

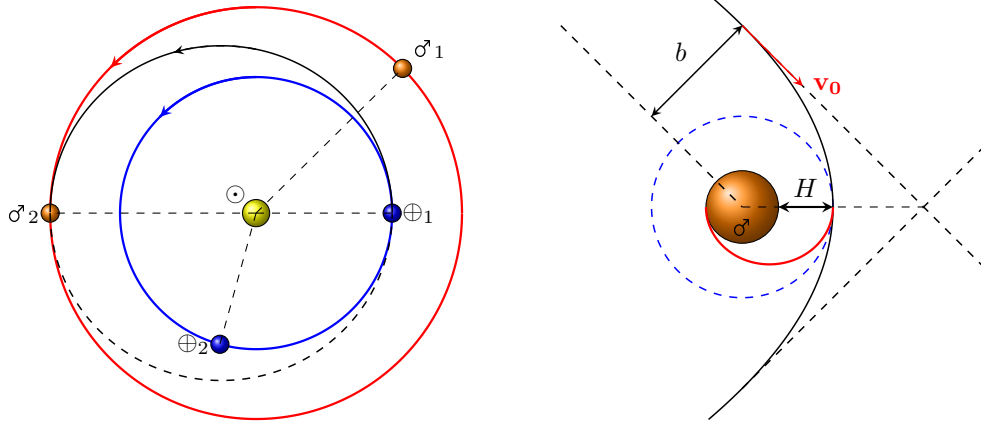
BÀI TẬP CƠ HỌC THIÊN THỂ

Sưu tầm và biên soạn bởi **Zinc**

Cập nhật mới nhất: 20.08.2023

Bài 1. Sự mệnh đến sao Hoả

1. Cách hiệu quả nhất để đưa một phi thuyền từ Trái Đất đổ bộ lên Hoả tinh được tính toán sử dụng *chuyển quỹ đạo Hohmann*. Nếu hai quỹ đạo hành tinh là đường tròn đồng tâm, thì quỹ đạo chuyển tiếp có dạng nửa elip sao cho cận điểm là điểm phóng còn viễn điểm là điểm đến. Cho chu kì chuyển động của Trái Đất và Hoả tinh quanh Mặt Trời lần lượt T_E , T_M . Không kể đến ảnh hưởng của sự chuyển động Trái Đất vào sự phóng phi thuyền, coi rằng chuyển động của phi thuyền trong chuyến đi chỉ ảnh hưởng bởi lực hấp dẫn từ Mặt Trời.



- Tìm vận tốc tối thiểu của phi thuyền tại vị trí phóng trên Trái Đất để có thể chuyển quỹ đạo.
- Tính góc giữa Hoả tinh, Trái đất có đỉnh tại Mặt Trời để có thể thực hiện chuyến du hành.
- Chuyến đi kéo dài trong bao lâu?

2. Khi đến Hoả tinh lực hấp dẫn của Hoả tinh hoàn toàn chiếm ưu thế, coi rằng phi thuyền đang có vận tốc v_0 so với Hoả tinh và đang ở rất xa hành tinh, không mở động cơ và bay đến gần hành tinh này với khoảng nhằm b theo quỹ đạo hyperbol. Biết Hoả tinh có khối lượng M , bán kính R và không có khí quyển, khối lượng m của tàu rất nhỏ so với khối lượng của hành tinh và trong quá trình chuyển động, tàu không bị chạm vào bề mặt hành tinh. Coi hệ gồm con tàu và hành tinh là hệ cô lập.

- Hãy xác định độ cao nhỏ nhất giữa phi thuyền và bề mặt Hoả tinh. Coi rằng phi thuyền không va chạm vào bề mặt Hoả tinh.
- Xác định góc đổi hướng khi phi thuyền ở vô cùng đến khi phi thuyền tại cận điểm so với Hoả tinh. Góc này gọi là *nửa góc tán xạ hấp dẫn*.
- Phi thuyền ở vị trí như ý 2a thì bất ngờ giảm tốc đột ngột, và tiếp đất trên bề mặt Hoả tinh ở phía đối diện so với vị trí giảm tốc. Xác định độ giảm tốc Δv và vận tốc của phi thuyền tại điểm tiếp đất.

Bài 2. Sao chổi Halley

Coi Trái Đất (T) chuyển động xung quanh Mặt Trời (S) theo một quỹ đạo tròn bán kính $R_T = 150 \times 10^9$ m với chu kỳ T_0 và vận tốc v_T . Một sao chổi (C) chuyển động với quỹ đạo nằm trong mặt phẳng quỹ đạo của Trái Đất, đi gần Mặt Trời nhất ở khoảng cách bằng kR_T với vận tốc ở điểm đó là v_1 . Bỏ qua tương tác của sao chổi với Trái Đất và các hành tinh khác trong hệ Mặt Trời.

- (a) Xác định vận tốc v của sao chổi khi nó cắt quỹ đạo của Trái Đất theo k , v_T và v_1 . Cho biết $k = 0.42$, $v_T = 3 \times 10^4$ m/s và $v_1 = 65.08 \times 10^3$ m/s.
- (b) Chứng minh rằng quỹ đạo của sao chổi này là một elip. Hãy xác định bán trục lớn a dưới dạng $a = \lambda R_T$ và tâm sai e của elip này theo k , v_T và v_1 . Biểu diễn chu kỳ quỹ đạo của sao chổi quanh Mặt Trời dưới dạng $T = nT_0$. Xác định các trị số λ , e và n .
- (c) Gọi τ là khoảng thời gian mà sao chổi còn ở bên trong quỹ đạo của Trái Đất, tức là $r = CS \leq R_T$. Giá trị của τ cho ta biết cỡ độ lớn của khoảng thời gian có thể quan sát được sao chổi này từ Trái Đất. Hãy biểu diễn τ dưới dạng tích phân và tính giá trị tích phân đó bằng máy tính.

Bài 3. Kế hoạch phóng vệ tinh

Giả thiết coi Trái Đất là một quả cầu đồng chất, có khối lượng phân bố đều, bỏ qua mọi tác động của việc Trái Đất tự quay quanh mình và ảnh hưởng của các yếu tố thời tiết. Từ trạm không gian cách mặt đất một độ cao h người ta bắn ra một vật thể nhỏ. Vật nhỏ chuyển động so với Trái Đất với vận tốc ban đầu có phương vuông góc với đường thẳng nối giữa vật và tâm Trái Đất. Biết bán kính Trái Đất là R , khối lượng Trái Đất là M , hằng số hấp dẫn là G .

- (a) Để vật nhỏ có thể chuyển động tuần hoàn quanh Trái Đất thì vận tốc ban đầu của nó phải thỏa mãn điều kiện gì?
- (b) Giả sử vận tốc ban đầu của vật nhỏ là v_0 , vật có khả năng rơi xuống đất. Tìm độ lớn và hướng của vận tốc lúc vật chạm đất (tức góc hợp bởi vectơ vận tốc của vật và phương ngang) và thời gian kể từ khi vật được bắn ra cho đến khi rơi xuống đất.
- (c) Một lỗi kỹ thuật lớn đã xảy ra với vệ tinh khiến nó không thể phóng được, công nghệ của trạm phóng không đủ để khắc phục, đành phải gửi qua nước phát triển cách nó một góc θ_0 so với tâm Trái Đất. Để giải quyết một cách nhanh nhất, trạm phóng đành phóng vệ tinh bay đến đó. Hãy tìm vận tốc v_0 bé nhất cần cấp cho vệ tinh để được điểm đến.

Gợi ý toán học: Cho biết nguyên hàm sau

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{-ax^2 + bx - c}} = \frac{\sqrt{-ax^2 + bx - c}}{a} + \frac{b}{2a\sqrt{a}} \arcsin\left(\frac{2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) + C,$$

với $a, b, c > 0$ và C là hằng số.

Bài 4. Thiên thạch chệch chóc

Quỹ đạo chuyển động của một thiên thể P (tiểu hành tinh hoặc một thiên thạch) quanh Mặt Trời là một đường conic được cho bởi công thức

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta},$$

trong đó r là khoảng cách từ P đến Mặt Trời S và θ là góc tạo bởi vector bán kính SP với trục cực SA (Chiều dương của chuyển động ngược chiều kim đồng hồ). p là bán trục vuông của P, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ là hằng số hấp dẫn, $M \approx 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ là khối lượng Mặt Trời, ε là tâm sai quỹ đạo, m và E lần lượt là khối lượng và cơ năng của thiên thể P.

Giả sử một thiên thạch chuyển động quanh Mặt Trời theo quỹ đạo parabol. Quỹ đạo Trái Đất quanh Mặt Trời có thể coi như gần đúng đường tròn. Hai quỹ đạo cắt nhau tại hai điểm C và D. Cho biết bán kính quỹ đạo Trái Đất $R_E \approx 1.49 \times 10^{11} \text{ m}$, điểm cận nhật A của quỹ đạo thiên thạch cách Mặt Trời một khoảng bằng k lần bán kính quỹ đạo Trái Đất, bỏ qua tương tác giữa Trái Đất và thiên thạch. Hãy tính:

- (a) Thời gian $T = \alpha T_0$ thiên thạch đi bên trong quỹ đạo Trái Đất, với T_0 là chu kì Trái Đất quay quanh Mặt Trời. Biểu diễn hệ số α theo k .
- (b) Tìm giá trị của k để Trái đất và thiên thạch gặp nhau hai lần tại C và D, giả sử hai thiên thể này quay ngược chiều so với nhau.
- (c) Tốc độ của thiên thạch khi nó đi qua hai điểm C, D.

Gợi ý toán học: Cho biết nguyên hàm sau

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x+a}} = \frac{2}{3}(x-2a)\sqrt{x+a} + C,$$

với a, C là các hằng số.

Bài 5. Lạc vào đám mây bụi

Một phi thuyền khi đi vào một đám mây bụi có khối lượng M phân bố đều có bán kính R . Vận tốc của phi thuyền ở rất xa là $v_0 = \sqrt{GM/R}$ và hệ số va chạm là $b = R$. Bỏ qua mọi ma sát, kể cả ma sát giữa bụi và phi thuyền.

- (a) Tìm góc tán xạ θ của phi thuyền.
- (b) Tìm khoảng cách nhỏ nhất giữa phi thuyền và đám mây.
- (c) Thuyền trưởng điên rồ của phi thuyền quyết định bắn bom nguyên tử vào đám mây để phá huỷ đám mây đó. Coi như 50 % năng lượng của bom chuyển được chuyển hoá để phá huỷ đám mây, còn lại toả ra dưới dạng nhiệt, tìm công A tối thiểu của bom để thực hiện việc này.

Gợi ý toán học: Cho biết nguyên hàm sau

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{-ax^2 + bx - c}} = \frac{\sqrt{-ax^2 + bx - c}}{a} + \frac{b}{2a\sqrt{a}} \arcsin\left(\frac{2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) + C,$$

với $a, b, c > 0$ và C là hằng số.

Bài 6. Tán xạ trong trường lưỡng cực

Một hạt điện tích $+Q$ khối lượng m đang đi ngang qua một lưỡng cực điện cố định có mômen lưỡng cực $\mathbf{p} = qa$ (2 điện tích $\pm q$ cách nhau khoảng a nhỏ). Tìm khoảng cách gần nhất giữa hạt Q và lưỡng cực \mathbf{p} , biết hệ số va chạm $b = 10^{-3} \text{ m}$ ($b \gg a$), và ban đầu hạt có vận tốc v_∞ .

Gợi ý: Ta có thể sử dụng những công thức điện thế và cường độ điện trường của lưỡng cực điện trong hệ tọa độ cực.

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \cdot \mathbf{e}_r + \sin \theta \cdot \mathbf{e}_\theta), \quad V = -\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Bài 7. Độ lệch thế kỷ

Ta sẽ đi nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng tương đối tính vào quỹ đạo của Thuỷ tinh khối lượng m quanh Mặt Trời khối lượng M .

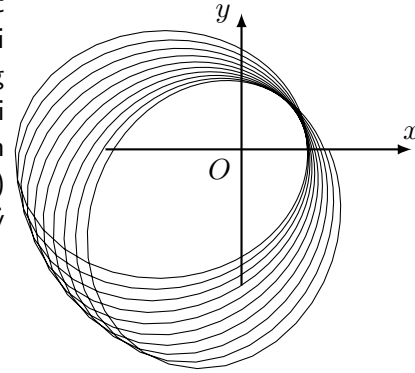
- (a) Chứng minh rằng quỹ đạo chuyển động của hành tinh luôn nằm trong một mặt phẳng và năng lượng toàn phần của điện tích có dạng sau, và chứng minh đại lượng đó bảo toàn:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{GMm}{r}.$$

- (b) Giả thiết quỹ đạo chuyển động của hành tinh là một đường tròn bán kính r , hãy biểu diễn mối liên hệ giữa r và momen động lượng L của Thuỷ tinh theo các tham số m , M .

- (c) Do chuyển động của hành tinh nằm trong một mặt phẳng, nên bài toán không giảm tính tổng quát, khi chúng ta cho rằng quỹ đạo của Thuỷ tinh nằm trong mặt phẳng Oxy với gốc O nằm tại Mặt Trời. Xét bài toán trong hệ tọa độ cực (r, θ) . Hãy tìm phương trình quỹ đạo tổng quát (định luật 1 Kepler tương đối tính) của Thuỷ tinh và chứng minh rằng quỹ đạo của Thuỷ tinh có dạng

$$r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos[\alpha(\theta - \theta_0)]},$$



ở đây $\alpha = 1$ tương ứng với trường hợp cổ điển, khi đó không có tiến động. Một cách trực quan, quỹ đạo tiến động quanh Mặt Trời của Thuỷ tinh được minh họa bằng hình vẽ bên. Hãy biểu diễn α , ϵ và r_0 theo các thông số của quỹ đạo (E và L).

- (d) Bán kính trung bình của quỹ đạo Thuỷ tinh là $\bar{r} = 5.8 \times 10^{10}$ m và chu kỳ là 88 ngày, hãy tính góc tiến động của quỹ đạo Thuỷ tinh sau một thế kỷ.

Gợi ý: Hãy chứng minh phương trình chuyển động của Thuỷ tinh thoả mãn phương trình vi phân (Phương trình Binet tương đối tính):

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left[1 - \left(\frac{\beta}{Lc} \right)^2 \right] u = \frac{E\beta}{L^2 c^2}.$$

Với $u = \frac{1}{r}$, $\beta = GMm$, L và E lần lượt là momen động lượng và năng lượng toàn phần của điện tích.

Bài 8. Vệ tinh địa tĩnh trong bầu khí quyển

Chúng ta sẽ nghiên cứu một số khía cạnh của hoạt động vệ tinh liên lạc quay quanh Trái đất. Giả sử Trái đất là hình cầu đồng chất bán kính $R_T = 6400\text{km}$, khối lượng $M_T = 6 \times 10^{24}\text{kg}$, tâm O , đứng yên trong không gian, hằng số hấp dẫn $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$. Vệ tinh ở độ cao $h_0 = 800 \text{ km}$ so với mặt đất.

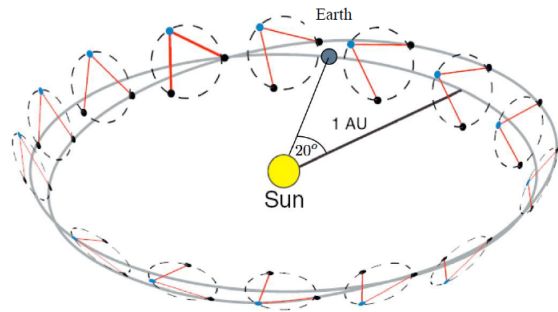
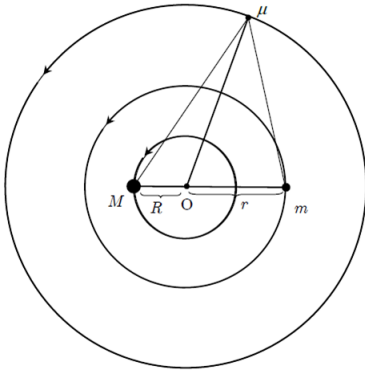
- (a) Khi chuyển động trong khí quyển, vệ tinh sẽ chịu lực ma sát tỉ lệ với bình phương vận tốc của nó: $\mathbf{f} = -\alpha M_T v^2 \hat{\mathbf{v}}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{dh}{dt} = -2\alpha \sqrt{GM_T(R_T + h)}.$$

Và tìm độ cao h của vệ tinh theo thời gian. Giải thích nghịch lý có ma sát nhưng tốc độ vẫn tăng?

- (b) Tại h_0 , độ cao giảm $\Delta h = 1 \text{ m}$ trong mỗi chu kỳ. Vận tốc coi như không đổi sau mỗi chu kỳ. Hãy tìm α và độ giảm độ cao sau 10 năm.
- (c) Thực tế ma sát phụ thuộc vào mật độ khí quyển và độ cao. Cụ thể $\alpha(h) = \frac{\gamma}{h^\beta}$. α vẫn thế, tại h_0 , độ cao giảm $\Delta h = 1 \text{ m}$ trong mỗi chu kỳ, ở độ cao $h = 400 \text{ km}$ thì mỗi chu kỳ độ cao giảm $\Delta h = 2\text{m}$. Tìm α, β .

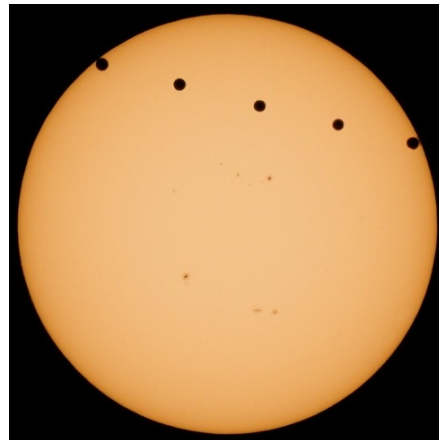
Bài 9. Bài toán ba vật và LISA



- Hai thiên thể khối lượng M và m chuyển động tròn quanh khối tâm của chúng với bán kính tương ứng R và r . Một thiên thể thứ ba có khối lượng μ sao cho $\mu \ll m, M$ được đặt vào quỹ đạo tròn có tâm là khối tâm hệ, sao cho không có lực tác động vào μ theo phương tiếp tuyến quỹ đạo. Hãy tìm khoảng cách giữa μ đến m, M và khối tâm O .
- Giả sử $m = M$. Tìm tần số dao động của μ theo phương bán kính, viết kết quả theo tần số ω của quỹ đạo hệ.

Bài 10. Phương pháp thị sai

Vào những sự kiện thiên văn hiếm hoi, cụ thể là vào ngày 6 tháng 6 năm 2012, khi đó Trái đất, sao Kim và Mặt Trời gần như thẳng hàng. Nếu chúng ta quan sát Mặt Trời vào những thời điểm như thế này, ta sẽ thấy Kim tinh như một chấm đen nhỏ đi lướt qua trên đĩa Mặt Trời. Hiện tượng này được gọi là sự quá cảnh của Kim tinh (the transit of Venus), được mô tả ở hình vẽ dưới. Nhà thiên văn học người Anh Edmond Halley đã một lần đề xuất vào năm 1716 về cách đo đường kính góc của Mặt Trời và khoảng cách từ Mặt Trời đến Trái Đất bằng việc đo cách số liệu trong sự kiện đi qua của Kim tinh ở mọi nơi trên Trái Đất. Cho chu kỳ quỹ đạo của Trái Đất và Kim tinh quanh Mặt Trời lần lượt là



$T_E = 365.256$ ngày và $T_V = 224.701$ ngày. Coi mặt phẳng hoàng đạo của hai hành tinh gần như trùng nhau và bỏ qua sự tự quay của Trái Đất.

- Coi quỹ đạo của hai hành tinh quanh Mặt Trời là gần đúng tròn. Tìm tỉ số khoảng cách r_{VE} của Mặt Trời so với Kim tinh và Trái Đất.
- Vào ngày 6 tháng 6 năm 2012, người ta quan sát sự quá cảnh của Kim tinh tại một vị trí trên Trái Đất. Bóng của Kim tinh quét một đường thẳng dài D_P trên đĩa Mặt Trời. Tìm tỉ số giữa D_P và S_{SE} , tìm đường kính góc Φ của đĩa Mặt Trời, cho khoảng cách từ tâm đĩa Mặt Trời đến đường quét của bóng Kim tinh là $h_P = 5D/16$.
- Việc đo đạc khoảng cách S_{SE} yêu cầu sự quan sát đồng thời ở các địa điểm khác nhau trên Trái Đất, đây được gọi là phương pháp *thị sai* trong quan sát thiên văn. Hai quan sát viên ở hai vị trí P và P' khác nhau nhưng trên cùng một kinh độ quan sát quá cảnh Kim tinh vào cùng một thời điểm. Hai điểm P và P' cách nhau một khoảng H tính trên bề mặt Trái Đất. Quan sát viên ở P thấy bóng Kim tinh quét đoạn AB trên đĩa Mặt Trời trong thời gian t_P , trong khi đó quan sát viên ở P' thấy nó quét đoạn $A'B'$ trong thời gian $t_{P'}$. Hãy biểu diễn S_{SE} theo Φ , r_{VE} , T_E , T_V , t_P , $t_{P'}$ và H .
- Kinh độ của Bắc Kinh và Hồng Kông lần lượt là 39.5° và 22.5° , các quan sát viên tại hai thành phố trên đo được $t_P = 6 : 21 : 57$ và $t_{P'} = 6 : 19 : 31$. Hãy tính giá trị của S_{SE} .

Bài 11. Slingshot

Trong cơ học quỹ đạo và kỹ thuật vũ trụ, **swing-by**, **gravitational slingshot**, **gravity assist maneuver** là kỹ thuật các tàu vũ trụ sử dụng chuyển động tương đối và lợi dụng trọng lực của các hành tinh hay đối tượng thiên văn khác ngoài vũ trụ để đổi phương hướng và tăng vận tốc, và còn để giảm chi phí cùng với việc tiết kiệm nhiên liệu đẩy. Kết hợp việc lợi dụng sự chuyển động tròn của các thiên thể để thay đổi vận tốc nhanh hay chậm. Cũng có khi nó được gọi là fly-by, nhưng từ này thường được dùng để chỉ đến việc nó bay ngang qua các thiên thể. Ở bài toán này ta sẽ đi tính toán định lượng về cú slingshot này.

1. Xét một vệ tinh khối lượng m bay từ xa với vận tốc v_0 đang bay đến một thiên thể khối lượng lớn M ($M \gg m$) đứng yên so với hệ quy chiếu của vệ tinh với khoảng cách b .

- Hãy tìm góc tán xạ δ của vệ tinh.
- Tìm biến thiên động lượng Δp tác dụng vào vệ tinh.
- Tìm khoảng cách gần nhất r_m của vệ tinh so với thiên thể và vận tốc của vệ tinh v_m khi đó.

2. Bây giờ thiên thể có vận tốc \mathbf{u} không đổi so với một vật thể cố định (HQQ K) sao cho góc giữa vận tốc vệ tinh ở xa \mathbf{v}_1 và \mathbf{u} là $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = \alpha_1$. Giả sử rằng $u \ll v_1$ và góc tán xạ hấp dẫn là nhỏ, hãy làm xấp xỉ bậc nhất đối với các phần tử nhỏ.

- (a) Hãy tìm giá trị vận tốc \mathbf{v}_2 của vệ tinh sau khi đã tán xạ ra xa theo u , δ , v_1 và α_1 với δ là góc tán xạ trong hệ quy chiếu thiên thể đứng yên (HQC K').
- (b) Hãy tìm góc tán xạ Δ trong hệ quy chiếu K theo u , δ , v_1 và α_1 .

3. **Vận dụng thực tế.** Người ta đưa một vệ tinh bay đến sao Hoả theo cách chuyển tiếp Hohmann. Khi vệ tinh đến sao Hoả, nó bị tán xạ một góc Δ (như đã tính ở ý 2b) và quỹ đạo chuyển thành một elip khác.

- (a) Tính góc tán xạ Δ theo R_E , R_M và b .
- (b) Hãy tìm các thông số của elip: bán trục lớn a , bán trục phụ b , tâm sai e , bán trục vuông p , chu kỳ quỹ đạo T và góc lệch giữa hai quỹ đạo elip theo R_E , R_M , Δ . Từ đó viết phương trình cực $r(\theta)$ của quỹ đạo vệ tinh sau khi bị tán xạ.
- (c) Thay số $R_E = 1 \text{ AU}$, $R_M = 2 \text{ AU}$ và $\Delta = \pi/10$. Hãy tính góc giữa Trái Đất, Mặt Trời và vệ tinh tại thời điểm vệ tinh quay lại quỹ đạo Trái Đất quanh Mặt Trời. (Không cần tích phân chi tiết, có thể bấm máy)

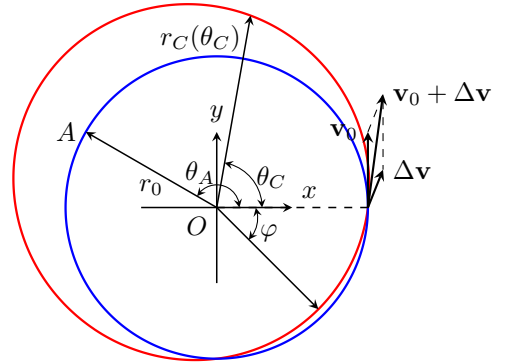
Bài 12. Thần Châu 12

Việc ghép thành công tên lửa có người lái Thần Châu 12 với trạm vũ trụ Thiên Cung vào tháng 6 năm 2021 liên quan đến bài toán đuổi bắt giữa tên lửa đuổi (mô-đun Thần Châu 12) và mục tiêu (trạm vũ trụ) trên quỹ đạo quanh Trái đất. Bài toán này sử dụng sơ đồ thay đổi quỹ đạo đuổi bắt để nghiên cứu cách tên lửa thay đổi vận tốc (tốc độ và hướng) để cập bến với mục tiêu theo quỹ đạo cố định.

Như được minh họa trong hình vẽ, mục tiêu A và tên lửa đuổi C đều đang chuyển động ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ v_0 theo quỹ đạo tròn bán kính r_0 . Vị trí của hai vật thể tại thời điểm 0 là

$$\theta_{A,i} = \theta_0, \theta_{C,i} = 0, r_{A,i} = r_{C,i} = r_0.$$

Tại thời điểm này, tên lửa C phụt nhiên liệu ngay lập tức và vận tốc thay đổi ngay lập tức một lượng Δv (như thể hiện trong hình); quỹ đạo của C cũng thay đổi tức thì từ quỹ đạo tròn có bán kính r_0 sang quỹ đạo hình elip như trong hình. Góc giữa trục chính của quỹ đạo hình elip và hướng của trục cực (đường từ tâm đến vị trí của C tại thời điểm phụt) là φ (φ được đo theo chiều kim đồng hồ). Góc giữa hướng chuyển động của C và hướng của trục cực là θ_c (θ_c Theo chiều dương ngược chiều kim đồng hồ), C và tâm là $r_c(\theta_c)$.



1. Nếu biết khối lượng m , năng lượng E (thực chất là tổng cơ năng của hệ vật và Trái đất) và mômen động lượng L của vật, hãy biểu diễn các thông số quỹ đạo p , ε theo E , L , m và các tham số đã biết r_0 , v_0 , v.v. được đưa ra trong câu hỏi. Biết rằng hình dạng của một quỹ đạo elip dương (có trục dài dọc theo trục cực) trong hệ tọa độ cực (lấy gốc tọa độ làm trọng tâm) tuân theo định luật Kepler 1st là

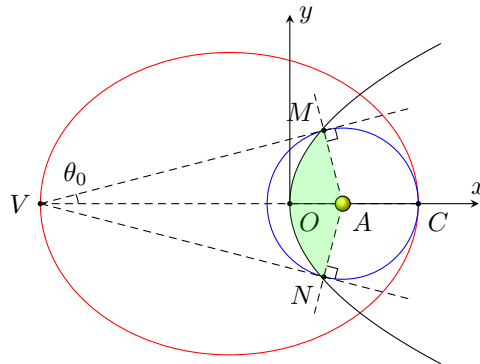
$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}$$

trong đó p là bán trục vuông và ε là tâm sai, được gọi chung là tham số quỹ đạo.

2. Viết biểu thức cho quỹ đạo $r_c(\theta_c)$ của tên lửa đuôi C sau khi phụt khí (xem Hình.), ký hiệu là r_0 , tâm sai ε và φ .
3. Viết tỷ số T_c/T_A của chu kỳ quỹ đạo T_c của tên lửa sau khi phụt khí với chu kỳ T_A của mục tiêu A, biểu diễn theo ε và φ .
4. Xác định hai tham số phụt khí (xem Hình.): Tốc độ thay đổi không thứ nguyên của vận tốc $\delta = \left| \frac{\Delta v}{v_0} \right|$, góc α giữa $\Delta \mathbf{v}$ và \mathbf{v}_0 ($\alpha = 0$ khi trùng hợp, lấy theo chiều kim đồng hồ làm chiều dương). Cố gắng sử dụng các thông số đánh lửa δ và α để biểu thị tâm sai ε và $\varepsilon \cos \varphi$ của quỹ đạo của kẻ săn đuổi C.
5. Hãy xem xét trường hợp mà tên lửa đuôi C và mục tiêu A gặp nhau tại điểm giao của lớp quỹ đạo đầu tiên (xem hình vẽ). Giả sử số lần mục tiêu A vượt qua điểm giao quỹ đạo đầu tiên kể từ thời điểm 0 là n_A và số lần tên lửa C vượt qua điểm giao quỹ đạo đầu tiên (không tính điểm bắt đầu) là n_c . Tại thời điểm 0, $\theta_{A,i} = \theta_0, \theta_{c,i} = 0$. Tìm n_A , được ký hiệu là $n_c, \theta_0, \varepsilon$ và φ .
6. Biểu diễn n_A theo δ và α , giữ nguyên δ và cố gắng tìm hai điểm cực trị đơn giản, khác biệt α_0 cho sự thay đổi của hàm $n_A(\alpha)$ đối với α (do đó, mặc dù góc α tại thời điểm tia lửa phun có một số độ lệch so với α_0 độ lệch nào đó, giải pháp vẫn giữ ở mức xấp xỉ, tạo điều kiện cho việc ghép thành công).
7. Nếu một trong hai giá trị α_0 ở trên được sử dụng,
 - (a) giá trị của δ có giới hạn trên δ_{\max} (tức là nếu $\delta > \delta_{\max}$, người theo đuổi C và mục tiêu A sẽ không đạt được), tìm δ_{\max} ;
 - (b) Đặt giá trị ban đầu của θ_A là θ_0 , hãy thử viết mối quan hệ giữa δ và θ_0, n_A, n_c ; và tìm giá trị của δ khi $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, n_A = 2, n_c = 1$.

Bài 13. Do thám Mặt Trời

Một tàu vũ trụ thực hiện chuyến thám hiểm Mặt Trời, đang chuyển động theo quỹ đạo elip với Mặt Trời là tiêu điểm, V và C lần lượt là viễn điểm và cận điểm của quỹ đạo. Khi tàu đến C, người ta thay đổi tức thời vận tốc của nó, tàu chuyển động theo quỹ đạo tròn với tâm là Mặt Trời, với mục đích là do thám các hiện tượng vật lý trên Mặt Trời. Gọi θ là góc hợp giữa đường thẳng nối điểm V với tàu và đường thẳng nối điểm C với Mặt Trời. Khi tàu chuyển động tròn quanh Mặt Trời, góc θ có giá trị lớn nhất là $\theta_0 = 35^\circ$. Cho khoảng cách từ Mặt Trời đến viễn điểm là $R = 149.6 \times 10^9$ m, hằng số hấp dẫn $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, khối lượng của Mặt Trời $M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$.



1. Hãy tính thời gian ngắn nhất tàu đi từ V đến C.
2. Tính độ biến thiên vận tốc của tàu khi nó thay đổi quỹ đạo chuyển động.

3. Để thoát khỏi Mặt Trời, hoàn thành nhiệm vụ, khi tàu chuyển động tròn đến vị trí M có $\theta = \theta_0$, người ta thay đổi tức thời vận tốc của nó bằng cách phụt khí sao cho tàu chuyển động theo quỹ đạo parabol với Mặt Trời là tiêu điểm, trục của parabol trùng với \overline{VC} . Gọi N là vị trí tiếp theo của tàu có $\theta = \theta_0$.
 - (a) Tìm khoảng cách gần nhất của tàu với Mặt Trời.
 - (b) Vận tốc của tàu tại N .
 - (c) Tìm thời gian tàu đi từ M đến N .

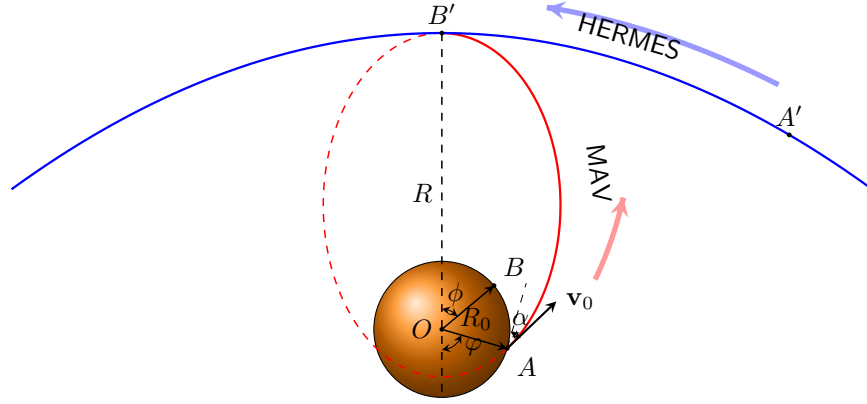
Bài 14. Đại tuyệt chủng khủng long

Các sao chổi là những thiên thể rất đặc biệt trong hệ Mặt Trời, quỹ đạo của chúng là những elip rất dẹt với trục lớn cực dài nhưng điểm cận nhật (gần Mặt Trời nhất) lại rất gần Mặt Trời. Vì thế quỹ đạo của các sao chổi này cắt các quỹ đạo của các hành tinh khác, trong đó có Trái Đất. Do sự giao nhau của các quỹ đạo này nên đôi khi có xảy ra các va chạm giữa các sao chổi và các hành tinh trong hệ Mặt Trời khi chúng có mặt tại giao điểm cùng một lúc, gần đây nhất là vụ va chạm giữa Mộc Tinh và sao chổi Shoemaker-Levy (diễn ra vào tháng 7 năm 1994). Rất nhiều nhà vật lý trên thế giới đều tin rằng 65 triệu năm trước có một vụ va chạm giữa một sao chổi đường kính khoảng 10 km với Trái Đất và sự va chạm này đã khiến cho loài khủng long bị diệt chủng. Giả sử rằng sao chổi này có quỹ đạo dẹt tới mức có thể coi gần đúng là một parabol có khoảng cách từ điểm cận nhật tới Mặt Trời là r_{\min} .

1. Hỏi:
 - (a) Cơ năng toàn phần của sao chổi này (tổng động năng và thế năng tương tác hấp dẫn với Mặt Trời) bằng bao nhiêu? (chỉ cần đưa ra đáp án không cần chứng minh)
 - (b) Quỹ đạo của sao chổi tại điểm cận nhật có bán kính cong bằng bao nhiêu?
2. Trong một khoảng thời gian vài chục ngày trước khi sao chổi này va chạm với Trái Đất, loài khủng long thời kì đó có nhìn thấy sao chổi này vào ban ngày. Giả sử rằng Trái Đất chuyển động trên một quỹ đạo tròn bán kính a quanh Mặt Trời với chu kì T_E bằng một năm (xấp xỉ 365 ngày).
 - (a) Hãy giải thích một cách vắn tắt, tại sao khi nhìn thấy sao chổi vào ban ngày thì khoảng cách giữa Mặt Trời và sao chổi nhỏ hơn a . Tính chính xác khoảng thời gian khoảng cách giữa sao chổi và Mặt Trời nhỏ hơn a theo r_{\min} , a và T_E .
 - (b) Với giá trị nào của r_{\min}/a thì khoảng thời gian tìm được ở ý a là lớn nhất, giá trị lớn nhất đó bằng bao nhiêu?
3. Trước khi va chạm với Trái Đất, sao chổi này có cắt ngang qua quỹ đạo của Hỏa Tinh, nhưng khi đó nó không có mặt tại giao điểm này nên không xảy ra va chạm. Biết rằng Hỏa Tinh chuyển động trên một quỹ đạo tròn bán kính $a' = 1.52a$, hỏi với giá trị tìm được của tỉ số r_{\min}/a ở câu 2b thì khoảng thời gian tính từ lúc sao chổi đi qua giao điểm này cho đến khi nó đâm vào Trái Đất là bao lâu?

Bài 15. Giải cứu Mark Watney

Bộ phim *The Martian* (tạm dịch: Người sao Hoả) là một thành công điện ảnh đình đám thế giới được chuyển thể từ tiểu thuyết cùng tên. Nội dung tóm tắt như sau: Do một biến cố bất đắc dĩ nên phi hành gia Mark Watney bị bỏ lại trên sao Hoả, anh đã phải sinh tồn trên một hành tinh hoang vu và khắc nghiệt này trong hàng tháng. Chiến dịch giải cứu đã được các nhà khoa học ở NASA tính toán như sau: Tàu vũ trụ Hermes bay lướt qua sao Hoả để đón Mark tại điểm B' gần tâm sao Hoả nhất, khoảng cách là R , tại thời điểm đó góc giữa Hermes và bộ phóng tên lửa MAV là $\angle B'OB = \phi$. Biết rằng điểm B' và tên lửa MAV đều nằm trên mặt phẳng xích đạo của sao Hoả, hướng các quỹ đạo tàu và sự tự quay của sao Hoả đều ngược chiều kim đồng hồ (hình vẽ). Mục tiêu của ta là khi tàu MAV tăng tốc đến vị trí A cách tâm sao Hoả là R_0 (tại đó ảnh hưởng của khí quyển không đáng kể), khi đó tàu tắt động cơ, đạt vận tốc v_0 và góc phóng (so với phương tiếp tuyến) là α , khoảng cách cực đại của tàu MAV so với O là R (do phải tối ưu hoá vận tốc tàu). Chu kỳ tự quay của sao Hoả là T_0 .



- Biểu diễn vận tốc phóng v_0 như một hàm của α thoả mãn yêu cầu đề bài.
- Biểu diễn góc φ (vị trí phóng tàu trên sao Hỏa) như một hàm của α thoả mãn yêu cầu đề bài.
- Biểu diễn thời gian hành trình τ của tàu MAV như một hàm của α .
- Hãy tìm các giá trị số v_0 , α , φ , τ .

• Gợi ý toán học: Cho biết nguyên hàm sau

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{-ax^2 + bx - c}} = \frac{\sqrt{-ax^2 + bx - c}}{a} + \frac{b}{2a\sqrt{a}} \arcsin\left(\frac{2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) + C,$$

với $a, b, c > 0$ và C là hằng số.

• Số liệu thiên văn:

$$R = 16881.0 \text{ km}$$

$$R_0 = 3876.2 \text{ km}$$

$$G = 6.6741 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

$$M = 6.4171 \times 10^{23} \text{ kg}$$

$$T_0 = 24^h 39^m 36^s$$

$$\phi = 50^\circ$$

Bài 16. Huỷ diệt Trái Đất

Một quả bom siêu cấp mang tính huỷ diệt cực lớn nổ tại một điểm trên bề mặt Trái Đất, khiến nó bắn ra các mảnh bom giống nhau với cùng tốc độ v_0 (bé hơn vận tốc thoát của Trái Đất), phân bố các mảnh đạn khi văng ra là đẳng hướng. Bỏ qua ảnh hưởng của khí quyển.

- Xét mảnh bom bắn ra tạo góc α so với bề mặt Trái Đất.
 - Viết phương trình quỹ đạo của mảnh bom trong hệ toạ độ cực, xác định các thông số quỹ đạo theo v_0 , α và các hằng số thiên văn.
 - Xác định thời gian mảnh bom bay và vị trí nó tiếp đất. Tìm chiều cao cực tiểu và cực đại của mảnh bom. Tìm điều kiện của v_0 để các mảnh bom đến được toàn bộ bề mặt Trái Đất (*Huỷ diệt hoàn toàn!*)
 - Tìm v_0 theo α để mảnh bom đến được chính xác vị trí đối diện với nơi nổ trên bề mặt Trái Đất. Xác định thời gian bay.
 - Xác định góc α của mảnh đạn tiếp đất sớm nhất và thời gian bay.
- Hình vẽ bên dưới miêu tả các quỹ đạo khả dĩ của mảnh bom theo các giá trị của α . Hãy xác định hình dạng và phương trình của đường bao toàn bộ quỹ đạo bay.

