

HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM



30 NĂM OLYMPIC CƠ HỌC TOÀN QUỐC 2014-2018 Cơ học kỹ thuật

Đề thi

Lời giải

Bài tập chọn lọc



NHÀ XUẤT BẢN BÁCH KHOA – HÀ NỘI
HÀ NỘI 2019

HỘI CƠ HỌC VIỆT NAM

CƠ HỌC KỸ THUẬT

ĐỀ THI – ĐÁP ÁN 2014-2018
&
BÀI TẬP CHỌN LỌC

Ban biên tập:

GS.TSKH. Đỗ Sanh

PGS. Nguyễn Quang Hoàng

ThS. Nguyễn Văn Quyền



NHÀ XUẤT BẢN BÁCH KHOA – HÀ NỘI
HÀ NỘI 2019

LỜI NÓI ĐẦU

(cho lần xuất bản 30 năm Olympic Cơ học kỹ thuật toàn quốc)

Olympic Cơ học đã tổ chức lần thứ 30, một chặng đường vất vả và rất đáng tự hào. Để ghi nhận đóng góp của đội ngũ, chúng tôi xuất bản “Kỷ yếu 30 năm Olympic Cơ học toàn quốc, môn Cơ học kỹ thuật” cho cả hai môn thi phần lý thuyết cơ bản và phần ứng dụng tin học.

Vào dịp kỷ niệm 25 năm tổ chức Olympic, Ban Tổ chức Olympic Cơ học đã cho xuất bản đầy đủ các đề thi cùng lời giải của hai môn thi về Cơ học kỹ thuật, nên trong lần xuất bản này chúng tôi chỉ tiếp tục xuất bản các nội dung gồm đề thi và Đáp án của 5 năm tiếp theo (2014-2018) và phần các bài tham khảo chỉ giữ lại các bài chưa được sử dụng và bổ sung một số bài mới. Các bài này phần nào định hướng cho các đề thi sắp tới với mong muốn sẽ góp phần xây dựng ngân hàng các đề thi. Hy vọng rằng cuốn sách này sẽ giúp cho các thí sinh trong việc tìm hiểu các nội dung cơ bản của các đề thi của các kỳ thi sắp tới. Chính hướng này mở ra triển vọng góp phần giúp các sinh viên ham thích môn Cơ học kỹ thuật, tạo điều kiện phổ cập các kiến thức cơ học trong giới trẻ, phục vụ ngày càng tốt hơn vào việc giải quyết các bài toán kỹ thuật. Hy vọng điều này sẽ đóng góp cho sự phát triển bền vững phong trào Olympic Cơ học.

Lần xuất bản này chúng tôi đã nhận được một số bài từ các thầy TS. Nguyễn Thành Sơn (Trường ĐH Kiến trúc, TP. Hồ Chí Minh), GS. Đỗ Sanh và PGS. Nguyễn Quang Hoàng (Trường ĐH Bách khoa Hà Nội). Thay mặt Ban Biên soạn, chúng tôi xin cảm ơn sự tham gia nhiệt thành của các thầy.

Olympic lần thứ 30 cũng vào dịp kỷ niệm 10 năm GS.VS. Nguyễn Văn Đạo ra đi. Sinh thời GS. Đạo luôn quan tâm đến phong trào Olympic Cơ học cũng như việc tổ chức các kỳ thi. Dù rất bận nhiều công việc, nhưng GS. luôn có mặt tại tất cả các buổi thi cũng như các buổi trao giải. Quỹ Tài năng Cơ học mang tên Giáo sư đã tặng các phần thưởng cho những sinh viên đạt giải xuất sắc.

Chịu trách nhiệm xuất bản lần này là GS. TSKH. Đỗ Sanh, PGS.TS. Nguyễn Quang Hoàng và ThS. Nguyễn Văn Quyền. Đặc biệt Tuyển tập lần xuất bản này nhận được sự hỗ trợ của TS. Đoàn Quốc Việt, Chủ tịch Tập đoàn BIM GROUP. Ban biên soạn chân thành cảm ơn sự hỗ trợ quý giá này.

Ban Biên soạn mong nhận được sự đóng góp vào nội dung cho ngân hàng đề thi cũng như các ý kiến của các độc giả. Các đóng góp xin gửi về: Tiểu ban Olympic Cơ học, Hội Cơ học Việt Nam, 264 Đội Cấn, Ba Đình, Hà Nội.

Hà nội, ngày 30 tháng 4 năm 2019

Ban Biên soạn

MỘT VÀI NÉT VỀ OLYMPIC CƠ HỌC TOÀN QUỐC SAU CHẶNG ĐƯỜNG 30 NĂM (1989 – 2018)

1. Tình hình phát triển Olympic Cơ học

Cơ học là một ngành khoa học cơ bản nhằm tìm hiểu các quy luật của tự nhiên để làm phong phú tư duy con người và tìm cách ứng dụng vào thực tế sản xuất đồng thời đóng vai trò quan trọng đối với các ngành kỹ thuật, chính nó là cơ sở khoa học cho nhiều ngành chủ chốt thuộc lĩnh vực này. Đã từ lâu, theo chương trình của Bộ Giáo dục và Đào tạo, các môn Cơ học luôn chiếm vị trí quan trọng trong kế hoạch đào tạo. Với ý nghĩa đó, nhằm động viên khuyến khích sinh viên các trường học tập và nghiên cứu các môn Cơ học, phát hiện các tài năng trẻ để tiếp tục bồi dưỡng, góp phần xây dựng đội ngũ cán bộ giảng dạy cơ học, Hội Cơ học Việt Nam đã chủ động đề xuất và được sự đồng ý của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Olympic Cơ học toàn quốc đã được tiến hành bắt đầu từ năm 1989.

Đây là một Olympic chuyên ngành ngay từ đầu đã mang tính quốc gia, được tổ chức hàng năm, tiến hành theo Điều lệ và quy trình định giải thưởng một cách chặt chẽ. Thí sinh tham gia là những sinh viên đã được tuyển chọn kỹ từ các trường. Chính trong quá trình tuyển chọn đã khuấy động phong trào thi đua học tập của sinh viên. Để có một đánh giá chung về trình độ, cuộc thi được tiến hành trong phạm vi toàn quốc, cùng một thời gian và cùng một đề thi. Để thuận tiện cho sinh viên dự thi, Olympic Cơ học được tiến hành đồng thời tại ba địa điểm: Hà Nội, Đà Nẵng, Thành phố Hồ Chí Minh. Các trường thay phiên nhau đăng cai Olympic này. Các bài thi được tập trung về một mối do các Ban giám khảo gồm các nhà khoa học, các thầy giáo, cô giáo có uy tín chắm và định giải theo Điều lệ thống nhất trong suốt các kỳ thi Olympic đã qua. Hàng năm, các kết quả của Olympic bao gồm : danh sách các thầy giáo, cô giáo tham gia vào các ban Tổ chức, ban Giám khảo, ra đề, chọn đề, danh sách các sinh viên, các đội đạt giải, danh sách các tổ chức và cá nhân ủng hộ Olympic... đều được ghi trong Kỷ yếu Olympic. Đặc biệt các đề thi và đáp án in trong kỷ yếu đã là các tài liệu tham khảo quý giá cho các trường. Ngoài các thông báo thường xuyên gửi đến các trường về việc triển khai kỳ thi Olympic Cơ học hàng năm, mọi thông tin về Olympic đều được đưa lên Web site của Hội Cơ học Việt nam.

Olympic Cơ học toàn quốc đã lôi cuốn biết bao thế hệ sinh viên từ các trường đại học và cao đẳng trong cả nước. Số lượng môn thi, số lượng trường, số lượng thí sinh tham gia ngày càng tăng: điểm qua một vài mốc:

+ **Lần đầu tiên – năm 1989**: chỉ có 2 môn thi tự luận, có 7 trường với 66 thí sinh tham gia.

+ Lần thứ 10: có 5 môn thi tự luận, có 18 trường với 456 thí sinh tham gia

+ Lần thứ 16: có 7 môn thi tự luận, có 27 trường với 877 thí sinh tham gia

+ Lần thứ 23: có 7 môn thi tự luận và 3 môn thi UD Tin học (thi trên máy), có 38 trường với 1190 thí sinh tham gia

+ **Lần thứ 30 – năm 2018**: có 12 môn thi gồm: 7 môn thi tự luận và 5 môn thi UD Tin học (thi trên máy) , có 39 trường với 1262 thí sinh tham gia.

Như vậy là các môn thi đã bao gồm hầu hết các môn Cơ học được dạy trong các trường Đại học và Cao đẳng Kỹ thuật, nhất là những môn UD Tin học.

Hiện đã có 20 trường đăng cai Olympic Cơ học trong đó có những trường đăng cai nhiều lần như:

+ Miền Bắc : các trường đã đăng cai 5 lần là ĐH Bách khoa Hà nội; ĐH Xây dựng; ĐH Thủy lợi; ĐH Kiến trúc

+ Miền Nam: ĐH Bách khoa Tp.HCM (9 lần); ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM (5 lần)

+ Miền Trung: (đặc biệt) ĐH Bách khoa – ĐH Đà Nẵng đăng cai suốt từ lần thứ 2 đến nay.

2. Vài nét đánh giá kết quả Olympic Cơ học

Để xây dựng nền nếp cho việc tổ chức các cuộc thi nhằm đảm bảo tính nghiêm túc, công bằng và chất lượng, Ban tổ chức qua các thời kỳ luôn suy nghĩ, nghiên cứu để bổ sung hoàn chỉnh Điều lệ, xây dựng quy trình, ban hành các quy định phù hợp, kịp thời (với các môn Ứng dụng Tin học, các quy định liên quan đến các phần mềm thường phải cập nhật từng năm)...nhằm giảm thiểu các sai sót, đảm bảo tính bảo mật, nâng cao chất lượng đề thi.

Olympic Cơ học từ lâu đã là một trong những sân chơi trí tuệ cho sinh viên, nó có tác dụng động viên phong trào học tập trong sinh viên. Nhiều trường đã xem Olympic Cơ học toàn quốc như một nhân tố kích thích hoài bão khoa học của sinh viên trường mình. Olympic đã đáp ứng được mục tiêu phát hiện những sinh viên giỏi về các môn Cơ học. Nhiều sinh viên đã phát huy được khả năng của mình qua các kỳ thi Olympic, sau đó được nhà trường, các thầy cô quan tâm tiếp tục bồi dưỡng họ đã trở thành những cán bộ khoa học tốt, nhiều người trong số họ hiện đã là tiến sĩ, phó Giáo sư, thậm chí là Giáo sư tại các trường trong nước cũng như ngoài nước hoặc trở thành các cán bộ giỏi được giao trọng trách ở các lĩnh vực khác nhau. Họ ra trường đi công tác, cuộc thi Olympic luôn là kỷ niệm đẹp trong đời sinh viên của họ.

Bên cạnh đó, thông qua các kỳ thi Olympic Cơ học toàn quốc, bằng việc tham gia bồi dưỡng các đội tuyển của trường mình cũng như có được cơ hội giao lưu, học hỏi trao đổi kinh nghiệm với các đồng nghiệp khác, các giảng viên (nhất là các giảng viên trẻ) tự nâng cao trình độ giảng dạy cũng như tự hoàn thiện mình.

Thành công của 30 kỳ thi Olympic Cơ học toàn quốc đã qua là do công lao đóng góp của rất nhiều người: trước hết phải kể đến sự nhiệt tình hưởng ứng ngày càng đông của các trường, niềm say mê của các bạn sinh viên và đặc biệt là nhiệt huyết của nhiều thế hệ các Thầy, Cô giáo, các nhà khoa học trong việc bồi dưỡng các đội tuyển, ra đề thi, chọn đề, chấm thi và định giải...Chỉ tính riêng đội ngũ các Thầy, Cô trong toàn quốc tham gia chấm thi, ra đề và chọn đề trong mỗi kỳ thi đã có tới hơn 160 GS, PGS, Tiến sỹ, Giảng viên chính và Thạc sỹ, các nhà khoa học có uy tín, đặc biệt đã có sự bổ sung ngày càng đông lực lượng giáo viên trẻ của các trường, các học viện. Chính hình ảnh các Thầy, các Cô tóc đã phai bạc theo thời gian, những người đã sáng lập và tham gia không biết mệt mỏi từ những ngày đầu cho đến tận bây giờ vẫn miệt mài đồng hành cùng với phong trào Olympic Cơ học là những tấm gương sáng, những ngọn lửa nhiệt huyết mãi lan truyền cho các thế hệ học trò không chỉ lòng say mê trong nghiên cứu khoa học mà còn có cả sự tận tâm trong sự nghiệp phát hiện và vun đắp các tài năng trẻ cho đất nước. Một yếu tố quan trọng giúp cho sự duy trì và phát triển của Olympic Cơ học những năm qua là sự quan tâm và ủng hộ thiết thực của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Liên hiệp các Hội Khoa học Kỹ thuật Việt nam, Hội Cơ học Việt nam và Hội sinh viên Việt nam. Tiếp đến là các cơ sở đăng cai ở cả ba miền Bắc, Trung, Nam đã bỏ ra nhiều công sức, đã phải chi một khoản kinh phí không nhỏ, tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho việc tổ chức thi, chấm thi và nhất là lễ tổng kết và trao giải trang trọng tại Hà nội và Thành phố Hồ Chí Minh. Và sau nữa là sự đóng góp, hỗ trợ của các Trường, các Học Viện, các Tập đoàn, các Hội, các Trung tâm, các Công ty và nhiều nhà tài trợ khác.

Một lần nữa, thay mặt Ban tổ chức trong các thời kỳ, xin trân trọng cảm ơn Bộ Giáo dục và Đào tạo, Liên hiệp các Hội Khoa học Kỹ thuật Việt nam, Hội Cơ học Việt nam, Hội sinh viên Việt nam, các cơ sở đăng cai trong 30 kỳ thi Olympic Cơ học toàn quốc đã qua, xin cảm ơn các cơ quan đơn vị đã tài trợ cho Olympic Cơ học, cảm ơn tập đoàn FPT đã có đóng góp cho Quỹ tài năng Cơ học Nguyễn Văn Đạo, cảm ơn lãnh đạo các Trường, các Học Viện đã ủng hộ và tạo điều kiện cho việc duy trì và phát triển phong trào Olympic nói chung và Olympic Cơ học nói riêng.

Hà nội, ngày 30 tháng 4 năm 2019

Thay mặt Ban tổ chức

Trưởng ban

PGS.TS. Nguyễn Đăng Tộ

Mục lục

Phần 1. Đề thi và lời giải các năm 2014-2018

Đề thi năm 2014	3
Đề thi năm 2015	9
Đề thi năm 2016	16
Đề thi năm 2017	25
Đề thi năm 2018	36

Phần 2. Đề thi và lời giải Ứng dụng tin học trong cơ học kỹ thuật 2014-2018

Đề thi năm 2014	47
Đề thi năm 2015	58
Đề thi năm 2016	69
Đề thi năm 2017	76
Đề thi năm 2018	82

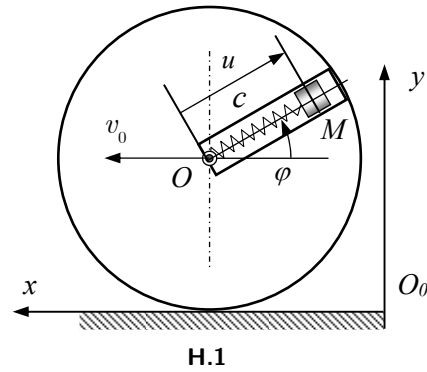
Phần 3. Một số bài tập chọn lọc

A. Đề bài.....	91
B. Lời giải và đáp số.....	139

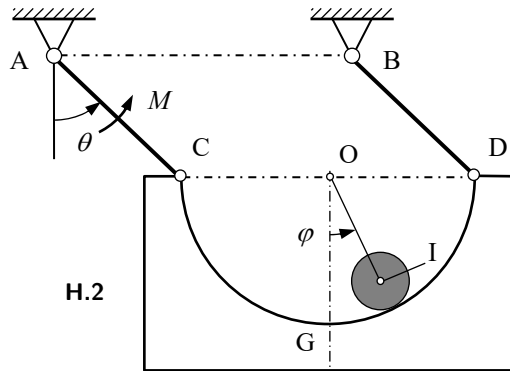
Phần 1.
CÁC ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI
CƠ HỌC KỸ THUẬT
2014-2018

Đề thi năm 2014

Bài 1. Một đĩa tròn bán kính R , lăn không trượt theo phương ngang (trong mặt phẳng thẳng đứng), tâm O có vận tốc $v_0 = \text{const}$ (H.1). Con trượt M chuyển động dọc rãnh thẳng, được xem là chất điểm có khối lượng m , gắn vào đầu lò xo tuyến tính có độ cứng c , có độ dài khi chưa biến dạng là l_0 ($l_0 \ll R$), còn một đầu nối với tâm O . Lực ma sát nhớt giữa con trượt và rãnh trượt $F_{ms} = -\beta \dot{u}$, β – hằng số cho ($\beta \ll m$). Ban đầu rãnh ở vị trí ngang bên phải của tâm O .



- 1) Xác định chuyển động của con trượt dọc theo rãnh.
- 2) Khảo sát chế độ bình ổn ($t \rightarrow \infty$), tính giá trị lớn nhất của v_0 để chất điểm M không chạm đến vành, tức $|u| < R$ (trong kết quả tính toán để đơn giản lấy $l_0 = 0$ và $\beta = 0$).
- 3) Xác định phản lực pháp tuyến do rãnh tác dụng lên con trượt trong chế độ bình ổn tại thời điểm rãnh trượt làm với phương ngang góc φ (lấy $\beta = 0$).



Bài 2. Cho sơ đồ máy nghiền như H. 2. Các thanh treo AC và BD có cùng chiều dài L , mảnh và cứng, khối lượng bé được bỏ qua. Bàn nghiền có khối lượng m_1 , được khoét dạng hình

bán nguyệt có bán kính $OC=OD=OG=R$, $AB=CD$. Bánh nghiền có dạng đĩa tròn, đồng chất, khối lượng m_2 , bán kính $r = kR$ lăn không trượt dọc rãnh khoét, k - hằng số cho. Thanh AC chịu tác dụng ngẫu lực có mô men M . Cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng đứng. Chọn các tọa độ suy rộng θ, φ .

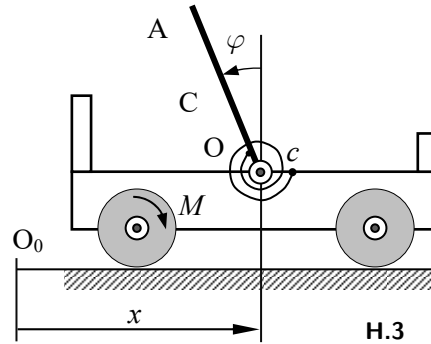
- 1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.
- 2) Tính phản lực tiếp giữa bánh nghiền và bàn nghiền trong trường hợp $\theta(t)$ là hàm đã biết của biến thời gian t .

3) Xác định chuyển động của bánh nghiêng trong trường hợp: $\theta = \theta_0 \sin \Omega t$, trong đó θ_0, Ω là những hằng số đã cho, với giả thiết $\theta_0 \ll 1$; $\varphi \ll 1$; $\sin \varphi \approx \varphi$; $\cos \varphi \approx 1$; $\sin \theta \approx \theta$; $\cos \theta \approx 1$ và bỏ qua vô cùng bé từ bậc hai trở lên. Tính toán số với các số liệu sau:

$$l = 1,5R = 1 \text{ m}; \quad k = 0,6; \quad \Omega = 1 \text{ rad/s}; \quad \theta_0 = 0,05 \text{ rad}; \quad g \approx 10 \text{ m/s}^2.$$

Bài 3. Ô tô cần cầu có sơ đồ cho trên hình 3.

Xe có khối lượng m_1 , bán kính bánh xe bằng r , khối lượng được bỏ qua. Trục bánh sau chịu tác dụng ngẫu lực có mô men $M = M_0 - \alpha \omega$, trong đó M_0, α là những hằng số đã cho, ω là vận tốc góc của bánh xe sau. Cần trục có chiều dài l , được xem là thanh thẳng đồng chất có khối lượng m_2



liên kết với thân xe bằng lò xo tuyến tính có hệ số cứng c và chịu mô men cản nhớt $M_c = -\beta \dot{\varphi}$, trong đó β là hằng số đã cho ($\beta < m_2 l^2$). Các bánh xe chuyển động lăn không trượt. Cho biết ban đầu cần trục ở vị trí thẳng đứng phía trên, $\varphi(t_0) = 0$, và lò xo không bị biến dạng. Bỏ qua ma sát lăn. Chọn các tọa độ suy rộng là x, φ .

- 1) Viết phương trình vi phân chuyển động của hệ?
- 2) Xét trường hợp xe chạy với vận tốc $v = v_0 - H \cos \omega t$, trong đó v_0, H, ω là các hằng số đã cho. Giả thiết góc φ bé (lấy $\cos \varphi = 1, \sin \varphi = \varphi, H \ll v_0$).
- a) Xác định chuyển động của cần trục OA.
- b) Tính giá trị của H để góc lệch φ không vượt quá một trị số cho phép $[\varphi]$, tức: $\varphi \leq [\varphi]$ với giả thiết bỏ qua dao động tự do và trong tính toán lấy $\beta = 0$.

Lời giải

Bài 1.

Câu 1. a) Viết phương trình chuyển động tương đối (hình 1.1)

- Biểu thức các lực

Lực quán tính theo:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{M^*} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{M0} = \vec{a}_{M0}^n \rightarrow a_e = \omega^2 u$$

$$F_e^{qt} = m a_e = m \omega^2 u; \quad \omega = v_0 / R = \text{const}$$

Lực quán tính Coriolis: có phương vuông góc với rãnh trượt

$$F_C^{qt} = ma_C = 2m\omega v_r = 2m\omega \dot{u}$$

Lực đàn hồi lò xo: $F_{lx} = -c(u - l_0)$

Trọng lực: $P = mg$.

- Phương trình chuyển động tương đối

$$m\ddot{u} = -c(u - l_0) - \beta\dot{u} - mg \sin \omega t + m\omega^2 u$$

$$\rightarrow \ddot{u} + 2\delta\dot{u} + (k_0^2 - 2\omega^2)u = l_0 k_0^2 - g \sin \omega t; \quad k_0^2 = c / m; 2\delta = \beta / m$$

Phương trình chuyển động của M dọc rãnh (2điểm)

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + k^2 u = -g \sin \omega t + k_0^2 l_0; \quad k^2 = (k_0^2 - \omega^2) > \delta^2 > 0$$

Nghiệm của phương trình: Sử dụng phép đổi biến: $\xi = u - l_0 k_0^2 / k^2$

Viết phương trình trong dạng

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + k^2 \xi = -g \sin \omega t$$

$\alpha)$ Giả thiết thực hiện điều kiện :

$$k_0^2 \geq \omega^2 \rightarrow \frac{c}{m} \geq \frac{v_0^2}{R^2} \rightarrow c \geq m \frac{v_0^2}{R^2}$$

$\beta)$ Nghiệm có dạng:

$$u = A e^{-\delta t} \sin(k^* t + \alpha) + \frac{g}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \varepsilon) + \frac{k_0^2}{k^2} l_0$$

$$k^* = \sqrt{k^2 - \delta^2}.$$

Câu 2. Nếu bỏ qua dao động tự do có cản và lấy $\beta \approx 0; l_0 \approx 0$, điều kiện để điểm M không chạm vành

$$|u| \leq R \Rightarrow \frac{g}{k^2 - \omega^2} = \frac{g}{k_0^2 - 2\omega^2} \leq R \Rightarrow \omega^2 \leq \frac{1}{2} k_0^2 - \frac{g}{2R}$$

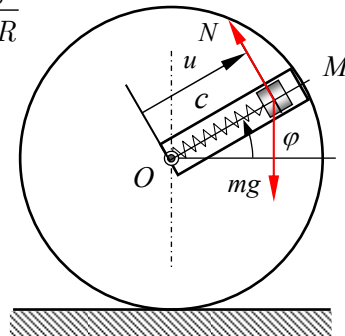
$$\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 \leq \frac{1}{2} k_0^2 - \frac{g}{2R} \Rightarrow v_0 \leq R \sqrt{\frac{c}{2m} - \frac{g}{2R}}$$

Điều kiện:

$$v_0 \leq R \sqrt{\frac{c}{2m} - \frac{g}{2R}}.$$

Câu 3. Xác định phản lực

Sử dụng nguyên lý d'Alembert



$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{lx}, \vec{F}_r, \vec{F}_e^{qt}, \vec{F}_C^{qt}, \vec{F}_c) = 0$$

Chiếu trên phương vuông góc rãnh ta được

$$N - mg \cos \varphi + ma_c = 0 \Rightarrow N = mg \cos \varphi - 2m\omega \dot{u}(t)$$

Bài 2

Câu 1. Lập phương trình chuyển động của hệ

- Biểu thức động năng: Chọn hệ trục có gốc tại A, trục Ax theo phương ngang, hướng sang phải, trục Ay hướng xuống

$$\begin{aligned} \bar{\omega} - \dot{\varphi} &= \frac{R}{r} = \frac{1}{k} \rightarrow \bar{\omega} = \frac{k-1}{k} \dot{\varphi}; & x_I &= l \sin \theta + R[1 + (1-k) \sin \varphi] \\ -\dot{\varphi} & & y_I &= l \cos \theta + R(1-k) \cos \varphi \\ & & \dot{x}_I &= l \cos \theta \dot{\theta} + R(1-k) \cos \varphi \dot{\varphi}; \\ & & \dot{y}_I &= -l \sin \theta \dot{\theta} - R(1-k) \sin \varphi \dot{\varphi}; \end{aligned}$$

$$v_I^2 = l^2 \dot{\theta}^2 + R^2(1-k)^2 \dot{\varphi}^2 + 2lR(1-k) \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta};$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 v^2 + m_2 v_I^2 + J_I \omega^2) = \frac{1}{2} \left\{ m_1 l^2 \dot{\theta}^2 + m_2 (\dot{x}_I^2 + \dot{y}_I^2) + 0.5 m_2 r^2 \omega^2 \right\}$$

$$T = \frac{1}{2} \left[(m_1 + m_2) l^2 \dot{\theta}^2 + 2m_2 lR(1-k) \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta} + 1.5 m_2 R^2 (1-k)^2 \dot{\varphi}^2 \right]$$

- Biểu thức thế năng và lực suy rộng:

$$\Pi = -(m_1 + m_2)gl \cos \theta - m_2 gR(1-k) \cos \varphi$$

$$Q_\theta = M - (m_1 + m_2)gl \sin \theta; \quad Q_\varphi = -m_2 gR(1-k) \sin \varphi$$

- Phương trình chuyển động: Sử dụng PT Lagrange 2

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$\begin{aligned} [(m_1 + m_2)l^2] \ddot{\theta} + m_2 lR(1-k) \cos(\varphi - \theta) \ddot{\varphi} - m_2 lR(1-k) \sin(\varphi - \theta) \dot{\varphi}^2 \\ = M - (m_1 + m_2)gl \sin \theta \end{aligned}$$

$$l \cos(\varphi - \theta) \ddot{\theta} + 1.5R(1-k) \ddot{\varphi} - l \sin(\varphi - \theta) \dot{\theta}^2 = -g \sin \varphi$$

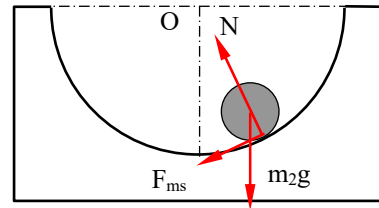
Câu 2.

Xác định phản lực giữa bánh nghiền và bàn nghiền. Phương trình xác định phản lực thành phần tiếp:

$$J_C \bar{\varepsilon}_2 = F_{ms} r \Rightarrow F_{ms} = \frac{J_C}{r} \bar{\varepsilon}_2$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \dot{\omega} = \frac{k-1}{k} \ddot{\varphi} = -\frac{1-k}{k} \ddot{\varphi}$$

Từ phương trình thứ hai giải được



$$\ddot{\varphi} = \frac{-g \sin \varphi - l \cos(\varphi - \theta) \ddot{\theta} + l \sin(\varphi - \theta) \dot{\theta}^2}{1.5R(1 - k)}$$

$$F_{ms} = \frac{J_c}{r} \ddot{\varepsilon}_2 = \frac{m_2 r^2}{2r} \frac{k-1}{k} \ddot{\varphi} = \frac{1}{3} m_2 (g \sin \varphi + l \cos(\varphi - \theta) \ddot{\theta} - l \sin(\varphi - \theta) \dot{\theta}^2)$$

Câu 3

Xác định phương trình chuyển động của bàn nghiền với giả thiết

$$\theta = \theta_0 \sin \Omega t \rightarrow \dot{\theta} = \Omega \theta_0 \cos \Omega t \rightarrow \ddot{\theta} = -\Omega^2 \theta_0 \sin \Omega t$$

Từ phương trình thứ hai ta có:

$$\ddot{\varphi} = \frac{-g \sin \varphi - l \cos(\varphi - \theta) \ddot{\theta} + l \sin(\varphi - \theta) \dot{\theta}^2}{1.5R(1 - k)}$$

Dựa vào giả thiết $\varphi \ll 1, \theta_0 \ll 1$

$$\sin(\varphi - \theta) = \sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta \approx (\varphi - \theta);$$

$$\cos(\varphi - \theta) = \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta \approx 1$$

và số liệu cho

$$l = 1,5R = 1 \text{ m}; \quad k = 0,6; \quad \Omega = 1 \text{ rad/s}; \quad \theta_0 = 0,05 \text{ rad}; \quad g \approx 10 \text{ m/s}^2.$$

ta nhận được phương trình chuyển động của bánh nghiền

$$\ddot{\varphi} + 25\varphi = 2,5\theta_0 \Omega^2 \sin \Omega t \Rightarrow \varphi = \frac{2,5\theta_0 \Omega^2}{25 - \Omega^2} \sin \Omega t = 0,0052 \sin t \text{ (rad)}$$

Bài 3

Câu 1. Lập phương trình vi phân chuyển động

- Biểu thức động năng và thế năng

$$T = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_C^2 + J_C \omega_2^2) = \frac{1}{2} [m_1 \dot{x}^2 + m_2 (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{12} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2]$$

$$x_C = x - \frac{1}{2} l \sin \varphi \rightarrow \dot{x}_C = \dot{x} - \frac{1}{2} l \cos \varphi \dot{\varphi};$$

$$y_C = \frac{1}{2} l \cos \varphi \rightarrow \dot{y}_C = -\frac{1}{2} l \sin \varphi \dot{\varphi};$$

$$v_C^2 = \dot{x}^2 - l \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{4} l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) \dot{x}^2 - m_2 l \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi} + \frac{1}{3} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2]$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c \varphi^2 + \frac{1}{2} m_2 g l \cos \varphi$$

- Biểu thức lực suy rộng

$$Q_x = (M_0 - \alpha \dot{x} / r) / r = F_x - \alpha_1 \dot{x}, \quad F_x = M_0 / r; \alpha_1 = \alpha / r^2$$

$$Q_\varphi = -c\varphi - \beta \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m_2 g l \sin \varphi$$

- Phương trình vi phân chuyển động

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} - \frac{1}{2} m_2 l \cos \varphi \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m_2 l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = F_x - \alpha_1 \dot{x};$$

$$-\frac{1}{2}m_2l\cos\varphi\ddot{x} + \frac{1}{3}m_2l^2\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + c\varphi - \frac{1}{2}m_2gl\sin\varphi = 0$$

Câu 2.

Khảo sát trường hợp xe chạy với chế độ $v_{xe} = v_0 - H \cos \omega t$. Ứng với trường hợp này ($\ddot{x} = H\omega \sin \omega t$, $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$), ta có:

$$\frac{1}{3}m_2l^2\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + (c - \frac{1}{2}m_2gl)\varphi = \frac{1}{2}m_2lH\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + k^2\varphi = h \sin \omega t$$

trong đó: $k^2 = \frac{3(c - \frac{1}{2}m_2gl)}{m_2l^2} > 0$, $\delta = \frac{3\beta}{2m_2l^2} < k$, $h = \frac{3H\omega}{2l}$

Nghiệm trong chế độ bình ổn:

$$\varphi = A \sin(\omega t - \gamma)$$

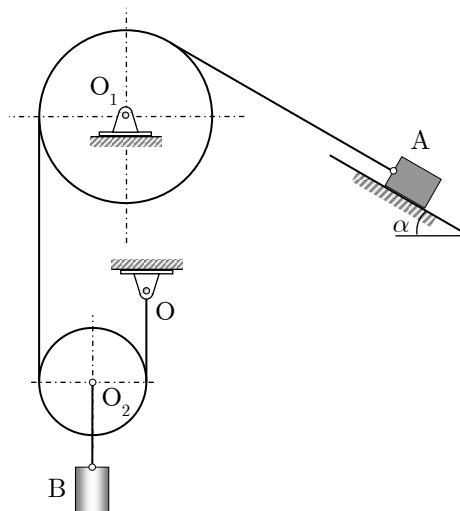
với $A = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$; $\gamma = \arctan \frac{2\delta\omega}{k^2 - \omega^2}$.

Chọn biên độ H để góc lắc của cần trục không vượt quá giá trị cho phép $[\varphi]$. Khi $\beta = 0 \Rightarrow \delta = 0$, ta có:

$$A = \frac{h}{(k^2 - \omega^2)} = \frac{3H\omega}{2l(k^2 - \omega^2)} \leq [\varphi] \Rightarrow H \leq \frac{2l(k^2 - \omega^2)}{3\omega}[\varphi].$$

Đề thi năm 2015

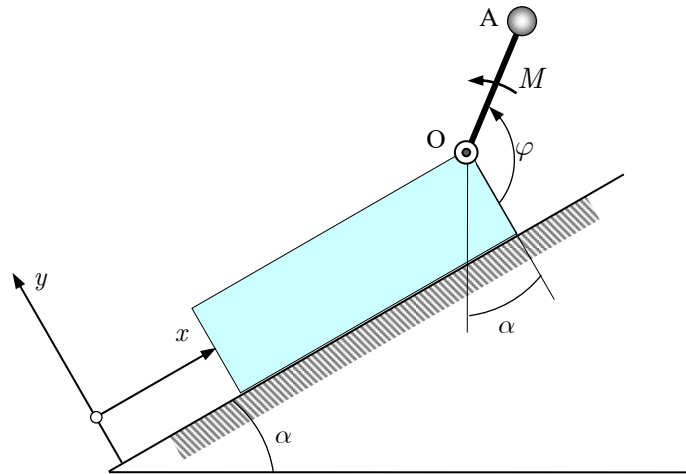
Bài 1. Cho hệ thống tời như hình vẽ. Các ròng rọc tâm O_1 và O_2 là những đĩa đồng chất có bán kính tương ứng r_1 , r_2 , khối lượng m_1 , m_2 . Vật B, có khối lượng m được kéo lên nhờ vật A, có khối lượng m_0 di chuyển theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang góc α , có ma sát với hệ số ma sát trượt khô bằng f . Xem dây nhẹ, không co giãn và hai nhánh dây thẳng đứng luôn song song, còn ròng rọc tâm O_2 được cuốn lên theo nhánh dây bên phải. Bỏ qua ma sát tại ổ trục O_1 . Hệ ban đầu đứng yên.



- 1) Tìm gia tốc của vật B được kéo lên và viết phương trình chuyển động của vật B khi vật A di chuyển xuống dọc mặt phẳng nghiêng.
- 2) Tính sức căng trong các nhánh dây
- 3) Xét trường hợp khi vật B được kéo lên chịu sức cản theo phương đứng tỷ lệ bậc nhất với vận tốc của vật với hệ số β . Tìm chuyển động của vật B trong chế độ bình ổn

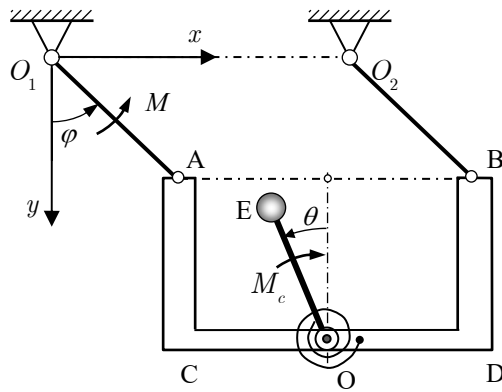
Bài 2. Mô hình máy đầm được cho trên hình. Bàn đầm là tấm đồng chất, có chiều dài $2l$, chiều cao $2h$ khối lượng m_1 di chuyển không ma sát theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang góc $\alpha = \text{const}$. Tay quay OA, khối lượng m_2 , trọng tâm tại O (do cân bằng), có mô men quán tính (khối) đối với trục quay O bằng J, quả văng có khối lượng m được xem như chất điểm gắn vào điểm mút tay quay OA, có chiều dài OA = e.

Tay quay OA chịu tác dụng ngẫu lực có mô men M . Chọn các tọa độ là x và φ , trong đó x là di chuyển của bàn đầm theo mặt phẳng nghiêng, φ - góc giữa OA và phương song song với trục



- 1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ
- 2) Viết phương trình chuyển động của bàn đầm khi góc quay $\varphi = \omega t$ trong đó $\omega = \text{const}$, còn điều kiện đầu ứng với trọng tâm C của bàn rung, nằm yên cách gốc tọa độ một đoạn bằng l (tức $x(0)=0$), còn tay quay OA vuông góc với mặt nghiêng ở phía dưới, tức $\varphi(0) = 0$.
- 3) Tính lực đầm khi tay quay quay đều với ω và tìm điều kiện đối với vận tốc góc ω để bàn đầm luôn luôn tiếp xúc với nền đất

Bài 3. Cho cơ hệ như hình vẽ. Các thanh $O_1A = O_2B = l_1$ là các thanh cứng và khối lượng được bỏ qua. Thùng ABCD dạng chữ nhật ($AB=CD=2a$; $AC=BD=2h$) có trọng tâm tại O, khối lượng m_1 . Thanh OE đồng chất, có khối lượng m_2 và chiều dài l_2 , liên kết với thùng ABCD nhờ bản lề O ($CO=DO$) và lò xo xoắn tuyến tính có độ cứng c và chịu tác dụng mô men cản $\bar{M}_C = -\beta\theta$. Tại đầu mút của thanh OE gắn vật được xem là chất điểm có khối lượng m . Thanh O_1A chịu tác dụng ngẫu lực có mô



mên $M = M_0 - \alpha \dot{\varphi}$, M_0, α là những hằng số đã cho. Bỏ qua ma sát tại các trục quay. Chọn các tọa độ suy rộng đủ là φ, θ

Ban đầu hệ đứng yên ($\varphi(0) = 0; \theta(0) = 0$). Khi $\theta = 0$ lò xo không biến dạng

1) Viết phương trình chuyển động cơ hệ theo các tọa độ suy rộng φ, θ

2) Khảo sát trường hợp khi thanh O_1A có chuyển động theo luật: $\varphi = H \sin \Omega t$; H, Ω là những hằng số đã cho: $H \ll 1$, với giả thiết $\theta \ll 1$; $\cos(\theta - \varphi) \approx 1$ và bỏ qua các vô cùng bé từ bậc hai

3) Tính lực liên kết tại O.

Lời giải

Bài 1.

Câu 1.

a) Biểu thức động năng

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(J_2\omega_2^2 + m_2v^2) + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_0v_A^2;$$

$$\omega_2 = \frac{v}{r_2}; \omega_1 = \frac{2v}{r_1}; v_A = 2v$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} \underbrace{(m + 1.5m_2 + 2m_1 + 4m_0)}_{m_{tg}} v^2 = \frac{1}{2}m_{tg}v^2$$

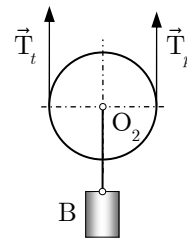
b) Tổng công suất các lực tác dụng:

Lực ma sát: $F_{ms} = fN = fm_0g \cos \alpha$

$$W = [2m_0 \sin \alpha - (m + m_2 + 2fm_0 \cos \alpha)]gv = F_{tg}v$$

c) Gia tốc của vật B được kéo lên:

$$a = \frac{F_{tg}}{m_{tg}} = \frac{[2m_0 \sin \alpha - (m + m_2 + 2fm_0 \cos \alpha)]g}{m + 1.5m_2 + 2m_1 + 4m_0}$$



Câu 2. Tính sức căng của nhánh dây

Viết phương trình vật quay (song phẳng) cho ròng rọc O_2

$$J_2 \ddot{\varepsilon}_2 = (T^p - T^t)r_2$$

$$\rightarrow \frac{m_2 r_2^2}{2} \frac{a}{r_2} = (T^p - T^t)r_2$$

$$\rightarrow T^p - T^t = 0.5m_2 a;$$

Phương trình chuyển động khối tâm đối với hệ gồm vật B và ròng rọc O_2 :

$$(m + m_2)a = T^p + T^t - (m + m_2)g$$

$$\rightarrow T^p + T^t = (m + m_2)(a + g);$$

$$T^p = 0.5[(m + 1.5m_2)a - (m + m_2)g], T^t = 0.5[(m - 0.5m_2)a - (m + m_2)g]$$

Câu 3: Xác định chuyển động vật M khi có cân

$$\frac{d(F_{tg} - \beta v)}{F_{tg} - \beta v} = \frac{d[2m_0g \sin \alpha - (m_1 + m_2 + 2fm_0 \cos \alpha)g - \beta v]}{2m_0g \sin \alpha - (m_1 + m_2 + 2fm_0 \cos \alpha)g - \beta v} = -\beta_0 dt;$$

Trong đó:

$$\beta_0 = \frac{\beta}{m_{tg}} \rightarrow v = v_{gh}(1 - e^{-\beta_0 t}); m_{tg} = m + 1.5m_2 + 2m_1 + 4m_0$$

$$\text{Từ đây: } v_{gh} = \frac{F_{tg}}{\beta} = \frac{2m_0g \sin \alpha - (m_1 + m_2 + 2fm_0 \cos \alpha)g}{\beta}$$

$$\text{Do đó: } y = v_{gh}\left(t + \frac{1}{\beta_0}e^{-\beta_0 t}\right) + const$$

Bài 2.

Câu 1. Viết PTVPCĐ

a) Biểu thức động năng

$$T = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}J\omega^2; \omega = \dot{\varphi}; m_0 = m_1 + m_2$$

$$x_A = x + 2l + e \cos(\varphi - \pi / 2) = x + 2l + e \sin \varphi;$$

$$y_A = e \sin(\varphi - \pi / 2) = -e \cos \varphi; \rightarrow v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 = \dot{x}^2 + e^2\dot{\varphi}^2 + 2e \cos \varphi \dot{x}\dot{\varphi}$$

$$T = \frac{1}{2}(m_0 + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(J + me^2)\dot{\varphi}^2 + me \cos \varphi \dot{x}\dot{\varphi}$$

b) Biểu thức lực suy rộng:

$$Q_x = -(m_0 + m)g \sin \alpha; Q_\varphi = M - mge \sin(\varphi + \alpha)$$

c) Phương trình chuyển động:

$$(m_0 + m)\ddot{x} + me \cos \varphi \ddot{\varphi} - me \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = -(m_0 + m)g \sin \alpha;$$

$$me \cos \varphi \ddot{x} + (J + me^2)\ddot{\varphi} = M - mge \sin(\varphi + \alpha)$$

Câu 2. Chuyển động bình ổn của đàn rung: ($\dot{\varphi} = \omega = const : \ddot{\varphi} \equiv 0$)

Phương trình chuyển động của bàn rung:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{m\omega^2}{(m_0 + m)} \sin \omega t - g \sin \alpha \\
\rightarrow v = \dot{x} &= -\frac{m\omega}{(m_0 + m)} \cos \omega t - (g \sin \alpha)t + C_1; \\
\dot{x}(0) = 0 \rightarrow 0 &= -\frac{m\omega}{(m_0 + m)} + C_1 \rightarrow C_1 = \frac{m\omega}{(m_0 + m)} \\
\rightarrow \dot{x} &= \frac{m\omega}{(m_0 + m)} (1 - \cos \omega t) - (g \sin \alpha)t \\
\rightarrow x &= -\frac{me}{(m_0 + m)} \sin \omega t + \frac{m\omega}{(m_0 + m)} t - \frac{1}{2} (g \sin \alpha)t^2 + C_2; \\
x(0) = 0 \rightarrow C_2 &= 0 \rightarrow x = -\frac{me}{(m_0 + m)} \sin \omega t + \frac{m\omega}{(m_0 + m)} t - \frac{1}{2} (g \sin \alpha)t^2
\end{aligned}$$

Câu 3: Tính lực đàn:

Phương trình chuyển động khối tâm:

$$\begin{aligned}
m_0 \ddot{y} + m \ddot{y}_A &= N - (m_0 + m)g \cos \alpha \\
\rightarrow N &= m \ddot{y}_A + (m_0 + m)g \cos \alpha; \\
y_A &= -e \cos \omega t \rightarrow \ddot{y}_A = e\omega^2 \cos \omega t \\
\rightarrow N &= me\omega^2 \cos \omega t + (m_0 + m)g \cos \alpha
\end{aligned}$$

Từ đây: $F_{dam} = N = (m_0 + m)g \cos \alpha + me\omega^2 \cos \omega t$

Điều kiện đàn không bị rời:

$$N > 0 \rightarrow -me\omega^2 + (m_0 + m)g \cos \alpha > 0 \rightarrow \omega^2 < \frac{(m_0 + m)g \cos \alpha}{me}$$

Bài 3. Câu 1: Viết PTVPCĐ

a) Biểu thức động năng:

$$\begin{aligned}
T &= 0.5mv_0^2 + 0.5mv_C^2 + 0.5J_2\omega_2^2 + 0.5mv_E^2 \\
v_0 &= v_A = l_1\dot{\varphi}; v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2; \\
x_C &= l_1 \cos \varphi + 2h - 0.5l_2 \cos \theta; y_C = l_1 \sin \varphi + a - 0.5l_2 \sin \theta \\
\dot{x}_C &= -l_1 \sin \varphi \dot{\varphi} + 0.5l_2 \sin \theta \dot{\theta}; \dot{y}_C = l_1 \cos \varphi \dot{\varphi} - 0.5l_2 \cos \theta \dot{\theta} \\
v_C^2 &= l_1^2 \dot{\varphi}^2 + 0.25l_2^2 \dot{\theta}^2 - l_1 l_2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta} \\
v_E^2 &= l_1^2 \dot{\varphi}^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 - l_1 l_2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta}; \omega_2 = \dot{\theta}; J_2 = m_2 l_2^2 / 12 \\
T &= 0.5 \left[(m_1 + m_2 + m)l_1^2 \right] \dot{\varphi}^2 + 0.5 \left[\left(\frac{1}{3} m_2 + m \right) l_2^2 \right] \dot{\theta}^2 \\
&+ \left[-(m + 0.5m_2)l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \right] \dot{\theta} \dot{\varphi}
\end{aligned}$$

b) Biểu thức lực suy rộng:

- Biểu thức thế năng:

$$\begin{aligned}\Pi &= -m_1 g(l_1 \cos \varphi + 2h) - m_2 g(l_1 \cos \varphi + 2h - 0.5l_2 \cos \theta) \\ &\quad - m g(l_1 \cos \varphi + 2h - l_2 \cos \theta) + 0.5c\theta^2\end{aligned}$$

- Lực suy rộng :

$$\begin{aligned}Q_\varphi &= M_0 - \alpha\dot{\varphi} - (m_1 + m_2 + m)gl_1 \sin \varphi; \\ Q_\theta &= (0.5m_2 + m)gl_2 \sin \theta - c\theta - \beta\dot{\theta}\end{aligned}$$

c) PTVPCD:

$$\begin{aligned}&(m_1 + m_2 + m)l_1^2 \ddot{\varphi} - (m + 0.5m_2)l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \ddot{\theta} \\ &\quad - (m + 0.5m_2)l_1 l_2 \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta}^2 \\ &= M_0 - \alpha\dot{\varphi} - (m_1 + m_2 + m)gl_1 \sin \varphi\end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}&-(m + 0.5m_2)l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \ddot{\varphi} + (m + \frac{1}{3}m_2)l_2^2 \ddot{\theta} \\ &\quad + (m + 0.5m_2)l_1 l_2 \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi}^2 \\ &= (0.5m_2 + m)gl_2 \sin \theta - c\theta - \beta\dot{\theta}\end{aligned} \quad (2)$$

Câu 2: Trường hợp khâu OA dao động điều hòa:

$$\varphi = H \sin \Omega t \rightarrow \ddot{\varphi} = -H\Omega^2 \sin \Omega t, \quad \cos(\theta - \varphi) \approx 1,$$

Từ phương trình (2) ta có: $\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + k^2\theta = H_0\Omega^2 \sin \Omega t$

$$2n = \frac{3\beta}{(3m + m_2)l_2^2}; k^2 = \frac{3[c - (0.5m_2 + m)gl_2]}{(3m + m_2)l_2^2}; H_0 = -\frac{3(m + 0.5m_2)l_1 l_2 H}{(3m + m_2)l_2^2}$$

Trong chế độ bình ổn:

$$\begin{aligned}\theta &= H_1 \sin(\Omega t - \gamma); H_1 = \frac{H_0\Omega^2}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \\ \gamma &= \arctan\left(\frac{2nk}{k^2 - \Omega^2}\right)\end{aligned}$$

Câu 3: Tính phản lực tại O

Viết phương trình chuyển động khối tâm cho hệ vật gồm thanh và vật nặng:

$$X_0 = m\ddot{x}_E + m_2\ddot{x}_2 - (m + m_2)g; Y_0 = m\ddot{y}_E + m_2\ddot{y}_2$$

$$\ddot{x}_E = -l_1 \sin \varphi \ddot{\varphi} + l_2 \sin \theta \ddot{\theta} - l_1 \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l_2 \cos \theta \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{y}_E = l_1 \cos \varphi \ddot{\varphi} - l_2 \cos \theta \ddot{\theta} - l_1 \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + l_2 \sin \theta \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{x}_2 = -l_1 \sin \varphi \ddot{\varphi} + 0.5l_2 \sin \theta \ddot{\theta} - l_1 \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + 0.5l_2 \cos \theta \dot{\theta}^2$$

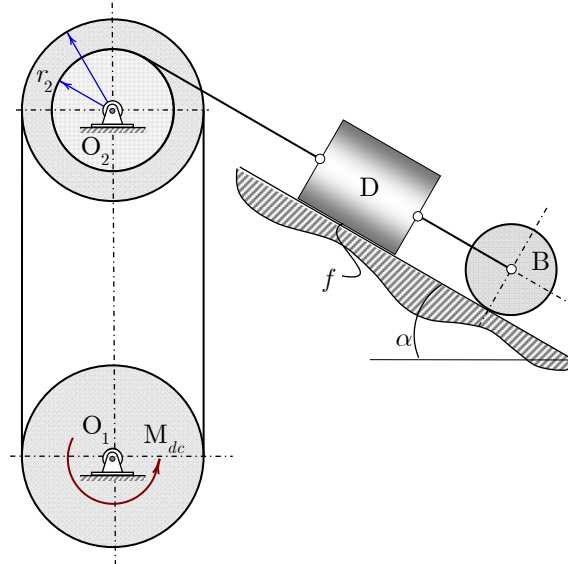
$$\ddot{y}_2 = l_1 \cos \varphi \ddot{\varphi} - 0.5l_2 \cos \theta \ddot{\theta} - l_1 \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + 0.5l_2 \sin \theta \dot{\theta}^2 \rightarrow$$

$$X_0 = -l_1(m + m_2) \sin \varphi \ddot{\varphi} + l_2(m + 0.5m_2) \sin \theta \ddot{\theta} \\ - l_1(m + m_2) \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l_2(m + 0.5m_2) \cos \theta \dot{\theta}^2 - (m + m_2)g$$

$$Y_0 = l_1(m + m_2) \cos \varphi \ddot{\varphi} - l_2(m + 0.5m_2) \cos \theta \ddot{\theta} \\ - l_1(m_1 + m_2) \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + l_2(m + 0.5m_2) \sin \theta \dot{\theta}^2$$

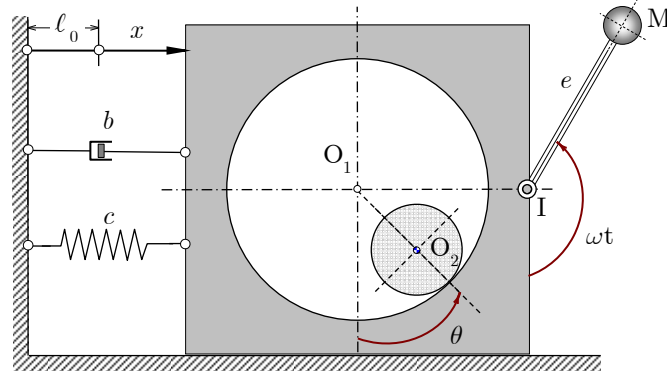
Đề thi năm 2016

Bài 1. Rô to của động cơ O_1 là một trụ tròn đồng chất bán kính r_1 , khối lượng m_1 , quay quanh trục cố định nằm ngang qua O_1 . Ngẫu lực tác dụng lên trục động cơ M_{dc} . Băng truyền giữa trục động cơ và trục tời được xem là đồng chất có chiều dài ℓ và khối lượng riêng γ (kg/m) và luôn ở trạng thái căng, không giãn. Tời O_2 gồm hai đĩa tròn đồng chất ghép cứng với nhau, có khối tâm ở trục quay hình học O_2 . Khối lượng và bán kính tương ứng của chúng là m_2, m_2 và r_1, r_2 . Tời kéo vật A, có khối lượng m_3 chuyển động theo mặt phẳng nghiêng không nhẵn, có hệ số ma sát trượt f , nghiêng một góc α so với mặt phẳng ngang. Vật A nối với con lăn B bằng dây cáp, con lăn B là một đĩa tròn đồng chất, khối lượng m , bán kính r chuyển động lăn không trượt theo mặt nghiêng. Bỏ qua khối lượng các đoạn dây cáp nối vật A với tời và với vật B và các đoạn dây luôn ở trạng thái căng. Bỏ qua ma sát ở các ổ trục và ma sát lăn.



- 1) Tính động năng cơ hệ là hàm của vận tốc v của vật A và tính công suất cần thiết của động cơ để kéo vật A có vận tốc v và gia tốc a .
- 2) Giả sử $M_{dc} = a_0 - b_0 \bar{\omega}$, trong đó a_0, b_0 là các hằng số dương đã biết, $\bar{\omega}$ là vận tốc góc của động cơ, giả sử ban đầu hệ đứng yên. Tìm biểu thức vận tốc góc $\bar{\omega}$ của động cơ là hàm của thời gian và giá trị vận tốc góc bình ổn (vận tốc góc tới hạn). Tính thời gian T^0 để vật A đạt được vận tốc bằng 95% vận tốc của chế độ bình ổn.
- 3) Tính lực căng trong nhánh dây giữa vật A và B.

Bài 2. Một bàn nghiên rung có khối lượng m_1 di chuyển theo phương ngang, không ma sát, được kích động bằng quả văng có khối lượng m (xem là chất điểm) nằm cách trục quay I khoảng cách e và quay đều với vận tốc góc ω . Bộ giảm chấn lò xo có độ cứng c và giảm chấn thủy lực với hệ số giảm chấn b . Một đĩa tròn đồng chất, có khối lượng m_2 bán kính r lăn không trượt theo lỗ tròn của bàn rung có bán kính R . Chọn các tọa độ suy rộng là x và θ , trong đó x kể từ điểm nút của lò xo khi chưa biến dạng đến mép của bàn nghiên, θ là góc nghiêng của đường qua tâm O_1O_2 đối với phương thẳng đứng. Độ dài của lò xo khi chưa biến dạng là ℓ_0 .



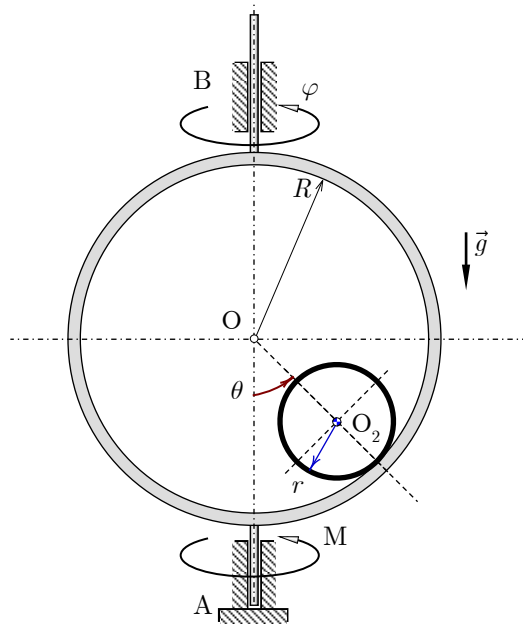
1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

2) Xét trường hợp $m_2 \ll m_1$, θ bé, giả thiết rằng $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta \ll 1$, $m_2 \sin \theta \approx 0$. Tìm chuyển động của cơ hệ trong chế độ bình ổn.

3) Hãy tính lực do đĩa tác dụng lên bàn nghiên rung tại điểm tiếp xúc giữa đĩa và bàn nghiên ứng với các điều kiện đã cho trong câu 2) với điều kiện

$$x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0; \\ \theta(t_0) = \theta_0, \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0.$$

Bài 3. Cho một vành tròn đồng chất khối lượng m (tập trung trên vành) bán kính r có thể chuyển động lăn không trượt theo mặt trong nhám của



vành tròn đồng chất, khối lượng m_1 , khối lượng tập trung trên vành, bán kính R . Vành tròn bán kính R quay quanh trục thẳng đứng của nó dưới tác dụng của momen quay M . Chọn các tọa độ suy rộng là góc quay φ của vành quanh trục thẳng đứng và góc θ giữa O_1O_2 và phương thẳng đứng. Bỏ qua ma sát tại các ổ trục quay.

- 1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.
- 2) Giả sử vành tròn bán kính R quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc không đổi ω_0 . Hãy xác định vị trí cân bằng của vành tròn tâm O_2 (vị trí cân bằng tương đối) được ký hiệu qua góc θ^* .
- 3) Tìm quy luật dao động bé của vành tròn tâm O_2 quanh vị trí cân bằng tương đối khi cho đĩa lệch khỏi vị trí cân bằng tương đối θ^* một góc θ_0 không vận tốc đầu ($\dot{\theta}(0) = 0$).

Lời giải

Bài 1.

Câu 1. a) Biểu thức động năng:

Viết các biểu thức động học :

$$v_A = v_B = v = \omega r_2; \omega_1 = \omega_2 = \omega; v_d = \omega r_1 = \frac{v}{r_2} r_1; \omega_B = v / r$$

Mômen quán tính khối của các trục quay và của đĩa lăn:

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2; J_2 = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2); J_B = \frac{1}{2} m r^2$$

Biểu thức động năng của hệ

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 + \frac{1}{2} \gamma l \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 v_A^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[m_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + 0.5 m_2 + m_3 + 1.5 m + \gamma l \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] v^2 = \frac{1}{2} m_{tg} v^2; \\ m_{tg} &= m_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + 0.5 m_2 + m_3 + 1.5 m + \gamma l \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2. \end{aligned}$$

b) Biểu thức công suất các lực: (4 điểm)

- Lực ma sát: $F_{ms} = fN = f m_3 g \cos \alpha$;

- Tính công suất các lực:

$$W = W_{dc} + W_{F_{ms}} + W_{P_3} + W_P = M_{dc} \omega - F_{ms} v - (m_3 + m) g v$$

$$W = W_{dc} - [(m_3 + m) \sin \alpha + f m_3 \cos \alpha] g v$$

Áp dụng định lý động năng dạng đạo hàm:

$$m_{tg} v a = W_{dc} - [(m_3 + m) \sin \alpha + f m_3 \cos \alpha] g v$$

c) Công suất động cơ: Từ đây tính được công suất cần thiết để vật A chuyển động với vận tốc v và gia tốc a

$$W_{dc} = m_{tg} v a + [(m_3 + m) \sin \alpha + f m_3 \cos \alpha] g v$$

Câu 2. a) Biểu thức vận tốc

$$M_{dc} \frac{v}{r_2} = m_{tg} v \frac{dv}{dt} + [(m_3 + m) \sin \alpha + f m_3 \cos \alpha] g v$$

Thay biểu thức mômen M_{dc} , ta nhận được:

$$m_{tg} \frac{dv}{dt} = \frac{a_0}{r_2} - [(m_3 + m) \sin \alpha + f m_3 \cos \alpha] g - \frac{b_0}{r_2^2} v;$$

Phân ly biến ta có: $\frac{d(A - Bv)}{(A - Bv)} = -Bdt$

Trong đó : $A = \left[\frac{a_0}{r_2} - (m_3 + m)g \sin \alpha - f m_3 g \cos \alpha \right] \frac{1}{m_{tg}}; B = \frac{b_0}{r_2^2 m_{tg}}$

Với điều kiện đầu $v(0) = 0$ ta tính được: $v = \frac{A}{B} (1 - e^{-Bt})$

b) Vận tốc của chế độ bình ổn và thời gian T^0 : $v_{bo} = \frac{A}{B}$

Vận tốc góc của động cơ: $\omega_{dc} = \frac{v}{r_1} = \frac{v_{bo}}{r_1} (1 - e^{-Bt})$

Thời gian T^0 để vật A đạt được 95% v_{bo} là nghiệm của phương trình :

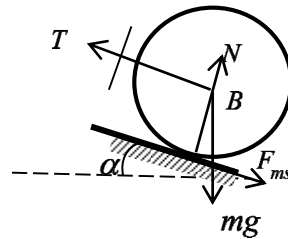
$$BT^0 = -\ln 0.05$$

Từ đó: $T^0 = \frac{1}{B} \ln 20$

Câu 3: Tính lực căng

Lực căng trong nhánh dây giữa vật A và đĩa lăn B:

Viết PTVP của đĩa đối với tâm vận tốc của đĩa:



$$T_d = \frac{1}{r}(J\bar{\varepsilon} + mgr \sin \alpha);$$

$$J = (J_c + mr^2) = (0.5mr^2 + mr^2) = 1.5mr^2;$$

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = \frac{A}{r} e^{-Bt};$$

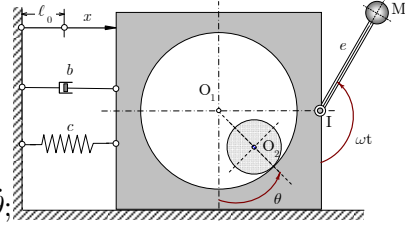
Bài 2.

Câu 1. Thành lập phương trình chuyển động

a) Biểu thức động năng:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + J_2 \omega_2^2 + m v_M^2);$$

$$v_1 = \dot{x}; v_2^2 = \dot{x}^2 + (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + 2(R-r) \cos \theta \dot{x} \dot{\theta};$$



Hình 2

$$v_M^2 = \dot{x}^2 + e\omega^2 + 2e\omega \cos \omega t \dot{x};$$

$$\bar{\omega}_2 = -\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r};$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(1.5m_2(R-r)^2)\dot{\theta}^2 + m_2(R-r) \cos \theta \dot{x} \dot{\theta}$$

$$+ \frac{1}{2}m(e^2\omega^2 + 2e\omega \cos \omega t \dot{x});$$

b) Biểu thức lực suy rộng

$$Q_x = -cx - b\dot{x}; Q_\theta = -m_2 g(R-r) \sin \theta$$

c) Phương trình vi phân chuyển động:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x; \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$(m_1 + m_2 + m)\ddot{x} + m_2(R-r) \cos \theta \ddot{\theta} - m_2(R-r) \sin \theta \dot{\theta}^2$$

$$+ cx + b\dot{x} = me\omega^2 \sin \omega t$$

$$\cos \theta \ddot{x} + 1.5(R-r)\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

Câu 2

a) Chuyển động bình ổn của bàn nghiên

(điều kiện $m_2 \ll m_1, \theta \approx 0, \rightarrow m_2 \sin \theta = 0; \cos \theta = 1, m_2 \sin \theta = 0$);

Phương trình chuyển động trong trường hợp này sẽ có dạng:

$$(m_1 + m_2 + m)\ddot{x} + m_2(R-r)\ddot{\theta} + cx + b\dot{x} = me\omega^2 \sin \omega t$$

$$m_2 \ddot{x} + 1.5m_2(R-r)\ddot{\theta} = 0;$$

Từ đây ta có:

$$[1.5(m_1 + m) + 0.5m_2]\ddot{x} + 1.5cx + 1.5b\dot{x} = 1.5me\omega^2 \sin \omega t;$$

$$m_2\ddot{x} + 1.5m_2(R - r)\ddot{\theta} = 0;$$

Đưa phương trình về dạng:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = H \sin \omega t$$

Trong đó:

$$2n = \frac{b}{1.5(m_1 + m) + 0.5m_2}; k = \frac{c}{1.5(m_1 + m) + 0.5m_2};$$

$$H = \frac{1.5me\omega^2}{1.5(m_1 + m) + 0.5m_2}$$

b) Biểu thức nghiệm

Giả thiết sức cản bé, bỏ qua dao động tự do tắt dần, nghiệm bình ổn sẽ có dạng:

$$x(t) = \frac{H}{k^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{k^2})^2 + 4\frac{n^2}{k^2} \frac{\omega^2}{k^2}}} \sin(\omega t - \varepsilon); \varepsilon = \arctan \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{1}{1.5(R - r)}\ddot{x}(t)$$

$$\rightarrow \dot{\theta} = -\frac{1}{1.5(R - r)}\dot{x}(t) + C_1; \theta(t) = -\frac{1}{1.5(R - r)}x(t) + C_1t + C_2$$

(10)

Trong đó C_1, C_2 được xác định từ điều kiện đầu:

$$C_1 = \dot{\theta}_0 + \frac{1}{1.5(R - r)}\dot{x}_0; C_2 = \theta_0 + \frac{1}{1.5(R - r)}x_0$$

$$\theta(t) = -\frac{1}{1.5(R - r)}x(t) + (\dot{\theta}_0 + \frac{1}{1.5(R - r)}\dot{x}_0)t + \theta_0 + \frac{1}{1.5(R - r)}x_0$$

Câu 3.

a) Tính phản lực giữa bàn nghiên và nền ngang

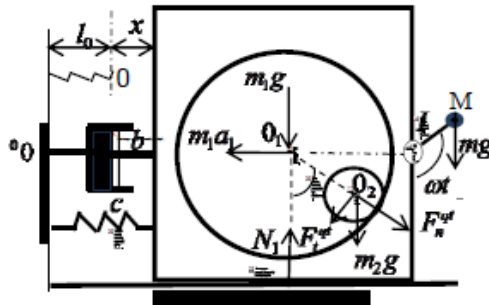
Sử dụng phương pháp Tĩnh hình học – Động lực

a) Phương án “hóa rắn-tách vật”

Bước 1: Hóa rắn: Xét toàn bộ hệ.

Đặt các lực quán tính

-Đặt lực quán tính của bàn nghiên:



lực theo phương ngang hướng sang phải: $\vec{F}_1^{qt} = -m_1 \vec{a}_1$, trong đó \vec{a}_1 gia tốc của tâm O_1 , lực quán tính của con lăn:

$$\vec{F}_n^{qt} = -m_2(R-r)\dot{\theta}^2 \vec{n}; F_t^{qt} = -m_2(R-r)\ddot{\theta} \vec{\tau}, \vec{F}_e^{qt} = -m_2 \ddot{x} \vec{i};$$

Trong đó \vec{n} vec tơ đơn vị hướng từ $O_2 \rightarrow O_1$; $\vec{\tau}$ -vec tơ đơn vị theo phương tiếp tuyến vuông góc với O_1O_2 theo chiều tăng góc θ , \vec{i} -vec tơ đơn vị theo phương ngang

-Viết phương trình “cân bằng” theo phương đứng:

$$\sum F_x = N_1 - (m+m)g - m_2(R-r)\cos\theta\ddot{\theta} - m_2(R-r)\sin\theta\ddot{\theta} - me\omega^2 \cos\omega t = 0$$

Từ đây tính được phản lực nền lên bàn nghiêng theo phương đứng

$$N_1 = (m+m)g + m_2(R-r)\cos\theta\ddot{\theta} + m_2(R-r)\sin\theta\ddot{\theta} + me\omega^2 \cos\omega t; (a)$$

b) Bước 2: Tính phản lực tại điểm tiếp xúc giữa đĩa và bàn nghiêng

Tách con lăn: Tính phản lực giữa vành và bàn nghiêng: đặt lực quán tính của đĩa thu gọn về tâm O_2 . Sử dụng phương trình tổng hình chiếu các lực quán tính và các lực đặt vào theo phương \vec{n} và phương $\vec{\tau}$, ta tính

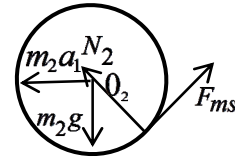
$$\sum F_n = N_2 + m_2 a_1 \sin\theta - m_2(R-r)\dot{\theta}^2 - m_2 g \cos\theta = 0;$$

$$\sum F_\tau = F_{ms} - m_2 a_1 \cos\theta - m_2(R-r)\ddot{\theta} - m_2 g \sin\theta = 0;$$

Từ đây tính được:

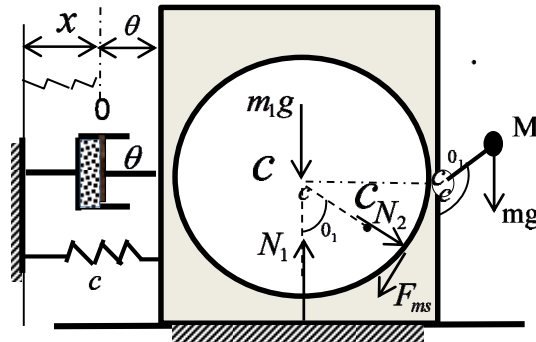
$$N_2 = m_2 \ddot{x}(t) \sin\theta(t) + m_2(R-r)\dot{\theta}(t)^2 + m_2 g \cos\theta(t); (b)$$

$$F_{ms} = m_2 \ddot{x} \cos\theta(t) + m_2(R-r)\ddot{\theta}(t) + m_2 g \sin\theta(t); (c)$$



Chú ý: Có thể sử dụng phương pháp tách vật:

-Xét hệ lực quán tính và các lực đặt vào con lăn B và hệ lực quán tính và các lực đặt vào bàn nghiêng không có con lăn



Viết phương trình cân bằng theo phương đứng các lực tác dụng lên bàn nghiêng rung (lực đặt vào + lực liên kết) khi không có con lăn:

$$\sum F_y = N_1 - m_1 g - N_2 \cos \theta - F_{ms} \sin \theta - m e \omega^2 \cos \omega t = 0$$

Từ đây tính được: $N_1 = m_1 g + N_2 \cos \theta + F_{ms} \sin \theta + m e \omega^2 \cos \omega t$

Thay N_2, F_{ms} từ (b), (c) ta nhận được kết quả (a)

Bài 3

Câu 1. a) Viết phương trình vi phân chuyển động

- Tính biểu thức động năng:

$$\begin{aligned} T &= T_v + T_d = \frac{1}{2} J_v \omega_v^2 + \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 R^2}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \sum m_k [(v_k^e)^2 + (v_k^r)^2] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{m_1 R^2}{2} + \frac{m r^2}{2} + m(R-r)^2 \sin^2 \theta \right] \dot{\varphi}^2 + m(R-r)^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

- Lực suy rộng:

Biểu thức thế năng và lực suy rộng:

$$\pi = -m_2 g(R-r) \cos \theta;$$

$$Q_\varphi = M; Q_\theta = -m_2 g(R-r) \sin \theta$$

- Phương trình chuyển động:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi; \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$$

Phương trình vi phân chuyển động sẽ là:

$$2m(R-r)\ddot{\theta} - 0.5m(R-r)\sin 2\theta \dot{\varphi}^2$$

$$= -mg \sin \theta;$$

$$0.5(m_1 R^2 + m r^2) + m(R-r)^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi}$$

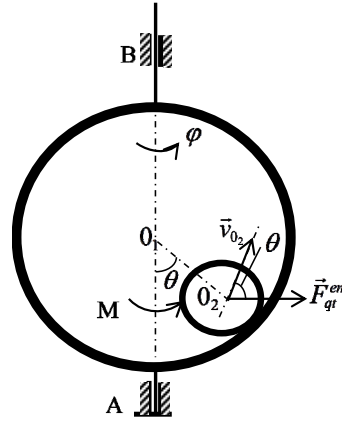
$$+ m(R-r)^2 \sin 2\theta \dot{\varphi} \dot{\theta} = M$$

Câu 2. Xác định vị trí cân bằng tương đối:

Điều kiện: $\ddot{\varphi} = 0; \dot{\varphi} = \text{const} = \omega_0, \dot{\theta} = 0; \ddot{\theta} = 0$.

$$0.5(R-r) \sin 2\theta^* \omega_0^2 = g \sin \theta^* \rightarrow \begin{cases} \sin \theta^* = 0 \\ \cos \theta^* = \frac{g}{(R-r)\omega_0^2} \end{cases}$$

Mômen M_0 cần thiết cho các chế độ này: $M_0 = 0$



Câu 3. Tìm quy luật dao động bé

Xét trường hợp dao động bé quanh vị trí cân bằng tương đối θ^* khi có kích động đầu từ vị trí cân bằng bé : $\theta(t_0) = 0; \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0 > 0$:

Từ giả thiết dao động bé ta có: $\sin \theta = \theta; \cos \theta = 1$.

$$\ddot{\theta} + k^2 \theta = 0 \quad ; k^2 = \frac{g}{2(R-r)} - 0.5\omega_0^2$$

Điều kiện để có dao động bé $k^2 > 0$: $\omega^2 < \frac{g}{(R-r)}$

Dao động bé có dạng:

$$\theta = A \sin(kt + \alpha)$$

Để xác định các hằng số A và α sử dụng điều kiện đầu:

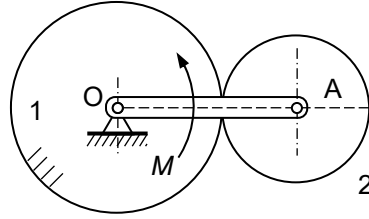
$$\theta_0 = A \sin \alpha; \dot{\theta}_0 = Ak \cos \alpha$$

$$\theta(t) = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{k^2}} \sin(kt + \alpha); \alpha = \arctan \frac{k\theta_0}{\dot{\theta}_0}$$

Đề thi năm 2017

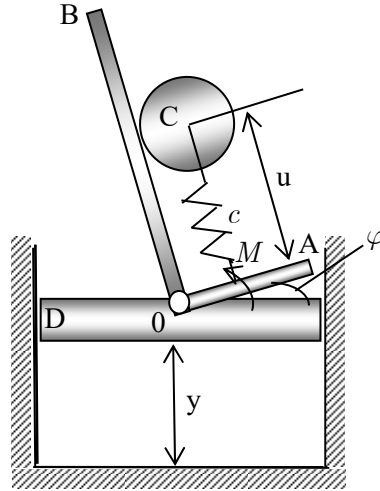
Bài 1. Cơ cấu hành tinh đặt trong mặt phẳng nằm ngang, chuyển động từ trạng thái tĩnh nhờ ngẫu lực có mômen M đặt vào tay quay OA.

Đĩa 1 cố định, bán kính r_1 , đĩa 2 có bán kính r_2 , trọng lượng P . Thanh đồng chất OA có trọng lượng Q . Bỏ qua ma sát.



- 1) Cho $M = \text{const}$, tìm gia tốc góc của tay quay OA.
- 2) Cho $M = \text{const}$, cho biết góc ăn khớp giữa hai bánh răng là α , tìm lực ăn khớp giữa hai bánh răng.
- 3) Cho $M = M_0 - k\omega^2$, M_0 và k là các hằng số, ω - vận tốc góc tay quay OA, tìm vận tốc góc giới hạn ω_{gh} và vận tốc góc $\omega(t)$ của tay quay OA.

Bài 2. Bàn DO, có khối lượng m_1 , chuyển động theo phương đứng. Đĩa tròn C đồng chất, khối lượng m , bán kính r lăn không trượt dọc BO, tâm C nối với OA nhờ lò xo tuyến tính, có độ cứng c và có độ dài khi không biến dạng bằng l_0 (bỏ qua khối lượng lò xo). Thanh gậy khúc (mô hình ghế) gồm hai thanh mảnh và cứng, vuông góc nhau,



quay quanh trục qua trọng tâm O của nó, có khối lượng m_2 , mô men quán tính khối đối với trọng tâm O bằng J_0 dưới tác dụng của ngẫu lực có mô men M . Bỏ qua ma sát.

- 1) Giả sử bàn DO đứng yên và ghế bị kẹt tại vị trí $\varphi = \alpha = \text{const}$, tức ghế không chuyển động đối với bàn DO. Khảo sát chuyển động của đĩa C sau khi ghế bị kẹt và tính các lực tác dụng lên đĩa. Cho biết tại thời điểm ghế bị kẹt (bỏ qua va chạm):

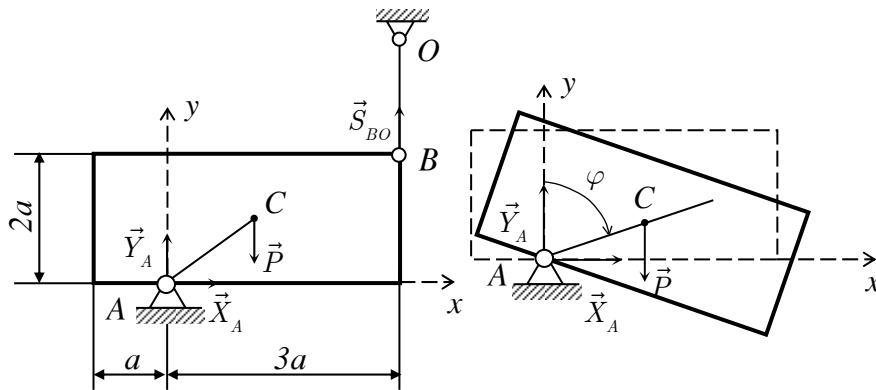
$$u = u_0 > r, v_c = v_0 > 0; u_0, v_0 \text{ là các đại lượng đã biết}$$

- 2) Giả sử ghế AOB được kẹp chặt vào bàn DO và bàn DO có chuyển động theo phương đứng theo luật: $y(t) = H \sin(\Omega t)$. Trong đó H, Ω là các đại lượng đã cho (bỏ qua va chạm). Hãy khảo sát chuyển động của đĩa C lăn không trượt dọc BO, tính các lực tác dụng lên đĩa C. Đĩa có bị rời khỏi đường lăn BO không? Nếu có thì xác định điều kiện để đĩa không bị rời?

3) Giả sử bàn DO đứng yên, còn ghế quay quanh trục 0 dưới tác dụng của ngẫu lực M, đĩa lăn không trượt dọc BO. Viết phương trình vi phân chuyển của cơ hệ khi chọn các tọa độ suy rộng là u và φ .

Bài 3. Một tấm hình chữ nhật đồng chất dài $4a$, rộng $2a$, treo trong mặt phẳng thẳng đứng bằng khớp bản lề tại A và dây mềm không đàn tại B . Cho biết khối lượng của tấm là m .

- 1) Xác định phản lực tại bản lề A và sức căng của dây.
- 2) Giả sử tại một thời điểm nào đó dây treo bị đứt. Xác định phản lực động tại A , ngay sau khi dây treo bị đứt.
- 3) Gọi $R_A(-0)$ là độ lớn phản lực tại A trước khi dây treo bị đứt, $R_A(+0)$ là độ lớn phản lực tại A ngay sau khi dây treo bị đứt, tìm tỷ số $R_A(+0)/R_A(-0)$.



Lời giải

Bài 1:

Câu 1: Sử dụng định lý động năng dạng đạo hàm:

Biểu thức động năng

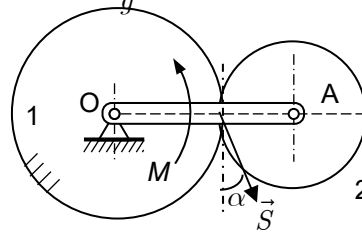
$$T = T_{OA} + T_2 = \frac{1}{2}(J_A \omega^2 + m_2 v_A^2); \quad J_A = \frac{1}{3} \frac{l^2}{g} \omega^2; \quad v_A = l\omega = r_2 \omega_2$$

$$T = \frac{1}{2}(Q + 1.5P) \frac{l^2}{g} \omega^2 = \frac{1}{2} J_{tg} \omega^2; \quad J_{tg} = (Q + 1.5P) \frac{l^2}{g};$$

Biểu thức công suất:

$$\sum W_k = M\omega$$

Áp dụng định lý:



$$\frac{dT}{dt} = \sum W_k \rightarrow J_{tg} \bar{\omega} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{M} \bar{\omega};$$

$$\bar{\omega} \neq 0 \rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{M}}{J_{tg}} = \frac{\bar{M}g}{(2Q + 9P)(r_1 + r_2)^2} = const$$

Tay quay quay nhanh dần đều

Câu 2 Tính lực ăn khớp giữa hai bánh răng: Ký hiệu ăn khớp quay S:
Viết phương trình vật quay đối với bánh răng 2 quanh trục qua A

$$J_A \bar{\varepsilon}_2 = S r_2 \cos \alpha \rightarrow S = \frac{J_A \bar{\varepsilon}_2}{r_2 \cos \alpha}; \bar{\varepsilon}_2 = \frac{l}{r_2} \bar{\varepsilon} \rightarrow S = \frac{J_A l}{r_2^2 \cos \alpha} \bar{\varepsilon}$$

Câu 3. Xác định chuyển động : $M = M_0 - k\omega^2$

Biểu thức tổng công suất:

$$\sum W_k = (M_0 - k\omega^2)\bar{\omega}$$

Định lý động năng dạng đạo hàm:

$$\frac{dT}{dt} = \sum W_k \rightarrow J_{tg} \bar{\omega} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = (M_0 - k\omega^2)\bar{\omega} \rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{M_0 - k\bar{\omega}^2}{J_{tg}}$$

Vận tốc góc giới hạn:

$$t \nearrow \bar{\omega} \nearrow \bar{\omega}_\infty \rightarrow k\bar{\omega}_\infty^2 = M_0 \rightarrow \bar{\varepsilon} = 0 \rightarrow \bar{\omega}_\infty = \sqrt{\frac{M_0}{k}} = const$$

Biểu thức $\bar{\omega}(t)$:

$$\frac{d\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \bar{\omega}_\infty^2} = -\frac{k}{J_{tg}} dt \rightarrow \frac{1}{2\omega_\infty} \left(\frac{d(\bar{\omega} + \omega_\infty)}{(\bar{\omega} + \omega_\infty)} - \frac{d(\bar{\omega} - \omega_\infty)}{(\bar{\omega} - \omega_\infty)} \right) = \frac{k}{J_{tg}} dt$$

$$\rightarrow \frac{d(\bar{\omega} + \omega_\infty)}{(\bar{\omega} + \omega_\infty)} - \frac{d(\bar{\omega} - \omega_\infty)}{(\bar{\omega} - \omega_\infty)} = \frac{2\omega_\infty k dt}{J_{tg}} dt = k_0 dt; k_0 = \frac{2\omega_\infty k}{J_{tg}}$$

Tích phân hai vế, ta nhận được

$$\ln \frac{1}{C_1} \frac{(\bar{\omega} + \omega_\infty)}{(\bar{\omega} - \omega_\infty)} = k_0 t \rightarrow \bar{\omega} + \omega_\infty = C_1 (\bar{\omega} - \omega_\infty) e^{k_0 t}$$

$$\text{Điều kiện đầu: } t = 0 : \omega(0) = 0 \rightarrow C = -1 \rightarrow \bar{\omega} = \omega_\infty \frac{e^{k_0 t} - 1}{e^{k_0 t} + 1};$$

Bài 2

Câu 1. Bàn và ghế đứng yên

a) Biểu thức động năng và công suất

$$T = 0.5J \omega_C^2 + 0.5m v_C^2; \omega_C = \dot{u} / r; J_C = 0.5m r^2$$

$$\rightarrow T = 0.75m\dot{u}^2$$

$$\text{Biểu thức công suất: } W = -[mg \cos \alpha + c(u - l_0)]\dot{u}$$

Áp dụng định lý động năng dạng đạo hàm

$$\frac{dT}{dt} = W \rightarrow 1.5m\ddot{u} = -[mg \cos \alpha + c(u - l_0)]$$

b) Tìm chuyển động

$$1.5m\ddot{u} + cu = cl_0 - mg \cos \alpha \rightarrow \ddot{u} + k^2 u = \frac{cl_0 - mg \cos \alpha}{1.5m}; k^2 = \frac{c}{1.5m}$$

$$\text{Đưa vào biến mới: } \xi = u - \frac{cl_0 - mg \cos \alpha}{1.5mk^2} = u - \frac{cl_0 - mg \cos \alpha}{1.5c}$$

$$\text{Đưa phương trình về dạng: } \ddot{\xi} + k^2 \xi = 0$$

Nghiệm phương trình có dạng:

$$\xi = A \sin(kt + \beta);$$

Trong đó A và β được xác định từ điều kiện đầu:

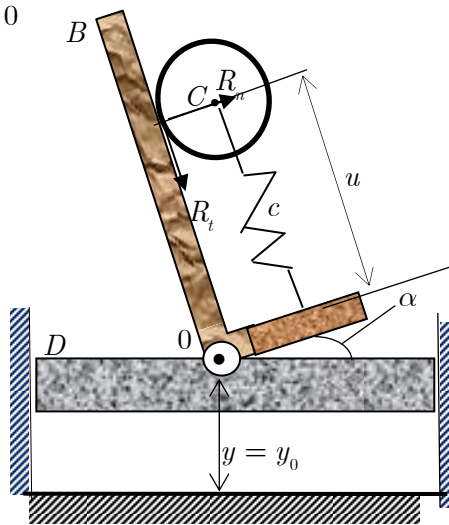
$$\xi_0 = A \sin \beta; \dot{\xi}_0 = -Ak \cos \beta$$

$$\rightarrow A = \sqrt{\xi_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$$

$$\xi_0 = u_0 - \frac{cl_0 - mg \cos \alpha}{1.5c};$$

$$\beta = \arctan \frac{k\xi_0}{v_0};$$

$$u = A \sin(kt + \beta) + \frac{cl_0 - mg \cos \alpha}{1.5c}$$



c) Lực tác dụng lên đĩa C

- Phương trình chuyển động vật chuyển động song phẳng

$$m\ddot{u} = -R_t - c(u - l_0) - mg \cos \alpha = -R_t - cu + cl_0 - mg \cos \alpha;$$

$$0 = R_n - mg \sin \alpha;$$

$$J_C \frac{\ddot{u}}{r} = R_t r$$

- Xác định các lực

$$\ddot{u} = -Ak^2 \sin(kt + \beta); \quad u = A \sin(kt + \beta) + \frac{cl_0 - mg \cos \alpha}{1.5c}$$

$J_C = 0.5mr^2$, $\ddot{u} = r\ddot{\varepsilon}$ ta tính được:

$$R_n = mg \sin \alpha;$$

$$R_t = J_C \frac{\ddot{u}}{r^2} = 0.5mr^2 \frac{\ddot{u}}{r^2} = 0.5m\ddot{u} = -0.5mk^2 A \sin(kt + \beta) \\ = -0.5cA \sin(kt + \beta)$$

Có thể tính R_t từ phương trình:

$$cl_0 - mg \cos \alpha = 1.5m\ddot{u} + cu$$

$$R_t = -m\ddot{u} - cu + cl_0 - mg \cos \alpha = -m\ddot{u} - cu + 1.5m\ddot{u} + cu = 0.5m\ddot{u} \\ = -0.5mA \sin(kt + \beta) = -0.5cA \sin(kt + \beta)$$

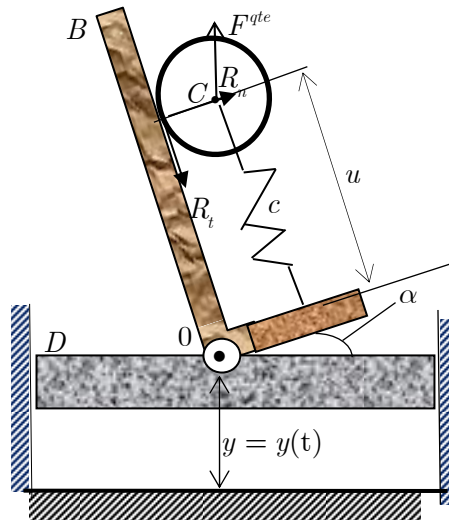
Trong đó: $A = \sqrt{\xi_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$; $\xi_0 = u_0 - \frac{cl_0 - mg \cos \alpha}{1.5mk^2}$

Câu 2

Trường hợp ghế bị kẹt và bàn DO chuyển động theo luật:

$$y = H \sin(\Omega t) \rightarrow \ddot{y} = -H\Omega^2 \sin(\Omega t) = -\Omega^2 y$$

Đĩa C chịu tác dụng các lực gồm trọng lực, lực đàn hồi lò xo, phản lực của đường lăn (phản lực pháp và tiếp) và lực quán tính theo



a) Hệ lực quán tính theo (tịnh tiến) , có hợp lực đặt tại khối tâm C theo phương thẳng đứng và hướng lên (cùng phương cùng chiều với $y(t)$)

$$F_e^{qt} = -m\ddot{y} = m\Omega^2 H \sin(\Omega t)$$

b) Viết phương trình chuyển động song phẳng cho đĩa

$$0 = R_n + (F_e^{qt} - mg) \sin \alpha;$$

$$m\ddot{u} = -c(u - l_0) + (F_e^{qt} - mg) \cos \alpha - R_t$$

$$J_C \bar{\varepsilon} = R_t r; \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\ddot{u}}{r} \rightarrow J_C \frac{\ddot{u}}{r} = R_t r \rightarrow R_t = \frac{J_C \ddot{u}}{r^2} = 0.5m\ddot{u}$$

Sử dụng biến ξ thay cho biến u từ hệ phương trình trên ta nhận được:

$$1.5m\ddot{\xi} + c\xi = m\Omega^2 H \cos \alpha \sin(\Omega t);$$

$$R_n = mg \sin \alpha - m\Omega^2 H \sin \alpha \sin(\Omega t);$$

c) Điều kiện để đĩa C không rời đường lăn

$$R_n > 0, \text{ tức: } \Omega^2 < \frac{g}{H}$$

d) Chuyển động của tâm C

Đưa phương trình về dạng:

$$\ddot{\xi} + k^2 \xi = H_0 \sin \Omega t; \quad k^2 = \frac{c}{m}; \quad H_0 = \frac{H \Omega^2}{1.5}$$

Nghiệm của phương trình:

$$\xi = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + B \sin(\Omega t);$$

Nghiệm riêng:

$$\bar{\xi} = B \sin \Omega t \rightarrow \dot{\bar{\xi}} = B\Omega \cos \Omega t; \quad \ddot{\bar{\xi}} = -B\Omega^2 \sin \Omega t$$

Thay các đại lượng này vào phương trình, xác định đại lượng B:

$$B = \frac{H_0}{k^2 - \Omega^2}; \quad \text{khi } k^2 > \Omega^2$$

Nghiệm tổng quát có dạng:

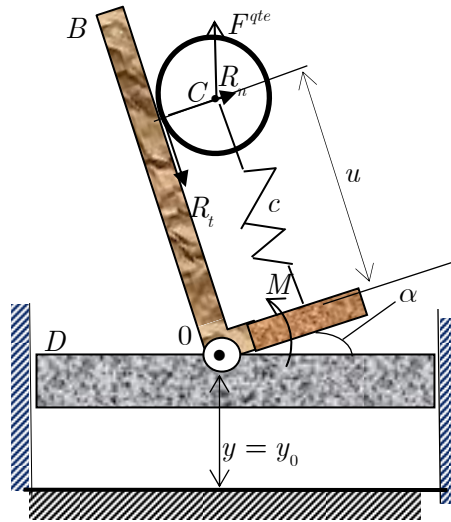
$$u = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{H_0}{k^2 - \Omega^2} \sin \Omega t + \frac{cl_0 - mg \cos \alpha}{1.5c}$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện đầu (vị trí đầu và vận tốc đầu)

Câu 3. Trường hợp bản DO cố định, ghế quay quanh trục 0: Hệ có hai bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng là các góc định vị φ và u

a) Biểu thức động năng:

$$\begin{aligned} T &= 0.5J_0 \dot{\varphi}^2 + 0.5J_c \omega_c^2 + 0.5mv_c^2 \\ &= 0.5J_0 \dot{\varphi}^2 + 0.5J_c \left(\dot{\varphi} + \frac{\dot{u}}{r}\right)^2 + 0.5m \left\{ \left[(r \sin \varphi + u \cos \varphi) \dot{\varphi} + \sin \varphi \dot{u} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[(r \cos \varphi - u \sin \varphi) \dot{\varphi} + \cos \varphi \dot{u} \right]^2 \right\} \\ &= 0.5 \left[J_0 + m(1.5r^2 + u^2) \right] \dot{\varphi}^2 + 0.5(1.5)m\dot{u}^2 + 1.5mr\dot{\varphi}\dot{u} \end{aligned}$$



b) Lực suy rộng

Biểu thức thế năng:

$$\pi = 0.5c(u - l_0)^2 + mg(r \sin \varphi + u \cos \varphi);$$

$$Q_{\varphi}^{(\pi)} = -\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = -mg(r \cos \varphi - u \sin \varphi);$$

$$Q_u^{(\pi)} = -\frac{\partial \pi}{\partial u} = -c(u - l_0)$$

Lực suy rộng các lực không thế:

$$Q_{\varphi}^0 = M; \quad Q_u^{(0)} = 0$$

$$\text{Vậy } Q_{\varphi} = M - mg(u \cos \varphi - r \sin \varphi); \quad Q_u = -c(u - l_0)$$

c) Phương trình chuyển động

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + M; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial T}{\partial u} = -\frac{\partial \pi}{\partial u}$$

$$\left[J_0 + m(1.5r^2 + u^2) \right] \ddot{\varphi} + 1.5mr\ddot{u} + 2mu\dot{\varphi}\dot{u} = M - mg(r \cos \varphi - u \sin \varphi);$$

$$1.5mr\ddot{\varphi} + 1.5m\ddot{u} - mu\dot{\varphi}^2 + cu + mg \cos \varphi - cl_0 = 0$$

Chú ý:

Có thể tính biểu thức động năng và lực suy rộng cho trường hợp tổng quát: vật C, ghế và bàn DO đều chuyển động, sau đó mới áp dụng vào từng trường hợp cụ thể theo yêu cầu của đề

Biểu thức động năng của hệ:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_C^2; \bar{\omega}_C = \dot{\varphi} + \frac{\dot{u}}{r}; \\
 x_C &= r \cos \varphi - u \sin \varphi; y_C = r \sin \varphi + u \cos \varphi; \\
 \dot{x}_C &= -(r \sin \varphi + u \cos \varphi)\dot{\varphi} - \sin \varphi \dot{u}; \dot{y}_C = (r \cos \varphi - u \sin \varphi)\dot{\varphi} + \cos \varphi \dot{u}; \\
 v_C^2 &= x_C^2 + y_C^2 = u^2\dot{\varphi}^2 - 2u \sin \varphi \dot{\varphi} \dot{u} + r^2\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{u}\dot{\varphi} + 2r \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{u} \\
 &\quad + 2r \cos \varphi \dot{u} \dot{y} + \dot{u}^2 + \dot{y}^2; \\
 T &= \frac{1}{2}[(m_1 + m_2 + m)\dot{y}^2 + (J_1 + 1.5mr^2 + mu^2)\dot{\varphi}^2 + 1.5m\dot{u}^2 \\
 &\quad + m(r \cos \varphi - u \sin \varphi)\dot{y}\dot{u} + mr\dot{u}\dot{\varphi}];
 \end{aligned}$$

Thế năng:

$$\pi = (m_1 + m_2 + m)gy + mg(u \cos \varphi + r \sin \varphi) + 0.5c(u - l_0)^2$$

Các lực suy rộng không thế:

$$Q_\varphi = M; Q_y = 0; Q_u = 0$$

Xét các trường hợp:

$$1) y \equiv 0; \varphi = \alpha = \text{const};$$

$$T_1 = \frac{3}{2}mu^2; Q_u = -c(u - l_0) - mg \cos \alpha; \xi = u + \frac{cl_0 - mg \cos \alpha}{1.5mk^2}$$

$$PTVP: \ddot{\xi} + k^2\xi = 0; \rightarrow \xi = A \sin(kt + \beta); k^2 = \frac{c}{1.5m};$$

$$A = \sqrt{\xi_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}; \beta = \arctan \frac{k\xi_0}{v_0}$$

$$2) \varphi = \alpha = \text{const}; u = u(t); y = H \sin(\Omega t)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}[(m_1 + m_2 + m)\dot{y}^2 + 1.5m\dot{u}^2 + 2m \cos \alpha \dot{y}\dot{u}];$$

$$Q_y = -(m_1 + m_2 + m)g; Q_u = -mg \cos \alpha - c(u - l_0) = -cu;$$

Phương trình chuyển động viết cho tọa độ u ($\ddot{y} = -\Omega^2 H \sin \Omega t$):

$$1.5m\ddot{u} + cu = mH\Omega^2 \cos \alpha \sin \Omega t + cl_0 - mg \cos \alpha$$

$$\rightarrow \ddot{\xi} + k^2\xi = \frac{\Omega^2 H}{1.5} \cos \alpha \sin \Omega t;$$

$$\xi = A \sin(kt + \beta) + \frac{H_0}{k^2 - \Omega^2} \sin \Omega t; H_0 = \frac{H\Omega^2 \cos \alpha}{1.5}; k^2 = \frac{c}{1.5m}$$

A, γ – được xác định từ điều kiện đầu ($\xi(t_0) = \xi_0, \dot{\xi}(t_0) = v_0$)

3) Trường hợp $y = y_0 = \text{const}, u = u(t), \varphi = \varphi(t)$

$$y = y_0 = \text{const}, \varphi = \varphi(t), u = u(t);$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \left[(J_1 + 1.5mr^2 + mu^2) \dot{\varphi}^2 + 1.5mr^2 \dot{u}^2 + mru\dot{\varphi} \right];$$

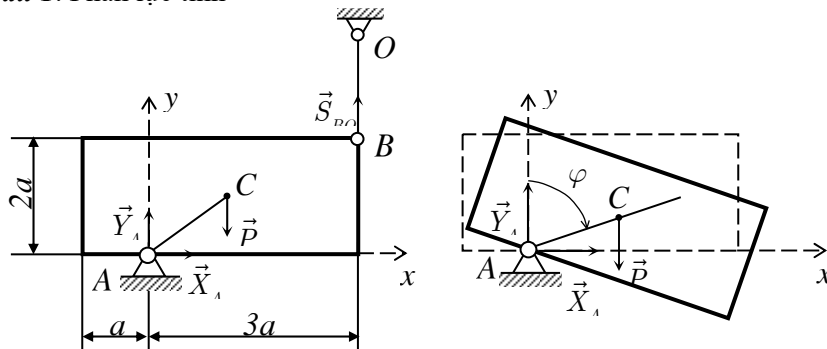
Hệ PTVPCD dạng phương trình Lagrange 2:

$$1.5m\ddot{u} + mr\ddot{\varphi} - mu\dot{\varphi}^2 + cu = 0;$$

$$mr\ddot{u} + (J_1 + 1.5mr^2 + mu^2)\ddot{\varphi} + 2mru\dot{\varphi} = M - mg(r \cos \varphi - u \sin \varphi)$$

Bài 3

Câu 1. Phản lực tĩnh



Hệ lực cân bằng $\varphi(\vec{P}, \vec{S}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A) \equiv 0 \rightarrow$ Hệ phương trình cân bằng:

$$\sum F_x = X_A^t = 0;$$

$$\sum F_y = Y_A^t - P = 0;$$

$$\sum \bar{m}_0(\vec{F}) = -Pa + 3aS_t = 0 \rightarrow$$

$$X_A^t = 0; \quad Y_A^t = \frac{2}{3}P; \quad S_{BC}^t = \frac{1}{2}P$$

$$\text{Phản lực tĩnh: } R_A^t = \sqrt{(X_A^t)^2 + (Y_A^t)^2} = \frac{2}{3}mg$$

Câu 2. Phản lực động lực sau khi dây đứt. Sau khi dây đứt thì $S=0$, tấm quay quanh trục qua A. Giải phóng liên kết. Viết phương trình vật chuyển động song phẳng

$$m\ddot{x}_C = X_A^d; \quad m\ddot{y}_C = Y_A^d - P; \quad J_C\ddot{\varphi} = X_A^d b \cos \varphi - Y_A^d b \sin \varphi;$$

$$b \equiv CA = a\sqrt{2}$$

Từ hình vẽ tính được:

$$x_C = b \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = b \sin \varphi; \quad y_C = b \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = b \cos \varphi \rightarrow$$

$$\ddot{x}_C = b(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2); \quad \ddot{y}_C = -b(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2)$$

Thay các hệ thức vào phương trình:

$$X_A^d = m\ddot{x}_C = mb(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2);$$

$$Y_A^d = P - mb(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2);$$

$$(J_C + mb^2)\ddot{\varphi} = Pb \sin \varphi.$$

Tại thời điểm dây đứt, tính được

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{4}; \quad \dot{\varphi}(0) = 0; \quad J_C + mb^2 = \frac{4}{3}ma^2 + 2ma^2 = \frac{10}{3}ma^2; \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \ddot{\varphi}(0) = \frac{3mg}{10a}$$

$$X_A^d = mb \cos \varphi(0) \ddot{\varphi}(0) = \frac{3g}{10}; \quad Y_A^d = mg - mb \sin \varphi(0) \ddot{\varphi}(0) = \frac{7mg}{10};$$

$$R_A^d = \sqrt{(X_A^d)^2 + (Y_A^d)^2} = 0.1\sqrt{58}mg$$

Tính hệ số k_d :

$$k_d = \frac{R_A^d(0)}{R_A^t} = 0.15\sqrt{58} = 1.142$$

Phương án 2:

Sử dụng phương pháp tĩnh – động lực hình học:

Đặt lực quán tính khâu song phẳng:

$$\vec{R}_c^{qt} = -m\vec{a}_c; \quad \vec{a}_c = \vec{a}_c^t + \vec{a}_c^n; \quad \vec{m}_C^{qt} = -J_C \ddot{\varphi}$$

$$\vec{R}_c^{qt} = \vec{F}_t^{qt} + \vec{F}_n^{qt}; \quad \vec{F}_t^{qt} = -m\vec{a}_c^t; \quad \vec{F}_n^{qt} = -m\vec{a}_c^n; \quad \vec{a}_c^t = m\ddot{\varphi}\vec{\tau}; \quad \vec{a}_c^n = -b\dot{\varphi}^2\vec{n}_0$$

Trong đó $\vec{\tau}_0, \vec{n}_0$ là các vec tơ đơn vị theo phương tiếp tuyến và pháp tuyến của quỹ đạo của khối tâm C

Thành lập “phương trình cân bằng” cho hệ lực gồm các lực:

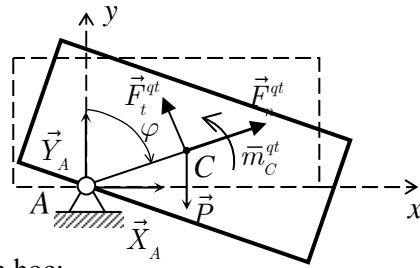
$$\varphi(\vec{R}_A, \vec{P}, \vec{R}_C^{qt}, \vec{m}_C^{qt}) = 0$$

$$\sum F_x = X_A^d + R_n^{qt} \sin \varphi - R_t^{qt} \cos \varphi = 0;$$

$$\sum F_y = P + Y_A^d - R_n^{qt} \cos \varphi + R_t^{qt} \sin \varphi = 0;$$

$$\sum \vec{m}_A(\vec{F}) = -J_C \ddot{\varphi} - mb^2 \ddot{\varphi} + Pb \sin \varphi = 0$$

Từ phương trình cuối của hệ phương trình, ta tính được: $\ddot{\varphi}(0) = \frac{3}{10} \frac{g}{a}$



Thay điều kiện tại thời điểm dây đứt ta nhận được kết quả trong phương án 1

Phương án 3

Bước 1: Viết phương trình chuyển động khối tâm ta được:

$$m\ddot{x}_C = X_A^d; \quad m\ddot{y}_C = Y_A^d - P;$$

Thay các biểu thức gia tốc khối tâm vào phương trình, ta nhận được:

$$mb(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) = X_A^d; \quad P - mb(\sin \varphi \ddot{\varphi} + \cos \varphi \dot{\varphi}^2) = Y_A^d$$

Bước 2: Viết phương trình vi phân vật quay quanh trục qua A :

$$J_A \ddot{\varphi} = Pb \sin \varphi \rightarrow (J_C + mb^2) \ddot{\varphi} = Pb \sin \varphi$$

Từ đó tính được giá trị của gia tốc góc tại thời điểm dây đứt:

$$\ddot{\varphi}(0) = \frac{Pa}{(J_C + 2ma^2)} = \frac{3g}{10a}$$

Ta nhận được kết quả cần tìm (trùng với các kết quả trong các phương án trên)

Phương án 4: có thể dùng phương pháp Tĩnh - Động lực dạng giải tích bằng tính lực suy rộng của hệ lực gồm các lực thật và lực quán tính,..

Đề thi năm 2018

Bài 1. Đĩa tròn đồng chất, có khối lượng m , bán kính r , lăn không trượt theo cung $\frac{1}{4}$ đường tròn cố định AB có bán kính R , chuyển động trong mặt phẳng đứng

1) Khảo sát chuyển động của đĩa lăn không trượt khi góc φ thay đổi trong khoảng $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, tâm C của con lăn có vận tốc đầu \vec{v}_0 theo phương ngang hướng sang phải. Bỏ qua ma sát lăn

a) Tính gia tốc góc và vận tốc góc con lăn theo góc φ

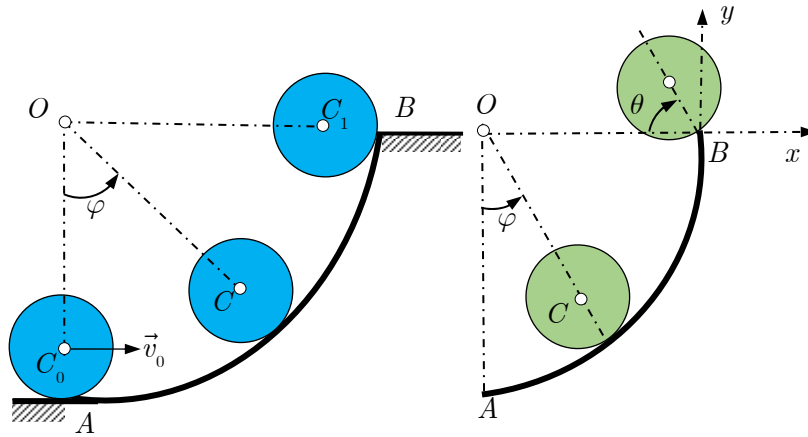
b) Tính phản lực tiếp tuyến và pháp tuyến tại điểm tiếp xúc giữa đĩa và cung tròn theo góc φ .

2) Tại vị trí ứng với $\varphi = \pi/2$ đĩa bắt đầu chuyển động quanh điểm B. Khảo sát chuyển động của đĩa quanh điểm B khi bán kính CB của đĩa quay từ vị trí nằm ngang đến vị trí thẳng đứng, ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)

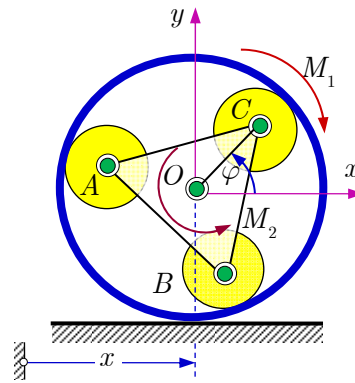
a) Tính gia tốc góc và vận tốc góc của đĩa theo góc θ

b) Tính phản lực pháp tuyến và tiếp tuyến tại mấu B tác dụng lên con lăn

3) Tìm điều kiện đối với \vec{v}_0 để khi tâm C nằm trên đường By ($\theta = \pi/2$) đĩa có thể rời khỏi mấu B. Khảo sát chuyển động tiếp theo của đĩa.



Bài 2. Ba con lăn dạng đĩa tròn đồng chất, khối lượng m , bán kính r liên kết với nhau nhờ nối bản lề với tấm cứng có dạng tam giác đều, đồng chất có khối lượng m_2 , mô men quán tính khối đối với trục qua O và vuông góc với mặt phẳng của tấm là J_2 . Các con lăn, lăn không trượt trong vành bánh xe, đồng chất, có khối lượng m_1 , bán kính $R = 3r$. Cơ cấu đặt trong mặt phẳng đứng. Bỏ qua ma sát tại các trục quay A, B, C và O. Tấm ABC chịu tác dụng ngẫu lực $M_2 = M_0 - \alpha \Omega$; trong đó M_0, α là các hằng số đã biết, còn Ω – vận tốc góc của tấm, còn vành lăn không trượt theo đường ngang dưới tác dụng ngẫu lực có mô men $M_1 = \text{const}$. Bỏ qua ma sát lăn. Khảo sát các trường hợp sau:

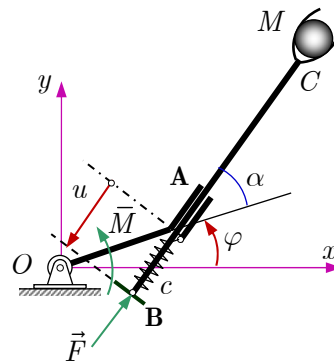


1) Vành được giữ đứng yên. Xác định chuyển động của tấm và của các con lăn, tính phản lực tiếp tuyến tác dụng lên các con lăn từ vành

2) Vành được giữ đứng yên. Khảo sát vận tốc góc của tấm trong chế độ bình ổn, tính thời gian T để vận tốc góc của tấm đạt được 95% vận tốc góc bình ổn. Ban đầu hệ đứng yên.

3) Trường hợp vành dưới tác dụng ngẫu lực M_1 lăn không trượt theo đường nằm ngang. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ x, φ , trong đó x – tọa độ tâm O, φ – góc định vị của tấm (có thể chọn là góc giữa OC và trục nằm ngang x). Bỏ qua ma sát lăn.

Bài 3. Một tay máy chuyển động trong mặt phẳng đứng gồm hai khâu: khâu OA quay quanh trục cố định O nhờ động cơ có mô men $M = M_0 - \beta \omega$, trong đó M_0, β là các hằng số đã cho, ω – vận tốc góc của khâu OA, khâu BC chuyển động theo rãnh nghiêng với đường trục của khâu OA một góc α dưới tác dụng của lực đẩy F từ động cơ thủy lực, $F = F_0 - \gamma v$, trong đó F_0, γ là các hằng số, v – vận tốc của pittông (của thanh BC chuyển động tịnh tiến không ma sát đối với rãnh).



Tay máy mang vật M có khối lượng m được kẹp chặt trên đầu mút của thanh BC và được xem là chất điểm. Chọn các tọa độ suy rộng là φ và u , trong đó φ là góc

quay của khâu OA kể từ vị trí ngang, u – độ dịch chuyển của pit tông BC so với xy lanh được gắn (cứng) trên khâu quay OA và nghiêng với đường trục thanh OA một góc $\alpha = const$. Lò xo liên kết giữa thanh OA và BC có độ cứng c và độ dài không bị biến dạng là l_0 . Thanh OA mảnh, đồng chất, có khối lượng m_1 , có chiều dài l_1 . Thanh BC có khối lượng m_2 , mảnh, đồng chất và có chiều dài tương ứng là l_2 . Bỏ qua ma sát tại các khớp quay và trượt.

- 1) Bỏ qua khối lượng thanh BC. Viết phương trình vi phân chuyển động của tay máy;
- 2) Giả sử tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω . Xác định chuyển động của khâu BC (bỏ qua khối lượng thanh BC);
- 3) Tính động năng của cơ hệ và lực suy rộng khi kể thêm khối lượng m_2 của thanh BC theo các tọa độ suy rộng φ, u và các vận tốc suy rộng $\dot{u}, \dot{\varphi}$

Lời giải

Bài 1.

Câu 1. Chuyển động của con lăn khi $0 \leq \varphi \leq \pi/2$

a) Tính $\bar{\varepsilon}, \bar{\omega}$ theo $\bar{\varphi}$

Phương trình chuyển động của con lăn

$$m\bar{a}_t = -mg \sin \varphi - F_t; \quad (1)$$

$$m \frac{v_c^2}{(R-r)} = N - mg \cos \varphi \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} mr^2 \bar{\varepsilon} = -F_t r \quad (3)$$

$$\bar{v}_t = (R-r)\dot{\varphi} \rightarrow \bar{\varepsilon} = \bar{a}_t / (R-r) \quad (4)$$

Thay (4) vào (1) và từ (3) ta tính được $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{2}{3} g \sin \varphi; \quad (5)$$

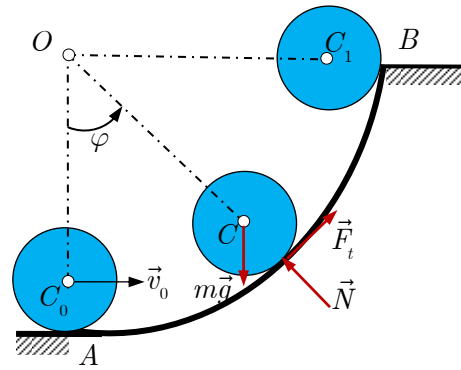
Vận tốc v được tính từ định lý biến thiên động năng:

$$\text{Biểu thức động năng: } T = 0.5(mv_c^2 + J_c \omega^2) = \frac{3}{4} mv_c^2$$

$$\text{Thế năng của trọng lực: } \pi = 0.5(R-r)(\cos \varphi - 1)$$

Định lý biến thiên động năng:

$$T - T_0 = \pi_0 - \pi \rightarrow \frac{3}{4}(mv_c^2 - mv_0^2) = -mg(R-r)(1 - \cos \varphi)$$



$$\rightarrow mv_c^2 = mv_0^2 - \frac{4}{3}mg(R-r)(1 - \cos \varphi);$$

$$\text{Vận tốc góc của đĩa: } \omega^2 = \frac{v_c^2}{r^2} = \frac{1}{r^2} \left[v_0^2 - \frac{4}{3}g(R-r)(1 - \cos \varphi) \right]$$

$$\text{Từ (3) tính phản lực tiếp xúc: } \bar{F}_t = \frac{1}{3}mg \sin \varphi$$

Từ (2) tính được:

$$N = \frac{mv_c^2}{(R-r)} + mg \cos \varphi = \frac{m}{(R-r)} \left[v_0^2 - \frac{4}{3}g(R-r)(1 - \cos \varphi) \right]$$

Câu 2. Chuyển động con lăn quanh mép B

$0 < \theta \leq \pi/2$: Điều kiện để con lăn quay

quanh mép B:

$$\text{Điều kiện: } N > 0 \rightarrow v_0^2 > \frac{4}{3}g(R-r)$$

Phương trình chuyển động của con lăn quay quanh mép B:

$$m\bar{a}_t = F_2 - mg \cos \theta;$$

$$m \frac{v^2}{r} = -N + mg \sin \theta;$$

$$J_B \bar{\varepsilon} = -mgr \cos \theta;$$

$$\left(J_B = 0,5mr^2 + mr^2 = 1,5mr^2 \right)$$

$$\text{Từ đây tính được: } \bar{\varepsilon} = -\frac{g \cos \theta}{1,5r};$$

Sử dụng định lý biến thiên động năng của vật chuyển động song phẳng (hoặc phương quay quanh tâm vận tốc)

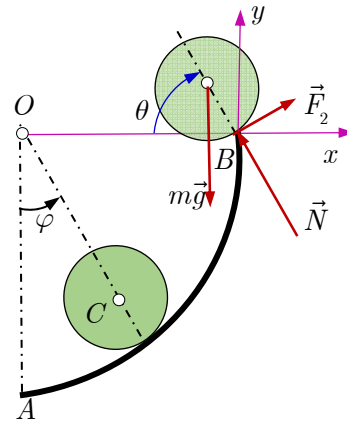
$$\frac{1}{2} J_B (\omega^2 - \omega_1^2) = -mgr \sin \theta \rightarrow \omega^2 = \omega_1^2 - \frac{4}{3} \frac{g}{r} \sin \theta$$

$$\bar{F}_2 = mg \left(1 - \frac{2}{3} \right) \cos \theta = \frac{1}{3} mg \cos \theta; \quad N = m \left(g \sin \theta - \frac{v^2}{r} \right)$$

Trong đó:

$$v^2 = v_1^2 - \frac{4}{3}gr \sin \theta = v_0^2 - \frac{4}{3}g(R-r) - \frac{4}{3}gr \sin \theta = v_0^2 - \frac{4}{3}g[(R-r) + r \sin \theta]$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{v_0^2}{r^2} - \frac{4g}{3r^2} [(R-r) + r \sin \theta]$$



Câu 3.

a) Điều kiện để tại mép B con lăn rời khỏi mép tại góc $\theta = 0.5\pi$ và

$$N=0: \text{Do đó: } (v^*)^2 = gr$$

Trong đó v_2^* vận tốc của tâm C trên đường thẳng đứng qua mép B, tức là với $\theta = 0.5\pi$.
 Ứng với trường hợp này:

$$\omega^{2*} = \frac{v_0^2}{r^2} - \frac{4g}{3r^2} R \rightarrow v^{2*} = v_0^2 - \frac{4}{3} gR$$

Từ (7), khi $\varphi = 0.5\pi \rightarrow v_1^2 = v_0^2 - \frac{4}{3} g(R-r)$

tính được:

$$v_*^2 = v_0^2 - \frac{4}{3} g(R-r) - \frac{4}{3} gr = v_0^2 - \frac{4}{3} gR.$$

Do đó điều kiện để đĩa khi đến vị trí $\theta = 0.5\pi$, tức khi tâm C trên đường thẳng đứng qua B rời khỏi mép B sẽ là:

$$v_*^2 = gR \rightarrow v_0^2 - \frac{4}{3} gR = gR \rightarrow v_0^2 = \frac{7}{3} gR$$

b) Chuyển động tiếp theo của đĩa (chuyển động tự do của đĩa dưới tác dụng của trọng lực):

$$m\ddot{x}_c = 0;$$

$$m\ddot{y}_c = -mg;$$

$$J_c \ddot{\psi} = 0$$

$$\text{Điều kiện đầu: } \begin{cases} x(0) = 0; y(0) = r; \psi(0) = 0; \\ \dot{x}(0) = \sqrt{\frac{7}{3}} gr; \dot{y}(0) = 0; \dot{\psi}(0) = 0; \dot{\psi}(0) = \sqrt{\frac{7g}{3r}} \end{cases}$$

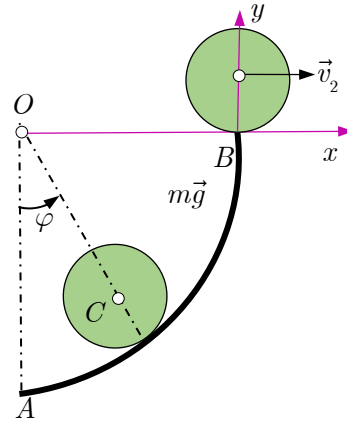
Từ đó ta được:

$$x_c = \sqrt{\frac{7}{3}} grt; y_c = -\frac{1}{2} gt^2 + r; \psi = \sqrt{\frac{7g}{3r}} t$$

Tâm đĩa sẽ chuyển động theo parabol:

$$y_c = -\frac{7}{6} \frac{1}{r^2} x_c^2 + r$$

$$\text{Đĩa sẽ quay đều với vận tốc góc: } \Omega = \dot{\psi}(0) = \sqrt{\frac{7g}{3r}} = \text{const}$$



Bài 2.

Câu 1. Vành đứng yên. Xác định chuyển động của tấm và của con lăn. *Phương trình chuyển động của các đĩa:*

Biểu thức động năng

$$T = \frac{1}{2}(J_2 + 3 \cdot \frac{3}{2}m(2r)^2)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}J_{tg}\dot{\varphi}^2;$$

$$J_{tg} = J_2 + 18mr^2$$

Thế năng $\pi = 0$ (khởi tâm của hệ tại O)

Lực suy rộng của lực không thế:

$$Q_\varphi = M_2$$

Phương trình chuyển động của tấm:

Định lý động năng dạng đạo hàm:

$$\frac{dT}{dt} = Q_\varphi \dot{\varphi}$$

$$J_{tg}\ddot{\varphi} = M_0 - \alpha\dot{\varphi}$$

$$\frac{d(M_0 - \alpha\dot{\varphi})}{M_0 - \alpha\dot{\varphi}} = -\frac{\alpha}{J_{tg}}dt = -\alpha_0 dt; \alpha_0 = \frac{\alpha}{J_{tg}}$$

$$\rightarrow \dot{\varphi} = \frac{M_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha_0 t}) \rightarrow \varphi = \frac{M_0}{\alpha}\left(t + \frac{J_{tg}}{\alpha}e^{-\frac{\alpha}{J_{tg}}t}\right)$$

Xác định phản lực tiếp tác dụng lên con lăn

Viết phương trình vi phân chuyển động của con lăn đối với khối tâm C:

$$J_C\ddot{\theta} = -F_m r \quad ; \quad \rightarrow F_{ms} = -\frac{J_C\ddot{\theta}}{r};$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{h\ddot{\varphi}}{r}; h = 2r \rightarrow F_{ms} = \frac{mrM_0}{J_{tg}}e^{-\frac{\alpha}{J_{tg}}t}$$

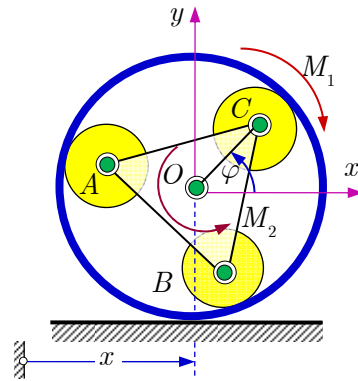
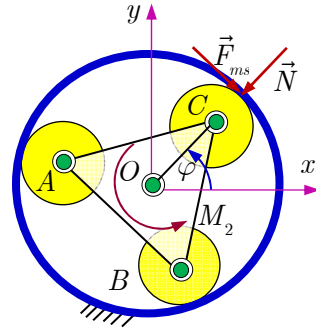
Câu 2. Khảo sát chuyển động bình ổn:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha_0 t})$$

Chế độ bình ổn:

$$\omega_{bo} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varphi}(t) = \frac{M_0}{\alpha}$$

Thời gian để vận tốc đạt được 0.95 ω_{bo} :



$$\omega^* \equiv \omega(T) = 0.95\omega_{b0} \rightarrow \frac{M_0}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{J_{tg}}T}) = 0.95 \frac{M_0}{\alpha} \rightarrow 0.05 = -e^{-\frac{\alpha}{J_{tg}}T}$$

$$\rightarrow -\frac{\alpha}{J_{tg}}T = \ln 0.05 = -\ln 20 \rightarrow T = \frac{J_{tg}}{\alpha} \ln 20$$

Câu 3. Vành lăn dưới tác dụng ngẫu lực có mô men M_1 :

$$T_v = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}^2 + J_1\dot{\theta}^2) = m_1\dot{x}^2; J_1 = m_1R^2; \dot{\theta} = \dot{x}/R; T_t = \frac{1}{2}(m_2\dot{x}^2 + J_2\dot{\varphi}^2);$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(mv_1^2 + J\omega_1^2 + mv_2^2 + J\omega_2^2 + mv_3^2 + J\omega_3^2); J = \frac{1}{2}mr^2$$

$$x_1 = x + h \cos \varphi; y_1 = h \sin \varphi;$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} - h \sin \varphi \dot{\varphi}; \dot{y}_1 = h \cos \varphi \dot{\varphi} \rightarrow v_1^2 = \dot{x}^2 + h^2 \dot{\varphi}^2 - 2h \sin \varphi \dot{x} \dot{\varphi};$$

$$h = R - r = 2r :$$

$$x_2 = x + h \cos(\varphi + 2\pi/3); y_2 = h \sin(\varphi + 2\pi/3)$$

$$\rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x} - h \sin(\varphi + 2\pi/3) \dot{\varphi}; \dot{y}_2 = h \cos(\varphi + 2\pi/3) \dot{\varphi}$$

$$\rightarrow v_2^2 = \dot{x}^2 + h^2 \dot{\varphi}^2 + h(\sin \varphi - \sqrt{3} \cos \varphi) \dot{x} \dot{\varphi};$$

$$x_3 = x + h \cos(\varphi + 4\pi/3); y_3 = h \sin(\varphi + 4\pi/3);$$

$$\rightarrow \dot{x}_3 = \dot{x} - h \sin(\varphi + 4\pi/3) \dot{\varphi}; \dot{y}_3 = h \cos(\varphi + 4\pi/3) \dot{\varphi}$$

$$\rightarrow v_3^2 = \dot{x}^2 + h^2 \dot{\varphi}^2 + h(\sin \varphi + \sqrt{3} \cos \varphi) \dot{x} \dot{\varphi};$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2 = \left(\frac{\dot{x}}{r} + 2\dot{\varphi} \right)^2$$

$$T = \frac{1}{2}(2m_1 + m_2 + \frac{9}{2}m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(J_2 + 18mr^2)\dot{\varphi}^2 + 3mr\dot{x}\dot{\varphi}$$

$$\text{Lực suy rộng; } Q_x = \frac{M_1 - M_2}{R}; \quad Q_\varphi = M_2$$

Phương trình vi phân chuyển động:

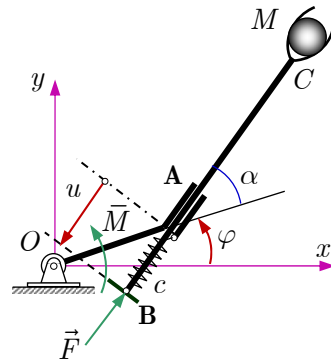
$$(2m_1 + m_2 + \frac{9}{2}m_3)\ddot{x} + 3mr\ddot{\varphi} = \frac{(M_1 - M_0 + \alpha\dot{\varphi})}{R};$$

$$3mr\ddot{x} + (J_2 + 18mr^2)\ddot{\varphi} = M_0 - \alpha\dot{\varphi};$$

Bài 3.

Câu 1. Viết phương trình chuyển động của tay máy:

Biểu thức động năng:



$$T = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + J_1 \omega_1^2 + m_2 v_2^2 + m v^2);$$

$$v_1 = 0.5l_1 \dot{\varphi};$$

$$x_2 = l_1 \cos \varphi + (0.5l_2 - u) \cos(\varphi + \alpha)$$

$$\dot{x}_2 = -0.5l_1 \sin \varphi \dot{\varphi} - (0.5l_2 - u) \sin(\varphi + \alpha) \dot{\varphi} - \cos(\varphi + \alpha) \dot{u};$$

$$y_2 = l_1 \sin \varphi + (0.5l_2 - u) \sin(\varphi + \alpha)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \cos \varphi \dot{\varphi} - (0.5l_2 - u) \cos(\varphi + \alpha) \dot{\varphi} - \sin(\varphi + \alpha) \dot{u};$$

$$v_1^2 = (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = 0.25l_1^2 \dot{\varphi}^2;$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\varphi}^2 + (l_2 - u)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{u}^2 + 2l_1(0.5l_2 - u) \cos \alpha \dot{\varphi}^2 - 2l_1 \sin \alpha \dot{u} \dot{\varphi}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l_1^2 \dot{\varphi}^2 + (l_2 - u)^2 \dot{\varphi}^2 + 2l_1(l_2 - u) \dot{\varphi}^2 + \dot{u}^2 - 2l_1(l_2 - u) \sin \alpha \dot{u} \dot{\varphi}$$

Động năng có thể viết trong dạng sau:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11} \dot{\varphi}^2 + 2a_{12} \dot{\varphi} \dot{u} + a_{22} \dot{u}^2);$$

$$a_{11} = m(l_1^2 + (l_2 - u)^2 + 2l_1(l_2 - u) \cos \alpha) + J; \quad a_{22} = m;$$

$$a_{12} = a_{21} = -ml_1 \sin \alpha;$$

Trong đó : $J = J_1 + J_2$; J_1 - mô men quán tính của khâu OA đối với trục quay O,

J_2 - mô men quán tính của khâu BC đối với khối tâm

Biểu thức thế năng:

$$\pi = m_1 g r \sin \varphi + mg[l_1 \sin \varphi + (l_2 - u) \sin(\varphi + \alpha)] + \frac{1}{2} c(u - l_0)^2;$$

Các lực suy rộng sẽ là:

$$Q_\varphi = M - \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = M - 0.5m_1 g r \cos \varphi - mg[l_1 \cos \varphi + (l_2 - u) \cos(\varphi + \alpha)];$$

$$Q_u = F - \frac{\partial \pi}{\partial u} = F + mg \sin(\varphi + \alpha) - c(u - l_0);$$

Phương trình vi phân chuyển động của tay máy:

Viết phương trình Lagrange 2 đối với các biến φ, u :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial T}{\partial u} = Q_u; \quad ;$$

Ta nhận được

$$\begin{aligned}
& (J + m(l_1^2 + (l_2 - u)^2 + 2l_1(l_2 - u)\cos\alpha)\ddot{\varphi} - ml_1\sin\alpha\ddot{u} \\
& = M + mg(u - l_2)\cos(\varphi + \alpha) + 2m(u - l_2 + l_1\cos\alpha)\dot{u}\dot{\varphi}; \\
& -ml_1\sin\alpha\ddot{\varphi} + m\ddot{u} = F + mg\sin(\varphi + \alpha) - c(u - l_0) - m(u + l_2 + l_1\cos\alpha)\dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Câu 2. Trường hợp khâu 0A quay đều với vận tốc góc $\omega \rightarrow \varphi = \omega t$

Phương trình vi phân chuyển động của pit tông(khâu BC):

$$m\ddot{u} = F_0 - \gamma\dot{u} + mg\sin(\omega t + \alpha) - c(u - l_0);$$

Đưa về dạng:

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2u = \bar{F}_0 + g\sin(\omega t + \alpha);$$

$$2n = \gamma / m; \quad k^2 = c / m : \quad \bar{F}_0 = \frac{F_0 + cl_0}{m}$$

Sử dụng biến: $u^* = u - \frac{\bar{F}_0}{k^2}$

Đưa phương trình về dạng:

$$\ddot{u}^* + 2n\dot{u}^* + k^2u^* = g\sin(\omega t + \alpha)$$

Trường hợp $n \ll k$, phương trình có nghiệm dạng;

$$u^* = Ae^{-nt} \sin(k^*t + \beta) + H \sin(\omega t + \alpha - \varepsilon)$$

Trong đó: $H = \frac{g}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} ; \quad \varepsilon = \arctan \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}$

A, β được xác định từ điều kiện đầu

Câu 3. Trường hợp kể đến khối lượng thanh pit tông

$$\pi = mg[l_1\sin\varphi + (l_2 - u)\sin(\varphi + \alpha)] + m_2[l_1\sin\varphi + (c_2 - u)\sin(\varphi + \alpha)];$$

$$\begin{aligned}
Q_\varphi = M - \frac{\partial\pi}{\partial\varphi} &= M - mg[l_1\cos\varphi + (l_2 - u)\cos(\varphi + \alpha)] \\
&\quad - m_2g[l_1\cos\varphi + (c_2 - u)\cos(\varphi + \alpha)];
\end{aligned}$$

$$Q_u = F - \frac{\partial\pi}{\partial u} = F + (m_2 + m)g\sin(\varphi + \alpha)$$

Ma trận quán tính:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= m(l_2 - u)^2 + ml_1\cos\alpha(l_2 - u) + m_2(c_2 - u)^2 + m_2l_1\cos\alpha(c_2 - u) \\
&\quad + J_1 + J_2 :
\end{aligned}$$

$$a_{12} = -(m + m_2)l_1\sin\alpha; a_{22} = m + m_2$$

Phần 2.
CÁC ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI
ỨNG DỤNG TIN HỌC TRONG CƠ HỌC KỸ THUẬT
2014-2018

Đề thi năm 2014

Bài 1. Hệ cân bằng trong mặt phẳng đứng như hình 1. Cột OA thẳng đứng, trọng lượng P . Thanh ngang BD trọng lượng không đáng kể gắn cứng với cột, chịu tác dụng của lực F , ngẫu lực có mômen M và hệ lực phân bố với cường độ $q(x)$. Dây AE tạo với nền ngang góc α ;

Số liệu: $OA = h_1 = 10 \text{ m}$; $OB = h_2 = 8 \text{ m}$; $BD = l = 3 \text{ m}$;

$q(x) = 9 - x^2 \text{ N/m}$; $P = 5000 \text{ N}$; $F = 40 \cdot Q$; $M = 75l^2 \text{ Nm}$;

$\alpha_{\min} = 45^\circ$, $\alpha_{\max} = 80^\circ$, $\beta = 25^\circ$

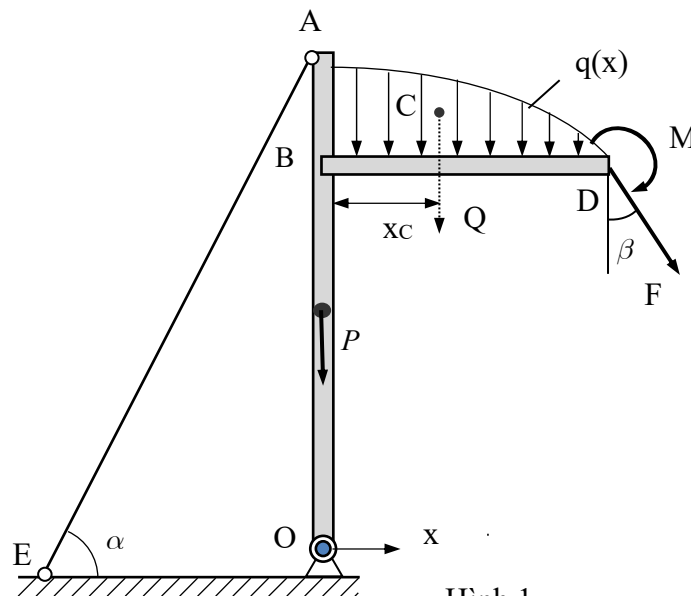
*1) Xác định hợp lực Q , khoảng cách x_C .

*2) Xác định lực căng T dây AE, các lực liên kết tại O và B phụ thuộc góc α .

*3) Vẽ đồ thị $T(\alpha)$; $\alpha = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$

*4) Khi $\alpha = \alpha_0 = 67^\circ$, xác định trị số của T và các lực liên kết tại O, B.

Ghi chú: SV ghi vào bài làm trên giấy thi: *1) Trị số của Q, x_C . *3) Dạng đồ thị $T(\alpha)$ *4) Các trị số của T và các lực liên kết tại O, B.



Hình 1

Bài 2.

Cơ cấu chuyển động trong mặt phẳng Oxy như hình 2. Tay quay $OA = r$ quay quanh trục O theo phương trình $\varphi = 1,5t \text{ rad}$. Con trượt rỗng có thể quay quanh

trục C. Thanh BM nối với OA bằng bản lề A và có thể trượt trong con trượt C. Đặt góc $OCA = \alpha$, khoảng cách từ trục quay C đến A là $CA = u$.

Số liệu: $h = 60 \text{ cm}$; $r = 30 \text{ cm}$; $d = 10 \text{ cm}$;

$t_f = 10 \text{ s}$.

*1) Xác định u, α theo φ . Vẽ đồ thị $u(t)$, $t = [0, t_f]$

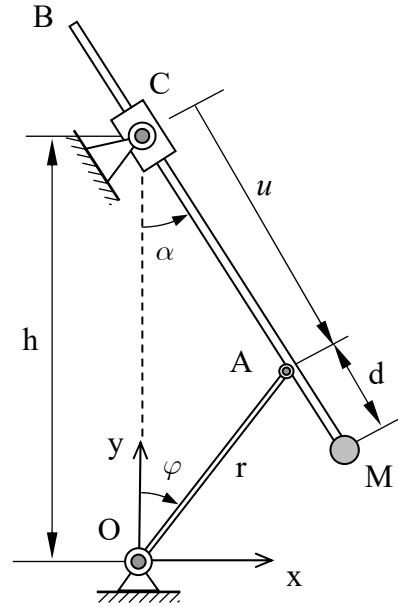
*2) Xác định tọa độ điểm M (x_M, y_M). Vẽ quỹ đạo điểm M trong mặt phẳng Oxy, $t = [0, t_f]$.

*3) Tại vị trí $\varphi = 0, 5\pi$: Xác định vận tốc góc ω_{BM} , gia tốc góc ε_{BM} của thanh BM và tọa độ điểm M (x_M, y_M).

Ghi chú: SV ghi vào bài làm trên giấy thi:

*1) Dạng đồ thị $u(t)$ *2) Dạng quỹ đạo M.

*3) Các trị số của $\omega_{BM}, \varepsilon_{BM}, x_M, y_M$



Hình 2

Bài 3.

Cơ cấu cu lit chuyển động trong mặt phẳng đứng như hình 3a. Trục O_1 của động cơ gắn với

bánh răng 1 có bán kính R_1 , mô men quán tính đối với trục quay là J_1 . Mômen

của động cơ phụ thuộc vận tốc góc $M_1(\dot{\varphi})$ có dạng như hình 3b. Bánh răng 2 có

bán kính R_2 , mômen quán tính đối với trục quay là J_2 . Trên bánh răng 2 có gắn

chốt của con trượt 3, khối lượng con trượt là m_3 . Khoảng cách từ trục O_2 tới chốt con trượt là r . Nhánh thẳng đứng của culit 4 trượt trong con trượt 3, còn nhánh

ngang chịu tác dụng của lực P . Số liệu: $R_1 = 0.3 \text{ m}$; $R_2 = 0.6 \text{ m}$; $r = 0.3 \text{ m}$,

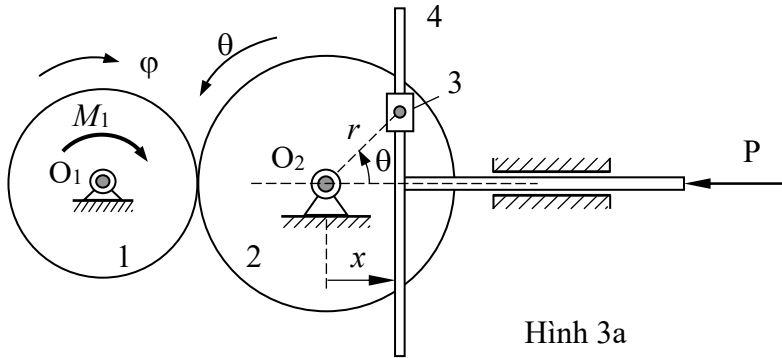
$J_1 = 0.5 \text{ kgm}^2$; $J_2 = 1 \text{ kgm}^2$; $m_3 = 0.5 \text{ kg}$; $m_4 = 2.5 \text{ kg}$

$P = 5 + 5\text{sign}(\dot{x}) - 0.25\dot{x}$; $\dot{x} = dx / dt$; $\theta(0) = 0$; $\dot{\theta}(0) = 0.1 \text{ rad/s}$; $t_f = 3$.

*1) Tính động năng của cơ cấu $T = T(\theta, \dot{\theta})$, thay số liệu vào T . Viết dạng giải tích của $M_1(\dot{\varphi})$.

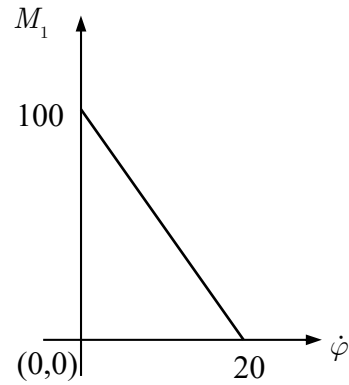
*2) Lập phương trình vi phân chuyển động của cơ cấu theo $\theta(t)$. Giải phương trình vi phân bằng phương pháp số. Vẽ trên 1 hình đồ thị $\theta(t)$ và $\dot{\theta}(t)$, $t = [0, t_f]$. Cho biết giá trị $\theta, \dot{\theta}$ lúc $t = t_1 = 1$.

*3) Vẽ trên 1 hình đồ thị lực $P(t)$ và di chuyển $x(t)$ của culit 4, $t = [0, t_f]$.



Hình 3a

Ghi chú: SV ghi vào bài làm trên giấy thi.*1) Biểu thức $T = T(\theta, \dot{\theta})$ sau khi đã thay số liệu vào T . Dạng giải tích của $M_1(\dot{\theta})$. *2) Giá trị $\theta, \dot{\theta}$ lúc $t=1$. *3) Dạng đồ thị P, x .



Hình 3b

Bài 4.

Robot có cấu trúc như hình 4. Trụ thẳng đứng có mômen quán tính đối với trục quay là J_1 chịu tác dụng của mômen M quay quanh trục Oz , góc quay $\varphi(t)$. Thanh nằm ngang $AB = L_1$, khối lượng thanh không đáng kể. Đầu A gắn đối trọng có khối lượng m_A , con trượt C để

điều chỉnh có khối lượng m_C . Lò xo có độ cứng c , độ dài khi không bị biến dạng là l_0 , chịu lực nằm ngang F_r do trụ đứng tác dụng. Thanh thẳng đứng $DE = L_2$, khối lượng không đáng kể, đầu D có gắn khối lượng m_D , chịu lực thẳng đứng F_h do thanh ngang AB tác dụng. Chọn các tọa độ suy rộng cho hệ là $\varphi(t), r(t), h(t)$ và ký hiệu $\omega = \dot{\varphi}(t), v_r = \dot{r}(t)$.

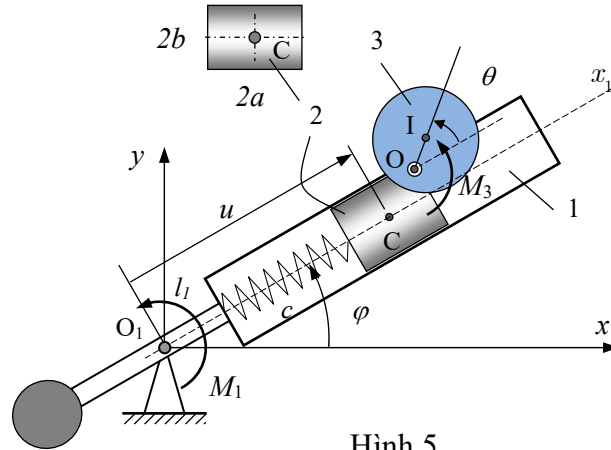
Số liệu: $J_1 = 0.2 \text{ kgm}^2; m_A = 3 \text{ kg}; m_C = 1 \text{ kg}; m_D = 2 \text{ kg}; g = 10 \text{ m/s}^2$

$H = 1.5 \text{ m}; L_1 = 1 \text{ m}; L_2 = 0.6 \text{ m}; a = 0.3 \text{ m}; c = 20 \text{ N/m}; l_0 = 0.01 \text{ m}$

$M = 10 - 5\dot{\varphi}(t); F_r = -50[r(t) - 0.6] - 20\dot{r}(t)$

$F_h = -m_D g - 15[h(t) - 0.5] - 7\dot{h}(t)$

kết với ống bằng lò xo tuyến tính có độ cứng là c . Độ dài lò xo khi chưa bị biến dạng bằng l_0 . Một đĩa tròn đồng chất 3, bán kính R khối lượng m_3 quay quanh trục qua O (góc trên của con trượt C) gắn với con trượt cách tâm I một đoạn $e = OI = 0,5R$ và chịu tác dụng ngẫu lực M_3 từ con trượt C. Chọn các tọa độ suy rộng là φ , u và θ như hình vẽ.



Hình 5

1) Tính biểu thức động năng của hệ và các lực suy rộng. Viết ra biểu thức động năng dạng

$$T = \frac{1}{2} m_{11} \dot{\varphi}^2 + m_{12} \dot{\varphi} \dot{u} + m_{13} \dot{\varphi} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_{22} \dot{u}^2 + m_{23} \dot{u} \dot{\theta} + \frac{1}{2} m_{33} \dot{\theta}^2.$$

2) Xét trường hợp trục O trùng với khối tâm C của con trượt 2. Hãy viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng;

3) Giải bằng số phương trình vi phân chuyển động với điều kiện đầu:

$$\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0, u(0) = L_0, \dot{u}(0) = 0, \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0.$$

Sử dụng bộ số liệu sau để tính toán

$$J_1 = 0.2, J_2 = 0.2, m_2 = 0.3, m_3 = 0.5, a = 0.2, b = 0, R = 0.4, e = 0.5 \cdot R, g = 10$$

$$c = 100, L_0 = 0.2, l_1 = 0.1L_0, d = 2$$

Ghi chú: SV ghi vào bài làm trên giấy thi:

*1) Biểu thức bằng chữ các đại lượng $m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{22}, m_{23}, m_{33}$ và thế năng hệ.

*3) Đưa ra giá trị các đại lượng $\varphi, \dot{\varphi}, u, \dot{u}, \theta, \dot{\theta}$ tại thời điểm $t = 1s$, với

$$M_1 = 30 - 6\dot{\varphi}, M_3 = 10 - 2\dot{\theta}.$$

Vẽ đồ thị theo thời gian các đại lượng sau:

$$\varphi(t), \dot{\varphi}(t); t = [0, t_f]; \quad t_f = 10 \text{ s. (mỗi đại lượng trên một hình)}$$

$$u(t), \dot{u}(t); t = [0, t_f]; \quad t_f = 10 \text{ s. (trên cùng một hình)}$$

Lời giải

Bài 1

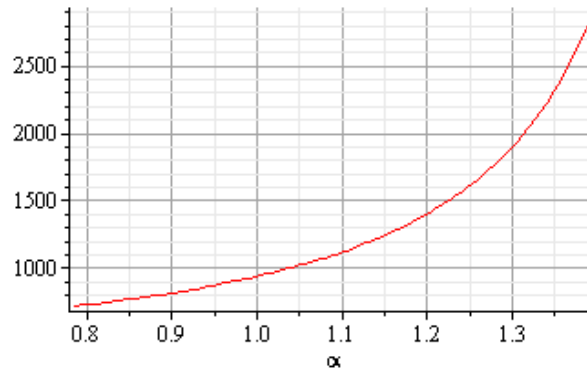
1) Thu gọn lực phân bố

$$Q = \int_0^l q(x)dx = 18 \rightarrow F = 40Q = 720$$

$$x_c = Q^{-1} \int_0^l xq(x)dx \rightarrow x_c = 1.125$$

2) Xác định lực liên kết
6PTCB $\rightarrow T(\alpha)$

3) Đồ thị $T(\alpha)$



4) Đổi các góc sang radian. Giải PTCB khi $\alpha = 67^\circ$

$$T = 1301.958211, \quad X_0 = 204.4304523, \quad Y_0 = 6869.000460$$

$$X_B = -304.2851485, \quad Y_B = 670.5416066, \quad m_B = 2652.874820$$

Bài 2

1) Giải các định lý cos và sin trong tam giác ta được:

$$u = \sqrt{r^2 + h^2 - 2hr \cos \varphi}, \quad \sin \alpha = \frac{r \sin \varphi}{u}$$

Đồ thị $u(t)$ và $\alpha(t)$:





<p>2) Quỹ đạo điểm M:</p>	<p>3) Vận tốc góc, gia tốc góc thanh BM</p> $\omega_{BM} = \frac{d\alpha}{dt}; \varepsilon_{BM} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ <p>Khi $t = \pi / 3$:</p> <p>[vtg, gtg] = [-0.30, -0.540]</p> <p>[xM,yM]=[0.3447213597, -0.089442719]</p>
---------------------------	---

Bài 3

1) Biểu thức động năng

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta; \varphi = \frac{R_2}{R_1} \theta;$$

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} m_4 \dot{x}^2$$

Thay số:

$$T = (1.5 + 0.135 \sin^2 \theta + 0.0225 \cos^2 \theta) \dot{\theta}^2$$

$$= (1.5225 + 0.1125 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2$$

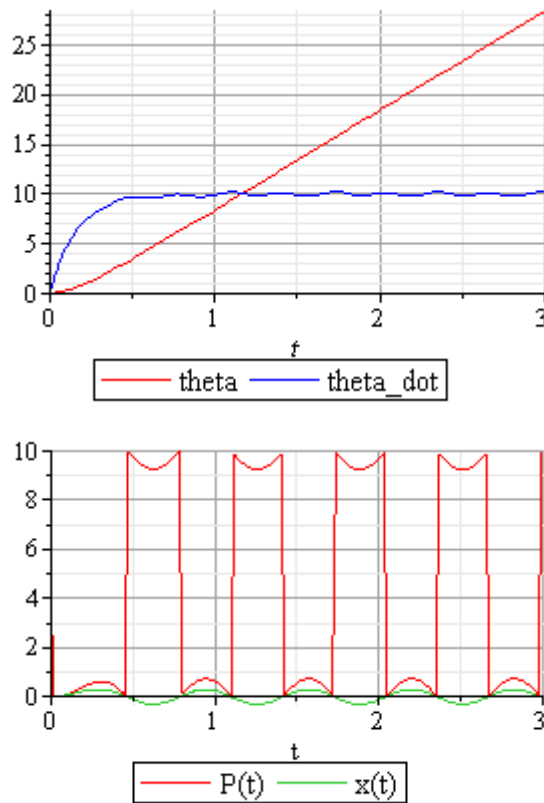
$$M_1(\dot{\theta}) = \begin{cases} 100(1 - \frac{\dot{\varphi}}{20}) = 100 - 10\dot{\theta}, & 0 \leq \dot{\varphi} \leq 20 \\ 0, & \dot{\varphi} > 20 \end{cases}$$

2) PTVP

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma W_k, \quad \Sigma W_k = M\dot{\varphi} - P\dot{x} - m_3 g v_{3y}$$

Lúc $t=1$: $\theta(1) = 8.4087, \quad \dot{\theta}(1) = 9.92497$

Đồ thị $\theta(t)$ & $\dot{\theta}(t)$



3) Đồ thị $P(t)$ và $x(t)$

Bài 4

Tọa độ các điểm A, C và D

$$\begin{aligned} x_A &= (L_1 - r) \sin \varphi & x_C &= -(r - a) \sin \varphi & x_D &= -r \sin \varphi \\ y_A &= -(L_1 - r) \cos \varphi & y_C &= (r - a) \cos \varphi & y_D &= r \cos \varphi \\ z_A &= H & z_C &= H & z_D &= H - h + L_2 \end{aligned}$$

1) Động năng, thế năng và lực suy rộng

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega^2 + \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} m_D v_D^2$$

$$\Pi = m_A g z_A + m_C g z_C + m_D g z_D + \frac{1}{2} c (L_1 - r(t) - l_0)^2$$

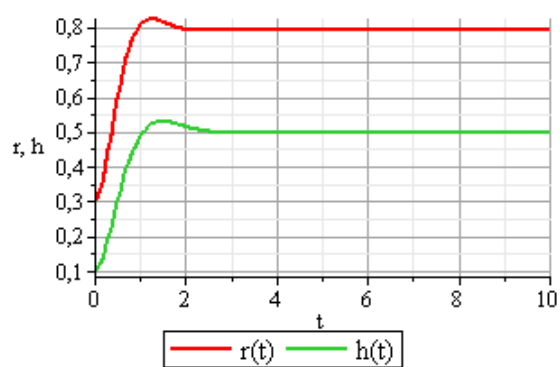
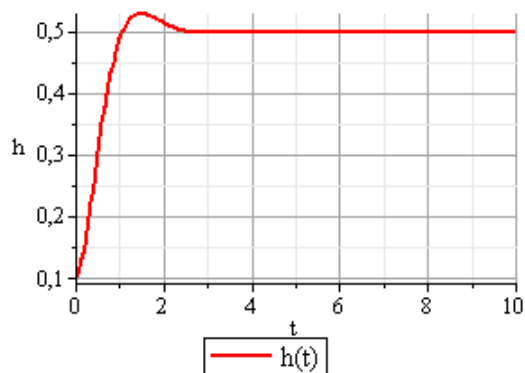
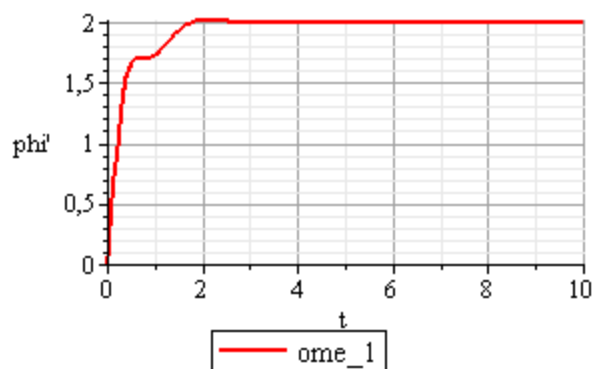
$$M = 10 - 5\dot{\varphi}(t); F_r = -50[r(t) - 0.6] - 20\dot{r}(t);$$

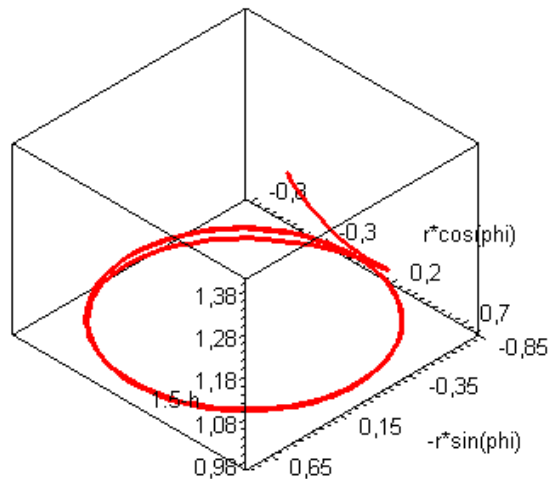
$$F_h = -m_D g - 15[h(t) - 0.5] - 7\dot{h}(t)$$

2) Các giá trị trạng thái tại thời điểm $t = 1$ s:

$$\begin{aligned} h(1) &= 0.4858288354460362, & h'(1) &= 0.2128040442881635, \\ \phi(1) &= 1.35669566932152974, & \phi'(1) &= 1.72233295637478179, \\ r(1) &= 0.805779086958639756, & r'(1) &= 0.16431189752610367 \end{aligned}$$

3) Đồ thị $d\phi(t)/dt$, $r(t)$ và $h(t)$





4) Quỹ đạo E: $t = tf$: $rE = [-0.32124748; 0.7279165; 0.99999999]^T$

Bài 5

Câu 1) Tọa độ khối tâm các vật

$$x_C = u \cos \varphi$$

$$y_C = u \sin \varphi$$

$$x_I = u \cos \varphi + a \cos \varphi - b \sin \varphi + e \cos(\varphi + \theta)$$

$$y_I = u \sin \varphi + a \sin \varphi + b \cos \varphi + e \sin(\varphi + \theta)$$

Biểu thức động năng

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_3 v_I^2 + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_{11} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_{22} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} m_{33} \dot{\theta}^2 + m_{12} \dot{\varphi} \dot{u} + m_{13} \dot{\varphi} \dot{\theta} + m_{23} \dot{u} \dot{\theta}$$

với các số hạng:

$$m_{11} = J_1 + J_2 + J_3 + m_2 u^2 +$$

$$m_3 [a^2 + b^2 + u^2 + e^2 + 2au + 2e(a \cos \theta + u \cos \theta + b \sin \theta)];$$

$$m_{12} = -m_3 b - m_3 e \sin \theta; m_{13} = J_3 + m_3 e(e + a \cos \theta + u \cos \theta + b \sin \theta);$$

$$m_{22} = m_2 + m_3; m_{23} = -m_3 e \sin \theta; m_{33} = m_3 e^2 + J_3;$$

J_3 - mômen quán tính của đĩa đối với khối tâm I, $J_3 = \frac{1}{2} m_3 R^2$.

Biểu thức thế năng và lực suy rộng không thế

$$\Pi = m_2 g y_C + m_3 g y_I + \frac{1}{2} c (u - l_0 - l_1 - a)^2$$

Qs[phi]:=M1; Qs[u]:=-d*diff(u(t),t); Qs[theta]:=M3;

Câu 3) Kết quả tính toán

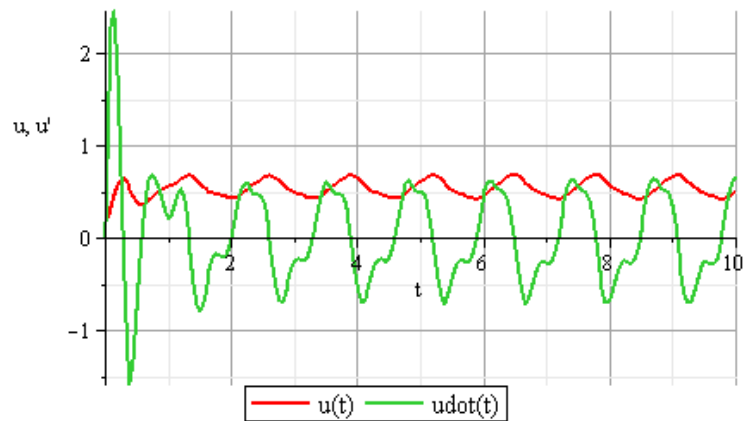
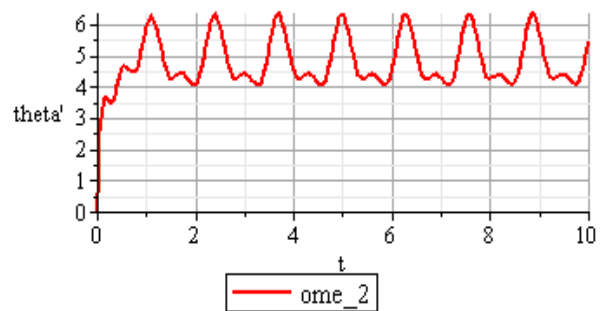
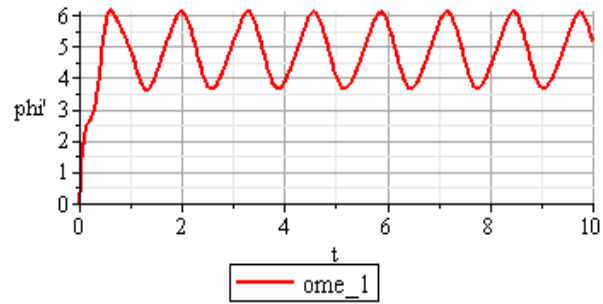
$t(1) = 1.0$,

$\phi(1) = 4.33659688696260037$, $\phi'(1) = 4.90587002071984024$,

$\theta(1) = 4.13076348092220780$, $\theta'(1) = 5.89934137391916468$,

$u(1) = 0.560670350929496131$, $u'(1) = 0.215721424517446886$.

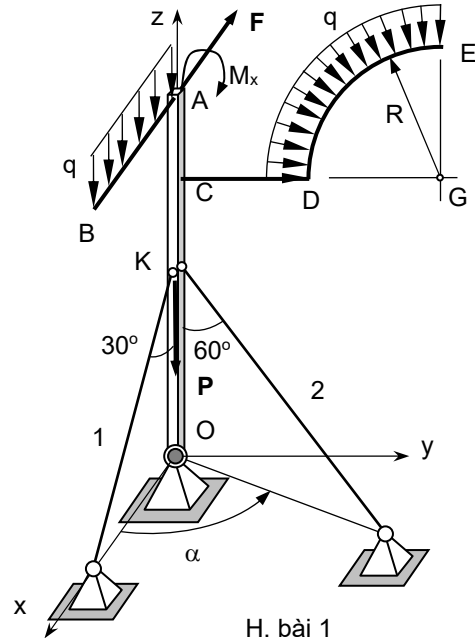
Đồ thị các tọa độ suy rộng và vận tốc suy rộng



Đề thi năm 2015

Bài 1

Cột OA được giữ cân bằng thẳng đứng nhờ bản lề cầu O, hai thanh không trọng lượng (1 và 2) như hình vẽ. Các thanh AB//Ox và CDE (CDG//Oy, cung DE là $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm G nằm trong Oyz) được hàn chặt vào cột OA. Trọng lượng cột $P = 5000 \text{ N}$. Lực $\vec{F} // x$ tại A, trị số $F = 500 \text{ N}$. Ngẫu lực trong mặt phẳng yz có mômen $M_x = 300 \text{ Nm}$. Các lực phân bố đều có cường độ $q = 100 \text{ N/m}$ (trên đoạn AB lực phân bố thẳng đứng và trên cung DE lực phân bố nằm trong mặt phẳng Oyz và hướng về tâm G). Cho biết các khoảng cách: $OK = KA = 3 \text{ m}$, $AB = CD = R = 2 \text{ m}$; $KC = CA$; $\alpha_{\min} = 45^\circ$, $\alpha_{\max} = 135^\circ$.



H. bài 1

Thí sinh tính trên máy, ghi và vẽ vào giấy thi các kết quả sau:

- 1) Các thành phần hình chiếu của lực thu gọn của lực phân bố trên DE.
- 2) Biểu thức lực liên kết tại bản lề cầu O và ứng lực $S_1(\alpha), S_2(\alpha)$ của các thanh 1 và 2 phụ thuộc góc α .
- 3) Đồ thị $S_1(\alpha)$ và $S_2(\alpha)$ với $\alpha = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$.
- 4) Trị số của lực liên kết tại O và ứng lực hai thanh khi $\alpha = 90^\circ$.

Bài 2.

Cơ cấu chuyển động trong mặt phẳng đứng Bxy như hình vẽ. Tay quay OA quay đều quanh trục ngang O với vận tốc góc $\omega = 0.5 \text{ rad/s}$, $\varphi = \omega t$. Nhờ con trượt A, thanh BC quay quanh trục ngang B. Nhờ thanh nối CD, thanh DE chuyển động theo phương ngang. Cho biết $OA = 10$, $OB = 20$, $BC = 50$, $CD = 20$, $OK = 40 \text{ cm}$.

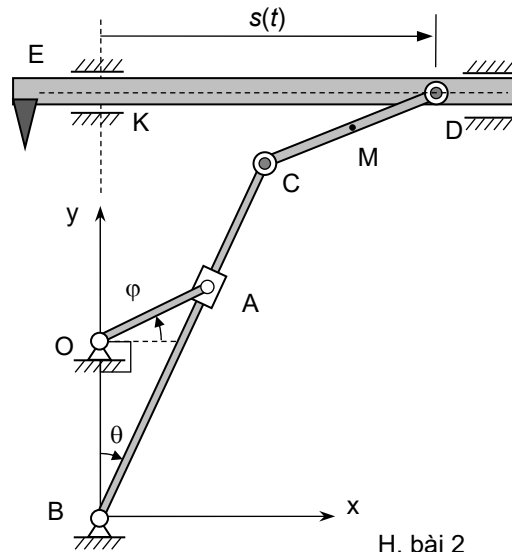
Thí sinh tính trên máy, ghi và vẽ vào giấy thi các kết quả sau:

1) đồ thị trong khoảng thời gian
 $t \in [0, 8\pi]$ s của:

- Góc $\theta(t)$, vận tốc góc, và gia tốc góc của thanh BC.
- Độ dài $u(t) = BA$, vận tốc và gia tốc tương đối của A dọc BC.
- Di chuyển $s(t)$ và vận tốc của thanh DE.

2) quỹ đạo trung điểm M của CD trong mặt phẳng Bxy.

3) trị số của góc θ , độ dài BA, và di chuyển s khi: $\varphi = 0$,
 $\varphi = \pi/2$.



Bài 3.

Cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng đứng. Đĩa tròn đồng chất 1 có mô men quán tính khối đối với trục quay O_1 là J_1 , chịu tác dụng của ngẫu lực $M_1 = M_0 - \alpha\varphi$. Thanh chữ T nằm ngang có khối lượng m_2 chuyển động theo phương ngang do có con trượt A (khối lượng không đáng kể) lắp với đĩa 1 bằng chốt A cách O_0 đoạn bằng r . Các chốt điểm B và C có khối lượng m_3 và m_4 được gắn vào thanh không khối lượng BO_2C , ($O_2B \perp O_2C$) thanh này quay được quanh trục ngang O_2 . Chốt điểm B nối với thanh 2 bằng lò xo độ cứng k_1 và cản nhớt hệ số cản c_1 . Một lò xo xoắn độ cứng k_2 nối giữa giá cố định với thanh BO_2C . Khi $\varphi = 0$ và $x = 0$, lò xo 1 không biến dạng, lò xo xoắn 2 bị biến dạng một góc nhỏ để giữ O_2B cân bằng tại vị trí thẳng đứng ($x=0$). Biết rằng khi hệ chuyển động di chuyển ngang x của m_3 là nhỏ, ($\theta \approx x/a$).

Số liệu: $r = 0.1$; $a = 0.8$; $b = 0.2$ m

$$J_1 = 2.0 \text{ kgm}^2; m_2 = 0.5 \text{ kg}; m_3 = 10 \text{ kg};$$

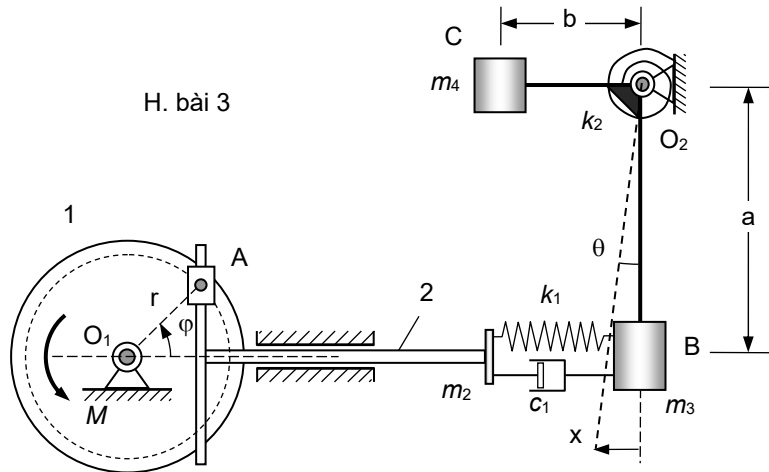
$$m_4 = 1 \text{ kg}, k_1 = 200 \text{ N/m}, k_2 = 300 \text{ Nm/rad},$$

$$c_1 = 10 \text{ Ns/m} \quad M_0 = 30 \text{ Nm}, \alpha = 6 \text{ Nms/rad};$$

$$\varphi(0) = 0; \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \text{ rad/s}; \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0; \quad t_f = 5 \text{ s}.$$

Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo tọa độ suy rộng $\varphi(t), x(t)$ và giải phương trình vi phân bằng phương pháp số.

H. bài 3

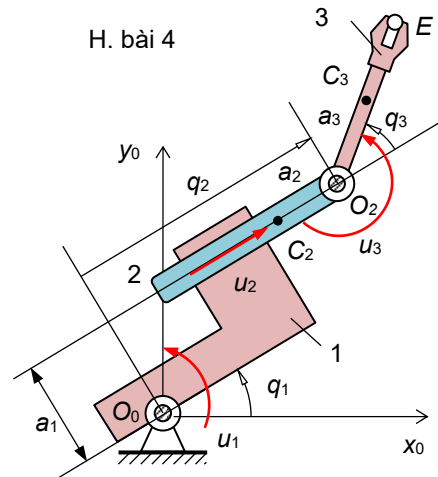


Thí sinh tính trên máy, ghi và vẽ vào giấy thi các kết quả sau:

- 1) Biểu thức chữ động năng và thế năng của cơ hệ.
- 2) Đồ thị $\dot{\varphi}(t), \dot{x}(t)$ $t = [0, t_f]$ và cho biết giá trị $\varphi, \dot{\varphi}$ lúc $t = 1$ s.
- 3) Đồ thị $x(t), \dot{x}(t)$, nếu đĩa 1 quay đều với vận tốc góc $\dot{\varphi} = 5 \text{ rad/s}$. Biết điều kiện đầu $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.

Bài 4.

Robot gồm ba khâu (1-2-3) chuyển động trong mặt phẳng đứng. Khâu 1 có mômen quán tính khối đối với trục quay O_0 là J_1 , khối tâm nằm trên trục quay O_0 , chịu tác dụng của mômen u_1 quay quanh trục O_0z_0 (vuông góc mặt phẳng hình vẽ), góc quay $q_1(t)$. Khâu 2 có khối lượng m_2 , khối tâm C_2 , $O_2C_2 = a_2$, mômen quán tính khối đối với khối tâm của nó là J_2 , chịu lực đẩy u_2 từ khâu 1, độ dịch chuyển $q_2(t)$. Khâu 3 có khối lượng m_3 , khối tâm C_3 , $O_2C_3 = a_3$, $O_2E = 2a_3$, mômen quán tính khối đối với khối tâm của nó là J_3 , chịu tác dụng của mô men u_3 từ khâu 2, góc quay $q_3(t)$. Chọn các tọa độ suy rộng cho hệ là



q_1, q_2 , và q_3 . Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động và giải bằng số phương trình vi phân chuyển động.

Cho số liệu:

$$J_1 = 1.0 \text{ kgm}^2; a_1 = 0.2 \text{ m}; \quad m_2 = 3 \text{ kg}; \quad a_2 = 0.5 \text{ m}; \quad J_2 = 0.2 \text{ kgm}^2;$$

$$m_3 = 1.5 \text{ kg}; \quad a_3 = 0.3 \text{ m}; \quad J_3 = 0.2 \text{ kgm}^2; g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$u_1 = -500(q_1 - 0) - 50\dot{q}_1; \quad u_2 = -400(q_2 - 0.5) - 60\dot{q}_2; \quad t_f = 2 \text{ s.}$$

$$u_3 = -300(q_3 - 1.5) - 30\dot{q}_3$$

Các điều kiện đầu:

$$q_1(0) = 0.5; \quad \dot{q}_1(0) = 0; \quad q_2(0) = 1.0; \quad \dot{q}_2(0) = 0; \quad q_3(0) = 0; \quad \dot{q}_3(0) = 0;$$

Thí sinh tính trên máy, ghi và vẽ vào giấy thi các kết quả sau:

- 1) Biểu thức chữ: tổng động năng của khâu 1 và khâu 2; và biểu thức thế năng hệ.
- 2) Đưa ra các giá trị của $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2$ tại thời điểm $t = 1 \text{ s}$.
- 3) Đồ thị các đại lượng $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ theo biến thời gian $t, t = [0, t_f]$.
- 4) Quĩ đạo điểm E trong khoảng thời gian

Lời giải

Bài 1.

- 1) Các thành phần hình chiếu của lực thu gọn của lực phân bố trên DE.

$$\mathbf{Q2y} = \mathbf{200}; \quad \mathbf{Q2z} = \mathbf{200};$$

- 2) Biểu thức lực liên kết tại bản lề cầu O và ứng lực $S_1(\alpha), S_2(\alpha)$ của các thanh 1 và 2 phụ thuộc góc α .

$$\begin{aligned} res := & \left\{ S1 = \frac{800}{3} \frac{7 \sin(\alpha) + 5 \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}, S2 = -\frac{4000}{9} \frac{\sqrt{3}}{\sin(\alpha)}, XO \right. \\ & = -\frac{1300}{3}, YO = \frac{1400}{3}, ZO \\ & = \frac{200}{9} \frac{1}{\sin(\alpha)} (42\sqrt{3} \sin(\alpha) + 30\sqrt{3} \cos(\alpha) - 10\sqrt{3} \\ & \left. + 243 \sin(\alpha)) \right\} \end{aligned}$$

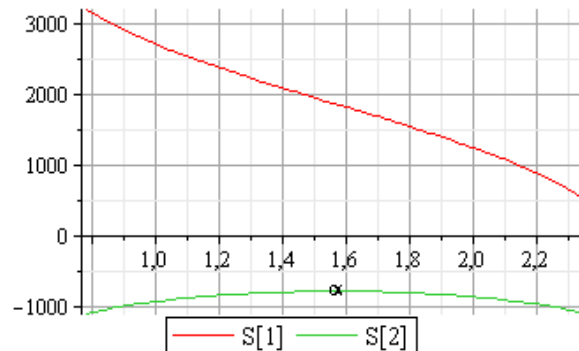
$$S1 = \frac{266.6666667(7. \sin(\alpha) + 5. \cos(\alpha))}{\sin(\alpha)}, S2 = -\frac{769.8003590}{\sin(\alpha)},$$

$$XO = -433.3333333 \quad YO = 466.6666667 \quad ZO =$$

$$= \frac{1}{\sin(\alpha)} (22.22222222(315.7461339 \sin(\alpha)$$

$$+ 51.96152424 \cos(\alpha) - 17.32050808))$$

3) Đồ thị $S_1(\alpha)$ và $S_2(\alpha)$ với $\alpha = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$



4) Trị số của lực liên kết tại O và ứng lực hai thanh khi $\alpha = 90^\circ$.

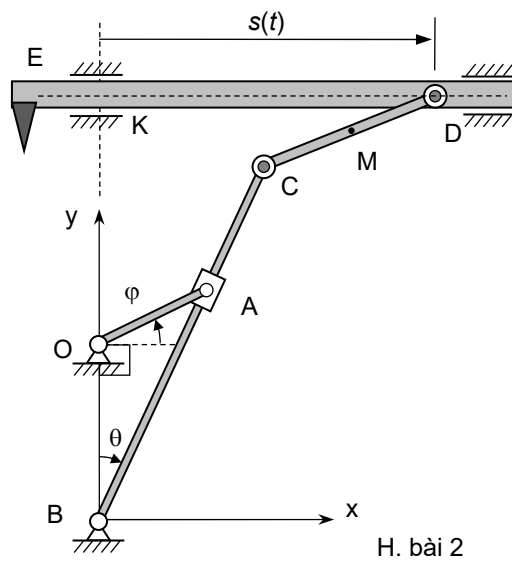
> alpha0:=Pi/2:

$XO := \{-433.3333333\}$ $YO := \{466.6666667\}$ $ZO := \{6631.680573\}$
 $S1 := \{1866.666667\}$ $S2 := \{-769.8003590\}$

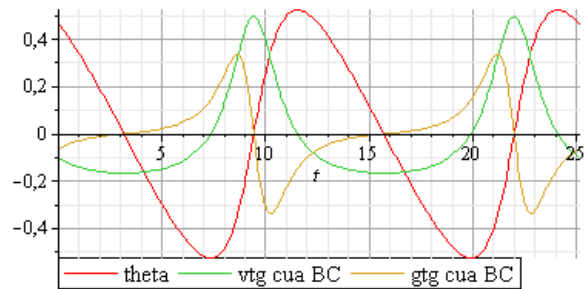
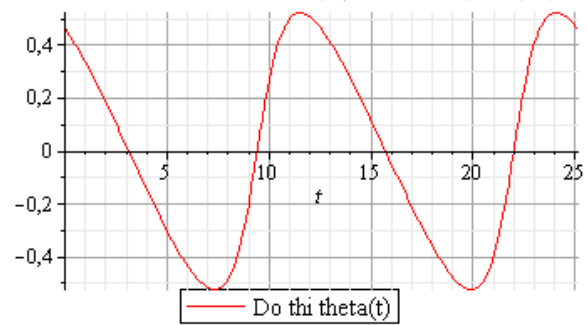
Bài 2.

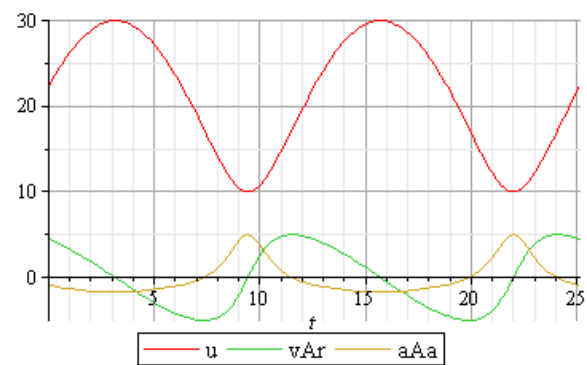
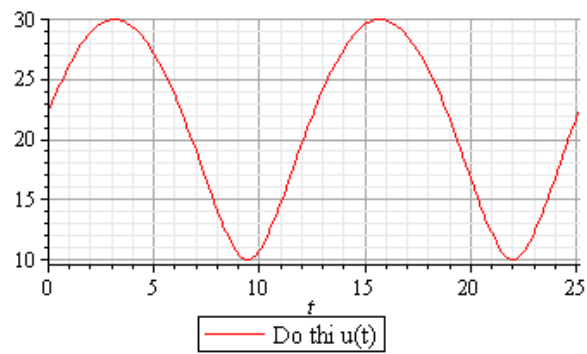
1) đồ thị trong khoảng thời gian $t \in [0, 8\pi]$ s của:

- Góc $\theta(t)$, vận tốc góc, và gia tốc góc của thanh BC.
- Độ dài $u(t) = BA$, vận tốc và gia tốc tương đối của A dọc BC.
- Di chuyển $s(t)$ và vận tốc của thanh DE.



$$u := 10 \sqrt{5 + 4 \sin(0.5 t)}, \quad \theta := \arcsin\left(\frac{\cos(0.5 t)}{\sqrt{5 + 4 \sin(0.5 t)}}\right)$$

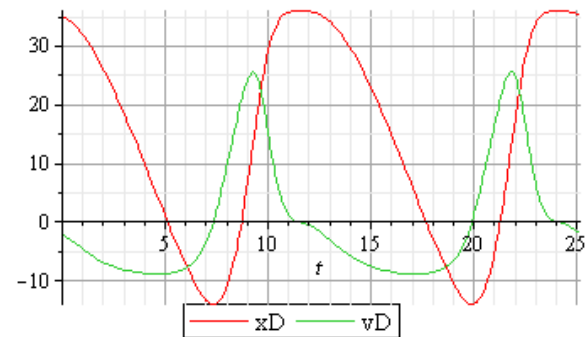




BK:=OB+OK:

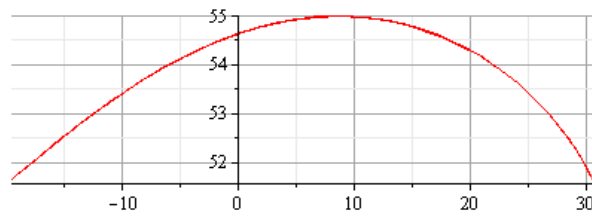
$\sin D := (BK - BC \cdot \cos(\theta)) / CD$: $\cos D := \sqrt{1 - \sin D^2}$:

$x D := BC \cdot \sin(\theta) + CD \cdot \cos D$: $v D := \text{diff}(x D, t)$:



2) quỹ đạo trung điểm M của CD trong mặt phẳng Bxy.

$x M := BC \cdot \sin(\theta) + CD/2 \cdot \cos D$: $y M := BC \cdot \cos(\theta) + CD/2 \cdot \sin D$:



3) trị số của góc θ , độ dài BA, và di chuyển s khi: $\varphi = 0$, $\varphi = \pi / 2$.

$\varphi = 0$: $[\theta, u, xD] = [0.4636476091, 22.36067977, 35.26661432]$

$\varphi = \pi/2$: $[\theta, u, xD] = [-6.83677935910^{-11}, 30.00000000, 17.32050808]$

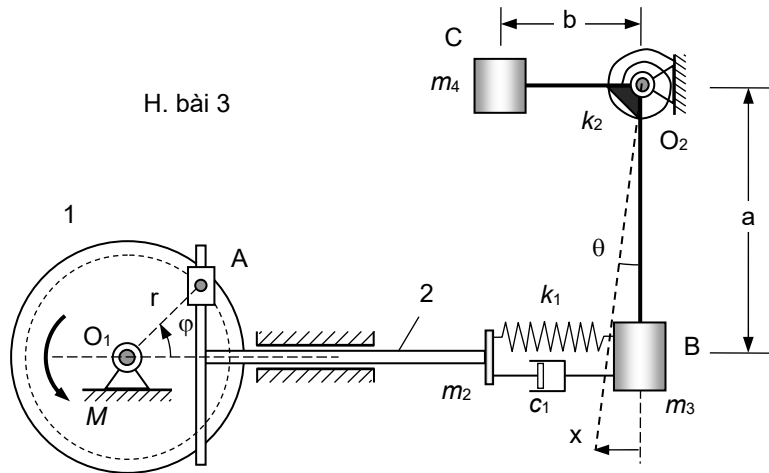
Bài 3.

1) Biểu thức chữ động năng và thế năng của cơ hệ.

$$T1 := \frac{1}{2} J_1 (\dot{\phi})^2 \quad T2 := \frac{1}{2} m_2 r^2 \sin(\phi)^2 (\dot{\phi})^2$$

$$T3 := \frac{1}{2} \frac{(m_3 a^2 + m_4 b^2) \dot{x}^2}{a^2} \quad \theta_0 := \frac{m_4 g b}{k_2}$$

H. bài 3

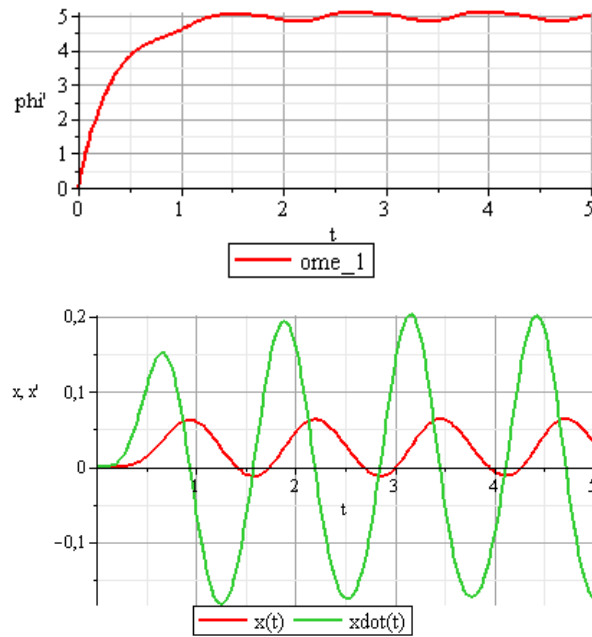


$$TN := -m_3 g a \cos\left(\frac{x}{a}\right) + m_4 g b \sin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} k l (r - r \cos(\phi))$$

$$- x)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{x}{a} - \frac{m_4 g b}{k_2} \right)^2$$

$$HT := \frac{1}{2} c l (r \sin(\phi) \dot{\phi} - \dot{x})^2$$

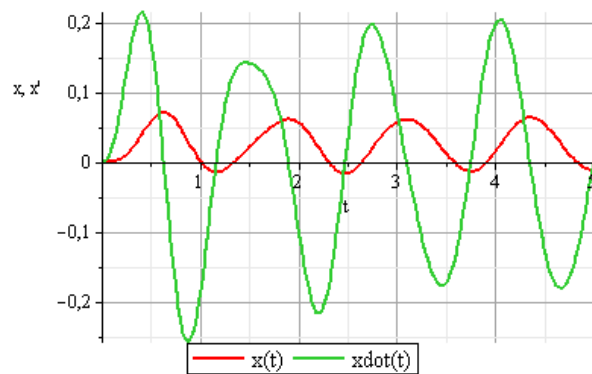
2) Đồ thị $\dot{\varphi}(t), \dot{x}(t)$ $t = [0, t_f]$ và cho biết giá trị $\varphi, \dot{\varphi}$ lúc $t = 1$ s.



> res(1);

$$\begin{aligned} & \left[t(1) = 1., \phi(1) = 3.33269373633551824\phi''(1) \right. \\ & \quad = 4.59908933848754930\alpha(1) = 0.060678397535076082\alpha'(1) = \\ & \quad \left. -0.055363075801544745\dot{\phi} \right] \end{aligned}$$

3) Đồ thị $x(t), \dot{x}(t)$, nếu đĩa 1 quay đều với vận tốc góc $\dot{\varphi} = 5\text{rad/s}$. Biết điều kiện đầu $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.



Bài 4.

1) Biểu thức chữ: tổng động năng của khâu 1 và khâu 2; và biểu thức thế năng hệ.

$$T1 := \frac{1}{2} J_1 q1'^2$$

$$T2 := \frac{1}{2} m_2 (-2 q1'^2 q2 a2 + a1^2 q1'^2 + q1'^2 q2^2 + q1'^2 a2^2 + q2'^2 - 2 a1 q1' q2') + \frac{1}{2} J_2 q1'^2$$

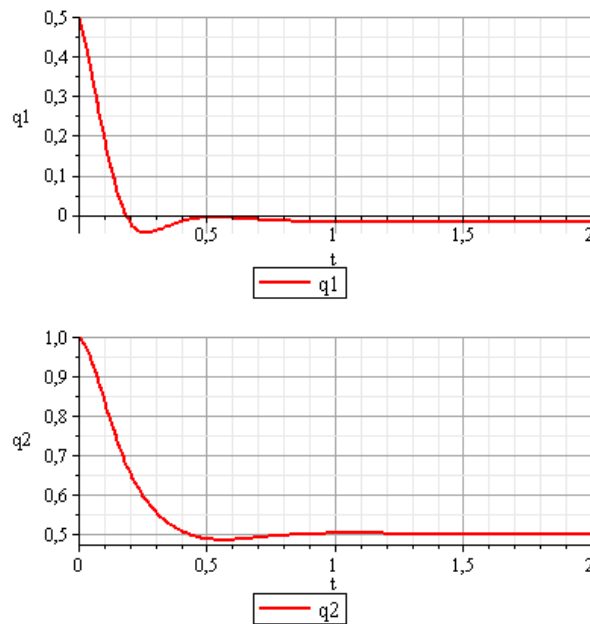
$$TN := m_2 g (a1 \cos(q1) + (q2 - a2) \sin(q1)) + m_3 g (a1 \cos(q1) + q2 \sin(q1) + a3 \sin(q1 + q3))$$

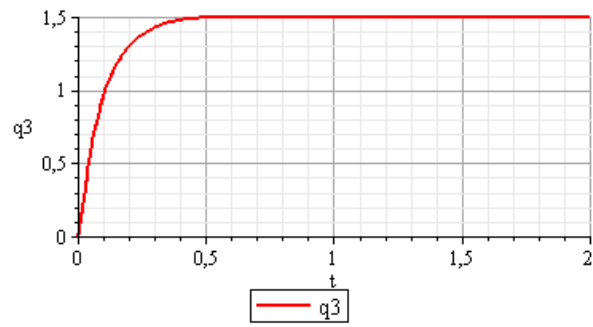
2) Đưa ra các giá trị của $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2$ tại thời điểm $t = 1$ s.

> res(1);

$$\begin{aligned} [t(1) = 1., q1(1) = -0.016954073952239776, q1'(1) = 5.04226903183746062 \cdot 10^{-7}, q2(1) = 0.502771249459945224 \\ q2'(1) = 0.0049833389454176195, q3(1) = 1.4982625431669021, q3'(1) = 0.0011343915060892813] \end{aligned}$$

3) Đồ thị các đại lượng $q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ theo biến thời gian $t, t = [0, t_f]$.

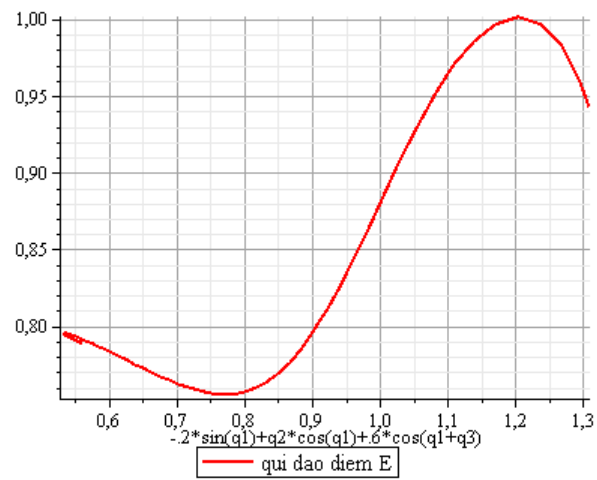




4) Quỹ đạo điểm E trong khoảng thời gian $[0, t_f]$.

$$xE := -0.2 \sin(q1) + q2 \cos(q1) + 0.6 \cos(q1 + q3)$$

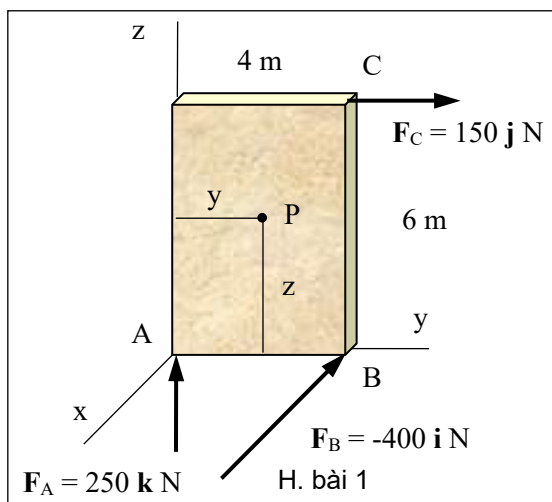
$$yE := 0.2 \cos(q1) + q2 \sin(q1) + 0.6 \sin(q1 + q3)$$



Đề thi năm 2016

Bài 1.

Hệ ba lực \mathbf{F}_A , \mathbf{F}_B , và \mathbf{F}_C (xem hình vẽ) tương đương với một hệ xoắn gồm lực \mathbf{F}_R và véc tơ ngẫu lực \mathbf{M} song song nhau, lực \mathbf{F}_R đặt tại điểm $P(0,y,z)$. Hãy xác định: (a) véc tơ lực \mathbf{F}_R và véc tơ ngẫu lực \mathbf{M} . (b) tọa độ y và z của điểm $P(0, y, z)$ trên mặt yz . Trong hình vẽ ba véc tơ đơn vị của ba trục tọa độ xyz tương ứng là $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.



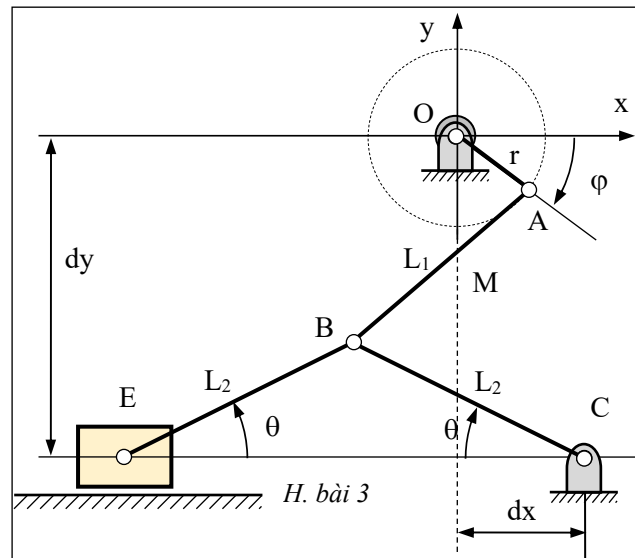
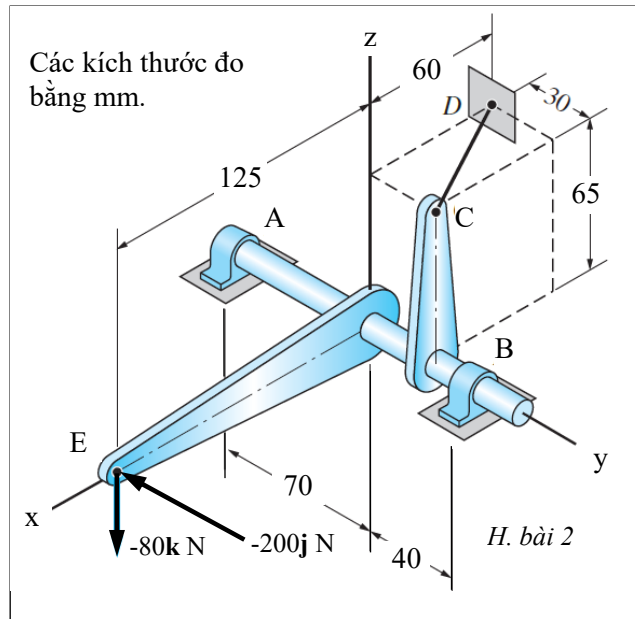
Bài 2.

Trục AB được giữ nằm ngang nhờ ổ đỡ chặn tại A, ổ đỡ tại B, và thanh nhẹ CD. Các lực tác dụng lên hệ gồm lực đứng 80N và lực ngang 200 N tác dụng tại E. Biết rằng các trục x, y trong mặt phẳng ngang còn trục z thẳng đứng, với ba véc tơ đơn vị tương ứng là $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Bỏ qua trọng lượng các vật. a) Vẽ đồ thị ứng lực của thanh CD khi tọa độ z_D thay đổi từ 65 đến 100 mm, trong khi các tọa độ x_D và y_D không thay đổi. Các điểm C và E không thay đổi. b) Đưa ra giá trị của ứng lực thanh CD, các phản lực liên kết tại A và B khi: $z_D = 65$ và $z_D = 100$ mm;

Bài 3.

Cơ cấu chuyển động trong mặt phẳng đứng Oxy như hình vẽ. Tay quay OA quay đều quanh trục ngang O với vận tốc góc $\omega = 3 \text{ rad/s}$, $\varphi = \omega t$. Cho biết các kích thước $OA = r = 0.10$, $AB = L_1 = 0.30$, $BC = BE = L_2 = 0.40$, $dx = 0.15$, $dy = 0.50$ m. Hãy đưa ra các kết quả sau:

- 1) Trị số của góc θ và tọa độ x_E khi: $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$, và $\varphi = 3\pi/2$.
- 2) Đồ thị trong khoảng thời gian $t \in [0, 4\pi/\omega]$ s của:
 - a) góc $\theta(t)$ và vận tốc góc của thanh BC (cùng trên một đồ thị),
 - b) di chuyển $x_E(t)$ và vận tốc của con trượt E (cùng trên một đồ thị).
- 3) Quỹ đạo trung điểm M của AB trong mặt phẳng Oxy.

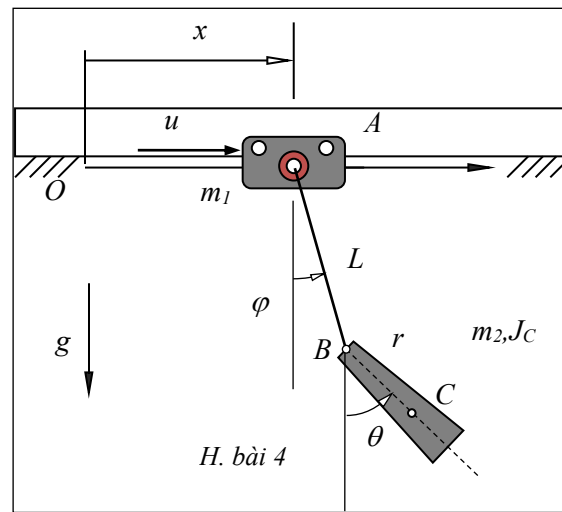


Bài 4. Xét mô hình cầu trục như trên hình vẽ: Xe goòng có khối lượng m_1 chuyển động trên dầm ngang. Tải trọng được coi là vật rắn có khối lượng m_2 , khối tâm C, $BC = r$, mô men quán tính đối với khối tâm là J_C . Dây treo khối lượng không đáng kể, chiều dài L , luôn căng và không giãn. Chọn các tọa độ suy rộng cho hệ là

x, φ, θ . Hệ chuyển động trong mặt phẳng đứng. Biết rằng biểu thức động năng của hệ được viết dạng:

$$T = \frac{1}{2} \left(m_{11} \dot{x}^2 + m_{22} \dot{\varphi}^2 + m_{33} \dot{\theta}^2 + 2m_{12} \dot{x} \dot{\varphi} + 2m_{13} \dot{x} \dot{\theta} + 2m_{23} \dot{\varphi} \dot{\theta} \right)$$

- 1) Hãy viết ra biểu thức chữ các số hạng: $m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{12}, m_{13}, m_{23}$.
- 2) Đưa ra các giá trị của x, φ, θ tại thời điểm $t = 1$ s.
- 3) Đồ thị các đại lượng $x(t), \varphi(t)$ theo biến thời gian, $t = [0, t_f]$, trên cùng một đồ thị.
- 4) Quỹ đạo chuyển động của khối tâm C của tải trọng.



Thực hiện câu 2), 3) và 4) với các số liệu sau:

$$m_1 = 1.0 \text{ kg}; \quad m_2 = 3 \text{ kg}; \quad r = 0.5 \text{ m};$$

$$J_C = 0.2 \text{ kgm}^2; \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2; \quad L = 1 \text{ m};$$

$$u = -30(x - 2) - 40\dot{x}; \quad t_f = 10 \text{ s},$$

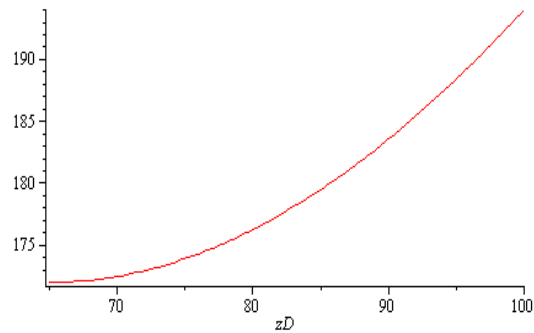
với các điều kiện đầu:

$$x(0) = 0; \dot{x}(0) = 0; \varphi(0) = 0; \dot{\varphi}(0) = 0; \theta(0) = 0; \dot{\theta}(0) = 0;$$

Lời giải

Bài 1.	Kết quả
Véc tơ lực \mathbf{F}_R	$[-400.00, 150.00, 250.00]$
Véc tơ mômen \mathbf{M}	$[-1240.8163, 465.30612, 775.5102]$
Tọa độ điểm P	$y = 2.06122449, z = 1.16326530$

Bài 2. a) Đồ thị lực thanh CD



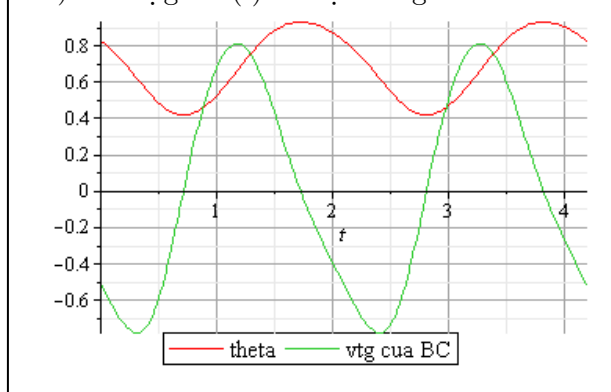
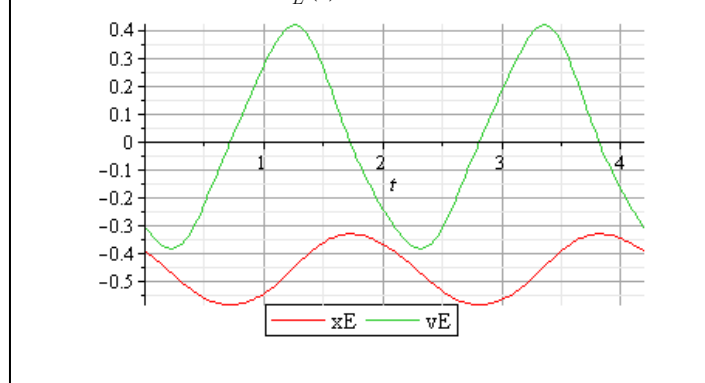
Bài 2. b)

	Khi $z_D = 65$
Lực liên kết tại A	$[241.258741, 276.923076, 74.5454545]$
Lực liên kết tại B	$[-87.41258741, 5.4545455]$
Lực thanh CD	172.0052290

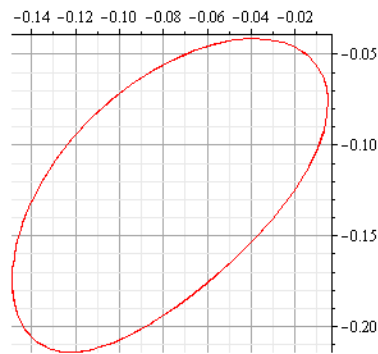
	Khi $z_D = 100$
Lực liên kết tại A	$[241.258741, 276.9230769, 66.38694639]$
Lực liên kết tại B	$[-87.41258741, -76.1305361]$
Lực thanh CD	194.0095635

Bài 3.1) Trị số của góc θ và tọa độ x_E tại các vị trí của OA

TT	Khi $\varphi =$	θ [rad]	x_E [m]
1	0	0.8313838745	-0.3890831278
2	$\pi/2$	0.4725503360	-0.5623283022
3	π	0.5624742389	-0.5267505899
4	$3\pi/2$	0.9094435295	-0.3413479920

2a) Đồ thị góc $\theta(t)$ và vận tốc góc thanh BC2b) Đồ thị di chuyển $x_E(t)$ và vận tốc của con trượt E

3) Quỹ đạo trung điểm M của AB



Bài 4.

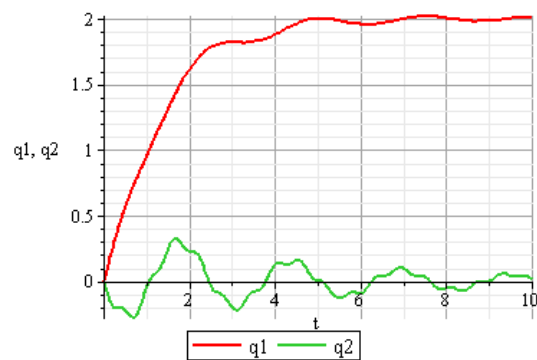
1) Các đại lượng trong biểu thức động năng

$m_{11} = m_1 + m_2$	$m_{22} = m_2 L^2$
$m_{12} = m_2 L \cos(q_2)$	$m_{23} = m_2 L r \cos(q_2 - q_3)$
$m_{13} = m_2 r \cos(q_3)$	$m_{33} = m_2 r^2 + J_2$

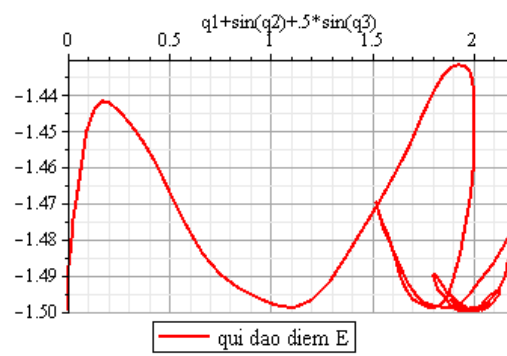
2) Giá trị các tọa độ suy rộng khi $t = 1$ s.

$x(1) =$	0.95197308699235
$\varphi(1) =$	-0.04465310552934
$\theta(1) =$	-0.15024351057738

3a) Đồ thị $x(t)$ và Đồ thị $\varphi(t)$

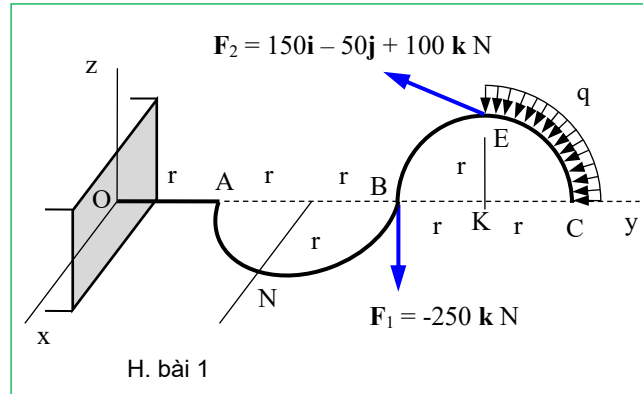


4) Quỹ đạo khối tâm C của tải trọng



Đề thi năm 2017

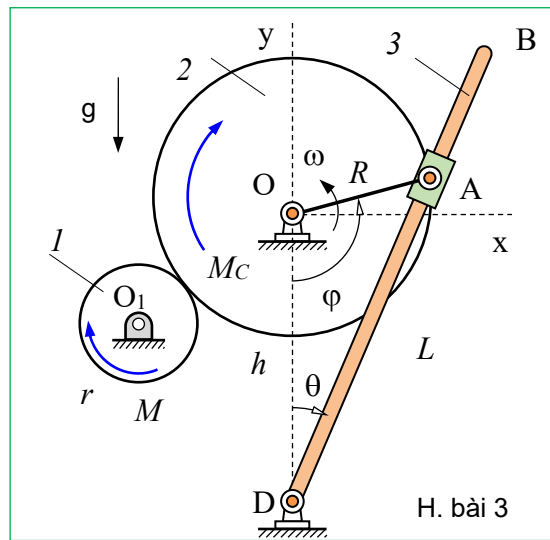
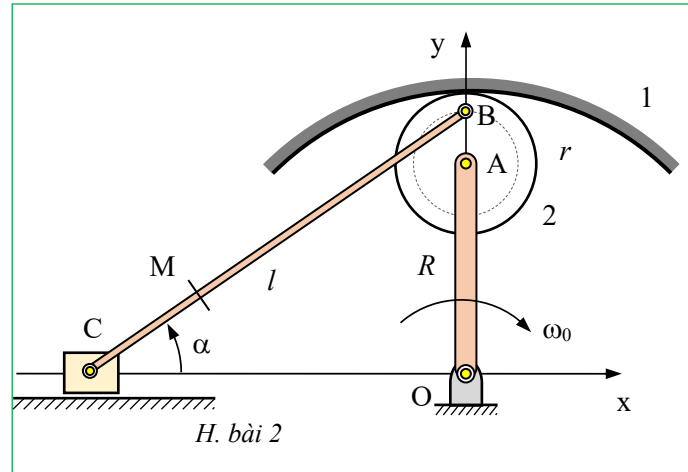
Bài 1. Một khung được tạo thành bởi thanh thẳng OA, nửa vòm tròn ANB trong mặt ngang, và nửa vòm tròn BEC trong mặt đứng. Khung được ngàm chặt tại O và chịu lực như trên hình. Lực phân bố trong mặt phẳng đứng. Lực \mathbf{F}_1 di chuyển chậm với vận tốc hằng v trên vòm từ B về A. Cho các kích thước $OA=AB/2=BC/2=r$. Trong hình vẽ ba véc tơ đơn vị của ba trục tọa độ Oxyz tương ứng là $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Biết các số liệu $q = 100 \text{ N/m}$, $r = 0.5 \text{ m}$, $v = 0.1 \text{ m/s}$. Hãy:



(a) tính giá trị 6 thành phần lực và ngẫu lực liên kết tại O khi lực \mathbf{F}_1 tại B và N (giữa vòm AB). (b) vẽ đồ thị thành phần mô men M_x và M_y tại ngàm O theo thời gian, $t = [0, \pi r / v]$.

Bài 2. Cho cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng Oxy. Tay quay OA dài $R = 5r$ quay đều với vận tốc góc ω_0 quanh trục O làm đĩa tròn 2 bán kính r lăn không trượt trong vành tròn cố định 1. Thanh BC dài $l = 7r$ nối với đĩa 2 bằng bản lề B, $a = AB = 3r/4$, và nối bản lề với con trượt C chạy trên trục Ox. Cho biết $r = 0.2 \text{ m}$, $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$: các điểm O, A và B nằm thẳng hàng trên trục Oy (Hình vẽ). Gọi $\varphi = \omega_0 t$ là góc quay của OA so với Oy.

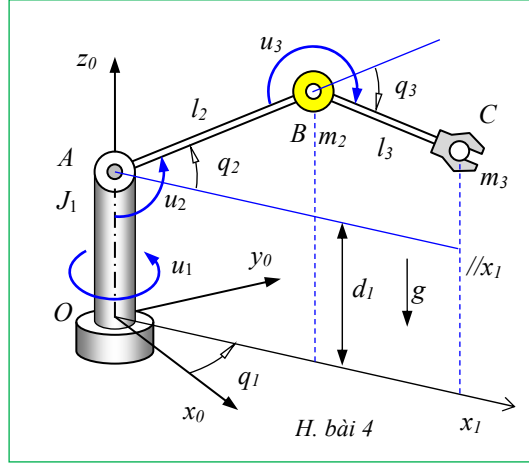
- 1) Vẽ quỹ đạo điểm B và điểm M thuộc BC, $BM/BC = 3/4$, khi $t = [0 \rightarrow 2\pi / \omega_0]$ s.
- 2) Tại thời điểm mà $\varphi = [0, \pi/2, \pi, 3\pi/2]$, hãy tính: (a) vị trí, vận tốc và gia tốc của điểm C; (b) góc α , vận tốc góc và gia tốc góc của thanh BC.



Bài 3. Cho cơ cấu máy chuyển động trong mặt phẳng đứng như hình vẽ. Bánh răng 1 bán kính r , mô men quán tính khối đối với trục quay J_1 , chịu tác dụng của mô men hằng M . Bánh răng 2 bán kính $R = 4r$, mô men quán tính khối đối với trục quay J_2 . Tại ổ trục O có mô men cản tỉ lệ vận tốc góc bánh răng 2, $M_c = c\omega$. Thanh lắc DB đồng chất khối lượng m và chiều dài $L = 13r$. Khoảng cách giữa hai trục quay O và D là $h = 8r$. Bỏ qua ma sát và khối lượng con trượt. Ban đầu hệ đứng yên và A ở vị trí cao nhất. Chọn φ - góc của OA đối với OD - là tọa độ suy rộng. Cho các số liệu sau: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$; $t_f = 10 \text{ s}$; $r = 0.2 \text{ m}$;
 $m = 0.5 \text{ kg}$; $J_1 = 0.1 \text{ kgm}^2$; $J_2 = 0.5 \text{ kgm}^2$; $M = 5 \text{ Nm}$; $c = 4 \text{ Nms}$

(1) Động năng của cơ cấu được viết dạng: $T = J_{tg}(\varphi)\dot{\varphi}^2 / 2$, hãy vẽ đồ thị J_{tg} khi $\varphi = [0 \rightarrow 3\pi]$. Hãy đưa ra giá trị J_{tg} tại các vị trí $\varphi = [0, \pi/2, \pi, 3\pi/2]$. (2) Vẽ đồ thị $\dot{\varphi}(t)$. (3) Đưa ra các giá trị $\varphi(t), \dot{\varphi}(t)$ tại các thời điểm $t = 1$ và 2 s.

Bài 4. Mô hình cơ học của một robot không gian 3 bậc tự do với 3 khớp quay được cho như trên hình. Khâu 1 (trụ OA) có mô men quán tính khối J_1 đối với trục quay đứng z_0 . Các trục của hai khớp quay A và B vuông góc mặt đứng OABCx₁. Khâu 2 (AB) có chiều dài l_2 và khối lượng m_2 coi như tập trung tại B. Khâu 3 (BC) có chiều dài l_3 và khối lượng m_3 coi như tập trung tại C. Mô men điều khiển tại các khớp tương ứng là u_1, u_2, u_3 (u_1 – ngoại lực, u_2 & u_3 – nội lực). Chọn các tọa độ suy rộng cho hệ là q_1, q_2, q_3 . Biết rằng biểu thức động năng của hệ được viết dạng:



u_1, u_2, u_3 (u_1 – ngoại lực, u_2 & u_3 – nội lực). Chọn các tọa độ suy rộng cho hệ là q_1, q_2, q_3 . Biết rằng biểu thức động năng của hệ được viết dạng:

$$T = \frac{1}{2} \left(m_{11}\dot{q}_1^2 + m_{22}\dot{q}_2^2 + m_{33}\dot{q}_3^2 + 2m_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2m_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2m_{23}\dot{q}_2\dot{q}_3 \right)$$

1) Hãy viết ra biểu thức chữ các số hạng: m_{22}, m_{23}, m_{33} .

Thực hiện câu 2), 3) và 4) với các số liệu sau:

$$J_1 = 10.0 \text{ kgm}^2; \quad d_1 = 1 \text{ m}; \quad m_2 = 30 \text{ kg}; \quad l_2 = 1.5 \text{ m};$$

$$m_3 = 20 \text{ kg}; \quad l_3 = 1.0 \text{ m}; \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2; \quad t_f = 5 \text{ s}$$

$$u_1 = -2000(q_1 - 2) - 400\dot{q}_1; \quad u_2 = -6000(q_2 - 2) - 600\dot{q}_2;$$

$$u_3 = -8000(q_3 - 2) - 400\dot{q}_3;$$

với các điều kiện đầu:

$$q_1(0) = 0; \quad \dot{q}_1(0) = 0; \quad q_2(0) = \pi/2; \quad \dot{q}_2(0) = 0;$$

$$q_3(0) = \pi/2; \quad \dot{q}_3(0) = 0;$$

2) Đưa ra các giá trị của q_1, q_2, q_3 tại thời điểm $t = 1$ s.

3) Đồ thị $q_2(t)$ theo thời gian, $t = [0, t_f]$.

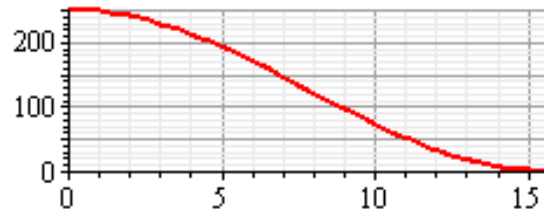
4) Quỹ đạo của điểm cuối C trong mặt phẳng Oxy.

Lời giải

Bài 1.

a)	F_1 tại B	F_1 tại N
Lực liên kết F_O	$[-150.0, 100.0, 200.0]$ N	$[-150.0, 100.0, 200.0]$ N
Ngẫu lực M_O	$[250.0, -75.0, 300.0]$ Nm	$[125.0, -200.0, 300.0]$ Nm

b) Đồ thị mô men M_x

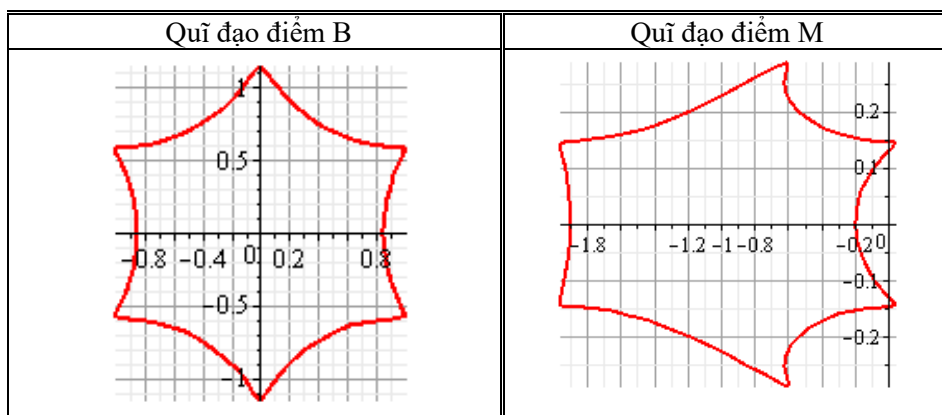


Đồ thị mô men M_y



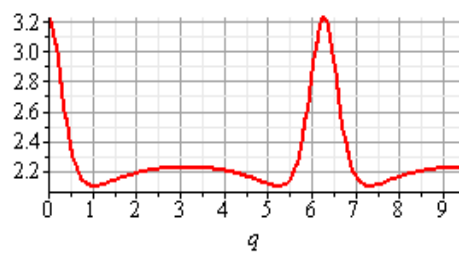
Bài 2.

	x_C (m)	\dot{x}_C	\ddot{x}_C	α (rad)	$\dot{\alpha}$	$\ddot{\alpha}$
$\varphi = 0$	-0.79843	0.50000	-27.3660	+0.9639	0.0	-23.7965
$\varphi = \pi / 2$	-0.55000	0.0	19.7500	0.0	-2.500	0.0
$\varphi = \pi$	-0.79843	-0.50000	-27.3660	-0.9639	0.0	+23.7965
$\varphi = 3\pi / 2$	-2.25000	0.0	-2.25000	0.0	+2.500	0.0

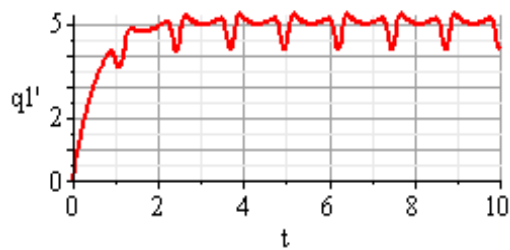


Bài 3

Đồ thị mô men quán tính $J_{tg}(\varphi)$



Đồ thị vận tốc góc bánh răng 2, $\dot{\varphi}(t)$



Trị số của $J_{tg}(\varphi)$:

φ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$J_{tg}(\varphi)$	3.226666667	2.145066667	2.225185185	2.145066667

Trị số của $\varphi(t)$ & $\dot{\varphi}(t)$

$t [s]$	φ		$t [s]$	$\dot{\varphi}$
1	5.872909758		1	3.8991302657
2	10.437616636		2	4.9128331668

Bài 4.

1) Các đại lượng trong biểu thức động năng

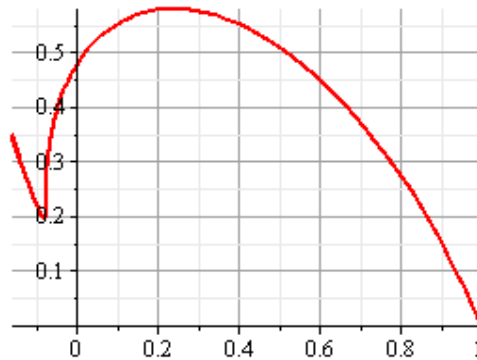
$m_{22} = m_2 l_2^2 + m_3 (l_2^2 + 2l_2 l_3 \cos q_3 + l_3^2)$
$m_{23} = -m_3 (l_2 l_3 \cos q_3 + l_3^2)$
$m_{33} = m_3 l_3^2$

2) Giá trị tọa độ suy rộng khi $t = 1$ s.

$q_1(1) =$	2.00240503134
$q_2(1) =$	1.99549996326
$q_3(1) =$	2.02608648395

3) Đồ thị $q_2(t)$ theo thời gian, $t = [0, t_f]$.

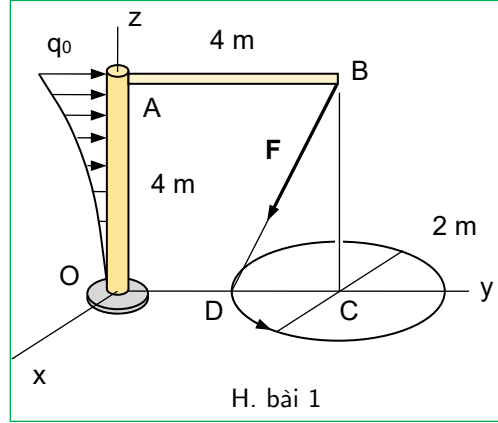
4) Quỹ đạo của điểm cuối C trong mặt phẳng Oxy.



Đề thi năm 2018

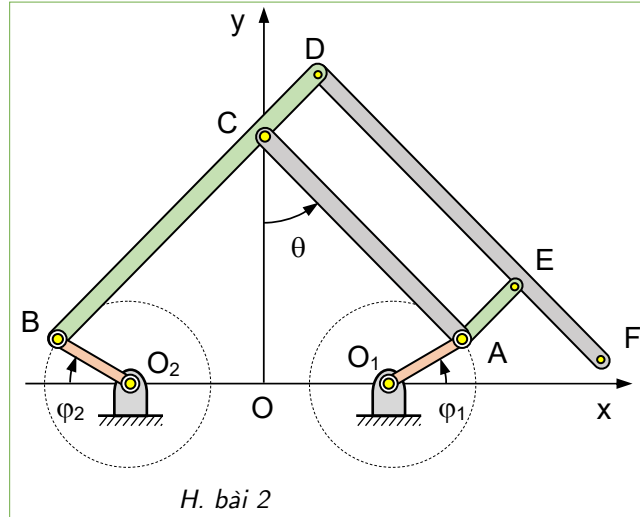
Bài 1. Cột OA thẳng đứng được ngàm chặt tại gốc O, trên OA có gắn cứng xà ngang AB //Oy. Lực phân bố ngang //y dạng parabol tác dụng lên cột OA, $q = q_0(z/4)^2$ N/m. Lực căng dây BD có độ lớn F là hằng số. Đầu dây D chạy trên đường tròn nằm trong mặt Oxy tâm C bán kính r. Biết các số liệu $q_0 = 100$ N/m, $F = 1000$ N, $r = 2$ m, $OA=AB=4$ m. Hãy:

- (a) tính giá trị 6 thành phần lực và ngẫu lực liên kết tại O khi điểm D ở gần và xa O nhất.
(b) vẽ đồ thị thành phần mô men M_x và M_y tại ngàm O theo góc quét của CD so với CO, $0 \leq \varphi = \angle OCD \leq 2\pi$.



Bài 2. Cơ cấu chuyển động trong mặt phẳng đứng Oxy như hình vẽ. Hai tay quay O_1A và O_2B quay đều ngược chiều nhau, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = \omega t$. Cho biết $OO_1 = OO_2 = 2r$, $O_1A = O_2B = r$, $CD = AE = r$, $AC = BC = DE = 6r$, $EF = 2r$. Với số liệu $r = 0.1$ m, $\omega = 1$ rad/s.

- 1) Khi $\varphi = [0, \pi/2, \pi, 3\pi/2]$, hãy đưa ra (a) Trị số vị trí, vận tốc và gia tốc của điểm C; (b) Trị số vị trí góc, vận tốc góc và gia tốc góc của thanh DF. 2) Vẽ đồ thị $y_D(\varphi_1)$ và quỹ đạo điểm F khi $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$.



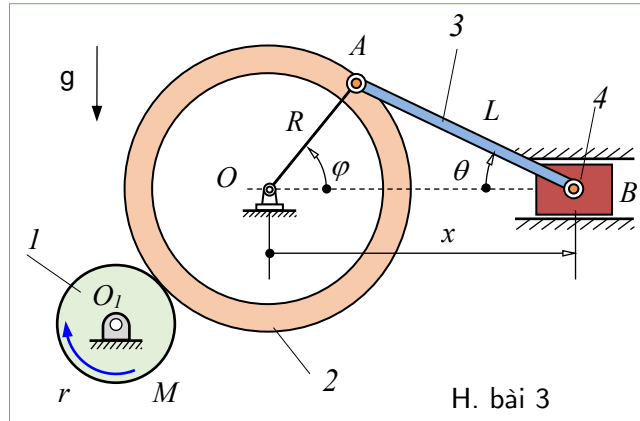
Bài 3. Cho cơ cấu máy chuyển động trong mặt phẳng đứng như hình vẽ. Bánh răng 1 bán kính r , mô men quán tính khối đối với trục quay J_1 , chịu tác dụng của mô men $M = M_0 - c\omega_1$. Bánh răng 2 bán kính R , mô men quán tính khối đối với trục quay J_2 . Thanh truyền AB đồng chất khối lượng m_3 và chiều dài L . Con trượt B khối lượng m_4 . Bỏ qua ma sát. Ban đầu hệ đứng yên. Chọn φ - góc của OA đối với OB - là tọa độ suy rộng (góc quay của bánh răng 2).

Cho các số liệu sau: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $r = 0.2 \text{ m}$, $R = 2r$, $L = 4r$, $m_3 = 1 \text{ kg}$;

$m_4 = 2 \text{ kg}$; $J_1 = 0.1 \text{ kgm}^2$; $J_2 = 0.2 \text{ kgm}^2$; $J_{C3} = m_3 L^2 / 12$

$M_0 = 12 \text{ Nm}$, $c = 2 \text{ Nms}$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $t_f = 10 \text{ s}$;

(1) Động năng của cơ cấu được viết dạng: $T = J_{tg}(\varphi) \dot{\varphi}^2 / 2$, hãy vẽ đồ thị J_{tg} khi $\varphi = [0 \rightarrow 2\pi]$. Hãy đưa ra giá trị J_{tg} tại các vị trí $\varphi = [0, \pi/2, \pi, 3\pi/2]$. (2) Vẽ đồ thị $\dot{\varphi}(t)$. (3) Đưa ra các giá trị $\varphi(t), \dot{\varphi}(t)$ tại các thời điểm $t = 1$ và 2 s .



Bài 4. Mô hình cơ học của cơ cấu máy điều tiết ly tâm được cho như trên hình. Khung treo O_1O_2 có mô men quán tính đối với trục quay đứng z là J_1 chịu tác dụng của ngẫu lực có mô men M . Các quả văng A và B coi như chất điểm, mỗi quả khối lượng m_1 , bốn thanh treo cùng chiều dài L , khối lượng không đáng kể. Các điểm treo O_1 và O_2 nằm cách trục quay một đoạn bằng e . Đối trọng C có khối lượng m_2 , mômen quán tính khối đối với trục quay z là J_2 . Lò xo treo đối trọng có độ cứng k và khi $\varphi = 0$ thì lò xo không biến dạng. Biết rằng trục các khớp bản lề tại hai đầu của bốn thanh treo vuông góc mặt phẳng khung, bỏ qua ma sát. Chọn tọa độ suy rộng: $q_1 = \theta$ là góc quay của khung treo, $q_2 = \varphi$ là góc lệch của các thanh treo quả văng. Biết rằng biểu thức động năng của hệ được viết dạng:

$$T = \frac{1}{2} (m_{11} \dot{q}_1^2 + 2m_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{22} \dot{q}_2^2)$$

1) Hãy viết ra biểu thức chữ các số hạng: m_{11}, m_{12}, m_{22} .

Thực hiện câu 2), 3) và 4) với các số liệu sau:

$$J_1 = J_2 = 0.10 \text{ kgm}^2; e = 0.1 \text{ m}; L = 0.40 \text{ m};$$

$$k = 200 \text{ N/m};$$

$$m_1 = 1.0 \text{ kg}; m_2 = 3.0 \text{ kg}; g = 9.81 \text{ m/s}^2;$$

$$M = 100 - 5\dot{q}_1; \quad t_f = 10 \text{ s},$$

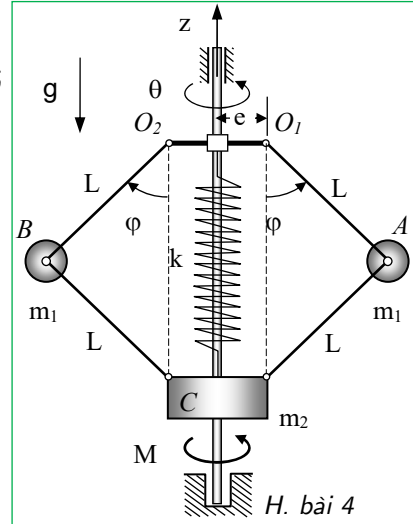
với các điều kiện đầu:

$$q_1(0) = 0; \quad \dot{q}_1(0) = 0; \quad q_2(0) = 0; \quad \dot{q}_2(0) = 0$$

2) Đưa ra các giá trị của q_1, q_2 tại thời điểm $t = 1 \text{ s}$.

3) Đồ thị $\dot{q}_1(t)$ và $q_2(t)$ theo thời gian, $t = [0, t_f]$.

4) Xác định chế độ chuyển động bình ổn của máy, $0 < \varphi < \pi/2$.

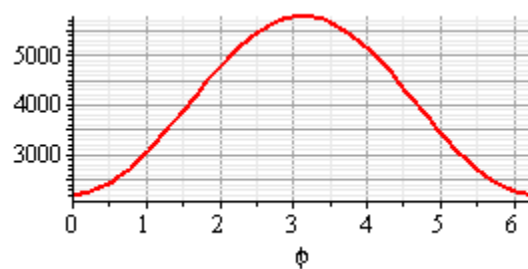


Lời giải

Bài 1.

Bài 1a)	D gần O nhất, OD = 2m	D xa O nhất, OD = 6m
Lực liên kết $\mathbf{F}_O(x,y,z)$	[-0, 313.88026, 894.42719], 947.90338	[0, -580.546929, 894.42719], 1066.318309
Ngẫu lực $\mathbf{M}_O(x,y,z)$	[2188.854383, -0, 0], 2188.85438	[5766.563148, 0, 0], 5766.563148

b) Đồ thị mô men Mx

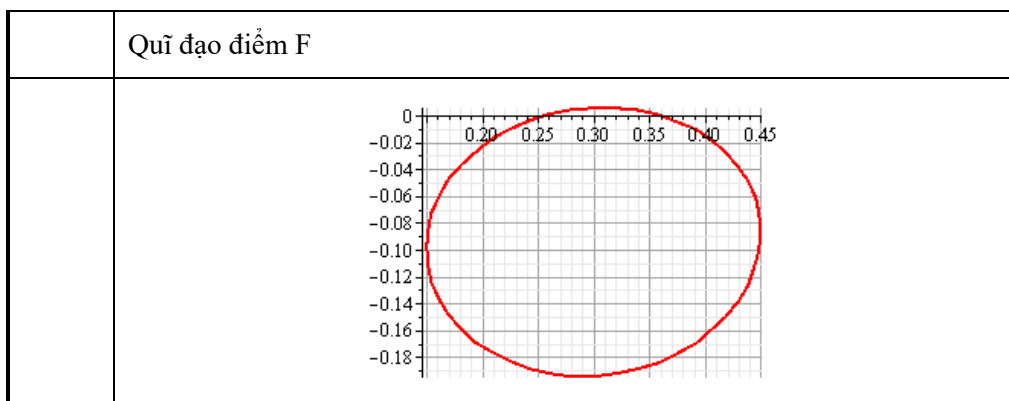


Đồ thị mô men My



Bài 2.

1)	y_C (m)	\dot{y}_C (m/s)	\ddot{y}_C (m/s ²)	θ (rad)	ω (rad/s)	ε (rad/s ²)
$\varphi = 0$	0.519615 24	0.1	0.05773502 69	0.5235987 75	0	- 0.1924500 89
$\varphi = \frac{1}{2}\pi$	0.665685 42	0.0353553 39	- 0.11988737 8	0.3398369 09	- 0.17677669 5	0.0110485 43
$\varphi = \pi$	0.591607 97	-0.1	- 0.01690308 50	0.1674480 79	0	0.1690308 51
$\varphi = \frac{3}{2}\pi$	0.465685 42	- 0.0353553 39	0.08011262 17	0.3398369 09	0.17677669 54	0.0110485 43
2)	Đồ thị y_D theo φ_1					



Bài 3

Đồ thị mô men quán tính $J_{tg}(\varphi)$



Đồ thị vận tốc góc bánh răng 2, $\dot{\varphi}(t)$



Trị số của $J_{tg}(\varphi)$:

φ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$J_{tg}(\varphi)$	0.6533333333	1.080000000	0.6533333333	1.080000000

Trị số của $\varphi(t)$ & $\dot{\varphi}(t)$

$t [s]$	φ		$t [s]$	$\dot{\varphi}$
1	2.623048507661		1	3.3281696692262
2	5.676970695311		2	3.0622610355035

Bài 4.

1) Các đại lượng trong biểu thức động năng

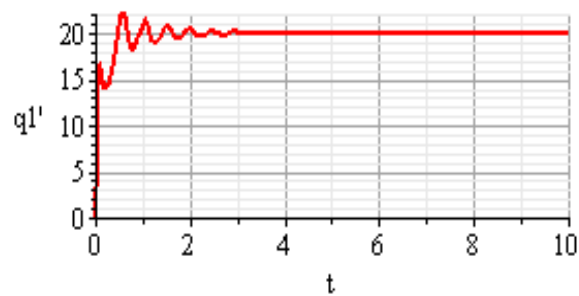
$$m_{11} = J_1 + J_2 + 2m_1(e + L \sin \varphi)^2$$

$$m_{12} = 0$$

$$m_{22} = 2m_1 L^2 + 4m_2 L^2 \sin^2 \varphi$$

2) Giá trị tọa độ suy rộng khi $t = 1$ s.

$$q_1 = 17.6195814428714 \quad q_2 = 0.95950224342812$$

3) Đồ thị $\dot{q}_1(t), q_2(t)$ theo thời gian, $t = [0, t_f]$.

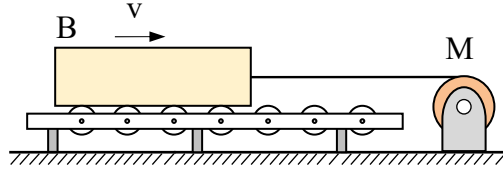
4) Chế độ chuyển động bình ổn của máy

$$\omega[1] = 20, q[2] = 0.9979747$$

Phần 3.
CÁC BÀI TẬP CHỌN LỌC

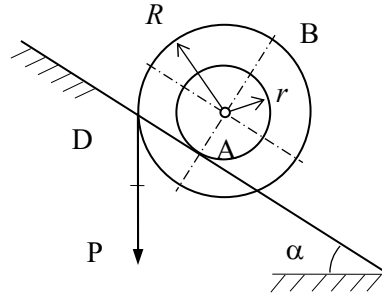
A. Đề bài

Bài 1. Vật B khối lượng 300 kg được kéo chuyển động với vận tốc $v = 0.4t^2$ m/s, ở đây t tính bằng giây, $0 \leq t \leq 6$ s. Xác định lực căng cáp khi $t = 5$ s và khoảng cách di chuyển được trong thời gian 5 s. Bỏ qua khối lượng cáp, puli, và các con lăn.



Hình bài 1

Bài 2. Con lăn A bán kính r có thể lăn theo mặt phẳng nghiêng lên trên dưới tác dụng của lực \vec{P} thẳng đứng đặt vào đầu D của sợi dây không trọng lượng không giãn cuốn trên tang trống B bán kính $R = 2r$. Tang trống gắn chặt vào con lăn, khối lượng của chúng là $m = 2P/g$; bán kính quán tính của chúng đối với trục đối xứng đi qua C là $\rho = \sqrt{R.r}$. Hệ số ma sát trượt tĩnh là $f = 2/3$; hệ số ma sát lăn là k . Xác định góc nghiêng α để con lăn lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng.

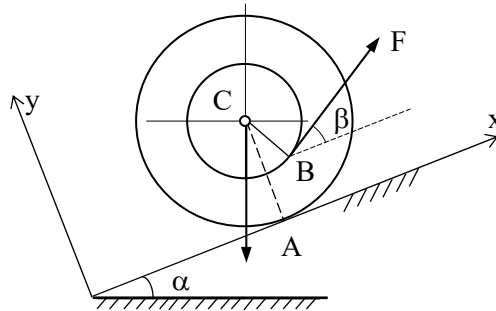


Hình bài 2

Bài 3. Một ô-tô chở thùng nước không nắp hình trụ tròn bán kính R đang chuyển động thẳng trên mặt phẳng ngang với vận tốc $v = v_0$; mặt thoáng của nước cách mặt trên của thùng là h .

1. Tính đoạn đường tối thiểu mà xe dừng hẳn lại sau khi phanh với lực không đổi để cho nước không bị tràn ra ngoài.
2. Nếu phanh gấp tức là đoạn đường hãm đã biết $s_0 < s_{min}$; tính lượng nước bị tràn ra ngoài.

Bài 4. Con lăn hai tầng bán kính vành ngoài là R , vành trong r , khối lượng M , bán kính quán tính đối với trục nằm ngang qua khối tâm C của nó là ρ . Người ta cuốn dây rất nhỏ vào tầng trong, trọng lượng dây không đáng kể, rồi kéo bằng lực $F = \text{const}$ hợp với phương Ox một góc β , để con lăn lăn không trượt

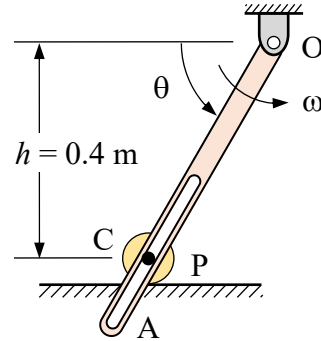


Hình bài 4

trên mặt phẳng nghiêng một góc α so với mặt phẳng nằm ngang, từ trạng thái tĩnh.

1. Tính gia tốc, vận tốc khối tâm C theo thời gian t .
2. Khảo sát chuyển động khối tâm C theo thông số β còn các đại lượng khác được coi là hằng số.
3. Tính phản lực tại A (xem hình vẽ).

Bài 5. Trụ nhỏ C khối lượng 2-kg có chốt P đi qua tâm chuyển động trong rãnh của tay quay OA. Biết rằng tay quay OA chuyển động trong mặt đứng với vận tốc góc $\dot{\theta} = 0.5 \text{ rad/s}$, hãy xác định lực tác dụng lên trụ C (coi như chất điểm) tại thời điểm $\theta = 60^\circ$.



Hình bài 5

Bài 6. Một sợi dây cuộn vào vành trong bán kính $r = 10 \text{ cm}$ của một bánh xe bán kính $R = 16 \text{ cm}$. Người ta kéo dây một lực $F = 20 \text{ N}$. Bánh xe nặng 60 N , bán kính quán tính của nó với trục đối xứng đi qua khối tâm G là $\rho = 12 \text{ cm}$. Hệ số ma sát tĩnh và động giữa bánh xe và mặt đường là $f_t = 0,2; f_d = 0,15$.

1. Bánh xe có thể lăn không trượt được không ?
2. Tính gia tốc điểm G và gia tốc góc của bánh xe, bỏ qua ma sát lăn, lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Bài 7. Có một chiếc ô-tô được mô tả như hình vẽ. Trọng lượng của ô-tô và bốn bánh xe là Q . Mỗi bánh xe được xem là đồng chất trọng lượng P , bán kính R , bán kính quán tính đối với trục quay là ρ , chuyển động lăn không trượt theo đường ngang. Từ trạng thái tĩnh, tác dụng vào hai bánh dẫn một mômen phát động $M_d = \text{const}$, làm xe chuyển động. Tại các ổ trục quay chịu tác dụng của mômen cản $M_c = \text{const}$, xe còn chịu lực cản ngoài có trị số $F = \eta v^2$, v là vận tốc của xe, $\eta = \text{const}$.

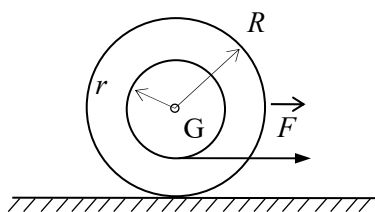
Bỏ qua ma sát lăn.

1. Xác định vận tốc giới hạn của xe $v = v_{\max} = \text{const}$.
2. Khảo sát lực ma sát trượt tác dụng lên mỗi bánh xe kể từ khi mở máy đến khi chuyển động bình ổn, rồi tắt máy đến khi xe dừng lại.
3. Khi đạt được vận tốc v_{\max} , rồi tắt máy, tính quãng đường xe đi được kể từ khi tắt máy đến khi xe dừng lại với giả thiết $\eta v^2 \approx 0$.

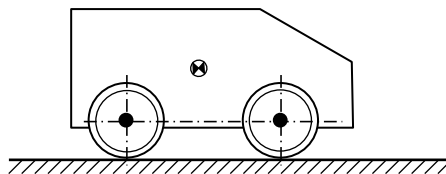
4. Hãy tính các đại lượng đó với các số liệu sau :

$$M_d = 400 \text{ kNm}; M_c = 25 \text{ kNm}; Q = 3000 \text{ kN}; P = 50 \text{ kN};$$

$$R = 0,25 \text{ m}; \rho = 0,1 \text{ m}; \eta = 0,2 \text{ kg/m}; g = 10 \text{ m/s}^2.$$



Hình bài 6



Hình bài 7

Bài 8. Thanh AB đồng chất tiết diện không đổi, chiều dài l , khối lượng m chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Đầu A của thanh được gắn bản lề trụ không ma sát với trục (xem hình). Tại thời điểm ban đầu, đầu B của thanh ở vị trí thấp nhất.

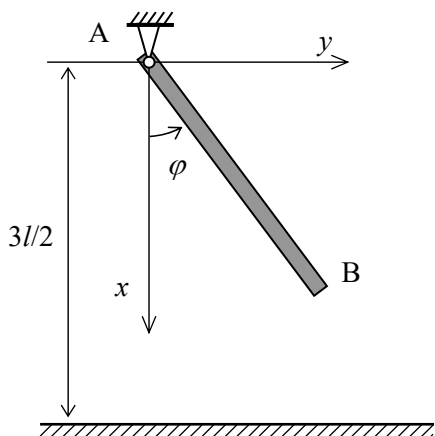
1. Cho vận tốc góc ban đầu của thanh là ω_0 . Xác định các thành phần phản lực tại A theo hai phương vuông góc x và y ở vị trí φ bất kỳ như hình vẽ. Tính các thành phần phản lực này khi $\varphi = 90^\circ$.

2. Hãy xác định vận tốc ban đầu cần thiết để:

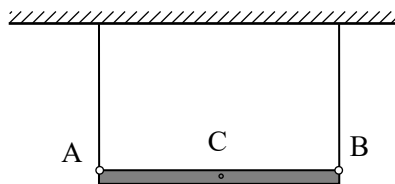
a. Khi đầu B lên đến vị trí cao nhất, thanh AB tách khỏi liên kết (do tháo chốt ở A ra) rơi chạm mặt phẳng ngang ở dưới với tư thế thẳng đứng. Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng là $3l/2$.

b. Khi đầu B lên đến vị trí cao nhất, thanh AB tách khỏi liên kết, khi trọng tâm thanh nằm trên đường thẳng nằm ngang qua A thì cách A một đoạn l .

Bài 9. Thanh thẳng AB đồng chất có khối lượng là m được treo nằm ngang nhờ hai dây theo phương thẳng đứng buộc vào hai đầu thanh, còn hai đầu khác của dây buộc vào trần nhà. Tìm lực căng ở một nhánh dây khi nhánh dây kia bị đứt tức thời.



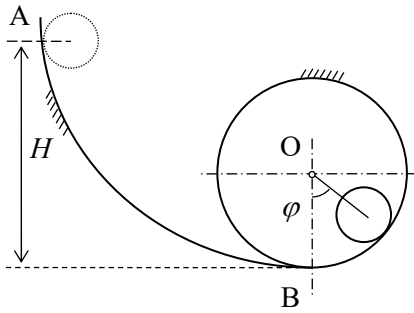
Hình bài 8



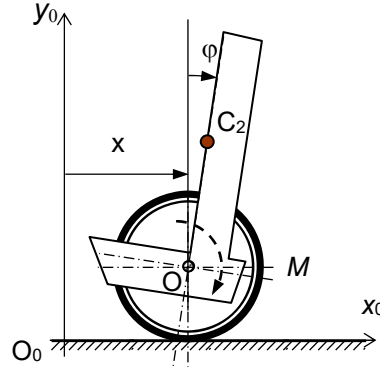
Hình bài 9

Bài 10. Cho con lăn bán kính r , khối lượng m lăn không trượt trong máng cong cố định AB sau đó lăn không trượt tiếp theo máng tròn cố định bán kính R . Cho hệ số ma sát trượt giữa con lăn và máng là $f = 1/7$. Bỏ qua sự cản lăn.

1. Phải thả con lăn không vận tốc đầu ở độ cao H bằng bao nhiêu để nó có thể đi hết vòng tròn mà không bị tách ra khỏi máng?
2. Khi con lăn ở vị trí thấp nhất B và đang ở trạng thái nghỉ, hãy xác định vận tốc v_0 nhỏ nhất cần phải truyền cho trục con lăn theo phương ngang để con lăn có thể lăn không trượt và đạt tới vị trí $\varphi = \pi/2$.



Hình bài 10



Hình bài 11

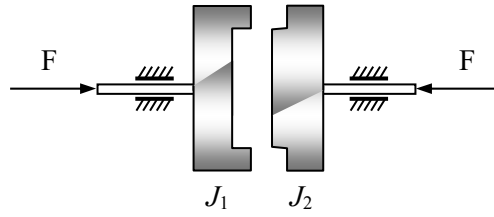
Bài 11. Khi khảo sát động lực học của xe Segway hai bánh chạy trên đường thẳng ngang. Mỗi bánh xe được coi là đĩa tròn đồng chất có khối lượng m_1 và bán kính r . Thân xe có khối lượng m_2 , khối tâm tại C_2 , $OC_2 = l$, mômen quán tính khối của thân đối với khối tâm C_2 của nó là J_2 . Thân xe được nối với bánh bằng bản lề trụ O. Mômen cản tại ổ trục O tỷ lệ vận tốc góc tương đối giữa thân và bánh xe, $M_c = b\omega_r$. Xe chuyển động được là nhờ động cơ điện tạo ra mômen M_{dc} tương tác tại ổ trục O. Biết rằng bánh xe lăn không trượt.

- 1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ theo hai tọa độ suy rộng (x, φ) .
- 2) Xác định mômen động cơ cần thiết khi xe chuyển động với vận tốc $v = \text{const}$, và thân xe có phương hướng lên, và hãy xác định góc lệch của thân xe, $\varphi_o = \text{const}$ nhỏ.
- 3) Nếu kể đến mômen cản lăn do mặt đường tác dụng lên bánh xe, $M_{cl} = k\omega_{bx}$. Phương trình vi phân chuyển động của hệ sẽ như thế nào.

Bài 12. Xét quá trình nối trục bằng ma sát trên mô hình đơn giản như hình vẽ. Cho biết vận tốc góc trước khi nối trục của đĩa 1 là ω_1 và của đĩa 2 là ω_2 , mômen quán tính của đĩa đối với trục quay tương ứng là J_1, J_2 . Lực nối trục tác dụng vào hai đĩa dọc theo trục như hình vẽ và có độ lớn là F . Mặt phẳng nối của đĩa 1 có hình vành

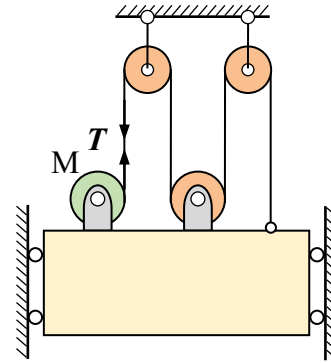
khuyên bán kính ngoài là R_n , bán kính trong là R_i . Hệ số ma sát giữa các mặt phẳng nối là μ .

1. Tìm vận tốc góc chung của hai đĩa sau khi nối.
2. Xác định sự hao hụt động năng khi nối trục.
3. Xác định thời gian cần thiết để nối trục.
4. Ảnh hưởng của lực nối trục F và hệ số ma sát trượt μ đến thời gian nối trục và lượng mất động năng.



Hình bài 12

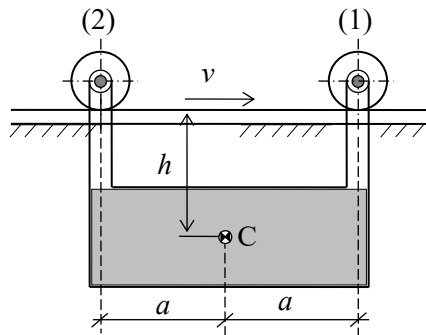
Bài 13. Cabin thang máy cùng tải nặng 500 kg được kéo lên nhờ mô tơ M. Nếu mô tơ tạo lực căng cáp bằng số $T = 1.50$ kN, hãy xác định vận tốc của cabin khi nó di chuyển lên được 3 m từ trạng thái đứng yên. Bỏ qua ma sát, khối lượng của cáp và các puli.



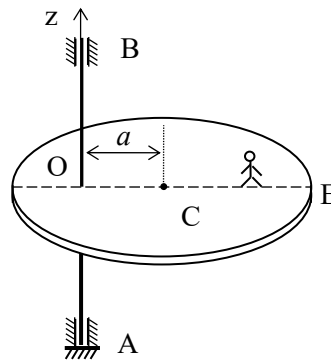
Hình bài 13

Bài 14. Có một chiếc xe goòng khối lượng M khối tâm là C và 2 bánh xe đồng chất có cùng khối lượng m , bán kính r , bán kính quán tính đối với trục quay của nó là ρ . Giả sử xe đang chạy đều với vận tốc v và các bánh xe lăn không trượt trên đường ray. Tại một thời điểm nào đó, một trong hai bánh xe bị kẹt. Giả sử các liên kết tựa giữa bánh xe và đường ray vẫn được duy trì và bánh xe bị kẹt sẽ trượt theo đường ray với hệ số ma sát trượt động là f .

1. Xác định thành phần phản lực tiếp tuyến của đường ray tác dụng lên hai bánh xe theo gia tốc a của xe goòng.
2. Giả sử rằng m/M rất nhỏ :
 - a. Chứng minh rằng khi đó thành phần phản lực tiếp tuyến lên bánh xe không bị kẹt xấp xỉ bằng 0 và thành phần tương ứng đối với bánh xe bị kẹt tỷ lệ với tích khối lượng M và gia tốc a của xe goòng.
 - b. Tính các thành phần phản lực pháp tuyến đặt lên 2 bánh xe và gia tốc a của goòng trong trường hợp bánh trước (1) bị kẹt.
 - c. Tương tự như câu b nhưng trong trường hợp bánh sau (2) bị kẹt. Chứng minh rằng trong trường hợp này nghiệm của bài toán chỉ có nghĩa nếu $f < f_c$. Trong đó f_c là giá trị tới hạn của f .



Hình bài 14

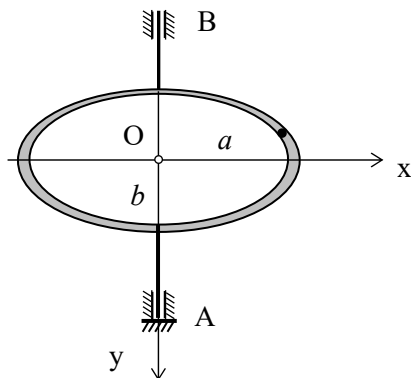


Hình bài 15

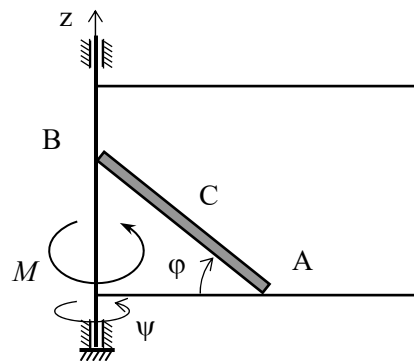
Bài 15. Tấm tròn đồng chất khối lượng M bán kính R nằm ngang quay quanh trục thẳng đứng lệch tâm với độ lệch là a . Trên mép tấm có một người đứng, vận tốc ban đầu của tấm là ω_0 , coi người là một chất điểm có khối lượng m . Bỏ qua ma sát ở ổ trục. Xác định công cần thiết mà người thực hiện để đi từ E đến trục quay.

Bài 16. Chất điểm khối lượng m chuyển động trong hình xuyên nhẵn ở trong mặt phẳng thẳng đứng có phương trình là $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$. Ống hình xuyên quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc $\omega_0 = \text{const}$.

1. Lập phương trình vi phân chuyển động của chất điểm, trong chuyển động tương đối của nó.
2. Tìm các vị trí cân bằng tương đối của chất điểm.
3. Khảo sát giá trị hàm Lagrange L tại các vị trí đó, rồi xét tính bền vững của các vị trí cân bằng ấy (xem hình vẽ).



Hình bài 16



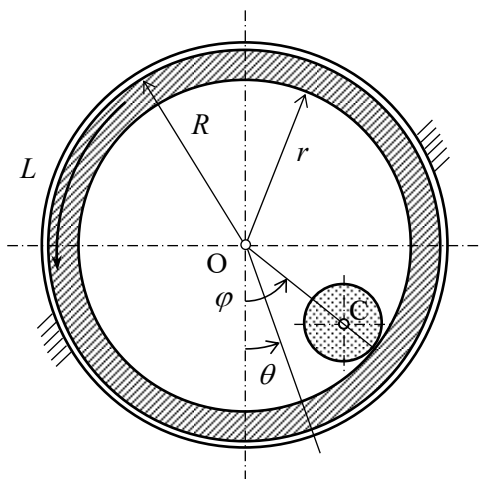
Hình bài 17

Bài 17. Hai đầu mút của thanh AB đồng chất khối lượng m , dài $2l$ có thể trượt không ma sát trong khung quay tròn quanh trục thẳng đứng z , dưới tác dụng của mômen M . Biết mômen quán tính của khung đối với trục z là J .

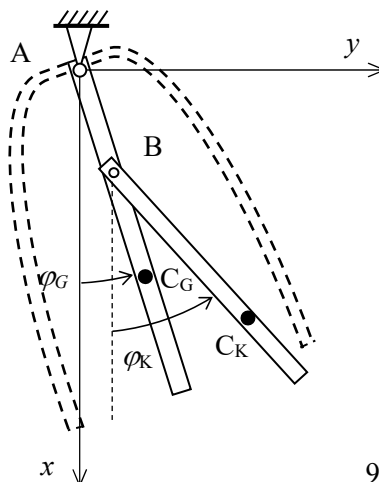
1. Lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo góc ψ và φ .
2. Giả sử khung quay đều với vận tốc góc $\dot{\psi} = \omega_0 = \text{const}$, tìm giá trị mômen M để duy trì chế độ chuyển động đó. Xác định vận tốc góc, gia tốc góc tương đối của thanh $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ theo góc φ .
3. Với chế độ chuyển động $\dot{\psi} = \omega_0 = \text{const}$, xác định áp lực pháp tuyến của thanh tác dụng lên khung tại A theo góc φ , biết thời điểm ban đầu là $t_0 = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $\varphi(0) = \pi/6$.

Bài 18. Vành tròn đồng chất khối lượng M , khối tâm O, bán kính vành ngoài là R , vành trong ρ , chịu tác dụng mômen L lăn không trượt phía trong hình trụ tròn cố định bán kính được xem là R . Đĩa tròn đồng chất khối lượng m , bán kính r lăn không trượt phía trong hình vành khăn. Cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng.

1. Lập phương trình chuyển động của cơ hệ theo góc φ và θ .
2. Giả sử vành tròn quay đều với vận tốc góc $\bar{\Omega}_0 = \text{const}$, tìm mômen L để duy trì chế độ chuyển động đó. Tính vận tốc \vec{v}_c khi $\varphi = \pi/3$ với điều kiện đầu $\varphi(0) = \pi/3$, $\dot{\varphi}_0 = 2\sqrt{g / [3(\rho - r)]}$ và $\rho = 120 \text{ cm}$, $r = 20 \text{ cm}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.
3. Khi vành tròn quay đều, bỏ qua ma sát lăn, xác định phản lực của vành tròn tác dụng lên đĩa tại B, tính vận tốc góc $\bar{\Omega}_0$ của vành tròn.



Hình bài 18



Hình bài 19

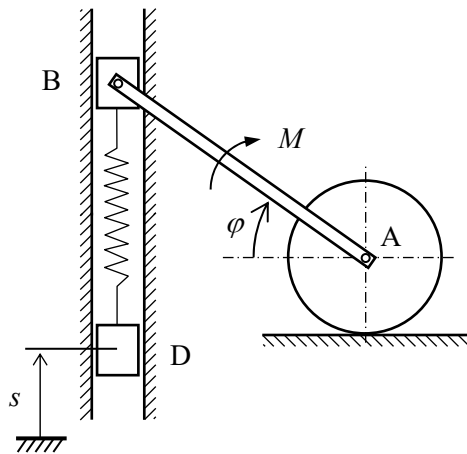
Bài 19. Đối với một cái chuông nhà thờ, cho biết khối lượng vỏ chuông là m_G , khối lượng cần lắc là m_K , mômen quán tính của vỏ chuông với điểm treo A là J_G , mômen quán tính của cần lắc đối với điểm treo B là J_K , cũng cho biết các kích thước $s_G = AC_G$, $s_K = BC_G$ và $h = AB$.

1. Xem chiếc chuông nhà thờ như mô hình một con lắc kép, hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ. Bỏ qua lực cản và lực rung chuông.
2. Trong một vài trường hợp rung chuông không kêu do sau khi va chạm, cần lắc và vỏ chuông chuyển động như một vật rắn. Trong trường hợp đó, từ các phương trình vi phân chuyển động trên hãy tìm điều kiện mà độ dài h phải thỏa mãn.

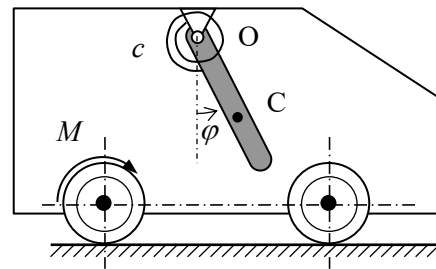
Bài 20. Đĩa đồng chất có khối lượng m_1 lăn không trượt theo mặt phẳng ngang. Tại tâm đĩa gắn bản lề với thanh AB độ dài L chuyển động nhờ mômen M . Tại B có gắn con chạy khối lượng m_2 chuyển động thẳng đứng, nó được gắn với tải trọng D khối lượng m_3 nhờ lò xo có độ cứng c . Bỏ qua khối lượng của thanh. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ đối với các tọa độ suy rộng s, φ khi $\varphi = 0, s = 0$ lò xo không biến dạng.

Bài 21. Một xe khối lượng m_1 chạy theo đường thẳng ngang. Tại điểm O trên trần xe treo một con lắc vật lý khối lượng m , trọng tâm C ($OC = e$), bán kính quán tính đối với trục quay qua O bằng ρ . Con lắc liên kết với trần xe bằng lò xo xoắn có độ cứng c . Ngẫu lực cản tại trục quay O có mômen $M_c = b\omega$, trong đó ω là vận tốc góc của con lắc vật lý, b là hệ số cản không đổi được đo từ thực nghiệm. Bỏ qua khối lượng của các bánh xe, các bánh xe lăn không trượt.

1. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ, biết $\varphi = 0$ lò xo không biến dạng.
2. Khi xe chạy với vận tốc $v = v_0 + V\cos\Omega t$, trong đó v_0, V, Ω là các hằng số và $V \ll v_0$, tính dao động bé của con lắc (trong trường hợp này lấy $\sin\varphi \approx \varphi, \cos\varphi \approx 1$).

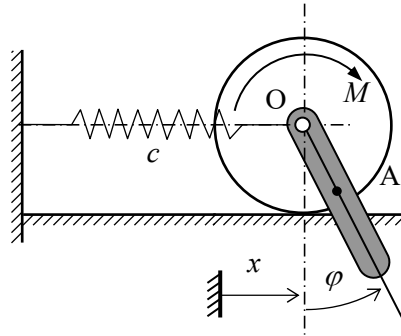


Hình bài 20



Hình bài 21

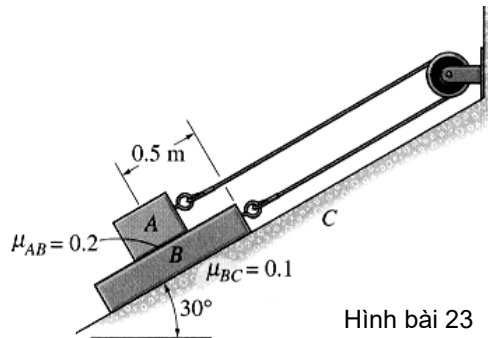
Bài 22. Đĩa đồng chất có khối lượng m_1 , bán kính R lăn không trượt trên đường nằm ngang dưới tác dụng của mômen $M(t) = M_0 \cos \omega t$ (ω là hằng số). Trên tâm O của đĩa có gắn con lắc vật lý OA, có khối lượng m_2 , khối tâm của nó là A với $OA = h$, lò xo có độ cứng là c nối tâm O của đĩa với giá cố định.



Hình bài 22

1. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ x và φ .
2. Xác định phản lực liên kết ở ổ trục O tại thời điểm ban đầu, nếu ở thời điểm này OA thẳng đứng và con lắc đứng yên so với đĩa ($\dot{\varphi}|_{t=0} = 0$). Cho $m_2 = 1/4 m_1$; $m_1 = 40$ kg; $J_0 = 0,1 m_1 R^2$ và $h = 0,6R$.

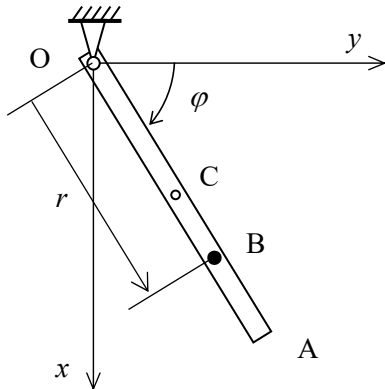
Bài 23. Vật A khối lượng 10 kg nằm trên tấm ngang B nặng 50 kg ở vị trí như trên hình. Bỏ qua khối lượng của dây và ròng rọc, và các hệ số ma sát động được cho trên hình. Hãy xác định thời gian cần thiết để vật A trượt 0,5 m trên tấm khi hệ được thả chuyển động từ trạng thái đứng yên.



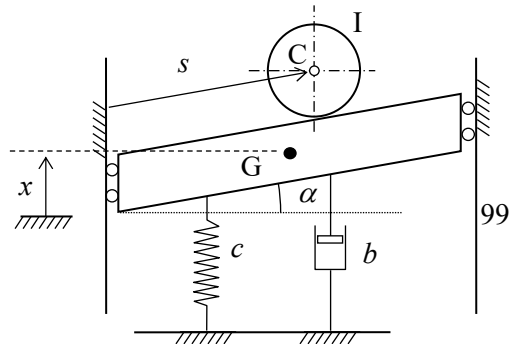
Hình bài 23

Bài 24. Thanh OA = 2l, đồng chất khối lượng M, quay tròn quanh trục nằm ngang qua O cố định.

1. Giả sử chất điểm B khối lượng m, trượt không ma sát trên OA. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ. Tính phản lực liên kết tác dụng lên chất điểm theo: r , φ , \dot{r} , $\dot{\varphi}$.



Hình bài 24



Hình bài 25

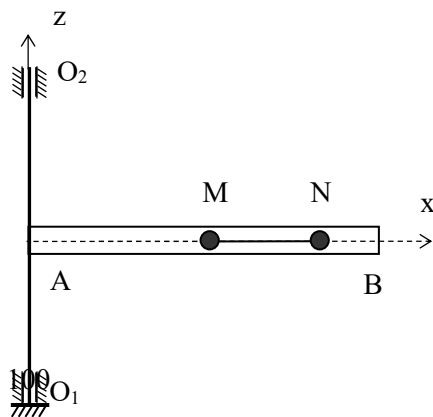
- Chất điểm B với vận tốc v rơi thẳng đứng từ trên xuống đập vào thanh OA đang nằm ngang ($\varphi_1 = 0$) và đứng yên ($\dot{\varphi}_1 = 0$). Coi va chạm là đàn hồi. Tính vận tốc v_1 của B, vận tốc góc $\dot{\varphi}_1$ của thanh ngay sau va chạm và xung lượng va chạm, cho $r = a$ là vị trí va chạm của chất điểm.
- Lập bất đẳng thức giữa l và a để sau va chạm chất điểm B trượt theo OA.
- Chứng minh rằng, nếu chất điểm đã trượt theo OA thì sau đó không thể rời khỏi thanh OA.
- Trong trường hợp giới hạn $l = 3/4a$, thì sau va chạm chất điểm B rời khỏi OA, hãy chứng minh điều đó.

Bài 25. Một bàn rung có khối lượng m_0 được lắp nghiêng so với mặt ngang một góc $\alpha = \text{const}$. Một viên bi trụ có dạng là một đĩa đồng chất khối lượng m , bán kính r có thể lăn không trượt trên mặt bàn rung. Mặt bàn rung chuyển động tịnh tiến theo phương đứng. Bàn liên kết với nền bằng lò xo có độ cứng c và giảm chấn nhớt có hệ số cản không đổi b . Bàn còn chịu tác dụng lực kích động thẳng đứng là hàm điều hoà của thời gian $F = F_0 \sin \Omega t$, trong đó F_0 và Ω là các hằng số đã biết.

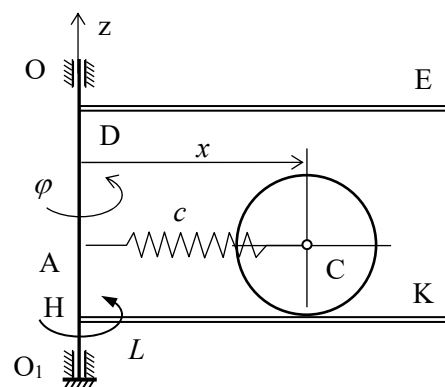
- Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo x và s .
- Tìm điều kiện để viên bi lăn không trượt trên bàn. Cho biết hệ số ma sát trượt tính bằng f .

Bài 26. Ống đồng chất AB dài $3l$, khối lượng m quay xung quanh trục thẳng đứng O_1O_2 . Hai quả cầu xem là 2 chất điểm cùng khối lượng m được nối với nhau bằng dây mềm không giãn có chiều dài l , có thể trượt không ma sát trong ống. Lúc đầu, khi quả cầu M nằm ở vị trí đầu A của ống trùng với trục quay, truyền cho hệ vận tốc góc ban đầu ω_0 . Bỏ qua khối lượng của trục quay, ma sát ở các ổ trục.

- Xác định vận tốc góc, gia tốc góc của ống tại thời điểm quả cầu N đến đầu B của ống.
- Tính sức căng T của dây nối 2 quả cầu tại thời điểm nói trên.



Hình bài 26



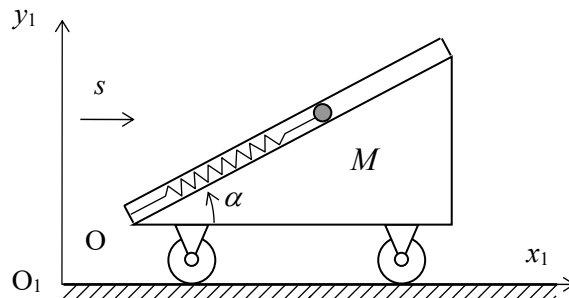
Hình bài 27

Bài 27. Đĩa tròn đồng chất khối lượng m bán kính r có thể lăn không trượt trên cạnh nằm ngang của khung cứng DEKH gắn vào trục quay thẳng đứng OO_1 . Tâm C của đĩa được nối với điểm cố định I của khung nhờ lò xo có độ cứng c , độ dài của lò xo lúc không biến dạng là r . Khung quay dưới tác dụng của mômen phát động L và chịu mômen cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc góc của khung với hệ số tỷ lệ là b ($b = \text{const}$). Cho khối lượng của khung là M , bán kính quán tính của nó đối với trục quay là ρ . Bỏ qua ma sát ở các ổ trục, khối lượng của khung quay và khối lượng của lò xo.

1. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng x và φ .
2. Xét trường hợp khung quay đều với vận tốc góc $\omega_0 = \text{const}$. Xác định quy luật chuyển động tương đối của tâm đĩa. Cho biết ở thời điểm đầu tâm C của đĩa ở cách trục một khoảng là r và nằm yên đối với khung.

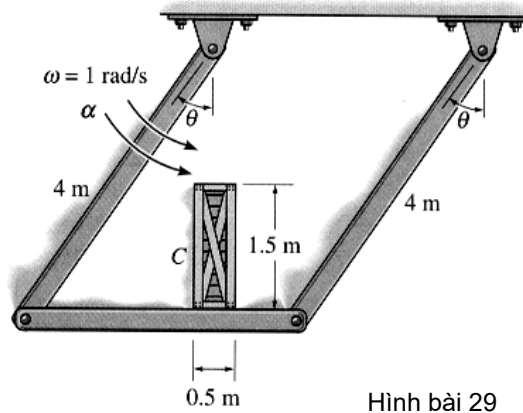
Bài 28. Lăng trụ A chuyển động tịnh tiến song song với mặt phẳng thẳng đứng $O_1x_1y_1$ theo luật: $s = bt^3$, trong đó b là hằng số dương. Quả cầu M kích thước không đáng kể, khối lượng m có thể dịch chuyển trong ống nhẵn đặt dọc theo mặt phẳng nghiêng của lăng trụ lập với phương ngang một góc α . Lò xo có độ cứng c , một đầu buộc cố định vào điểm O của ống, đầu kia gắn với quả cầu. Độ dài tự nhiên của lò xo là l_0 .

1. Xác định luật chuyển động $x = x(t)$ của quả cầu dọc theo ống. Cho biết ở thời điểm đầu $t = 0$ quả cầu ở vị trí $x_0 = 2l_0$ và $\dot{x}_0 = 0$.
2. Tính áp lực của quả cầu lên thành ống tại thời điểm t bất kỳ.



Hình bài 28

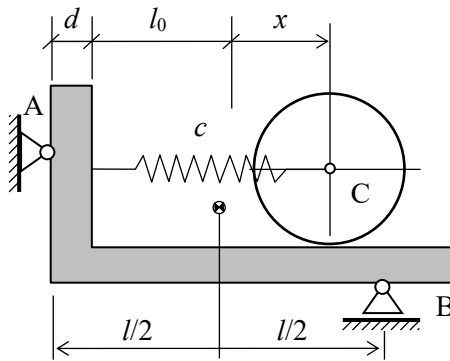
Bài 29. Thùng C có khối lượng 50 kg nằm yên trên kệ đỡ với hệ số ma sát trượt tĩnh giữa thùng và kệ là 0.5. Tại thời điểm góc $\theta=30^\circ$ các thanh nối có vận tốc góc $\omega = 1 \text{ rad/s}$ và gia tốc góc $\alpha = 5 \text{ rad/s}^2$. Xác định lực ma sát tác dụng lên thùng C.



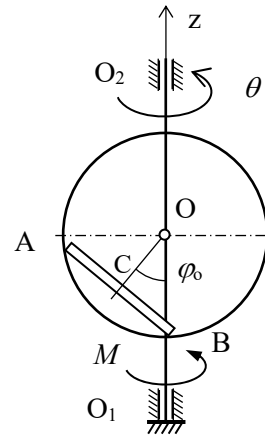
Hình bài 29

Bài 30. Một con lăn hình trụ bán kính r , khối lượng m , mômen quán tính đối với trục đi qua khối tâm C và vuông góc với mặt phẳng đáy là mi_c^2 . Con lăn được nối bằng lò xo với hệ số cứng c vào giá đỡ và lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang của giá đỡ AB. Khối lượng giá đỡ là m_1 . Các kích thước cho trên hình vẽ. Biết rằng ở thời điểm đầu lò xo bị kéo ra so với độ dài tự nhiên l_0 thêm một đoạn là a , còn vận tốc khối tâm con lăn bằng 0. Bỏ qua ma sát lăn giữa con lăn và giá đỡ.

1. Xác định phản lực ở A và B.
2. Tìm giá trị cực đại của các phản lực này.



Hình bài 30

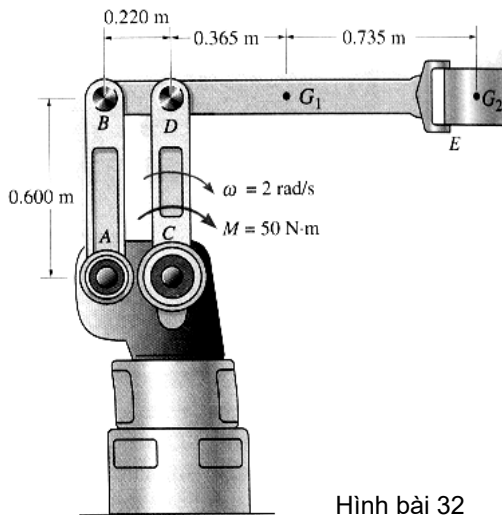


Hình bài 31

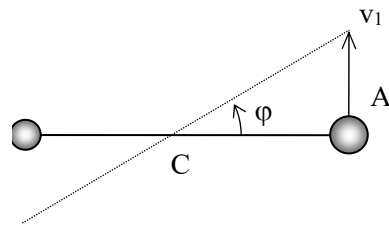
Bài 31. Cơ hệ gồm vành tròn bán kính R có mômen quán tính đối với đường kính là J , quay quanh trục cố định thẳng đứng là đường kính O_1O_2 ; thanh mảnh AB đồng chất dài $2a$ ($a < R$) khối lượng m , hai đầu A và B tựa vào vành. Hệ chuyển động từ trạng thái nghỉ dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen M đặt vào trục quay. Tại thời điểm đầu đoạn thẳng nối tâm O của vành với khối tâm C của thanh tạo với trục quay góc φ_0 khá nhỏ. Bỏ qua ma sát.

1. Thiết lập phương trình chuyển động của cơ hệ.
2. Cho $R = a\sqrt{2}$, xác định M để vành quay đều với vận tốc góc ω_0 và di chuyển của thanh đối với vành là nhỏ.

Bài 32. Cánh tay thao tác BDE của Robot công nghiệp được dẫn động bằng một mô men xoắn $M = 50 \text{ Nm}$ tác dụng lên khâu CD . Xác định các lực liên kết tại các khớp B và D khi các khâu AB và CD đang chuyển động với vận tốc góc là 2 rad/s . Tay máy BDE có khối lượng là 10 kg và trọng tâm tay máy đặt tại vị trí điểm G_1 . Vật nặng được giữ bởi tay máy có khối lượng 12 kg , trọng tâm đặt tại G_2 . Bỏ qua khối lượng các khâu AB và CD .



Hình bài 32



Hình bài 33

Bài 33. Hai quả tạ A và B khối lượng $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$ được nối với nhau bằng một thanh dài $l = 60 \text{ cm}$. Ban đầu quả tạ B không chuyển động, còn quả A có vận tốc $v_1 = 60\pi \text{ cm/s}$ ($\vec{v}_1 \perp AB$). Bỏ qua trọng lượng của thanh, sức cản không khí và kích thước các quả tạ (xem hình vẽ).

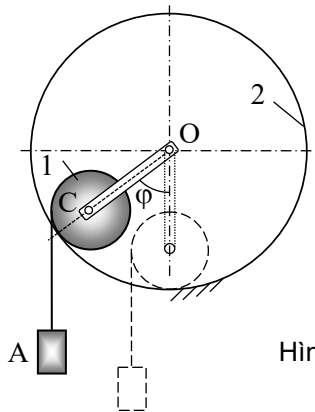
- a) Hãy xác định chuyển động của những quả tạ dưới tác dụng của trọng lực.
- b) Xác định khoảng cách h_1 và h_2 của các quả tạ tại thời điểm $t = 2 \text{ s}$ so với phương ngang của hệ lúc ban đầu.

c) Cho biết ban đầu thanh AB nằm ngang và cách mặt đất một khoảng bằng $h = 20$ cm. Hỏi đầu nào chạm đất trước?

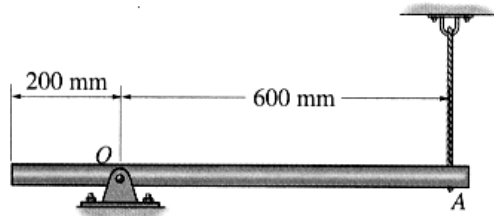
d) Xác định các lực thanh tác dụng lên các quả tạ?

Bài 34. Một tàu điện đang chạy bị hãm đột ngột. Tại thời điểm này một người đang đứng yên trên tàu đã bước lên phía trước (theo phương tàu chạy) một bước dài 0,3 m để khỏi ngã. Biết độ cao trọng tâm của người là 0,9 m. Tàu chạy thêm 9,6 m nữa thì dừng lại. Hỏi vận tốc tàu lúc hãm?

Bài 35. Cơ cấu hành tinh trong mặt phẳng thẳng đứng, có bánh răng 1 chuyển động trong bánh răng cố định 2. Bánh 1 gắn cứng với tang trống cùng bán kính, trên đó cuốn cuộn dây không giãn, đầu kia của sợi dây buộc tải trọng A có khối lượng m . Tính khối lượng m_1 cần thiết của bánh răng 1 và tang trống để tay quay OC có thể quay được một góc φ . Tại thời điểm ban đầu hệ đứng yên và OC thẳng đứng. Dây đủ dài để có thể bỏ qua chuyển động con lắc của tải trọng A và bỏ qua khối lượng tay quay OC và dây.

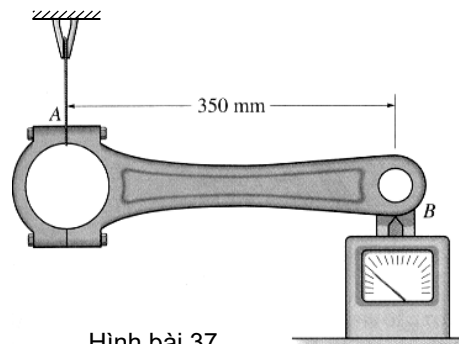


Hình bài 35



Hình bài 36

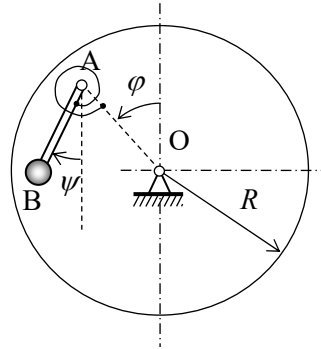
Bài 36. Thanh mảnh đồng chất tiết diện đều có khối lượng 5 kg được giữ như trên hình. Nếu dây treo tại A bị đứt, hãy xác định phản lực tại bản lề O: (a) Khi thanh vẫn ở vị trí nằm ngang, (b) Khi thanh xoay sang vị trí thẳng đứng.



Hình bài 37

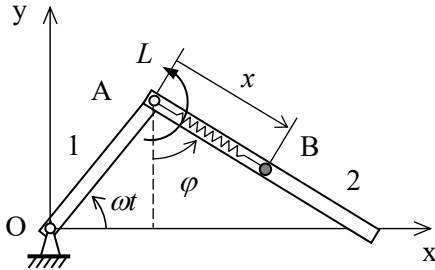
Bài 37. Để xác định mô men quán tính I_G của 1 thanh truyền nặng 4 kg, thanh được treo nằm ngang nhờ một

Bài 41. Cho cơ hệ gồm đĩa đồng chất khối lượng m_1 , bán kính R quay được quanh trục nằm ngang O cố định. Thanh dài $AB = l$, khối lượng bỏ qua gắn bản lề với đĩa tại A , đầu mút còn lại được gắn quả cầu nhỏ B có khối lượng m_2 . Một lò xo xoắn có độ cứng c được gắn các đầu mút vào thanh và đĩa. Biết rằng khi $\varphi = \psi = 0$ lò xo không biến dạng, $OA = a$. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo φ và ψ .

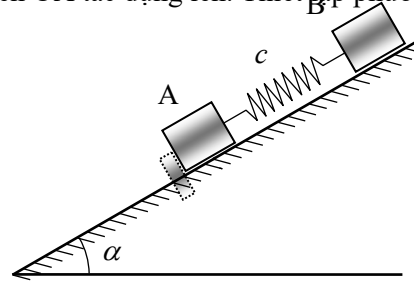


Hình bài 41

Bài 42. Thanh OA dài a quay trong mặt phẳng thẳng đứng xung quanh trục nằm ngang O với vận tốc góc $\omega = \text{const}$. Ống 2 đồng chất khối lượng M dài $2l$ được gắn bản lề với thanh tại A . Quả cầu nhỏ B khối lượng m gắn ở đầu lò xo, trượt không ma sát trong ống 2. Lò xo có độ cứng c , độ dài khi không biến dạng là l_0 . Trên ống có ngẫu lực mômen L do động cơ không khối lượng đặt trên OA tác dụng lên. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cơ hệ theo φ và x .



Hình bài 42

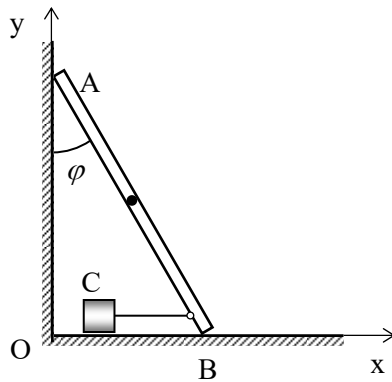


Hình bài 43

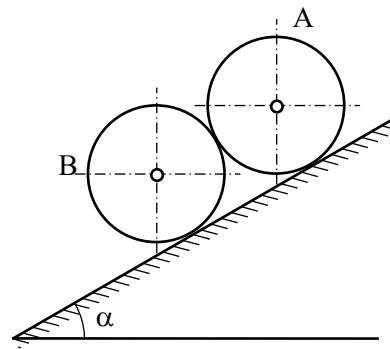
Bài 43. Hai vật nặng A và B có khối lượng tương ứng m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một lò xo độ cứng c đang ở vị trí cân bằng tĩnh trên mặt phẳng nghiêng trơn lập với phương ngang một góc α nhờ một thanh chắn ở A . Tìm qui luật chuyển động của A , B và tâm khối lượng của chúng khi thả nhẹ thanh chắn ra.

Bài 44. Thanh đồng chất AB có trọng lượng P chiều dài $2L$, nằm trong mặt phẳng thẳng đứng có đầu A và B trượt không ma sát dọc theo trục y và trục x . Vật C có trọng lượng Q được nối với đầu B bằng một sợi dây không giãn không trọng lượng. Vật C trượt trên mặt phẳng ngang dọc theo trục x với hệ số ma sát f . Ban đầu thanh AB tạo với trục y một góc φ_0 và cho rơi không vận tốc ban đầu.

- 1) Xác định vận tốc góc và gia tốc góc của thanh theo góc φ .
- 2) Tìm sức căng của dây.



Hình bài 44

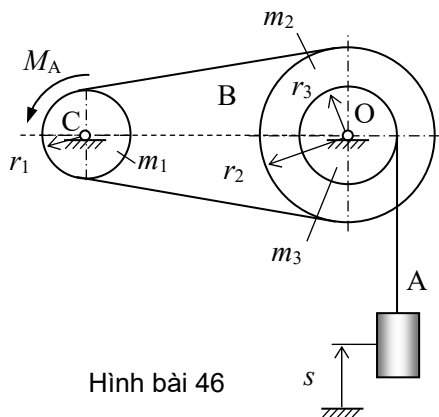


Hình bài 45

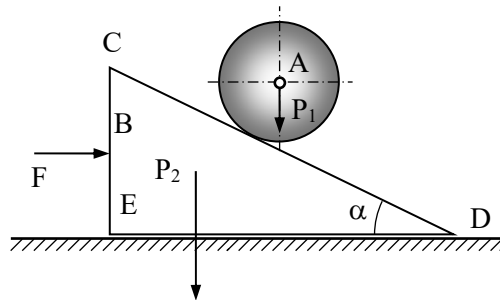
Bài 45. Hai khối trụ A và B có cùng bán kính r và khối lượng m lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng như hình vẽ. Cho mômen quán tính của khối trụ B đối với trục đối xứng là mr^2 , mômen quán tính của khối trụ A đối với trục đối xứng là kmr^2 ($0 < k < 1$). Hệ số ma sát trượt giữa hai khối trụ là f . Xác định gia tốc của khối tâm các khối trụ và áp lực giữa chúng.

Bài 46. Vật A khối lượng m được kéo lên nhờ hệ thống tời như hình vẽ. Tời B gồm hai tầng, mỗi tầng là một đĩa tròn đồng chất có khối tâm ở trục quay hình học O, khối lượng tương ứng của hai đĩa là m_2 và m_3 , các bán kính r_2 và r_3 . Rôto của động cơ được xem như một trụ tròn đồng chất bán kính r_1 , khối lượng m_1 quay quanh trục đối xứng C. Bỏ qua khối lượng đai truyền và ma sát tại các ổ trục. Ngẫu lực tác dụng lên trục động cơ có mômen không đổi là M_A .

- 1) Tìm mômen động cơ tối thiểu M_{Amin} để cơ hệ cân bằng.
- 2) Tìm phương trình chuyển động của vật A khi $M_A = 2M_{Amin}$. Biết rằng khi $t = 0$ thì $s = 0, v = v_0$.



Hình bài 46



Hình bài 47

Bài 47. Một trụ tròn đồng chất có tâm A, có trọng lượng P_1 , bán kính R lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng của lăng trụ tam giác B. (Đường sinh của trụ tròn A luôn vuông góc với cạnh đáy CD của lăng trụ). Lăng trụ tam giác B có trọng lượng P_2 và có góc nghiêng so với mặt phẳng ngang là α . Bỏ qua ma sát trượt giữa lăng trụ và mặt phẳng ngang. Hãy xác định lực F cần tác dụng vào thành CE của lăng trụ theo phương nằm ngang để:

- Trụ tròn A vẫn đứng yên trên mặt nghiêng.
- Trụ tròn A lăn lên phía trên của lăng trụ.
- Trụ tròn A lăn xuống phía dưới.

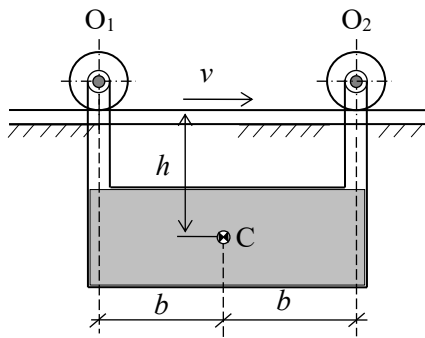
Bài 48. Tấm chữ nhật có khối lượng M , khối tâm C, được gắn với hai thanh và được treo vào hai trục của hai bánh xe lăn O_1, O_2 . Hai bánh xe như nhau cùng bán kính r . Xe đang chuyển động ngang. Kích thước b và h cho trên hình vẽ.

a) Mỗi bánh xe có khối lượng m , bán kính quán tính đối với trục qua tâm là ρ . Tại một thời điểm nào đó có một bánh xe bị kẹt, nó trượt trên ray ngang (không lăn) còn bánh kia vẫn lăn không trượt trên ray. Xe chuyển động chậm dần với gia tốc a . Gọi F_1 và F_2 là các lực ma sát trượt tại điểm tiếp xúc giữa ray và các bánh xe. Tìm F_1 và F_2 (trị số và chiều) suy ra rằng nếu bỏ qua khối lượng các bánh xe thì có thể bỏ qua lực ma sát trượt giữa ray và bánh xe không bị kẹt.

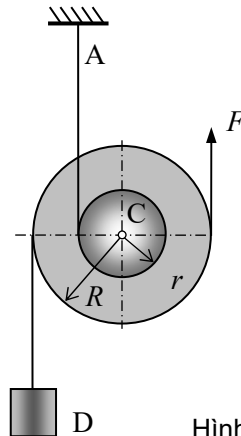
b) Giả thiết bỏ qua khối lượng các bánh xe và bánh xe sau bị kẹt, nó trượt trên ray với hệ số ma sát trượt động là $f < 2h / b$, còn bánh trước lăn không trượt.

- Tìm gia tốc a của xe. Tìm các phản lực pháp tuyến N_1, N_2 và các lực ma sát F_1, F_2 của hai bánh xe đối với ray.

- Tìm giá trị tới hạn f^* của f để bánh trước vẫn lăn không trượt.



Hình bài 48



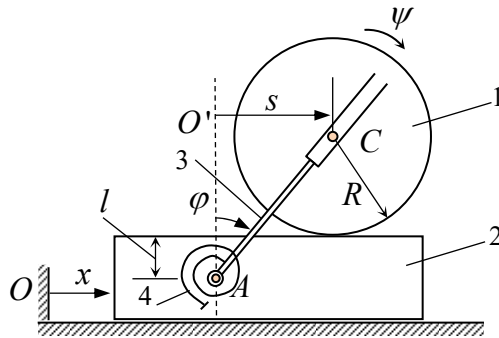
Hình bài 49

Bài 49. Một trục bậc có khối lượng $m_1 = 15 \text{ kg}$, có các bán kính r và $R = 2r$, có bán kính quán tính đối với trục đối xứng là $\rho = \sqrt{Rr}$. Trục bậc được quấn vào dây có đầu A cố định. Dây được xem là không giãn và quấn vào trục có bán kính r . Một vật D có khối lượng m_2 được treo vào một sợi dây không bị giãn và đầu khác quấn vào phần trục có bán kính lớn. Trục bậc còn chịu tác dụng lực $F = 196 \text{ N}$ theo hướng thẳng đứng. Bỏ qua khối lượng của dây. Tính gia tốc của vật D và sức căng của nhánh dây có điểm treo tại A. Tìm vận tốc của vật D khi tâm C di chuyển lên phía trên được 1 mét, ban đầu hệ đứng yên.

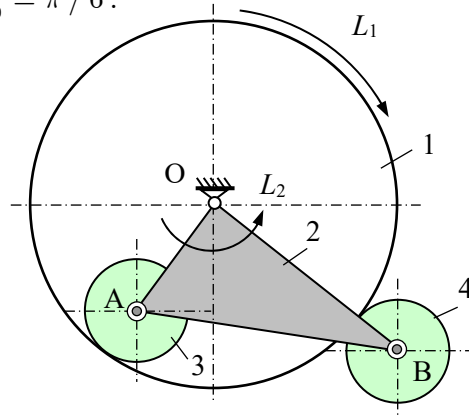
Bài 50. Cho hình trụ đồng chất 1 có khối lượng m và bán kính R lăn không trượt trên tấm đe phẳng 2 có khối lượng M , nằm trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn không ma sát. Trục C của hình trụ trượt theo rãnh của thanh cứng 3, thanh này nối với đe 2 bằng bản lề A và lò xo xoắn 4 có độ cứng c . Trục A cách mặt phẳng trên của đe một khoảng là l . Lò xo không bị biến dạng khi thanh cứng 3 ở vị trí thẳng đứng, $\varphi = 0$.

Chọn các tọa độ suy rộng đủ cho hệ là x và s . Cho biết trạng thái ban đầu của hệ : $x(0) = 0, s(0) = (R + l) \tan \varphi_0, \dot{x}(0) = 0, \dot{s}(0) = 0$.

- 1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ.
- 2) Xác định gia tốc góc của thanh cứng 3 và gia tốc của đe 2 tại thời điểm ban đầu.
- 3) Xác định vận tốc của đe 2 khi thanh 3 trở lại vị trí thẳng đứng? Bỏ qua khối lượng của thanh 3; $M = 3m$; $R = 3l$; $\varphi_0 = \pi/6$.



Hình bài 50



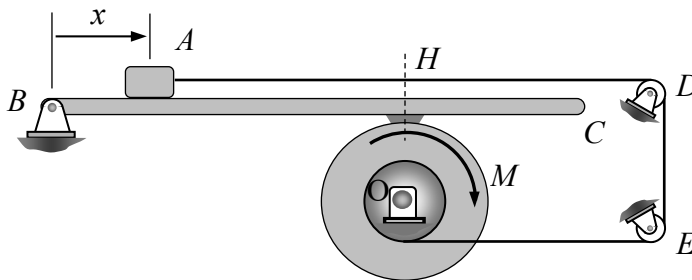
Hình bài 51

Bài 51. Một cơ cấu hành tinh đặt trong mặt phẳng ngang. Bánh 1 có khối lượng M , bán kính R , còn khung dạng tam giác vuông khối lượng của nó được bỏ qua, có thể quay độc lập quanh trục thẳng đứng qua O. Tác dụng lên bánh 1 một ngẫu lực có mômen không đổi L_1 và lên khung ngẫu lực có mômen không đổi L_2 làm cho bánh xe 3 và 4 lăn không trượt bên trong và ngoài bánh 1. Các bánh xe 3 và 4 được xem

là các đĩa đồng chất có cùng khối lượng m và bán kính r . Xác định chuyển động của cơ hệ. Cho $M = 2m$; $R = 3r$.

Bài 52. Vật A trọng lượng P có thể trượt trên thanh BC không ma sát. Thanh BC trọng lượng không đáng kể, đầu B gắn khớp bản lề (cố định) tựa lên mặt tời O bán kính R tại H . Tời O có trọng lượng G xem là trụ đồng chất, có thể quay quanh trục O nằm ngang. Sợi dây nhẹ không dẫn, một đầu buộc vào A , đầu kia quấn vào tang của tời O bán kính $r = R/2$ sau khi đã vắt qua 2 ròng rọc nhẹ D, E . Thanh BC nằm ngang, khoảng cách $BH = l$. Hệ số ma sát giữa tời O và BC là f . Tời chịu momen quay $M = \text{const}$.

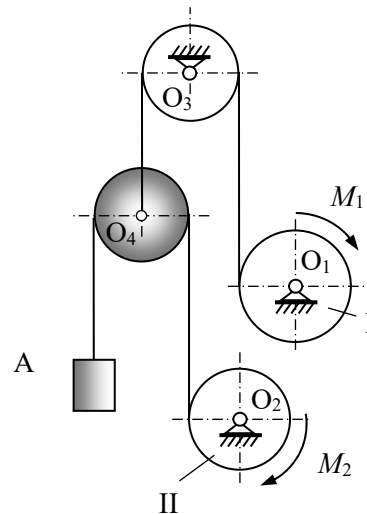
- 1) Xác định lực ma sát giữa BC và tời O theo khoảng cách $AB = x$.
- 2) Xác định quy luật chuyển động của cơ hệ $x(t)$ khi vật A chuyển động trên BC , biết tại thời điểm đầu $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.



Hình bài 52

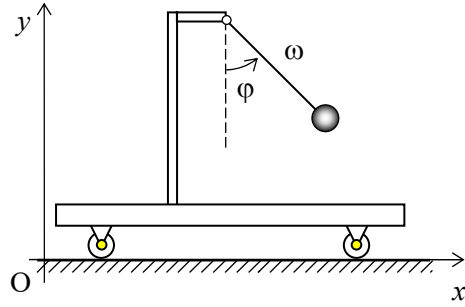
Bài 53. Vật A có khối lượng m được kéo lên nhờ các trục quay I và II có cùng bán kính r và mômen quán tính của chúng đối với trục quay riêng bằng J . Các trục quay chịu tác dụng các ngẫu lực có mômen lần lượt là M_1 và M_2 . Bỏ qua khối lượng các ròng rọc và ma sát tại các ổ trục. Coi các dây là nhẹ, không bị giãn, không bị trượt trên các vành ròng rọc. Tính:

- 1) Gia tốc của vật A .
- 2) Sức căng trong nhánh dây treo ròng rọc O_4 .



Hình bài 53

Bài 54. Con lắc toán học được đặt trên một xe chuyển động theo phương ngang Ox. Trục quay của con lắc vuông góc với phương chuyển động của xe để con lắc có thể dao động trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy. Thời điểm đầu con lắc ở vị trí thấp nhất và có vận tốc góc là ω_0 .



Hình bài 54

a) Chiếc xe phải chuyển động với vận tốc $v(t)$ như thế nào để khi $0 < t < \pi / (2\omega_0)$ con lắc quay quanh điểm treo với vận tốc góc không đổi.

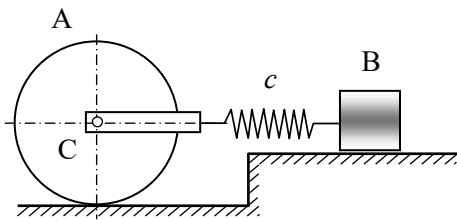
b) Hãy xác định lực \vec{F} cần đặt vào xe theo phương ngang để thực hiện chuyển động đó, nếu cho khối lượng của xe là M , khối lượng của con lắc là m .

Bài 55. Một đĩa mỏng có khối lượng M có thể trượt không ma sát trên một mặt nhẵn nằm ngang.

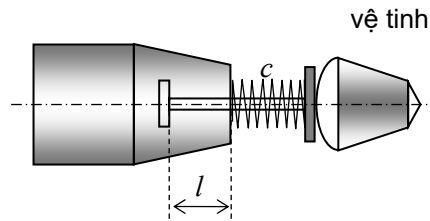
a) Một chất điểm A khối lượng m chuyển động trên mặt không nhẵn của đĩa với phương trình chuyển động tương đối là $x(t), y(t)$ đối với hệ tọa độ Đề các Oxy gắn liền với đĩa ở gốc O là tâm đĩa. Biết mômen quán tính của đĩa đối với khối tâm là J_0 và ban đầu đĩa đứng yên. Hãy xác định qui luật biến đổi của vận tốc góc của đĩa.

b) Nếu chất điểm chuyển động tương đối theo vành tròn bán kính R của đĩa với vận tốc (tương đối) $V_r = \alpha t$, hãy tìm qui luật chuyển động của đĩa.

Bài 56. Một bánh A có dạng đĩa tròn đồng chất, có khối lượng $2m$ lăn không trượt trên mặt phẳng ngang. Trục C của bánh A nối với vật B nhờ lò xo có độ cứng c chuyển cho vật B chuyển động theo mặt phẳng ngang nhẵn. Khối lượng của vật B bằng m . Tại thời điểm đầu cả hệ nằm yên và lò xo bị giãn một đoạn bằng λ . Xác định vận tốc của trục C tại thời điểm độ biến dạng của lò xo bằng 0. Bỏ qua ma sát lăn.



Hình bài 56



Hình bài 57

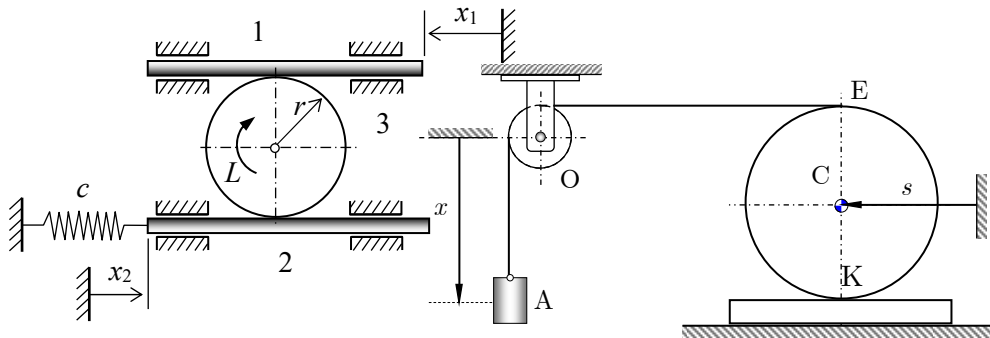
Bài 57. Để tách vệ tinh ra khỏi tầng cuối của tên lửa có khối lượng M người ta dùng một cần đẩy nhờ lò xo có độ cứng c . Vệ tinh có khối lượng m . Xác định vận tốc tương đối của vệ tinh tại thời điểm được tách khỏi tên lửa. Cho biết hành trình của cần đẩy là l và lúc vệ tinh được tách khỏi tên lửa thì lò xo không bị biến dạng. Vận tốc tương đối của vệ tinh có phụ thuộc vào vận tốc của tên lửa có vệ tinh tại thời điểm tách nhau không?

Bài 58. Hai thanh răng 1 và 2 có khối lượng cùng bằng m chuyển động theo rãnh nằm trong mặt phẳng ngang. Thanh 2 nối với nền bằng một lò xo có độ cứng c . Bánh 3 có bán kính r , khối lượng M được xem như đĩa tròn đồng chất ăn khớp với hai thanh răng. Tác dụng vào bánh 3 một ngẫu lực có mômen L . Ban đầu lò xo không bị biến dạng.

Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

Bài 59. Vật A có khối lượng m_1 được buộc vào dây mềm không giãn không trọng lượng và vắt qua ròng rọc tâm O rồi quấn vào trụ tròn đồng chất tâm C có khối lượng m_3 . Ròng rọc tâm O được xem như trụ tròn đồng chất có khối lượng m_2 .

Trụ tròn tâm C có thể lăn không trượt trên tâm phẳng có khối lượng m_4 , tấm này trượt không ma sát trên nền ngang trơn. Hãy viết phương trình chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng x và s . Tìm các tích phân đầu của chuyển động. Tìm gia tốc vật A và gia tốc tâm C nếu $m_1 = 0.75m_3$, $m_2 = 0.5m_3$, $m_4 = 0.25m_3$. Đồng thời xác định lực căng dây buộc vật 1 và quấn vào trụ C.



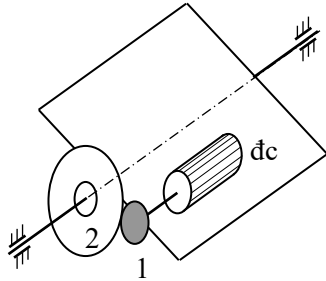
Hình bài 58

Hình bài 59

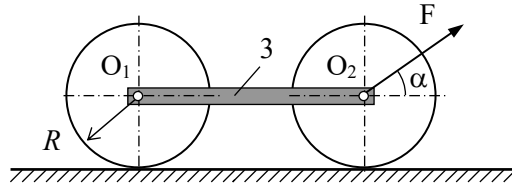
Bài 60. Một động cơ điện của truyền động được đặt trên một khung quay, vị trí của nó được xác định qua góc φ . Bánh răng 1 được lắp trên trục động cơ điện lăn trên bánh răng 2 cố định đối với nền. Cho mômen quán tính của khung và động cơ điện đối với trục quay của khung bằng J_1 , mômen quán tính của động cơ điện đối với

trục quay riêng của nó bằng J_0 , tỷ số truyền động của cặp bánh răng 1 và 2 là i_{12} . Mômen quay của động cơ là M_0 . Mômen cản quay của động cơ là M'_0 . Mômen của ngẫu lực tác dụng lên khung là M_1 .

Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



Hình bài 60



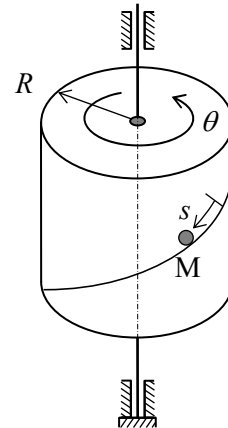
Hình bài 61

Bài 61. Cho sơ đồ xe hai bánh như hình vẽ. Các bánh xe vừa lăn vừa trượt trên đường nằm ngang. Bánh 1 có khối lượng m_1 , bánh 2 có khối lượng m_2 . Các bánh xe có bán kính bằng nhau và bằng R , chúng được xem là các đĩa tròn đồng chất. Lực F tác dụng tại tâm bánh xe 2 và nghiêng với đường nằm ngang một góc α . Hệ số ma sát trượt bằng f . Bỏ qua khối lượng của thanh 3.

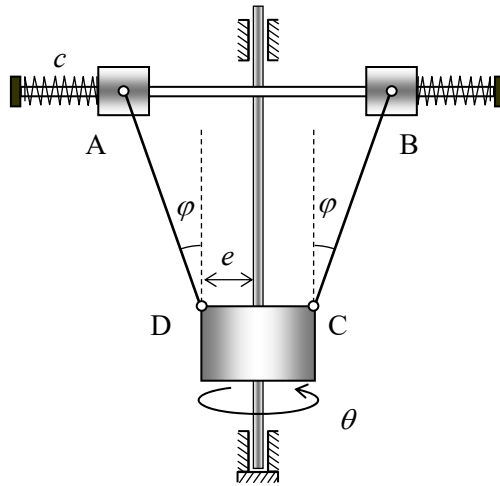
Viết phương trình vi phân chuyển động của xe.

Bài 62. Một ống trụ tròn rỗng đồng chất, có trọng lượng P và có bán kính đáy là R có thể quay quanh trục thẳng đứng. Trên mặt trong của ống có xẻ một rãnh hình ốc với bước bằng h . Một viên bi nhỏ có trọng lượng bằng Q chạy xuống theo rãnh hình ốc dưới tác dụng của trọng lượng bản thân. Bỏ qua ma sát giữa bi và rãnh.

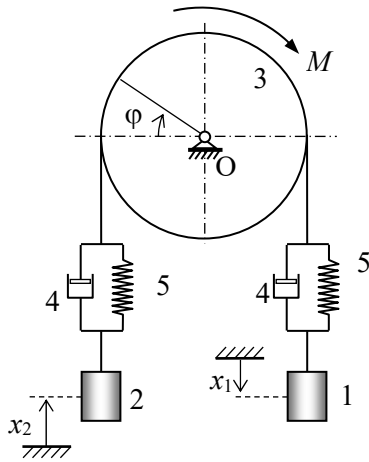
Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ. Cho biết ban đầu ống trụ đứng yên và viên bi có vận tốc ban đầu bằng không.



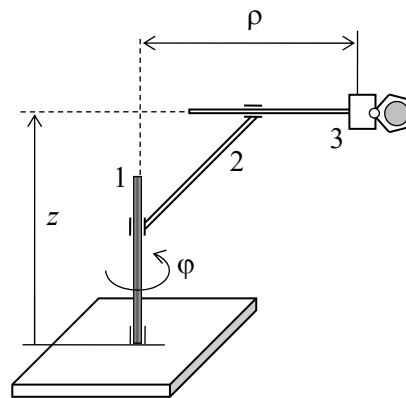
Bài 63. Một máy điều tiết ly tâm dùng lò xo gồm có hai vật nặng A và B trọng lượng mỗi vật bằng P , có thể trượt trên các trục nhẵn nằm ngang gắn cứng vào trục quay của máy. Đối trọng C có trọng lượng Q (mômen quán tính khối không đáng kể) được nối với các vật A và B bằng các thanh cứng nhẹ, có độ dài là l . Khoảng cách từ bản lề nối thanh vào đối trọng C đến đường tâm trục máy bằng e . Các lò xo dùng đẩy hoặc kéo các vật nặng về vị trí cân bằng tĩnh có độ cứng c . Viết phương trình vi phân chuyển động của máy khi trục máy chịu tác dụng một ngẫu lực có mômen M . Bỏ qua khối lượng các thanh nối, khối lượng các lò xo và ma sát tại các ổ trục. Cho biết khi thanh nghiêng với đường thẳng đứng một góc φ_0 thì lò xo không làm việc.



Bài 64. Mô hình của một thang máy được cho trên hình. Các vật 1 và 2 có khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 được buộc vào các đầu của một sợi cáp. Sợi cáp vắt qua ròng rọc 3. Ròng rọc là đĩa đồng chất có bán kính r , khối lượng m và chịu tác dụng ngẫu lực có mômen M . Các lò xo có độ cứng như nhau và bằng c . Bộ tắt chấn có hệ số cản b . Bỏ qua hiện tượng trượt giữa sợi cáp và ròng rọc. Hệ bắt đầu chuyển động từ vị trí lò xo không bị biến dạng. Hãy viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



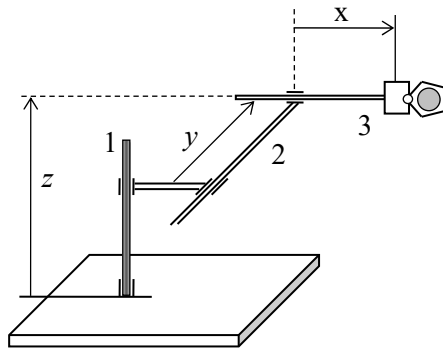
Hình bài 64



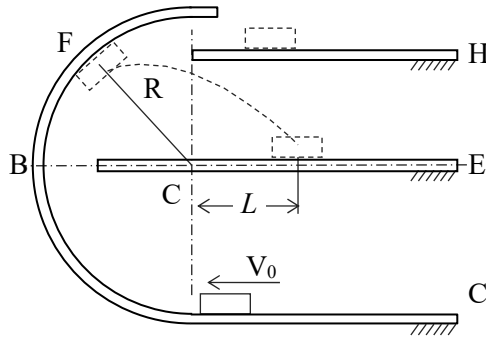
Hình bài 65

Bài 65. Một tay máy gồm trụ quay 1, thiết bị dùng để tạo chuyển động tịnh tiến theo phương đứng 2, tay với và bàn kẹp 3. Mômen quán tính của trụ quay đối với trục tâm của nó bằng J_1 , khối lượng của khâu 2 bằng m_2 còn mômen quán tính của nó đối với trục quay bằng J_2 . Tay quay cùng với bàn kẹp có khối lượng m_3 còn mômen quán tính của nó đối với trục đi qua khối tâm bằng J_3 và khoảng cách từ khối tâm đến trục quay bằng ρ . Tác dụng ngẫu lực có mômen M lên trục quay. Các truyền động tịnh tiến được thực hiện nhờ các lực F_{12} và F_{23} . Bỏ qua ma sát. Viết phương trình vi phân chuyển động của tay máy.

Bài 66. Một tay máy gồm một cột đứng dọc theo nó chuyển động tịnh tiến theo phương đứng thanh đỡ 1. Thanh 2 có thể dịch chuyển tịnh tiến ngang nhờ một khớp tịnh tiến. Tay với cùng bàn kẹp 3 có thể di chuyển tịnh tiến đối với thanh 2 nhờ khớp tịnh tiến. Khối lượng các khâu lần lượt là m_1 , m_2 , và m_3 . Các lực làm cho các thanh chuyển động tịnh tiến tương ứng bằng F_{01} , F_{12} và F_{23} . Bỏ qua ma sát. Viết phương trình vi phân chuyển động của tay máy.



Hình bài 66

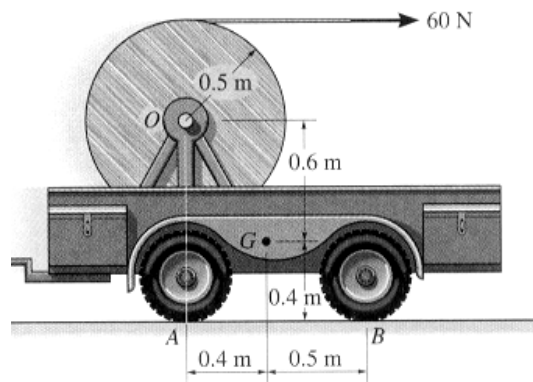


Hình bài 67

Bài 67. Khi có vận tốc đầu v_0 , vật nhỏ có thể chuyển động theo đường cong có định, nhẵn trơn, bán kính R . Tìm :

- 1) Vận tốc v_1 của vật tại điểm F trên đường cong. Từ đó suy ra điều kiện đối với v_0 để: - vật đến B rồi trượt xuống; - vật rơi vào tấm H; - vật rơi vào tấm E.
- 2) Khi vật rơi vào tấm E, hãy xác định khoảng cách L .

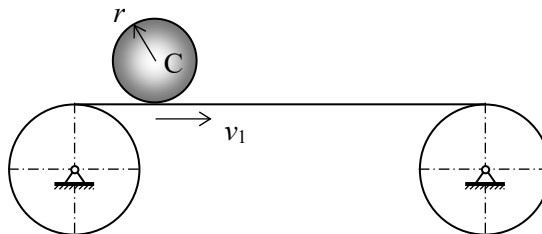
Bài 68. Một xe rơ moóc có khối lượng 580 kg và có trọng tâm tại G, trong khi đó tang cuốn dây có khối lượng 200 kg, trọng tâm đặt tại O, bán kính quán tính đối với trục đi qua O là $k_O = 0.45$ m, tang cuốn quay không ma sát quanh trục đi qua O. Nếu một lực ngang 60 N tác dụng vào một đầu dây quấn trên tang, hãy xác định gia tốc góc của tang cuốn và gia tốc của rơ moóc. Các bánh xe có khối lượng không đáng kể và lăn tự do.



Hình bài 68

Bài 69. Trụ tròn đồng chất có khối lượng m , bán kính r được đặt không vận tốc ban đầu xuống 1 băng chuyền đang chuyển động với vận tốc $v_1 = \text{const}$, hệ số ma sát động giữa băng chuyền và trụ là f . Hãy tìm:

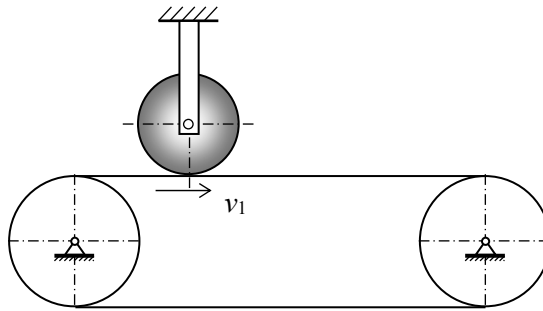
- Thời gian t_1 từ lúc tiếp xúc đến khi trụ bắt đầu lăn không trượt.
- Vận tốc tâm trụ và vận tốc góc của trụ tại thời điểm t_1 vừa tìm.



Hình bài 69

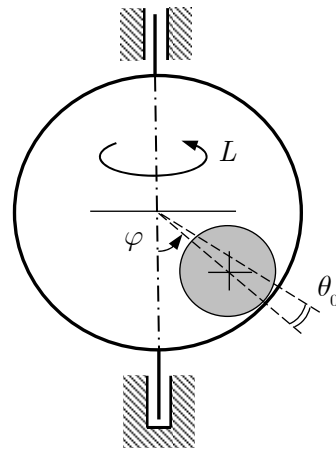
Bài 70. Đĩa A có khối lượng $m = 4 \text{ kg}$, bán kính $r = 90 \text{ mm}$, ở trạng thái tĩnh được đặt không vận tốc ban đầu xuống băng chuyền đang chuyển động với vận tốc $v = 15 \text{ m/s}$, hệ số ma sát động giữa đĩa và băng chuyền là $f = 0.25$. Xác định số vòng quay được của đĩa đến khi nó đạt được tốc độ không đổi.

Bài 71. Cho một đĩa tròn đồng chất khối lượng m bán kính r có thể chuyển động lăn không trượt theo mặt trong nhám của vành tròn khối lượng M , bán kính R . Vành tròn quay quanh đường kính thẳng đứng của nó dưới tác dụng của momen quay L .



Hình bài 70

1. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.
2. Giả sử vành quay với vận tốc góc không đổi ω_0 . Hãy xác định vị trí cân bằng của đĩa.
3. Tìm quy luật dao động bé của đĩa quanh vị trí cân bằng tương đối khi cho đĩa lệch khỏi vị trí đó một góc φ_0 và thả ra không vận tốc đầu.

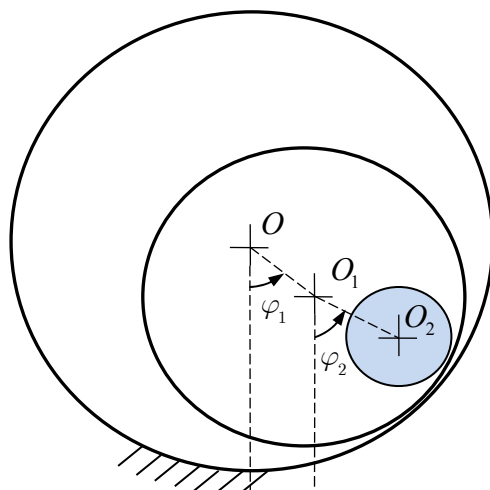


Hình bài 71

Bài 72. Trụ đặc đồng chất bán kính r_2 , khối lượng m_2 có thể lăn không trượt bên trong vành tròn đồng chất có khối lượng m_1 , bán kính r_1 và vành này lại có thể lăn không trượt bên trong mặt trụ rỗng cố định bán kính R (Cho $R > r_1 > r_2$). Bỏ qua ma sát lăn.

Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng φ_1, φ_2 .

Bài 73. Cho trụ tròn đặc tâm O, bán kính r_0 cố định. Một vành tròn đồng chất tâm C bán kính r_1 , khối lượng m_1 chuyển động bám vào đường biên của trụ O và trong quá trình đó không có sự trượt tương đối giữa vành với trụ. Một ngẫu lực có mômen M tác dụng vào vành. Bám vào bên trong vành và chuyển động tương đối so với vành là một chất điểm A có khối lượng m_2 . Bỏ qua sức cản không khí, coi ma sát giữa chất điểm A và vành là không đáng kể

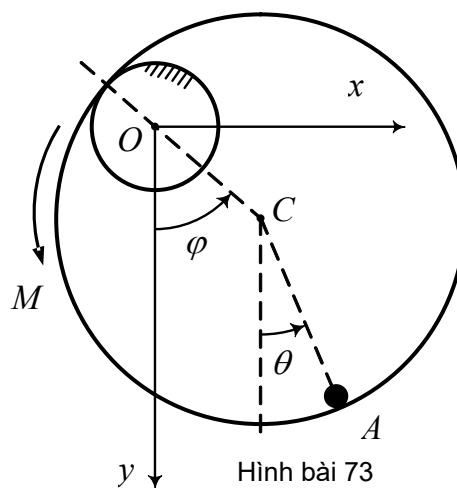


Hình bài 72

1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo hai tọa độ suy rộng φ và θ (chúng lần lượt là góc định vị của OC và CA so với phương Oy như hình vẽ).

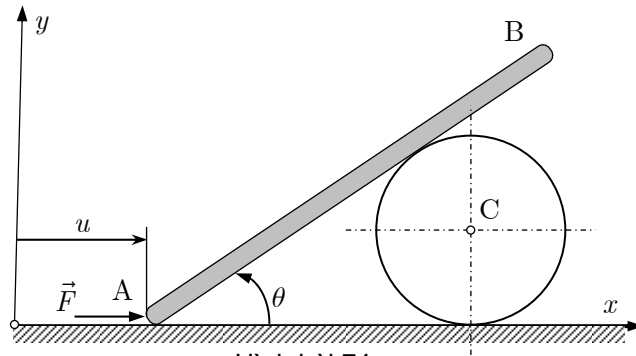
2) Tại thời điểm đầu $t = 0$, tâm C của vành và chất điểm A đều ở các vị trí thấp nhất. Cho $M = M_0 \cos \omega t$ với M_0, ω là các hằng số, tìm dao động nhỏ của cơ hệ.

3) Cho biết $M = 0$. Giả sử tại thời điểm đầu $t = 0$, cho góc $\varphi = \varphi_0$ và C nằm ở bên phải trục Oy còn A nằm ở vị trí thấp nhất, hệ số ma sát trượt tĩnh giữa trụ O và vành là μ_0 . Tìm khoảng giá trị của φ_0 để đảm bảo không có sự trượt tương đối giữa vành với trụ.



Hình bài 73

Bài 74. Thanh AB đồng chất có khối lượng m_1 chiều dài $2L$, đầu A chịu tác dụng lực F theo phương ngang trượt không ma sát trên nền ngang và tựa lên con lăn dạng trụ tròn đồng chất, bán kính R và khối lượng m_2 . Giả

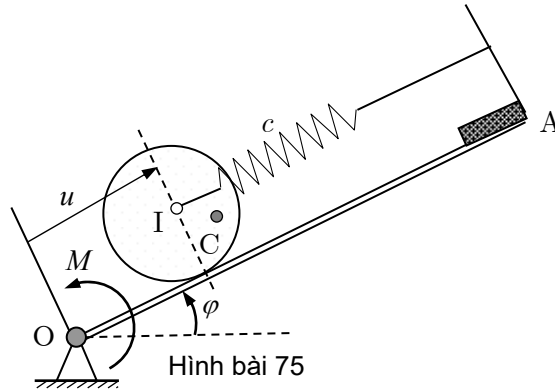


Hình bài 74

thiết giữa con lăn và mặt ngang và giữa con lăn và thanh AB không có hiện tượng trượt. Chọn các tọa độ suy rộng là u và góc nghiêng θ giữa thanh và phương ngang

- 1) Tính ma trận quán tính của hệ
- 2) Tính các lực suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng đã được chọn
- 3) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ ứng với các tọa độ suy rộng đã chọn

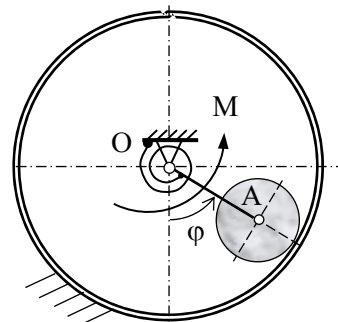
Bài 75. Một đĩa tròn có bán kính R , khối lượng m_2 , khối tâm tại C, cách tâm hình học I một đoạn e (độ lệch tâm), bán kính quán tính khối đối với khối tâm là ρ ,



Hình bài 75

lăn không trượt trên thanh đồng chất OA có chiều dài $2L$ và có thể quay không ma sát quanh trục O. Tâm của đĩa liên kết với thanh AB bằng lò xo tuyến tính có độ cứng c . Ban đầu thanh OA nằm ngang và lò xo không bị biến dạng. Thanh OA chịu tác dụng ngẫu lực M . Chọn các tọa độ suy rộng là φ và u . Xác ma trận quán tính của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng φ, u và tính các lực suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng.

Bài 76. Cho một máy nghiền có sơ đồ như hình vẽ. Bánh nghiền là một đĩa tròn đồng chất tâm A, bán kính r , khối lượng m_2 lăn không trượt bên trong vành tròn tâm O, bán kính R cố định trong mặt



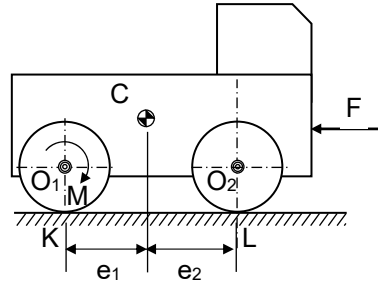
Hình bài 76

phẳng đứng. Tay quay OA là một thanh đồng chất có khối lượng m_1 , liên kết với nền bởi lò xo tuyến tính có hệ số cứng c , chịu tác dụng ngẫu lực $M = M_1(t) - \alpha\dot{\varphi}$, trong đó $M_1(t)$ là hàm đã cho của thời gian, α là hằng số đã cho, φ là góc định vị của tay quay OA so với phương đứng. Ban đầu tay quay OA nằm yên ở vị trí thẳng đứng và lò xo không chịu biến dạng ($\varphi(0) = 0$)

- 1) Xác định gia tốc góc của bánh nghiền.
- 2) Xét trường hợp $M_1(t) = M_0 \sin \Omega t$, trong đó M_0, Ω là hằng số đã cho và tay quay OA dao động bé quanh vị trí cân bằng thẳng đứng.

Bài 77. Khảo sát chuyển động của ô tô dạng mô hình phẳng như hình vẽ. Hòm ô tô có khối lượng m_0 trọng tâm C cách trục của 2 bánh xe các đoạn e_1, e_2 . Bánh sau chịu tác dụng ngẫu lực có mô men $M = M_0 - k\omega$, trong đó M_0, k là các hằng số đã cho, ω là vận tốc góc bánh sau.

Thùng xe chịu tác dụng lực cản $\vec{F} = -b\vec{v}$, b là hằng số đã cho, \vec{v} là vận tốc của thùng xe. Xem các bánh xe là các đĩa tròn đồng chất, mỗi bánh có khối lượng m , bán kính r và chuyển động lăn không trượt theo phương ngang. Bỏ qua ma sát lăn.

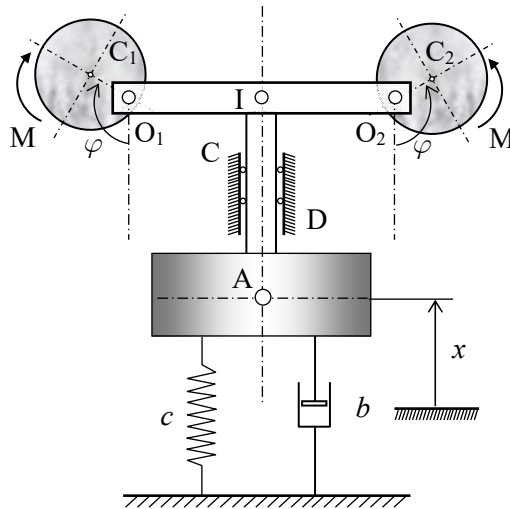


Hình bài 77

- 1) Tính gia tốc của thùng xe.
- 2) Tính vận tốc của xe khi xe chạy đều. Ban đầu xe đứng yên

Bài 78. Một máy đầm như hình vẽ. Thân của máy đầm có khối lượng m_0 . Hai quả nặng là những đĩa tròn đồng chất, khối lượng mỗi quả nặng bằng m , bán kính r , có độ lệch tâm $O_1C_1 = O_2C_2 = e$,

$O_1I = O_2I = a$, mômen quán tính đối với trục quay bằng J. Nền đầm được xem là đàn hồi tuyến tính có hệ số cứng c và có độ cản tuyến tính với lực cản $\vec{F}_c = -b\vec{v}$ trong đó hằng số b đã cho, \vec{v} là vận tốc của bàn đầm. Chọn các tọa độ suy rộng là x và φ , trong đó x xác định vị



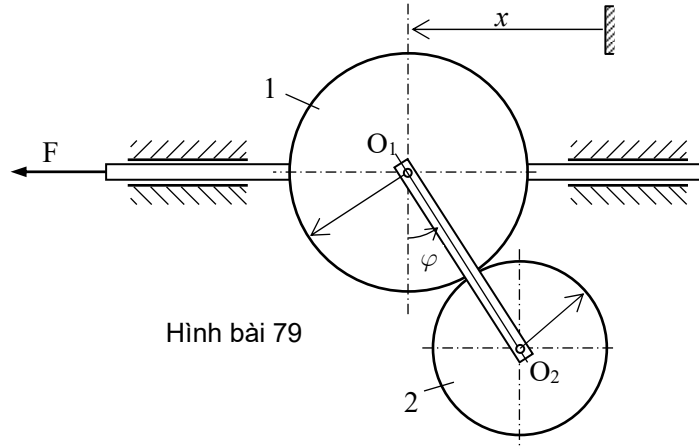
Hình bài 78

trí của bàn đầm được kể từ vị trí cân bằng tĩnh, φ là góc xác định vị trí của O_1C_1 và O_2C_2 so với phương đứng. Hai quả nặng quay ngược chiều dưới tác dụng các ngẫu lực $M = M_0 - k\omega$; $\omega = \dot{\varphi}$

Ban đầu hệ đứng yên, C_1 và C_2 nằm trên đường thẳng đứng qua O_1 và O_2 tương ứng ($\varphi(0) = 0$).

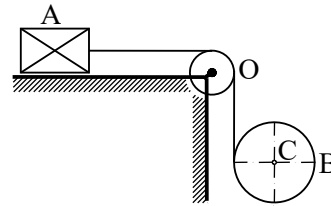
- 1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.
- 2) Xét trường hợp khi các quả nặng quay đều với vận tốc góc Ω , xác định chuyển động của bàn rung.

Bài 79. Thanh thẳng được gắn cứng với bánh răng 1 bán kính R chuyển động tịnh tiến ngang. Thanh và bánh răng 1 nằm trong mặt phẳng thẳng đứng và có khối lượng tổng cộng bằng m_1 . Bánh răng 2 có bán kính r , khối lượng m_2



Hình bài 79

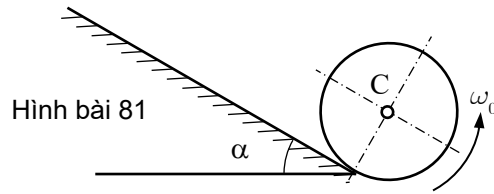
ăn khớp ngoài với bánh răng 1 và được liên kết với bánh răng 1 nhờ tay quay O_1O_2 . Tay quay không khối lượng nối tâm hai bánh răng và quay không ma sát quanh trục nằm ngang đi qua O_1 . Bánh răng 2 lăn không trượt trên bánh răng 1. Coi bánh răng 2 là đĩa tròn đồng chất. Thanh ngang chịu tác dụng của lực $F = F_0 \cos \Omega t$. Thiết lập phương trình chuyển động theo các tọa độ suy rộng x và φ . Tại thời điểm ban đầu $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$. Tìm phương trình dao động bé của tay quay.



Hình bài 80

Bài 80. Hình trụ đồng chất trọng lượng P_1 được quán bằng sợi dây mềm nhẹ không dẫn vắt qua ròng rọc O và buộc vào vật A trọng lượng P_2 . Vật A trượt trên mặt phẳng ngang không nhẵn có hệ số ma sát giữa nó với mặt ngang là f . Tìm gia tốc của vật A và gia tốc tâm C của hình trụ. Bỏ qua khối lượng của ròng rọc O .

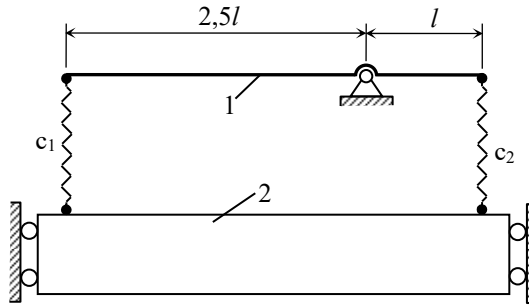
Bài 81. Trụ đặc đồng chất bán kính r đang quay với vận tốc góc ω_0 được đặt vào chân của mặt phẳng nghiêng với góc nghiêng α . Khối trụ bắt đầu lăn lên dốc. Giả thiết hệ số ma sát trượt giữa trụ và mặt nghiêng không đổi và bằng f , bỏ qua ma sát lăn. Xác định:



Hình bài 81

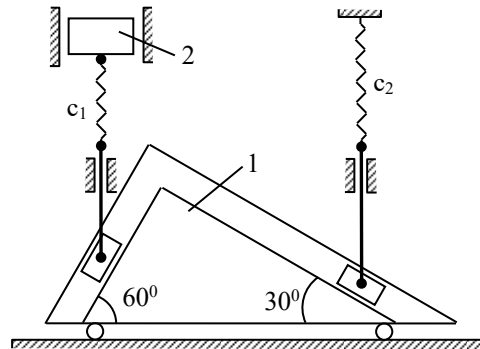
- Gia tốc a_1 của tâm trụ khi vừa lăn vừa trượt.
- Khoảng thời gian t_1 từ khi chuyển động đến khi trụ lăn không trượt.
- Độ cao h_1 tâm trụ đạt được trong thời gian t_1 này.
- Gia tốc a_2 của tâm trụ khi nó lăn không trượt.
- Tổng độ cao tâm trụ đạt được đến khi nó dừng lại.

Bài 82. Cho cơ hệ gồm thanh đồng chất 1 có khối lượng m_1 , kích thước cho trên hình vẽ, vật 2 có khối lượng m_2 , liên kết với nhau nhờ các lò xo c_1 và c_2 . Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



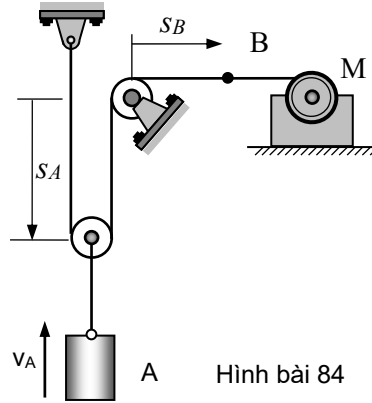
Hình bài 82

Bài 83. Cho Cơ hệ như hình vẽ, trong đó vật 1 có khối lượng m_1 , vật 2 có khối lượng m_2 , các con trượt có khối lượng không đáng kể. Hệ chịu các liên kết như hình vẽ. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



Hình bài 83

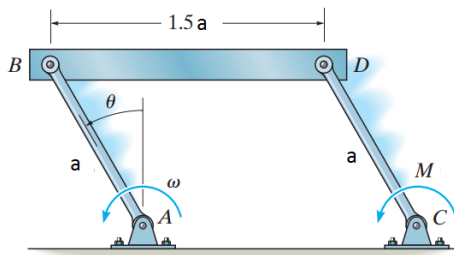
Bài 84. Vật nặng A có trọng lượng $W = 400 \text{ N}$ được nâng lên bằng động cơ M và hệ thống ròng rọc như hình vẽ. Nếu vận tốc của điểm B trên cáp tăng dần đều từ 0 đến 10 m/s trong thời gian $t = 5 \text{ s}$, hãy xác định lực căng trong cáp tại B tương ứng với chuyển động đó. Bỏ qua khối lượng của ròng rọc và dây.



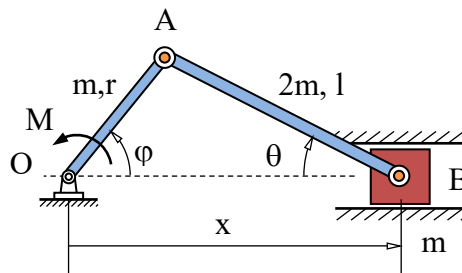
Hình bài 84

Bài 85. Cho cơ cấu bốn khâu chuyển động trong mặt đứng như hình vẽ. Thanh AB và CD có cùng chiều dài a , và cùng khối lượng m_1 . Thanh BD có chiều dài $1,5a$ và khối lượng m_2 . Khi góc $\theta = 0$, thanh AB đang đạt vận tốc góc ω_0 . Tại cùng thời điểm đó, có ngẫu lực $M = \text{const}$ tác động lên thanh CD.

- Tính vận tốc góc thanh AB khi $\theta = \pi/2$.
- Tính toán số câu a) với $m_1=6 \text{ kg}$, $m_2=20 \text{ kg}$, $\omega_0=2 \text{ rad/s}$, $a=1 \text{ m}$ và $M = 30 \text{ Nm}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.



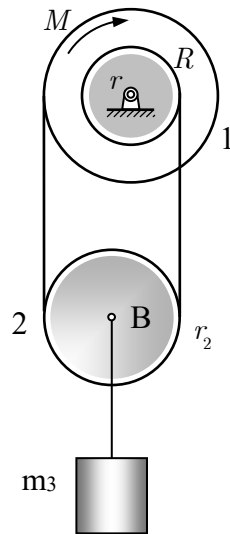
Hình bài 85



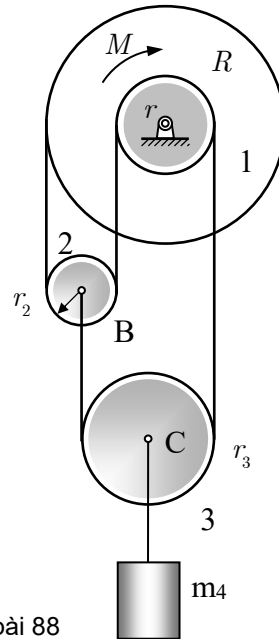
Hình bài 86

Bài 86. Cho cơ cấu tay quay con trượt chuyển động trong mặt phẳng đứng như hình vẽ. Tay quay OA và thanh truyền AB là những thanh đồng chất tiết diện không đổi, có khối lượng và chiều dài tương ứng là m, r và $2m, l$. Con trượt B có khối lượng m . Khi góc $\varphi = 0$, thanh OA đang đạt vận tốc góc $\dot{\varphi} = \omega_0 > 0$. Tại cùng thời điểm đó, có ngẫu lực $M = \text{const}$ tác động lên thanh OA. Hãy tính vận tốc góc thanh OA khi $\varphi = \pi/2$ và khi $\varphi = 3\pi/2$.

Bài 87. Hệ thống ròng rọc gồm 2 đĩa tròn 1 và 2 có khối lượng và mô men quán tính khối đối với trục qua tâm tương ứng là $m_k, J_k, k = 1, 2$. Đĩa 1 hai tầng có các bán kính lớn R và bán kính nhỏ r quay quanh trục ngang cố định. Đĩa 2 có bán kính là $r_2, (2r_2 = R + r)$. Một dây mềm không giãn vắt qua ròng rọc 2, có hai đầu cuốn vào đĩa 1. Biết rằng không xảy ra trượt giữa dây và các đĩa. Hãy xác định gia tốc góc đĩa 1, gia tốc tâm đĩa 2 khi có mô men M tác dụng lên đĩa 1. Hệ chuyển động từ trạng thái tĩnh.



Hình bài 87



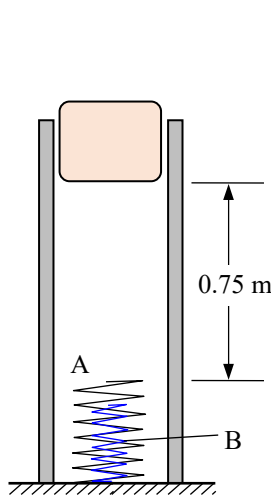
Hình bài 88

Bài 88. Hệ thống ròng rọc gồm 3 đĩa tròn 1, 2 và 3 có khối lượng và mô men quán tính khối đối với trục qua tâm tương ứng là $m_k, J_k, k = 1, 2, 3$. Đĩa 1 hai tầng có các bán kính lớn R và bán kính nhỏ r quay quanh trục ngang cố định. Các đĩa 2 và 3 có các bán kính tương ứng là r_2 và $r_3, (2r_3 + r_2 = R + r)$. Một dây mềm không giãn bắt đầu từ tâm đĩa 2 vắt qua ròng rọc 3, qua vòng trong đĩa 1, qua đĩa 2 sau đó cuốn vào vòng ngoài đĩa 1. Biết rằng không xảy ra trượt giữa dây và các đĩa. Hãy xác định gia tốc góc đĩa 1, gia tốc các tâm đĩa 2 và 3 khi có mô men M tác dụng lên đĩa 1. Hệ chuyển động từ trạng thái tĩnh.

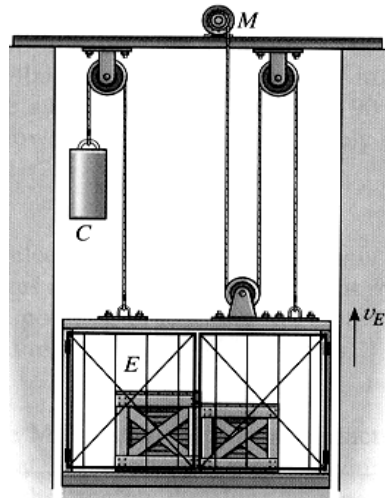
Bài 89. Vật nặng có khối lượng $m = 100 \text{ kg}$ được thả rơi tự do từ độ cao 0.75 m tính từ đỉnh lò xo A có độ cứng $k_A = 15 \text{ kN/m}$. Nếu lò xo B có độ cứng $k_B = 15 \text{ kN/m}$, đặt trong lòng lò xo A, hãy xác định độ nén lớn nhất của lò xo A. Chiều dài tự nhiên của các lò xo tương ứng là $l_A = 0.5 \text{ m}$, $l_B = 0.3 \text{ m}$. Bỏ qua khối lượng lò xo.

Lưu ý: có thể cả hai hoặc chỉ một lò xo chịu nén.

Bài 90. Mô hình thang máy như trên hình, cabin E và hàng hóa nó có tổng khối lượng 400 kg . Đối trọng C khối lượng 60 kg . Nếu động cơ có hiệu suất $\varepsilon = 0.6$, hãy xác định công suất phải cung cấp cho động cơ khi thang máy được nâng lên với tốc độ không đổi $v_E = 4 \text{ m/s}$.



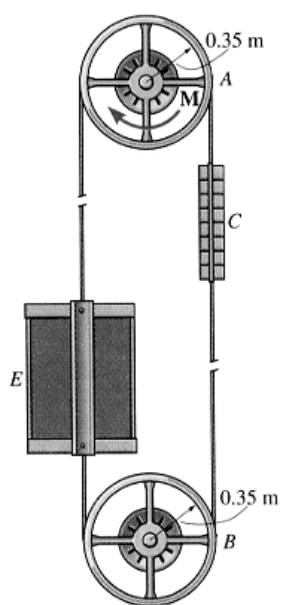
Hình bài 89



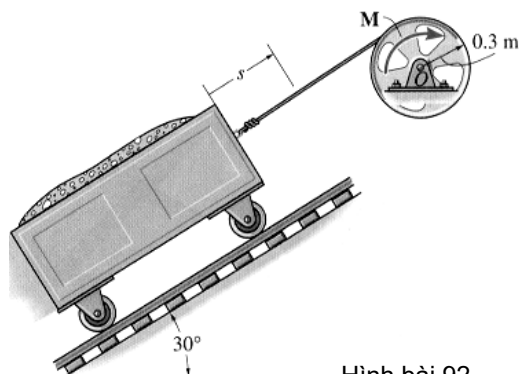
Hình bài 90

Bài 91. Cabin thang máy E có khối lượng $1,80 \text{ Mg}$ và đối trọng C có khối lượng $2,30 \text{ Mg}$. Một động cơ quay truyền lên puli A mô men $M = 0.06\theta^2 + 7.5 \text{ Nm}$, góc quay θ của puli A tính bằng radian. Xác định tốc độ của thang máy khi nó đã đi lên 12 m từ trạng thái tĩnh. Mỗi puli A và B có khối lượng 150 kg và bán kính quán tính $k = 0,2 \text{ m}$. Bỏ qua khối lượng của cáp và giả sử cáp không trượt trên các puli.

Bài 92. Puli có khối lượng 100 kg và bán kính quán tính $k_O = 0,2 \text{ m}$. Một động cơ cung cấp mô men xoắn $M = 40\theta + 900 \text{ Nm}$ lên puli, góc quay của puli θ tính bằng radian. Xác định tốc độ của xe, khối lượng 300 kg , sau khi nó đi được $s = 4 \text{ m}$. Ban đầu xe ở trạng thái nghỉ khi $s = 0$ và $\theta = 0$. Bỏ qua khối lượng của cáp và khối lượng của các bánh xe.

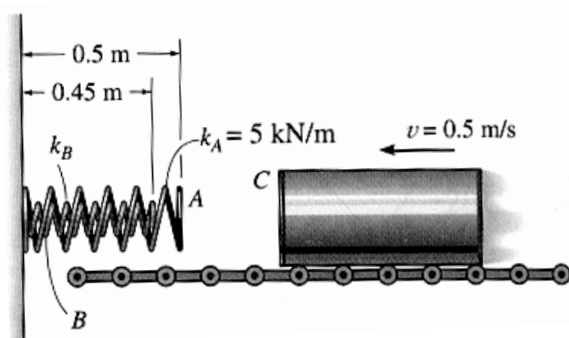


Hình bài 91



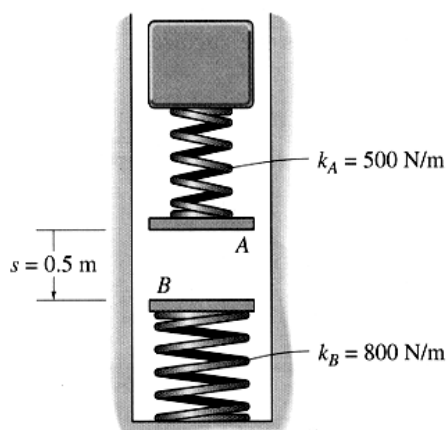
Hình bài 92

Bài 93. Khối thép có khối lượng 1800 kg di chuyển ngang theo băng tải với tốc độ $v = 0,5 \text{ m/s}$ khi va chạm với cụm hai lò xo lồng nhau. Nếu độ cứng của lò xo ngoài là $k_A = 5 \text{ kN/m}$, hãy xác định độ cứng k_B cần thiết của lò xo bên trong để chuyển động của khối thép dừng lại khi nó cách tường 0,3 m.

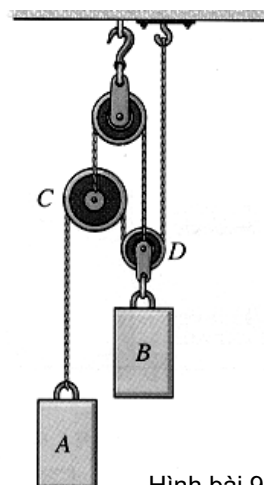


Hình bài 93

Bài 94. Vật nặng có khối lượng 20 kg và được thả không vận tốc đầu khi $s = 0,5 \text{ m}$. Nếu bỏ qua khối lượng các tấm đỡ A và B, hãy xác định biên dạng tối đa của mỗi lò xo do va chạm.



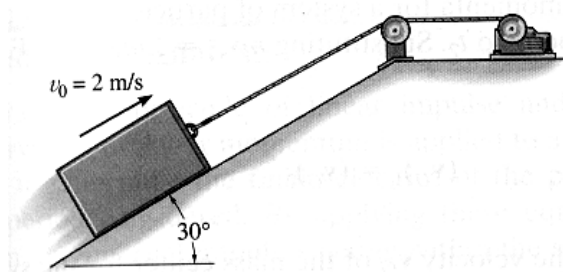
Hình bài 94



Hình bài 95

Bài 95. Vật A có khối lượng 3 kg và vật B có khối lượng 5 kg. Nếu hệ được thả chuyển động từ trạng thái tĩnh, hãy xác định vận tốc của mỗi vật sau khoảng thời gian $t = 4$ s. Bỏ qua khối lượng của ròng rọc và cáp.

Bài 96. Vật nặng 50 kg được kéo lên trên mặt nghiêng nhờ sử dụng cáp và động cơ. Hệ số ma sát động giữa vật và mặt nghiêng là $\mu_k = 0.4$. Nếu ban đầu vật có vận tốc $v_0 = 2$ m/s hướng lên, và tại thời điểm này ($t = 0$), động cơ tạo lực căng dây $T = 300 + 120\sqrt{t}$ N, trong đó t tính bằng giây, xác định vận tốc của vật khi $t = 2$ s.

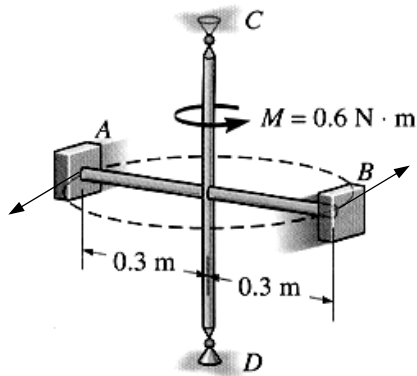


Hình bài 96

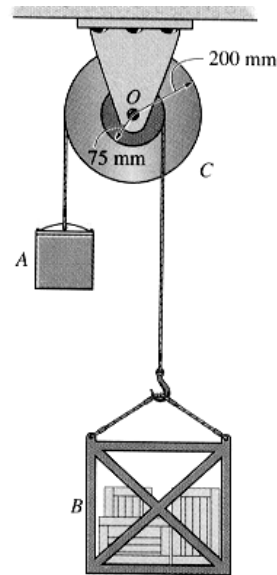
Bài 97. Hai vật A và B mỗi vật có khối lượng 400 g. Các khối được cố định vào các thanh ngang và vận tốc ban đầu của chúng là 2 m/s. Nếu ngẫu lực $M = 0,6$ Nm tác dụng lên trục CD của khung, hãy xác định tốc độ của các vật khi $t = 3$ s. Khối

lượng của khung không đáng kể và nó quay không ma sát. Bỏ qua kích thước của các vật.

Bài 98. Puli hai tầng có các bán kính như trên hình, khối lượng 15 kg và bán kính quán tính đối với trục quay $k_O = 110 \text{ mm}$. Nếu vật A có khối lượng 40 kg và thùng B cùng tải có khối lượng 85 kg, hãy xác định vận tốc của thùng B khi $t = 3 \text{ giây}$ sau khi thả hệ chuyển động từ trạng thái tĩnh.



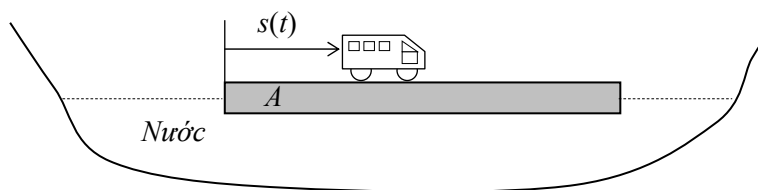
Hình bài 97



Hình bài 98

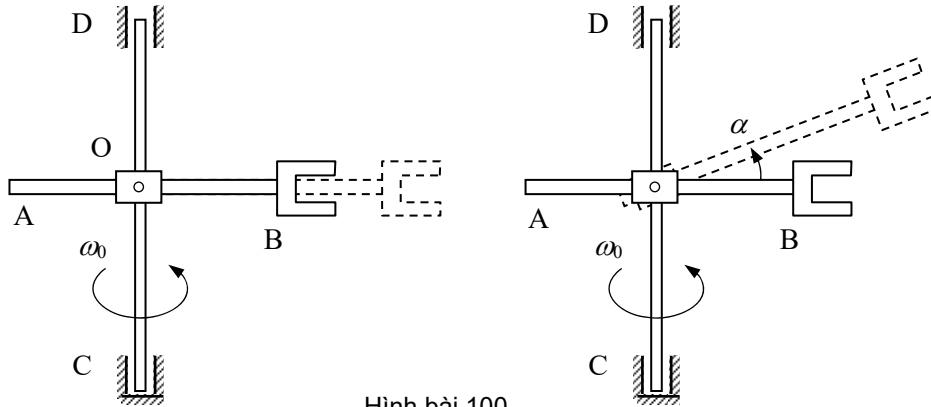
Bài 99. Trên một xà lan A khối lượng M có một ô tô khối lượng m chuyển động theo qui luật $s(t) = s_0 + b(\alpha t + e^{-\alpha t} - 1)$.

- 1) Bỏ qua lực cản của nước lên xà lan, hãy xác định vận tốc của xà lan $v_A(t)$.
- 2) Nếu xà lan được giữ cố định bằng một dây neo nằm ngang, hãy xác định lực căng dây neo.



Hình bài 99

Bài 100. Trục CD có mô men quán tính khối là J có thể quay không ma sát quanh trục thẳng đứng. Thanh đồng chất AB có chiều dài $4l$, khối lượng m , đầu B lắp bàn kẹp có khối lượng M (coi như chất điểm). Thời điểm ban đầu $AO = OB = 2l$, trục CD quay với vận tốc góc ω_0 . Hãy tìm: (a) vận tốc góc ω_1 của trục này khi bàn kẹp với ra được một đoạn là l ; (b) vận tốc góc ω_2 của trục này khi bàn kẹp với ra được một đoạn là l và AB nghiêng một góc α .



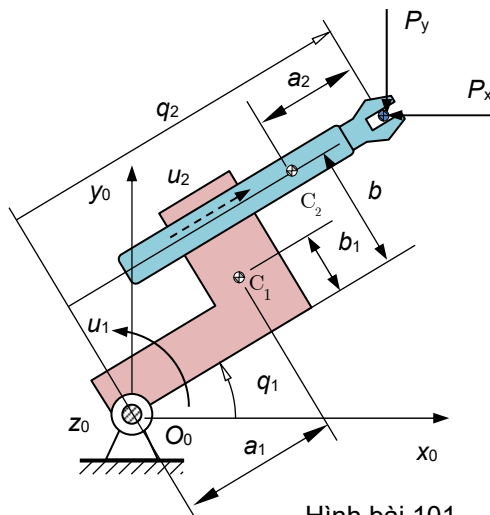
Hình bài 100

Bài 101. Cho mô hình robot phẳng hai khâu nằm trong mặt phẳng thẳng đứng như hình vẽ. Cho biết: khối lượng các khâu m_1, m_2 , mô men quán tính đối với trục vuông góc mặt phẳng hình vẽ đi qua các khối tâm C_1, C_2 tương ứng là I_1, I_2 . Các lực dẫn động: ngẫu lực u_1 tác dụng lên khâu 1 và lực u_2 do khâu 1 đẩy khâu 2. Các kích thước cho trên hình vẽ.

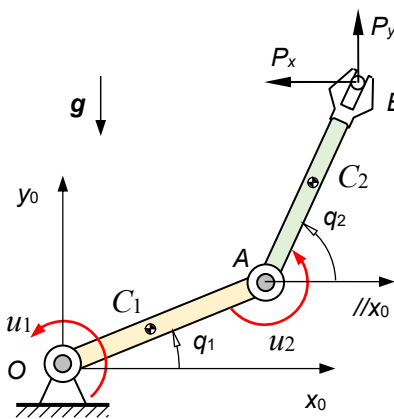
Áp dụng phương trình Lagrange loại 2, thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot.

Bài 102. Tay máy hai bậc tự do chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Khâu 1 chiều dài $OA = l_1$, khối tâm C_1 , $OC_1 = a_1$, khối lượng m_1 , mô men quán tính đối với trục qua khối tâm là J_1 . Khâu 2 chiều dài $AB = l_2$, khối tâm C_2 , $AC_2 = a_2$, khối lượng m_2 , mô men quán tính đối với trục qua khối tâm là J_2 . Động cơ 1 gắn liền với giá cố định tạo ra mô men u_1 tác dụng lên khâu 1, động cơ 2 gắn liền với khâu 1 tạo ra mô men u_2 tác dụng lên khâu 1. Điểm cuối B chịu lực như hình vẽ.

Áp dụng phương trình Lagrange loại 2, thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot.

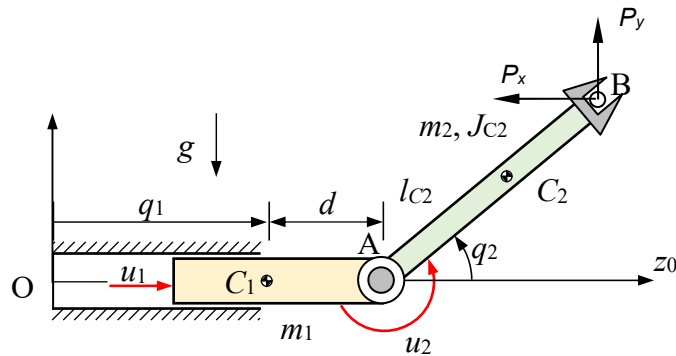


Hình bài 101



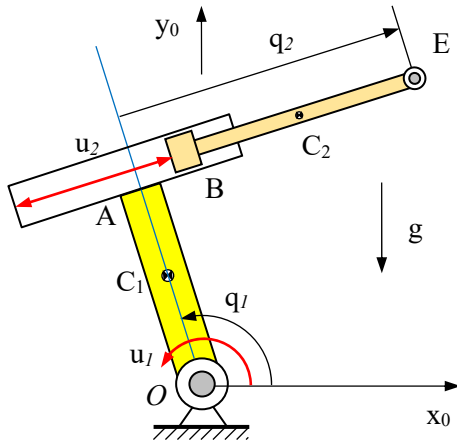
Hình bài 102

Bài 103. Mô hình cơ học của tay máy phẳng hai bậc tự do gồm khâu 1 tịnh tiến theo phương ngang, khâu hai nối với khâu 1 bằng khớp quay A – trục khớp nằm ngang, khoảng cách $C_1A = d$. Khâu 1 có khối lượng m_1 trượt không ma sát trên nền ngang dưới tác dụng của lực ngang u_1 . Khâu 2 có khối lượng m_2 , khối tâm C_2 , khoảng cách $AC_2 = l_{C2}$, mô men quán tính khối đối với trục ngang qua C_2 là J_{C2} . Tại khớp quay A có mô men (nội lực) u_2 tác dụng. Chọn tọa độ suy rộng cho tay máy là q_1, q_2 . Áp dụng phương trình Lagrange loại 2, thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot.

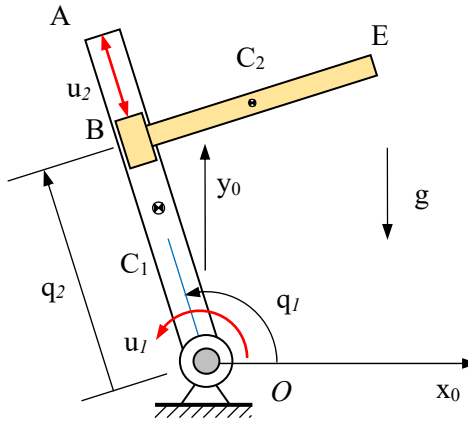


Hình bài 103

Bài 104. Cho cơ cấu robot phẳng dạng chuỗi hở chuyển động trong mặt phẳng đứng như trên hình vẽ. Coi các khâu là những thanh mảnh đồng chất khối lượng m_k , chiều dài l_k , mô men quán tính đối với khối tâm J_{Ck} , ($k = 1, 2$). Lực/ mô men dẫn động là u_1 và u_2 (u_2 là nội lực). Các tọa độ suy rộng (biến khớp) được chỉ ra như trên hình. Áp dụng phương trình Lagrange loại 2, thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot.



Hình bài 104

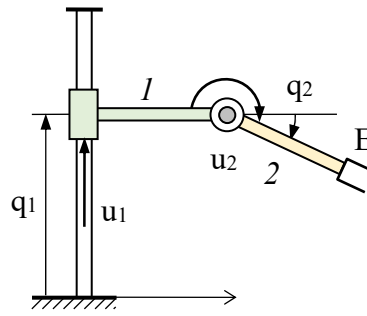


Hình bài 105

Bài 105. Cho cơ cấu robot phẳng dạng chuỗi hở chuyển động trong mặt phẳng đứng như trên hình vẽ. Coi các khâu là những thanh mảnh đồng chất khối lượng m_k , chiều dài l_k , mô men quán tính đối với khối tâm J_{Ck} , ($k = 1, 2$). Lực/ mô men dẫn động là u_1 và u_2 (u_2 là nội lực). Các tọa độ suy rộng (biến khớp) được chỉ ra như trên hình. Áp dụng phương trình Lagrange loại 2, thiết lập phương trình vi phân chuyển động của robot.

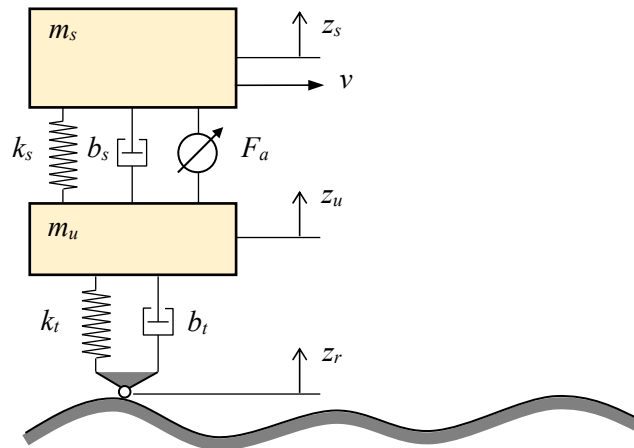
Bài 106. Mô hình tay máy phẳng 2 bậc tự do chuyển động trong mặt phẳng đứng được cho như trên hình vẽ. Các khâu 1 và 2 được coi là thanh đồng chất có khối lượng và chiều dài tương ứng là m_1, l_1 , và m_2, l_2 . Lực/mô men dẫn động tại các khớp là u_1 và u_2 .

- Xác định biểu thức động năng, thế năng hệ, và lực suy rộng.
- Sử dụng phương trình Lagrange 2 thiết lập PTVP CĐ cho hệ.



Hình bài 106

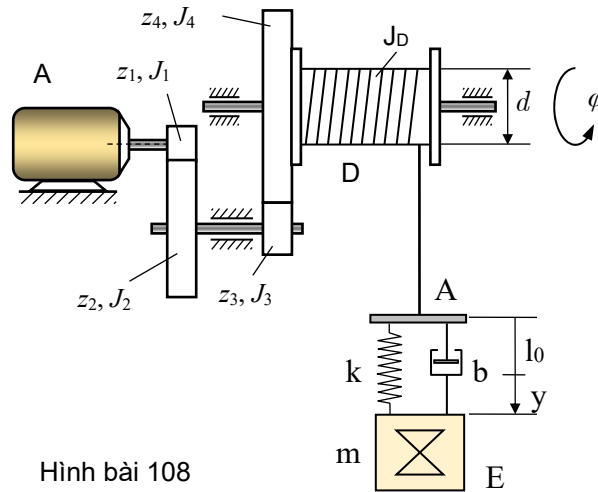
Bài 107. Mô hình $\frac{1}{4}$ xe khi xét dao động theo phương đứng của ô tô như trên hình. Các thông số của hệ gồm khối lượng, độ cứng lò xo, cản nhớt được cho trên hình. Hệ ở vị trí cân bằng tĩnh khi $z_r = z_u = z_s = 0$. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ theo hai tọa độ suy rộng z_u và z_s . Biết rằng xe chuyển động ngang với vận tốc không đổi, nhấp nhô mặt đường hình sin, $z_r = u_0 \sin(2\pi x / L)$. L là bước sóng của nhấp nhô mặt đường. Một động cơ tạo lực F_a tác động qua lại giữa m_u và m_s .



Hình bài 107

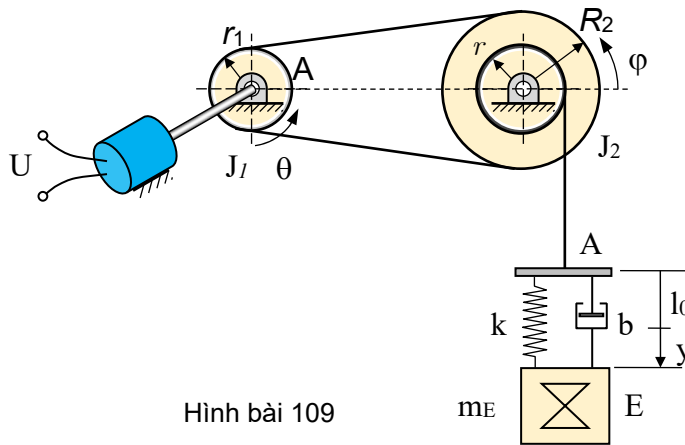
Bài 108. Mô hình hệ thống nâng dẫn động bằng động cơ với các thông số như trên hình vẽ. Khối lượng dây cáp không đáng kể. Rô to của động cơ có mô men quán tính khối J_m và chịu tác dụng của mô men M . Biết: l_0 – chiều dài tự nhiên của lò xo.

Số răng, mô men quán tính khối, và khối lượng các vật được cho trên hình. Chọn tọa độ suy rộng đủ cho hệ là (φ, y) , φ là góc quay của tang cuốn cáp. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ.



Hình bài 108

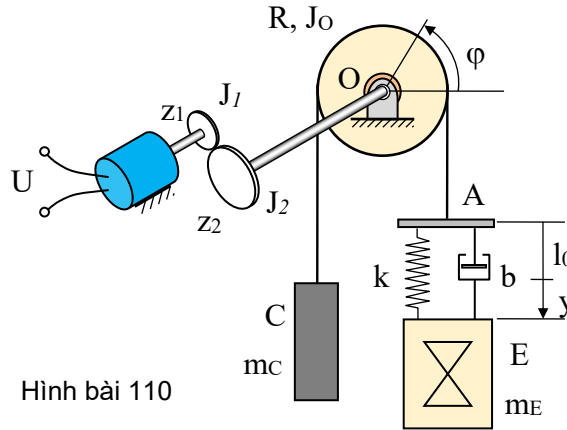
Bài 109. Mô hình hệ thống nâng dẫn động bằng động cơ điện với các thông số như trên hình vẽ. Bỏ qua ma sát, dây cáp không khối lượng và không giãn. Chiều dài tự nhiên của lò xo là l_0 . Rô to của động cơ có mô men quán tính khối J_m và chịu tác dụng của mô men M . Chọn tọa độ suy rộng cho hệ là (φ, y) . Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ.



Hình bài 109

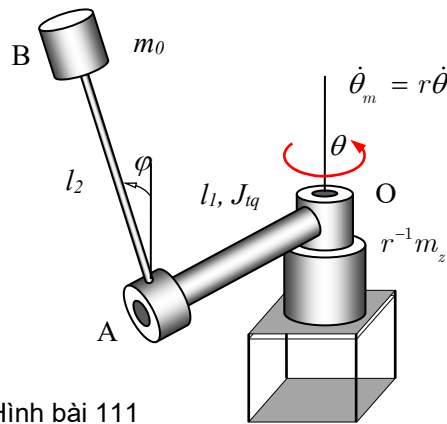
Bài 110. Mô hình thang máy dẫn động bằng động cơ điện với các thông số như trên hình vẽ. Bỏ qua ma sát, cáp không khối lượng và không trượt trên puli. Rô to

của động cơ có mô men quán tính khối J_m và chịu tác dụng của mô men M . Chiều dài tự nhiên của lò xo là l_0 . Số răng, mô men quán tính khối, và khối lượng các vật được cho trên hình. Chọn tọa độ suy rộng cho hệ là (φ, y) . Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ.



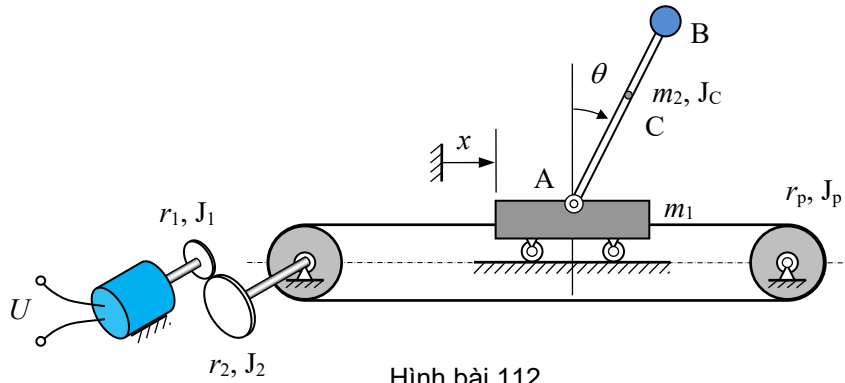
Hình bài 110

Bài 111. Con lắc ngược quay gồm tay quay OA quay quanh trục đứng (góc quay θ) – được dẫn động bằng động cơ thông qua bộ truyền giảm tốc bánh răng. Rô to của động cơ có mô men quán tính khối J_m và chịu tác dụng của mô men M . Bộ truyền có tỷ số truyền là $r > 1$, $r = \dot{\theta}_m / \dot{\theta} > 1$, khối lượng không đáng kể. Tay quay có chiều dài $OA = l_1$ và có mô men quán tính khối đối với trục quay z là J_{tq} . Phần con lắc AB coi như thanh mảnh không khối lượng chiều dài l_2 đầu B có gắn khối lượng m_0 coi như chất điểm. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ với các tọa độ suy rộng: θ, φ .



Hình bài 111

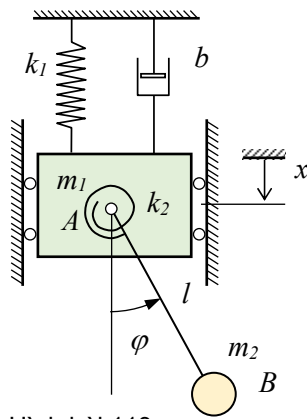
Bài 112. Mô hình thí nghiệm ổn định hóa con lắc ngược cho trên hình vẽ. Hệ gồm động cơ điện, hộp giảm tốc, bộ truyền đai, xe chạy và con lắc. Rô to động cơ có mô men quán tính khối là J_m và chịu tác dụng của mô men M . Hộp giảm tốc một cấp với tỷ số truyền $r = r_2 / r_1$, mô men quán tính các bánh răng tương ứng là J_1, J_2 . Bộ truyền đai gồm hai bánh đai như nhau (mỗi bánh đai được coi như đĩa đồng chất có khối lượng và bán kính là m_p, r_p), dây đai có khối lượng tổng cộng là m_d (coi như không giãn, không trượt đối với bánh đai). Xe chạy A có khối lượng m_1 , và con lắc có khối lượng m_2 , khối tâm tại C, $l_2 = AC$, mô men quán tính khối đối với trục qua C là J_C . Bỏ qua ma sát. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ với các tọa độ suy rộng: x, θ .



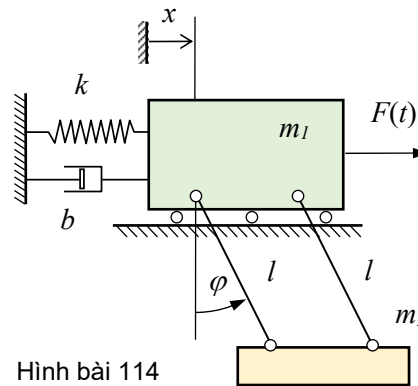
Hình bài 112

Bài 113. Hệ hai khối lượng chuyển động trong mặt đứng như trên hình. Vật 1 trượt trong rãnh đứng, thanh AB không khối lượng chiều dài l , nối bản lề trơn nhẵn với vật 1. Vật 2 coi như chất điểm. Bỏ qua ma sát. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ với các tọa độ suy rộng: x, φ . Biết rằng hệ ở trạng thái cân bằng tĩnh khi $x = 0, \varphi = 0$.

Bài 114. Hệ hai khối lượng chuyển động trong mặt đứng như trên hình. Vật 1 trượt trên đường ngang, các thanh treo vật 2 không khối lượng cùng chiều dài l , nối bản lề trơn nhẵn với hai vật tạo thành hình bình hành. Bỏ qua ma sát. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ với các tọa độ suy rộng: x, φ . Biết rằng hệ ở trạng thái cân bằng tĩnh khi $x = 0, \varphi = 0$.

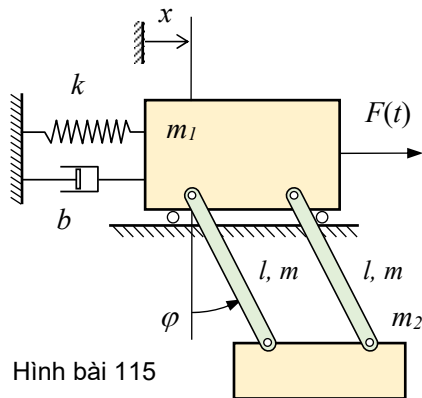


Hình bài 113



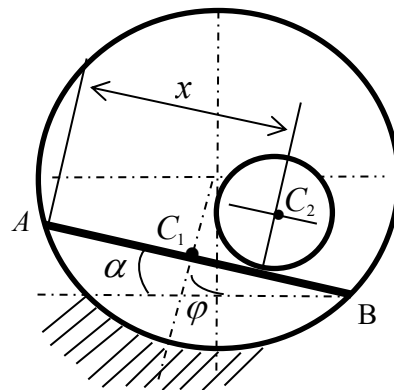
Hình bài 114

Bài 115. Hệ chuyển động trong mặt đứng như trên hình. Vật 1 trượt trên đường ngang, các thanh treo vật 2 có cùng khối lượng m và cùng chiều dài l , nối bản lề trơn nhẵn với hai vật tạo thành hình bình hành. Bỏ qua ma sát. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ với các tọa độ suy rộng: x, φ . Biết rằng hệ ở trạng thái cân bằng tĩnh khi $x = 0, \varphi = 0$.



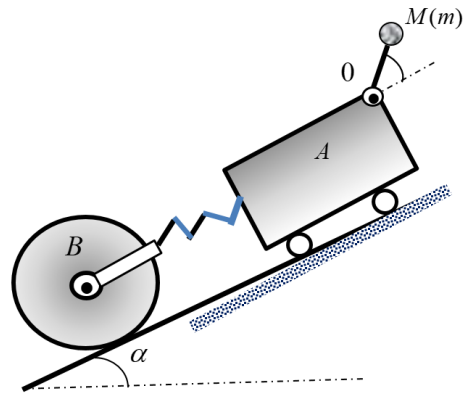
Hình bài 115

Bài 116. Con lăn C là một đĩa đồng chất có khối lượng m_2 , bán kính r , lăn không trượt trên thanh AB, có hai điểm cuối trượt không ma sát bên trong vành tròn bán kính R . Thanh AB đồng chất, có chiều dài L , khối lượng m_1 . Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



Bài 117. Cơ hệ gồm vật A có khối lượng m_1 , kéo một đĩa tròn B, bán kính r , đồng chất, khối lượng m . Giữa hai vật A và B liên kết bằng lò xo tuyến tính có khối lượng m_2 . Cơ hệ được chuyển động của quả văng có khối lượng m , với độ lệch tâm e , quay đều với vận tốc.

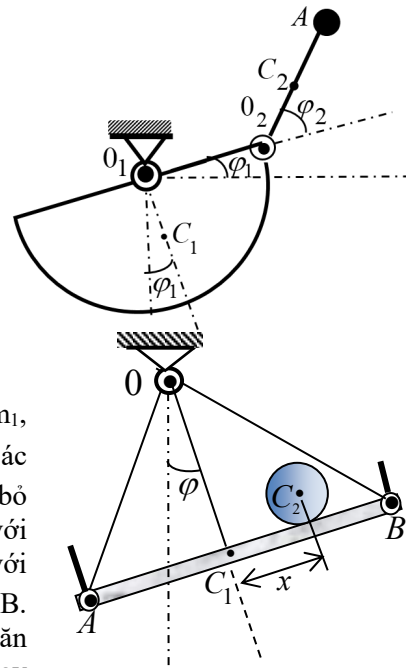
Tính biểu thức động năng của cơ hệ và các lực suy rộng qua các tọa độ suy rộng là tọa độ khối tâm của hai vật A và B. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ?



Bài 118. Cho cơ hệ gồm nửa đĩa tròn, bán kính R , khối lượng m_1 , liên kết với thanh đồng chất O_2A , có chiều dài l , khối lượng m_2 , điểm cuối thanh có gắn khối lượng m (được xem là chất điểm). Đĩa chịu tác dụng mô men cản

$$M_c = -b\dot{\varphi}_1$$

Viết phương trình chuyển động của cơ hệ.



Bài 119. Thanh AB đồng chất, có khối lượng m_1 , chiều dài $L=l\sqrt{2}$, trong đó l là chiều dài của các thanh $OA=OB$, là những thanh mảnh, cứng và bỏ qua khối lượng, chuyển động quanh trục O với góc φ là góc giữa đường vuông góc OC_1 với đường thẳng đứng, C_1 là khối tâm của thanh AB. Đĩa tròn bán kính r , đồng chất, khối lượng m_2 lăn không trượt trên thanh AB. Tấm OAB quay

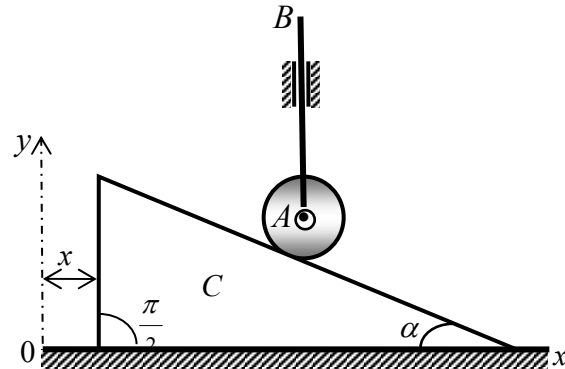
không ma sát quanh trục O dưới tác dụng của ngẫu lực $M = M_0 - b\dot{\varphi}$; M_0, b là những hằng số. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ

Bài 120. Lăng kính C di chuyển theo phương ngang đẩy thanh AB di chuyển theo phương đứng nhờ con lăn có bán kính r lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng của lăng kính. Cho biết khối lượng của lăng kính C, con lăn A và thanh AB tương

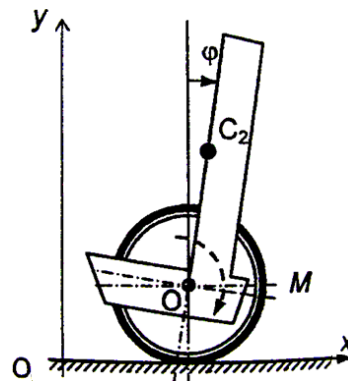
ứng bằng m_1, m_2, m_3 . Lăng kính chịu tác dụng lực \vec{F}_1 theo phương ngang, thanh AB chịu tác dụng lực \vec{F}_2 theo phương đứng hướng xuống

Tính biểu thức động năng và lực suy rộng theo tọa độ suy rộng x và vận tốc \dot{x}

Viết phương trình chuyển động của lăng kính C và xác định phản lực giữa con lăn và lăng kính C



Bài 121. Mô hình xe tự thăng bằng bằng hai bánh chạy trên đường thẳng như hình vẽ. Mỗi bánh xe có khối lượng m_1 , moment quán tính đối với trục quay là được coi là J_1 bán kính là R . Thân xe có khối lượng m_2 , khối tâm C_2 với $OC_2 = l$. Moment quán tính của thân xe đối với tâm C_2 là J_2 . Thân xe được nối với bánh bằng bảng lề trụ O. Moment cản tại ổ trục O tỉ lệ tốc độ góc tương đối giữa thân và bánh xe $M_c = b\omega_r$. Xe



chuyển động nhờ động cơ điện tạo ra mômen $M_{dc} = M_0 e^{a\varphi}$ lên trục hai bánh xe. Biết bánh xe lăn không trượt. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ theo hai tọa độ suy rộng (x, φ) . Xác định góc lệch thân xe để xe chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 . Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho hệ khi tính đến cản lăn của mặt đường $M_{cl} = k\omega_{bx}$

B. Lời giải

Bài 2.

Cơ hệ khảo sát là con lăn gắn chặt vào tang.

Hệ lực tác dụng lên cơ hệ gồm:

$$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}, \vec{F}_C, \vec{M}_C$$

Lập hệ qui chiếu như hình vẽ. Phương trình vi phân chuyển động của con lăn là:

$$m\ddot{x}_C = F_C - Q \sin \alpha - P \sin \alpha \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = N - Q \cos \alpha - P \cos \alpha \quad (2)$$

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = PR - F_C r - M_C \quad (3)$$

$$y_C = r = \text{const}, \text{ suy ra } \ddot{y}_C = 0$$

$$\text{Từ (2) ta có } N = (P + Q) \cos \alpha = 3P \cos \alpha \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) ta có } m\ddot{x}_C = F_C - 3P \sin \alpha \quad (5)$$

$$\text{Từ (3) ta có } mr\ddot{\varphi} = P - \frac{1}{2}F_C - \frac{M_C}{R} \quad (6)$$

Điều kiện lăn không trượt $F_C \leq fN$, $\dot{x}_C = r\dot{\varphi}$ do đó $\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi}$. $M_C = kN$.

$$\text{Từ (4) ta có } M_C = 3kP \cos \alpha. \quad (7)$$

Thay (7) vào (6) ta được

$$mr\ddot{\varphi} = P - \frac{1}{2}F_C - \frac{3kP \cos \alpha}{R}. \quad (8)$$

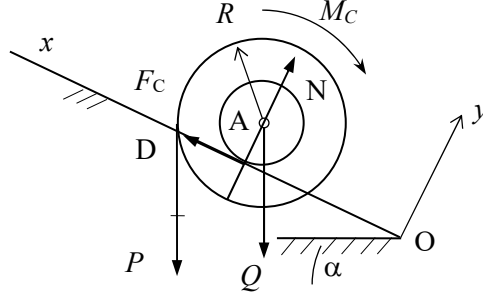
$$\text{Từ (5) và (8) rút ra } F_C = 2P\left(\frac{1}{3} + \sin \alpha - \frac{k \cos \alpha}{R}\right) \quad (9)$$

$$\text{Từ (4) ta có } fN = 2P \cos \alpha \quad (10)$$

So sánh điều kiện lăn không trượt, từ (9) và (10) ta có

$$2P\left(\frac{1}{3} + \sin \alpha - \frac{k \cos \alpha}{R}\right) \leq 2P \cos \alpha$$

$$\text{hay } \left(1 + \frac{k}{R}\right) \cos \alpha - \sin \alpha \geq \frac{1}{3} \quad (11)$$



Đặt $\tan \theta = 1 + \frac{k}{R}$, suy ra $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \theta}} = \frac{R}{\sqrt{(R + k)^2 + R^2}}$

Thay vào (11) ta được $\tan \theta \cos \alpha - \sin \alpha \geq \frac{1}{3}$

hay $\sin(\theta - \alpha) \geq \frac{1}{3} \cos \theta = \frac{1}{3} \frac{R}{\sqrt{(R + k)^2 + R^2}}$

Từ đó suy ra $0 < \alpha \leq \theta - \arcsin\left(\frac{1}{3} \frac{R}{\sqrt{(R + k)^2 + R^2}}\right)$

Bài 3.

Ôtô chuyển động chậm dần đều với gia tốc a .

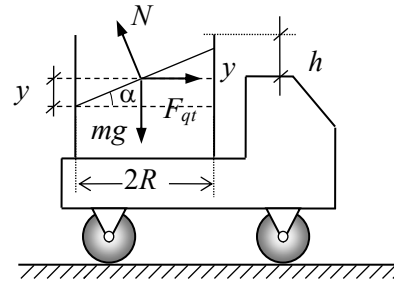
Khi đó $x = -\frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0$

vận tốc $v = at + v_0$

Khi xe dừng hẳn lại thì vận tốc $v = 0$

ta có $s = x - x_0$

Từ đó ta có $s = \frac{v_0^2}{2a}$ suy ra $a = \frac{v_0^2}{2s}$



a) Khi nước không tràn ta luôn có $\tan \alpha = \frac{2y}{2R} = \frac{y}{R}$ (1)

Mặt khác xét cân bằng của mặt thoáng ta có :

$$F_{qt} \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0 \text{ do đó } \tan \alpha = \frac{F_{qt}}{mg}$$

trong đó $F_{qt} = -m\ddot{x} = ma = \frac{mv_0^2}{2s}$ do đó $\tan \alpha = \frac{v_0^2}{2gs}$ (2)

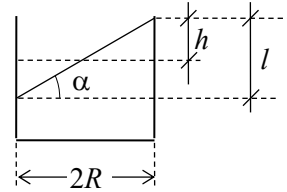
Thay (2) vào (1) ta có $y = \frac{Rv_0^2}{2gs}$

Điều kiện nước còn chưa tràn là $y \leq h$ do đó $s \geq \frac{Rv_0^2}{2gh}$

Vậy $s_{\min} = \frac{Rv_0^2}{2gh}$.

b) Khi đã biết $s = s_0 < s_{\min}$ từ (2) ta cũng có

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{2gs_0} = \frac{l}{2R} \text{ từ đó } l = \frac{Rv_0^2}{gs_0}$$



Giả sử trụ có độ cao H, thể tích nước lúc ban đầu và sau khi phanh là $\pi R^2(H - h)$

và $\pi R^2(H - l) + \pi R^2 l$.

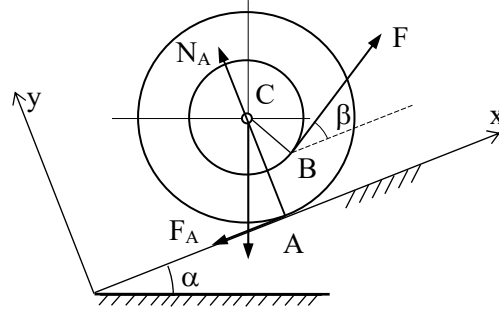
Thể tích nước bị tràn ra là

$$V = \frac{\pi R^2}{2} \left(\frac{Rv_0^2}{gs_0} - 2h \right).$$

Bài 4.

1) Tính gia tốc và vận tốc khối tâm C.

Giả sử con lăn có chiều quay như hình vẽ, tức là khối tâm C chuyển động lên theo hướng Ox, ta có



$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = F \cos \beta - P \sin \alpha - F_A \\ m\ddot{y}_c = N_A + F \sin \beta - P \cos \alpha \\ J_C \ddot{\varphi} = RF_A - rF \end{cases}$$

trong đó

$$J_C = m\rho^2; P = mg; \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{R}.$$

Thay các đại lượng này vào hệ phương trình trên ta nhận được

$$m\ddot{x}_c = F \cos \beta - P \sin \alpha - F_A,$$

$$0 = N_A + F \sin \beta - P \cos \alpha,$$

$$m\rho^2 \frac{\ddot{x}}{R} = RF_A - rF.$$

Dễ dàng nhận được

$$m\ddot{x}_c \left(\frac{R^2 + \rho^2}{R} \right) = RF \cos \beta - RP \sin \alpha - rF,$$

$$a_C = \ddot{x}_C = \frac{[F(\cos \beta - \frac{r}{R}) - mg \sin \alpha]}{m(R^2 + \rho^2)} R^2, \quad (1)$$

$$v_C = \dot{x}_C = \frac{[F(\cos \beta - \frac{r}{R}) - mg \sin \alpha]}{m(R^2 + \rho^2)} R^2 t. \quad (2)$$

2) Khảo sát chuyển động của khối tâm C theo thông số β .

Vì con lăn chuyển động từ trạng thái tĩnh nên để con lăn hay khối tâm C chuyển động lên thì $a_c > 0$, ta có điều kiện sau:

$$\cos \beta > \frac{r}{FR} + \frac{mg \sin \alpha}{F}. \quad (3)$$

Ngược lại để khối tâm C chuyển động xuống thì

$$\cos \beta < \frac{r}{FR} + \frac{mg \sin \alpha}{F}. \quad (4)$$

Khi đó vận tốc và gia tốc khối tâm C vẫn được xác định bằng các biểu thức trên, nhưng có dấu ngược lại.

Và khi

$$\cos \beta = \frac{r}{FR} + \frac{mg \sin \alpha}{F} \quad (5)$$

thì khối tâm C đứng yên, $x_C = \text{const}$.

3) Tính phản lực tại A

Để dàng nhận được

$$N_A = P \cos \alpha - F \cos \beta.$$

Để cho liên kết giữ thì $\cos \beta \leq \frac{P \cos \alpha}{F}$, $P = mg$.

Trường hợp khối tâm C chuyển động lên lực ma sát trượt F_A tại A hướng xuống và được xác định như sau:

$$m\ddot{x}_C = F \cos \beta - P \sin \alpha - F_A, \quad m\ddot{x}_C = \frac{R(RF_A - rF)}{\rho^2},$$

$$F \cos \beta - P \sin \alpha - F_A = \frac{R(RF_A - rF)}{\rho^2}$$

$$F_A = \frac{[\rho^2(F \cos \beta - P \sin \alpha) + RrF]}{R^2 + \rho^2}. \quad (7)$$

Trường hợp khối tâm C chuyển động xuống lực ma sát trượt F_A tại A hướng lên và được xác định:

$$F_A = -\frac{[\rho^2(F \cos \beta - P \sin \alpha) + RrF]}{R^2 + \rho^2} \quad (8)$$

Khi khối tâm C đứng yên thì $F_A = \frac{rF}{R}$ phản ánh xu thế chuyển động lên của khối tâm C. Kết quả này có thể suy ra từ các biểu thức xác định F_A ở trên khi

$$\cos \beta = \frac{r}{FR} + \frac{mg \sin \alpha}{F}.$$

Hoặc có thể suy ra từ phương trình

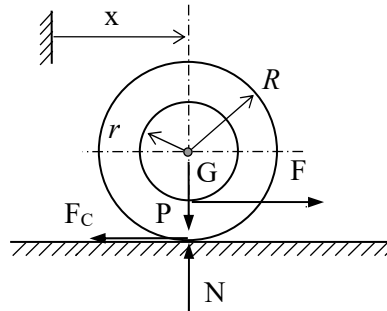
$$J_C \ddot{\varphi} = rF + R\bar{F}_A = 0. \quad \text{Do đó } \bar{F}_A = -\frac{rF}{R} \quad (10)$$

\bar{F}_A có chiều hướng xuống dưới phản ánh xu thế quay thuận kim đồng hồ của con lăn quanh tâm vận tốc tức thời, hoặc quanh khối tâm C của nó.

Bài 6.

1) Xét bánh xe lăn có trượt không ?

Phương trình vi phân chuyển động của bánh xe là



$$\begin{aligned} \frac{P}{g} \ddot{x} &= F - F_c & (1) \\ \frac{P}{g} \ddot{y} &= N - P & (2) \\ J \ddot{\varphi} &= RF_c - rF & (3) \end{aligned}$$

Từ (2) ta có $N = P$

$$\text{Do đó } F_{c\max}^t = f_t N = 12N \quad (a)$$

Giả thiết bánh xe lăn không trượt thì $\ddot{x} = R\ddot{\varphi}$ và $F_c = F_c^t$.

Từ (1) và (3) ta có:

$$(P/g)\ddot{x} = F - F_C^t \quad (4)$$

$$\frac{J}{R}\ddot{x} = RF_C^t - rF, \text{ với } J = \frac{P}{g}\rho^2.$$

Giải hệ phương trình này ta có

$$F_C^t = \frac{1 + Rr/\rho^2}{1 + R^2/\rho^2} F = 15,2N. \quad (b)$$

So sánh (a) và (b) ta có $F_C^t > F_{C_{\max}}^t$ suy ra bánh xe lăn có trượt.

1) Xác định gia tốc tâm G của bánh xe và gia tốc góc của nó.

Khi xe lăn có trượt thì $F_{C_{\max}}^d = f_d N = 9N$.

Phương trình vi phân chuyển động của bánh xe có dạng:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = F - F_C^d; \quad \frac{P}{g}\rho^2\ddot{\varphi} = RF_C^d - rF.$$

Hay $\ddot{x} = \frac{F - F_C^d}{P}g = \frac{11}{60}(m/s^2);$

$$\ddot{\varphi} = \frac{RF_C^d - rF}{P\rho^2}g = -\frac{175}{27}(s^{-2}).$$

Vậy gia tốc tâm G của bánh xe có trị số $a_G = \ddot{x} = \frac{11}{60}(m/s^2)$ và có hướng từ trái sang phải.

Gia tốc góc của bánh xe có trị số $\varepsilon = |\ddot{\varphi}| = \frac{175}{27}(s^{-2})$; và có chiều ngược chiều dương của φ .

Bài 7.

1) Xác định vận tốc tới hạn

áp dụng định lý biến thiên động năng.

- Động năng của hệ $T = T_{xe} + 4T_{bx}$.

$$T_{xe} = \frac{Q}{2g}v^2, \quad T_{bx} = J_c \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

với $J_c = \frac{P}{g} \rho^2, \quad \dot{\varphi} = \frac{v}{R} \Rightarrow T_{bx} = \frac{P \rho^2}{g R^2} \frac{v^2}{2};$

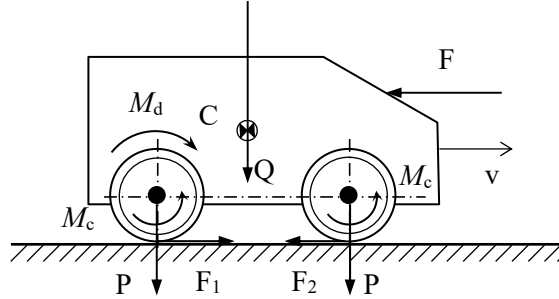
Vậy $T = \frac{1}{g} \left(Q + \frac{4P \rho^2}{R^2} \right) \frac{v^2}{2}. \quad (1)$

trong đó v là vận tốc của xe.

Lưu ý rằng động năng khối tâm của 4 bánh xe đã được đưa vào động năng của xe, xe khởi động từ trạng thái tĩnh nên $T_0 = 0$.

- Công của các lực tác dụng lên cơ hệ

+ Công của ngoại lực
 $dA^e = -\mu v^2 dx.$



+ Công của nội lực $dA^i = M_d d\varphi - 4M_c d\varphi; \quad d\varphi = \frac{dx}{R}.$

$$dA = dA^e + dA^i = \left(\frac{M_d - 4M_c}{R} - \mu v^2 \right) dx. \quad (2)$$

Sử dụng định lý biến thiên động năng dưới dạng vi phân, ta có $dT = dA$.

Từ đó $\frac{1}{g} \left(Q + \frac{4P \rho^2}{R^2} \right) v dv = \left(\frac{M_d - 4M_c}{R} - \mu v^2 \right) dx.$

$$a = \frac{\frac{M_d - 4M_c}{R} - \mu v^2}{Q + \frac{4P \rho^2}{R^2}} g \quad (3)$$

Khi xe chuyển động bình ổn tức là chuyển động đều (gia tốc $a = 0$) vận tốc xe đạt đến trị số lớn nhất được xác định từ biểu thức sau:

$$v^2 = v_{\max}^2 = \frac{M_d - 4M_c}{\mu R}. \quad (4)$$

Chú ý rằng kết quả trên có thể suy ra từ (2) khi cho $dA = 0$.

2) Khảo sát lực ma sát trượt.

a) Tính lực ma sát trượt của bánh xe phát động (bánh sau).

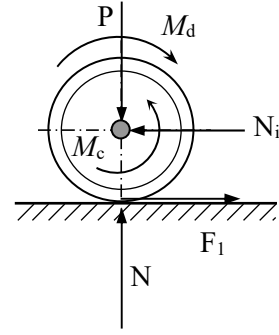
Để tính lực ma sát trượt, ta tưởng tượng tách bánh xe sau, được mô hình như hình vẽ. N_i là nội lực của xe tác dụng lên bánh xe tại khối tâm bánh xe, nên ta có

$$\frac{2P}{g} \rho^2 \ddot{\varphi} = M_d - 2M_c - 2RF_1 \quad (5)$$

Vì bánh xe lăn không trượt, nên ta có $\ddot{\varphi} = \frac{a}{R}$,

trong đó a là gia tốc khối tâm C, suy ra

$$\begin{aligned} \frac{2P\rho^2}{g} \frac{a}{R} &= M_d - 2M_c - 2RF_1 \\ F_1 &= \frac{M_d}{2R} - \frac{M_c}{R} - \frac{P\rho^2 a}{gR^2}. \end{aligned} \quad (6)$$



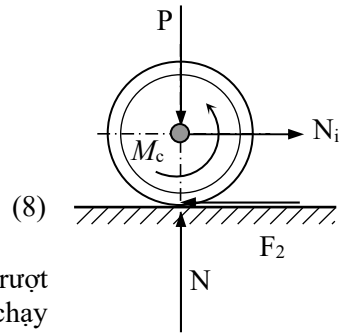
Từ biểu thức (6) dễ dàng thấy rằng, khi mở máy từ trạng thái tĩnh gia tốc a lớn, do đó lực ma sát của bánh sau F_1 nhỏ, rồi tăng dần cho đến khi xe chuyển động bình ổn $a=0$, lực ma sát có giá trị cực đại

$$F_1 = F_{\max} = \frac{M_d}{2R} - \frac{M_c}{R} \quad (7)$$

b) Tính lực ma sát trượt của bánh xe bị dẫn (bánh trước).

Cũng tưởng tượng tách bánh trước để xét

$$\begin{aligned} \frac{2P}{g} \rho^2 \ddot{\varphi} &= 2RF_2 - 2M_c; \\ \frac{2P}{g} \rho^2 \frac{a}{R} &= 2RF_2 - 2M_c, \\ F_2 &= \frac{M_c}{R} + \frac{P\rho^2}{gR^2} a. \end{aligned}$$



Từ biểu thức (8) thấy rằng khi mở máy lực ma sát trượt của bánh trước F_2 rất lớn, rồi giảm dần tới khi xe chạy bình ổn $a = 0$, lực ma sát F_2 nhỏ nhất.

$$F_2 = F_{\min} = \frac{M_c}{R} \quad (9)$$

Từ các kết quả trên thấy rằng khi mở máy lực ma sát trượt F_1 của bánh sau nhỏ, còn lực ma sát F_2 của bánh trước lớn. Sau đó F_1 tăng dần, F_2 giảm dần cho tới khi xe chạy bình ổn $F_1=F_{\max}$, $F_2=F_{\min}$.

3) Quá trình tắt máy, xe chạy dần đều, $M_d = 0$. Khi tắt máy xe được mô tả như hình sau, xe chuyển động chậm dần nên đều vận tốc và gia tốc ngược chiều nhau, xe

chuyển động do lực quán tính. Các lực tác dụng lên xe có phương chiều như hình vẽ. Tương tự với bánh xe sau ta có

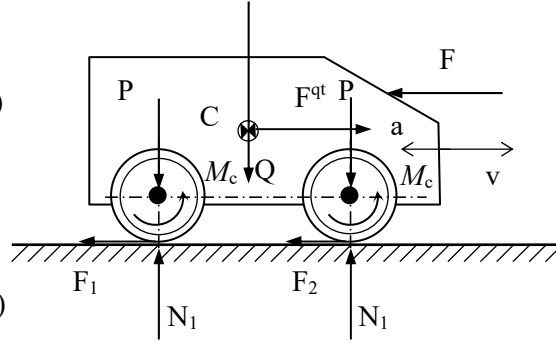
$$J\ddot{\varphi} = -M_c + RF_1;$$

$$F_1 = \frac{M_c}{R} + \frac{P\rho^2}{gR^2}a \quad (10)$$

Với bánh trước ta có

$$J\ddot{\varphi} = -M_c + RF_2;$$

$$F_2 = \frac{M_c}{R} + \frac{P\rho^2}{gR^2}a. \quad (11)$$



Từ (10) và (11) ta thấy rằng khi tắt máy lực ma sát của bánh trước và bánh sau là bằng nhau:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2; \quad F_1 = F_2 = \frac{M_c}{R} + \frac{P\rho^2}{gR^2}a. \quad (12)$$

So sánh (7) với (10) thấy rằng: Lực ma sát F_1 của bánh sau khi tắt máy có sự thay đổi đột ngột về phương chiều và trị số, còn lực ma sát F_2 của bánh trước lúc mới tắt máy giảm rất nhanh vì gia tốc $a < 0$

$$F_2 < F_{2\min} = \frac{M_c}{R}. \quad (13)$$

Sau đó cả hai lực F_1 và F_2 có trị số tăng dần và trị số a giảm dần đến khi $a = 0$, $v \approx 0$ thì

$$F_1 = F_2 = \frac{M_c}{R}.$$

4) Xác định quãng đường của xe đi được kể từ khi tắt máy.

Khi tắt máy phương trình chuyển động của xe là

$$\frac{Q}{g}\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F} \quad (14)$$

$$\text{hay} \quad \frac{Q}{g}a = -2F_1, \quad \mu v^2 \approx 0 \quad (15)$$

thế (10) vào (15) ta nhận được

$$a = -\frac{2RgM_c}{QR^2 + 2P\rho^2} = \text{const.} \quad (16)$$

Đễ dàng nhận thấy rằng xe chuyển động chậm dần đều và ta có

$$v = -\frac{2RgM_c}{QR^2 + 2P\rho^2}t + \sqrt{\frac{M_d - 4M_c}{\mu R}}, \quad (17)$$

$$S = -\frac{2RgM_c}{2(QR^2 + 2P\rho^2)}t^2 + \sqrt{\frac{M_d - 4M_c}{\mu R}}t; \quad S_0 = 0. \quad (18)$$

Sau một số phép toán đơn giản ta nhận được

$$S = \frac{1}{4} \frac{(QR^2 + 2P\rho^2)(M_d - 4M_c)}{RgM_c \mu R^2} \quad (19)$$

Đó là quãng đường xe đi được kể từ lúc tắt máy đến khi xe dừng hẳn. Với số liệu cụ thể của đầu bài dễ dàng tính được:

$$v = v_{\max} = 88,2 \text{ km/h}; F_l = F_{\max} = 700 \text{ kN}; \\ F_2 = F_{\min} = 100 \text{ kN}; a = 1,5 \text{ m/s}^2; S = 452 \text{ m}.$$

Bài 8.

1) Xác định phản lực X_A, Y_A .

Áp dụng định lý bảo toàn cơ năng:

Tại thời điểm đầu:

$$T_0 = \frac{1}{2} J_A \omega_0^2 = \frac{ml^2}{6} \omega_0^2; \quad \Pi_0 = -mg \frac{l}{2}$$

Tại thời điểm bất kỳ:

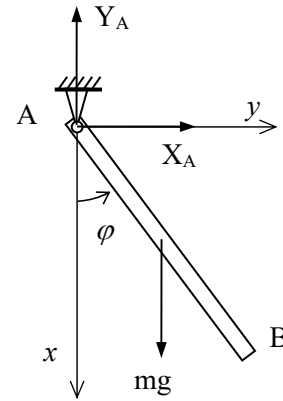
$$T_\varphi = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}^2 = \frac{ml^2}{6} \dot{\varphi}^2; \quad \Pi_\varphi = -mg \frac{l}{2} \cos \varphi$$

Từ suy ra:

$$\frac{ml^2}{6} \dot{\varphi}^2 = \frac{ml^2}{6} \omega_0^2 - mg \frac{l}{2} + mg \frac{l}{2} \cos \varphi$$

$$\omega^2 = \dot{\varphi}^2 = \omega_0^2 - \frac{3g}{l}(1 - \cos \varphi) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \varphi.$$



Áp dụng định lý chuyển động khối tâm:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_C = X_A, \\ m\ddot{y}_C = Y_A - mg. \end{cases} \quad \text{do} \quad \begin{cases} x_C = \frac{l}{2} \sin \varphi \Rightarrow \ddot{x}_C = \frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi), \\ y_C = -\frac{l}{2} \cos \varphi \Rightarrow \ddot{y}_C = \frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi). \end{cases}$$

Vậy

$$\begin{cases} X_A = -\frac{mg}{2} \left(\frac{l\omega_0^2}{g} - 3 + \frac{9}{2} \cos \varphi \right) \sin \varphi, \\ Y_A = \frac{mg}{2} \left[2 + \left(\frac{l\omega_0^2}{g} - 3 \right) \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right]. \end{cases}$$

Khi $\varphi = 90^\circ \Rightarrow \sin \varphi = 1, \cos \varphi = 0$.

$$\begin{cases} X_A = -\frac{ml\omega_0^2}{2} + \frac{3}{2}mg = \frac{1}{2}(3mg - ml\omega_0^2), \\ Y_A = \frac{mg}{4}. \end{cases}$$

2) Khi đầu B chuyển động lên vị trí cao nhất, tháo liên kết thanh AB chuyển động rơi tự do. Phương trình vi phân chuyển động khối tâm C của thanh:

$$\ddot{x}_C = 0; \quad \ddot{y}_C = -g \quad (2)$$

Điều kiện đầu $t = 0; x_C(0) = 0; y_C(0) = \frac{l}{2}$

$$\dot{x}_C(0) = \frac{l}{2}\omega; \quad \dot{y}_C(0) = 0$$

Nghiệm của hệ phương trình (2) là:

$$x_C = -\frac{1}{2}l\omega t; \quad y_C = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}l \quad (3)$$

a) Kể thanh AB từ vị trí thẳng đứng quay một số vòng nữa, rồi rơi chạm mặt phẳng nằm ngang ở tư thế thẳng đứng, ta có các điều kiện sau:

$$\varphi = \omega t = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$y_C = -l.$$

$$\text{Từ (3)} \Rightarrow y_C = \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \frac{g}{\omega^2} (\omega t)^2 \Rightarrow -l = \frac{l}{2} - \frac{g}{\omega^2} (k\pi)^2$$

Do đó $\omega^2 = \frac{g}{3l^2} k^2 \pi^2$

Chú ý đến (1) ta có: $\omega_0^2 = \omega^2 + \frac{6g}{l} = \frac{g}{l} (6 + \frac{1}{3} k^2 \pi^2)$, $k=0,1,2,3...$

b) Từ (3) suy ra

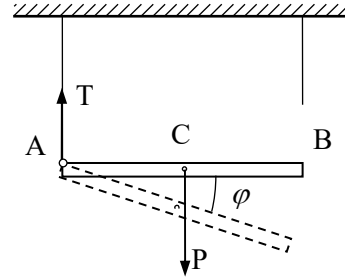
$$y_C = \frac{l}{2} - \frac{2g}{l^2 \omega^2} x_C^2$$

với điều kiện $y_C = 0$, $x_C^2 = l^2$, ω^2 tính theo (1) ta có:

$$0 = \frac{l}{2} - \frac{2gl^2}{l^2(\omega_0^2 - \frac{6g}{l})} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{10g}{l}}.$$

Bài 9.

Sau khi dây bị đứt thanh AB sẽ chuyển động song phẳng. Viết phương trình vi phân chuyển động song phẳng cho thanh AB lân cận thời điểm dây bị đứt:



$$m\ddot{x}_C = 0$$

$$m\ddot{y}_C = P - T$$

$$J_C \ddot{\varphi} = -Tl$$

Lân cận thời điểm dây bị đứt có thể xem \ddot{y}_C là gia tốc tiếp của điểm C khi thanh

AB quay quanh A với gia tốc góc $\ddot{\varepsilon} = \ddot{\varphi} = -\frac{\ddot{y}_C}{l}$.

Biểu thức này có thể tìm được từ hệ thức

$$y_C = -l \sin \varphi \quad (\text{lưu ý rằng } y_C > 0, \varphi < 0).$$

Do đó: $\dot{y}_C = -l \cos \varphi \dot{\varphi}$; $\ddot{y}_C = -l \cos \varphi \ddot{\varphi} + l \sin \varphi \dot{\varphi}^2$.

vì $\varphi \approx 0$ nên $\sin \varphi \approx 0$, $\cos \varphi \approx 1 \Rightarrow \ddot{y}_C = -l \ddot{\varphi}$.

Mặt khác: $J_C = \frac{m(2l)^2}{12} = \frac{ml^2}{3}$, từ đó ta có $m\ddot{y}_C = P - T$; $\frac{ml^2}{3} \frac{\ddot{y}_C}{l} = -Tl$.

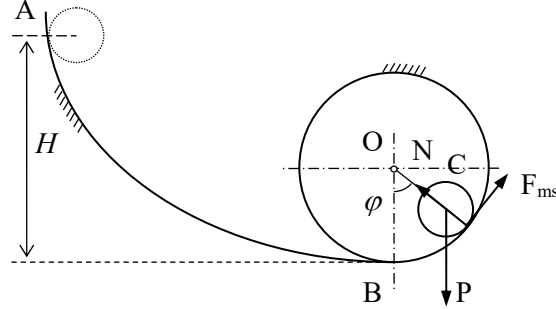
Khử \ddot{y}_C từ hai phương trình trên ra được $T = \frac{P}{4}$.

Bài 10.

1) Xác định phản lực $N = N(\varphi)$.

Sử dụng phương trình vi chuyển động của vật rắn song phẳng theo phương pháp tuyến chính:

$$m \frac{v_C^2}{R-r} = N - mg \cos \varphi \rightarrow N = mg \cos \varphi + m \frac{v_C^2}{R-r}. \quad (1)$$



Áp dụng định lý động năng dạng hữu hạn tìm $v_C = v_C(\varphi)$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} m v_C^2 &= mg[H - r - (R-r)(1 - \cos \varphi)] \\ \rightarrow v_C^2 &= \frac{4}{3} g[H - r - (R-r)(1 - \cos \varphi)]. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \quad N = \frac{1}{3} mg \left[4 \frac{H-r}{R-r} - 4 + 7 \cos \varphi \right]. \quad (3)$$

Con lăn không rời khỏi máng tròn: $N(\varphi) > 0$ có thể trừ $\varphi = \pi$

$$\begin{aligned} N_{\min} = N(\varphi) \Big|_{\varphi=\pi} &= \frac{mg}{3} \left(4 \frac{H-r}{R-r} - 11 \right) \geq 0, \\ \rightarrow H &\geq \frac{11R-7r}{4}. \end{aligned}$$

$$2) \text{ Điều kiện lăn không trượt } F_{ms} \leq fN \quad (*)$$

Xác định F_{ms} từ hai phương trình

$$m \ddot{s}_C = -mg \sin \varphi + F_{ms} \quad (4)$$

$$\frac{mr^2}{2} \ddot{\varphi} = -r F_{ms} \quad (5)$$

có $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{s}_C}{r}$ nên từ (4) và (5) suy ra $F_{ms} = \frac{1}{3} mg \sin \varphi$. (6)

Định lý động năng dạng hữu hạn với thời điểm đầu là vị trí thấp nhất cho:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} mv_C^2 &= \frac{3}{4} mv_0^2 - mg(R-r)(1 - \cos \varphi) \\ \rightarrow N &= \frac{mv_0^2}{R-r} - \frac{4mg}{3} + \frac{7mg \cos \varphi}{3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Thay (6) và (7) vào điều kiện lăn không trượt (*) với $f = 1/7$ cho

$$v_0^2 \geq \frac{7}{3} g(R-r)(\sin \varphi - \cos \varphi + \frac{4}{7}). \quad (8)$$

Để đạt tới vị trí $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$v_{0\min} = \sqrt{\frac{11}{3} g(R-r)}.$$

3) Áp dụng định lý động năng dạng vi phân

$$dT = \sum dA_k$$

$$T = \frac{3}{4} mv_C^2 = \frac{3}{4} m(R-r)^2 \dot{\theta}^2$$

(10)

$$\sum dA_k = (mg \cos \theta - \frac{k}{r} N)(R-r)d\theta$$

(11)

$$\text{với } N = mg \sin \theta + m(R-r)\dot{\theta}^2 \quad (12)$$

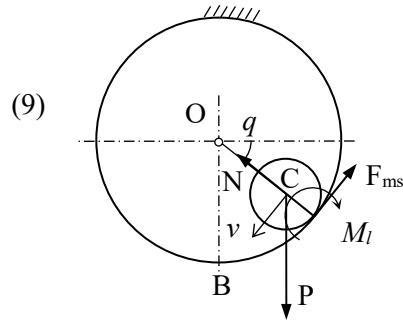
Từ (9), (10), (11) và (12) suy ra

$$\frac{d(\dot{\theta}^2)}{d\theta} + \frac{4k}{3r} \dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3(R-r)} \cos \theta - \frac{4gk}{3(R-r)r} \sin \theta \quad (13)$$

Đặt $u = \dot{\theta}^2$ thì (13) được đưa về dạng sau:

$$\frac{du}{d\theta} + \frac{4}{3} \frac{k}{r} u = \frac{4g}{3(R-r)} (\cos \theta - \frac{k}{r} \sin \theta) \quad (14)$$

Nghiệm của (14) có dạng :



$$u = Ce^{-\frac{4k}{3r}\theta} + A \sin \theta + B \cos \theta \quad (15)$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{4k}{3r} Ce^{-\frac{4k}{3r}\theta} + A \cos \theta + B \sin \theta \quad (16)$$

Thay (15) và (16) vào (14) cân bằng hệ số của $\sin \theta$ và $\cos \theta$ hai vế có:

$$A + \frac{4k}{3r} B = \frac{4g}{3(R-r)}; \quad \frac{4k}{3r} A - B = \frac{4gk}{3(R-r)r}$$

Tính được

$$A = \frac{4g}{R-r} \frac{3r^2 - 4k^2}{9r^2 + 16k^2}; \quad B = \frac{4g}{R-r} \frac{7kr}{9r^2 + 16k^2} \quad (17)$$

Thay (17) vào (15) chú ý $u = \dot{\theta}^2$ có:

$$\dot{\theta}^2 = Ce^{-\frac{4k}{3r}\theta} + \frac{4g}{(R-r)(9r^2 + 16k^2)} [(3r^2 - 4k^2) \sin \theta + 7kr \cos \theta].$$

Từ điều kiện đầu khi $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ xác định được C

$$C = -\frac{4g}{R-r} \frac{7kr}{9r^2 + 16k^2}. \quad (18)$$

Vậy

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{(R-r)(9r^2 + 16k^2)} [7kr(\cos \theta - e^{-\frac{4k}{3r}\theta}) + (3r^2 - 4k^2) \sin \theta].$$

Tại vị trí thấp nhất ứng với $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$v_C = (R-r) \left| \dot{\theta} \right| = 2 \sqrt{\frac{g(R-r)}{9r^2 + 16k^2} (-7kre^{-\frac{2k\theta}{3r}} + 3r^2 - 4k^2)}$$

$$v_C = 2 \sqrt{\frac{g(R-r)}{9r^2 + 16k^2} (3r^2 - 7kre^{-\frac{2k\theta}{3r}} - 4k^2)}.$$

Bài 12.

1) Tìm vận tốc góc chung sau khi nối trục.

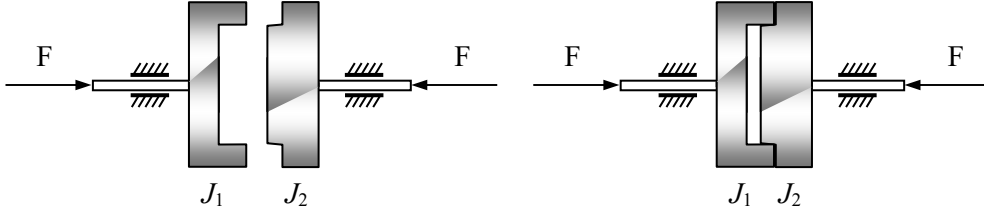
Áp dụng định lý bảo toàn mômen động lượng đối với trục quay ta có:

$$L_{1z} = L_{0z},$$

$$L_{1z} = (J_1 + J_2)\omega, \quad L_{0z} = J_1\omega_1 + J_2\omega_2.$$

Từ đó suy ra:

$$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2} \quad (1)$$



2) Tính toán sự hao hụt động năng sau khi nối trục.

Từ biểu thức động năng vật rắn quay quanh trục cố định ta có:

$$\Delta T = T_0 - T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2,$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\left[J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 - \frac{(J_1\omega_1 + J_2\omega_2)^2}{J_1 + J_2}\right]. \quad (2)$$

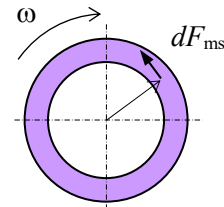
3) Thời gian cần thiết để nối trục.

Xét chuyển động của trục 1) áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng ta có:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_k) = M. \quad (3)$$

Trong quá trình nối trục các lực tác dụng lên trục 1 gồm có lực nối trục F , áp lực pháp tuyến p , lực ma sát và phản lực gối đỡ. Trong đó áp lực pháp tuyến có độ lớn:

$$p = \frac{F}{\pi(R_n^2 - R_t^2)}. \quad (4)$$



Lực ma sát nguyên tố có dạng:

$$dF_{ms} = \mu p = \frac{\mu F}{\pi(R_n^2 - R_t^2)}.$$

Từ đó dễ dàng tính được mômen đối với trục z của lực ma sát:

$$M = \iint_A r \mu p dA = \frac{2\mu F}{R_n^2 - R_t^2} \int_{R_t}^{R_n} r^2 dr = \frac{2}{3} \mu F \frac{R_n^3 - R_t^3}{R_n^2 - R_t^2}, \quad (5)$$

do $dA = 2\pi r dr$,

Do M là hằng số nên từ phương trình (3) suy ra:

$$\int_{L_0}^{L_1} dL = \int_0^{t_{nt}} M dt = Mt_{nt} = L_1 - L_0 = J_1 \omega - J_1 \omega_1$$

Vậy ta có :

$$t_{nt} = \frac{1}{M} \left(J_1 \frac{J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2}{J_1 + J_2} - J_1 \omega_1 \right), \quad t_{nt} = \frac{3}{2} \frac{R_n^2 - R_t^2}{\mu F (R_n^3 - R_t^3)} \cdot \frac{J_1 J_2 (\omega_2 - \omega_1)}{J_1 + J_2}.$$

$$\text{Từ đó rút ra: } t_{nt} = \frac{1}{F} k_F, \quad t_{nt} = \frac{1}{\mu} k_\mu \quad (6)$$

4) Ảnh hưởng của μ và F : từ công thức (6) ta thấy thời gian nổi trục (t_{nt}) tỷ lệ nghịch với μ và F . Từ công thức (2) ta thấy μ và F không ảnh hưởng gì tới lượng mất động năng.

Bài 14.

1) Áp dụng định lý biến thiên động năng ta có :

$$T_1 = \frac{1}{2} (M + 2m) v^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \quad (1)$$

$$dA = -F_k ds \quad (2)$$

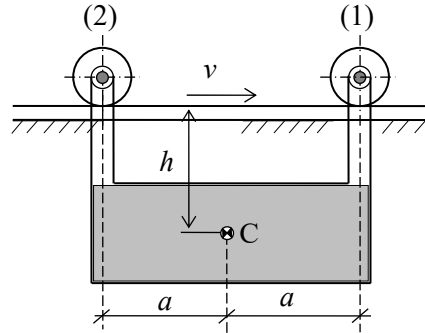
Trong đó \vec{F}_k là thành phần phản lực tiếp tuyến của đường ray tác dụng lên bánh xe bị kẹt, còn thành phần \vec{F}_{0k} là thành phần phản lực tiếp tuyến của đường ray tác dụng lên bánh xe không bị kẹt, \vec{F}_{0k} không sinh công vì điểm đặt của nó có vận tốc bằng không. Từ (1), (2) ta có:

$$F_k = - \left(M + 2m + m \frac{\rho^2}{r^2} \right) a. \quad (3)$$

Áp dụng định lý chuyển động khối tâm theo phương ngang :

$$(M + 2m)a = -F_k + F_{0k}$$

$$\text{Kết hợp với (3) ta nhận được : } F_{0k} = -m \frac{\rho^2}{r^2} a \quad (4)$$



2) Với giả thiết $m/M \approx 0$.

a) Từ (4) dễ dàng thấy rằng :

$$F_{0k} = -\frac{\rho^2}{r^2} ma = -\frac{m}{M} \frac{\rho^2}{r^2} Ma = 0$$

Suy ra

$$F_{0k} = 0 \quad (5)$$

$$F_k \approx -Ma \quad (6)$$

b) Đặt : $F_1 = F_k = -Ma$, $F_2 \approx 0$.

ứng dụng định lý chuyển động khối tâm theo phương thẳng đứng

$$N_1 + N_2 = (M + 2m)g \quad (7)$$

với giả thiết $m/M \approx 0$ ta có :

$$N_1 + N_2 - Mg = 0, \quad (8)$$

trong đó N_1, N_2 là phản lực pháp tuyến của đường ray tác dụng tương ứng lên bánh (1) và bánh (2). Viết phương trình mômen động lượng với khối tâm C của goòng, lưu ý rằng với $m/M \approx 0$, có thể coi xe như vật rắn chuyển động tịnh tiến. Khi đó hệ lực quán tính của nó tương đương với một lực đặt ở khối tâm C, ta có :

$$\begin{aligned} N_1 a + N_2 a + F_1 h &= 0, \\ F_1 &= f N_1 \end{aligned} \quad (9)$$

Từ (6), (8), (9) dễ dàng tính được :

$$N_1 = \frac{a}{2a + hf} Mg; \quad N_2 = \frac{a + hf}{2a + hf} Mg; \quad a = -\frac{af}{2a + hf} < 0 \quad (10)$$

c) Tương tự như phần b) ta nhận được các phương trình sau :

$$\begin{aligned} F_2 &= -Ma, \quad N_1 + N_2 = Mg \\ N_1 a - N_2 a &= -hF_2, \quad F_2 = fN_2 \end{aligned}$$

$$\text{Dễ dàng tìm được : } N_1 = \frac{a - fh}{2a - hf} Mg; \quad N_2 = \frac{a}{2a - hf} Mg; \quad a = -\frac{af}{2a - hf} g.$$

$$\text{Để liên kết không bị phá vỡ thì } N_1 > 0, N_2 > 0, \text{ tức là : } f < \frac{2a}{h} \quad (11)$$

$$\text{Vậy giá trị tới hạn của } f \text{ là : } f_c = \frac{2a}{h}.$$

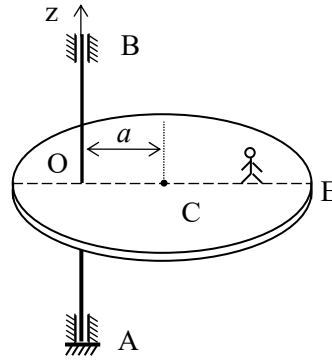
Bài 15.

Cơ hệ khảo sát gồm có tấm tròn và người, hệ ngoại lực đặt lên cơ hệ là $(\vec{Q}, \vec{P}, \vec{N}_A, \vec{N}_B)$.

Ta có: $\sum m_z(\vec{F}_k^e) = 0$

Theo định lý bảo toàn mômen động lượng ta có :

$$\begin{aligned} L_z &= \text{const} = L_z(0) \\ L_z(0) &= \omega_0 [J + m(a + R)^2] \quad (1) \\ L_z &= J\omega. \end{aligned}$$



$$\text{Thay vào (1) rút ra } \omega = \frac{\omega_0 [J + m(a + R)^2]}{J}. \quad (2)$$

Áp dụng định lý biến thiên động năng ta có :

$$T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i), \quad (3)$$

$$\text{ở đây } \sum A(\vec{F}_k^e) = 0; \quad T = \frac{\omega^2}{2} J = \frac{\omega_0^2}{2} \frac{[J + m(a + R)^2]^2}{J}$$

$$T_0 = \frac{\omega_0^2}{2} [J + m(a + R)^2].$$

Thay các kết quả này vào (3) ta có công $\sum A(\vec{F}_k^i)$ mà người thực hiện để đi từ E đến O :

$$T - T_0 = \frac{\omega_0^2}{2J} [J + m(a + R)^2] m(a + R)^2$$

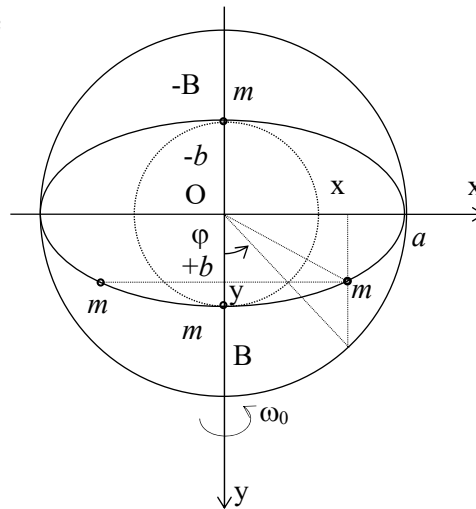
.

Bài 16.

1) Áp dụng phương trình Lagrange loại II để thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ.

Động năng của cơ hệ:

$$T = m \frac{v_a^2}{2} = \frac{m}{2} (v_e^2 + v_r^2)$$



$$\begin{aligned}
v_e^2 &= \omega_0^2 x^2, \quad v_r^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\
x &= a \sin \varphi, \quad \dot{x} = a \cos \varphi \dot{\varphi} \\
y &= b \cos \varphi, \quad \dot{y} = -b \sin \varphi \dot{\varphi} \\
v_r^2 &= (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Vậy ta có :

$$\begin{aligned}
L &= T - \Pi \\
\Pi &= -b \cos \varphi P + C,
\end{aligned}$$

$$T = \frac{m}{2} [\omega_0^2 a^2 \sin^2 \varphi + (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2],$$

$$L = \frac{m}{2} [\omega_0^2 a^2 \sin^2 \varphi + (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2] + Pb \cos \varphi + C.$$

Phương trình Lagrange loại II :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + m \dot{\varphi} (-2a^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi} \\
&\quad + 2b^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}) \\
&= m (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + m(b^2 - a^2) \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{m}{2} [2\omega_0^2 a^2 \cos \varphi \sin \varphi + (-2a^2 \cos \varphi \sin \varphi + 2b^2 \cos \varphi \sin \varphi) \dot{\varphi}^2] - Pb \sin \varphi \\
&= \frac{m}{2} \sin 2\varphi [\omega_0^2 a^2 + (b^2 - a^2) \dot{\varphi}^2] - Pb \sin \varphi
\end{aligned}$$

Thay vào phương trình Lagrange loại II ta được:

$$\begin{aligned}
m (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + m(b^2 - a^2) \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2 \\
- \frac{m}{2} \sin 2\varphi [\omega_0^2 a^2 + (b^2 - a^2) \dot{\varphi}^2] + Pb \sin \varphi = 0.
\end{aligned}$$

Vậy ta có phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ

$$\begin{aligned}
(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2 \\
- \frac{1}{2} \omega_0^2 a^2 \sin 2\varphi + gb \sin \varphi = 0
\end{aligned}$$

2) Chất điểm cân bằng tương đối khi $\ddot{\varphi} = 0, \dot{\varphi} = 0$, vậy ta có :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}a^2\omega_0^2 \sin 2\varphi + gb \sin \varphi = 0 \\
\Rightarrow & \sin \varphi(-a^2\omega_0^2 \cos \varphi + gb) = 0 \\
& \sin \varphi = 0 \rightarrow \varphi = k\pi, k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Như vậy có 2 vị trí cân bằng là $(0, b)$ và $(0, -b)$:

$$\cos \varphi_0 = \frac{gb}{a^2\omega_0^2} \leq 1 \rightarrow \omega_0^2 \geq \frac{gb}{a^2}$$

$$y = b \cos \varphi_0 = \frac{gb}{a^2\omega_0^2}, \quad y = \frac{gb}{a^2\omega_0^2}$$

$$x = a \sin \varphi_0, \quad \sin \varphi_0 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_0}, \quad x = \pm \sqrt{a^2 - \frac{g^2 b^2}{a^2 \omega_0^2}}.$$

Như vậy cũng có hai vị trí cân bằng là $\pm(\sqrt{a^2 - \frac{g^2 b^2}{a^2 \omega_0^2}}, \frac{gb}{a^2 \omega_0^2})$.

3) Khảo sát giá trị hàm Lagrange L

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} = m \cos 2\varphi[\omega_0^2 a^2 + (b^2 - a^2)\dot{\varphi}^2] - Pb \cos \varphi = 0; \dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} = m \cos 2\varphi \omega_0^2 a^2 - mgb \cos \varphi = m(\omega_0^2 a^2 \cos 2\varphi - gb \cos \varphi)$$

$$\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0} = m(\omega_0^2 a^2 - gb)$$

Khi $\omega_0^2 < \frac{gb}{a^2} \rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} < 0 \rightarrow L$ cực đại, Π cực tiểu \rightarrow vị trí $\varphi = 0$: cân bằng bền.

Khi $\omega_0^2 > \frac{gb}{a^2} \rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} > 0 \rightarrow L$ cực tiểu, Π cực đại \rightarrow vị trí $\varphi = \pi$: cân bằng

không bền với mọi giá trị của ω_0 .

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} \right|_{\cos \varphi_0} &= \frac{gb}{\omega_0^2 a^2} = m[\omega_0^2 a^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - gb \cos \varphi_0] \\
&= m[\omega_0^2 a^2 (2 \cos^2 \varphi - 1) - gb \cos \varphi_0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} \right|_{\cos \varphi_0} &= m[\omega_0^2 a^2 (2 \frac{g^2 b^2}{\omega_0^4 a^4} - 1)] - \frac{g^2 b^2}{\omega_0^2 a^2} \\ &= m[2 \frac{g^2 b^2}{\omega_0^2 a^2} - \omega_0^2 a^2 - \frac{g^2 b^2}{\omega_0^2 a^2}] \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} &= m[\frac{g^2 b^2}{\omega_0^2 a^2} - \omega_0^2 a^2] = \frac{m}{\omega_0^2 a^2} [\frac{g^2 b^2}{\omega_0^4 a^4} - 1] < 0\end{aligned}$$

Vì $a^2 \omega_0^2 > g^2 b^2$, hàm L cực đại, thế năng Π cực tiểu nên vị trí cân bằng bền.

Tóm lại có 4 vị trí cân bằng (xem hình vẽ).

Khi $\omega_0^2 \leq \frac{gb}{a^2}$ vị trí $(0, b)$ cân bằng bền còn vị trí $(0, -b)$ là không bền

Khi $\omega_0^2 > \frac{gb}{a^2}$, hai vị trí $\pm(\sqrt{a^2 - \frac{b^2 g^2}{a^4 \omega_0^4}}, \frac{bg}{a^2 \omega_0^2})$ cân bằng bền, còn hai vị trí $(0, \pm b)$

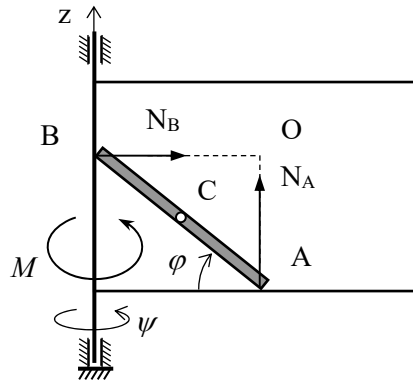
cân bằng không bền.

Bài 17.

1) Áp dụng phương trình Lagrange loại II để thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

trong đó :



$$T = T_1 + T_2; T_2 = T_e + T_r, T_r = m \frac{v_C^2}{2} + J_C \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$v_C = l\dot{\varphi}; \quad J_C = \frac{ml^3}{3};$$

$$T_1 = J \frac{\dot{\psi}^2}{2}; \quad T_r = \frac{4}{3} ml^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$J_z = \frac{m}{2l} \int_0^{2l} \cos^2 \varphi s^2 ds = \frac{m}{2l} \cos^2 \varphi \frac{s^3}{3} \Big|_0^{2l} = \frac{m}{2l} \cos^2 \varphi \frac{(2s)^3}{3} = \frac{4}{3} ml^3 \cos^2 \varphi$$

$$T_e = \frac{4}{3} ml^2 \cos^2 \varphi \frac{\dot{\psi}^2}{2} \rightarrow T_2 = \frac{4}{3} ml^2 \cos^2 \varphi \frac{\dot{\psi}^2}{2} + \frac{4}{3} ml^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$T = J \frac{\dot{\psi}^2}{2} + \frac{4}{3} ml^2 \cos^2 \varphi \frac{\dot{\psi}^2}{2} + \frac{4}{3} ml^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$Q_\psi = M, \quad Q_\varphi = -Pl \cos \varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = J\dot{\psi} + \frac{4}{3} ml^2 \cos^2 \varphi \dot{\psi} = (J + \frac{4}{3} ml^2 \cos^2 \varphi) \dot{\psi}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = (J + \frac{4}{3} ml^2 \cos^2 \varphi) \ddot{\psi} - \frac{4}{3} ml^2 \sin 2\varphi \dot{\varphi} \dot{\psi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4}{3} ml^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4}{3} ml^2 \ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{4}{3} ml^2 \sin 2\varphi \dot{\psi}^2$$

Vậy ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{aligned} (J + \frac{4}{3} ml^2 \cos^2 \varphi) \ddot{\psi} - \frac{4}{3} ml^2 \sin 2\varphi \dot{\varphi} \dot{\psi} &= M \\ \frac{4}{3} l \ddot{\varphi} + \frac{4}{3} l \sin 2\varphi \dot{\psi}^2 &= -g \cos \varphi \end{aligned} \quad (1)$$

2) Giả sử khung quay đều $\dot{\psi} = \omega_0 = \text{const}$, $\ddot{\psi} = 0$ ta có :

$$M = \frac{4}{3} ml^2 \sin 2\varphi \omega_0 \dot{\varphi} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} l \ddot{\varphi} + \frac{4}{3} l \omega_0^2 \sin 2\varphi = -g \cos \varphi \quad (3)$$

$$\text{Suy ra : } \ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \sin 2\varphi - \frac{3}{4l} g \cos \varphi. \quad (4)$$

Tính vận tốc tương đối $\dot{\varphi}$:

Biến đổi từ phương trình (3) ta có :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} l \dot{\varphi} d\dot{\varphi} + \frac{8}{3} l \omega_0^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi &= -g \cos \varphi d\varphi \\ \frac{4}{3} l \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{8}{3} l \omega_0^2 \frac{\sin^2 \varphi}{2} &= -g \sin \varphi + C. \end{aligned}$$

Với $\dot{\varphi}(0) = 0, \varphi(0) = \frac{\pi}{6}$ ta xác định được : $C = \frac{1}{3} l \omega_0^2 + \frac{1}{2} g$.

Vậy : $\dot{\varphi}^2 = -2\omega_0^2 \sin^2 \varphi - \frac{3}{2l} g \sin \varphi + \left(\frac{\omega_0^2}{2} + \frac{3}{4l} g\right).$

Để dàng nhận thấy rằng với $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ thì $\dot{\varphi}^2 \geq 0$ và trong quá trình chuyển động góc φ luôn giảm cho nên vận tốc tương đối $\dot{\varphi} < 0$, ta có:

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{-2\omega_0^2 \sin^2 \varphi - \frac{3}{2l} g \sin \varphi + \left(\frac{\omega_0^2}{2} + \frac{3}{4l} g\right)} \quad (5)$$

3) Dùng định lý chuyển động khối tâm ta có :

$$\begin{aligned} m\vec{a}_C &= \vec{N}_A + \vec{N}_B + \vec{P} \\ m(\vec{a}_C^{(r)} + \vec{a}_C^{(e)} + \vec{a}_C^{(e)}) &= \vec{N}_A + \vec{N}_B + \vec{P} \end{aligned}$$

Chiếu phương trình vectơ lên trục z ta có :

$$\begin{aligned} ma_{Cz}^r &= -P + N_A, \quad z_C = l \sin \varphi \rightarrow \ddot{z}_C = l \cos \varphi \ddot{\varphi} - l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \\ N_A &= mg + ml(\cos \varphi \ddot{\varphi} - \sin \varphi \dot{\varphi}^2) \end{aligned}$$

Thay các giá trị $\dot{\varphi}^2, \ddot{\varphi}$ ở trên ta nhận được

$$N_A = mg - ml\left[2\omega_0^2 \sin \varphi \cos 2\varphi - \frac{9}{4l} g \cos^2 \varphi + \sin \varphi \left(\frac{\omega_0^2}{2} + \frac{3}{4l} g\right) - \frac{3}{2l} g\right].$$

Bài 18.

1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ :

Tính động năng: $T = T_1 + T_2$

$$T_2 = m \frac{v_C^2}{2} + J_C \frac{\dot{\psi}^2}{2} \quad (1)$$

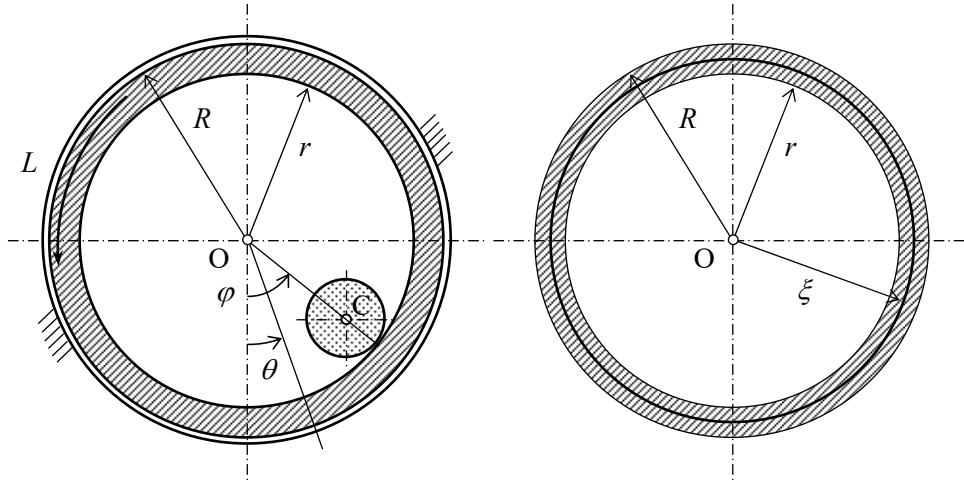
Lưu ý rằng: $\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}$ trong đó: $v_C = (\rho - r)\dot{\varphi}$; $v_B = \rho\dot{\theta}$, $v_{BC} = r\dot{\psi}$

$$\rho\dot{\theta} = (\rho - r)\dot{\varphi} + r\dot{\psi} \rightarrow \dot{\psi} = \frac{\rho\dot{\theta} - (\rho - r)\dot{\varphi}}{r}$$

Thế biểu thức của $\dot{\psi}$ và v_C vào (1) ta được :

$$T_2 = \frac{m}{4} \rho^2 \dot{\theta}^2 + \frac{3}{4} m(\rho - r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \rho(r - \rho)\dot{\theta}\dot{\varphi} \quad (2)$$

$$T_1 = J_0 \frac{\dot{\theta}^2}{2} \quad (3)$$



Gọi γ là khối lượng riêng ta có :

$$J_0 = 2\pi\gamma \int_{\rho}^R \xi \cdot \xi^2 d\xi = \frac{M}{2}(R^2 + \rho^2)$$

$$T_1 = \frac{M}{4}(R^2 + \rho^2)\dot{\theta}^2 \quad (4)$$

Vậy động năng của hệ là :

$$T = \frac{\dot{\theta}^2}{4} \left[M(R^2 + \rho^2) + \rho^2 \dot{\theta}^2 \right] + \frac{3}{4} m(\rho - r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \rho(r - \rho) \dot{\theta} \dot{\varphi}$$

Biểu thức lực suy rộng :

$$Q_{\theta} = L, \quad Q_{\varphi} = -mg(\rho - r) \sin \varphi$$

Thế các biểu thức động năng và các lực suy rộng vào phương trình Lagrange ta được :

$$\begin{aligned} \left[M(R^2 + \rho^2) + m\rho^2 \right] \frac{\ddot{\theta}}{2} - \frac{m}{2} \rho(\rho - r) \ddot{\varphi} &= L \\ -\frac{m}{2} \rho(\rho - r) \ddot{\theta} + \frac{3}{2} m(\rho - r)^2 \ddot{\varphi} &= -mg(\rho - r) \sin \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

2) Trường hợp vành tròn quay đều $\dot{\theta} = \Omega_0 = \text{const}$, $\ddot{\theta} = 0$ ta có:

$$\begin{cases} \frac{m}{2} \rho(\rho - r) \ddot{\varphi} = -L \\ \frac{3}{2} m(\rho - r)^2 \ddot{\varphi} = -mg(\rho - r) \sin \varphi \end{cases}$$

Từ hệ phương trình này ta tìm được

$$L = \frac{1}{3} \rho mg \sin \varphi \quad (6)$$

Để duy trì chế độ quay đều thì mômen M được xác định từ biểu thức (6).

Cũng từ hệ phương trình trên ta nhận được:

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g}{3(\rho - r)} \sin \varphi \quad (7)$$

Từ (7) và các điều kiện đầu : $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 2\sqrt{\frac{g}{3(\rho - r)}}$ ta có :

$$\dot{\varphi} = \pm 2\sqrt{\frac{g \cos \varphi}{3(\rho - r)}} \quad (8)$$

Hệ thức (8) lấy dấu cộng (+) khi φ tăng từ $-\pi/2$ đến $\pi/2$ và lấy dấu (-) trừ khi φ giảm từ $+\pi/2$ đến $-\pi/2$, tức là đĩa đổi chiều quay. Tại vị trí $\varphi = \pi/3$, phương chiều vận tốc \vec{v}_C như hình vẽ, còn trị số của nó là

$$v_C = (\rho - r)\dot{\varphi} = 2\sqrt{\frac{5}{3}} \text{ m/s.} \quad (9)$$

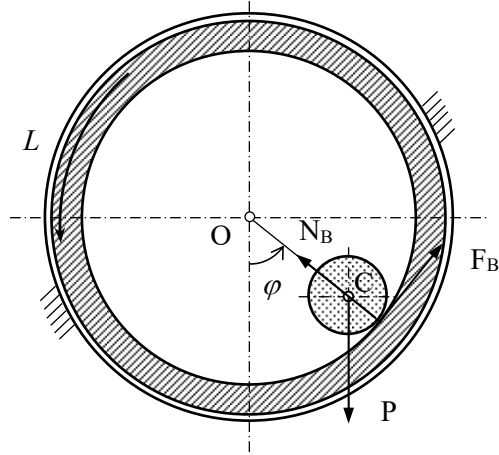
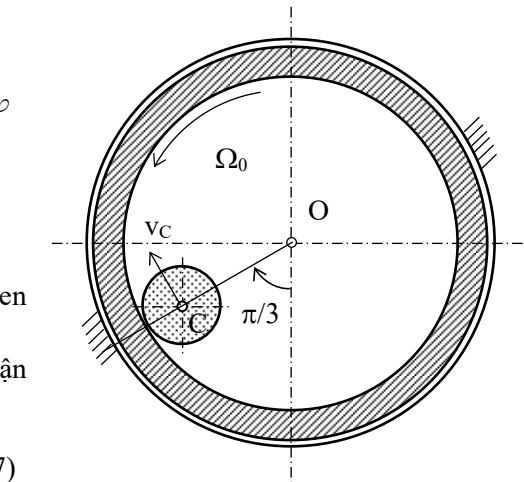
3) Xác định phản lực tại B và giá trị Ω_0

Xét đĩa tròn, bỏ qua ma sát lăn, chịu tác dụng của các lực \vec{N}_B , \vec{P} , \vec{F}_B . Theo định lý chuyển động khối tâm ta có :

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_B + \vec{N}_B + \vec{P};$$

$$\begin{cases} ma_C^n = N_B + P \cos \varphi \\ ma_C^\tau = -F_B + P \sin \varphi \end{cases}$$

Từ hệ trên ta tính được :



$$\begin{cases} N_B = m(\rho - r)\dot{\varphi}^2 + P \cos \varphi \\ \quad = m(\rho - r) \frac{4g}{3(\rho - r)} + P \cos \varphi \\ F_B = P \sin \varphi - m(\rho - r)\ddot{\varphi} \\ \quad = P \sin \varphi - m(\rho - r) \frac{2g}{3(\rho - r)} \sin \varphi \end{cases}$$

Vậy: $N_B = \frac{7}{3} \rho \cos \varphi, \quad F_B = \frac{1}{3} P \sin \varphi$ (10)

Xét vành tròn : $J_0 \ddot{\theta} = L - \rho F'_B$

$$J_0 \ddot{\theta} = \frac{\rho mg \sin \varphi}{3} - \frac{\rho mg \sin \varphi}{3} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\theta}(0).$$

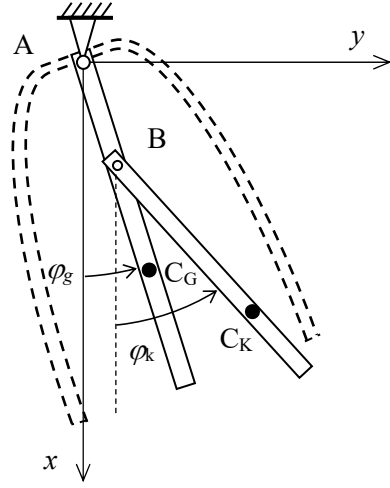
Bài 19.

1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho chuông.

Vỏ chuông và cần lắc tạo thành hệ con lắc kép như hình vẽ. Vị trí của hệ được xác định bởi các góc φ_g và φ_k . Chọn hai góc này làm tọa độ suy rộng đủ của hệ.

Biểu thức động năng:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (J_g + m_k h^2) \dot{\varphi}_g^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} J_k \dot{\varphi}_k^2 \\ &\quad + m_k s_k h \dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_g \cos(\varphi_g - \varphi_k) \end{aligned} \quad (1)$$



Biểu thức thế năng:

$$\Pi = -(m_g s_g + m_k h)g \cos \varphi_g - m_k s_k g \cos \varphi_k + const \quad (2)$$

Thế các biểu thức này vào phương trình Lagrange loại II

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2) \quad (3)$$

ta được phương trình vi phân chuyển động của quả chuông nhà thờ:

$$(J_g + m_k h^2) \ddot{\varphi}_g + m_k h s_k \cos(\varphi_g - \varphi_k) \ddot{\varphi}_k + m_k h s_k^2 \dot{\varphi}_k^2 \sin(\varphi_g - \varphi_k) + (m_g s_g + m_k h) \sin \varphi_g = 0 \quad (4)$$

$$J_k \ddot{\varphi}_k + m_k h s_k \cos(\varphi_g - \varphi_k) \ddot{\varphi}_g - m_k h s_k \dot{\varphi}_g^2 \sin(\varphi_g - \varphi_k) + m_g s_k \sin \varphi_k = 0 \quad (5)$$

2) Trong một số trường hợp chuông không kêu, do sau khi rung, ta có hệ thức $\varphi_g(t) = \varphi_k(t) = \varphi(t)$. Khi đó từ các phương trình (4) và (5) ta suy ra:

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_g s_g + m_k h}{J_g + m_k h(h + s_k)} g \sin \varphi = 0 \quad (6)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_k s_k}{J_k + m_k h s_k} g \sin \varphi = 0 \quad (7)$$

So sánh hệ số các phương trình (6) và (7) suy ra :

$$\frac{m_g s_g + m_k h}{J_g + m_k h(h + s_k)} = \frac{m_k s_k}{J_k + m_k h s_k}$$

Từ đó tính được

$$h = \frac{a_g - a_k}{1 + \frac{m_k}{m_g} \left(\frac{a_g - a_k}{s_g} \right)} \quad (8)$$

trong đó ta ký hiệu:

$$a_g = \frac{J_g}{m_g s_g}; \quad a_k = \frac{J_k}{m_k s_k}.$$

Bài 20.

Cơ hệ gồm có đĩa, thanh AB, con chạy B và tải trọng D. Cơ hệ có hai bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng đủ cho hệ là:

$$q_1 = s, \quad q_2 = \varphi.$$

Áp dụng phương trình Lagrange loại II để thiết lập phương trình vi phân chuyển động.

Động năng của cơ hệ là:

$$T = T_A + T_B + T_D \quad (1)$$

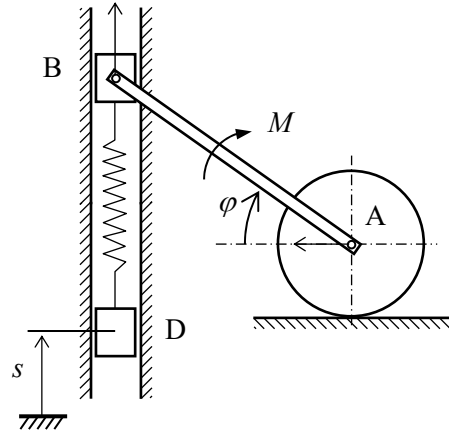
Vì $\omega = \frac{v_A}{r}$;

$$v_B = \frac{d}{dt}(L_0 + L \sin \varphi) = L \cos \varphi \dot{\varphi}$$

nên

$$T_A = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 r^2}{2} \omega^2 = \frac{3}{4} m_1 v_A^2$$

$$T_B = \frac{1}{2} m_2 v_B^2 = \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi.$$



Khi chú ý đến định lý hình chiếu vận tốc:

$$v_A = v_B \tan \varphi = L \sin \varphi \dot{\varphi} \quad \text{và} \quad v_D = \dot{s}, \text{ ta có}$$

$$T_A = \frac{3}{4} m_1 L^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2; \quad T_D = \frac{1}{2} m_3 \dot{s}^2$$

$$\text{Vậy: } T = \frac{1}{2} m_3 \dot{s}^2 + \frac{1}{4} L^2 \dot{\varphi}^2 (2m_2 \cos^2 \varphi + 3m_1 \sin^2 \varphi) \quad (2)$$

Các lực suy rộng được tính theo các biểu thức sau:

$$Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial s} + Q_s^*; \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi^* \quad (3)$$

$$\text{Dễ dàng tính được: } \Pi = m_3 g s + \frac{1}{2} c (L \sin \varphi - s)^2 + m_3 g L \sin \varphi + \text{const}$$

$$\text{Các lực } Q_s^*, Q_\varphi^* \text{ sẽ là: } Q_s^* = 0; \quad Q_\varphi^* = M \quad (4)$$

$$\text{Từ đó: } Q_s = -m_3 g + c(L \sin \varphi - s)$$

$$Q_\varphi = M - m_2 g L \cos \varphi - c(L \sin \varphi - s) L \cos \varphi. \quad (5)$$

Thay (2), (4) và (5) vào phương trình Lagrange loại II ta được phương trình vi phân chuyển động của hệ như sau:

$$m_3 \ddot{s} + c(s - L \sin \varphi) + m_3 g = 0$$

$$2L^2 (3m_1 \sin^2 \varphi + 2m_2 \cos^2 \varphi) \ddot{\varphi} + (3m_1 - 2m_2) L^2 \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2 + 4m_2 g L \cos \varphi + 4cL(L \sin \varphi - s) \cos \varphi = 4M.$$

Bài 21.

1) Lập phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ

Cơ hệ có hai bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng đủ cho hệ là: $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$.

trong đó

- x thông số định vị của thùng xe,
- φ góc định của của con lắc đối với thùng xe.

Động năng của cơ hệ là:

$$T_A = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\rho^2\dot{\varphi}^2 + m_2a \cos \varphi \dot{x}\dot{\varphi}.$$

Các lực suy rộng sẽ là:

$$Q_x = \frac{M}{r}; \quad Q_\varphi = -c\varphi - b\dot{\varphi} - m_2ga \sin \varphi.$$

Áp dụng phương trình Lagrange loại II để thiết lập phương trình vi phân chuyển động, ta được:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2a \cos \varphi \ddot{\varphi} - m_2a \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = \frac{M}{r}$$

$$m_2a \cos \varphi \ddot{x} + m_2\rho^2\ddot{\varphi} = -c\varphi - b\dot{\varphi} - m_2ga \sin \varphi.$$

2) Trường hợp xe chạy với vận tốc $v = v_0 + V\cos\Omega t$.

Trong trường hợp này gia tốc của xe sẽ là $\ddot{x} = -V\Omega \sin \Omega t$ phương trình dao động

bé của con lắc sẽ là: (lấy $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$):

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = H_0 \sin \Omega t$$

trong đó:

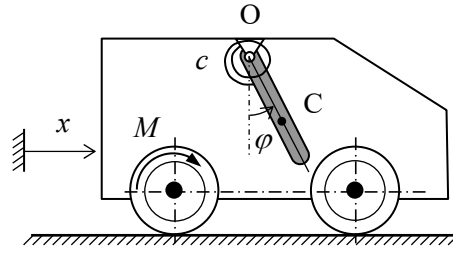
$$2n = \frac{b}{m\rho^2}; \quad k^2 = \frac{c + m_2ga}{m\rho^2}; \quad H_0 = \frac{m_2aV\Omega}{m\rho^2}$$

Nghiệm của phương trình vi phân trên có dạng sau:

$$\varphi = \bar{\varphi} + B \sin(\Omega t - \varepsilon)$$

trong đó

$$\bar{\varphi} = A e^{-nt} \sin(k^* t + \alpha) \quad \text{khi } n < k$$



$$\bar{\varphi} = A e^{-nt} sh(k^* t + \alpha) \quad \text{khi } n > k$$

$$\bar{\varphi} = A e^{-nt} (C_1 t + C_2 t) \quad \text{khi } n = k$$

$$B = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}}; \quad tg\varepsilon = \frac{2n\Omega}{k^2 - \Omega^2}.$$

Bài 22.

Cơ hệ có hai bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng đủ là x và φ .

1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ. Sử dụng phương trình Lagrange loại II viết theo x và φ .

Động năng của cơ hệ là:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m_1 \dot{x}^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}^2$$

vì $J_0 = J_A + m_2 h^2; \quad v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2$

và $x_A = x + h \sin \varphi, \quad y_A = R - h \cos \varphi$ nên:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 + m_2 h \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi}$$

Thay các kết quả này vào (1) ta có:

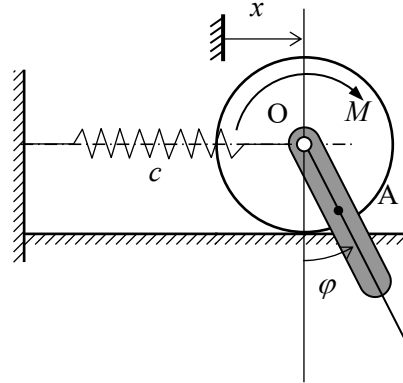
$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 + m_2 h \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi} \quad (2)$$

Tính các lực suy rộng:

Để tính Q_x ta cho hệ một di chuyển có thể với $\delta x \neq 0, \delta \varphi = 0$ thì

$$Q_x = \frac{M \delta \theta - cx \delta x}{\delta x} = \frac{M}{R} - cx = \frac{M_0 \cos \omega t}{R} - cx \quad (3)$$

cho $\delta x = 0, \delta \varphi \neq 0$ thì



$$Q_{\varphi} = -\frac{m_2 g h l \sin \varphi \delta \varphi}{\delta \varphi} = m_2 g h l \sin \varphi. \quad (4)$$

Viết phương trình Lagrange loại II, ta nhận được hệ phương trình vi chuyển động của cơ hệ như sau:

$$\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{x} + m_2 h \cos \varphi \ddot{\varphi} - m_2 h \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = \frac{M_0 \cos \omega t}{R} - cx$$

$$m_2 h \cos \varphi \ddot{x} + J_0 \ddot{\varphi} + m_2 h g \sin \varphi = 0.$$

2) Xác định phản lực N tại bản lề O ở thời điểm ban đầu.

Ta có $\vec{N}_O(0) = \vec{X}_O(0) + \vec{Y}_O(0)$

Con lăn chuyển động song phẳng nên ta có:

$$m_2 \ddot{x}_A = X_O; \quad m_2 \ddot{y}_A = -m_2 g + Y_O$$

Vì $x_A = x + h \sin \varphi$, $y_A = R - h \cos \varphi$ nên ta có:

$$\ddot{x}_A = \ddot{x} + h \cos \varphi \ddot{\varphi} - h \sin \varphi \dot{\varphi}^2; \quad \ddot{y}_A = h \sin \varphi \ddot{\varphi} + h \cos \varphi \dot{\varphi}^2.$$

tại $t = 0$ thì $\varphi = 0$, $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$, $\dot{\varphi} = 0$ do đó ta có:

$$\ddot{x}_A(0) = \ddot{x}(0) + h \ddot{\varphi}(0); \quad \ddot{y}_A(0) = 0.$$

Từ đó ta nhận được:

$$X_O(0) = m_2 \ddot{x}(0) + m_2 h \ddot{\varphi}(0), \quad Y_O(0) = m_2 g = m_1 g = 98N$$

Xét phương trình vi phân chuyển động tại thời điểm $t = 0$, ta có:

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{x}(0) + m_2 h \ddot{\varphi}(0) = \frac{M_0}{R} \\ m_2 h \ddot{x}(0) + J_0 \ddot{\varphi}(0) = 0. \end{cases}$$

Từ hệ phương trình trên rút ra được

$$\ddot{x}(0) = \frac{40g}{61}; \quad \ddot{\varphi}(0) = \frac{60g}{61}.$$

Cuối cùng ta được $X_O(0) = 6,4 \text{ N}$.

Bài 24.

1) Lập phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ.

Sử dụng phương trình Lagrange loại II để thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ. Cơ hệ có hai bậc tự do. Chọn hai tọa độ suy rộng đủ cho cơ hệ là: $q_1 = \varphi, q_2 = r$.

Phương trình Lagrange loại II:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2)$$

Động năng của cơ hệ:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 = \frac{4Ml^2}{3} \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

do $J_0 = \frac{4Ml^2}{3}$

$$T_2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).$$

Vậy $T = \frac{4}{3} Ml^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).$

Biểu thức thế năng của hệ:

$$\Pi = -Mgl \sin \varphi - mgr \sin \varphi + const$$

Các lực suy rộng

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = (Ml + mr)g \cos \varphi; \quad Q_r = -\frac{\partial \Pi}{\partial r} = mg \sin \varphi.$$

Thế các đại lượng vào phương trình Lagrange loại II ta nhận được:

$$(4/3 \cdot Ml^2 + mr^2)\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} - (Ml + mr)g \cos \varphi = 0,$$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - g \sin \varphi = 0.$$

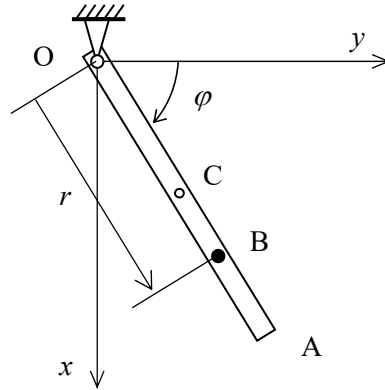
Để xác định phản lực $\vec{N} \perp OA$ tác dụng lên chất điểm, ta áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng cho chất điểm với lưu ý rằng v_r có phương qua O, ta có

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) = -rN + mgr \cos \varphi,$$

$$2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2 \ddot{\varphi} = -rN + mgr \cos \varphi,$$

Vậy $N = m(g \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} - r\ddot{\varphi}).$

Thế $\ddot{\varphi}$ nhận được từ phương trình vi phân chuyển động ta tìm được:



$$N = \frac{[1 - 3r / (4l)]mg \cos \varphi - 2m\dot{r}\dot{\varphi}}{1 + 3mr^2 / (4Ml^2)}.$$

2) Khi thanh OA ở vị trí nằm ngang với điều kiện $\varphi_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$ thì chất điểm khối lượng m với vận tốc v rơi thẳng đứng và vào thanh tại vị trí cách O một đoạn bằng a .

Áp dụng định lý biến thiên động lượng cho chất điểm B trong va chạm đó ta có:

$$m(v_1 - v) = -S'.$$

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng cho thanh OA trong va chạm đó ta có

$$\frac{4}{3}Ml^2\dot{\varphi}_1 = aS.$$

Ngay sau khi va chạm, lúc biến dạng cực đại ta có $v_1 = a\dot{\varphi}_1$.

Từ đây dễ dàng tính được:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{3mav}{4Ml^2 + 3ma^2}; \quad v_1 = \frac{3ma^2v}{4Ml^2 + 3ma^2}; \quad S = \frac{4Mml^2v}{4Ml^2 + 3ma^2}$$

3) Để cho chất điểm tiếp xúc với thanh sau khi va chạm thì phản lực pháp tuyến N của thanh tác dụng lên chất điểm B phải dương, kể cả thời điểm va chạm $r = a$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{r} = 0$, $\cos \varphi = 1$.

$$\text{Vậy } N = \frac{(1 - 3r / (4l))mg}{1 + 3mr^2 / (4Ml^2)} > 0, \text{ suy ra } a < \frac{4}{3}l.$$

4) Giả sử rằng sau va chạm, chất điểm B rời khỏi thanh OA, khi đó gia tốc tiếp tại điểm trên thanh mà chất điểm va chạm, phải lớn hơn gia tốc trọng trường g ($a_B^\tau > g$). Lúc đó hai vật rời nhau, phương trình chuyển động của thanh có dạng (thay $m = 0$ vào phương trình vi phân chuyển động):

$$\frac{4}{3}Ml^2\ddot{\varphi} = Mgl \cos \varphi; \quad \varphi = 0; \quad \ddot{\varphi} = \frac{3}{4} \frac{g}{l}.$$

Từ điều kiện $a_B^\tau > g$, kéo theo $a\ddot{\varphi} > g$ hoặc $\frac{3}{4} \frac{g}{l} a > g$ hay $a > \frac{4}{3}l$.

Điều này trái với giả thiết nhận được ở cuối phần 3). Do đó chất điểm B không rời khỏi thanh OA.

5) Trường hợp giới hạn $a = \frac{4}{3}l$.

Dễ dàng thấy rằng ở thời điểm sau va chạm $N = 0$. Tính đạo hàm N theo thời gian tại thời điểm đầu $\varphi = 0, r = a, \dot{r} = 0$. Theo biểu thức của N tìm được ở cuối phần 1) ta có:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\varphi=0, r=a, \dot{r}=0} = - \frac{2m\ddot{r}\ddot{\varphi}_1}{1 + 3ma^2 / (4Mt^2)}.$$

Mặt khác khi $\varphi = 0, r = a$ thì từ phương trình vi phân chuyển động $\ddot{r} = r\dot{\varphi}_1^2 = a\dot{\varphi}_1^2$ ta nhận được:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{t_1} = - \frac{2ma\dot{\varphi}_1^3}{1 + \frac{3}{4} \frac{ma^2}{Mt^2}}, \text{ vì } \dot{\varphi}_1 > 0 \text{ do đó } \left. \frac{dN}{dt} \right|_{t_1} < 0.$$

Phản lực pháp tuyến N sẽ trở thành âm, do vậy sau va chạm chất điểm B sẽ rời khỏi thanh OA.

Bài 25.

1) Phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ.

Cơ hệ có hai bậc tự do. Chọn các tọa độ suy rộng đủ như sau: $q_1 = x, q_2 = s$ (x thông số định vị của bàn rung tịnh tiến theo phương đứng kể từ vị trí cân bằng tĩnh của nó, s thông số định vị của con lăn đối với bàn rung).

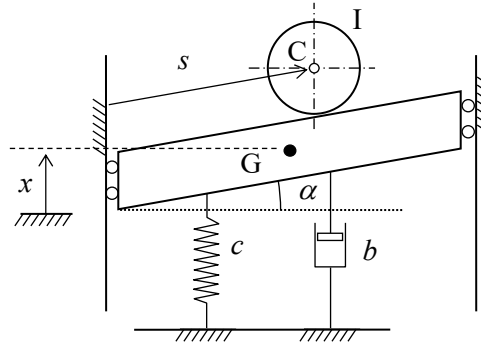
Biểu thức động năng của cơ hệ sẽ là:

$$T = \frac{1}{2}(m_0 + m)\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + m\dot{x}\dot{s}\sin\alpha.$$

Các lực suy rộng có biểu thức như sau:

$$Q_x = -c(x + \delta) + (m_0 + m)g - b\dot{x} + F_0 \sin \Omega t$$

$$Q_s = mg \sin \alpha.$$



ở đó δ là độ giãn tĩnh của lò xo.

áp dụng phương trình Lagrange loại II để viết phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ ta được:

$$(m_0 + m)\ddot{x} + m \sin \alpha \ddot{s} = -cx - b\dot{x} + F_0 \sin \Omega t$$

$$1,5\ddot{s} + \sin \alpha \ddot{x} = g \sin \alpha$$

2) Điều kiện lăn không trượt

Để tìm điều kiện này thì phải tính phản lực pháp tuyến và phản lực tiếp tuyến giữa con lăn và bàn rung. Muốn thế ta đặt lực quán tính theo lên con lăn (lực quán tính Côriôlic không có vì chuyển động theo là tịnh tiến). Dễ dàng thấy rằng hệ lực quán tính đó có hợp lực đặt tại khối tâm C của con lăn, phương thẳng đứng và có hình chiếu trên phương thẳng đứng bằng :

$$R_{qt}^e = -m\ddot{x}$$

Viết phương trình vi phân chuyển động của con lăn trong chuyển động tương đối (phương trình chuyển động song phẳng) ta có:

$$m\ddot{s} = (P - m\ddot{x}) \sin \alpha - F_{ms}$$

$$0 = N + (m\ddot{x} - P) \cos \alpha$$

$$J_C \ddot{\varphi} = F_{ms} r.$$

Ngoài ra từ hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ ta tính được

$$\ddot{x} = g - 1,5 \frac{\ddot{s}}{\sin \alpha}.$$

Khi thay $J_C = \frac{mr^2}{2}$; $\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{s}}{r}$, $\ddot{x} = g - 1,5 \frac{\ddot{s}}{\sin \alpha}$ vào các phương trình vừa nhận được, ta tính được:

$$F_{ms} = 0,5m\ddot{s}, N = 1,5m\ddot{s} \cot \alpha$$

Điều kiện lăn không trượt sẽ là:

$$F_{ms} < fN \Rightarrow \tan \alpha < 3f.$$

Bài 26.

1) Phối hợp định luật bảo toàn mômen động lượng với định luật bảo toàn cơ năng. Định luật bảo toàn mômen động lượng: $L_z = \text{const}$:

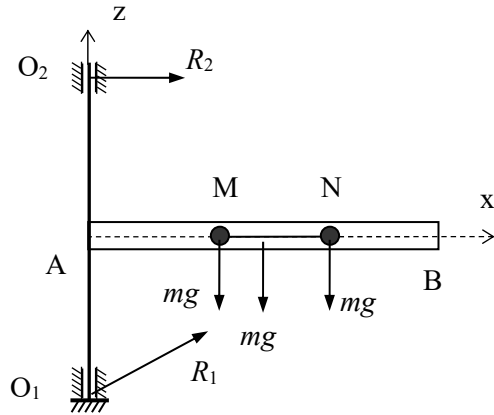
$$L_z = 2m(2l^2 + xl + x^2)\bar{\omega}$$

$$L_z^{(0)} = 4ml^2\omega_0$$

$$L_z^{(1)}(1) = 16ml^2\omega_1$$

$$\text{Từ } L_z^{(0)} = L_z^{(1)} \Rightarrow \omega_1 = \frac{\omega_0}{4} \quad (1)$$

$$L_z = L_z^{(0)} \Rightarrow \bar{\omega} = \frac{2l^2\omega_0}{2l^2 + xl + x^2}$$



$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{2l^2(2x+l)\omega_0}{(2l^2 + xl + x^2)^2} \dot{x} \quad (2)$$

Định luật bảo toàn cơ năng:

$$T_0 + \Pi_0 = T_1 + \Pi_1$$

$$\Pi_0 = \Pi_1 = \text{const} \Rightarrow T_0 = T_1$$

$$T_0 = 2ml^2\omega_0^2, \quad T_1 = \frac{ml^2}{2}\omega_0^2 + m\dot{x}_1^2.$$

Từ đó tính được:

$$\dot{x}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}l\omega_0. \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3) tìm được gia tốc góc của ống khi quả cầu N đạt đến đầu B:

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{5\sqrt{6}}{64}\omega_0^2.$$

2) Viết phương trình vi phân chuyển động tương đối cho quả cầu N.

$$m\ddot{x}_N = -T + m(x+l)\omega^2 \quad (4)$$

Xét chuyển động tương đối cho hệ gồm cả hai quả cầu M và N.

$$m\ddot{x}_N + m\ddot{x}_M = mx\omega^2 + m(x+l)\omega^2 \quad (5)$$

Vì $\ddot{x}_N = \ddot{x}_M$ nên từ (4) và (5) suy ra:

$$T = \frac{ml\omega^2}{2}. \quad (6)$$

Khi quả cầu N đạt đến đầu B, $\omega = \omega_1$, thay (1) vào (6) có

$$T_1 = \frac{ml\omega_0^2}{32}.$$

Bài 27.

1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động.

Động năng của hệ $T = T_1 + T_2$

$$T_1 = \frac{1}{2}M\rho^2\dot{\varphi}^2; \quad T_2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{r^2}{4} + x^2\right)\dot{\varphi}^2$$

Vậy $T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}[M\rho^2 + m(\frac{r^2}{4} + x^2)]\dot{\varphi}^2$

Các lực suy rộng :

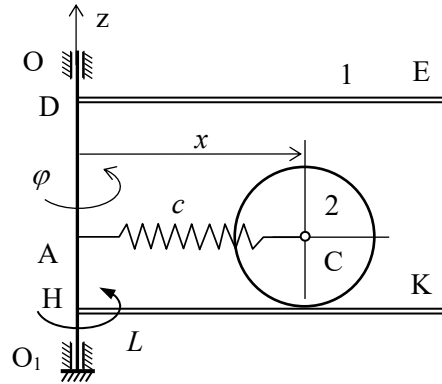
$$Q_x = -c(x - r); \quad Q_\varphi = L - b\dot{\varphi}.$$

Thay vào phương trình Lagrange loại II ta được hệ phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ như sau:

$$\frac{3}{2}\ddot{x} - x\dot{\varphi}^2 = -\frac{c}{m}(x - r),$$

(1)

$$[M\rho^2 + m(\frac{r^2}{4} + x^2)]\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} = L - b\dot{\varphi}$$



2) Thay $\dot{\varphi} = \omega_0 = const$ vào (1) ta có

$$\ddot{x} + \frac{2}{3}(\frac{c}{m} - \omega_0^2)x = -\frac{2cr}{3m} \quad (2)$$

a) Trường hợp $c > m\omega_0^2$ nghiệm của (2) có dạng

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{cr}{c - m\omega_0^2} \quad \text{với} \quad k = \sqrt{\frac{2}{3}(\frac{c}{m} - \omega_0^2)}.$$

Từ điều kiện đầu $x(0) = r, \dot{x}(0) = 0$ tìm được:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{mr\omega_0^2}{c - m\omega_0^2}.$$

Tâm đĩa chuyển động theo quy luật:

$$x = \frac{r}{c - m\omega_0^2}(c - m\omega_0^2 \cos kt)$$

b) Trường hợp $c < m\omega_0^2$ nghiệm của (2) có dạng

$$x = C_3 e^{k_1 t} + C_4 e^{-k_1 t} + \frac{cr}{c - m\omega_0^2} \quad \text{với} \quad k_1 = \sqrt{\frac{2}{3}(\omega_0^2 - \frac{c}{m})}$$

Từ điều kiện đầu tìm được:

$$C_3 = C_4 = -\frac{1}{2} \frac{mr\omega_0^2}{c - m\omega_0^2}.$$

Tâm đĩa chuyển động theo quy luật:

$$x = \frac{r}{c - m\omega_0^2} (c - m\omega_0^2 ch k_1 t).$$

c) Trường hợp $c = m\omega_0^2$, phương trình (2) có dạng $\ddot{x} = \frac{2rc}{3m}$ và nghiệm của nó là

$$x = \frac{rc}{3m} t^2 + C_5 t + C_6.$$

Từ điều kiện đầu tìm được $C_5 = 0$; $C_6 = r$.

Tâm đĩa chuyển động theo quy luật

$$x = \frac{rc}{3m} t^2 + r.$$

Bài 28.

1) Xác định luật chuyển động $x = x(t)$ của quả cầu dọc theo ống.

Phương trình cơ bản trong chuyển động tương đối trên hệ động có dạng

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{lx} + \vec{N} + \vec{F}_{qt}^e$$

(1)

Hệ tọa độ Oxy chọn như hình vẽ. Chiều (1) lên Ox ta được

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - F_{lx} - F_{qt}^e \cos \alpha \quad (2)$$

với

$$F_{lx} = c(x - l); F_{qt}^e = 6mbt$$

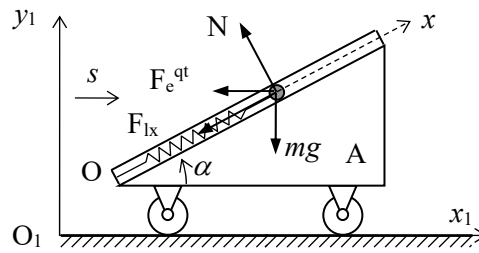
thay vào (2) được

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{c}{m} l_0 - g \sin \alpha - 6b(\cos \alpha) t. \quad (3)$$

Nghiệm của (3) có dạng: $x = \bar{x} + x^*$

trong đó:

- \bar{x} là nghiệm tổng quát của (3) khi không có vế phải



$$\bar{x} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad \text{với } k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

- x^* là một nghiệm riêng của (3) tìm được dưới dạng:

$$x^* = A_0 + A_1 t.$$

Các hệ số A_0, A_1 tìm được bằng cách thay x^* vào (3) rồi đồng nhất hai vế

$$A_0 = l_0 - \frac{c}{m} g \sin \alpha, \quad A_1 = -\frac{6bm \cos \alpha}{c}.$$

Với điều kiện đầu $x(0) = 2l_0; \dot{x}(0) = 0$ nghiệm của (3) sẽ là

$$x = \left(l_0 + \frac{mg \sin \alpha}{c}\right) \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t + \sqrt{\frac{m}{c}} \frac{6bm \cos \alpha}{c} \sin \sqrt{\frac{c}{m}} t + l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{c} - \frac{6bm \cos \alpha}{c} t.$$

2) Xác định áp lực của quả cầu lên ống tại thời điểm bất kỳ

Chiều (1) lên Oy có:

$$0 = m\ddot{y} = -mg \cos \alpha + N + 6bm \sin \alpha t$$

$$N = mg \cos \alpha - 6bm \sin \alpha t.$$

Bài 30.

1) Xác định phản lực ở A và B

Trước hết khảo sát chuyển động của con lăn. Áp dụng phương trình vi phân chuyển động của vật rắn chuyển động song phẳng, ta có:

$$m\ddot{x} = -F_{dh} - F_{ms} \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = N - mg = 0 \quad (2)$$

$$m\ddot{\varphi} = rF_{ms} \quad (3)$$

Do con lăn lăn không trượt nên ta có các hệ thức sau:

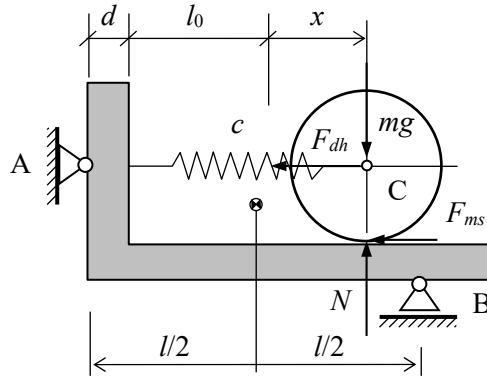
$$x = r\varphi \Rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\varphi} \quad (*)$$

Từ (2) suy ra:

$$N = mg \quad (4)$$

Từ (1), (3) và (*) suy ra :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{với} \quad \omega^2 = \frac{c}{m} \frac{1}{1 + i_c^2 / r^2}. \quad (5)$$



$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

Do đó $x = a \cos \omega t$.

(6)

(7)

$$F_{ms} = (m\omega^2 - c)x = (m\omega^2 - c)a \cos \omega t$$

(8)

$$\sum F_{kr} = X_A + F_{ms} + F_{dh} = 0 \quad (9)$$

(9)

$$\sum F_{ky} = Y_A + N_B - m_1 g - N = 0 \quad (10)$$

(10)

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = -m_1 g \frac{l}{2} - N(x+d+l_0) + N_B l + F_{ms} r = 0 \quad (11)$$

(11)

$$X_A = -\frac{c}{1 + (i_c / r)^2} a \cos \omega t \quad (12)$$

(12)

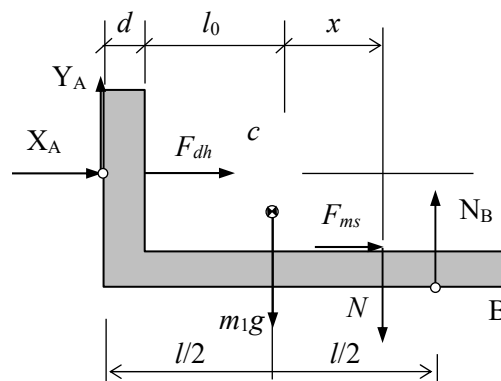
$$Y_A = \frac{m_1 g}{2} + m g \frac{l - d - l_0}{l} - \frac{1}{l} \left[m g + \frac{rc}{1 + (i_c / r)^2} \right] a \cos \omega t \quad (13)$$

(13)

$$N_B = \frac{m_1 g}{2} + mg \frac{d + l_0}{l} + \frac{1}{l} \left[mg + \frac{rc}{1 + (i_0 / r)^2} \right] a \cos \omega t \quad (14)$$

(14)

Từ các biểu thức (12), (13) và (14) trên ta thấy: X_A và Y_A đạt cực đại khi $\cos \omega t = -1$:



$$X_{A \max} = \frac{ac}{1 + (i_c / r)^2},$$

$$Y_{A\max} = \frac{m_1 g}{2} + mg \frac{l-d-l_0}{l} + \frac{a}{l} \left[mg + \frac{rc}{1 + (i_c / r)^2} \right].$$

- N_B đạt cực đại khi $\cos \omega t = 1$:

$$N_{B\max} = \frac{m_1 g}{2} + mg \frac{d+l_0}{l} + \frac{a}{l} \left[mg + \frac{rc}{1 + (i_c / r)^2} \right].$$

Bài 31.

1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ
Hệ có hai bậc tự do, chọn hai tọa độ suy rộng đủ:

$q_1 = \theta$ - góc quay của vành quanh trục O_1O_2 ,

$q_2 = \varphi$ - góc định vị của OC đối với trục O_1O_2 .

Sử dụng phương trình Lagrange loại II:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \quad (j = 1, 2)$$

Tính động năng của hệ

$$T = T_v + T_{AB} \quad (1)$$

T_v - động năng của vành:

$$T_v = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (2)$$

T_{AB} - động năng của thanh AB. Thanh AB chuyển động phức tạp, vận tốc theo và vận tốc tương đối vuông góc với nhau nên:

$$v_a^2 = v_e^2 + v_r^2$$

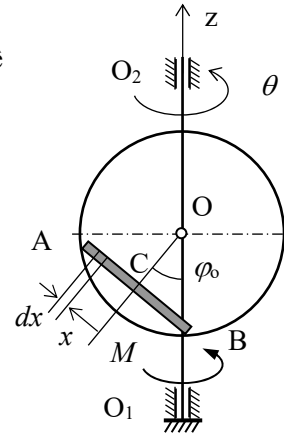
Từ đây có:

$$T_{AB} = T_{AB}^e + T_{AB}^r \quad (3)$$

với T_{AB}^e là động năng của thanh trong chuyển động theo:

$$T_{AB}^e = \frac{1}{2} J_{O_1O_2} \dot{\theta}^2, \quad (4)$$

trong đó $J_{O_1O_2}$ là mômen quán tính của thanh AB đối với trục O_1O_2 :



$$\begin{aligned}
J_{O_1O_2} &= J_{\Delta} + m(OC \sin \varphi)^2 \\
&= \frac{m}{2} \int_{-a}^a (x \cos \varphi)^2 dx + m(R^2 - a^2) \sin^2 \varphi \\
&= m \left[\frac{a^2 \cos^2 \varphi}{3} + m(R^2 - a^2) \sin^2 \varphi \right].
\end{aligned}$$

Thay vào (4) được:

$$T_{AB}^e = \frac{m}{2} \left[\frac{a^2 \cos^2 \varphi}{3} + (R^2 - a^2) \sin^2 \varphi \right] \dot{\theta}^2$$

T_{AB}^r là động năng của thanh trong chuyển động tương đối

$$T_{AB}^r = \frac{1}{2} J_O \dot{\varphi}^2 \quad (5)$$

trong đó J_O là mômen quán tính của thanh AB đối với trục qua O và vuông góc với mặt phẳng của vành

$$J_O = J_C + mOC^2 = \frac{ma^2}{3} + m(R^2 - a^2) = m(R^2 - \frac{2}{3}a^2).$$

Vậy: $T_{AB}^r = \frac{m}{2} (R^2 - \frac{2}{3}a^2) \dot{\varphi}^2$

Thay vào (1) được động năng của hệ là:

$$T = \left[J + \frac{ma^2 \cos^2 \varphi}{3} + m(R^2 - a^2) \sin^2 \varphi \right] \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{m}{2} (R^2 - \frac{2}{3}a^2) \dot{\varphi}^2$$

Chọn gốc thế năng tại O, thế năng của hệ là:

$$\Pi = -mg\sqrt{R^2 - a^2} \cos \varphi$$

Lực suy rộng :

$$Q_{\theta} = M - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = M; \quad Q_{\varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -mg\sqrt{R^2 - a^2} \sin \varphi.$$

Viết phương trình Lagrange loại II được hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ là:

$$\begin{aligned}
\left[J + \frac{ma^2 \cos^2 \varphi}{3} + m(R^2 - a^2) \sin^2 \varphi \right] \ddot{\theta} + m\dot{\varphi} \sin 2\varphi (R^2 - \frac{4}{3}a^2) &= M, \\
(R^2 - \frac{2}{3}a^2) \ddot{\varphi} - (R^2 - \frac{4}{3}a^2) \sin 2\varphi \frac{\dot{\theta}^2}{2} &= -g\sqrt{R^2 - a^2} \sin \varphi.
\end{aligned}$$

2) Xác định ngẫu lực M

Khi $R = a\sqrt{2}$ vành quay đều với vận tốc góc ω_0 , tức là $\dot{\theta} = \omega_0, \ddot{\theta} = 0$ và di chuyển của thanh đối với vành là nhỏ $\sin \varphi \approx \varphi, \sin 2\varphi \approx 2\varphi, \cos \varphi \approx 1$. Từ hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ ta có:

$$\frac{4}{3}ma^2\omega_0\dot{\varphi} = M \quad (6)$$

$$\ddot{\varphi} - \left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{3g}{4a}\right)\varphi = 0 \quad (7)$$

Giải phương trình vi phân (7), tìm nghiệm riêng với điều kiện đầu $t = 0, \varphi = \varphi_0, \dot{\varphi} = 0$.

a) Nếu $\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{3g}{4a}\right) > 0$ tức là $\omega_0 > \sqrt{\frac{3g}{2a}}$

Nghiem tổng quát của (7) là

$$\varphi = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} \quad \text{với} \quad \lambda = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{3g}{4a}},$$

với điều kiện đầu trên tìm được $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\varphi_0$.

Vậy: $\varphi = \frac{1}{2}\varphi_0(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) = \varphi_0 \cosh(\lambda t)$

$$\dot{\varphi} = \frac{\lambda}{2}\varphi_0(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) = \lambda\varphi_0 \sinh(\lambda t).$$

Thay vào (6) được $M = \frac{4}{3}ma^2\omega_0\lambda\varphi_0^2 \cosh(\lambda t) \sinh(\lambda t).$

b) Nếu $\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{3g}{4a} = 0$ tức là $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$

Phương trình vi phân (7) với điều kiện đầu cho $\dot{\varphi} = 0, \varphi = \varphi_0 = \text{const}$ thay vào (6) được $M = 0$.

c) Nếu $\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{3g}{4a}\right) < 0$ tức là $\omega_0 < \sqrt{\frac{3g}{2a}}$

Phương trình vi phân (7) với điều kiện đầu cho:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 \cos kt. \\ \dot{\varphi} &= -\varphi_{0k} \sin kt.\end{aligned}\quad \text{với } k = \sqrt{\frac{3g}{4a} - \frac{\omega_0^2}{2}}.$$

Thay vào (6) được

$$M = -\frac{2}{3}mk\omega_0 a^2 \varphi_0^2 \sin(2kt).$$

Bài 33 :

Trả lời: a) $x_C = \text{const}$; $y_C = -\frac{1}{2}gt^2 + 40\pi t$; $\varphi = \pi t^2$

b) $h_1 = h_2 = 1711 \text{ cm}$, c) Đầu A chạm đất trước, d) $S = m_1 20\pi^2$.

Bài 34:

Trả lời: $v = 8 \text{ m/s}$.

Bài 35:

Trả lời: $m_1 = m \frac{\varphi + \cos \varphi - 1}{1 - \cos \varphi}$.

Bài 38 :

Trả lời: $S = \frac{Q}{mk^2}(1 - \cos kt)$; $F_\tau = Q \cos kt$; $F_n = Q \sin kt$.

Bài 40 :

Trả lời: 1. Bỏ qua lực cản của nước: $v_A = \frac{m}{M+m} b\alpha(1 - e^{-\alpha t})$.

2. Có tính lực cản của nước:

$$v_A = \frac{mb\alpha^2}{(\alpha - \beta)(M+m)}(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}) \quad \text{với } \beta = \frac{r}{M+m}.$$

Bài 41 :

Trả lời:

$$\begin{aligned}(m_1 R^2 + 2m_2 a^2)\ddot{\varphi} + 2m_2 a l \ddot{\psi} \cos(\varphi + \psi) - 2m_2 a l \dot{\psi}^2 \sin(\varphi + \psi) \\ - 2m_2 g a \sin(\varphi + \psi) + 2c(\varphi + \psi) = 0, \\ m_2 a l \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \psi) + m_2 l^2 \ddot{\psi} - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \psi) \\ + m_2 g l \sin \psi + c(\varphi + \psi) = 0.\end{aligned}$$

Bài 42 :

Trả lời:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - mx\dot{\varphi}^2 - m\omega^2 \sin(\varphi - \omega t) &= mg \cos \varphi - c(x - l_0); \\ (m_1 x^2 + \frac{4}{3} M l^2) \ddot{\varphi} + 2m x \dot{x} \dot{\varphi} \\ &\quad - (mx + Ml) a \omega^2 \cos(\varphi - \omega t) = L - (mx + Ml) g \sin \varphi. \end{aligned}$$

Bài 43 :

Trả lời:

$$\begin{aligned} S_A &= \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 - \frac{m_2^2 g \sin \alpha}{c(m_1 + m_2)} \cos \omega t + L_0 - \frac{m_1 m_2 g \sin \alpha}{c(m_1 + m_2)}, \\ S_B &= \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + \frac{m_1 m_2 g \sin \alpha}{c(m_1 + m_2)} \cos kt - \frac{m_1 m_2 g \sin \alpha}{c(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

Bài 44 :

$$\begin{aligned} \text{Trả lời: } \omega^2 = \dot{\varphi}^2 &= \frac{3g \left[P(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + 2Qf(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) \right]}{2L(P + 3Q \cos^2 \varphi)}, \\ \varepsilon = \ddot{\varphi} &= \frac{3g \left(P \sin \varphi - 2Qf \cos \varphi + \frac{2QL\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g} \right)}{4L(P + 3Q \cos^2 \varphi)}. \end{aligned}$$

Bài 45:

$$\text{Trả lời: } a = \frac{2g \sin \alpha}{3 + k + f(1 - k)}, \quad N = \frac{(1 - k)mg \sin \alpha}{3 + k + f(1 - k)}.$$

Bài 46:

$$\text{Trả lời: } M_{A \min} = \frac{mgr_1 r_3}{r_2}, s = v_o t \frac{mg}{M_{tg}}, M_{tg} = m + \frac{m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2}{2r_3^2} + m_1 \frac{r_2^2}{2r_3^2}$$

Bài 47 :

$$\text{Trả lời: a) } F = (P_1 + P_1) \tan \alpha; \text{ b) } F > (P_1 + P_2) \tan \alpha; \text{ c) } F < (P_1 + P_2) \tan \alpha.$$

Bài 48 :

Trả lời:

$$\text{a) } \vec{F}_1 = -\frac{m\rho^2}{r^2} \vec{a}; \quad \vec{F}_2 = (M + 2m + \frac{m\rho^2}{r^2}) \vec{a};$$

$$\text{b) } a = \frac{bgf}{2b - hf}; \quad N_1 = \frac{Mg(b - hf)}{2b - hf}; \quad f^* \geq \frac{b}{h}; \quad N_2 = \frac{Mgb}{2b - hf}.$$

Bài 49 :

Trả lời: $V_D = 4,43 \text{ m/s}, \quad a_D = 9,8 \text{ m/s}^2$

Bài 50:

Trả lời:

1) Hệ đã cho có hai bậc tự do. Bốn tọa độ suy rộng s, x, φ, ψ như hình vẽ liên kết với nhau bằng hai hệ thức:

$$S = (R + l) \tan \varphi \quad (1)$$

$$S = R\psi \quad (2)$$

Chọn hai tọa độ suy rộng độc lập là x, s

Từ (1) và (2) ta có các mối liên hệ động học như sau:

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{S}}{R} \quad (3)$$

$$\dot{S} = \frac{R + l}{\cos^2 \varphi} \dot{\varphi}, \quad \ddot{S} = \frac{(R + l)(\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}^2 \tan \varphi)}{\cos^2 \varphi} \quad (4)$$

Động năng của hệ:

$$T = (M\dot{x}^2 + mv_c^2 + I_c \dot{\psi}^2) / 2 = (M + m) \frac{\dot{x}^2}{2} + m\dot{x}\dot{s} + \frac{3}{4}m\dot{s}^2 \quad (5)$$

Thay vào phương trình Lagarang loại 2 ta có:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \pi}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (M + m)\ddot{x} + m\dot{s}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = m\ddot{x} + \frac{3}{2}m\dot{s}$$

$$- \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0; \quad - \frac{\partial \pi}{\partial s} = - \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -c\varphi \frac{\cos^2 \varphi}{R + l}$$

Thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m\ddot{s} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} m\left(\ddot{x} + \frac{3\ddot{s}}{2}\right) = -\frac{c\varphi \cos^2 \varphi}{R+l} \end{cases} \quad (7)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{s}(0) = 0$$

Từ (6) suy ra: $\dot{x} = -\frac{m}{M+m}\dot{s} \Leftrightarrow \dot{x} = -k\dot{s}$ (*)

Với $k = \frac{m}{m+M} = \frac{1}{4}$

Từ (7) suy ra $\left(\frac{3}{2} - k\right)m\ddot{s} = a\ddot{s} = -\frac{c\varphi \cos^2 \varphi}{R+l} = -\frac{c\varphi \dot{\varphi}}{\dot{s}}$ (8)

Thay (4) vào (8) ta có:

$$\begin{aligned} & a \frac{(R+l)^2 (\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}^2 \tan \varphi) \dot{\varphi}}{\cos^4 \varphi} + c\varphi \dot{\varphi} = 0 \\ & \Leftrightarrow \dot{\varphi} \left[a \frac{(R+l)^2 (\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}^2 \tan \varphi)}{\cos^4 \varphi} + c\varphi \right] = 0 \end{aligned} \quad (**)$$

Tại thời điểm ban đầu: $\varphi(0) = \varphi_0; \dot{\varphi}(0) = 0; \ddot{\varphi}(0) = \varepsilon(0)$

Từ (**) $\Rightarrow \varepsilon(0) = -\frac{c\varphi_0 \cos^4 \varphi_0}{a(R+l)^2} = \frac{-27\pi}{640} \cdot \frac{c}{mR^2}$

$$\ddot{s}(0) = \frac{R+l}{\cos^2 \varphi_0} \ddot{\varphi}(0) = \frac{16}{9} R \varepsilon(0) = \frac{-3\pi}{40} \frac{c}{mR}$$

2) $\ddot{x}(0) = -k\ddot{s}(0) = \frac{3\pi}{160} \frac{c}{mR}$

$$T_0 = 0; \pi_0 = \frac{c\varphi_0^2}{2}; \pi|_{\varphi=0} = 0; \Gamma|_{\varphi=0} = \frac{a}{k^2} \frac{v_2^2}{2}$$

$$T_0 + \pi_0 = T|_{\varphi=0} + \pi|_{\varphi=0} \Rightarrow v_2 = \dot{x}|_{\varphi=0} \varphi_0 \sqrt{\frac{ck^2}{a}} = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{c}{5m}}$$

Bài 51 :

$$\text{Trả lời:} \quad \omega_1 = \frac{10L_1 - 3L_2}{243mr^2} t$$

Bài 53 :

$$\text{Trả lời:} \quad a_A = \frac{(2M_1 + M_2 - 5mgr)r}{J + 5mr^2}$$

Bài 54 :

Trả lời :

$$\text{a) } v(t) = v_0 + \frac{g}{\omega_0} \ln |\cos \omega_0 t|$$

$$\text{b) } |F| = (M + m)g \tan \omega_0 t + m\omega_0^2 \sin \omega_0 t$$

Bài 55 :

Trả lời :

$$\text{a) } \left[J_o + \frac{mM}{m+M}(x^2 + y^2) \right] \dot{\varphi} + \frac{mM}{m+M}(x\dot{y} - \dot{x}y) = \frac{mM}{m+M}(x_0\dot{y}_0 - \dot{x}_0y_0)$$

Trong đó $x_o, y_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o$ là các tọa độ và hình chiếu vận tốc điểm A trên các trục tại thời điểm $t = 0$.

$$\text{b) } \varphi(t) = -\frac{mM}{2(m+M)} \cdot \frac{R\alpha}{J_o + \frac{mM}{m+M}R^2} t^2 = \frac{\beta}{2R} t^2,$$

$$\xi(t) = -\frac{mR}{m+M} \cos \frac{\alpha + \beta}{2R} t^2,$$

$$\eta(t) = -\frac{mR}{m+M} \sin \frac{\alpha + \beta}{2R} t^2,$$

Trong đó $\varphi(t)$ là góc quay của đĩa; $\xi(t)$ và $\eta(t)$ là tọa độ khối tâm đĩa trong hệ tọa độ Đề các cố định lấy gốc ở khối tâm của hệ.

Bài 56 :

$$\text{Trả lời: } v_c = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{c}{3m}}.$$

Bài 57 :

Trả lời : $v_r = \sqrt{\frac{c(M+m)}{Mm}}$. Không phụ thuộc.

Bài 58 :

Trả lời:

$$\begin{aligned}(8m+3M)\ddot{x}_1 - M\ddot{x}_2 &= -\frac{4}{r}L; \\ -M\ddot{x}_1 + (8m+3M)\ddot{x}_2 + 8cx_2 &= -\frac{4}{r}L.\end{aligned}$$

Bài 59:

Trả lời:

1) Phương trình vi phân chuyển động của hệ

$$\begin{aligned}\left(m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_3 + m_4\right)\ddot{x} - \left(\frac{1}{2}m_3 + 2m_4\right)\ddot{s} &= m_1g \\ \left(\frac{3}{2}m_3 + 4m_4\right)\ddot{x} - \left(\frac{1}{2}m_3 + 2m_4\right)\ddot{s} &= 0\end{aligned}$$

2) Tích phân cyclic: $\left(\frac{3}{2}m_3 + 4m_4\right)\dot{x} - \left(\frac{1}{2}m_3 + 2m_4\right)\dot{s} = \text{const}$

3) Giải hệ $\ddot{x} = \frac{5}{9}g, \ddot{s} = \frac{2}{9}g$. Lực căng dây treo vật A: $T_{d1} = \frac{1}{3}m_3g$, lực căng dây quần vào trụ C: $T_{d2} = \frac{7}{36}m_3g$.

Bài 60 :

Trả lời:

$$\left[J_0\left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right)^2 + J_1\right]\ddot{\varphi} = (M_0 - M'_0)\left(1 + \frac{1}{i_{12}}\right) - M_1.$$

Bài 61 :

Trả lời:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{x} &= F(\cos \alpha + f \sin \alpha) - g(m_1 + m_2)f, \\ R\ddot{\varphi} &= 2fg, \\ m_2R\ddot{\psi} &= 2f(m_2g - F \sin \alpha)\end{aligned}$$

Với mọi $F > \frac{3gf(m_1 + m_2)}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$.

Bài 62 :

$$\text{Trả lời:} \quad \frac{Q+P}{g} R^2 \ddot{\theta} + \frac{Q}{g} R \sin \gamma \ddot{s} = 0, \frac{Q}{g} R \sin \gamma \ddot{\theta} + \frac{Q}{g} \ddot{s} = P \cos \gamma.$$

Bài 63 :

Trả lời:

θ - góc quay của trục máy,

φ - góc lệch giữa thanh và đường thẳng đứng.

$$\begin{aligned} \frac{2P+Q \sin^2 \varphi}{g} l \ddot{\varphi} + \frac{Q}{2g} l \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2 - \frac{2P}{g} (e+l \sin \varphi) \cos \varphi \dot{\theta}^2 \\ - \frac{P}{g} l \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2 + 2cl(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \cos \varphi + Q \sin \varphi = 0, \\ \frac{2P}{g} (e+l \sin \varphi)^2 \ddot{\theta} + \frac{4P}{g} (e+l \sin \varphi) l \cos \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} = M. \end{aligned}$$

Bài 64 :

Trả lời:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} + 2br^2\dot{\varphi} - br(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2r^2\varphi - cr(x_1 + x_2) &= M \\ m_1\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - r\dot{\varphi}) + c(x_1 - r\varphi) &= m_1g \\ m_2\ddot{x}_2 + b(\dot{x}_2 - r\dot{\varphi}) + c(x_2 - r\varphi) &= -m_2g. \end{aligned}$$

Bài 65 :

Trả lời:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [(J_1 + J_2 + J_3 + m_3 \rho^2) \dot{\varphi}] &= M, \\ (m_2 + m_3) \ddot{z} &= F_{12} - (m_2 + m_3)g, \\ m_3(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) &= F_{23}. \end{aligned}$$

Bài 66 :

Trả lời:

$$\begin{aligned} m_3 \ddot{x} &= F_{23}, \\ (m_2 + m_3) \ddot{y} &= F_{12}, \\ (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{z} &= F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g. \end{aligned}$$

Bài 67 :

Trả lời:

1) Đặt $\angle BCF = \alpha$; $v_1^2 = \frac{v_0^2 - 2gR}{3}$; $\sin \alpha = \frac{v_0^2 - 2gR}{3gR}$.

- Khi $v_0^2 = 2gR$, vật tới B.

- Khi $v_0^2 = 5gR$ vật rơi vào H.

- Khi $2gR < v_0^2 < 5gR$ vật rơi vào E.

2) Gọi t_1 là nghiệm dương của phương trình :

$$gt^2 - (2v_1 \cos \alpha)t - 2R \sin \alpha = 0 \text{ thì } L = (v_1 \sin \alpha)t_1 - R \cos \alpha$$

Bài 69 :

Trả lời: $t_1 = \frac{2v_1}{7fg}$; $v = \frac{2v_1}{7}$; $\omega = \frac{5v_1}{7r}$

Bài 70 :

Trả lời: $n = 40,6$ vòng.

Bài 71 :

Trả lời:

Số bậc tự do của cơ hệ $n = 2$

Chọn tọa độ suy rộng $q_1 = \varphi$; $q_2 = \theta$. Trong đó θ là góc quay của trục.

Phương trình Lagrange II:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_{\theta}$$

Tìm động năng: $T = T_{vanh} + T_{dia}$

Động năng của vành: $T_{vanh} = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \dot{\theta}^2$

Động năng của đĩa:

$$T_{dia} = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \sum m_k (v_{kr}^2 + v_{ke}^2) = \frac{1}{2} \sum m_k v_{kr}^2 + \frac{1}{2} \sum m_k v_{ke}^2 = T_r + T_e$$

$$T_r = \frac{3}{4} m (R-r)^2 \dot{\varphi}^2, T_e = \frac{1}{2} \left[\frac{mr^2}{4} + m(R-r)^2 \sin^2 \varphi \right] \dot{\theta}^2$$

$$\text{Vậy: } T = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{3}{4} m(R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{mr^2}{4} + m(R-r)^2 \sin^2 \varphi \right] \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2} m(R-r)^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{3}{2} m(R-r)^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} m(R-r)^2 \sin 2\varphi \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{4} (2MR^2 + mr^2) \dot{\theta} + m(R-r)^2 \sin^2 \varphi \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{4} (2MR^2 + mr^2) \ddot{\theta} + m(R-r)^2 \sin 2\varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} + m(R-r)^2 \sin^2 \varphi \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

Tìm lực suy rộng:

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} [-mg(R-r) \cos \varphi] = -mg(R-r) \sin \varphi$$

$$Q_\theta = L$$

Phương trình chuyển động của hệ:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m(R-r)^2 \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} m(R-r)^2 \sin 2\varphi \dot{\theta}^2 = -mg(R-r) \sin \varphi \\ \frac{1}{4} (2MR^2 + mr^2) \ddot{\theta} + m(R-r)^2 \sin 2\varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} + m(R-r)^2 \sin^2 \varphi \ddot{\theta} = L \end{cases}$$

Hay

$$3\ddot{\varphi} - \sin 2\varphi \dot{\theta}^2 + 2 \frac{g}{R-r} \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} (2MR^2 + mr^2) \ddot{\theta} + m(R-r)^2 \sin 2\varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} + m(R-r)^2 \sin^2 \varphi \ddot{\theta} = L \quad (2)$$

Tại vị trí cân bằng tương đối $\dot{\theta} = \omega_0$; $\ddot{\theta} = 0$; $\varphi = \text{const}$; $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$

$$\text{Thay vào phương trình (1): } \cos \varphi_0 = -\frac{g}{(R-r)\omega_0^2}$$

Thay vào phương trình (2): $L = 0$

Bài 74:

Trả lời:

Ma trận quán tính:

$$a_{11} = (m_1 + 1,5m_2); a_{22} = \left[\frac{1}{3} m_1 L + \frac{3m_2 R^2}{8 \sin^4(0,5\theta)} \right];$$

$$a_{12} = a_{21} = \left[m_1 L \sin^2(0,5\theta) + 0,75 \frac{m_2 R}{\sin^2(0,5\theta)} \right]$$

$$Q_u = F; \quad Q_\theta = 2m_2 g L \cos \theta$$

Bài 75:

Trả lời:

Ma trận quán tính:

$$a_{11} = J_1 + J_2 + m_2 \left[u^2 + R^2 - 2e \left(u \sin \frac{u}{R} + R \cos \frac{u}{R} \right) \right]; a_{22} = \frac{J_2}{R^2} + m_2;$$

$$a_{12} = a_{21} = m_2 \left(u \sin \frac{u}{R} + R \cos \frac{u}{R} \right) + \frac{J_2}{R}$$

Trong đó: $J_1 = \frac{4}{3} m_1 L^2; J_2 = m_2 \rho^2$

Lực suy rộng:

$$Q_\varphi = M - m_1 g L \cos \varphi - m_2 g_2 u \cos \varphi - m_2 g R \sin \varphi + m_2 g e \sin \left(\varphi + \frac{u}{R} \right);$$

$$Q_u = -cu - m_2 g \sin \varphi + \frac{m_2 g e}{R} \sin \left(\varphi + \frac{u}{R} \right)$$

Bài 76:

Trả lời:

$$1) \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_{tg}}{J_{tg}} = \frac{1}{J_{tg}} [M_1 - b\omega - c\varphi + 0,5(m_0 + 2m)g(R-r) \sin \varphi]$$

2) Nghiệm của phương trình (nghiệm riêng) $n < k$

$$\varphi = B \sin(\Omega t - \alpha); \quad B = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2 \Omega^2}}; \quad \alpha = \arctan \frac{2n\Omega}{k^2 - \Omega^2}$$

Bài 77:

Trả lời:

Gia tốc thùng xe

$$a = \frac{F_{tg}}{m_{tg}} = \frac{(M - \frac{k}{r}v)\frac{1}{r} - bv}{m_0 + 1,5m} = \frac{F_0 - b_0v}{m_{tg}}$$

Vận tốc bình ổn của xe $v = v_\infty(1 - e^{-\alpha t})$

Bài 78:

Trả lời:

1) Phương trình vi phân chuyển động của hệ

$$(m_0 + m)\ddot{x} + 2me \sin \varphi \ddot{\varphi} + 2me \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + cx - b\dot{x} = 0;$$
$$me \sin \varphi \ddot{x} + (J + me^2)\ddot{\varphi} + mge \sin \varphi - M = 0$$

2) Chuyển động của bàn rung

$$x = B \cos(\Omega t - \alpha); \quad B = \frac{2me\Omega^2}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}}; \quad \alpha = \arctan \frac{2n\Omega}{k^2 - \Omega^2}$$

Bài 79:

Trả lời:

1) Phương trình vi phân chuyển động của hệ

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2(R + r)\ddot{\varphi} \cos \varphi + m_2(R + r)\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F_0 \cos \Omega t$$
$$-\ddot{x} \cos \varphi + \frac{3}{2}(R + r)\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$$

2) Hệ phương trình dao động bé:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - m_2(R + r)\ddot{\varphi} = F_0 \cos \Omega t$$
$$-\ddot{x} + \frac{3}{2}(R + r)\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$$

Từ đó rút \ddot{x} từ phương trình thứ nhất và thế vào phương trình thứ 2, ta được

$$\ddot{\varphi} + \frac{2(m_1 + m_2)g}{(3m_1 + m_2)(R + r)}\varphi = \frac{2F_0}{(3m_1 + m_2)(R + r)}\cos \Omega t$$

Hay $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = A \cos \Omega t$

Với $k^2 = \frac{2(m_1 + m_2)g}{(3m_1 + m_2)(R + r)}, A = \frac{2F_0}{(3m_1 + m_2)(R + r)}$

Nghiệm tổng quát với các điều kiện đầu $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$ là:

$$\varphi = \frac{A}{k^2 - \Omega^2} (\cos \Omega t - \cos kt)$$

Bài 80:

Trả lời:

$$a_A = \frac{P_1 - 3fP_2}{P_1 + 3P_2} g ; \quad a_C = \frac{P_1 + (2 - f)P_2}{P_1 + 3P_2} g$$

