

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN NÂNG CAO.



Câu 1. Một hạt chuyển động chậm dần trên đường thẳng với gia tốc a mà độ lớn phụ thuộc vận tốc theo quy luật $|a| = k\sqrt{v}$, trong đó k là hằng số dương. Tại thời điểm ban đầu vận tốc của hạt bằng v_0 . Tìm quãng đường hạt đi được cho đến khi dừng lại và thời gian đi hết quãng đường ấy.

Giải:

+ Ta có $a = k\sqrt{v} = -\frac{dv}{dt} \Rightarrow -kdt = v^{-1/2}dv$

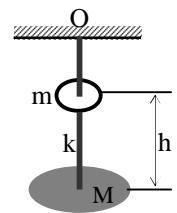
+ Lấy tích phân ta có $v = \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2}\right)^2$

+ Thời gian chuyển động cho đến khi dừng hẳn $t = \frac{2\sqrt{v_0}}{k}$

+ Quãng đường đi được $dS = vdt = \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2}\right)^2 dt = \left[v_0 - k\sqrt{v_0}t + \left(\frac{k}{2}\right)^2 t^2\right] dt$

+ Vậy quãng đường đi được đến khi dừng hẳn $S = \int_0^{2\sqrt{v_0}/k} \left[v_0 - k\sqrt{v_0}t + \left(\frac{k}{2}\right)^2 t^2\right] dt$

+ Kết quả là $S = \frac{2v_0^{3/2}}{3k}$.



Câu 2. Một đĩa khối lượng M được treo bằng một sợi dây mảnh, có hệ số đàn hồi k vào điểm O cố định. Khi hệ thống đang đứng yên thì một vòng nhỏ có khối lượng m rơi tự do từ độ cao h (so với mặt đĩa) xuống và dính chặt vào đĩa. Sau đó, hệ dao động theo phương thẳng đứng. Xem hình bên.

a) Tính năng lượng và biên độ dao động của hệ.

b) Lực hồi phục tác dụng lên hệ trong quá trình dao động có công suất cực đại là bao nhiêu ?

Giải :

a) Sau va chạm:

+ Sự bảo toàn động lượng $mv = (m + M)v_1$ trong đó $mgh = mv^2/2$ nên $v_1 = \frac{m\sqrt{2gh}}{m + M}$

Hệ có động năng ban đầu : $\frac{1}{2}(m + M)v_1^2$

+ Cũng ngay sau va chạm, hệ vật + đĩa còn cách vị trí cân bằng $x_1 = \frac{mg}{k}$, đó chính là li độ x_1 của hệ khi có vận tốc v_1 . Vậy năng lượng toàn phần của hệ dao động là:

$$E = \frac{1}{2}(m + M)v_1^2 + \frac{k}{2}x_1^2 = \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{m\sqrt{2gh}}{m + M}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{ghm^2}{m + M} + \frac{m^2g^2}{2k}$$

+ Từ $E = kA^2/2$ suy ra biên độ dao động $A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}}$ (1)

b) + Công suất của lực hồi phục có biểu thức $P = Fv = kxv$ (2). Lấy đạo hàm theo t để tìm cực đại ta có:

$P' = kx'v + kxv' = 0$. Với $x' = v$ và $v' = x'' = -x\omega^2$ Ta có $kv^2 - kx^2\omega^2 = 0$

+ Mặt khác $(m + M)v^2/2 + kx^2/2 = kA^2/2$ và $\omega^2 = k/(m + M)$ ta suy ra công suất cực đại khi li

độ và vận tốc có giá trị $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$; $v = \sqrt{\frac{k}{m + M}} \frac{A}{\sqrt{2}}$

+ Thay vào (2) ta nhận được $P_{\max} = \frac{A^2}{2} \sqrt{\frac{k^3}{(m+M)}}$ với A xác định ở (1)

Câu 3. Một hình trụ đồng chất, khối lượng m, bán kính R có thể lăn không trượt trên mặt phẳng ngang (hình 1). Trục quay G của nó được nối qua lò xo có độ cứng k với một điểm cố định. Hệ được thả không có vận tốc ban đầu từ vị trí lò xo giãn một đoạn nhỏ x_0 . Chứng minh hệ dao động điều hòa và tìm chu kỳ dao động.

Giải:

+ Khi vật ở li độ x lúc đang dao động, cơ năng của hệ là

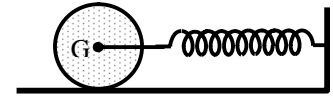
$$W = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{mR^2}{2} \cdot \frac{v^2}{R^2}}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{3mv^2}{4}$$

+ Lực ma sát nghỉ có tác dụng giữ cho hình trụ không trượt \Rightarrow không sinh công, cơ năng bảo toàn:

$$W = \frac{kx^2}{2} + \frac{3mv^2}{4} = \text{const.}$$

+ Vi phân hai vế: $kxx' + \frac{3m}{2}vv' = 0$. Chú ý $v = x'$; $v' = x'' \Rightarrow x'' + \frac{2k}{3m}x = 0 \Rightarrow x'' + \omega^2 x = 0$

với $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}} \Leftrightarrow$ Vậy chu kỳ dao động của hệ là: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$.



Hình 1

Câu 4. Một quả đạn rốc-kết ban đầu đứng yên, sau đó tự phóng thẳng đứng từ dưới lên trên bởi khối lượng khí phụt ra phía sau với vận tốc không đổi u (so với rốc-kết). Coi gia tốc trọng trường là không đổi bằng g. Hãy tìm biểu thức phụ thuộc thời gian của gia tốc và vận tốc của rốc-kết.

Giải:

+ Do chuyển động là thẳng nên chọn trục x trùng với đường thẳng chuyển động, chiều dương là chiều chuyển động, phương trình chuyển động là $\frac{mdv}{dt} = -\frac{udm}{dt} - mg$ (*)

+ Do $dm/dt =$ hằng số và $m = m_0$, $dv/dt = 0$ tại $t = 0$ nên phương trình trên cho $\frac{dm}{dt} = -\frac{m_0 g}{u}$.

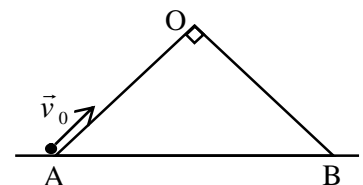
Lấy tích phân phương trình trên ta có $m = m_0(1 - \frac{gt}{u})$

+ Thay vào (*) ta có $m_0(1 - \frac{gt}{u})\frac{dv}{dt} = (m_0 - m)g = \frac{m_0 g^2 t}{u}$ Hay $a = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{u - gt}$

+ Vận tốc ở thời điểm τ là $dv = \frac{g^2 t}{u - gt} dt$

$$\text{hay } v = \int_0^\tau g \frac{gt}{u - gt} dt$$

$$v = -g\tau + u \ln \frac{u}{u - g\tau}$$



Chú ý: τ trong biểu thức vận tốc v chính là t trong biểu thức gia tốc a

Câu 5. Một quả cầu nhỏ nằm ở chân nêm AOB vuông cân, cố định cạnh l (hình vẽ). Cần truyền cho quả cầu vận tốc \vec{v}_0 bằng bao nhiêu hướng dọc mặt nêm để quả cầu rơi đúng điểm B trên nêm. Bỏ qua mọi ma sát, coi mọi va chạm tuyệt đối đàn hồi.

Giải:

Chọn mốc thế năng ở mặt phẳng chứa AB

Gọi \vec{v} là vận tốc của quả cầu khi lên đến đỉnh nêm

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = mg \frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - gl\sqrt{2}}$$

Sau khi rời O, quả cầu chuyển động như vật ném xiên với \vec{v} tạo với phương ngang một góc 45° .

+ Theo trục OY:

$$a_y = -\frac{g\sqrt{2}}{2} = \text{const}; v_y = v - \frac{g\sqrt{2}}{2}t; y = vt - \frac{g\sqrt{2}}{4}gt^2$$

$$\text{Khi chạm B: } y = 0 \Rightarrow t = \frac{2\sqrt{2}v}{g}$$

$$\text{Vận tốc quả cầu ngay trước va chạm: } v_y = v - \frac{g\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}v}{g} = -v$$

Do va chạm đàn hồi, nên sau va chạm vận tốc quả cầu dọc theo OY là \vec{v} nên bi lại chuyển động như trên.

$$\text{Khoảng cách giữa hai lần va chạm liên tiếp giữa bi và mặt nêm OB là } t = \frac{2\sqrt{2}v}{g}$$

+ Theo trục OX:

$$a_x = \frac{g\sqrt{2}}{2} = \text{const}; v_{0x} = 0 : \text{quả cầu chuyển động nhanh dần đều.}$$

Quãng đường đi được dọc theo Ox sau các va chạm liên tiếp:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots = 1 : 3 : 5 : \dots : (2n-1)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{2\sqrt{2}(v_0^2 - gl\sqrt{2})}{g}$$

Để quả cầu rơi đúng điểm B:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = [1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)]x_1 = n^2 x_1 = l$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}(v_0^2 - gl\sqrt{2})}{g} n^2 = l$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{(4n^2 + 1)gl}{2\sqrt{2}n^2}}$$

Câu 6. Một đầu máy xe lửa nặng 40 tấn, trọng lượng chia đều cho 8 bánh xe. Trong đó có 4 bánh phát động. Đầu máy kéo 8 toa, mỗi toa nặng 20 tấn. Hệ số ma sát giữa bánh xe với đường ray là 0,07. Bỏ qua ma sát ở các ổ trục. Trên trần toa xe có một quả cầu nhỏ khối lượng 200 gam treo bằng dây nhẹ, không giãn. (cho $g = 10 \text{ m/s}^2$).

1/ Tính thời gian ngắn nhất kể từ lúc khởi hành đến lúc đoàn tàu đạt vận tốc 20km/h. Tính góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng và lực căng của dây treo.

2/ Sau thời gian trên, tàu hãm phanh. Biết rằng lúc này động cơ không truyền lực cho các bánh. Tính quãng đường tàu đi từ lúc hãm phanh cho đến lúc dừng; góc lệch của dây treo so với phương thẳng đứng và lực căng dây trong 2 trường hợp:

a. Chỉ hãm các bánh ở đầu máy

b. Hãm tất cả các bánh của đoàn tàu

Giải:

1. Lực phát động chính lực ma sát tác dụng lên 4 bánh ở đầu tàu

$$F_{pd} = f_{ms} = k.M_d.g/2 = 14.10^3 \text{ N.}$$

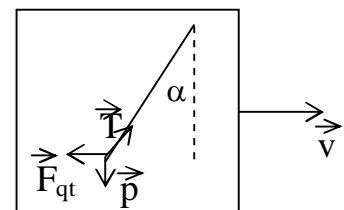
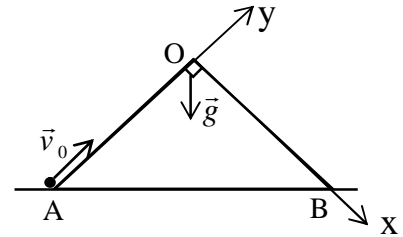
Gia tốc cực đại mà tàu đạt được:

$$a_{max} = F_{pd}/M = F_{pd}/(M_d + M_t) = 0,07 \text{ m/s}^2.$$

Thời gian ngắn nhất:

$$V_t = v_0 + a.t_{min} \rightarrow t_{min} = v_t/a_{max} = 79,4 \text{ s (hay 1 phút 15 giây).}$$

Góc lệch α của dây treo và lực căng dây



Dây treo bị lệch về phía sau (so với vận tốc).

+ Vì m rất nhỏ so với M nên không ảnh hưởng đến gia tốc của tàu.

+ Trong hệ qui chiếu gắn với tàu, vật m chịu tác dụng của 3 lực:

Ta có: $\tan \alpha = F_{qt} / P = m \cdot a_{\max} / m \cdot g = 0,007$.

$\rightarrow \alpha = 0,4$ độ

Mặt khác ta có: $\cos \alpha = P / T \rightarrow T = m \cdot g / \cos \alpha = 2,0002N$ (h vẽ).

2. a. Trường hợp hãm ở đầu máy: Lúc này tàu chuyển động chậm dần đều.

+ Gia tốc của tàu: $a_1 = - f_{ms1} / M = - k \cdot M_d \cdot g / M$

$a_1 = - 0,14 \text{ m/s}^2$.

+ khi dừng vận tốc của tàu bằng không

$S_1 = - v_1^2 / 2 \cdot a_1 = 110,23 \text{ m}$.

+ Góc lệch: $\tan \alpha_1 = m a_1 / m g = 0,14$.

$\rightarrow \alpha_1 = 7,97$ độ dây treo lệch về phía trước.

+ Lực căng dây: $\cos \alpha_1 = P / T_1 \rightarrow T_1 = 2,0195N$ (hình vẽ).

b. Khi hãm tất cả các bánh

+ Gia tốc của tàu: $a_2 = - f_{ms2} / M = - k \cdot (M_d + M_t) \cdot g / M$.

Câu 7. Một tấm ván khối lượng M được treo vào một dây dài nhẹ, không giãn. Nếu viên đạn có khối lượng m bắn vào ván với vận tốc v_0 thì nó dừng lại ở mặt sau của ván, nếu bắn với vận tốc $v_1 > v_0$ thì đạn xuyên qua ván.

Tính vận tốc v của ván ngay sau khi đạn xuyên qua. Giả thiết lực cản của ván đối với đạn không phụ thuộc vào vận tốc của đạn. Lập luận để chọn dấu trong nghiệm.

Giải:

Khi vận tốc đạn là v_0 , sau khi xuyên qua, đạn và tấm gỗ cùng chuyển động với vận tốc v . Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và năng lượng ta có:

$$m v_0 = (M+m) v \dots (1)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} (M+m) v^2 + Q \dots (2)$$

Q: Công của lực cản biến thành nhiệt:

$$(1), (2) \Rightarrow Q = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} (M+m) \left(\frac{m}{M+m} \cdot v_0 \right)^2$$

$$Q = \frac{mM}{2(M+m)} v_0^2 \dots (3)$$

Khi đạn có vận tốc $v_1 > v_0$. Gọi v_2 là vận tốc đạn sau khi xuyên qua tấm gỗ.

Tương tự ta có:

$$m v_1 = M v + m v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 - \frac{M}{m} v \dots (4)$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + Q \dots (5)$$

Thay (3), (4) vào (5) ta suy ra:

$$v_1^2 = \frac{M}{m} v^2 + \left(v_1 - \frac{M}{m} v \right)^2 + \frac{M}{M+m} \cdot v_0^2$$

$$\Rightarrow v^2 - 2 \frac{m v_1}{M+m} \cdot v + \frac{m^2 v_0^2}{(M+m)^2} = 0$$

Giải phương trình ta được:

$$v = \frac{m}{M+m} (v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - v_0^2})$$

Nếu chọn dấu +, thay vào (4) ta suy ra:

$$v_2 = \frac{mv_1 - M\sqrt{v_1^2 - v_0^2}}{M + m} < v = \frac{m}{M + m}(v_1 + \sqrt{v_1^2 - v_0^2})$$

Điều này vô lý vì vận tốc đạn sau khi xuyên qua gỗ không thể nhỏ hơn vận tốc tấm gỗ. Do đó ta chọn:

$$v = \frac{m}{M + m}(v_1 - \sqrt{v_1^2 - v_0^2}).$$

Câu 8. Một quả nặng nhỏ khối lượng m , nằm trên mặt nằm ngang, được gắn với một lò xo nhẹ có độ cứng k (Hình 1). Đầu tự do của lò xo bắt đầu được nâng lên thẳng đứng với vận tốc \vec{v} không đổi như hình vẽ. Xác định độ giãn cực đại của lò xo.

Giải:

- Lò xo bắt đầu nâng vật lên khi $kx_0 = mg$ (1), với x_0 là độ giãn của lò xo tại thời điểm vật bắt đầu rời mặt nằm ngang.

- Trong HQC chuyển động lên trên với vận tốc \vec{v} , tại thời điểm vật bắt đầu rời mặt nằm ngang, vật chuyển động xuống dưới với vận tốc \vec{v} .

Gọi x_M là độ giãn cực đại của lò xo. Thế năng của vật khi vừa rời khỏi mặt ngang là $mg(x_M - x_0)$. Theo định luật bảo toàn cơ năng:

$$\frac{mv^2}{2} + mg(x_M - x_0) + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{kx_M^2}{2} \quad (2)$$

- Từ (1) và (2) ta có: $kx_M^2 - 2mgx_M - mv^2 + \frac{m^2g^2}{k} = 0 \quad (*)$

$$x_M = \frac{mg}{k} + v\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Do $x_M > x_0$ nên nghiệm của phương trình (*) là đơn trị 1:

***Chú ý:** HS có thể giải theo cách khác:

- Kể từ khi rời mặt ngang, vật dao động điều hoà quanh O (vị trí của vật ở thời điểm này).

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Phương trình dao động: $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, với

$$\text{Khi } t = 0 \rightarrow \begin{cases} x = A \cos \varphi = 0 \\ v = -A\omega \sin \varphi \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{v}{\omega \sin \varphi} = v\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{Độ giãn cực đại của lò xo là: } x_M = x_0 + A = \frac{mg}{k} + v\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Câu 9. Cho hệ dao động như hình bên. Các lò xo có phương thẳng đứng và có độ cứng k_1 và k_2 . Bỏ qua khối lượng của ròng rọc và các lò xo. Bỏ qua ma sát. Xác định độ cứng tương đương của hệ khi m thực hiện dao động điều hoà theo phương thẳng đứng.

Giải:

Chọn trục Ox có phương thẳng đứng, gốc trùng với VTGB của vật.

Khi vật ở VTGB các lò xo có độ giãn lần lượt là Δl_1 và Δl_2 ta có:

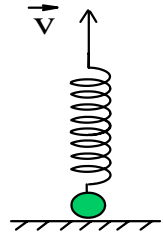
$$P = T = k_2 \Delta l_2 \text{ và } 2P = 2T = k_1 \Delta l_1 \text{ suy ra } k_1 \Delta l_1 = 2k_2 \Delta l_2. \quad (1)$$

Khi vật ở li độ x các lò xo k_1, k_2 giãn thêm các đoạn x_1 và x_2 so với khi vật ở VTGB. Ta có:

$$T' = k_2(\Delta l_2 + x_2) \quad (*) \text{ và } 2T' = k_1(\Delta l_1 + x_1) \text{ suy ra } k_1(\Delta l_1 + x_1) = 2k_2(\Delta l_2 + x_2) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } k_1 x_1 = 2k_2 x_2 \text{ Suy ra } x_1 = 2k_2 x_2 / k_1 \quad (3)$$

$$\text{Mặt khác ta có } x = 2x_1 + x_2 \quad (4) \text{ Thay (3) vào (4) Suy ra } x = 4k_2 x_2 / k_1 + x_2 = x_2(4k_2 / k_1 + 1)$$



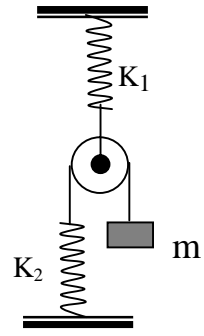
$$\text{Suy ra } x_2 = \frac{x}{\frac{4k_2}{k_1} + 1} = \frac{k_1 x}{4k_2 + k_1} \quad (5)$$

Ta có phương trình định luật 2 Niu tơn cho vật:

$$P - T' = ma \quad (6) \text{ Thay (*) vào (6) ta có: } P - k_2(\Delta l_2 + x_2) = ma \quad (7)$$

$$\text{Thay (5) vào (7) ta có: } -\frac{k_1 k_2 x}{4k_2 + k_1} = mx''$$

$$\text{Vậy độ cứng tương đương của hệ lò xo là } k = \frac{k_1 k_2}{4k_2 + k_1}$$



Câu 10. Để đo gia tốc trọng trường g , người ta có thể dùng con lắc rung, gồm một lá thép phẳng chiều dài l , khối lượng m , một đầu của lá thép gắn chặt vào điểm O của giá, còn đầu kia gắn một chất điểm khối lượng M . ở vị trí cân bằng lá thép thẳng đứng. Khi làm lá thép lệch khỏi vị trí cân bằng một góc nhỏ θ (radian) thì sinh ra momen lực $c\theta$ (c là một hệ số không đổi) kéo lá thép trở về vị trí ấy (xem hình vẽ).

Trọng tâm của lá thép nằm tại trung điểm của nó và momen quán tính của riêng lá thép đối với trục quay qua O là $ml^2/3$.

1. Tính chu kỳ T các dao động nhỏ của con lắc.

2. Cho $l = 0,20\text{m}$, $m = 0,01\text{kg}$, $M = 0,10\text{kg}$. Để con lắc có thể dao động, hệ số c phải lớn hơn giá trị nào? Biết g không vượt quá $9,9\text{m/s}^2$.

3. Cho l , m , M có các giá trị như ở 2), $c = 0,208$. Nếu đo được $T = 10\text{s}$ thì g có giá trị bằng bao nhiêu?

4. Cho l , m , M , c có các giá trị cho ở 3). Tính độ nhạy của con lắc, xác định bởi $\frac{dT}{dg}$, dT là biến thiên nhỏ của T ứng với biến thiên nhỏ dg của g quanh giá

trị trung bình $g_0 = 9,8\text{m/s}^2$. Nếu ở gần g_0 , gia tốc g tăng $0,01\text{m/s}^2$ thì T tăng hay giảm bao nhiêu?

5. Xét một con lắc đơn có chiều dài $L = 1\text{m}$ cũng dùng để đo g . Tính độ nhạy của con lắc đơn ở gần giá trị trung bình g_0 ; g tăng $0,01\text{m/s}^2$ thì chu kỳ T của con lắc đơn tăng hay giảm bao nhiêu? So sánh độ nhạy của hai con lắc.

Giải:

$$1) \text{ Momen quán tính của con lắc } J = \frac{ml^2}{3} + Ml^2 = l^2 \left(M + \frac{m}{3} \right)$$

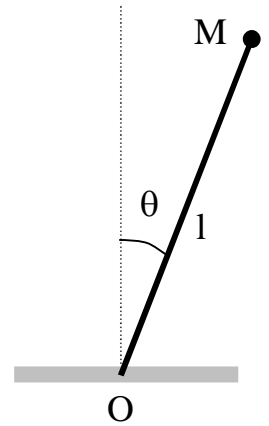
$$\text{Momen lực } M = mg \frac{l}{2} \sin \theta + Mgl \sin \theta - c\theta \approx \theta \left[gl \left(M + \frac{m}{2} \right) - c \right]$$

$$\text{Phương trình } J\ddot{\theta} = M$$

$$l^2 \left(M + \frac{m}{3} \right) \ddot{\theta} = \theta \left[gl \left(M + \frac{m}{2} \right) - c \right] \text{ hay } \ddot{\theta} + \frac{c - gl \left(M + \frac{m}{2} \right)}{l^2 \left(M + \frac{m}{3} \right)} \theta = 0$$

Giả thiết $c > gl \left(M + \frac{m}{2} \right)$, con lắc có dao động nhỏ với chu kỳ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2 \left(M + \frac{m}{3} \right)}{c - gl \left(M + \frac{m}{2} \right)}} \quad (1)$$



2) Điều kiện $c > gl(M + \frac{m}{2})$, với $g_{\max} = 9,9m/s^2$ cho $c > 9,9 \cdot 0,2 \cdot 105$ hay $c > 0,2079$.

3) Đặt $a = l^2 (M + \frac{m}{3}) = 0,004132$, $b = l(M + \frac{m}{2}) = 0,021$ (đơn vị SI).

(1) $\rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c - bg}}$ (2), hay $\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a}{c - bg}$, với $T = 10$ s tính được $g = 9,83m/s^2$.

4) Lấy ln hai vế của (2)

$$\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln a - \frac{1}{2} \ln(c - bg)$$

Lấy đạo hàm đối với g , với T là hàm của g :

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dg} = \frac{b}{2(c - bg)} \rightarrow \text{độ nhạy } \frac{dT}{dg} = \frac{bT}{2(c - bg)} \quad (3)$$

Với $b = 0,021$, $c = 0,208$ thì với $g \approx g = 9,8 m/s^2$ và $T \approx 10s$, ta có $\frac{dT}{dg} \approx 48$.

g tăng $0,01m/s^2$ thì T tăng $0,48s$, dễ dàng đo được.

Chú ý: Nếu tính trực tiếp $\frac{dT}{dg}$ từ (2), không qua ln thì phức tạp. Cũng không cần thay T trong

(3) bằng (2), vì ta đã biết với $g \approx g_0$ thì $T \approx 10s$.

5) Với con lắc đơn $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$, làm tương tự:

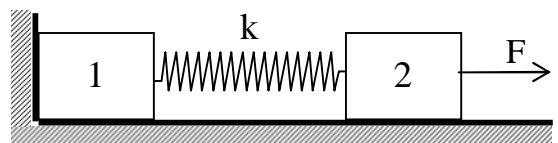
$$\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln L - \frac{1}{2} \ln g. \text{ Lấy đạo hàm đối với } g$$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dg} = -\frac{1}{2g} \rightarrow \frac{dT}{dg} = -\frac{T}{2g}.$$

Con lắc đơn có $L = 1m$ thì $T \approx 2s$. Với $g \approx 9,8m/s^2$ thì $\frac{dT}{dg} \approx -0,1$; g tăng $0,01m/s^2$ thì T giảm $0,001s$, không đo được. Vậy con lắc rung nhảy hơn con lắc đơn.

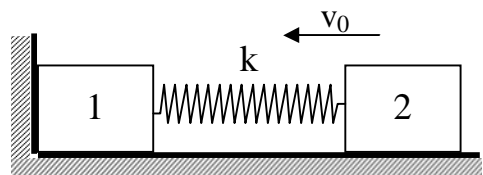
Câu 11. Hai vật có cùng khối lượng m nối nhau bởi một lò xo đặt trên mặt bàn nằm ngang. Hệ số ma sát giữa các vật với mặt bàn là μ . Ban đầu lò xo không biến dạng. Vật 1 nằm sát tường.

1) Tác dụng một lực không đổi F hướng theo phương ngang đặt vào vật 2 và hướng dọc theo trục lò xo ra xa tường (hình 2a). Sử dụng định luật bảo toàn năng lượng, tìm điều kiện về độ lớn của lực F để vật 1 di chuyển được?



Hình 2a

2) Không tác dụng lực như trên mà truyền cho vật 2 vận tốc v_0 hướng về phía tường (hình 2b). Độ cứng của lò xo là k .



Hình 2b

a. Tìm độ nén cực đại x_1 của lò xo.

b. Sau khi đạt độ nén cực đại, vật 2 chuyển động ngược lại làm lò xo bị giãn ra. Biết rằng vật 1 không chuyển động.

Tính độ giãn cực đại x_2 của lò xo.

c. Hỏi phải truyền cho vật 2 vận tốc v_0 tối thiểu là bao nhiêu để vật 1 bị lò xo kéo ra khỏi tường?

Giải:

1. Để vật 1 dịch chuyển thì lò xo cần giãn ra một đoạn là: $x = \frac{\mu mg}{k}$.

Lực F nhỏ nhất cần tìm ứng với trường hợp khi lò xo giãn ra một đoạn là x thì vận tốc vật 2 giảm về 0. Công của lực F trong quá trình này có thể viết bằng tổng công mất đi do ma sát và thế năng của lò xo: $F \cdot x = \frac{kx^2}{2} + \mu mg \cdot x$

Vậy: $F = \frac{3}{2} \mu mg$.

2. Truyền cho vật 2 vận tốc v_0 về phía tường.

a. Bảo toàn cơ năng:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2} + \mu mgx_1$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + \frac{2\mu mg}{k}x_1 - \frac{m}{k}v_0^2 = 0$$

Nghiệm dương của phương trình này là: $x_1 = -\frac{\mu mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 + \frac{mv_0^2}{k}}$

b. Gọi x_2 là độ giãn cực đại của lò xo:

$$\frac{kx_1^2}{2} = \mu mg(x_1 + x_2) + \frac{kx_2^2}{2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{2\mu mg}{k} = \sqrt{\left(\frac{\mu mg}{k}\right)^2 + \frac{mv_0^2}{k}} - \frac{3\mu mg}{k}$$

c. Để vật 1 bị kéo khỏi tường thì lò xo phải giãn ra 1 đoạn x_3 sao cho:

$$kx_3 = \mu mg \quad (1)$$

Vận tốc v_0 nhỏ nhất là ứng với trường hợp khi lò xo bị giãn x_3 như trên thì vật 2 dừng lại. Phương trình bảo toàn năng lượng:

Cho quá trình lò xo bị nén x_1 :

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2} + \mu mgx_1 \quad (2)$$

Cho quá trình lò xo chuyển từ nén x_1 sang giãn x_3 :

$$\frac{kx_1^2}{2} = \mu mg(x_1 + x_3) + \frac{kx_3^2}{2} \quad (3)$$

Từ (3) $\rightarrow x_1 - x_3 = \frac{2\mu mg}{k}$

Kết hợp với (1), ta được: $x_1 = \frac{3\mu mg}{k}$. Thay vào (2), ta được: $v_0 = \mu g \sqrt{\frac{15m}{k}}$.

Câu 12. Một thanh đồng chất có khối lượng m có thể quay tự do xung quanh một trục nằm ngang đi qua một đầu của thanh. Nâng thanh để nó có phương thẳng đứng rồi thả nhẹ thì thanh đổ xuống và quay quanh trục. Cho momen quán tính của thanh đồng chất có khối lượng m, chiều dài L đối với một trục đi qua một đầu của thanh và vuông góc với thanh là $I = mL^2/3$. Tại thời điểm khi thanh có phương ngang, hãy tìm:

1. Tốc độ góc và gia tốc góc của thanh.

2. Các thành phần lực theo phương ngang và theo phương thẳng đứng mà trục quay tác dụng lên thanh.

Giải:

1. Theo định luật bảo toàn cơ năng:

$$mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2. \text{ Thay } I = \frac{1}{3} mL^2 \text{ ta thu được tốc độ góc của thanh: } \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}.$$

Các lực tác dụng lên thanh gồm trọng lực P và lực N mà trục quay tác dụng lên thanh.

Mômen của lực N đối với trục quay bằng 0 nên định luật II Newton cho chuyển động quay của thanh quanh trục O có dạng:

$$M_p = I\gamma. \text{ Thay } I = \frac{1}{3} mL^2 \text{ và } M_p = mg \frac{L}{2} \text{ ta được gia tốc góc của}$$

$$\text{thanh: } \gamma = \frac{3g}{2L}.$$

2. Theo định II Newton cho chuyển động tịnh tiến:

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a} \quad (1)$$

Chiếu phương trình (1) lên phương ngang:

$$N_x = ma_x = ma_n = m\omega^2 \frac{L}{2}$$

Thay giá trị tốc độ góc tìm được ở phần 1 vào ta tìm được thành phần nằm ngang của lực mà trục quay tác dụng lên thanh:

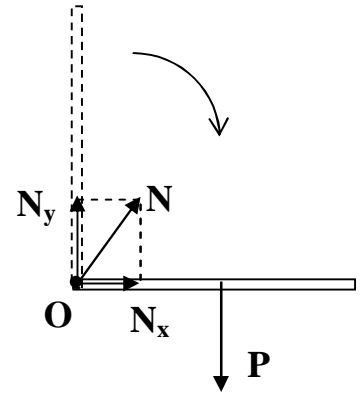
$$N_x = 3mg / 2.$$

Chiếu phương trình (1) lên phương thẳng đứng:

$$P - N_y = ma_y = ma_t = m\gamma \frac{L}{2}$$

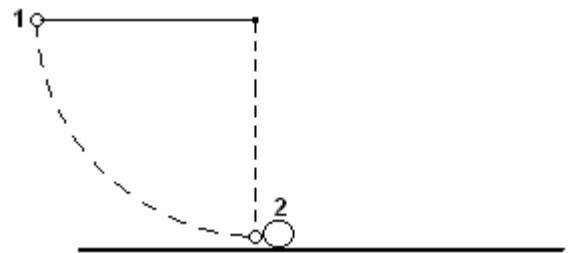
Thay giá trị gia tốc góc tìm được ở phần 1 vào ta tìm được thành phần thẳng đứng của lực mà trục quay tác dụng lên thanh:

$$N_y = mg / 4.$$



Câu 13. Quả cầu 1 có khối lượng $m_1 = 0,3$ (kg) được treo vào đầu một sợi dây không dẫn, khối lượng không đáng kể, có chiều dài $\ell = 1$ (m). Kéo căng dây treo quả cầu theo phương nằm ngang rồi thả tay cho nó lao xuống. Khi xuống đến điểm thấp nhất, quả cầu 1 va chạm đàn hồi xuyên tâm với quả cầu 2, quả cầu 2 có khối lượng $m_2 = 0,2$ (kg) đặt ở mặt sàn nằm ngang.

(Được mô tả như hình vẽ bên)



Sau va chạm, quả cầu 1 lên tới điểm cao nhất thì dây treo lệch góc α so với phương thẳng đứng. Quả cầu 2 sẽ lăn được đoạn đường có chiều dài S trên phương ngang.

Biết hệ số ma sát giữa quả cầu 2 và mặt sàn nằm ngang là 0,02 và trong sự tương tác giữa m_1 và m_2 thì lực ma sát tác dụng vào quả cầu 2 là không đáng kể so với tương tác giữa hai quả cầu. Lấy $g = 10$ (m/s²).

Tính: α và S .

Giải:

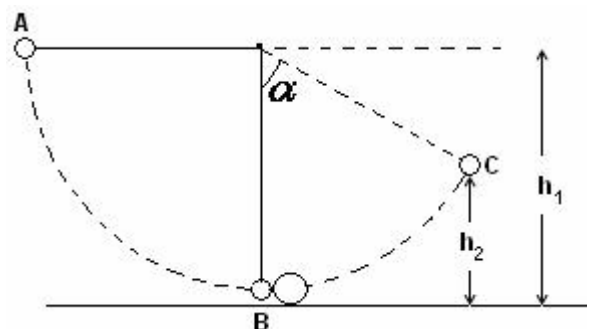
Gọi: A là vị trí buông vật m_1

B là vị trí thấp nhất (nơi m_1, m_2 va chạm)

C là vị trí cao nhất vật 1 lên được sau va chạm

Chọn gốc thế năng bằng không là ở sàn

So sánh cơ năng của quả cầu 1 ở A và ở B.



$$m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Vận tốc quả cầu m_1 ngay trước khi va chạm có độ lớn: $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 2\sqrt{5}$ (m/s)

Gọi v_1' là vận tốc của m_1 ngay sau khi va chạm.

So sánh cơ năng của quả cầu 1 ở B và ở C.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = m_1 g h_2$$

$$\Rightarrow v_1' = \sqrt{2gh_2}$$

Động năng của quả cầu 1 trước va chạm chuyển hóa thành thế năng của nó ở C và công thực hiện để thắng ma sát của quả cầu 2 khi lăn.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 g h_2 + A$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 20 = 0,3 \cdot 10 \cdot h_2 + 0,02 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot S$$

$$\Leftrightarrow 3 = 3 h_2 + 0,04S \quad (1)$$

Đối với hai quả cầu, thì lực ma sát giữa quả cầu 2 và sàn là ngoại lực. Lực ma sát tác dụng vào quả cầu 2 có làm cho động lượng của hệ hai quả cầu giảm đi. Thời gian va chạm giữa hai quả cầu rất ngắn nên xung lực của lực ma sát làm động lượng của quả cầu 2 giảm đi không đáng kể. Như vậy có thể coi thời gian va chạm giữa hai quả cầu thì tổng động lượng của chúng được bảo toàn:

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\Leftrightarrow 0,3 \cdot 2\sqrt{5} = 0,3 \cdot \sqrt{2gh_2} + 0,2 \cdot v_2'$$

$$\Leftrightarrow 0,6 \cdot \sqrt{5} = 0,3 \cdot \sqrt{20h_2} + 0,2 \cdot v_2' \quad (2)$$

Áp dụng định lý động năng cho quả cầu 2 ta được:

$$0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = - \mu m_2 g \cdot S$$

$$\Leftrightarrow 0,5 \cdot v_2'^2 = 0,2 \cdot S$$

$$\Rightarrow S = \frac{v_2'^2}{0,4} \quad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta được:

$$3 = 3 h_2 + 0,04 \cdot \frac{v_2'^2}{0,4}$$

$$\Leftrightarrow 3 = 3 h_2 + 0,1 \cdot v_2'^2$$

$$\Leftrightarrow h_2 = \frac{3 - 0,1 \cdot v_2'^2}{3} \quad (4)$$

Thế (4) vào (2) ta được:

$$0,6 \cdot \sqrt{5} = 0,3 \cdot \sqrt{20 \left(\frac{3 - 0,1 v_2'^2}{3} \right)} + 0,2 \cdot v_2' \quad (5)$$

Giải phương trình (5) ta được: $v_2' = 0$ (loại); $v_2' = 2,4 \cdot \sqrt{5}$ (m/s)

$$\text{Từ (3)} \Rightarrow S = \frac{v_2'^2}{0,4} = 72 \text{ (m)}$$

$$\text{Từ (4)} \Rightarrow h_2 = \frac{3 - 0,1 \cdot v_2'^2}{3} = 0,04 \text{ (m)}$$

Mặt khác ta có: $h_2 = \ell - \ell \cdot \cos \alpha$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\ell - h_2}{\ell} = \frac{1 - 0,04}{1} = 0,96$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 16,26^\circ$$

Câu 14. Hai điểm A, B ở trên mặt đất, cách nhau 10 (m). Từ A bắn vật 1 với góc bắn 30° . Từ B bắn vật 2 với góc bắn 60° (như hình vẽ). Vận tốc ban đầu của hai vật đều có độ lớn bằng 40 (m/s) và đồng phẳng. Cho biết vật 2 được bắn sau khi bắn vật 1 là τ (s) và trên đường bay hai vật sẽ va nhau ở điểm M. Lấy $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$

Xác định τ và tọa độ điểm M.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ 0x, 0y, gốc tọa độ 0 trùng với điểm A.

Chọn gốc thời gian ($t = 0$) lúc bắt đầu vật 1 đi.

Theo phương 0x:

Vận tốc vật 1 là :

$$\begin{aligned} V_x &= V \cdot \cos 30^\circ \\ &= 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

Vận tốc vật 2 là :

$$\begin{aligned} v_x &= v \cdot \cos 60^\circ \\ &= 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

Theo phương 0y:

Vận tốc ban đầu của vật 1 là:

$$\begin{aligned} V_{0y} &= V \cdot \sin 30^\circ \\ &= 40 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

Vận tốc ban đầu của vật 2 là :

$$\begin{aligned} v_{0y} &= v \cdot \sin 60^\circ \\ &= 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

Theo phương 0x:

$$\text{Phương trình chuyển động của vật 1: } X = V_x \cdot t = 20\sqrt{3} \cdot t$$

$$\text{Phương trình chuyển động của vật 2: } x = v_x(t - \tau) + 10$$

$$= 20(t - \tau) + 10$$

Theo phương 0y:

$$\begin{aligned} \text{Phương trình chuyển động của vật 1: } H &= 20t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= 20t - 5t^2 \end{aligned}$$

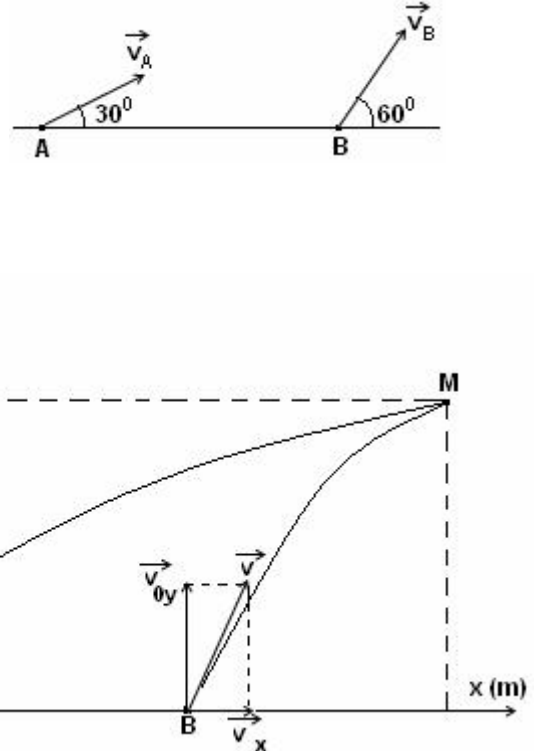
$$\begin{aligned} \text{Phương trình chuyển động của vật 2: } h &= 20\sqrt{3}(t - \tau) - \frac{1}{2}g(t - \tau)^2 \\ &= 20\sqrt{3}(t - \tau) - 5(t - \tau)^2 \end{aligned}$$

Khi hai vật gặp nhau thì tọa độ của chúng giống nhau:

$$X = x \Leftrightarrow 20\sqrt{3} \cdot t = 20(t - \tau) + 10 \quad (1)$$

$$H = h \Leftrightarrow 20t - 5t^2 = 20\sqrt{3}(t - \tau) - 5(t - \tau)^2 \quad (2)$$

$$\text{Biến đổi phương trình (1) ta được: } 20\sqrt{3} \cdot t = 20t - 20\tau + 10$$



$$t = \frac{10 - 20\tau}{20\sqrt{3} - 20} = \frac{1 - 2\tau}{2\sqrt{3} - 2} \quad (3)$$

Thế (3) vào phương trình (2) ta được:

$$20\left(\frac{1 - 2\tau}{2\sqrt{3} - 2}\right) - 5\left(\frac{1 - 2\tau}{2\sqrt{3} - 2}\right)^2 = 20\sqrt{3}\left(\frac{1 - 2\tau}{2\sqrt{3} - 2} - \tau\right) - 5\left(\frac{1 - 2\tau}{2\sqrt{3} - 2} - \tau\right)^2$$

Ta có phương trình bậc hai theo τ như sau :

$$(10 + 10\sqrt{3})\tau^2 + 70\tau - (20\sqrt{3} - 20) = 0$$

Giải phương trình ta được hai nghiệm như sau :

$$\tau \approx 0,2 \text{ (s)} \text{ và } \tau \approx -2,75 \text{ (s) (Loại)}$$

$$\text{Với } \tau \approx 0,2 \text{ (s) thế vào (3) ta được : } t = \frac{1 - 2(0,2)}{2\sqrt{3} - 2} = 0,4 \text{ (s)}$$

Tọa độ giao điểm M là :

$$H = 20t - 5t^2 = 20 \cdot 0,4 - 5 \cdot (0,4)^2 = 7,2 \text{ (m)}$$

$$X = 20\sqrt{3} \cdot t = 20\sqrt{3} \cdot 0,4 = 13,8 \text{ (m)}$$

Câu 15. Một hình trụ đặc đồng chất có bán kính $R = 10 \text{ (cm)}$, lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang với độ lớn vận tốc bằng v_0 , rồi đến mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng $\alpha = 45^\circ$ so với mặt phẳng ngang. Tìm giá trị vận tốc $v_{0\max}$ của hình trụ lăn trên mặt phẳng ngang để không bị nảy lên tại A (xem hình vẽ).

$$\text{Lấy } g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}, I_{\text{hình trụ}} = \frac{1}{2}mR^2.$$

Giải:

Tìm giá trị vận tốc $v_{0\max}$ của hình trụ lăn trên mặt phẳng ngang để không bị nảy lên tại A

* Ta có động năng của vật trên mặt phẳng ngang:

$$W_d = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Vì lăn không trượt nên $v = \omega R$.

$$\text{Mặt khác } I = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\text{Suy ra } W_d = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2.$$

* Tại đỉnh A của mặt phẳng nghiêng:

- Khi hình trụ đang ở trên mặt phẳng ngang, năng lượng là:

$$W_0 = \frac{3}{4}mv_0^2 + mgh.$$

- Khi hình trụ ở trên mặt phẳng nghiêng có tốc độ khối tâm v ; năng lượng là:

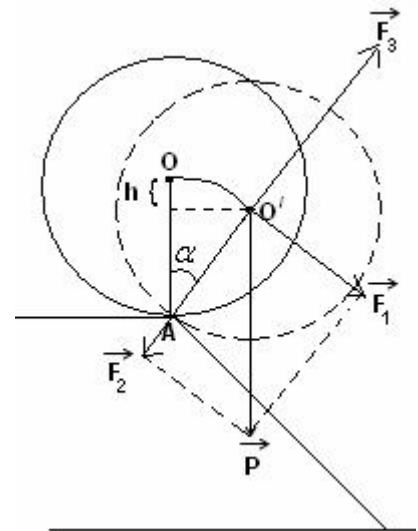
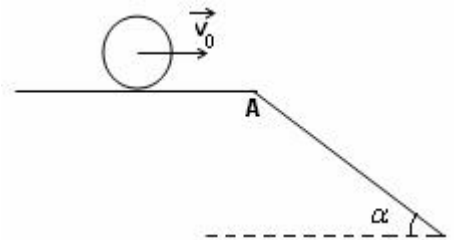
$$W = \frac{3}{4}mv^2.$$

- Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$\frac{3}{4}mv_0^2 + mgh = \frac{3}{4}mv^2 \quad (1)$$

- A là tâm quay tức thời: Vận tốc tiếp tuyến là v nên lực hướng tâm $F = ma_{ht} = m \cdot \frac{v^2}{R}$

Phân tích trọng lực P làm hai thành phần: $F_1 = P \cdot \sin \alpha$ và $F_2 = P \cdot \cos \alpha$ (có tác dụng gây áp lực lên mặt phẳng nghiêng)



- Hình trụ không nảy lên khỏi A nếu: $F \leq F_2$ (2)

- Từ hình vẽ ta có: $h = R - R \cdot \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha)$.

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \frac{3}{4} v_0^2 + g R(1 - \cos \alpha) = \frac{3}{4} v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + \frac{4}{3} g R(1 - \cos \alpha) \quad (3)$$

Từ phương trình (2) và (3) ta được: $m \cdot \frac{v^2}{R} \leq P \cdot \cos \alpha$

$$\Leftrightarrow m \cdot \frac{v_0^2 + \frac{4}{3} g R(1 - \cos \alpha)}{R} \leq mg \cdot \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 + \frac{4}{3} g R(1 - \cos \alpha) \leq g \cdot R \cdot \cos \alpha$$

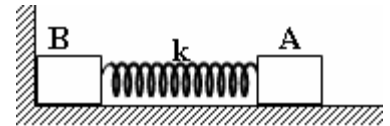
$$\Rightarrow v_0^2 \leq g \cdot R \cdot \cos \alpha - \frac{4}{3} g R(1 - \cos \alpha)$$

$$\Leftrightarrow v_0^2 \leq \frac{gR}{3} (7 \cos \alpha - 4)$$

$$\Rightarrow v_0 \leq \sqrt{\frac{gR}{3} (7 \cos \alpha - 4)} \approx \sqrt{\frac{10 \cdot 0,1}{3} (7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4)} \approx 0,6 \text{ (m/s)}$$

Vậy để không bị nảy lên tại A vận tốc $v_{0 \max}$ của hình trụ lăn trên mặt phẳng ngang có giá trị bằng 0,6 (m/s).

Câu 16. Hai vật A và B có cùng khối lượng M được nối với nhau bằng một lò xo nhẹ có độ cứng k. Hệ được đặt trên mặt phẳng nằm ngang, vật B tiếp xúc với tường (hình 1), ban đầu lò xo không biến dạng, hai vật đứng yên. Hệ số ma sát trượt giữa các vật với mặt ngang gần bằng hệ số ma sát nghỉ là μ . Truyền cho vật A vận tốc ban đầu v_0 theo phương ngang hướng vào tường. Tìm điều kiện về tốc độ v_0 để lò xo bị dãn mà vật B vẫn không dịch chuyển.



Hình 1

Giải:

- Vì \vec{v}_0 hướng vào tường nên độ biến dạng cực đại của lò xo là Δl thỏa mãn:

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} k \Delta l^2 + \mu M g \Delta l \rightarrow \Delta l = -\frac{\mu M g}{k} + \sqrt{\left(\frac{\mu M g}{k}\right)^2 + \frac{M v_0^2}{k}}$$

-Áp dụng bảo toàn năng lượng cho quá trình di chuyển hướng ra xa

$$\text{tường: } \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k \Delta l^2 - \mu M g (\Delta l + x) (*)$$

- Điều kiện để lò xo bị dãn: (*) có nghiệm $x > 0$

- Điều kiện để B không dịch chuyển thì khi lò xo bị dãn, lực đàn hồi của lò xo không vượt quá ma sát nghỉ cực đại tác dụng lên B

$$\rightarrow kx \leq \mu M g \rightarrow x_{\max} = \mu M g / k$$

$$\text{Đặt } y = kx^2 + 2\mu M g x + 2\mu M g \Delta l - k \Delta l^2 (**)$$

Phương trình (**) có nghiệm thỏa mãn $0 < x \leq \mu M g / k$

$$y_{(0)} = 2\mu M g \Delta l - k \Delta l^2 < 0 \quad (1)$$

$$y_{(\mu M g / k)} = k \Delta l^2 - 2\mu M g \Delta l - \frac{3(\mu M g)^2}{k} \leq 0 \quad (2)$$

$$(1) \rightarrow \Delta l \geq 2\mu M g / k$$

$$\rightarrow -\frac{\mu Mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{\mu Mg}{k}\right)^2 + \frac{Mv_o^2}{k}} > 2\frac{\mu Mg}{k} \rightarrow \frac{Mv_o^2}{k} > 8\left(\frac{\mu Mg}{k}\right)^2$$

$$\rightarrow v_o > \mu g \sqrt{\frac{8M}{k}}$$

Bảng xét dấu: $y_{(\mu Mg/k)} = k\Delta l^2 - 2\mu Mg\Delta l - \frac{3(\mu Mg)^2}{k}$

Δl	$-\infty$	$-\mu Mg/k$	0	$3\mu Mg/k$	∞	
y		+	0	-	0	+

(2) $\rightarrow \Delta l \leq 3\mu Mg/k$

$$\rightarrow -\frac{\mu Mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{\mu Mg}{k}\right)^2 + \frac{Mv_o^2}{k}} \leq 3\frac{\mu Mg}{k} \rightarrow \frac{Mv_o^2}{k} \leq 15\left(\frac{\mu Mg}{k}\right)^2$$

$$\rightarrow v_o \leq \mu g \sqrt{\frac{15M}{k}}$$

$$\mu g \sqrt{\frac{8M}{k}} \leq v_o \leq \mu g \sqrt{\frac{15M}{k}}$$

Câu 17. Một quả cầu đặc, khối lượng m , bán kính R đang đứng yên trên mặt bàn nằm ngang, tâm O của quả cầu cách mép thành bàn một đoạn λ . Tác dụng lên quả cầu một lực \vec{F} hướng xuống theo phương hợp với mặt phẳng ngang một góc cho trước là α , có độ lớn F xác định trong khoảng thời gian Δt rất ngắn (hình 2). Giả sử xung của lực gần như không làm cho quả cầu dịch chuyển trong thời gian đó. Sau đó, quả cầu chuyển động rồi dừng lại ngay sát mép bàn. Cho hệ số ma sát trượt giữa quả cầu và mặt bàn là μ , gia tốc rơi tự do là g . Biết lực \vec{F} có giá nằm dưới tâm O , trong mặt phẳng thẳng đứng vuông góc với mặt bàn qua tâm O .

Hãy tìm:

a/Thời gian gây xung lực Δt .

b/Khoảng cách d lớn nhất từ giá của lực đến tâm O .

Giải:

- Xung của lực theo phương ngang gây ra biến thiên động lượng: $\mathbf{F} \cdot \Delta t \cdot \cos \alpha = m \mathbf{v}_o$ với v_o là tốc độ tịnh tiến đạt được ngay sau khi thôi tác dụng lực.

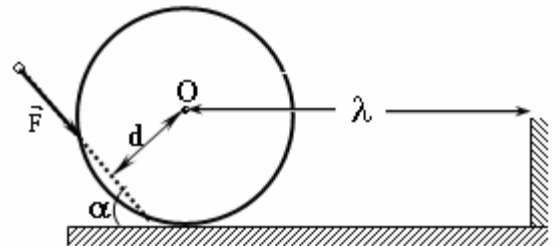
- Sau thời gian Δt tác dụng lực, quả cầu vừa chuyển động trượt vừa chuyển động quay quanh trục qua tâm O nằm ngang. Lực ma sát trượt $F_{mst} = \mu mg$ tác dụng lên điểm tiếp xúc gây gia tốc tịnh tiến làm quả cầu chuyển động trượt theo phương trình vận tốc: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_o - \mathbf{a}t$ với $a = \mu g$.

- Độ dời thực hiện được là $\Delta x = \lambda - R$.

Thời gian chuyển động là $t = v_o/a$.

$$\Delta t = \frac{m}{F \cos \alpha} \sqrt{2\mu g(\lambda - R)}$$

- Lực F gây ra momen lực làm biến thiên momen động lượng đối với trục quay nằm ngang qua tâm O của quả cầu: $\mathbf{F} \cdot \Delta t \cdot d = I \omega_o$ với ω_o là tốc độ góc đạt được ngay sau khi thôi tác dụng lực.



Hình 2

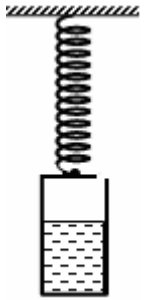
- Lực ma sát trượt $F_{mst} = \mu mg$ tác dụng lên điểm tiếp xúc gây gia tốc góc làm quả cầu chuyển động quay quanh trục nằm ngang qua O theo phương trình:

$$\omega = \omega_0 - \gamma t \text{ với } \gamma = \mu mg R / I$$

-Bi dừng lại ngay trước thành bàn: $\omega_0 / \gamma \leq v_0 / \mu g \rightarrow d \leq R \cos \alpha$

$$d_{\max} = R \cos \alpha$$

Câu 18. Một cái bình hình trụ có thành bên trong suốt được treo lên một cái lò xo thẳng đứng có đầu trên gắn vào giá cố định như hình 4, nắp bình có một lỗ nhỏ. Khi rót nước từ từ vào bình, người ta thấy khoảng cách từ mặt thoáng của nước trong bình đến đầu trên của lò xo không thay đổi. Khi nước đầy bình, giả sử có thể lấy đi tức thời $\frac{1}{2}$ lượng nước trong bình thì vận tốc cực đại của bình nước là bao nhiêu? Cho khối lượng của bình là M, khối lượng nước lúc đầy bình là m, chiều cao của bình là h, gia tốc trọng trường là g. Xem bình nước dao động điều hòa theo phương thẳng đứng.



Hình 4

Giải: + Khi rót nước từ từ vào bình cho đến khi đầy bình, người ta thấy khoảng cách từ mặt thoáng của nước trong bình đến đầu trên của lò xo không thay đổi \rightarrow tính được độ cứng lò xo là $k = mg/h$

+ Vị trí cân bằng mới của bình nước so với lúc nước đầy bình là $h/2$

\rightarrow Biên độ dao động là $A = h/2$

+ Vận tốc ban đầu của bình nước trong cách kích thích dao động trên bằng 0

$$+ v_{\max} = \omega A \text{ trong đó } \omega = \sqrt{\frac{2k}{2M + m}}$$

Câu 19. Một xe trượt dài $L = 4$ m, khối lượng phân bố đều theo chiều dài, đang chuyển động với vận tốc \vec{v}_0 trên mặt băng nằm ngang thì gặp một dải đường nhám có chiều rộng $l = 2$ m vuông góc với phương chuyển động. Xe dừng lại sau khi đã đi được một quãng đường $S = 3$ m, như trên hình vẽ. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

a, Tính hệ số ma sát giữa bề mặt xe trượt với dải đường nhám.

b, Tính thời gian hãm của xe.

Giải:

a. Chọn trục tọa độ Ox dọc theo hướng trượt của xe, gốc O ở mép đường nhám lối xe đi vào như hình vẽ.

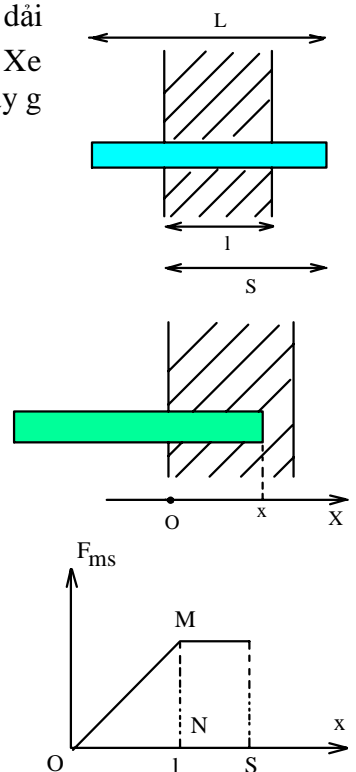
- Khi đầu xe có tọa độ x ($x \leq l$), lực ma sát trượt tác dụng lên xe có độ lớn là: $F_{ms1} = \mu \frac{mg}{L} x$. Đồ thị biểu diễn $F_{ms}(x)$ trên hình vẽ. Độ lớn công lực ma sát tính đến khi đầu xe vừa qua khỏi dải đường nhám được xác định bằng diện tích hình tam giác OMN: $A_1 = \frac{1}{2} \mu mg \frac{l^2}{L}$.

-Sau đó ($l \leq x \leq S$), F_{ms} không đổi: $F_{ms2} = \mu mg \frac{l}{L}$

- Độ lớn công F_{ms} thực hiện cho đến khi xe dừng lại là: $A_2 = F_{ms2}(S - l) = \mu mg \frac{l(S - l)}{L}$;

- Theo ĐL biến thiên động năng: $\frac{mv_0^2}{2} = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \mu mg \frac{l^2}{L} + \mu mg \frac{l(S - l)}{L}$

$$\Rightarrow \mu = \frac{v_0^2 L}{gl(2S - l)} = 0,05 v_0^2$$



b. Khi $0 \leq x \leq l$, phương trình ch. động của xe trượt là: $-\frac{\mu mg}{L}x = mx''$ (*) hay $-\frac{\mu g}{L}x = x''$ (**),

là phương trình d.đ.đ.h với tần số $\omega = \sqrt{\mu g/L}$ (rad/s)

- Dạng nghiệm của pt (*) là: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

+ Khi $t = 0$ thì $x = A\cos\varphi = 0$ và $v = x' = -A\omega\sin\varphi = v_0$

$$\Rightarrow x = \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (***)$$

+ Khi đầu xe vừa qua khỏi dải đường, tức $x = l$ thì :

$$\frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t_1 - \frac{\pi}{2}) = l \Rightarrow \cos(\omega t_1 - \frac{\pi}{2}) = \sin\omega t_1 = \frac{l\omega}{v_0}$$

Vậy thời gian đầu xe đi hết đoạn đường nhám là : $t_1 = \frac{1}{\omega}.\arcsin\left(\frac{l\omega}{v_0}\right)$; và vận tốc của xe trượt

lúc đó là : $v_1 = v_0\cos\omega t_1$

- Sau khi đầu xe đã ra khỏi đoạn đường nhám, tức $l \leq x \leq S$, phương trình chuyển động của xe

là pt : $-\frac{\mu mg}{L}l = mx''$, nên gia tốc của xe là :

$$a_2 = x'' = -\frac{\mu lg}{L} = \text{const} : \text{xe chuyển động chậm dần đều.}$$

- Thời gian ch.động chậm dần đều cho đến khi dừng lại là : $t_2 = -\frac{v_1}{a_2}$.

- Vậy thời gian hãm của xe là : $t = t_1 + t_2 = \frac{1}{\omega}.\arcsin\left(\frac{l\omega}{v_0}\right) + \frac{Lv_0}{\mu lg}\cos\left(\arcsin\left(\frac{l\omega}{v_0}\right)\right)$

Câu 20. Một hình trụ đặc bán kính R , khối lượng $m_1 = 20$ kg có thể quay không ma sát quanh một trục cố định nằm ngang trùng với trục của hình trụ. Trên hình trụ có quấn một sợi dây không giãn, khối lượng không đáng kể. Đầu tự do của dây có buộc một vật nặng $m_2 = 4$ kg, như hình vẽ. Tìm gia tốc của vật nặng và lực căng của dây. Biết moment quán tính của hình trụ đối với trục quay là

$$I = \frac{m_1 R^2}{2} ; \text{lấy } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Giải:

- Do tác dụng của trọng lực $P_2 = m_2g$, hệ chuyển động : hình trụ quay và vật nặng tịnh tiến đi xuống.

- Gọi a là gia tốc dài của vật nặng, γ là gia tốc góc của hình trụ.

Ta có: $a = R\gamma$.

- Áp dụng định luật II Newton cho vật nặng: $m_2g - T = m_2a$ (1)
(với T là lực căng dây tác dụng lên vật nặng)

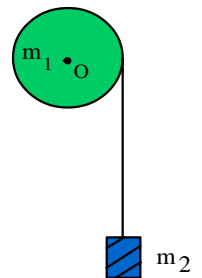
- Phương trình chuyển động quay của hình trụ : $M = I\gamma$, với $M = T'R = TR$ (với T' là lực căng của dây tác dụng lên hình trụ, $T' = T$)

$$I = \frac{m_1 R^2}{2}, \gamma = \frac{a}{R} \quad (2)$$

- Từ (1) và (2) ta có : $a = \frac{2m_2g}{2m_2 + m_1} = 2,86 \text{ (m/s}^2\text{)}$

$$\text{và } T = m_2(g - a) = 286 \text{ (N)}$$

Câu 21. Một hình trụ mỏng đồng nhất bán kính R và khối lượng m được đặt lên một mặt phẳng nghiêng một góc α so với phương ngang. Hệ số ma sát trượt giữa mặt nghiêng và hình trụ là μ . Bỏ qua ma sát lăn.



a) Tìm sự phụ thuộc của gia tốc $a(\alpha)$ của hình trụ vào góc nghiêng α của mặt phẳng. Khảo sát trường hợp hình trụ lăn không trượt và lăn có trượt.

b) Nếu gắn vào thành trong của hình trụ một vật nhỏ khối lượng m_0 thì trong những điều kiện nào đó, hình trụ có thể nằm cân bằng trên mặt phẳng nghiêng. Hãy xác định điều kiện đó và chỉ ra các vị trí cân bằng của hệ với các m_0 khác nhau.

Giải:

a) * Khi ma sát nghỉ đủ lớn thì hình trụ sẽ lăn không trượt:

Tại thời điểm bất kỳ, vận tốc chuyển động tịnh tiến của hình trụ là: $v = \omega R$ (1)

Động năng toàn phần của hình trụ khi lăn không trượt được xác định bằng tổng của động năng chuyển động tịnh tiến và động năng của chuyển động quay (định lý Kiôning):

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{m(\omega R)^2}{2} = mv^2 \quad (2)$$

Giả sử sau một thời gian nào đó, hình trụ lăn xuống theo mặt nghiêng được một đoạn S thì độ giảm thế năng của nó là:

$$mgh = mgS \sin \alpha \quad (3).$$

Nhưng do không có tỏa nhiệt (vì lăn không trượt) nên cơ năng bảo toàn: Độ tăng động năng bằng độ giảm thế năng:

$$mgS \sin \alpha = mv^2 \Rightarrow S \cdot g \sin \alpha = v^2 \quad (4).$$

Như vậy bình phương của vận tốc tỷ lệ với quãng đường đi - đây chính là quy luật của chuyển động nhanh dần đều với vận tốc ban đầu bằng không. Trong chuyển động này thì $v^2 = 2aS$, so sánh với (4), ta nhận được:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{2} \quad (5)$$

Vậy hình trụ lăn xuống nhanh dần đều với gia tốc bằng một nửa so với trường hợp trượt không ma sát theo mặt nghiêng. Từ đó ta kết luận được chính lực ma sát đã làm giảm gia tốc của hình trụ đi một nửa:

$$F_{ms} = \frac{mg \sin \alpha}{2} \quad (6)$$

Từ (6) ta xác định được lực ma sát đủ lớn để bảo đảm cho hình trụ lăn không trượt:

$$\frac{mg \sin \alpha}{2} \leq \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \mu \geq \frac{\tan \alpha}{2} \quad (7)$$

* Khi hình trụ có thể trượt:

Khi hệ số ma sát không thỏa mãn điều kiện trên thì hình trụ sẽ trượt và có sự tỏa nhiệt. Khi đó, ta áp dụng định luật II Niuton theo phương của mặt nghiêng:

$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha \Rightarrow a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (8)$$

Như vậy gia tốc của hình trụ trên mặt nghiêng phụ thuộc vào góc nghiêng theo quy luật:

$$a = \begin{cases} \frac{g \sin \alpha}{2} & \text{Khi } \alpha \leq \alpha^*; \quad \alpha^* = \arctg(2\mu) \\ g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) & \text{Khi } \alpha \geq \alpha^* \end{cases}$$

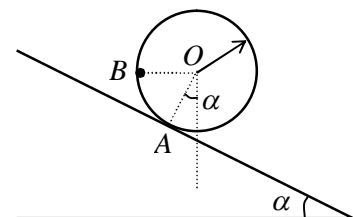
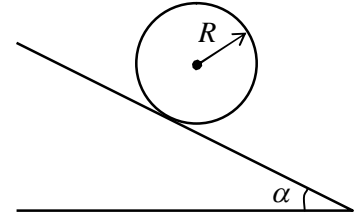
b) * Sau khi gắn vật nhỏ vào thành trong của hình trụ thì hệ có thể cân bằng khi hệ số ma sát giữa mặt nghiêng và hình trụ đủ lớn và nhờ sự cân bằng của mômen lực tác dụng lên hình trụ đối với điểm tiếp xúc giữa hình trụ và mặt nghiêng (điểm A trên hình vẽ).

Giá trị nhỏ nhất ứng với trường hợp đoạn OB nằm ngang. Phương trình cân bằng mômen đối với điểm A khi đó:

$$m_0 g (R - R \sin \alpha) = mgR \sin \alpha \Rightarrow m_0 = \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} m \quad (10)$$

Điều kiện cân bằng trước hết là không có sự trượt theo mặt nghiêng:

$$\mu \geq \tan \alpha \quad (11)$$

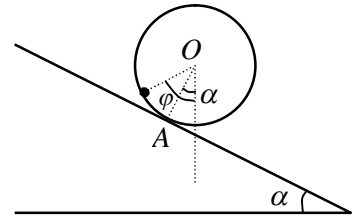


* Vị trí cân bằng được xác định bởi góc lệch φ của vật so với phương đứng. Điều kiện cân bằng khi đó là:

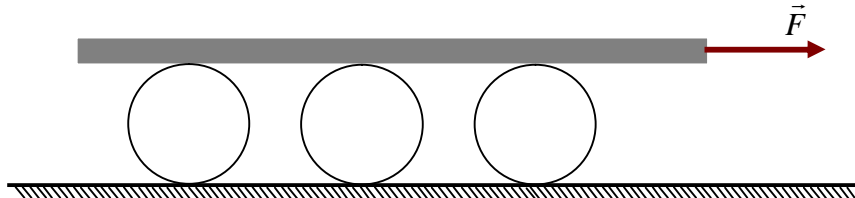
$$mgR \sin \alpha = m_0 gR (\sin \varphi - \sin \alpha) \Rightarrow \sin \varphi = \frac{m + m_0}{m_0} \sin \alpha.$$

Phương trình này có 2 nghiệm trên đoạn $[0; 2\pi]$, một trong hai nghiệm tương đương với trạng thái cân bằng không bền. Vì vậy chỉ lấy được 1 góc có độ lớn:

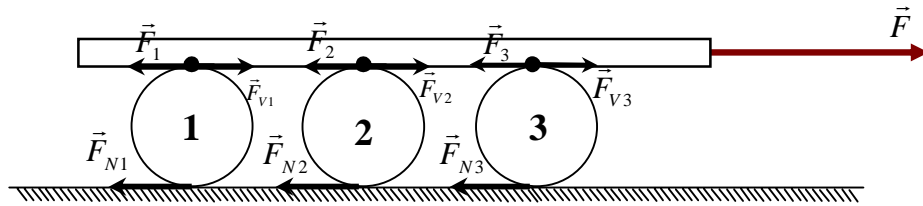
$$\varphi = \arcsin \left(\frac{m + m_0}{m_0} \sin \alpha \right).$$



Câu 22. Một tấm ván có khối lượng là m_1 tựa trên ba con lăn giống nhau và có cùng khối lượng m_2 . Tấm ván chịu tác dụng của lực ngang \vec{F} hướng về bên phải. Coi như không xảy ra hiện tượng trượt giữa tấm ván và các con lăn cũng như giữa các con lăn và nền ngang. Tìm gia tốc của tấm ván? Coi các con lăn như những khối trụ đồng chất. Bỏ qua ma sát lăn.



Giải :



Xét những lực theo phương ngang (những lực trực tiếp gây ra gia tốc cho các con lăn và tấm ván)
Xét con lăn sau cùng (con lăn 1) chịu tác dụng của các lực:

Lực ma sát nghỉ do ván tác dụng: \vec{F}_{V1}

Lực ma sát nghỉ do nền tác dụng: \vec{F}_{N1} .

Tương tự đối với con lăn 2 chịu tác dụng của các lực: \vec{F}_{V2} , \vec{F}_{N2}

Đối với con lăn 3 chịu tác dụng của các lực: \vec{F}_{V3} , \vec{F}_{N3}

Vẽ hình biểu diễn và phân tích lực:

Mà
$$\begin{cases} \vec{F}_{V1} = \vec{F}_{V2} = \vec{F}_{V3} = \vec{F}_V \\ \vec{F}_{N1} = \vec{F}_{N2} = \vec{F}_{N3} = \vec{F}_N \end{cases};$$

Tấm ván chịu tác dụng của lực \vec{F} và các lực ma sát nghỉ: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$

Và $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3$;

Phương trình định luật II Niu ton cho tấm ván: $F - F_1 - F_2 - F_3 = m_1 a$ (1)..

Phương trình định luật II Newton cho các con lăn giống nhau, đối với một con lăn bất kì ta luôn có:

(I)
$$\begin{cases} F_V - F_N = m_2 a_{KT} \\ M_{F_V} + M_{F_N} = I \varepsilon \end{cases}; (a_{KT} : \text{Là gia tốc khối tâm của một con lăn})$$

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} F_1 = F_2 = F_3 = F_V \\ M_{F_V} = RF_V \\ M_{F_N} = RF_N \\ I = \frac{m_2 R^2}{2} \\ \varepsilon = \frac{a_{KT}}{R} \\ a = 2a_{KT} \end{array} \right.$$

Kết hợp các hệ phương trình (I) ,(II) và phương trình (1) ta có:

$$a = \frac{8F}{9m_2 + 8m_1}.$$

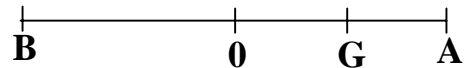
Câu 23. Trên một mặt bàn nhẵn nằm ngang có một thanh mảnh AB đồng chất có khối lượng m , chiều dài là $2l$ đang nằm yên. Một viên đạn có khối lượng m bay ngang với vận tốc v_0 tới cắm vuông góc vào đầu B của thanh. (va chạm là hoàn toàn không đàn hồi)

- Tìm vị trí và vận tốc của khối tâm G của hệ thanh và đạn sau va chạm ;
- Tìm vận tốc góc quay quanh G của thanh sau va chạm ;
- Tìm độ giảm động năng của hệ do va chạm.
- Ngay sau va chạm có một điểm C trên thanh có vận tốc tuyệt đối bằng không (gọi là tâm quay tức thời). Xác định vị trí của C. Cho biết mômen quán tính của thanh đối với đường trung trục của nó là $\frac{ml^2}{3}$.

Giải:

a/ Khi đạn cắm vào thanh thì vị trí G của khối tâm được xác định:

$$x_G = \frac{mx_1 + mx_2}{m + m} = \frac{l}{2}; \text{ (với } x_1 = 0; x_2 = l \text{);}$$



Sau va chạm đạn cắm vào thanh và hệ chuyển động song phẳng ;

- Động lượng của hệ trước va chạm là: $P_1 = mv_0$.
- Động lượng của hệ sau va chạm là : $P_2 = 2mv$;

Thời gian va chạm rất ngắn. áp dụng định luật bảo toàn động lượng: $P_1 = P_2 \Leftrightarrow mv_0 = 2mv$. Do đó vận tốc khối tâm trụ sau va chạm là:

$$v = \frac{v_0}{2};$$

b/ * Mômen động lượng của hệ đối với G ngay trước va chạm chỉ bằng momen động lượng của đạn đối với G đó là:

$$L_1 = I_T \cdot \omega_T = \frac{mlv_0}{2}; \text{ (với : } I_T = \frac{ml^2}{4}, \omega_T = \frac{2v_0}{l} \text{);}$$

* Sau va chạm hệ quay quanh G với vận tốc góc là ω do đó mômen động lượng của thanh đối với G là: $L' = I_G \omega$; với $I_G = (\frac{ml^2}{3} + \frac{ml^2}{4})$ – (Định lý Huyghen- Stenno);

$$\text{Mômen động lượng của đạn đối với G là: } L'' = I_{D2} \cdot \omega = \frac{ml^2}{4} \omega.$$

Do đó mômen động lượng của hệ đối với G sau va chạm là: $L_2 = L' + L'' = \frac{5ml^2}{6} \omega$;

(Với $I_S = \frac{5ml^2}{6}$ là mômen quán tính của hệ đối với G sau va chạm)

Theo định luật bảo toàn mômen động lượng ta luôn có: $L_1 = L_2 \Leftrightarrow \omega \frac{5ml^2}{6} = \frac{mlv_0}{2} \Rightarrow$ vận tốc góc quay quanh G của hệ là: $\omega = \frac{3v_0}{5l}$;

c. - Động năng của hệ trước va chạm là: $K_1 = \frac{mv_0^2}{2}$; (động năng của đạn)

- Động năng của hệ sau va chạm bằng động năng của chuyển động tịnh tiến của khối tâm G của hệ + động năng của hệ chuyển động quay quanh G :

$$K_2 = \frac{2mv^2}{2} + I \frac{\omega^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4} + \frac{5ml^2}{6} \left(\frac{3v_0}{5l} \right)^2 \frac{1}{2} = 0,4mv_0^2 ;$$

\Rightarrow Độ giảm động năng của hệ do va chạm là:

$$\Delta K = K_1 - K_2 = \frac{mv_0^2}{2} - 0,4mv_0^2 = 0,1mv_0^2 ;$$

d. Chọn điểm cơ bản là khối tâm G của hệ. Khi đó sau va chạm vận tốc của một điểm C bất kì trên vật được xác định: $\vec{v}_C = \vec{v} + [\vec{R} \wedge \vec{\omega}]$;

mà $v_C = 0 \Rightarrow \vec{v} = -[\vec{R} \wedge \vec{\omega}]$. Về độ lớn ta luôn có $v = \omega R$, $\Leftrightarrow \frac{v_0}{2} = \frac{3v_0}{5l} R \Rightarrow R = \frac{5l}{6}$. Vậy tại

điểm có vận tốc bằng không cách G một đoạn $R = \frac{5l}{6}$.

Câu 24. Một máy bay đang bay nằm ngang với vận tốc v_0 thì bắt đầu ngóc lên trên vẽ thành một đường tròn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Vận tốc của máy bay khi đó thay đổi từ độ cao h tính từ mức ban đầu của vòng tròn theo qui luật: $v^2 = v_0^2 - 2ah$. Ở điểm cao nhất của quỹ đạo vận tốc của nó bằng $v_0/2$. Hãy xác định gia tốc của máy bay khi vận tốc của nó hướng thẳng đứng lên phía trên?

Giải:

+ Theo gt: tại điểm cao nhất B vận tốc máy bay $v_B = v_0/2$, nên bán kính quỹ

đạo r thỏa mãn: $\frac{v_0^2}{4} = v_0^2 - 2a \cdot 2r$. (1)

+ Tại điểm C nơi vận tốc của máy bay hướng thẳng đứng từ trên xuống, gia tốc của máy bay là sự tổng hợp của hai gia tốc:

- gia tốc hướng tâm: $a_n = \frac{v_c^2}{r} = \frac{v_0^2 - 2ar}{r}$ (2)

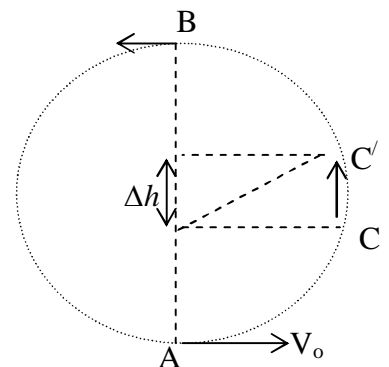
- gia tốc tiếp tuyến a_t

$$\Rightarrow a_c = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \quad (3)$$

+ Để tính a_t , ta xét sự dịch chuyển nhỏ của máy bay từ C đến C', khi đó:

$v_c'^2 = v_0^2 - 2a(r + \Delta h) \Rightarrow v_c'^2 - v_c^2 = -2a \cdot \Delta h$, gọi Δt là thời gian máy bay đi từ C đến C' ta

có: $\frac{v_c'^2 - v_c^2}{\Delta t} = -\frac{2a \cdot \Delta h}{\Delta t}$, khi $\Delta t \rightarrow 0$ thì $C' \rightarrow C$ suy ra:



$$2.v_c.a_t = -2a.v_c \Rightarrow a_t = -a$$

$$\Rightarrow a_c = \sqrt{a^2 + \left(\frac{v_c^2}{r}\right)^2} = a.\sqrt{109}/3$$

Câu 25. Người ta nối một sợi dây không giãn vào trục một bánh xe khối lượng m , bán kính r . Sợi dây đó căng theo phương ngang trong mặt phẳng bánh xe. Bánh xe được quay và không nảy lên khi va chạm vào các chấn song song với trục của nó, đặt liên tiếp trong mặt phẳng nằm ngang, khoảng cách giữa chúng là $l < r$. Hãy xác định lực kéo trung bình cần có của sợi dây để vận tốc trung bình của bánh xe không đổi là v . Xem như khối lượng bánh xe tập trung ở trục của nó.

Giải:

+ Xét vị trí thứ nhất là vị trí mà trục của nó nằm ngay phía trên một thanh ray và nó có vận tốc bằng v .

+ Vị trí thứ hai là vị trí va chạm tiếp theo nó có vận tốc v' vuông góc với thanh trước đó. theo đl bảo toàn cơ năng:

$$mgh + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} \text{ với } h = r - \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{l^2}{8r}$$

$$\Rightarrow v' = v\sqrt{1 + gl^2/4rv^2}$$

+ Theo đk của bài ra bánh xe không nảy lên khi va chạm, nghĩa là va đập của bánh xe lên thanh là tuyệt đối không đàn hồi, điều này cho thấy rằng khi va đập xung lực tác dụng lên bánh xe làm động năng của bánh xe do thành phần vận tốc hướng theo phương nối thanh bị triệt tiêu

$$\Delta W = \frac{m(v' \cdot \sin \alpha)^2}{2} \approx \frac{mv'^2 l^2}{2r^2}$$

+ Để vận tốc trung bình của bánh xe không đổi cần một công do lực kéo T của sợi dây trên quãng đường để bù vào sự hao hụt này là:

$$T.l = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{gl^2}{4r.v^2}\right) \cdot \frac{l^2}{r^2} \Rightarrow T = \frac{mv^2.l}{4r.v^2} \left(1 + \frac{gl^2}{4r.v^2}\right) \approx \frac{mv^2.l}{2r^2}$$

Câu 26. Một đĩa tròn đồng chất bán kính R , bề dày h . Đĩa đang quay với tốc độ góc ω_0 quanh trục của nó thì người ta đặt nó xuống mặt sàn ngang. Hệ số ma sát giữa đĩa và sàn là μ . Hãy xác định số vòng mà đĩa quay được cho tới lúc dừng?

Giải:

+ Theo định lý động năng: $A_{ms} = \frac{I.\omega_0^2}{2} \quad (1)$

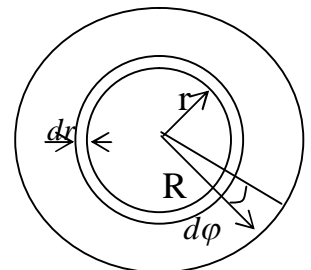
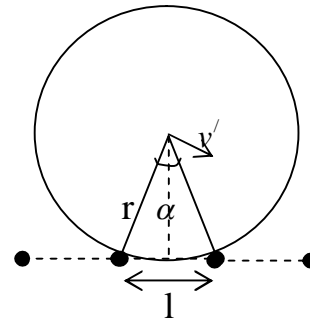
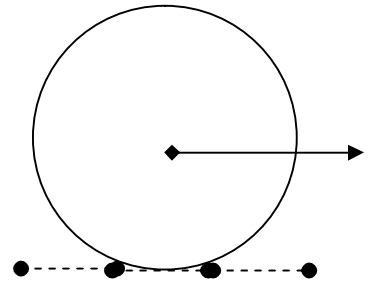
+ Để tính công của lực ma sát, ta chia đĩa thành những hình vành khăn có bán kính r bề dày dr như hình vẽ, khi đó lực ma sát tác dụng lên mẫu rất nhỏ trên hình vành khăn xác định bởi góc $d\varphi$ là: $dF_{ms} = \mu.d\varphi.r.dr.h.\rho.g$

Mô men của lực ma sát tác dụng lên mẫu này là:

$$dM = r.dF_{ms} = \mu.\rho.gh.r^2.dr.d\varphi.$$

+ Mô men của lực ma sát tác dụng lên cả đĩa là:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mu.\rho.gh.r^2.dr.d\varphi = \mu\rho gh.2\pi R^3/3 = 2\mu.R.mg/3. \quad (2)$$



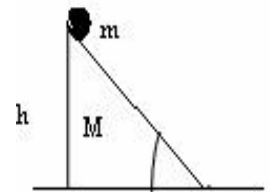
Cho tới lúc dừng, đĩa đã quay được một góc α thì công của lực ma sát tác dụng lên cả đĩa

$$\text{là: } A_{ms} = \int_0^\alpha M \cdot d\alpha = \int_0^\alpha 2\mu Rmg \cdot d\alpha / 3 = 2\mu Rmg \cdot \alpha / 3 \quad (3).$$

$$\text{Thay (3) vào (1) ta được: } \frac{mR^2 \cdot \omega_0^2}{4} = \frac{2\mu Rmg \cdot \alpha}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3R\omega_0^2}{8\mu g}$$

$$\text{Suy ra số vòng mà đĩa quay được là: } N = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{3R\omega_0^2}{16\pi \cdot \mu \cdot g}$$

Câu 27. Một cái nêm có khối lượng M có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang (như hình vẽ). Từ đỉnh nêm người ta thả một vật có khối lượng m (không vận tốc ban đầu). Xác định vận tốc theo phương ngang của nêm tại thời điểm khi m trượt đến chân nêm? Xác định góc hợp bởi giữa véc tơ vận tốc của vật m với phương ngang? Cho góc của nêm là α , độ cao của nêm là h , bỏ qua ma sát giữa vật m và nêm. Nhận xét kết quả khi m rất nhỏ so với M và khi m rất lớn so với M ?



Giải:

Gọi v_x, v_y là vận tốc của vật theo phương nằm ngang và thẳng đứng so với mặt đất ta có:

$$MV - mv_x = 0 \quad (1)$$

$$mgh = m(v_x^2 + v_y^2)/2 + MV^2/2 \quad (2)$$

Gọi u_x, u_y là vận tốc của vật theo 2 phương so với nêm, ta có:

$$u_x = v_x + V$$

$$u_y = v_y$$

$$\text{Trong đó } \frac{u_y}{u_x} = \tan \alpha \Rightarrow \frac{v_y}{(v_x + V)} = \tan \alpha \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được

$$V^2 = \frac{2gh}{\left(\frac{M}{m}\right)^2 + \left(1 + \frac{M}{m}\right)^2 \tan^2 \alpha + \frac{M}{m}}$$

$$\tan \beta = \frac{v_y}{v_x} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan \alpha$$

Khi $m \ll M$: $V=0$; $\beta = \alpha$

Khi $m \gg M$: $V^2 = 2gh$; $\beta = \pi/2$

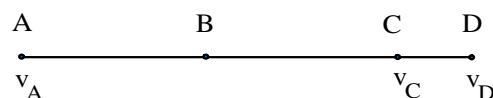
Câu 28. Khảo sát chuyển động của một vật từ khi bắt đầu chuyển động thẳng chậm dần đều cho đến khi dừng lại hẳn. Quãng đường đi được trong giây đầu tiên dài gấp 15 lần quãng đường đi được trong giây cuối cùng. Tìm vận tốc ban đầu của vật. Biết toàn bộ quãng đường vật đi được là 25,6m.

Giải:

Biểu diễn quãng đường của vật trên hình vẽ.

- Xét đoạn đường AB trong giây đầu tiên:

$$s_{AB} = v_A \cdot 1 + \frac{1}{2} a \cdot 1^2 = v_A + \frac{a}{2} \quad (1)$$



- Xét đoạn đường CD trong giây cuối cùng:

$$v_D = v_C + a \cdot 1 = 0 \Rightarrow v_C = -a$$

$$s_{CD} = v_C \cdot 1 + \frac{1}{2} a \cdot 1^2 = -a + \frac{a}{2} = -\frac{a}{2} \quad (2)$$

$$\text{- Từ (1) và (2) ta được: } v_A + \frac{a}{2} = 15 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) \Rightarrow v_A = -8a.$$

- Xét cả quãng đường AD: $s_{AD} = \frac{v_D^2 - v_A^2}{2a} = \frac{-v_A^2}{2a} \Rightarrow 25,6 = \frac{-(-8a)^2}{2a}$.

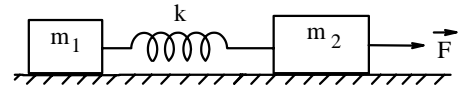
Ta có: $a = -0,8 \text{ (m/s}^2\text{)}$

Vậy vận tốc ban đầu của vật là: $v_A = 6,4 \text{ (m/s)}$

Câu 29. Cho cơ hệ gồm hai vật có khối lượng m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một lò xo rất nhẹ có độ cứng k , chiều dài tự nhiên l_0 . Hệ được đặt trên một mặt phẳng ngang trơn nhẵn. Một lực \vec{F} không đổi có phương nằm ngang (dọc theo trục của lò xo) bắt đầu tác dụng vào vật m_2 như hình vẽ.

a, Chứng tỏ các vật dao động điều hoà. Tính biên độ và chu kỳ dao động của mỗi vật.

b, Tính khoảng cách cực đại và khoảng cách cực tiểu giữa hai vật trong quá trình dao động.



Giải:

- Xét trong hệ quy chiếu gắn với khối tâm G của cơ hệ.

- Gia tốc của khối tâm: $a_G = \frac{F}{m_1 + m_2}$

- Gọi O_1 và O_2 lần lượt là vị trí của m_1 và m_2 khi lò xo ở trạng thái tự nhiên : $O_1O_2 = l_0$;

- Vị trí O_1 và O_2 lần lượt cách G những đoạn l_1 và l_2 , thoả mãn điều kiện :

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 = m_2 (l_0 - l_1) \Rightarrow l_1 = \frac{m_2 l_0}{m_1 + m_2} ; l_2 = \frac{m_1 l_0}{m_1 + m_2} .$$

- Ta coi hệ trên gồm : vật m_1 gắn vào một đầu lò xo có chiều dài l_1 , đầu kia của l_1 được gắn cố định vào G và vật m_2 gắn vào một đầu của lò xo có chiều dài l_2 , đầu kia của l_2 được gắn cố định vào G.

- Độ cứng của các lò xo l_1 và l_2 : $k_1 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_2}$ và $k_2 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1}$;

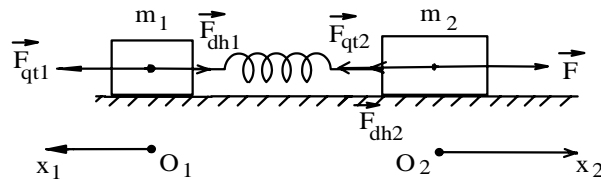
* Phương trình dao động của các vật:

Chọn các trục toạ độ cho mỗi vật gắn với khối tâm G của cơ hệ như trên hình vẽ.

- **Vật m_1 :** $F_{qt1} - F_{dh1} = m_1 a_1$

hay $\frac{m_1 F}{m_1 + m_2} - k_1 x_1 = m_1 x_1''$

$$\Rightarrow x_1'' + \frac{k_1}{m_1} \left(x_1 - \frac{m_1 F}{(m_1 + m_2) k_1} \right) = 0$$



Đặt : $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$; $X_1 = x_1 - \frac{m_1 F}{(m_1 + m_2) k_1} \Rightarrow X_1'' + \omega_1^2 X_1 = 0$ (*): vật m_1 dao động điều hoà.

Nghiệm phương trình (*) có dạng : $X_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

- **Vật m_2 :** $F - F_{qt2} - F_{dh2} = m_2 a_2$ hay $F - \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} - k_2 x_2 = m_2 x_2''$.

Đặt : $\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$; $X_2 = x_2 - \frac{m_1 F}{(m_1 + m_2) k_2} \Rightarrow X_2'' + \omega_2^2 X_2 = 0$: vật m_2 dao động điều hoà.

Nghiệm phương trình (*) có dạng : $X_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

* Chu kỳ dao động của các vật:

- **Vật m_1 :** $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) k}}$;

- **Vật m_2** : $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}}$.

* Biên độ dao động của các vật:

- **Vật m_1** : $x_1 = \frac{m_1 m_2 F}{(m_1 + m_2)^2 k} + A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

$v_1 = A_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

Khi $t = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{m_1 m_2 F}{(m_1 + m_2)^2 k} \\ \varphi_1 = -\pi/2 \end{array} \right.$

- **Vật m_2** : $x_2 = \frac{m_1^2 F}{(m_1 + m_2)^2 k} + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

$v_2 = A_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

Khi $t = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ v_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_2 = \frac{m_1^2 F}{(m_1 + m_2)^2 k} \\ \varphi_2 = -\pi/2 \end{array} \right.$

b, Khoảng cách cực đại và cực tiểu giữa hai vật trong quá trình dao động : Hai vật dao động cùng pha trên hai trục tọa độ cùng phương ngược chiều nên

$l_{\max} = l_0 + 2(A_1 + A_2) = l_0 + 2 \frac{m_1 F}{(m_1 + m_2)k}$;

$l_{\min} = l_0$

Câu 30. Một thanh cứng AB đồng chất, dài L , khối lượng M có thể quay không ma sát trong mặt phẳng thẳng đứng quanh một trục cố định nằm ngang đi qua điểm O trên thanh với $OA=L/4$. Ban đầu thanh đang đứng yên thẳng đứng thì một vật nhỏ có khối lượng $m=M/3$ bay theo phương ngang tới va chạm vào đầu B của thanh với vận tốc V (hình 5). Sau va chạm, vật dính vào thanh và hệ thanh - vật bắt đầu dao động với góc lệch bé xung quanh vị trí cân bằng. Chứng tỏ rằng dao động của hệ thanh - vật là dao động điều hòa. Lập công thức tính chu kỳ dao động và viết phương trình dao động.

Giải:

Mômen quán tính của hệ thanh-vật sau va chạm: $I = \frac{1}{12} M L^2 + M \cdot OG^2 + m \left(\frac{3}{4} L\right)^2 = \frac{1}{3} M L^2$ (1)

Phương trình động lực học trong chuyển động quay hệ thanh-vật:

$I\gamma = \sum M \Leftrightarrow \frac{1}{3} M L^2 \gamma = M_{Mg/O} + M_{mg/O}$

Triển khai các mômen lực về phải và thay $\gamma = \theta''$ ta được:

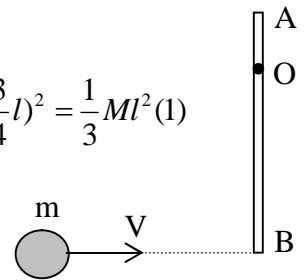
$I\theta'' = -Mg \cdot GI - mg \cdot BH = -Mg \frac{l}{4} \sin \theta - mg \frac{3l}{4} \sin \theta \rightarrow \frac{1}{3} M L^2 \theta'' = -Mg \frac{l}{4} \sin \theta - mg \frac{3l}{4} \sin \theta$

$\rightarrow \frac{l}{3} \theta'' = -\frac{1}{2} g \sin \theta$. Vì θ bé nên $\sin \theta \approx \theta \rightarrow \frac{l}{3} \theta'' = -\frac{1}{2} g \theta \rightarrow \theta'' + \frac{3g}{2l} \theta = 0 \rightarrow \theta'' + \omega^2 \theta = 0$

(với $\omega^2 = \frac{3g}{2l}$). Vậy hệ thanh-vật sau va chạm dao động điều hòa với chu kỳ $T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}$

Phương trình dao động có dạng: $\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$

Tại $t=0$ thì $\theta=0$ và $\theta' = d\theta/dt > 0$ suy ra $\varphi=0$



Định luật bảo toàn mômen động lượng cho: $\frac{M}{3}V\frac{3}{4}l = \frac{1}{3}Ml^2\theta'_o$ (θ'_o là vận tốc góc ban đầu hệ

thanh-vật) hay $\theta'_o = \frac{3V}{4l}$. Phương trình vận tốc góc của thanh: $\theta' = \omega\theta_m \cos \omega t$.

Tại $t=0$ thì $\theta'_o = \omega\theta_m$ suy ra: $\theta_m = V\sqrt{\frac{3}{8gl}} \rightarrow \theta = V\sqrt{\frac{3}{8gl}} \sin(\sqrt{\frac{3g}{2l}}t)$

Câu 31. Một vật nhỏ A bắt đầu trượt từ đỉnh của một bán cầu cố định, bán kính $R = 90\text{cm}$, xuống dưới. Tìm vị trí vật bắt đầu tách khỏi mặt cầu và vận tốc của vật tại vị trí đó. Cho gia tốc trọng trường $g = 10\text{m/s}^2$. Bỏ qua ma sát giữa vật và bán cầu.

Giải:

Áp dụng định lý động năng \rightarrow Vận tốc tại M:

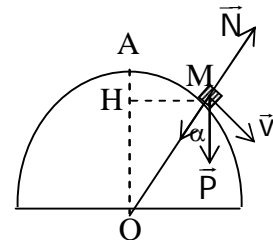
$$v^2 = 2g \cdot AH = 2gR(1 - \cos \alpha) \quad (1)$$

$$\vec{F}_{hl} = \vec{P} + \vec{N} \text{ chiếu lên phương OM được: } P \cos \alpha - N = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) được: $N = mg(3\cos \alpha - 2)$

Vật bắt đầu tách khỏi mặt cầu khi $N = 0 \rightarrow \cos \alpha = 2/3$, hay bởi độ

Cao $OH = R\cos \alpha_0 = 60\text{cm}$. Vận tốc v của vật tại vị trí đó: $v^2 = \frac{2gR}{3} = 6 \rightarrow v = \sqrt{6} \text{ m/s}$



Câu 32. Hai vật có khối lượng m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một sợi dây nhẹ, không dẫn vắt qua một ròng rọc cố định nằm ngang và cố định gắn vào mép bàn. Ròng rọc có momen quán tính I và bán kính R . Coi rằng dây không trượt trên ròng rọc khi quay. Biết hệ số ma sát giữa vật m_2 và mặt bàn là μ , bỏ qua ma sát trục quay.

a. Xác định gia tốc của m_1 và m_2 .

b. Tìm điều kiện giữa khối lượng m_1 , m_2 và hệ số ma sát mặt bàn μ để hệ thống nằm cân bằng.

Giải:

a/ Xác định gia tốc của m_1 và m_2 .

+ Biểu diễn các lực trên hình

$$+ \text{ Xét vật } m_1: m_1g - T_1 = m_1a \Rightarrow T_1 = m_1(g - a) \quad (1)$$

$$+ \text{ Xét vật } m_2: T_2 - F_{ms} = m_2a \Rightarrow T_2 = m_2(\mu g + a) \quad (2)$$

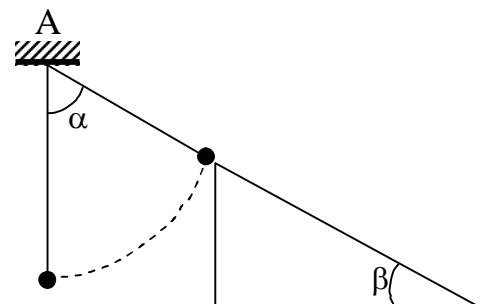
$$+ \text{ Xét ròng rọc: } (T_1 - T_2)R = I\gamma \Rightarrow T_1 - T_2 = I\frac{a}{R^2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow a = \frac{g(m_1 - \mu m_2)}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2}$$

b/ Tìm điều kiện giữa khối lượng m_1 , m_2 và hệ số ma sát mặt bàn μ để hệ thống nằm cân bằng.

Để hệ thống nằm cân bằng $P_1 = F_{msn} \leq (F_{msn})_{\max} \Rightarrow m_2\mu \geq m_1$

Câu 33. Một con lắc đơn, gồm vật nặng $m = 0,2\text{kg}$, dây treo nhẹ, không dẫn có chiều dài $l = 1\text{m}$ được treo ở A cách mặt đất là $H = 4,9\text{m}$. Truyền cho m một vận tốc theo phương ngang để nó có động năng W_d . Con lắc chuyển động đến vị trí dây treo lệch góc $\alpha = 60^\circ$ so với phương thẳng đứng thì dây treo bị đứt, khi đó vật m có vận tốc $v_0 = 4 \text{ m/s}$. Bỏ qua mọi lực cản và ma sát. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$.



1. Xác định động năng W_d .
2. Bao lâu sau khi dây treo đứt, vật m sẽ rơi đến mặt đất.
3. Nếu từ vị trí của vật khi dây treo bị đứt có căng một sợi dây khác nghiêng với mặt đất một góc $\beta = 30^\circ$ trong mặt phẳng quỹ đạo của vật m (Hình 5), thì vật m chạm vào dây tại điểm cách mặt đất bao nhiêu.

Giải :

- 1, Chọn gốc thế năng tại C, áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

$$W_c = mgl(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{2}mv_0^2 = 2,6J$$

- 2, Chọn trục xOy như hình vẽ. Chuyển động của vật theo hai trục là

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \sin\alpha)t \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow y = 5t^2 - 2\sqrt{3}t \quad (3)$$

Khi chạm đất $y = 4,4m \Rightarrow t = 1,34s$.

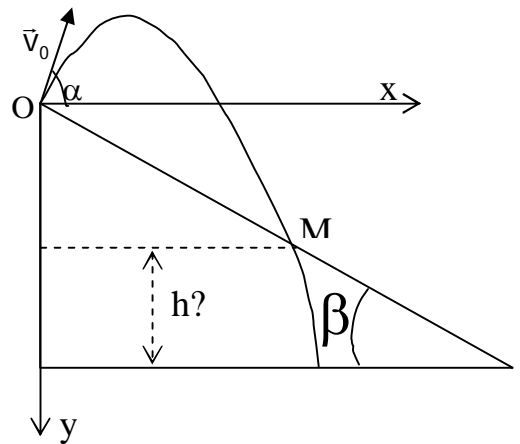
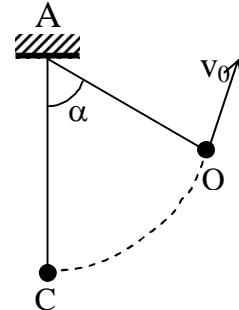
$$3, (1) \Rightarrow t = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{4}x^2 - \sqrt{3}x \quad (4)$$

Mặt khác dây là một đoạn thẳng có PT:

$$y = (\tan\beta)x \Rightarrow x = \sqrt{3}y$$

$$\frac{15}{4}y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{16}{15}m. \Rightarrow y = 16/15 m \text{ và điểm đó}$$

cách mặt đất 3,33m.



Câu 34. Một học sinh thứ nhất chạy trên đường tròn tâm O bán kính $R = 30m$ với tốc độ không đổi bằng $u = 3,14m/s$. Học sinh thứ hai bắt đầu chạy từ tâm O với tốc độ không đổi $v = 2u$ và luôn nằm trên bán kính nối tâm O với học sinh thứ nhất.

- a) Khi học sinh thứ hai đến điểm M ($OM = r$) thì véc tơ vận tốc của cậu ta hợp với \overrightarrow{OM} một góc φ . Chứng tỏ rằng $\sin\varphi = r/2R$.

- b) Sau bao lâu thì học sinh thứ hai đuổi kịp học sinh thứ nhất.

Giải:

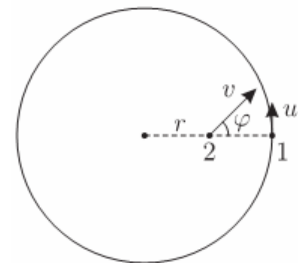
a. Vận tốc góc của HS1 là $\omega = u/R$. Do cả hai luôn nằm trên một bán kính nên r cũng quay quanh tâm với vận tốc góc ω , hay $\omega = v \sin\varphi / r$. Do đó $\sin\varphi = r/2R$.

b. Dễ dàng thấy rằng trong quá trình đuổi bắt, góc φ thay đổi từ 0 đến $\pi/6$, ($\sin\varphi = 1/2$).

Xét trong khoảng thời gian Δt góc φ tăng $\Delta\varphi$, r tăng Δr , ta có:

$$\begin{aligned} \Delta r &= 2R \cdot \Delta(\sin\varphi) = 2R(\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi) = \\ &= 2R \cdot 2 \cos\left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin\frac{\Delta\varphi}{2}. \end{aligned}$$

$$\Delta r \approx 2R \cdot 2 \cos\varphi \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} = 2R \cos\varphi \cdot \Delta\varphi.$$

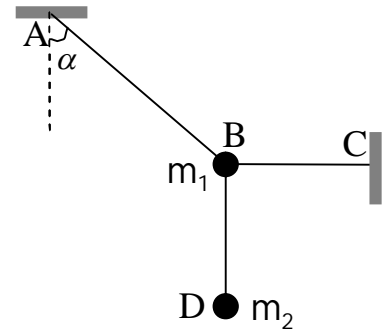


Do vận tốc theo phương bán kính là $v \cdot \cos \varphi$ nên:

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{2\omega R \cos \varphi} = \frac{2R \cos \varphi \cdot \Delta \varphi}{2\omega R \cos \varphi} = \frac{\Delta \varphi}{\omega},$$

Như vậy thời gian HS 2 đuổi kịp học sinh 1 là:

$$t = \frac{\varphi_0}{\omega} = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{\pi R}{6u} = 5 \text{ s.}$$



Câu 35. Cho hệ cơ học như hình vẽ.

Các sợi dây nhẹ và không giãn. Hệ ở trạng thái cân bằng. Biết $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$, sợi dây AB lập với phương thẳng đứng góc $\alpha = 60^\circ$, sợi dây BC nằm ngang. Cho $g = 10\text{m/s}^2$.

- Tính lực căng của mỗi sợi dây.
- Tính lực căng của các sợi dây AB và BD ngay sau khi đốt dây BC.

Giải:

a) $T_{BD} = mg = 10\text{N}$

$$T_{AB} = 40\text{N}$$

$$T_{BC} = 20\sqrt{3}\text{N}$$

b) Ngay sau khi đốt dây BC, vị trí các vật vẫn như cũ. Vật 1 chỉ có gia tốc tiếp tuyến (vuông góc với AB).

$$T - T' \cos 60 - mg \cos 60 = 0 \quad (1)$$

$$T' \cos 30 + mg \cos 30 = ma_1 \quad (2)$$

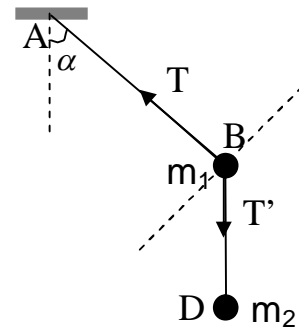
Vật m_2 chỉ có gia tốc theo phương thẳng đứng. Do dây BD không giãn nên gia tốc hai vật theo phương BD phải bằng nhau nên:

$$mg - T' = ma_2 = ma_1 \cos 30 \quad (3)$$

Giải hệ các phương trình trên ta được:

$$T = 40/7(\text{N});$$

$$T' = 10/7(\text{N}).$$



Câu 36. Một mặt phẳng nghiêng dài $l = 1\text{m}$ lập với phương ngang góc $\alpha = 30^\circ$. Hệ số ma sát tăng theo khoảng cách x từ đỉnh đến chân mặt nghiêng theo công thức $\mu = x/l$. Ở thời điểm $t = 0$ người ta thả nhẹ một vành tròn đồng chất, bán kính $R = 4\text{cm}$ từ đỉnh A của mặt phẳng nghiêng. Cho $g = 10\text{m/s}^2$. Bỏ qua ma sát lăn.

- Tìm theo t : toạ độ x của tâm, gia tốc góc, vận tốc góc của vành khi vành còn lăn có trượt.
- Xác định thời điểm vành bắt đầu lăn không trượt. Cho biết $\sin u = u/2$ thì $u \approx 1,89$.

Giải:

a. Ban đầu vành lăn có trượt: $F_{ms} = \frac{x}{l} mg \cos \alpha$

Từ phương trình tịnh tiến và quay:

$$mg \sin \alpha - F_{ms} = ma$$

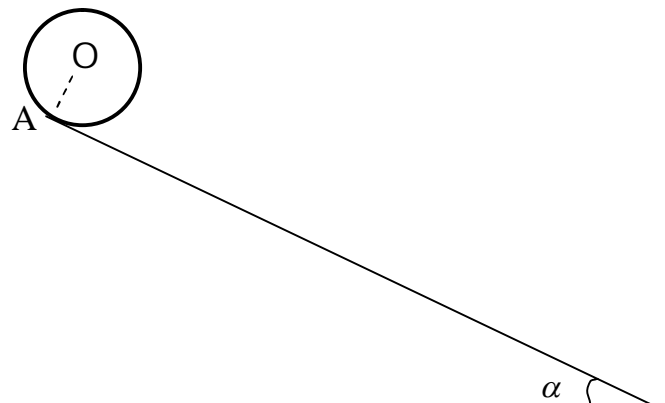
$$F_{ms} \cdot R = mR^2 \beta$$

$$\text{Suy ra } a = g \sin \alpha - xg \cos \alpha = mx''$$

Giải pt này chú ý điều kiện ban đầu ta được:

$$x = tg\alpha(1 - \cos \lambda t), \text{ trong đó } \lambda = \sqrt{g \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow v = x' = tg\alpha \cdot \lambda \cdot \sin \lambda t$$

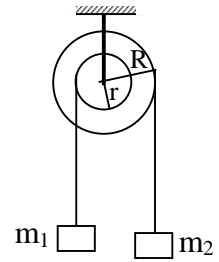


$$\beta = \frac{x \cdot g \cos \alpha}{R} = \frac{g \sin \alpha}{R} (1 - \cos \lambda t)$$

$$\omega = \frac{g \sin \alpha}{R} \left(t - \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t \right)$$

b. Khi vành bắt đầu lăn không trượt: $v = \omega R$
 $\Rightarrow 2 \sin \lambda t_0 = \lambda t_0$

Giải bằng đồ thị cho $\lambda t_0 \approx 1,89 \Rightarrow t_0 = \frac{1,89}{\lambda} = \frac{1,89}{\sqrt{5\sqrt{3}}} s$



Câu 37. Một ròng rọc kép gồm hai hình trụ đặc đồng chất đặt đồng tâm. Hình trụ lớn có khối lượng $M = 200g$, bán kính $R = 10cm$, hình trụ nhỏ có khối lượng $m = 100g$, bán kính $r = 5cm$. Trên rãnh của từng hình trụ có quấn một sợi dây nhẹ không dẫn, đầu tự do mỗi dây mang vật khối lượng lần lượt là $m_1 = 250g$ và $m_2 = 200g$ (hình vẽ). Ban đầu hệ đứng yên, thả cho hệ chuyển động. Tính gia tốc của từng vật và lực căng của mỗi dây treo.

Giải:

Biểu diễn các lực tác dụng lên hệ.

Vì $R \cdot P_2 > r \cdot P_1$ nên m_2 đi xuống, m_1 đi lên

Áp dụng định luật II Newton cho m_1, m_2 :

Vật m_1 : $-m_1g + T_1 = m_1a_1$ (1)

Vật m_2 : $m_2g - T_2 = m_2a_2$ (2)

Áp dụng phương trình ĐLHVR cho ròng rọc:

$$T_2R - T_1r = I\gamma$$
 (3)

Mặt khác: $a_1 = r\gamma$ (4)

$$a_2 = R\gamma$$
 (5)

Từ (1), (2), (3), (4), (5):

$$\gamma = \frac{(m_2R - m_1r)g}{m_2R^2 + m_1r^2 + I} \text{ với } I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$$

• Thay số: $\gamma = 20 \text{ rad/s}^2$; $a_1 = 1 \text{ m/s}^2$; $a_2 = 2 \text{ m/s}^2$;

• $T_1 = m_1(g + a_1)$; $T_2 = m_2(g - a_2)$, thay số $T_1 = 2,75N$; $T_2 = 1,6N$.

Câu 38. Một con lắc lò xo được treo thẳng đứng gồm vật nặng khối lượng $m = 1kg$, lò xo nhẹ có độ cứng $k = 100N/m$. Đặt giá B nằm ngang đỡ vật m để lò xo có chiều dài tự nhiên. Cho giá B chuyển động đi xuống với gia tốc $a = 2 \text{ m/s}^2$ không vận tốc ban đầu.

a. Tính thời gian từ khi giá B bắt đầu chuyển động cho đến khi vật rời giá B.

b. Chọn trục tọa độ có phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống, gốc tọa độ tại vị trí cân bằng của vật, gốc thời gian là lúc vật rời giá B. Viết phương trình dao động điều hòa của vật.

Giải :

a. Tìm thời gian

• Khi vật ở VTCB lò xo giãn: $\Delta l = \frac{mg}{k} = 0,1 \text{ m}$

Tần số của dao động: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad/s}$

• Vật m: $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{dh} = m\vec{a}$.

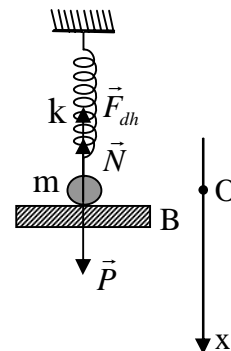
Chiều lên Ox: $mg - N - kS = ma$

Khi vật rời giá thì $N = 0$, gia tốc của vật $a = 2 \text{ m/s}^2$

• Suy ra: $S = \frac{at^2}{2} = \frac{m(g-a)}{ka} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ka}} = 0,283(s)$

b. Viết phương trình:

• Quãng đường vật đi được cho đến khi rời giá là $S = \frac{at^2}{2} = 0,08 \text{ m}$



Tọa độ ban đầu của vật là: $x_0 = 0,08 - 0,1 = -0,02 \text{ m} = -2 \text{ cm}$

Vận tốc của vật khi rời giá là: $v_0 = at = 40\sqrt{2} \text{ cm/s}$

• Biên độ của dao động: $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 6 \text{ cm}$

Tại $t = 0$ thì $6\cos\varphi = -2$ và $v > 0$ suy ra $\varphi = -1,91 \text{ rad}$

Phương trình dao động: $x = 6\cos(10t - 1,91) \text{ (cm)}$.

Câu 39. Một chất điểm chuyển động từ A đến B cách A một đoạn s . Cứ chuyển động được 3 giây thì chất điểm lại nghỉ 1 giây. Trong 3 giây đầu chất điểm chuyển động với vận tốc $v_0 = 5 \text{ m/s}$. Trong các khoảng 3 giây tiếp theo chất điểm chuyển động với vận tốc $2v_0, 3v_0, \dots, nv_0$. Tính vận tốc trung bình của chất điểm trên quãng đường AB trong các trường hợp:

a. $s = 315 \text{ m}$;

b. $s = 325 \text{ m}$.

Giải:

Đặt: $t_1 = 3(s)$

Gọi quãng đường mà chất điểm đi được sau nt_1 giây là s :

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_n$$

Trong đó s_1 là quãng đường đi được của chất điểm trong 3 giây đầu tiên. s_2, s_3, \dots, s_n là các quãng đường mà chất điểm đi được trong các khoảng 3 giây kế tiếp.

Suy ra:

$$S = v_0 t_1 + 2v_0 t_1 + \dots + nv_0 t_1 = v_0 t_1 (1 + 2 + \dots + n)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2} v_0 t_1 = 7,5n(n+1) \text{ (m)}$$

$$\text{a. Khi } s = 315 \text{ m} \Rightarrow 7,5n(n+1) = 315 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -7 \end{cases} \text{ (loại giá trị } n = -7)$$

Thời gian chuyển động:

$$t = nt_1 + n - 1 = 23(s)$$

$$\text{Vận tốc trung bình: } \bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{315}{23}$$

$$\bar{v} = \boxed{13,7(m/s)}$$

b. Khi $s = 325 \text{ m}$:

Thời gian đi 315 mét đầu là 23 giây

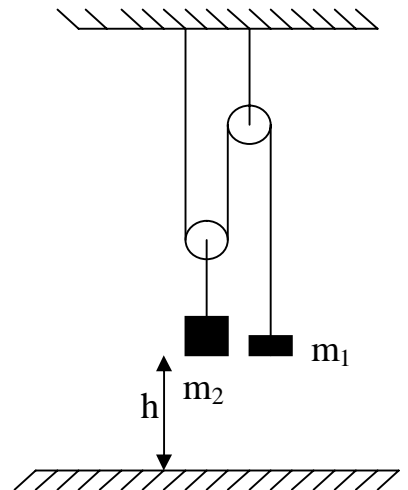
Thời gian đi 10 mét cuối là:

$$\Delta t = \frac{10}{v_{n+1}} = \frac{10}{7,5} = 0,29(s)$$

Vận tốc trung bình:

$$\bar{v} = \frac{325}{23 + 0,29 + 1}$$

$$\bar{v} = \boxed{13,38(m/s)}$$



Câu 40. Cho cơ hệ như hình vẽ:

Vật 1 có khối lượng m_1 , vật 2 có khối lượng $m_2 = 6m_1 = 6 \text{ kg}$, ban đầu hệ được giữ đứng yên và hai vật cách mặt đất một đoạn là $h = 40 \text{ cm}$. Thả cho hai vật bắt đầu chuyển động. Khối lượng ròng rọc, các dây nối và ma sát đều không đáng kể. Xem sợi dây không co, giãn trong quá trình chuyển động. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

a. Tính gia tốc của mỗi vật trong quá trình chuyển động.

b. Tính giá trị cực đại mà vật 1 đạt được trong quá trình chuyển động.

c. Trong khi 2 vật đang chuyển động người ta cho giá đỡ chuyển động hướng thẳng đứng lên trên với gia tốc $a = 2 \text{ m/s}^2$. Tính lực căng dây khi m_2 đang chuyển động.

Giải:

a. Biểu diễn đúng các lực tác dụng lên mỗi vật

PTĐL II newton cho mỗi vật:

$$\text{Vật 1: } \vec{p}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \quad (1)$$

$$\text{Vật 2: } \vec{p}_2 + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \quad (2)$$

Chiếu (1) và (2) lên hướng chuyển động của mỗi vật ta đc:

$$(1) \Leftrightarrow T_1 - p_1 = m_1 a_1 \quad (3)$$

$$(2) \Leftrightarrow p_2 - T_2 = m_2 a_2 \quad (4)$$

Từ hình vẽ ta thấy khi vật 2 đi đc quãng đường S

Thì vật 1 đi đc $2S \Rightarrow a_1 = 2a_2$ và $T_2 = 2T_1$ thay vào (3),(4) đồng thời khử T ta đc:

$$a_2 = \frac{(m_2 - 2m_1)g}{4m_1 + m_2} = 4 \text{ (m/s}^2\text{)} \quad \text{và} \quad a_1 = 8 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

b. Khi vật 2 chạm đất thì vật 1 đi đc đoạn đường là $S_1 = 2h = 0,8\text{m}$. Khi đó vật 1 đạt đc vận tốc

$$v_1 = \sqrt{2a_1 S_1} = \sqrt{12,8} \text{ (m/s)}$$

và thực hiện chuyển động ném đứng với vận tốc ban đầu v_1 . Quãng đường vật 1 đi được đến khi đạt độ cao cực đại là: $S_{1\max} = v_1^2 / 2g = 0,64 \text{ m}$

Vậy độ cao cực đại cần tìm là: $h_{\max} = S_1 + S_{1\max} = 1,44\text{m}$

c. Xét trong hệ quy chiếu gắn với giá đỡ m_2 . Các vật chịu thêm lực quán tính $\vec{F} = -m\vec{a}$

$$\vec{p}_2 + \vec{T}_2 - m_2 \vec{a} = m_2 \vec{a}_2 \quad \text{đặt } \vec{p}_{2hd} = \vec{p}_2 - m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g}_{hd} \Rightarrow g_{hd} = 12 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Tương tự câu a suy ra } a_2 = \frac{(m_2 - 2m_1)}{4m_1 + m_2} g_{hd} = 4,8 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$a_1 = 9,6 \text{ m/s}^2 \Rightarrow T_1 = m_1 (g_{hd} + a_1) = 21,6 \text{ N}$$

Câu 41. Một thanh đồng tính có độ dài l thực hiện dao động bé xung quanh một trục nằm ngang O O' vuông góc với thanh và đi qua một trong các điểm của nó. Tìm khoảng cách giữa tâm quán tính của thanh và trục O O', khi chu kỳ dao động là nhỏ nhất. Chu kỳ đó bằng bao nhiêu?

Giải:

Phương trình năng lượng

$$mga(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} I_{00} \omega^2 = \text{constan}$$

$$mga \sin \theta \cdot \omega + \frac{1}{2} I_{00} 2\omega \theta'' = 0$$

$$\text{nhưng } I_{00} = \frac{ml^2}{12} + ma^2$$

Với góc θ nhỏ $\sin \theta = \theta$ ta được phương trình sau

$$\theta'' + \left(\frac{ga}{\frac{l^2}{12} + a^2} \right) \theta = 0 \quad \text{Ta được chu kỳ dao động của con lắc là}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{ag}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{8} \left(\frac{l^2}{12a} + a \right)$$

$$\frac{d}{da} \left(\frac{l^2}{12a} + a \right) = 0$$

T min Khi $-\frac{l^2}{12a} + 1 = 0 \rightarrow a = \frac{l}{2\sqrt{3}}$

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g\sqrt{3}}}$$

Câu 42. Một hình nón có góc giữa đường sinh và trục là α , trục thẳng đứng. Ở độ cao H có 1 chất điểm có vận tốc ban đầu theo phương ngang v_0 chuyển động không ma sát trong mặt nón

1. $v_0 = ?$ để chất điểm chuyển động tròn đều trong mặt phẳng ngang
2. Chứng minh rằng .Nếu vận tốc ban đầu $v_1 < v_0$ thì lúc vật chuyển động đi xuống dưới và sau đó đi lên .Tính độ cao cực tiểu khi vật chuyển động.

Giải:

1. Vật chuyển động tròn đều $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{qt} = 0$

$$\tan \alpha = \frac{P}{F_{qt}}; F_{qt} = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv_0^2}{H \tan \alpha}$$

Vậy $P = F_{qt} \tan \alpha = \frac{mv_0^2}{H \tan \alpha} \cdot \tan \alpha$

$$mg = \frac{mv^2}{H} \rightarrow v_0 = \sqrt{gH}$$

2. Ta có phương trình

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{qt}$$

Chiếu lên đường sinh của hình nón

$$F = p \cos \alpha - F_{qt} \sin \alpha$$

$$= mg - \frac{mv^2}{h \tan \alpha} \cdot \sin \alpha = m \cos \alpha \left(g - \frac{v^2}{h} \right)$$

Tại thời điểm gban đầu $h = H$

$$v^2 = v_1^2 < \sqrt{2gH}$$

Do đó ban đầu $F > 0$ Vật chuyển động xuống dưới

Vì khi vật chuyển động xuống dưới h giảm thế năng của vật giảm Theo bảo toàn năng lượng động năng tăng v tăng

F giảm tới 0 sau $F < 0$ Vật chuyển động chậm dần đến $v = 0$ thì vật sẽ đi lên h nhỏ nhất khi vận tốc của vật theo phương ngang

Bảo toàn năng lượng $mgH + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_2^2$

Vì N, F_{qt} có phương đi qua trục quay còn trọng lực song song với trục nên Mô men động lượng

$$mv_1 H \tan \alpha = mv_2 h \tan \alpha \rightarrow v_1 H = v_2 h$$

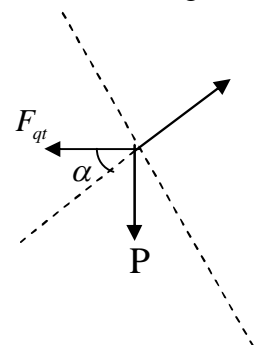
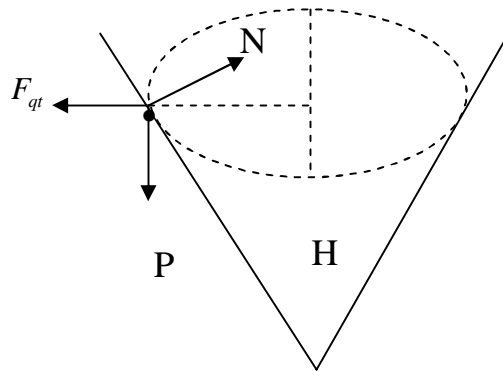
bảo toàn

$$\rightarrow 2gH + v_1^2 = 2gh + v_1^2 \frac{H^2}{h^2}$$

$$v_1^2 \frac{H^2 - h^2}{h^2} = 2g(H - h)$$

$$v_1^2 \frac{H + h}{h^2} = 2g$$

Với $H - h \neq 0$ Vậy ta được phương trình cuối cùng



$2gh^2 - hv_1^2 - Hv_1^2 = 0$ Từ đó ta tính được giá trị nhỏ nhất của h

Câu 43. Trên một mặt bàn nhẵn nằm ngang có một thanh mảnh AB đồng chất có khối lượng m , chiều dài là $2l$ đang nằm yên. Một viên đạn nhỏ, có khối lượng $2m/3$ bay ngang với tốc độ V_0 tới cắm vào đầu B theo phương vuông góc của thanh và ghim chặt vào đó

- Xác định chuyển động của hệ sau va chạm
- Tìm độ giảm động năng của hệ do va chạm.

Giải:

a. Gọi O là trung điểm của thanh ; G ; V_G lần lượt là vị trí và vận tốc của khối tâm của hệ sau va chạm.

Vị trí của G được xác định bởi :

$$OG = \frac{1.2m/3}{(m + 2m/3)} = \frac{2}{5}l$$

Theo định luật bảo toàn động lượng ta có :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}mV_0 &= \left(\frac{2}{3}m + m\right)V_G \\ \Rightarrow V_G &= \frac{2}{5}V_0 \quad (1) \end{aligned}$$

Momen quán tính đối với khối tâm của hệ

$$I = \frac{1}{12}m(2l)^2 + m\left(\frac{2l}{5}\right)^2 + \frac{2m}{3}\left(\frac{3}{5}l\right)^2 = \frac{11}{15}ml^2$$

Theo định luật bảo toàn momen động lượng ta có :

$$\begin{aligned} \frac{2m}{3}\left(\frac{3}{5}l\right)^2 \frac{V_0}{3l/5} &= \frac{11}{15}ml^2 \omega \\ \Rightarrow \omega &= \frac{6}{11} \cdot \frac{V_0}{l} \quad (2) \end{aligned}$$

Vậy sau va chạm khối tâm của hệ chuyển động tịnh tiến với vận tốc V_G được xác định bởi (1) và toàn bộ hệ quay trong mặt phẳng ngang quanh G với tốc độ góc được xác định bởi (2)

b. Động năng của hệ trước va chạm : $E_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{3}\right)V_0^2 = \frac{m}{3}V_0^2$

Động năng của hệ sau va chạm : $E_2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{2m}{3}\right)V_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

Hay : $E_2 = \frac{8}{33}mV_0^2$

Độ giảm của động năng của hệ trong quá trình va chạm :

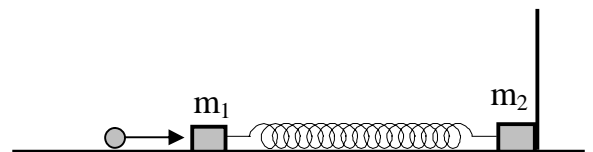
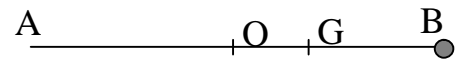
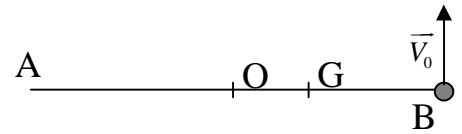
$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{1}{11}mV_0^2$$

Câu 44. Cho cơ hệ gồm hai vật nhỏ có khối lượng $m_1 = m_2 = m = 100$ g được nối với nhau bằng một lò xo rất nhẹ có độ cứng $k = 150$ N/m; chiều dài tự nhiên $l_0 = 50$ cm . Hệ được đặt trên một mặt phẳng ngang trơn nhẵn (hình vẽ). Ban đầu lò xo không dẫn ; m_2 tựa vào tường trơn và hệ vật đang đứng yên thì một viên đạn có khối lượng $m/2$ bay với vận tốc V_0 ($V_0 = 1,5$ m/s) dọc theo trục của lò xo đến ghim vào vật m_1

a) Tính khoảng thời gian m_2 tiếp xúc với tường kể từ lúc viên đạn ghim vào m_1 và tính vận tốc của khối tâm của hệ khi m_2 rời khỏi tường

b) Sau khi hệ vật rời khỏi tường, tính chiều dài cực đại và cực tiểu của lò xo trong quá trình hệ vật nói trên chuyển động.

Giải :



a. Kể từ lúc va chạm, m_2 tiếp xúc với tường trong suốt thời gian lò xo bị nén. Trong suốt thời gian này hệ vật ($m_1 + m/2$) dao động điều hòa với chu kỳ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m/2}{k}}$$

Vậy khoảng thời gian cần tìm là: $\Delta t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m_1 + m/2}{k}} \approx 0,1s$

Vận tốc của hệ ($m_1 + m/2$) ngay sau va chạm được xác định bởi

$$\frac{m}{2}V_0 = \frac{3m}{2}v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{V_0}{3}$$

Khi vật m_2 bắt đầu rời khỏi tường, theo định luật bảo toàn năng lượng thì tốc độ của hệ ($m_1 + m/2$) cũng là V_0 .

Vận tốc của khối tâm của hệ được xác định bởi:

$$(m_1 + m_2 + m/2)V_G = (m_1 + m/2)v_0 \\ \Rightarrow V_G = \frac{V_0}{5} = 0,3m/s$$

b. Gắn hệ quy chiếu vào khối tâm của hệ, trong hệ quy chiếu này ta có

$$(m_1 + m/2)\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$$

Trong đó \vec{v}_1 và \vec{v}_2 lần lượt là vận tốc của ($m_1 + m/2$) và m_2

Vậy hai vật ($m_1 + m/2$) và m_2 luôn chuyển động ngược chiều nhau và khi vận tốc của vật này triệt tiêu thì vận tốc của vật kia cũng triệt tiêu.

Lúc này chiều dài của lò xo hoặc cực đại hoặc cực tiểu.

Độ biến dạng của lò xo lúc này được tính bởi

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m/2)(v_0 - V_G)^2 + \frac{1}{2}m_2(-V_G)^2$$

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m/2)(v_0 - V_G)^2 + \frac{1}{2}m_2(-V_G)^2$$

$$\Rightarrow \Delta l = V_0 \sqrt{\frac{m}{15k}} = 1cm$$

Vậy chiều dài cực đại của lò xo là $l_{\max} = l_0 + \Delta l = 51cm$

Và chiều dài cực tiểu của lò xo là $l_{\min} = l_0 - \Delta l = 49cm$

Câu 45. Hai thanh cứng, nhẹ, chiều dài mỗi thanh là $l = 1m$ nối với nhau bằng một bản lề C khối lượng m. Đầu kia mỗi thanh có gắn các quả cầu khối lượng $m_A = m$, $m_B = 2m$. Hệ thống đặt thẳng đứng trên bàn. Bằng tác động nhỏ, hai quả cầu bắt đầu trượt ra xa nhau sao cho hai thanh vẫn nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Bỏ qua mọi ma sát, $g = 10m/s^2$

a) Tìm vận tốc của bản lề tại thời điểm sắp chạm sàn.

b) Tìm vận tốc của quả cầu 2m tại thời điểm góc giữa hai thanh bằng $2\alpha = 60^\circ$.

Giải:

a) Giả sử khi sắp chạm đất, quả cầu B có vận tốc $v_B \neq 0$ thì do tính chất của thanh cứng, quả A và bản lề cũng phải có vận tốc v_B . Điều này vô lý vì thanh choãi ra. Vậy $v_B = 0$. Tương tự $v_A = 0$.

Vậy ngay khi sắp chạm đất, hai quả cầu dừng lại, V_C có phương thẳng đứng.

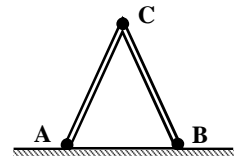
- Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng:

$$\frac{1}{2}mV_C^2 = mgl \Rightarrow V_C = \sqrt{2gl} = \sqrt{20} \approx 4,4721m/s$$

b) Phân tích V_C thành hai thành phần V_{Cx} và V_{Cy} .

- Do tính chất của thanh cứng:

$$V_B \sin \alpha = V_{Cx} \sin \alpha + V_{Cy} \cos \alpha$$



$$\Rightarrow V_B = \frac{V_{Cy}}{\tan \alpha} + V_{Cx} \quad (1)$$

$$V_A \sin \alpha = V_{Cy} \cos \alpha - V_{Cx} \sin \alpha$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{V_{Cy}}{\tan \alpha} - V_{Cx} \quad (2)$$

$$V_{Cx} = \frac{V_B - V_A}{2}; \quad V_{Cy} = \frac{V_B + V_A}{2} \tan \alpha \quad (3)$$

- Định luật bảo toàn động lượng theo phương ngang:

$$-mV_A + 2mV_B + mV_{Cx} = 0$$

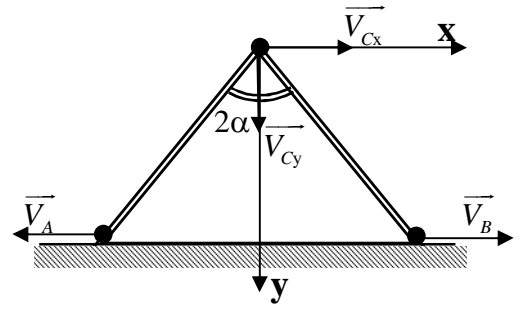
$$\Leftrightarrow -V_A + 2V_B + \frac{V_B - V_A}{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{5}{3}V_B \quad (4)$$

- Định luật bảo toàn cơ năng:

$$mgl - mgl \cos \alpha = \frac{1}{2}mV_A^2 + \frac{1}{2} \times 2mV_B^2 + \frac{1}{2}mV_C^2$$

$$\Rightarrow V_A^2 + 2V_B^2 + V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2 = 2gl(1 - \cos \alpha) \quad (5)$$

Giải hệ (3), (4), (5) tìm được: $V_B = \sqrt{\frac{9gl(1 - \cos \alpha)}{2(11 + 4 \tan^2 \alpha)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10(1 - \cos 30^\circ)}{2(11 + 4 \tan^2 30^\circ)}} \approx 0,6992 \text{ m/s}$



Câu 46. Một mái hiên tạo thành dốc AB dài 1,935 (m), nghiêng 30° so với phương nằm ngang. C là chân đường thẳng đứng hạ từ B xuống mặt đất. Từ A thả vật 1 có khối lượng $m_1 = 0,2$ (kg) trượt trên AB, cùng lúc đó từ C bắn vật 2 có khối lượng $m_2 = 0,4$ (kg) lên thẳng đứng.

Biết rằng hai vật sẽ va nhau ở B, vật 2 xuyên vào vật 1 rồi cả hai cùng bay theo phương nằm ngang ngay sau khi va chạm. Hệ số ma sát giữa vật 1 và mặt AB là $\mu = 0,1$. Lấy $g = 10$ (m/s^2). Tìm độ cao của điểm B so với mặt đất và tính phần cơ năng đã tiêu hao khi vật 2 xuyên vào vật 1.

Giải:

Chọn gốc thế năng ở B.

Phần thế năng vật 1 giảm khi trượt trên mái hiên đã chuyển hóa thành động năng của vật 1 ở B và công thắng lực ma sát khi nó trượt trên AB.

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có :

$$m_1 \cdot g \cdot AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 30^\circ \cdot AB$$

$$\Leftrightarrow 0,2 \cdot 10 \cdot 1,935 \cdot 0,5 = 0,5 \cdot 0,2 \cdot v_1^2 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot 0,866 \cdot 1,935$$

$$\Leftrightarrow 1,935 = 0,1 \cdot v_1^2 + 0,335$$

$$\Rightarrow v_1 = 4 \text{ (m/s)}$$

Vận tốc vật 1 khi tới B là 4 (m/s)

$$\text{Gia tốc vật 1 khi trượt dốc : } 2 \cdot a_1 \cdot AB = v_1^2$$

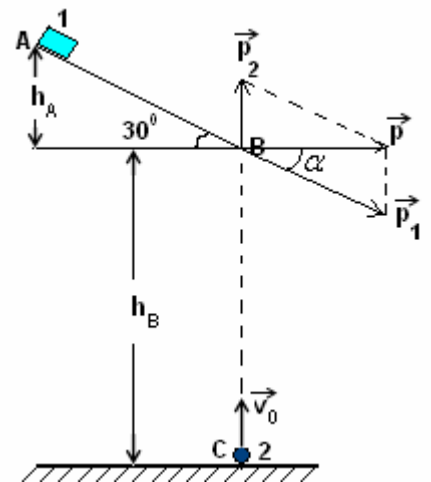
$$\Rightarrow a_1 = \frac{v_1^2}{2 \cdot AB} = \frac{4^2}{2 \cdot 1,935} = 4,134 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$\text{Thời gian vật 1 trượt trên AB : } t = \frac{v_1}{a_1} = \frac{4}{4,134} = 0,967 \text{ (s)}$$

Tại B : Trước khi va chạm, động lượng của vật 1 là :

$$p_1 = m_1 v_1 = 0,2 \cdot 4 = 0,8 \text{ (kg.m/s)}$$

$$\text{Trước khi va chạm, động lượng của vật 2 là : } p_2 = m_2 v_2 = 0,4 v_2 \quad (1)$$



Xét giản đồ vectơ động lượng ta có :

$$p_2 = p_1 \sin \alpha = 0,8 \sin 30^\circ = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4 \text{ (kg.m/s)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được : $v_2 = 1 \text{ (m/s)}$

Xét chuyển động bắn lên của vật 2 ta nhận thấy rằng : Thời gian vật 2 lên tới B cũng bằng thời gian vật 1 trượt hết dốc.

$$\text{Ta có : } v_2 = v_0 - gt \Rightarrow v_0 = v_2 + gt = 1 + 10 \cdot 0,967 = 10,67 \text{ (m/s)}$$

Độ cao của điểm B :

$$h_B = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 = 10,67 \cdot 0,967 - 0,5 \cdot 10 \cdot (0,967)^2 \\ \approx 5,6 \text{ (m)}$$

Tổng động lượng của hai vật trước khi va chạm :

$$p = p_1 \cos \alpha = 0,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,4\sqrt{3} \text{ (kg.m/s)}$$

Động lượng của hệ ngay sau va chạm :

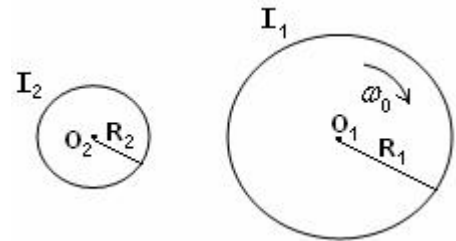
$$p_s = (m_1 + m_2)v = (0,2 + 0,4)v = 0,6v$$

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng ta có :

$$0,6v = 0,4\sqrt{3} \Rightarrow v = \frac{0,4\sqrt{3}}{0,6} \approx 1,15 \text{ (m/s)}$$

Độ tiêu hao năng lượng khi vật 2 xuyên vào vật 1 :

$$\Delta W = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \\ = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 1^2 \right) - \frac{1}{2} (0,2 + 0,4) \cdot 1,15^2 \\ = 1,4 \text{ (J)}$$



Câu 47. Hai hình trụ bán kính R_1 và R_2 có các momen quán tính lần lượt bằng I_1 và I_2 có thể quay quanh các trục O_1 và O_2 vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Bỏ qua ma sát ở các trục. Ban đầu hình trụ lớn quay với tốc độ góc ω_0 . Giữ trục O_1 cố định, còn trục O_2 được tịnh tiến sang phải cho đến lúc hình trụ nhỏ tiếp xúc với hình trụ lớn và bị lực ma sát giữa hai hình trụ làm cho quay. Cuối cùng hai hình trụ quay ngược chiều nhau với các tốc độ góc không đổi khi không còn trượt. Tìm tốc độ góc ω_2 của hình trụ nhỏ theo I_1, I_2, R_1, R_2 và ω_0 .

Giải:

* Gọi ω_1 và ω_2 lần lượt là tốc độ góc cuối cùng (không đổi) của các hình trụ bán kính R_1 và R_2 ($R_1 > R_2$).

* Lực ma sát \vec{F}_1 do hình trụ R_2 tác dụng lên hình trụ có tác dụng làm hình trụ R_1 quay chậm lại, tốc độ góc của nó giảm từ ω_0 xuống ω_1 .

Ta có :

$$M = F.R \text{ và } M = I \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad (\gamma = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} : \text{gia tốc góc})$$

$$\Rightarrow F.R = I \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow F.R \cdot \Delta t = I \cdot \Delta \omega$$

$$\text{Vậy : } F_1 \cdot R_1 \cdot \Delta t = I_1 (\omega_0 - \omega_1) \quad (1)$$

Theo định luật III Newton lực ma sát \vec{F}_2 do hình trụ R_1 tác dụng lên hình trụ R_2 :

$$\vec{F}_2 = - \vec{F}_1.$$

Lực \vec{F}_2 có tác dụng làm hình trụ R_2 quay nhanh dần từ tốc độ góc bằng không đến ω_2 nên ta được : $F_2 \cdot R_2 \cdot \Delta t = I_2 \cdot \omega_2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1(\omega_0 - \omega_1)}{I_2 \cdot \omega_2}$ (3)

Khi sự trượt dừng lại : $\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2$

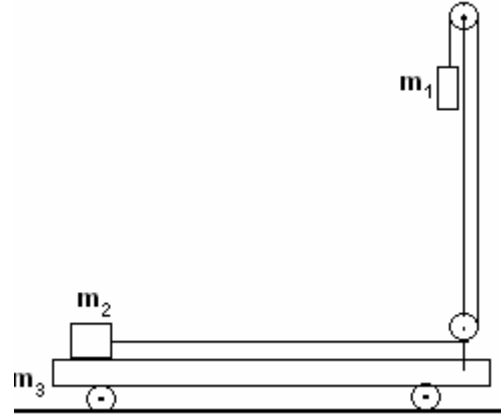
$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{R_1} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta được : $I_2 \cdot \omega_2 \cdot \frac{R_1}{R_2} = I_1 \cdot \omega_0 - I_1 \cdot \frac{\omega_2 \cdot R_2}{R_1}$

$$\Leftrightarrow \omega_2 \left(I_2 \cdot \frac{R_1}{R_2} + I_1 \cdot \frac{R_2}{R_1} \right) = I_1 \cdot \omega_0$$

$$\Leftrightarrow \omega_2 \left(\frac{I_2 \cdot R_1^2 + I_1 R_2^2}{R_1 R_2} \right) = I_1 \cdot \omega_0$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1 \cdot \omega_0 \cdot R_1 \cdot R_2}{I_2 R_1^2 + I_1 R_2^2}.$$



Câu 48. Cho hệ vật như hình vẽ. Các vật có khối lượng : $m_1 = 0,4$ (kg); $m_2 = 1$ (kg); $m_3 = 1$ (kg). Hệ số ma sát giữa m_2 và m_3 là $\mu = 0,3$. Ma sát giữa m_3 và sàn, ma sát ở các ròng rọc được bỏ qua. Dây nối không giãn. Thả tay khỏi m_1 cho hệ chuyển động. Tìm gia tốc của mỗi vật. Lấy $g = 10$ (m/s²).

Giải:

Gắn hệ vật với hệ trục tọa độ Ox, Oy như hình vẽ.

Gốc tọa độ O gắn với sàn.

Vật m_1 chịu tác dụng của 2 lực

: Trọng lực \vec{P}_1 và lực căng \vec{T} của dây.

Khi hệ vật chuyển động, m_1 vừa bị tụt xuống vừa bị kéo theo phương nằm ngang, vì thế dây treo bị lệch về phía sau một góc α .

Phương trình động lực học viết cho vật m_1 :

$$T \cdot \sin \alpha = m_1 \cdot a_{1x}$$

$$T \cdot \sin \alpha = 0,4 \cdot a_{1x}$$

(1)

$$T \cdot \cos \alpha - P_1 = -m_1 \cdot a_{1y}$$

$$T \cdot \cos \alpha = 4 - 0,4 \cdot a_{1y} \quad (2)$$

Vật m_2 chịu tác dụng của bốn lực : Lực căng \vec{T} của dây, Lực ma sát \vec{F} với m_3 , Trọng lực \vec{P}_2 , Phản lực \vec{Q}_2 của m_3 .

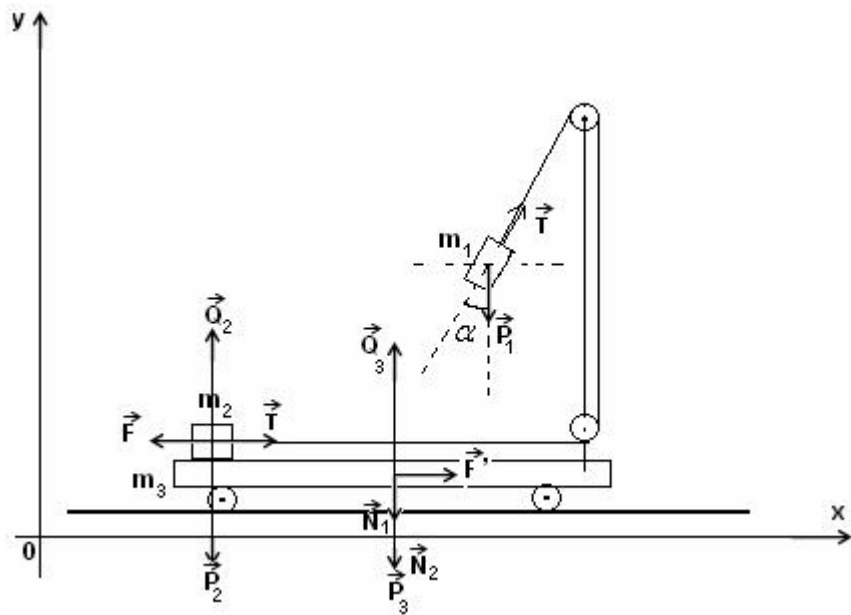
Theo phương Oy các lực \vec{P}_2 và \vec{Q}_2 cân bằng nhau.

Theo phương Ox, phương trình động lực học viết cho vật m_2 .

$$T - F = m_2 \cdot a_2$$

$$T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a_2$$

$$T = \mu \cdot m_2 \cdot g + m_2 \cdot a_2 = 0,3 \cdot 1 \cdot 10 + 1 \cdot a_2$$



$$T = 3 + a_2 \quad (3)$$

Vật m_3 chịu tác dụng của năm lực : Trọng lực \vec{P}_3 , Lực tương tác \vec{F}' do m_2 tác dụng khi m_2 trượt trên m_3 . ($F = F'$), Áp lực \vec{N}_2 do m_2 tác dụng, Áp lực \vec{N}_1 do giá treo ròng rọc tác dụng, Phản lực \vec{Q}_3 của sàn.

Theo phương Oy, các lực tác dụng vào m_3 cân bằng nhau:

$$Q_3 = P_3 + N_1 + N_2$$

Theo phương Ox, phương trình động lực học viết cho vật m_3 :

$$F' = m_3 \cdot a_3$$

$$\mu \cdot m_2 \cdot g = m_3 \cdot a_3$$

$$0,3 \cdot 1 \cdot 10 = 1 \cdot a_3 \Rightarrow a_3 = 3 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Xét giản đồ vectơ gia tốc vẽ chom vật m_1 :

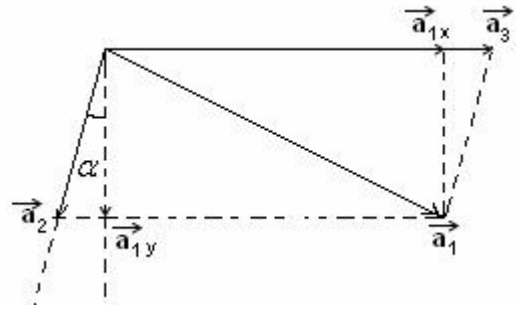
$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

$$a_{1x} = a_3 - a_2 \cdot \sin \alpha$$

$$a_{1x} = 3 - a_2 \cdot \sin \alpha \quad (4)$$

$$a_{1y} = a_2 \cdot \cos \alpha \quad (5)$$

Thay (3), (4), (5) vào các phương trình (1), (2) ta được :



$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (3 + a_2) \cdot \sin \alpha = 0,4 \cdot (3 - a_2 \cdot \sin \alpha)$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \sin \alpha + a_2 \cdot \sin \alpha = 1,2 - 0,4 a_2 \cdot \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1,4 \cdot a_2 \cdot \sin \alpha = 1,2 - 3 \cdot \sin \alpha \quad (6)$$

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow (3 + a_2) \cdot \cos \alpha = 4 - 0,4 \cdot a_2 \cdot \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot \cos \alpha + a_2 \cdot \cos \alpha = 4 - 0,4 \cdot a_2 \cdot \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1,4 \cdot a_2 \cdot \cos \alpha = 4 - 3 \cdot \cos \alpha \quad (7)$$

Chia từng vế phương trình (6) cho (7):

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1,2 - 3 \cdot \sin \alpha}{4 - 3 \cdot \cos \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = 0,3 \Rightarrow \alpha = 16^\circ 42'$$

Trong khi chuyển động dây treo vật m_1 bị lệch về phía sau một góc $\alpha = 16^\circ 42'$.

Thay α vào (6), ta được : $a_2 = 0,84 \text{ (m/s}^2\text{)}$

Thay α và a_2 vào (4) và (5) ta được :

$$a_{1x} = 2,76 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$a_{1y} = 0,8 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Gia tốc của vật m_1 :

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \sqrt{2,76^2 + 0,8^2} = 2,87 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$



Câu 49. Một vật khối lượng $m = 0,1 \text{ (kg)}$ trượt trên mặt phẳng nằm ngang với vận tốc $v_0 = 0,5 \text{ (m/s)}$ rồi trượt lên một cái nêm có dạng như trong hình vẽ. Nêm ban đầu đứng yên, có khối lượng $M = 0,5 \text{ (kg)}$, chiều cao của đỉnh là H ; nêm có thể trượt trên mặt phẳng nằm ngang. Bỏ qua mọi ma sát và mất mát động năng khi va chạm. Mô tả chuyển động của hệ thống và tìm các vận tốc cuối cùng của vật và nêm trong hai trường hợp sau : Lấy $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$

- Khi $H = 1 \text{ cm}$.

- Khi $H = 1,2 \text{ cm}$.

Giải:

* Nhận xét : Nếu vật không vượt được qua đỉnh của nệm thì vật lên đến độ cao cực đại bằng h so với phương nằm ngang thì cả vật và nệm sẽ có cùng vận tốc là v (vật dừng trên nệm).

Ta có thể lập phương trình theo các định luật bảo toàn :

- Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 + mgh \quad (1)$$

- Áp dụng định luật bảo toàn động lượng :

$$mv_0 = (m+M)v \quad (2)$$

+ Từ (2) $\Rightarrow v = \frac{mv_0}{m+M}$ thế vào (1) ta được :

$$\begin{aligned} \text{+ Phương trình (1)} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2 + mgh \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\frac{(mv_0)^2}{(m+M)} + mgh \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{(m+M)} + gh \\ &\Leftrightarrow (m+M)v_0^2 = mv_0^2 + 2gh(m+M) \\ &\Leftrightarrow Mv_0^2 = 2gh(m+M) \\ &\Rightarrow h = \frac{Mv_0^2}{2g(m+M)} \end{aligned}$$

Thay các giá trị $M = 0,5 \text{ (kg)}$, $v_0 = 0,5 \text{ (m/s)}$, $m = 0,1 \text{ (kg)}$, $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$

$$\text{ta được } h = \frac{0,5 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 10(0,1+0,5)} = \frac{0,125}{12} \approx 0,0104 \text{ (m)} = 1,04 \text{ (cm)}$$

a. Khi $H = 1 \text{ (cm)}$.

Khi $H = 1 \text{ (cm)}$ thì vật vượt đỉnh nệm, lúc rơi xuống sườn sau thì vật hãm nệm, cuối cùng vật sẽ đi nhanh hơn nệm.

Vận tốc cuối của vật $v_1 >$ vận tốc cuối của nệm $v_2 \geq 0$. áp dụng các định luật bảo toàn ta có :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \quad (3)$$

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2 \quad (4)$$

+ Từ phương trình (4) $\Rightarrow v_2 = \frac{m(v_0 - v_1)}{M}$ thế vào phương trình (3) ta được :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow mv_0^2 = mv_1^2 + M\left[\frac{m(v_0 - v_1)}{M}\right]^2 \\ &\Leftrightarrow Mmv_0^2 = Mmv_1^2 + m^2(v_0 - v_1)^2 \\ &\Leftrightarrow Mv_0^2 = Mv_1^2 + m(v_0 - v_1)^2 \\ &\Leftrightarrow Mv_0^2 = Mv_1^2 + mv_0^2 - 2mv_0v_1 + mv_1^2 \\ &\Leftrightarrow (M+m)v_1^2 - 2mv_0v_1 - (M-m)v_0^2 = 0 \\ \text{Ta có : } \Delta' &= m^2v_0^2 + (M+m)(M-m) \\ &= m^2v_0^2 + (M^2 - m^2)v_0^2 \\ &= M^2v_0^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có hai nghiệm : } v_1 = \frac{mv_0 + \sqrt{M^2 v_0^2}}{(M+m)} = \frac{0,1 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5}{0,5 + 0,1} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5 \text{ (m/s)}$$

$$\Rightarrow v_2 = 0$$

$$\text{Nghiệm thứ hai : } v_1 = \frac{mv_0 - \sqrt{M^2 v_0^2}}{(M+m)} = \frac{0,1 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,5}{0,5 + 0,1} = \frac{-0,2}{0,6} = -\frac{1}{3} < 0$$

$$\text{Vậy } v_1 = 0,5 \text{ (m/s)} ; v_2 = 0$$

* khi $H = 1,2 \text{ cm}$, vật lên tới độ cao $1,04 \text{ cm}$ thì bị trượt trở lại và thúc nôm.

$\Rightarrow v_2 > 0$; v_1 có thể dương hoặc âm.

Ta nhận thấy rằng với $v_1 = 0,5 \text{ (m/s)}$; $v_2 = 0$ không phù hợp

$$\text{Vậy } v_1 = \frac{-1}{3} \text{ (m/s)} \Rightarrow v_2 = \frac{m(v_0 - v_1)}{M} = \frac{0,1(0,5 + \frac{1}{3})}{0,5} = \frac{0,25}{1,5} = 0,167 \text{ (m/s)}$$

Câu 50. Một vật khối lượng m được gắn vào đầu một lò xo có độ cứng k và chiều dài tự nhiên ℓ_0 như hình vẽ. Vật có thể trượt không ma sát trên một thanh ngang. Cho thanh ngang quay quanh một trục thẳng đứng đi qua đầu còn lại của lò xo với vận tốc ω không đổi.

a. Tính chiều dài của lò xo.

b. Đưa vật ra khỏi vị trí cân bằng mới một đoạn x_0 rồi buông nhẹ. Chứng tỏ vật dao động điều hòa và lập biểu thức li độ.

Giải:

a. Tính chiều dài của lò xo.

- Chọn O là hệ quy chiếu (qui chiếu không quán tính).

Trong hệ quy chiếu này m ở vị trí cân bằng nên :

$$\vec{f}_0 + \vec{f}_{qt} = \vec{0} \quad (1)$$

Với : \vec{f}_0 là lực đàn hồi $f_0 = k(\ell_{cb} - \ell_0)$

\vec{f}_{qt} là lực quán tính $\vec{f}_{qt} = -m\vec{a}_{ht}$ với $a_{ht} = \ell_{cb} \cdot \omega^2$

Chiếu phương trình (1) lên trục hướng tâm, ta được : $f_0 - f_{qt} = 0$

$$\Leftrightarrow k(\ell_{cb} - \ell_0) - m \cdot \ell_{cb} \cdot \omega^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k \cdot \ell_{cb} - k \cdot \ell_0 - m \cdot \ell_{cb} \cdot \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ell_{cb} = \frac{k\ell_0}{k - m\omega^2}$$

(hình vẽ biểu diễn đúng các véc tơ lực)

b. Tại vị trí bất kỳ có li độ x so với vị trí cân bằng mới (như hình vẽ)

- Theo định luật 2 Newton ta có :

$$\vec{f} + \vec{f}_{qt} = m\vec{a} \quad (3)$$

- Chiếu phương trình (3) lên trục hướng tâm, ta có :

$$f - m a_{ht} = ma$$

$$k(\ell - \ell_0) - m \cdot \ell \cdot \omega^2 = mx'' \quad (4)$$

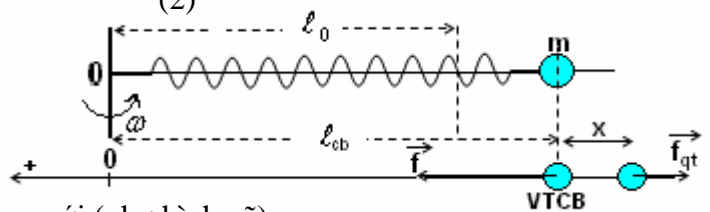
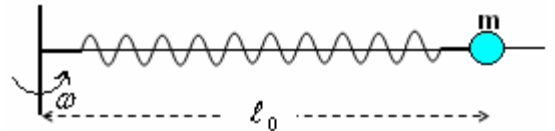
Trừ phương trình (4) cho phương trình (2) về theo về ta được :

$$k(\ell - \ell_0) - m \cdot \ell \cdot \omega^2 - k(\ell_{cb} - \ell_0) + m \cdot \ell_{cb} \cdot \omega^2 = mx''$$

$$k\ell - m \cdot \ell \cdot \omega^2 - k\ell_{cb} - m \cdot \ell_{cb} \cdot \omega^2 = mx''$$

$$k(\ell - \ell_{cb}) - m\omega^2(\ell - \ell_{cb}) = mx''$$

$$\text{Trong đó : } x = (\ell - \ell_{cb})$$



$$\begin{aligned} x(k - m\omega^2) &= mx'' \\ x'' - \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm tổng quát :

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

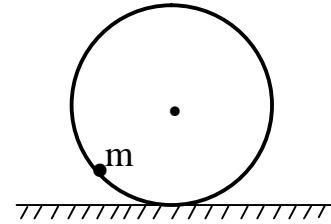
Với tần số góc : $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$

Vậy m dao động điều hòa với tần số góc $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$

Theo điều kiện ban đầu : $+ t = 0, x = x_0$
 $+ t = 0, v = 0$

Giả sử $x_0 > 0$ ta có : $A = x_0$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Biểu thức li độ có dạng : $x = x_0 \sin \left[\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} \right) t + \frac{\pi}{2} \right]$



Câu 51. Một vành tròn bán kính R, khối lượng M phân bố đều. Trên vành gắn một vật nhỏ khối lượng m. Kéo cho vành lăn không trượt trên mặt ngang để tâm của vành có vận tốc không đổi v_0 . Hỏi v_0 phải thỏa điều kiện gì để vành không nảy lên?

Giải :

Ở vị trí bất kì, vật chịu tác dụng của trọng lực \vec{P} và lực \vec{F} của vành. Có thể phân tích lực \vec{F} ra hai thành phần: \vec{N} có phương trùng bán kính vòng tròn đi qua vật và \vec{Q} hướng tiếp tuyến với vòng tròn như hình vẽ:

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{N} = m\vec{a} \quad (1)$$

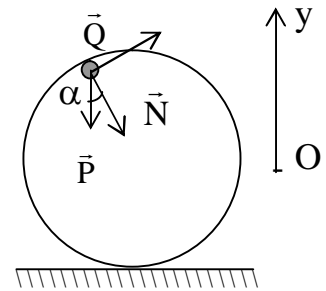
Chiếu phương trình (1) theo phương tiếp tuyến với vòng tròn và phương nằm dọc theo bán kính:

$$Q - P \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$P \cos \alpha + N = \frac{mv_0^2}{R} \quad (3).$$

Thành phần lực F theo phương thẳng đứng:

$$\begin{aligned} F_y &= Q \sin \alpha - N \cos \alpha = P \sin^2 \alpha - \left(\frac{mv_0^2}{R} - P \cos \alpha \right) \cos \alpha \\ &= \frac{mv_0^2}{R} \cos \alpha - mg \end{aligned}$$

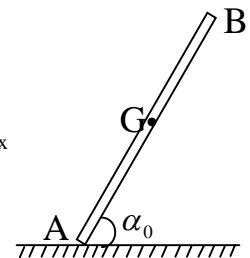


F_y có giá trị lớn nhất khi góc $\alpha = 0$ (vật ở cao nhất): $F_{y\max} = \frac{mv_0^2}{R} - mg$

Theo định luật Newton III, lực do vật tác dụng lên vành là $F'_{y\max} = F_{y\max}$

Điều kiện để vành không bị nảy lên là: $F'_{y\max} \leq Mg$

$$\frac{mv_0^2}{R} - mg \leq Mg \Rightarrow v_0 \leq \sqrt{\left(1 + \frac{M}{m}\right)gR}$$



Để vành chuyển động với vận tốc không đổi (theo giả thiết) thì phải có lực tác dụng lên vành. Lời giải trên chỉ đúng cho trường hợp lực tác dụng này không có thành phần thẳng đứng.

Câu 52. Một thanh AB đồng chất khối lượng m, tiết diện đều, có khối tâm G, chiều dài 2d. Đặt đầu A trên mặt đất nằm ngang và nghiêng một góc α_0 so với mặt đất (h.2). Buông nhẹ thanh, thanh đổ xuống không vận tốc đầu. Giả sử đầu A trượt không ma sát trên mặt đất.

a- Xác định quỹ đạo của khối tâm G.

b- Tính vận tốc của G khi thanh chạm đất.

Lưu ý: Momen quán tính của thanh đối với đường trung trục là $I = \frac{1}{3}md^2$

Giải:

Do không có lực tác dụng theo phương ngang nên khối tâm G chuyển động theo phương thẳng đứng. Quỹ đạo của G là đoạn thẳng vuông góc với mặt đất và đi qua vị trí ban đầu của nó. Tâm quay tức thời của thanh là O như hình vẽ. Khi thanh chạm đất, góc nghiêng dần tới 0° , O dần tới A nên vận tốc góc của thanh:

$$\omega = \frac{v_G}{OG} = \frac{v_G}{d} \quad (1)$$

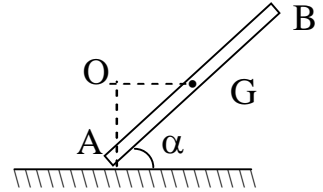
Khi thanh chạm đất thế năng đã chuyển thành động năng của chuyển động quay:

$$mgd \sin \alpha = \frac{I_0 \omega^2}{2} \quad (2)$$

Trong đó I_0 là mô men quán tính đối với trục quay tức thời O :

$$I_0 = I_G + m.OG^2 = \frac{4}{3}md^2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow v_G = \sqrt{\frac{3gd \sin \alpha_0}{2}}$$



Câu 53. Một chiếc thuyền có chiều dài ℓ , khối lượng m_1 , đứng yên trên mặt nước. Một người có khối lượng m_2 đứng ở đầu thuyền nhảy lên với vận tốc v_2 xiên góc α so với mặt nước và rơi vào chính giữa thuyền.

a. Thiết lập biểu thức tính v_2 .

b. Lấy $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính v_2 ; khi $\ell = 4 \text{ (m)}$, $m_1 = 160 \text{ (kg)}$, $m_2 = 40 \text{ (kg)}$, $\alpha = 15^\circ$.

Giải:

a. Thiết lập biểu thức tính v_2 .

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ :

- Phương trình chuyển động của người :

$$v_{2x} = v_2 \cos \alpha$$

$$v_{2y} = v_2 \sin \alpha$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{2y}.t$$

$$= v_2 \sin \alpha .t - \frac{1}{2}.g.t^2$$

Khi $y_2 = 0$ ta có thời gian chuyển động của người :

$$t = \frac{2.v_2.\sin \alpha}{g}$$

Tầm xa của người trong thời gian t :

$$x_2 = v_{2x}.t = v_2 \cos \alpha . \frac{2.v_2.\sin \alpha}{g} = \frac{v_2^2.\sin 2\alpha}{g}$$

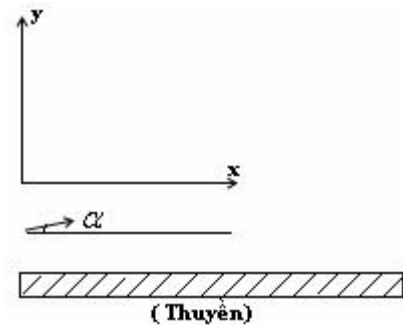
Xét hệ kín gồm người và thuyền:

- Áp dụng định luật bảo toàn động lượng theo phương ngang ta có :

$$m_2 . v_2 \cos \alpha + m_1.v_1 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = - \frac{m_2.v_2.\cos \alpha}{m_1}$$

\Rightarrow trong thời gian t thuyền di chuyển ngược lại so với người theo phương ngang :



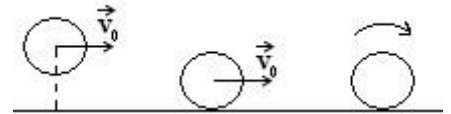
$$x_1 = v_1 \cdot t = - \frac{m_2 \cdot v_2 \cdot \cos \alpha}{m_1} \cdot \frac{2 \cdot v_2 \cdot \sin \alpha}{g} = - \frac{m_2 \cdot v_2^2 \cdot \sin 2\alpha}{m_1 \cdot g}$$

Sau thời gian t người ở **chính giữa** thuyền nên ta có :

$$\begin{aligned} |x_1| + |x_2| &= \frac{\ell}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{m_2 \cdot v_2^2 \cdot \sin 2\alpha}{m_1 \cdot g} + \frac{v_2^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} &= \frac{\ell}{2} \\ \Leftrightarrow 2m_2 v_2^2 \sin 2\alpha + 2m_1 v_2^2 \sin 2\alpha &= m_1 g \ell \\ \Rightarrow v_2 &= \sqrt{\frac{m_1 g \ell}{2 \cdot \sin 2\alpha (m_1 + m_2)}} \end{aligned}$$

b. Lấy $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính v_2 ; khi $\ell = 4 \text{ (m)}$, $m_1 = 160 \text{ (kg)}$, $m_2 = 40 \text{ (kg)}$, $\alpha = 15^\circ$.

$$v_2 = \sqrt{\frac{m_1 g \ell}{2 \cdot \sin 2\alpha (m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{160 \cdot 10 \cdot 2}{2 \cdot \sin 30^\circ \cdot (160 + 40)}} = 4 \text{ (m/s)}$$



Câu 54. Một quả bóng bowling hình cầu, đồng chất có bán kính R , khối lượng m , được ném theo phương ngang dọc theo rãnh chạy nằm ngang ở trạng thái ban đầu không quay.

a. Tính đoạn đường bóng chuyển động dọc theo rãnh trước khi nó bắt đầu lăn không trượt. Giả sử bóng không bị nảy lên.

Cho biết : Vận tốc ném là \vec{v}_0 có phương ngang. Hệ số ma sát giữa bóng và rãnh là k . Gia tốc trọng trường là g .

b. Áp dụng bằng số : $v_0 = 4 \text{ (m/s)}$; $k = 0,2$; $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$

Giải:

a. Tính đoạn đường bóng chuyển động dọc theo rãnh trước khi nó bắt đầu lăn không trượt. Giả sử bóng không bị nảy lên.

Gọi : + A là vị trí ném

+ B là vị trí chạm đường rãnh chạy

+ C là vị trí bóng lăn không trượt

Chọn vị trí B làm gốc, chiều dương trùng với Ox

Gốc thời gian lúc bóng chạm rãnh ($t_0 = 0$)

- Phương trình động lực học cho gia tốc thẳng a :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a} \quad (1)$$

Chiếu phương trình (1) lên Ox :

$$-f = ma \Rightarrow a = - \frac{f}{m} \quad (2)$$

Chiếu phương trình (1) lên Oy :

$$N = mg \quad (3)$$

Với : f là lực ma sát trượt : $f = k \cdot N$

- Phương trình động lực học cho gia tốc góc γ :

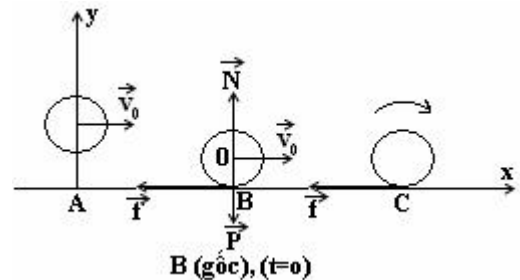
$$M = I \cdot \gamma \quad (4)$$

M là mômen của f đối với trục quay O :

$$M = f \cdot R \quad (5)$$

I là mômen quán tính của bóng :

$$I = \frac{2}{5} m R^2 \quad (6)$$



Thay (5) vào (4) ta được :

$$f.R = I.\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{fR}{I} \quad (7)$$

- Các phương trình động học :

Chuyển động thẳng :

$$v = v_0 + at = v_0 - \frac{f}{m}.t \quad (8)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a.t^2 = x_0 + v_0 t - \frac{f}{2m} t^2 \quad (9)$$

- Chuyển động quay (phương trình vận tốc góc γ)

$$\omega = \omega_0 + \gamma.t = \omega_0 + \frac{fR}{I}.t \quad (10)$$

* Trong giai đoạn bóng chuyển động vừa lăn vừa trượt, các phương trình (8) và (10) hoàn toàn độc lập với nhau. Khi bóng bắt đầu lăn không trượt thì các đại lượng v và ω liên hệ với nhau bằng công thức : $v = \omega.R$ (11)

* Thay (8) và (10) vào phương trình (11) ta được :

$$v_0 - \frac{f}{m}.t' = \omega_0.R + \frac{fR^2}{I}.t'$$

* Tại thời điểm $t = 0$ thì $\omega_0 = 0$, giải phương trình trên ta được :

$$t' = \frac{v_0}{\frac{f}{m} + \frac{fR^2}{I}} \quad (12)$$

* Tại thời điểm $t = t'$ bóng chuyển động lăn không trượt, thay (12) vào (9) với $x_0 = 0$ ta được :

$$x = \frac{v_0^2}{f\left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I}\right)} - \frac{f}{2m} \left(\frac{v_0}{\left(\frac{f}{m} + \frac{fR^2}{I}\right)} \right)^2 \quad (13)$$

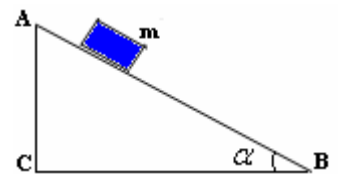
Thay $f = kmg$; $I = \frac{2}{5}mR^2$ vào (13) ta được : $x = \frac{12v_0^2}{49.k.g}$

Đoạn đường bóng chuyển động dọc theo rãnh trước khi nó bắt đầu lăn không trượt : $x = \frac{12v_0^2}{49.k.g}$

b. Áp dụng bằng số : $v_0 = 4 \text{ (m/s)} ; k = 0,2 ; g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$

$$x = \frac{12v_0^2}{49.k.g} = \frac{12.4^2}{49.0,2.10} = 1,96 \text{ (m)}$$

Câu 55. Một vật có khối lượng m có thể trượt không ma sát trên một cái nêm ABC ; $AB = \ell$, $\hat{C} = 90^\circ$, $\hat{B} = \alpha$. Nêm ban đầu đứng yên, có khối lượng M và có thể trượt không ma sát trên mặt sàn nằm ngang. Cho vật m trượt từ đỉnh A của nêm không vận tốc đầu.



a. Thiết lập biểu thức tính gia tốc a của vật đối với nêm và gia tốc a_0 của nêm đối với sàn.

b. Lấy hệ tọa độ xOy gắn với sàn, ban đầu trùng với BCA. Tính hoành độ của vật m và của đỉnh C khi vật trượt tới đỉnh B. Quỹ đạo của vật là đường gì ? Cho $m = 0,1 \text{ (kg)}$, $M = 2m$, $\alpha = 30^\circ$, $\ell = 1 \text{ (m)}$, $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Giải:

a. Tính gia tốc a của vật đối với nêm và gia tốc a_0 của nêm đối với sàn.

- Chọn hệ trục tọa độ xOy như hình vẽ

- Động lượng của hệ bằng 0 \Rightarrow Vật đi xuống sang phải thì nêm phải sang trái \Rightarrow giá trị đại số gia tốc của nêm là $a_0 < 0$.

+ Vật m chịu tác dụng của 2 lực : trọng lực $m\vec{g}$, phản lực \vec{N} của nêm vuông góc với AB (như hình vẽ bên)

+ Gia tốc của vật đối với sàn : $\vec{a}_1 = \vec{a} + \vec{a}_0$

+ Phương trình chuyển động của vật :

Theo phương AB : $mg \sin \alpha = m(a + a_0 \cdot \cos \alpha)$ (1)

Theo phương vuông góc với AB : $N - mg \cos \alpha = m a_0 \sin \alpha$ (2)

+ Phương trình chuyển động của nêm chịu thành phần nằm ngang của $-\vec{N}$:

Chọn trục Ox trùng với hướng chuyển động của nêm

$$-N \sin \alpha = M a_0 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có : $N - mg \cos \alpha = m \cdot \left(-\frac{N \sin \alpha}{M} \right) \sin \alpha$

$$\Leftrightarrow N + m \cdot \sin \alpha \frac{N \sin \alpha}{M} = mg \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow N(M + m \cdot \sin^2 \alpha) = M mg \cos \alpha$$

$$\Rightarrow N = \frac{M \cdot mg \cdot \cos \alpha}{M + m \cdot \sin^2 \alpha}$$

Thế vào phương trình (3) ta được :

$$a_0 = - \frac{\sin \alpha \cdot \left(\frac{M \cdot mg \cdot \cos \alpha}{M + m \cdot \sin^2 \alpha} \right)}{M} = - \frac{mg \cdot \sin 2\alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)}$$

Thế vào phương trình (1) ta được :

$$mg \sin \alpha = m(a + (- \frac{mg \cdot \sin 2\alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)}) \cdot \cos \alpha)$$

$$\Leftrightarrow mg \sin \alpha = m \cdot a - \frac{m^2 g \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)}$$

$$\Leftrightarrow a = g \sin \alpha + \frac{mg \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)}$$

$$= \frac{2Mg \sin \alpha + 2mg \sin^3 \alpha + mg \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2Mg \sin \alpha + 2mg \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha) + 2mg \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)}$$

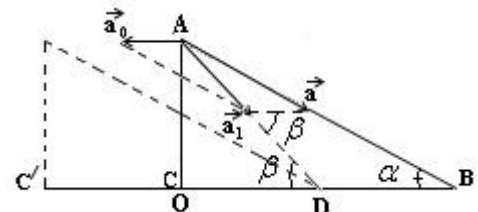
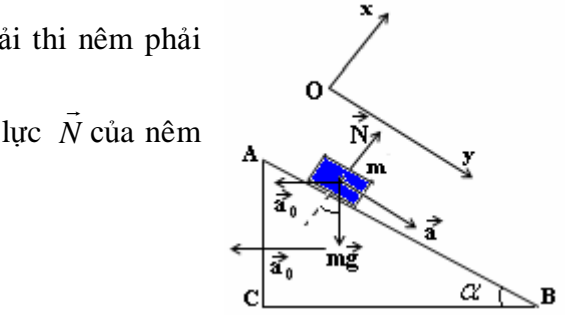
$$\Leftrightarrow a = \frac{(M + m)g \cdot \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$$

b. Lấy hệ tọa độ xOy gắn với sàn, O trùng với đỉnh C . Tính hoành độ của vật m và của đỉnh C khi vật trượt tới đỉnh B . Quỹ đạo của vật là đường gì ?

Cho $m = 0,1 \text{ kg}$, $M = 2m$, $\alpha = 30^\circ$, $\ell = 1 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Thay số ta tính được :

$$a_0 = - \frac{mg \cdot \sin 2\alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)}$$



$$\begin{aligned}
 &= - \frac{0,1 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ}{2(0,2 + 0,1 \cdot \sin^2 30^\circ)} \\
 &= - 1,92 \text{ m/s}^2. \\
 a &= \frac{(M+m)g \cdot \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} = \frac{(0,2+0,1) \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ}{0,2+0,1 \cdot \sin^2 30^\circ} \\
 a &= \frac{20}{3} \text{ m/s}^2.
 \end{aligned}$$

Ta nhận thấy rằng : \vec{a}_0 có hướng cố định , \vec{a} có hướng cố định song song với AB nên :
 $\vec{a}_1 = \vec{a} + \vec{a}_0$ cũng có hướng cố định hợp với phương ngang một góc β (như hình vẽ)

Ta có : $a_1^2 = a^2 + a_0^2 - 2 \cdot a \cdot a_0 \cdot \cos \alpha = \left(\frac{20}{3}\right)^2 + (1,92)^2 - 2 \cdot \left(\frac{20}{3}\right) \cdot (1,92) \cdot \cos 30^\circ$

$$a_1 = 5,1 \text{ m/s}^2.$$

Mặt khác : $\frac{\sin \beta}{a} = \frac{\sin \alpha}{a_1} \Rightarrow \sin \beta = \frac{a \sin \alpha}{a_1} = \frac{\frac{20}{3} \cdot \sin 30^\circ}{5,1} = 0,6536$

$\Rightarrow \beta = 40,8^\circ$ Quỹ đạo vật m là đường thẳng AD nghiêng góc $40,8^\circ$ so với phương ngang.

Xét tam giác ACD với $AC = 0,5 \text{ m}$ ta có : $\tan \beta = \frac{AC}{OD}$

$$\Rightarrow x_1 = OD = \frac{AC}{\tan \beta} = \frac{0,5}{\tan 40,8^\circ} = 0,58 \text{ (m)}$$

Vậy hoành độ của vật m là $0,58 \text{ (m)}$

Trong thời gian vật đi xuống thì ném trượt sang trái và khi B trùng với D thì C ở vị trí C' với hoành độ : $x_2 = - (CB - OD) = - (AB \cdot \cos \alpha - OD) = - (1 \cdot \cos 30^\circ - 0,58) = - 0,29 \text{ (m)}$

Câu 56. Một thanh cứng AB có chiều dài L tựa trên hai mặt phẳng P_1 và P_2 (Hình 1). Người ta kéo đầu A của thanh lên trên dọc theo mặt phẳng P_1 với vận tốc \vec{v}_0 không đổi. Biết thanh AB và vectơ \vec{v}_0 luôn nằm trong mặt phẳng vuông góc với giao tuyến của P_1 và P_2 ; trong quá trình chuyển động các điểm A, B luôn tiếp xúc với hai mặt phẳng; góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng là $\beta = 120^\circ$. Hãy tính vận tốc, gia tốc của điểm B và vận tốc góc của thanh theo v_0 , L, α (α là góc hợp bởi thanh và mặt phẳng P_2).

Giải:

Các thành phần vận tốc của A và B dọc theo thanh bằng nhau nên:

$$v_B = v_A \cos(60^\circ - \alpha) / \cos \alpha = v_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \alpha \right)$$

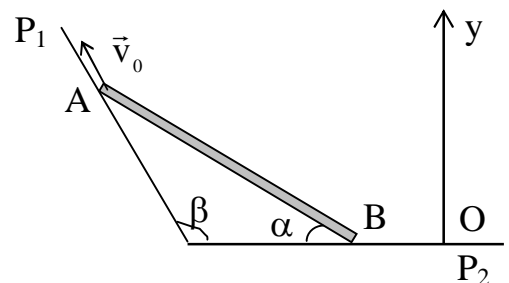
Chọn trục Oy như hình vẽ, A có toạ độ:

$$y = L \sin \alpha \Rightarrow y' = L \cos \alpha \cdot \alpha' = v_0 \cos 30^\circ.$$

Vận tốc góc của thanh:

$$\omega = \alpha' = \frac{v_0 \cos 30^\circ}{L \cos \alpha} = \frac{v_0 \sqrt{3}}{2L \cos \alpha}.$$

Gia tốc của B: $a = \frac{dv_B}{dt} = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2 \cos^2 \alpha} \alpha' = \frac{3v_0^2}{4L \cos^3 \alpha}$



Câu 57. Trên mặt bàn nằm ngang có hai tấm ván khối lượng m_1 và m_2 . Một lực \vec{F} song song với mặt bàn đặt vào tấm ván dưới. Biết hệ số ma sát trượt giữa 2 tấm ván là k_1 , giữa ván dưới và bàn là k_2 (Hình 2). Tính các gia tốc a_1 và a_2 của hai tấm ván. Biện luận các kết quả trên theo F khi cho F tăng dần từ giá trị bằng không. Xác định các khoảng giá trị của F ứng với từng dạng chuyển động khác nhau của hệ. Áp dụng bằng số: $m_1 = 0,5 \text{ kg}$; $m_2 = 1 \text{ kg}$; $k_1 = 0,1$; $k_2 = 0,3$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Giải:

Các lực ma sát nghỉ có độ lớn cực đại là:

$$F_{1\max} = k_1 m_1 g ; F_{2\max} = k_2 (m_1 + m_2) g$$

1/ $F \leq F_{2\max}$ thì $a_1 = a_2 = 0$

2/ $F > F_{2\max}$ thì ván 2 chuyển động và chịu tác dụng của các lực :

F , $F_{2\max}$ và lực ma sát F_1 giữa hai ván. Có hai khả năng :

a. $F_1 \leq F_{1\max}$, ván 1 gắn với ván 2. Hai ván cùng chuyển động với gia tốc:

$$a = \frac{F - F_{2\max}}{m_1 + m_2} . \text{ Lực truyền gia tốc } a \text{ cho } m_1 \text{ là } F_1: F_1 = m_1 \frac{F - F_{2\max}}{m_1 + m_2} \leq k_1 m_1 g$$

$$\Rightarrow F \leq (k_1 + k_2)(m_1 + m_2)g$$

Điều kiện để hai tấm ván cùng chuyển động với gia tốc a là:

$$k_2 (m_1 + m_2)g < F \leq (k_1 + k_2)(m_1 + m_2)g. \text{ Thay số: } 4,5N < F \leq 6N$$

b. $F = F_{1\max}$. Ván 1 trượt trên ván 2 và vẫn đi sang phải với gia tốc a_1

$$a_1 < a_2 ; F_{1\max} = k_1 m_1 g = m_1 a_1 ; a_1 = k_1 g$$

Ván 2 chịu F , $F_{1\max}$, $F_{2\max}$ và có gia tốc a_2 :

$$a_2 = \frac{F - k_1 m_1 g - k_2 (m_1 + m_2)g}{m_2}$$

$$\text{Điều kiện để } a_2 - a_1 = \frac{1}{m_2} \{F - (k_1 + k_2)(m_1 + m_2)g\} > 0 \text{ là } F > (k_1 + k_2)(m_1 + m_2)g$$

Thay số: $F \leq 4,6N : a_1 = a_2 = 0$; hai vật đứng yên

$$4,5N < F \leq 6N : \text{ hai vật có cùng gia tốc: } a_1 = a_2 = \frac{F - 4,5}{1,5}$$

$$F > 6N : \text{ Vật 1 có } a_1 = 1m/s^2; \text{ vật 2 có } a_2 = (F - 5)$$

Câu 58. Cho một bán cầu đặc đồng chất, khối lượng m , bán kính R , tâm O .

1. Chứng minh rằng khối tâm G của bán cầu cách tâm O của nó một đoạn là $d = 3R/8$.

2. Đặt bán cầu trên mặt phẳng nằm ngang. Đẩy bán cầu sao cho trục đối xứng của nó nghiêng một góc nhỏ so với phương thẳng đứng rồi buông nhẹ cho dao động (Hình 1). Cho rằng bán cầu không trượt trên mặt phẳng này và ma sát lăn không đáng kể. Hãy tìm chu kỳ dao động của bán cầu.

3. Giả thiết bán cầu đang nằm cân bằng trên một mặt phẳng nằm ngang khác mà các ma sát giữa bán cầu và mặt phẳng đều bằng không (Hình 2). Tác dụng lên bán cầu trong khoảng thời gian rất ngắn một xung của lực \vec{X} nào đó theo phương nằm ngang, hướng đi qua tâm O của bán cầu sao cho tâm O của nó có vận tốc \vec{v}_0 .

a. Tính năng lượng đã truyền cho bán cầu.

b. Mô tả định tính chuyển động tiếp theo của bán cầu. Coi v_0 có giá trị nhỏ.

Cho biết gia tốc trọng trường là g ; mô men quán tính của quả cầu đặc đồng chất khối lượng M ,

$$\text{bán kính } R \text{ đối với trục quay đi qua tâm của nó là } I = \frac{2}{5}MR^2.$$

Giải:

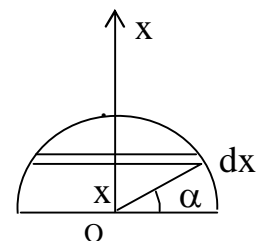
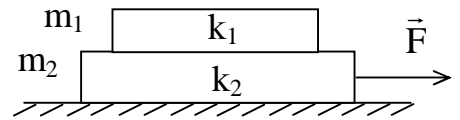
1. Do đối xứng, G nằm trên trục đối xứng Ox . Chia bán cầu thành nhiều lớp mỏng dày dx nhỏ.

Một lớp ở điểm có toạ độ $x = R \sin \alpha$, dày $dx = R \cos \alpha \cdot d\alpha$

$$\text{có khối lượng } dm = \rho \pi (R \cos \alpha)^2 dx \text{ với } m = \rho \frac{2}{3} \pi R^3 \text{ nên:}$$

$$x_G = \frac{\int_0^m x dm}{m} = \frac{\int_0^{\pi/2} \rho \pi R^4 \cos^3 \alpha \sin \alpha d\alpha}{m}$$

$$d = x_G = -\frac{\rho \pi R^4}{4m} \cos^4 \alpha \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\rho \pi R^4}{4m} = \frac{3R}{8} \text{ (đpcm)}$$



2. Xét chuyển động quay quanh tiếp điểm M: gọi φ là góc hợp bởi OG và đường thẳng đứng

$$-mgd\varphi = I_M \cdot \varphi'' \quad (1) \Rightarrow \varphi \text{ biến thiên điều hoà với } \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_M}}$$

I_O, I_G, I_M là các mômen quán tính đối với các trục quay song song qua O, G, M. Mô men quán tính

$$\text{đối với bán cầu là: } I_O = \frac{2}{5}mR^2; \quad I_O = I_G + md^2$$

$$I_M = I_G + m(MG)^2. \text{ Vì } \varphi \text{ nhỏ nên ta coi } MG = R-d$$

$$\Rightarrow I_M = \frac{2}{5}mR^2 + m(R^2 - 2Rd) = \frac{13}{20}mR^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_M}} = \sqrt{\frac{15g}{26R}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{26R}{15g}}$$

3. a) Giải hệ:

$$X = mv_G \quad (1) \quad Xd = I_G\omega \quad (2) \quad v_0 = v_G + \omega d \quad (3)$$

$$\text{Với } I_G = I_O - md^2 = \frac{83}{320}mR^2. \quad v_G = \frac{v_0}{1 + md^2/I_G} = \frac{83v_0}{128}; \quad \omega = \frac{md}{I_G}v_G = \frac{120}{83R} \cdot v_G = \frac{15}{16R} \cdot v_0$$

Động năng của bán cầu:

$$E = \frac{mv_G^2}{2} + \frac{I_G\omega^2}{2} = \frac{83mv_0^2}{256} \approx 0,32 \frac{mv_0^2}{2}$$

b) Khối tâm bán cầu chuyển động với thành phần vận tốc theo phương ngang bằng v_G không đổi. Bán cầu dao động quanh khối tâm.

Câu 59. Hai chiếc đĩa tròn đồng chất giống nhau chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang rất nhẵn, theo đường thẳng nối tâm các đĩa, đến gặp nhau. Các đĩa này quay cùng chiều quanh trục thẳng đứng qua tâm của chúng với các vận tốc góc tương ứng là ω_1 và ω_2 .

Tác dụng của lực ma sát giữa các đĩa và mặt bàn không đáng kể, còn tác dụng của lực ma sát xuất hiện ở điểm tiếp xúc hai đĩa với nhau thì đáng kể. Biết các đĩa có khối lượng m , có dạng trụ tròn thẳng đứng, hai đáy phẳng, bán kính R ; phần tâm đĩa có khoét một lỗ thủng hình trụ tròn đồng tâm với vành đĩa, bán kính $R/2$.

1. Tính mômen quán tính đối với trục quay nối trên của mỗi đĩa.

2. Hãy xác định vận tốc góc của các đĩa sau va chạm, biết rằng vào thời điểm va chạm kết thúc, tốc độ của các điểm va chạm trên các đĩa theo phương vuông góc với đường nối tâm của chúng là bằng nhau.

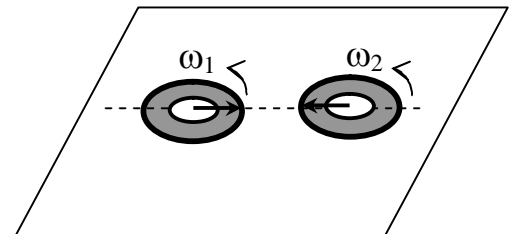
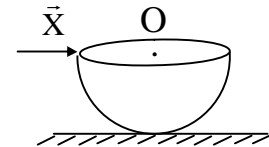
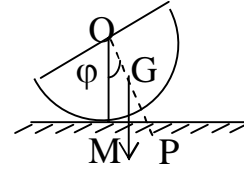
3. Xác định thành phần vận tốc tương đối của hai điểm tiếp xúc nhau của hai đĩa theo phương vuông góc với đường nối tâm của chúng ngay sau lúc va chạm.

Giải:

$$1. \text{ Mô men: } I = \int_r^R \left(\frac{m}{\pi(R^2 - r^2)} \right) 2\pi r^3 dr_1; \quad r = R/2, \quad I = m \frac{(R^2 + r^2)}{2} = \frac{5mR^2}{8}$$

2. Gọi X là xung lực của lực ma sát ở nơi tiếp xúc giữa hai đĩa; $v_{1\perp}, v_{2\perp}$ tương ứng là độ lớn thành phần vuông góc của vận tốc hai đĩa với đường nối tâm của chúng, có phương ngược với chiều quay của các đĩa này:

$$m_1 v_{1\perp} = m_2 v_{2\perp} \quad (1)$$



$$I(\omega_1' - \omega_1) = -RX ;$$

$$I(\omega_2' - \omega_2) = -RX$$

$$\Rightarrow \omega_1' - \omega_1 = \omega_2' - \omega_2 \quad (2)$$

$$m_1 v_{1\perp} = -I(\omega_1' - \omega_1)/R \quad (3)$$

Theo giả thiết, sau va chạm, thành phần vuông góc của vận tốc dài của các tiếp điểm ở hai vành đĩa bằng nhau:

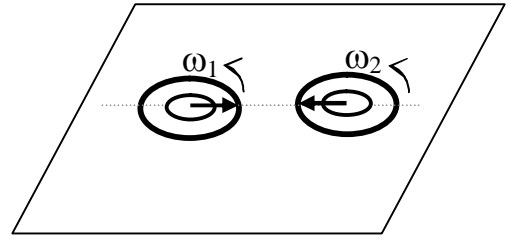
$$v_{\perp} = \omega_1' R - v_{1\perp} = -\omega_2' R + v_{2\perp} \quad (4)$$

Giải hệ 4 phương trình, 4 ẩn: $\omega_1', \omega_2', v_{1\perp}, v_{2\perp}$;

$$\omega_1' + \frac{I}{mR^2}(\omega_1' - \omega_1) = -\omega_2' - \frac{I}{mR^2}(\omega_2' - \omega_2) \quad (5).$$

Từ (2) và (5):

$$\omega_1' = \frac{(1 + \frac{2I}{mR^2})\omega_1 - \omega_2}{2 + \frac{2I}{mR^2}}, \quad \omega_2' = \frac{(1 + \frac{2I}{mR^2})\omega_2 - \omega_1}{2 + \frac{2I}{mR^2}};$$



Thay $I = \frac{5mR^2}{8}$, thì:

$$\omega_1' = \frac{9\omega_1 - 4\omega_2}{13}; \quad \omega_2' = \frac{9\omega_2 - 4\omega_1}{13}. \text{ Còn}$$

$$v_{1\perp} = \frac{5(\omega_1 + \omega_2)R}{26};$$

$$v_{\perp} = \omega_1' R - v_{1\perp} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)R}{2}$$

(nếu $\omega_1 > \omega_2$ $v > 0$, vận tốc này có hướng theo chiều quay của đĩa 1)

Câu 60. Quả cầu M khối lượng m được nối với một trục thẳng đứng tại hai điểm A, B bằng hai thanh chiều dài l, khối lượng không đáng kể (khoảng cách $AB = 2a$). Các chỗ nối đều là các chốt nên hai thanh chỉ bị kéo hoặc nén. Cả hệ quay không ma sát quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω không đổi (xem hình vẽ).

Tính các lực T và T' mà vật m tác dụng lên các thanh AM và BM tương ứng. Các thanh bị kéo hay bị nén?

Giải:

Gọi T_M, T_M' là các lực do các thanh tác dụng lên vật M. Vật M chịu các lực: mg, T_M, T_M' và lực quán tính li tâm:

$$F = m\omega^2 R = m\omega^2 \sqrt{l^2 - a^2}$$

Giả thiết T_M và T_M' có chiều như hình vẽ.

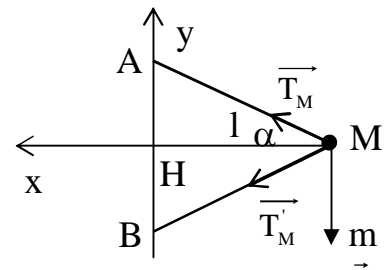
Gọi góc $AMH = BMH = \alpha$; $\sin \alpha = \frac{a}{l}$; $\cos \alpha = R/l$.

Chiếu xuống H_X và H_Y có:

$$(T_M + T_M') \cos \alpha = m\omega^2 R$$

$$(T_M - T_M') \sin \alpha = mg$$

Suy ra:



$$T_M = \frac{ml}{2} \left(\omega^2 + \frac{g}{a} \right)$$

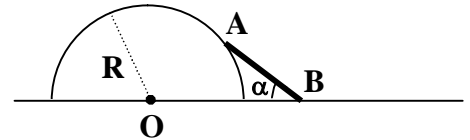
$$T'_M = \frac{ml}{2} \left(\omega^2 - \frac{g}{a} \right)$$

$T_M > 0$, chiều giả thiết là đúng. T_M là chiều do thanh tác dụng lên M. Ngược lại, M tác dụng lên thanh lực trực đối T. Vậy thanh AM bị kéo.

$$T'_M > 0 \text{ nếu } \omega > \sqrt{\frac{g}{a}} \text{ (quay đủ nhanh), thanh BM bị kéo}$$

$$T'_M < 0 \text{ nếu } \omega < \sqrt{\frac{g}{a}} \text{ thanh BM bị nén}$$

$$T'_M = 0 \text{ nếu } \omega = \sqrt{\frac{g}{a}} \text{ thanh BM không chịu lực nào}$$



Câu 61. Trên mặt bàn nằm ngang có một bán trụ cố định bán kính R. Trong mặt phẳng thẳng đứng vuông góc với trục O của bán trụ (mặt phẳng hình vẽ) có một thanh đồng chất AB chiều dài bằng R tựa đầu A lên bán trụ, đầu B ở trên mặt bàn. Trọng lượng của thanh là P. Không có

ma sát giữa bán trụ và thanh. Hệ số ma sát giữa mặt bàn và thanh là $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Góc α phải thỏa mãn

điều kiện gì để thanh ở trạng thái cân bằng?

Giải:

Thanh chịu trọng lượng P, phản lực N của bán trụ ở A vuông góc với mặt trụ (đi qua O). Phản lực Q của mặt bàn xiên góc với phương ngang vì có ma sát, trong đó:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_N + \vec{F}; \text{ trong đó } \vec{F} \text{ là lực ma sát.}$$

Ba lực \vec{Q} ; \vec{N} ; \vec{P} cân bằng, vậy giao điểm của \vec{N} ; \vec{Q} phải ở trên giá của \vec{P} .

$$\text{Ta có: } \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N} = 0 \quad (1)$$

Tam giác OAB là cân nên góc $BAN = 2\alpha$.

$$\text{Chiều (1) xuống ox: } N \cos \alpha = F; \quad (2)$$

$$\text{Chiều (1) xuống oy: } N \sin \alpha + Q_N = P; \quad (3)$$

$$\text{Lấy mo men đối với B: } P \frac{R \cos \alpha}{2} = NR \sin 2\alpha; \quad (4)$$

$$\text{Mặt khác: } F \leq \frac{\sqrt{3}}{3} Q_N; \quad (5)$$

Ta có 4 phương trình cho 4 ẩn N; Q_N ; F và α . Từ (3) có:

$$N = \frac{P \cos \alpha}{2 \sin 2\alpha} = \frac{P}{4 \sin \alpha}. \quad \text{Thay vào (2) nhận được:}$$

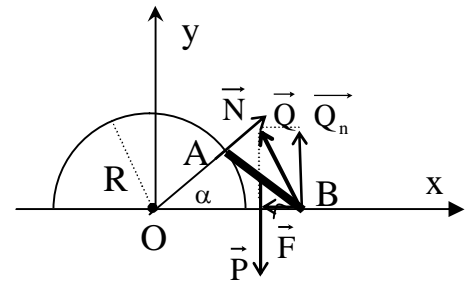
$$F = \frac{P \cot \alpha}{4}; \quad (6)$$

$$\text{Thay vào (3) thu được: } Q_N = P - N \sin \alpha = \frac{3P}{4} \quad (7)$$

Thay (6) và (7) vào (5) có:

$$\frac{P}{4 \tan \alpha} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} P. \quad \text{Suy ra: } \tan \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{hay } \alpha \geq 30^\circ$$

Mặt khác, dễ thấy rằng, vị trí của thanh, khi đầu A của thanh là tiếp điểm với bán trụ, tạo với mặt ngang với một góc giới hạn $\alpha = 45^\circ$. Vậy trạng thái cân bằng của thanh ứng với góc α thỏa mãn điều kiện: $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$.



Câu 62. Trên mặt ngang không ma sát, hai vật có khối lượng m_1 và m_2 nối với nhau bởi một sợi dây không giãn và có thể chịu được lực căng T_0 . Tác dụng lên vật các lực tỷ lệ thuận với thời gian $F_1 = \alpha_1 t$, $F_2 = \alpha_2 t$, trong đó α_1 và α_2 là các hệ số hằng số có thứ nguyên, t là thời gian tác dụng lực. Xác định thời điểm dây bị đứt.

Giải:

Gọi lực căng của dây khi chưa đứt là T . Chọn chiều (+) từ trái sang phải.

Độ lớn của gia tốc như nhau cho cả hai vật, nên :

$$\begin{aligned} a &= \frac{F_1 - T}{m_1} = \frac{T - F_2}{m_2} \\ \Rightarrow \frac{\alpha_1 t - T}{m_1} &= \frac{T - \alpha_2 t}{m_2} \\ \Rightarrow T &= \frac{(m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1)t}{m_1 + m_2} \quad (*) \end{aligned}$$



Phương trình (*) cho thấy lực căng T tăng theo thời gian. Vậy thời gian để dây đứt là :

$$t_d = \frac{(m_1 + m_2)T_0}{m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1}$$

Câu 63. Một đoàn tàu khách đang chạy với vận tốc $v_1 = 90 \text{ km/h}$ thì người lái tàu nhận thấy ở phía trước, cách tàu một khoảng $L = 140 \text{ m}$ có một đoàn tàu hàng đang chạy cùng chiều với vận tốc $v_2 = 21,6 \text{ km/h}$. Anh ta dùng phanh cho tàu chạy chậm dần với gia tốc $a = 1 \text{ m/s}^2$. Liệu có tránh được va chạm giữa hai đoàn tàu không ?

Giải:

Gọi s_1 và s_2 là các quãng đường mỗi tàu đi được cho đến khi tàu 1 đuổi kịp tàu 2, ta có:

$$s_1 = v_1 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1) ; \quad s_2 = v_2 t \quad (2) ; \quad s_2 + L = s_1 \quad (3)$$

$$\text{Hay : } t^2 - 38t + 280 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Gọi } v \text{ là vận tốc của tàu 1 khi đuổi kịp tàu 2, thì : } t = \frac{v - v_1}{a} = v_1 - v = 25 - v \quad (5)$$

$$\text{Thay (5) vào (4) ta được : } (25 - v)^2 - 38(25 - v) + 380 = 0 \quad (6)$$

Phương trình (6) có 2 nghiệm : $v = -3 \text{ m/s}$ (bị loại) và $v = 15 \text{ m/s}$.

Trong khi đó muốn không va chạm thì vận tốc tàu 1 phải kịp giảm xuống $21,6 \text{ km/h} = 6 \text{ m/s}$. Do đó **không thể tránh va chạm**.