(ident.)}}{=} xyz + \overline{y}
\end{aligned}$$

Dit is al heel wat korter, maar toch zijn we nog niet klaar: we zouden, door de aanwezigheid van $\overline{y}$ in de expressie ook de y uit de xyz kunnen weglaten:

$$\begin{aligned}
xyz + \overline{y} &\overset{\text{(absor.)}}{=} xyz + x\overline{y}z + \overline{y} \\
&\overset{\text{(distr.)}}{=} xz(y+\overline{y}) + \overline{y} \\
&\overset{\text{(eenh.)}}{=} xz1 + \overline{y} \\
&\overset{\text{(ident.)}}{=} xz + \overline{y}
\end{aligned}$$

We merken dus dat we, afhankelijk van hoe we gestart zijn, verschillende mogelijke uitkomsten kunnen vinden, de ene al korter dan de andere. We kunnen echter ook gebruik maken van Karnaugh Maps. Eerst gaan we een schematische voorstelling maken van de waarheidstabel die bij de booleaanse hoort. Het schema is afhankelijk van het aantal variabelen dat je nodig hebt. Voor 3 variabelen zijn er 8 vakjes, die elk overeenkomen met een minterm.*Belangrijk hierbij is dat twee naburige vakjes precies in 1 variabele verschillen.* Zo staat in de volgende tabel $x\overline{y}z$ naast $x\overline{y}\,\overline{z}$. Ook "over de rand" staan vakjes naast elkaar die precies in 1 variabele verschillen: $x\overline{y}z$ staat zo naast $\overline{x}\,\overline{y}z$.

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}y$	xy	$x\overline{y}$
$\overline{z}$	X			X
z	X		X	X

Nu gaan we in deze Karnaugh map op zoek naar rechthoekjes die 2, 4 of 8 vakjes bevatten. Deze rechthoekjes vormen immers blokken waarbij we variabelen kunnen elimineren via de methode zoals in voorgaande vereenvoudigingen (distributief, eenheid, identiteit). Je moet dan gewoon kijken naar welke variabele varieert en welke variabele constant is. Zo vinden we in de bovenstaande tabel een blok van 4 en een blok van 2. Deze blokken overlappen, maar dat is geen probleem.

	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}y$	xy	$x\overline{y}$
$\overline{z}$	X			X
z	X		X	X

Het blok met grootte 4 komt overeen met de expressie $\overline{y}$ en het blok met grootte 2 komt overeen met de expressie xz. Een expressie die hoort bij de functie waarmee we startte is dus $xz+\overline{y}$. We merken dat, hoe groter de blokken zijn, hoe kleiner de schrijfwijze van de bijbehorende expressie.
In een tweede voorbeeld kijken we naar een Karnaugh map van een

functie in 4 variabelen:

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{u}$	X		X	X
$\bar{z}u$	X		X	
zu				X
$z\bar{u}$	X	X	X	X

Ook hier zijn er vele blokken (van 2, 4, 8 of 16). We vinden ook hier blokken over de rand, alsook blokken "over de hoekpunten".

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{u}$	X		X	X
$\bar{z}u$	X		X	
zu				X
$z\bar{u}$	X	X	X	X

Als we al deze blokken optellen krijgen we

$$z\overline{u} + x\overline{u} + \overline{y}\,\overline{u} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + x\overline{y}z$$

We krijgen ook dat het blok $x\overline{u}$ overbodig is in de schrijfwijze, aangezien deze al volledig bedekt is met andere blokken. We vinden uiteindelijk

$$z\overline{u} + \overline{y}\,\overline{u} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + x\overline{y}z$$

We kunnen geen andere blokken missen.

OPMERKING 6.17 De voorbeelden van Karnaugh maps geven steeds als resultaat een som van producten. Het is echter ook mogelijk op te kijken naar een product van sommen: we werken gelijkaardig als bij het bepalen van de CNF.

Eerst kijken we naar de plaatsen waar de nullen staan,

	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$	xy	$x\bar{y}$
$\bar{z}\bar{u}$		0		
$\bar{z}u$		0		0
zu	0	0	0	
$z\bar{u}$				

deze groeperen we zoals voorheen, en we schrijven het uit, maar nu nemen we steeds de complementen. De laatste booleaans functie heeft dan de volgende expressie als product van sommen:

$$(x+\overline{y}+z)(x+\overline{z}+\overline{u})(\overline{y}+\overline{z}+\overline{u})(\overline{x}+y+z+\overline{u})$$

OPMERKING 6.18 Hoewel Karnaugh maps expressies heel wat korter kunnen maken, hebben we niet steeds de kortste schrijfwijze. Mogelijk zijn er kortere schrijfwijzes die niet van de vorm “som van producten” of “product van sommen”. Zo kan de laatste expressie nog iets eenvoudiger worden.

$$(z+\overline{y})\overline{u}+(\overline{x}\,\overline{y}+xy)\overline{z}+x\overline{y}z$$

6.4 OEFENINGEN

6.1. Toon aan dat als $a+b=1$ en $ab=0$, dat dan $b=\bar{a}$ door gebruik te maken van identiteiten.

6.2. Geef van elke waarheidstabel een zin in DNF en een zin in CNF die hiermee overeenkomt (oef. 19 p. 661).

(a)

p	q	
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(b)

p	q	r	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

(c)

p	q	r	
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

6.3. Vereenvoudig de uitdrukking uit de vorige oefening door gebruik te maken van *Karnaugh maps*.

6.4. (a) Design een Karnaugh map voor 5 variabelen.

(b) Als een Karnaugh maps in drie dimensies zouden kunnen getekend worden, hoe zou je dan een Karnaugh map voor 3 variabelen opstellen? Wat zou het voordeel zijn t.o.v. je twee dimenionale variant?

6.5. (a) Toon aan dat een uitdrukking die bepaald wordt door een waarheidstabel kan geschreven worden door enkel *AND*, *OR* en *NOT* te gebruiken(oef. 25 p. 662)

(b) Toon aan dat een uitdrukking die bepaald wordt door een waarheidstabel kan geschreven worden door enkel *AND* en *NOT* te gebruiken(oef. 26 p. 662)

6.6. Vereenvoudig de uitdrukking die hier gegeven staat:

	q	q	$\bar{q}$	$\bar{q}$	
p		1	1		$\bar{r}$
p	1	1	1		r
$\bar{p}$		1	1		r
$\bar{p}$	1	1	1	1	$\bar{r}$
	$\bar{s}$	s	s	$\bar{s}$	

LOGISCHE CIRCUITS

6.7. We willen een logisch circuit maken van een lamp (output) die we willen bedienen door middel van drie schakelaar, die elk op *aan* of op *af* staat (input p, q en r).

(a) Geef een Boolse uitdrukking voor het branden van de lamp, in functie van p, q en r.

(b) Geef voor deze uitdrukking het bijbehorende circuit.

6.8. *Half Adder.*

Geef een logisch circuit dat de optelling van twee bits x en y weergeeft in een binair getal bestaande uit een bit s voor de eenheden en een bit c voor de "tweetallen". Met andere woorden geeft een circuit dat hoort bij de waarheidstabel

x	y	s	c
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

.

6.9. *Full Adder.*

De Full Adder breidt de vorige constructie uit zodat er een "carry bit" kan bij opgeteld worden. Geef een logisch circuit dat overeenkomt met een full adder en maak daarvoor gebruik van twee half adders.

x	y	c_i	s	c_{i+1}
1	1	1	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

.

6.10. Gebruik half adders en full adders om het logisch circuit te maken dat twee woorden van elk 5 bit met elkaar optelt.

6.11. *Examen eerste zit 2009-2010.*

Gegeven de volgende logische tabel

p	q	r	s	
1	1	1	1	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	0	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0

(a) Gebruik Karnaugh Maps om een zo kort mogelijke Boolse uitdrukking te geven die overeenkomt met deze logische tabel.

(b) Teken het bijbehorende logische circuit.

6.12. *Examen eerste zit 2008-2009.*

De bits x, y, z en w zijn de bits die als input gebruikt worden voor een logische circuit. Samen stellen ze het binair getal $xyzw$ voor. Veronderstel dat het circuit enkel 0 als output geeft indien $xyzw$ een van de volgende (decimale) waarden heeft:

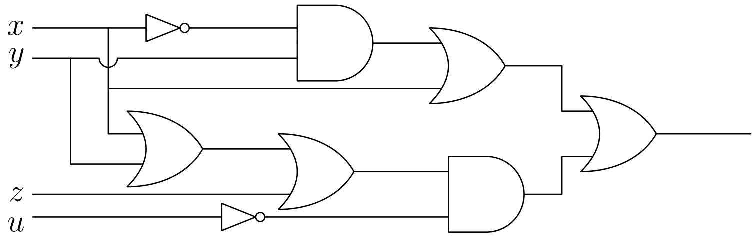
$$0, 4, 6, 9, 11, 12, 14, 15.$$

(a) Gebruik Karnaugh Maps om een zo kort mogelijke Boolse uitdrukking te krijgen voor deze output.

(b) Teken het bijbehorende logische circuit.

6.13. *Examen tweede zit 2008-2009.*

Gegeven het volgende logische circuit.



(a) Schrijf de Boolse zin in x, y, z en u op, die overeenkomt met de waarde van dit logisch circuit.

(b) Vereenvoudig de gevonden waarde door gebruik te maken van Karnaugh maps en geef dan ook een eenvoudiger logisch circuit.

6.14. *Examen eerste zit 2009-2010.*

Gegeven de volgende logische tabel

p	q	r	s	
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

(a) Gebruik Karnaugh Maps om een zo kort mogelijke Boolse uitdrukking in DNV te geven die overeenkomt met deze logische tabel.

(b) Teken het bijbehorende logische circuit.

6.15. *Examen eerste zit 2010-2011.*

De bits x, y, z en w zijn de bits die als input gebruikt worden voor een logische circuit. Samen stellen ze het binair getal $xyzw$ voor. Veronderstel dat het circuit 0 als output geeft indien $xyzw$ het kwadraat is van een geheel getal en 1 als output geeft indien niet.

(a) Gebruik Karnaugh maps om een zo kort mogelijke Boolse uitdrukking te krijgen voor deze output.

(b) Teken het bijbehorende logische circuit.

6.16. *Examen tweede zit 2010-2011.*

De bits x, y, z en w zijn de bits die als input gebruikt worden voor een logische circuit. Samen stellen ze het binair getal $xyzw$ voor. Veronderstel dat het circuit enkel 1 als output geeft indien $xyzw$ een van de volgende (decimale) waarden heeft:

$$0, 1, 2, 6, 8, 9, 10.$$

(a) Gebruik Karnaugh Maps om een zo kort mogelijke Boolse uitdrukking te krijgen voor deze output.

(b) Teken het bijbehorende logische circuit.

Hoofdstuk 7

Genererende functies

7.1 Eindige genererende functies

In dit hoofdstuk kijken we naar "tellen" vanuit een een andere oogpunt.
We zagen in het hoofdstuk over combinatoriek immers dat via het binomium van newton dat

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{r}x^r + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

Bijvoorbeeld voor $n = 5$ krijgen we

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5. \tag{7.1}$$

De coëfficiënt van x^r komt dan precies overeen met het aantal manieren om r objecten te kiezen uit 5 objecten. Dit is zinvol om dit zo te bekijken, omdat de coëfficiciënt van x^r in $(1+x)^5$ precies het aantal manieren is om de "x" te kiezen in plaats van de "1" van precies r factoren van het product

$$(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$$

Het volgende voorbeeld geeft dit aan in een meer concrete context.

VOORBEELD 7.1 Je wil naar de les komen en wil twee stukken fruit nemen uit de fruitmand van thuis, waarin 1 appel, 1 peer, 1 pruim, 1 mandarijn en 1 banaan ligt. Op hoeveel manieren kan je dit doen?
Als we kijken naar de inleiding komt dit overeen met de coëfficiënt bij x^2, namelijk $\binom{5}{2} = 10$. Meer nog, uit de uitdrukking (7.1) krijgen we ineens het aantal manieren dat je elk aantal stukken fruit kan kiezen.

We zouden dit nog beter kunnen zien door

$$(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$$

te bekijken als

$$(0 \text{ appels} + 1 \text{ appel})(0 \text{ peren} + 1 \text{ peer})(0 \text{ pruimen} + 1 \text{ pruim})(0 \text{ mandarijnen} + 1 \text{ mandarijn})(0 \text{ bananen} + 1 \text{ banaan})$$

zodat je duidelijk ziet wat het verband is tussen de coëfficiënt van x^r in $(1+x)^5$ en aantal manieren om r stukken fruit te kiezen.

VOORBEELD 7.2 We zouden het vorige voorbeeld opnieuw kunnen bekijken, maar dan met een fruitmand met 2 appels, 1 peer, 1 pruim en 1 banaan ligt. Op hoeveel manieren kan je nu 2 stukken fruit kiezen?

We zouden natuurlijk de telmethodes uit de vorige hoofdstukken kunnen gebruiken, maar we gaan nu trachten te kijken naar een uitwerking zoals in voorbeeld 7.1, zodat de coëfficiënt bij x^r precies het aantal mogelijkheden weergeeft.

Nu kijken we naar de veelterm

$$\underbrace{(1+x+x^2)}_{\text{appel}}\underbrace{(1+x)}_{\text{peer}}\underbrace{(1+x)}_{\text{pruim}}\underbrace{(1+x)}_{\text{banaan}}. \tag{7.2}$$

Nu kan je aan de uitdrukking

$$(0 \text{ appels} + 1 \text{ appel} + 2 \text{ appels})(0 \text{ peren} + 1 \text{ peer})(0 \text{ pruimen} + 1 \text{ pruim})(0 \text{ bananen} + 1 \text{ banaan})$$

denken om (7.2) beter te begrijpen. Nu kan je immers 0, 1 of 2 appels kiezen, en 0 of 1 peren, pruimen en bananen. Het aantal manieren om dit te doen is dus precies de coëfficiënt van x^2 in (7.2):

$$(1+x+x^2)(1+x)(1+x)(1+x) = 1+4x+7x^2+7x^3+4x^4+x^5. \tag{7.3}$$

Inderdaad, even controleren levert ons de volgende 7 situaties op die mogelijk zijn:

aantal appels	2	1	1	1	0	0	0
aantal peren	0	1	0	0	1	1	0
aantal pruimen	0	0	1	0	1	0	1
aantal bananen	0	0	0	1	0	1	1

Zo geeft de derde kolom bijvoorbeeld de mogelijkheid om x^2 te maken met een x van de eerste factor, een 1 van de tweede factor, een x van de derde factor en een 1 van de vierde factor.

Ook hier komt de coëfficiënt van x^r in (7.2) overeen met het aantal manieren om r stukken fruit te kiezen.

OPMERKING 7.3 Merk op dat in (7.2) te onderscheiden objecten (bv appel en peer) aanleiding geven tot verschillende factoren, terwijl niet te onderscheiden objecten (bv 2 appels) aanleiding geven tot dezelfde factor.

DEFINITIE 7.4 **Indien er een oneindige rij**

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

gegeven is, waarbij voor zekere n geldt dat $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$, dan noemen we

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

de *genererende functie* van deze rij.

Zo is in voorbeeld 7.2 a_r het aantal manieren om r objecten te kiezen uit de fruitmand met twee appels, een peer, een pruim en een banaan. We hebben dat $a_6 = a_7 = a_8 = \cdots = 0$, en we vinden dat de genererende functie voor $(a_r)_r$ gegeven wordt door

$$(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x)(1 + x) = 1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + 4x^4 + x^5.$$

VOORBEELD 7.5 Veronderstel dat je naar de bakker moet en dat je r taartjes moet kopen. De bakker heeft nog 3 kaastaartjes, 2 abrikozentaartjes en 4 aardbeientaartjes ter beschikking. Op hoeveeel manieren kan je kiezen?
Gelijkaardig aan de vorige oefeningen vinden we de genererende functie

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + x^3)}_{\text{kaas}}\underbrace{(1 + x + x^2)}_{\text{abrikoos}}\underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)}_{\text{aardbei}} \tag{7.4}$$

Na uitwerken vinden we de veelterm

$$1 + 3x + 6x^2 + 9x^3 + 11x^4 + 11x^5 + 9x^6 + 6x^7 + 3x^8 + x^9$$

We kunnen dus op 6 verschillende manieren 7 taartjes kiezen. Overlopen we terug expliciet deze manieren dan vinden we

aantal kaastaartjes	3	3	3	2	2	1
aantal abrikozentaartjes	2	1	0	2	1	2
aantal aardbeientaartjes	2	3	4	3	4	4
	↑		↑		↑	↑

Als we nu veronderstellen dat de **aardbeientaartjes enkel per twee** in een doosje gekocht kunnen worden, dan zijn er slecht 4 van de 6 mogelijkheden meer mogelijk. De genererende functie wordt ook anders! Voor de nieuwe situatie vallen de termen x en x^3 weg in de laatste factor van (7.4) weg, zodat de nieuwe genererende functie gegeven wordt door:

$$\begin{aligned}&\underbrace{(1 + x + x^2 + x^3)}_{\text{kaas}}\underbrace{(1 + x + x^2)}_{\text{abrikoos}}\underbrace{(1 + x^2 + x^4)}_{\text{aardbei}}\\ &\qquad = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 6x^4 + 6x^5 + 5x^6 + 4x^7 + 2x^8 + x^9\end{aligned}$$

en we vinden dat de coëfficieënt van x^7 inderdaad 4 is.

7.2 Formele machtreeksen

In het voorbeeld 7.5 kon er gekozen worden uit 9 mogelijke taartjes. In de praktijk zijn er ook voorbeelden mogelijk waarbij er gekozen kan worden uit een oneindig gamma. Daarom passen we voorbeeld 7.5 wat aan.

VOORBEELD 7.6 Veronderstel dat een grote firma naast de bakker een grote abrikozentaartenfabriek bouwt. Hierdoor zal (theorisch althans) de voorraad abrikozentaartjes van de bakker oneindig groot zijn. Helaas beschikt de bakker wel nog maar over 3 kaastaartjes en 4 aardbeientaartjes, die bovendien per twee verkocht dienen te worden. We zoeken opnieuw een genererende functie die het aantal manieren om r taartjes te kopen bepaald. Hiertoe gaan we de term $(1+x+x^2)$ in (7.4) vervangen door

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots),$$

waarbij de machten van x oneindig doorlopen.

We hebben nu oneindig veel machten van x, en hierbij moeten we erg voorzichtig zijn, aangezien dat als we een getal invullen voor x (bv $x=1$), we een oneindige som kunnen uitkomen. We gaan dit probleem echter vermijden, aangezien we in de context van dit hoofdstuk, nooit waarden gaan invullen voor x.

DEFINITIE 7.7 **We noemen een uitdrukking van de vorm**

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,$$

een *formele machtreeks*. We kunnen formele machtreeksen optellen en vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)&+(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots)\\ &=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3+\cdots\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}&(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots)\\ &=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+(a_0b_3+a_1b_3+a_2b_1+a_3b_0)x^3+\cdots\end{aligned}$$

Aangezien optellingen en vermenigvuldigen gelijkaardig gedefinieerd zijn als bij gewone veeltermen, kunnen ook veeltermen vermenigvuldigen met formele machtreeksen etc (We kunnen veeltermen beschouwen als formele machtreeksen met oneindig veel coëfficiënten gelijk aan 0). We kunnen het begrip genererende functie dan ook veralgemenen.

DEFINITIE 7.8 **Indien er een oneindige rij**

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

gegeven is, dan noemen we de formele machtreeks

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

de *genererende functie* van deze rij.

VOORBEELD 7.9 **(vervolg voorbeeld 7.6)**
De genererende functie het aangepaste voorbeeld wordt dus

$$\underbrace{(1+x+x^2+x^3)}_{\text{kaas}}\underbrace{(1+x+x^2+x^3+\cdots)}_{\text{abrikoos}}\underbrace{(1+x^2+x^4)}_{\text{aardbei}}$$

Dit product kunnen we uitwerken, bijvoorbeeld door eerst de eerste twee factoren te vermendigvuldigen:

$$\begin{aligned}
(1 + x{+}x^2 + x^3)&(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)\\
&= 1(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)\\
&\quad + x(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)\\
&\quad + x^2(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)\\
&\quad + x^3(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)\\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots\\
&\quad\quad x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots\\
&\quad\quad\quad x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots\\
&\quad\quad\quad\quad x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots\\
&= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 4x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

Om de volledige genererende functie te krijgen, vermenigvuldigen we nu dit resultaat met $(1 + x^2 + x^4)$ en we krijgen (na uitrekenwerk)

$$\begin{aligned}
(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 4x^5 + \cdots)&(1 + x^2 + x^4)\\
&= 1 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + 10x^5 + 11x^6 + 12x^7 + 12x^8 + 12x^9 + \cdots
\end{aligned}$$

waarbij de coëfficiënt van x^r gelijk is aan 12 indien $r \geq 7$.

VOORBEELD 7.10 In een restaurant kan je een broodje kopen van € 2 of een kom soep eten voor € 3. Noemen we nu a_r het aantal manieren om r euro uit te geven aan broodjes en kommen soep. We zoeken zoals steeds een genererende functie voor $(a_r)_r$).
In dit geval kunnen we gebruik maken van

$$\underbrace{(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)}_{\text{broodjes}}\underbrace{(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)}_{\text{soep}}$$

Een term uit de eerste factor kiezen bepaald dus of we voor € 0, € 2, € 4, ... aan broodjes uitgeven en analoog voor de tweede factor in termen van geld voor soep.
Uitwerking van de genererende functie levert

$$\begin{aligned}(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdot)\\ = 1+x^2+x^3+x^4+x^5+2x^6+x^7+2x^8+2x^9+2x^{10}+\ldots\cdots\end{aligned}$$

Er zijn bijvoorbeeld 2 mogelijkheden om € 8 uit te geven (welke?).

VOORBEELD 7.11 Veronderstel dat je over een grote voorraad postzegels van 1, 2 en 3 cent beschikt (alle zegels van 1 cent zijn identiek, etc). Bepaal nu een genererende functie voor $(a_r)_r$, waarbij a_r het aantal manieren is om waarde r bekomen als je 3 postzegels gebruikt, waarbij de volgorde van belang is.
We creëren nu een genrerende functie door in de eerste factor de eerste postzegel te bekijken (deze heeft 1 mogelijkheid om 1 cent te plakken, aangezien 1-cent-zegels identiek zijn, 1 mogelijkheid voor een 2 cent en 1 mogelijkheid voor 3 cent). Voor de tweede zegel en voor de derde zegel hebben we gelijkaardige factoren. We moeten deze factoren met elkaar **vermenigvuldigen** aangezien we zowel een eerste als een tweede als een derde zegel nodig hebben en we krijgen dus

$$\begin{aligned}(x+x^2+x^3)(x+x^2+x^3)(x+x^2+x^3) &= (x+x^2+x^3)^3\\ &= x^3+3x^4+6x^5+7x^6+6x^7+3x^8+x^9.\end{aligned}$$

Bijvoorbeeld 7 kan je bekomen met $331, 313, 133, 223, 232, 322$.
Op gelijkaardige manier krijg je $(x+x^2+x^3)^4$ als genererende functie voor 4 postzegels.
Als we nu 3 OF 4 postzegels willen plakken, nemen we de **som** van de mogelijkheden en dus krijgen we

$$(x+x^2+x^3)^3+(x+x^2+x^3)^4$$

als genererende functie.
Indien we zouden willen weten wat het totaal aantal manieren is om waarde r te verkrijgen, maar waarbij het aantal postzegels niet uitmaakt, dan krijgen we

$$\begin{aligned}1+&(x+x^2+x^3)+(x+x^2+x^3)^2+(x+x^2+x^3)^3+\cdots\\ &= 1+x+x^2+x^3\\ &\qquad +x^2+2x^3+3x^4+2x^5+x^6\\ &\qquad\qquad +x^3+3x^4+6x^5+7x^6+6x^7+3x^8+x^9\\ &\qquad\qquad\qquad \ddots\\ &= 1+x+2x^2+4x^3+7x^4+\cdots\end{aligned}$$

7.3 Inverse Genererende functies

We kunnen genererende functies optellen en vermenigvuldigen, maar ook het nemen van een inverse genererende functie is (meestal) mogelijk.

STELLING 7.12 *Een genererende functie*

$$S = s_0 + s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + \dots$$

met $s_0 \neq 0$ ***heeft een inverse genererende functie. Met andere woorden, er bestaat een genererende functie*** T ***zodat*** $ST = 1$***.***

Bewijs. We zoeken een

$$T = t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + \dots,$$

zodat

$$\begin{aligned} ST &= (s_0 + s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + \dots)(t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + \dots) \\ &= (s_0t_0) + (s_0t_1 + s_1t_0)x + (s_0t_2 + s_1t_1 + s_2bt_0)x^2 + \cdots \qquad = 1. \end{aligned}$$

Als we nu het linkerlid en het rechterlid met elkaar vergelijken en de coëfficiënten aan elkaar gelijkstellen, dan geeft dit aanleiding tot een oneindig stel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} s_0t_0 &= 1 \\ s_0t_1 + s_1t_0 &= 0 \\ s_0t_2 + s_1t_1 + s_2bt_0 &= 0 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{7.5}$$

Aangezien $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ gekend zijn, kunnen we uit de eerste vergelijking t_0 berekenen. Nu we t_0 kennen, kunnen we uit de tweede vergelijking t_1 bepalen. Met t_0 en t_1 kunnen we dan via de derde vergelijking t_2 bepalen. Dit kunnen we oneindig blijven doorzetten, zodat we een T vinden die de inverse is van S. ■

OPMERKING 7.13 Merk op dat het voorgaande bewijs een constructief bewijs is, waarbij we naast aantonen dat T bestaat, ook een constructiemethode voor T hebben gevonden. In het volgende voorbeeld gebruiken we deze methode.

VOORBEELD 7.14 Indien we proberen de inverse functie te vinden van

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots,$$

dan zoeken we een functie $T = t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + \cdots$ zodat

$$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots)(t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + \cdot) = 1.$$

We gebruiken nu het stelsel (7.5) uit bovenstaand bewijs en vinden achtereenvolgens

$$\begin{aligned}
1t_0 = 1 &\implies t_0 = 1\\
1t_1 + 2t_0 = t_1 + 2 = 0 &\implies t_1 = -2\\
1t_2 + 2t_1 + 3t_0 = t_2 - 4 + 3 = 0 &\implies t_2 = 1\\
1t_3 + 2t_2 + 3t_1 + 4t_0 = t_3 + 2 - 6 + 4 = 0 &\implies t_3 = 0\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Je kan hier verfiëren dat $t_i = 0$ indien $i \geq 3$ (oefening, gebruik inductie). We vinden dus dat de inverse hier gegeven wordt door $1 - 2x + x^2$. Daarom kunnen we de volgende notatie gebruiken:

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - 2x + x^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Deze schrijfwijze met de breuk blijkt zeer handig. Oneindig doorlopende genererende functies kunnen we dus vaak op een korte manier schrijven via een breuk.
Dit is niet toevallig, en eigenlijk hadden we dit reeds gezien, aangezien we de binomiale reeks hebben ingevoerd (eigenschap 4.27 pagina 68). Deze stelling zegt immers dat

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-2} &\overset{4.27}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} 1^{-2-k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} (-1)^k x^k\\
&\overset{4.22}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{2+k-1}{k} (-1)^k x^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k,
\end{aligned}$$

precies wat we hierboven hebben gevonden.

VOORBEELD 7.15 Analoog aan de uitwerking in het vorige voorbeeld vinden we ook dat

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-1} &\overset{4.27}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} 1^{-2-k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-1)^k x^k\\
&\overset{4.22}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1+k-1}{k} (-1)^k x^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.
\end{aligned}$$

We kunnen dus in het vervolg $1+x+x^2+x^3+\cdots$ schrijven als

$$1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}$$

(Merk op dat dit eigenlijk een limietgeval is van de reekssommen van een meetkunde rij.)

OPMERKING 7.16 Je kan nu de twee vorige voorbeelden combineren om aan te tonen dat

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots) = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots.$$

(doen!)

VOORBEELD 7.17 Nu we de inversen kennen van de genererende functies $1+x+x^2+x^3+\cdots$ en $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$, kunnen we hiervan ook aangepaste versies maken:

$$\begin{aligned}
x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \cdots &= x^k(1+x+x^2+x^3+\cdots) = \frac{x^k}{1-x} \\
0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots &= x(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots) = \frac{x}{(1-x)^2} \\
1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots &= 1 + (2x) + (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots = \frac{x^k}{1-2x} \\
1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots &= 1 + (ax) + (ax)^2 + (ax)^3 + \cdots = \frac{x^k}{1-ax}
\end{aligned}$$

Nog veel meer varianten zijn uiteraard mogelijk. De volgende tabel geeft een overzicht van de belangrijkste genererende functies.

Enkele handige genererende functies

$G(x)$	**korte notatie**	**uitgeschreven notatie**
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$1+x+x^2+x^3+\cdots$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$	$1-x+x^2-x^3+\cdots$
$\frac{1}{1-x^m}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^{mk}$	$1+x^m+x^{2m}+x^{3m}+\cdots$
$\frac{1}{1-cx}$	$\sum_{k=0}^{\infty} c^k x^k$	$1+cx+c^2x^2+c^3x^3+\cdots$
$\frac{1}{(1-x)^m}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} x^k$	$1+mx+\binom{m+1}{2}x^2+\binom{m+2}{3}x^3+\cdots$
$\frac{1}{(1-x)^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$	$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$
$\frac{x}{(1-x)^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$	$0+x+2x^2+3x^3+\cdots$
$(1+x)^c$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{c}{k} x^k$	$1+cx+\binom{c}{2}x^2+\binom{c}{3}x^3+\cdots$
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots$

VOORBEELD 7.18 We kunnen in bovenstaande formules ook nog andere waarden dan x invullen. Laten we daarom even terugkijken naar voorbeeld 7.11. Daar vonden we de functie

$$1+(x+x^2+x^3)+(x+x^2+x^3)^2+(x+x^2+x^3)^3+\cdots$$

Schrijven we echter $u = x+x^2+x^3$, dan vinden we

$$1+u+u^2+u^3+\cdots$$

en die is wel in de tabel te vinden zodat onze genererende functie kort geschreven kan worden als

$$1+(x+x^2+x^3)+(x+x^2+x^3)^2+(x+x^2+x^3)^3+\cdots = \frac{1}{1-(x+x^2+x^3)} = \frac{1}{1-x-x^2-x^3}$$

7.4 Recursievergelijkingen oplossen

Laten we nu terugkeren naar hoofdstuk 3.8 en op zoek gaat naar gesloten formules voor recursief gedefinieerde rijtjes en genererende functies gebruiken om dit te bekomen. Enkele voorbeelden zullen de te gebruiken techniek aangeven:

VOORBEELD 7.19 **De torens van Hanoi**

De Torens van Hanoi is een spel (of puzzel) met n schijven. Het spel bestaat uit een plankje met daarop drie stokjes. Bij aanvang van het spel is op een van de stokjes een kegelvormige toren van schijven met een gat in het midden geplaatst. Elke schijf heeft een verschillende diameter en de schijven zijn zo geplaatst dat ze de kleinste bovenop en de grootste onderop ligt.
Het doel van het spel is om de complete toren van schijven te verplaatsen naar een ander stokje, waarbij de volgende regels in acht genomen dienen te worden:

- Er mag slechts 1 schijf tegelijk worden verplaatst.
- Nooit mag een grotere schijf op een kleinere rusten.

Het probleem wordt opgelost door te kijken naar kleinere torens, immers, een toren van hoogte n kunnen we verplaatsen als we een toren van hoogte $n-1$ kunnen verplaatsen. Verplaats namelijk de bovenste $n-1$ naar een stokje waar je niet moet eindigen, dan verplaats je de grootste schijf naar het stokje waar je moet eindigen en dan verplaats je de toren met $n-1$ schrijven naar dat stokje.
Indien h_n het aantal verplaatsingen is dat je zo doet, krijgen we dus de volgende recursievergelijking:

$$h_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n = 0 \\ 2h_{n-1}+1 & \text{als } n \geq 1 \end{cases}$$

Nu proberen we deze recursieve formule om te zetten naar een gesloten formule.
Bekijk nu de genererende functie

$$H = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + \cdots .$$

We kunnen in deze functie elke h_i (behalve h_0) vervangen door $2h_{i-1}+1$ en zo opnieuw op zoek gaan naar H. We krijgen

$$\begin{aligned} H &= 0 + (2m_0+1)x + (2m_1+1)x^2 + (2m_2+1)x^3 + \cdots \\ &= 2x(m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \cdots) + x(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &= 2xH + x\frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Uit deze gelijkheid gaan we nu oplossen naar H. We vinden

$$H - 2xH = \frac{x}{1-x},$$

of nog

$$H(1-2x) = \frac{x}{1-x}.$$

We vinden

$$H = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}.$$

We hebben nu de genererende functie gevonden, maar het staat wel nog in de “inverse notatie” en we zoeken de coëfficiënten! Bovendien komt H niet voor in onze tabel van veelvoorkomende genererende functies. We kunnen dit echter oplossen door $H = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$ te splitsen in partieelbreuken.
We willen nu H schrijven als

$$H = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x}$$

met a en b constanten. We vinden:

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)(1-2x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x} = \frac{a(1-2x)+b(1-x)}{(1-x)(1-2x)} \\ &= \frac{(a+b)+(-2a-b)x}{(1-x)(1-2x)}\end{aligned}$$

Als we nu de coëfficiënten in de teller aan elkaar gelijkstellen, dan krijgen we

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a-b=1 \end{cases}$$

met als oplossing $a=-1$ en $b=1$. We vinden dus

$$H = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x}$$

Deze breuken zijn wel te vinden in onze tabel, zodat we dit wel meteen kunnen schrijven in de somnotatie

$$\begin{aligned}H &= -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2^k - 1)x^k\end{aligned}$$

We kunnen dus besluiten dat $h_k = 2^k - 1$.

VOORBEELD 7.20 In een tweede voorbeeld zetten we de recursieve formule van s_n om naar een gesloten formule.

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n=0 \text{ of } n=1 \\ -s_{n-1}+6s_{n-2} & \text{als } n \geq 2 \end{cases}$$

We noemen S de genererende functie van $(s_n)_n$ en zoeken opnieuw S terug nadat we de recursiebetrekking hebben gebruikt:

$$\begin{aligned}S &= s_0 + s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + s_4x^4 + \cdots \\ &= 1 + x + (-s_1 + 6s_0)x^2 + (-s_2 + 6s_1)x^3 + (-s_3 + 6s_2)x^4 + \cdots \\ &= 1 + x - x(s_1x + s_2x^2 + s_3x^3 + \cdots) + 6x^2(s_0 + s_1x + s_2x^2 + \cdots) \\ &= 1 + x - x(S-1) + 6x^2S \\ &= 1 + 2x - xS + 6x^2S\end{aligned}$$

Dit kunnen we herschrijven:

$$\begin{aligned}S + xS - 6x^2S &= 1 + 2x \\ (1 + x - 6x^2)S &= 1 + 2x \\ S &= \frac{1+2x}{1+x-6x^2} \\ S &= \frac{1+2x}{(1+3x)(1-2x)}\end{aligned}$$

Opnieuw splitsen we dit in partieelbreuken, we vinden

$$\frac{1+2x}{(1+3x)(1-2x)} = \frac{a}{1+3x} + \frac{b}{1-2x}$$

Op gelijke noemer zetten geeft dan

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -2a + 3b = 2 \end{cases}$$

Oplossen geeft $a = \frac{1}{5}$ en $b = \frac{4}{5}$. Zo vinden we

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{5}\frac{1}{1+3x} + \frac{4}{5}\frac{1}{1-2x} \\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-3)^k x^k + \frac{4}{5}\sum_{k=0}^{\infty}2^k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}(-3)^k + \frac{4}{5}2^k\right)x^k\end{aligned}$$

We vinden dus $s_n = \dfrac{1}{5}(-3)^n + \dfrac{4}{5}2^n$.

Bij wijze van oefeningen kunnen de voorbeelden uit hoofdstuk 3.8 geprobeerd worden om op deze manier uit te werken (bv rij van Fibonacci, rij van Lucas etc.)

7.5 Oefeningen

7.1. Bepaal een genererende functie voor a_r, indien a_r overeenkomt met het aantal manieren om r boeken te kiezen uit 7 verschillende Harry Potter boeken en vijf identieke boeken over discrete wiskunde.

7.2. Bepaal een genererende functie voor a_r, indien a_r overeenkomt met het aantal manieren om r euro uit te geven aan 3 verschillende boeken van €7 (er is slecht 1 exemplaar van elk) en een oneindig aantal identieke boeken van €9.

7.3. Bepaal een genererende functie voor a_r, indien a_r overeenkomt met het aantal oplossingen van $a+b=r$, met a en b elementen van de verzameling $\{1,2,4,8,16,\ldots\}$.

7.4. Bepaal een genererende functie voor a_r, indien a_r overeenkomt met het aantal oplossingen van $p+q=r$, met p en q priemgetallen. Schrijf dit uit tot x^{10}. Het is een wiskundig vermoeden (*Het vermoeden van Goldbach*), dat $a_r > 0$ voor elk even getal strikt groter dan 2.

7.5. Bepaal een genererende functie voor a_r, indien a_r overeenkomt met het aantal oplossingen van $2^k + p = r$, met k een natuurlijk getal en p een priemgetal. Wat is de kleinste waarde van $r > 2$ waarvoor $a_r = 0$?

7.6. Bepaal een genererende functie voor a_r, indien a_r overeenkomt met het aantal oplossingen van $a^2+b^2+c^2+d^2=r$, met a, b, c en d natuurlijke getallen. Schrijf dit uit tot x^{10}. Er kan bewezen worden dat $a_r > 0$ voor elke $r \in \mathbb{N}$ (*Vier kwadratenstelling van Lagrange*).

7.7. Bepaal de inverse van de gegeven genererende functie.

(a) $1-3x$

(b) $1-5x$

(c) $1+2x+4x^2+8x^3+\cdots$

(d) $1-3x+9x^2-27x^3+\cdots$

(e) $1+x^2$

(f) $1+2x^3$

(g) $1-x-x^2$

(h) $1+x+x^3$

(i) $2+6x$

(j) $\frac{1}{3}+x^4$

7.8. Veronderstel dat de rij s_n recursief gegeven wordt door

$$s_n = as_{n-1} + b$$

(hierbij is ook de waarde van s_0 gegeven en zijn a en b constanten met $a \neq 1$).

(a) Toon aan dat als S een genererende functie is voor s_n, dat dan S voldoet aan

$$S = s_0 + axS + bx(1-x)^{-1}$$

(b) Bepaal k_1 en k_2 uit de gelijkheid

$$\frac{s_0 + (-s_0 + b)x}{(1-ax)(1-x)} = \frac{k_1}{1-ax} + \frac{k_2}{1-x}$$

(c) Gebruik het vorige om de volgende gesloten formule voor s_n aan te tonen:

$$s_n = \left(s_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n - \frac{b}{a-1} \quad \text{voor } n \geq 0$$

7.9. Veronderstel dat de rij s_n recursief gegeven wordt door

$$s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$$

(hierbij is ook de waarde van s_0 en s_1 gegeven). Veronderstel bovendien dat

$$x^2 - ax - b = (x - r_1)(x - r_2).$$

Bepaal ook hier, gelijkaardig als in de vorige oefening, een gesloten formule s_n. Maak hiervoor het onderscheid tussen het geval $r_1 \neq r_2$ en het geval $r_1 = r_2$.

Dit zou moeten overeenkomen met de formule die we in sectie 3.8 gevonden hebben.

7.10. **China Girls Math Olympiad 2004**

Een spel kaarten bevat 32 kaarten, waarvan

- 10 gele kaarten, genummerd van 1 tot 10.
- 10 blauwe kaarten, genummerd van 1 tot 10.
- 10 rode kaarten, genummerd van 1 tot 10.
- 2 groene kaarten (Jokers) met het nummer 0.

Elke kaart met nummer i krijgt als waarde 2^i. Op hoeveel manieren kan je een groep maken van kaarten uit dit spel zodat de som van de waarden gelijk is aan 2014?

7.11. De rij $(s_n)_n$ wordt gegeven door het recursieve voorschrift

$$\begin{cases} s_0 = -6 \\ s_1 = 10 \\ s_n = s_{n-1} + 6s_{n-2} + 6n - 1, & \text{als } n \geq 2. \end{cases}$$

Geef een gesloten formule voor s_n.

7.12. We willen onze boodschappenmand vullen met n stukken fruit, te kiezen uit appels, peren, appelsienen en kiwi's.

- Het aantal appels in de mand moet even zijn.
- Het aantal peren in de mand moet een vijfvoud zijn.
- Er mogen maximum 4 appelsienen in de mand zitten.
- Er mag maximum 1 kiwi in de mand zitten.

Op hoeveel manieren kan ik mijn mand vullen? (los dit, met bewijs, op voor algemene n)

7.13. *examen 2016-2017.*

Kijk naar het recursief gedefinieerd rijtje $(a_n)_n$:

$$a_0 = 1 \quad \text{en} \quad a_n - 2a_{n-1} = 3n - 3 \quad \text{als } n \geq 1$$

Gebruik genererende functies om een gesloten formule te bekomen van $(a_n)_n$.

7.14. *Examen 2016-2017.*

Vijf mensen die rode hoeden dragen verspreiden een roddel. In het eerste uur vertelt ieder van hen de roddel aan een persoon die nog geen rode hoed draagt. Deze nieuwe *insiders* zetten dan onmiddellijk een rode hoed op en verspreiden de roddel verder. Dezelfde trend zet zich verder volgens de volgende regel dat elke persoon de roddel aan 1 persoon vertelt in het het eerste uur nadat hij/zij de roddel heeft gehoord en aan 9 personen in elk daaropvolgende uur. Niemand zet zijn/haar hoed af. Hoeveel mensen dragen rode hoeden na n uur?