

# Vật lí Billiard

Zinc

Ngày 4 tháng 10 năm 2021

## Tóm tắt nội dung

Billiard là một trong những bộ môn thể thao thịnh hành và được ưa chuộng nhất hiện nay bởi mọi lứa tuổi. Trò chơi yêu cầu người chơi (cơ thủ) dùng cây gậy (cơ) để đẩy những trái bi trên bàn, và chạm những trái bi khác tùy vào mục đích của từng thể loại. Bộ môn này không chỉ đòi hỏi người chơi có kinh nghiệm và kỹ thuật chơi, mà cần một tư duy nhạy bén, đầu óc tính toán về vật lý để có thể điều được những trái bi theo ý muốn. Dưới đây là một số bài toán định lượng nhỏ để nghiên cứu góc nhìn toán học về bộ môn này.

Coi khối lượng và hình dạng bi là như nhau, có cùng khối lượng  $m$  và dạng cầu bán kính  $R$ .

## 1 Bài toán va chạm

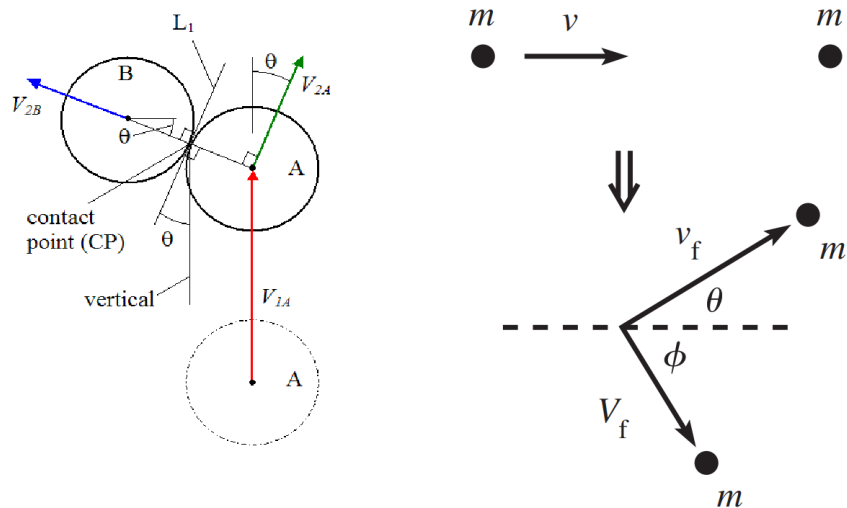
Đối với chế độ chơi "8-ball" hay "9-ball", người chơi chỉ được tác dụng cây cơ vào bi cái và va chạm với các vật thể khác (bi hoặc thành bàn), vậy nên ta cần tính toán để điều hướng bi mục tiêu hay bi cái sau va chạm đúng chủ đích của chúng ta.

### 1.1 Va chạm giữa các bi

Xét hai bi, bi cái có vận tốc khối tâm  $\vec{v}_0$  đến va chạm với bi mục tiêu đứng yên trên mặt bàn nằm ngang, và đường nối tâm của hai bi lúc va chạm hợp với phương ban đầu của bi cái một góc  $\phi$ . Biết va chạm tuyệt đối đàn hồi, lúc va chạm bóng không xoáy, bỏ qua ma sát giữa hai bi lúc va chạm.

- (a) Tìm góc tán xạ của mỗi bi sau va chạm so với phương vận tốc bi cái ban đầu.
- (b) Tìm vận tốc của từng bi sau va chạm.

Do phản lực do bi cái tác dụng vào bi mục tiêu xuyên tâm bi đó nên Vector vận tốc  $\vec{V}_f$  của bi mục tiêu hợp với phương Vector vận tốc  $\vec{v}_0$  của bi cái là  $\phi$ .  
Gọi góc tán xạ, vận tốc của bi cái lần lượt là  $\theta$  và  $v_f$ .



Hình 1: Chuyển động của hai bi sau va chạm

(a) Từ định luật bảo toàn động lượng và năng lượng ta có:

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_f + m\vec{V}_f.$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}mV_f^2.$$

$$\Rightarrow \vec{V}_f \cdot \vec{v}_f = 0.$$

$$\Rightarrow \cos(\theta + \phi) = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta + \phi = 90^\circ}.$$

Vậy, sau va chạm thì hai bi chuyển động hợp với nhau một góc  $90^\circ$ .

(b) Theo định luật bảo toàn động lượng theo phương của  $\vec{v}_0$  ta có:

$$mv_0 = mv_f \cos \theta + mV_f \cos \phi.$$

$$\boxed{v_f = v_0 \cdot \cos \theta}.$$

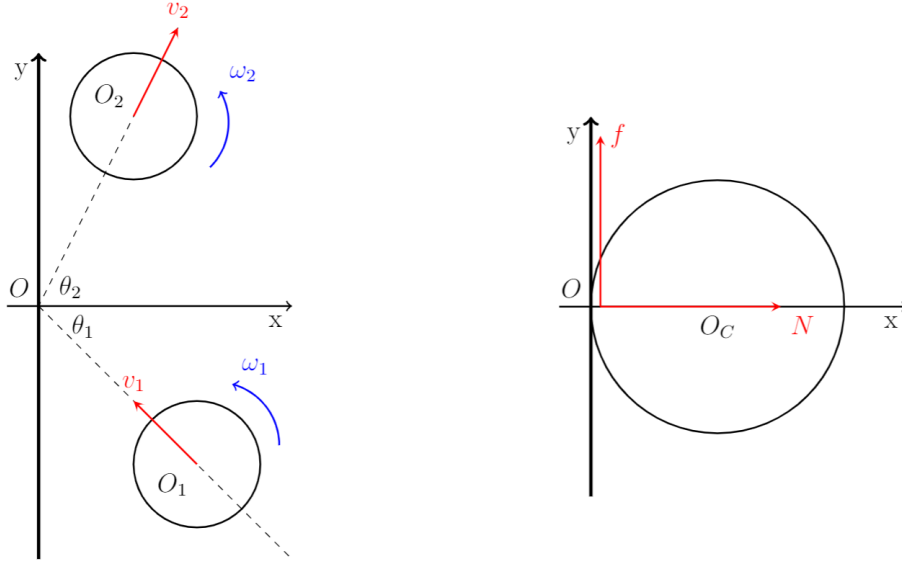
$$\boxed{V_f = v_0 \cdot \sin \theta}.$$

Có thể thấy, kĩ thuật đưa bi mục tiêu vào lỗ sẽ là nhắm sao cho đường nối tâm của hai bi lúc va chạm hướng đến lỗ, và sau va chạm bi cái sẽ điều đi vuông góc với bi mục tiêu.

## 1.2 Va chạm giữa bi và thành bàn

Xét bi cái có vận tốc  $\vec{v}_1$  và đang quay với vận tốc góc  $\vec{\omega}_1$  đâm vào thành bàn tạo một góc  $\theta_1$  như hình vẽ. Giả sử  $v_1 = R\omega_1$ . Gọi hệ số đàn hồi (tức là giá trị đại số của tỉ số vận tốc ban đầu và vận tốc sau va chạm theo phương pháp tuyến với thành bàn) là  $k$ , hệ số ma sát trượt giữa bi với thành bàn là  $\mu$ . Coi thời gian va chạm là  $\Delta t$  đủ ngắn.

(a) Tìm vận tốc khối tâm, vận tốc góc và góc phản xạ của bi sau va chạm.



Hình 2: Va chạm giữa bi và thành bàn

Xung lượng của phản lực  $N$  do thành bàn tác dụng lên bi là:  $X_N = \int N dt$ .

Xung lượng của lực ma sát  $f$  tác dụng lên bi là:  $X_f = \mu \int N dt = \mu X_N$ .

Thành phần vận tốc theo phương pháp tuyến với thành bàn sau va chạm là:  $v_{x2} = -k \cdot v_{x1}$ .

**Xét trường hợp bi lăn có trượt trong cả quá trình**

Định luật Newton 2:

$$m \cdot (v_{x2} - v_{x1}) = (k + 1)mv_1 \cos \theta_1 = X_N.$$

$$m \cdot (v_{y2} - v_{y1}) = X_f = \mu \cdot X_N.$$

$$\Rightarrow v_{y2} = v_1 \cdot [\sin \theta_1 + (1 + k)\mu \cos \theta_1].$$

Vận tốc của bi sau va chạm là:

$$v_2 = v_1 \cdot \sqrt{[(k^2 - 1) + \mu^2(1 + k)^2] \cdot \cos^2 \theta_1 + \mu(1 + k) \cdot \sin 2\theta_1 + 1}.$$

Góc phản xạ của bi sau va chạm là:

$$\theta_2 = \arctan \left| \frac{v_{y2}}{v_{x2}} \right| = \arctan \left( \frac{\tan \theta_1}{k} + \frac{1 + k}{k} \mu \right).$$

Định luật Newton 2 cho chuyển động quay:

$$\frac{2}{5}mR^2 \cdot (\omega_2 - \omega_1) = -R \cdot X_f.$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \cdot \left[ 1 - \frac{5}{2}\mu(1+k) \cos \theta_1 \right].$$

Điều này chỉ xảy ra khi:  $v_{y2} \leq R\omega_2$ .

$$\Leftrightarrow \sin \theta_1 + \frac{7}{2}\mu(1+k) \cos \theta_1 \leq 1.$$

***Xét quá trình bi chỉ lăn có trượt trong một khoảng thời gian, sau đó lăn không trượt***

Bi bắt đầu lăn không trượt khi:  $v_{y2} = R\omega_2$ , tức là phương trình điều kiện trên mang dấu  $\geq$ .  
Làm tương tự như trên ta sẽ tìm được:

$$v_2 = v_1 \cdot \sqrt{\left(k^2 + \frac{25}{49}\right) \sin^2 \theta_1 + \frac{20}{49} \sin \theta_1 + \frac{4}{49}}.$$

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \sqrt{\left(k^2 + \frac{25}{49}\right) \sin^2 \theta_1 + \frac{20}{49} \sin \theta_1 + \frac{4}{49}}.$$

$$\theta_2 = \arctan \left( \frac{5}{7k} \tan \theta_1 + \frac{2}{7k \cos \theta_1} \right).$$

Nếu va chạm đàn hồi tuyệt đối và không ma sát thì va chạm trên sẽ tuân theo định luật phản xạ ánh sáng và không thay đổi trạng thái động học:  $v_1 = v_2$ ,  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $\theta_1 = \theta_2$ .

Để tạo ra các thông số động của bi như vậy, cơ thủ làm một kĩ thuật gọi là "***Effect***" (cơ thủ Việt đọc là "***Ép-phê***"), khi đánh cơ dứt khoát vào phần cạnh của bi cái, khiến bi bị xoáy.

Tùy vào hướng xoáy của bi cái, nghĩa là tùy vào phương của lực ma sát tác dụng vào bi, người ta có thuật ngữ sau:

(a)  $\theta_1 < \theta_2$ : ***Effect*** thuận.

(b)  $\theta_1 > \theta_2$ : ***Effect*** nghịch.

Hiện tượng trên sẽ hơi khác so với hình vẽ, đó là trong quá trình va chạm, bi sẽ đi dọc theo thành bàn một đoạn là:

$$\Delta s = \frac{m\Delta(v_y^2)}{2f}.$$

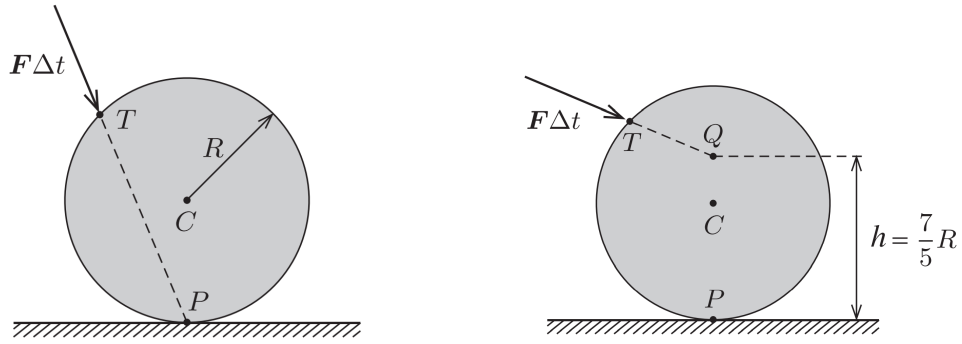
Thường thì hệ số ma sát của thành bàn với bi khá lớn nên có thể coi  $\Delta s \approx 0$ .

Người ta có thể áp dụng điều này để tạo ra kĩ thuật được gọi là "*chọc băng*", khi bi mục tiêu ở sát băng và khi đó rất khó để đánh bi cái để bi mục tiêu đi thẳng dọc theo đường băng vào lỗ, khi đó người ta đánh "*Effect*" bi cái gần gần chạm bi mục tiêu (không cần chính xác) lúc gần trước va chạm, trong thời gian bi cái chạm băng, bi sẽ trượt theo băng một đoạn  $\Delta s$  và tác động vào bi mục tiêu, đi thẳng dọc theo băng vào lỗ.

## 2 Tương tác giữa gậy cơ và bi

Bỏ qua hiện tượng nhảy bi (Jump shot). Tìm vị trí và cách đặt cơ lên bi cái sao cho

- Trong cả quá trình chuyển động, bi vừa lăn vừa trượt, và cả hai đều kết thúc cùng lúc, đồng thời lúc đó bi dừng.
- Trong cả quá trình chuyển động, bi lăn không trượt.



Hình 3: Vị trí và cách tác dụng cơ vào bi trong hai trường hợp

Gọi  $T$  là điểm cơ tác dụng lực,  $P$  là điểm tiếp xúc giữa mặt bàn và bi.

(a) Để quá trình trượt kết thúc đồng thời bi dừng lại, thì momen động lượng quanh điểm  $P$  (không đổi trên mặt bàn) phải bằng 0.

Điều đó có nghĩa là hướng đánh của cơ phải đi qua điểm  $P$ .

(b) Gọi  $Q$  là một điểm trên bi, là giao điểm của phương của cơ và phương pháp tuyến qua tâm bi.

Sau khi đánh cơ, bi có vận tốc khối tâm  $\vec{v}_0$  và vận tốc góc  $\vec{\omega}_0$  thỏa mãn điều kiện lăn không trượt:

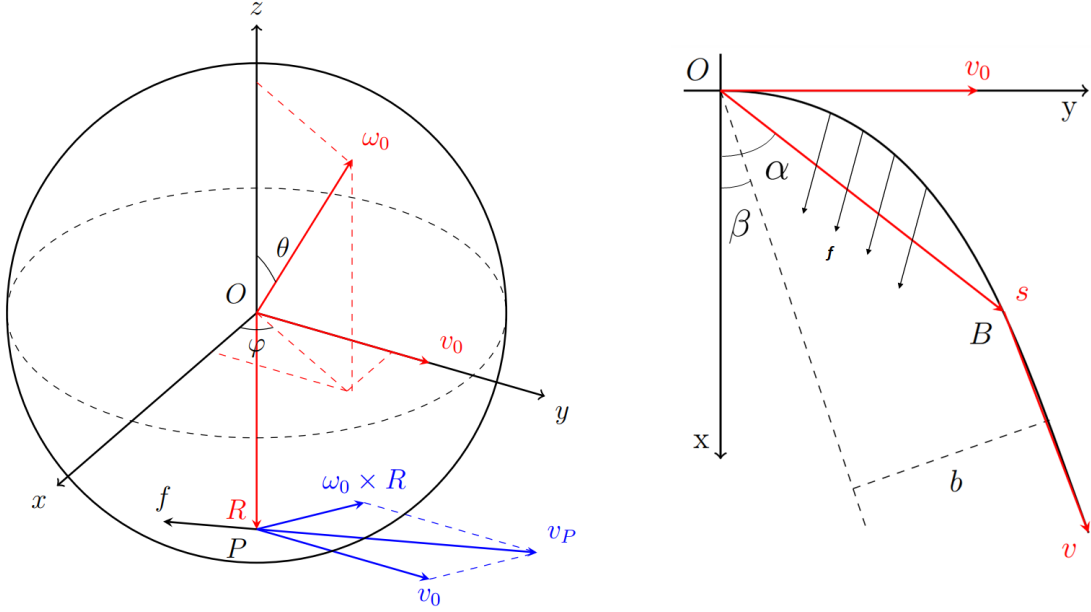
$$\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{R} = 0.$$

Momen động lượng quanh điểm  $Q$  bằng 0, sử dụng định lý König ta được:

$$\vec{L}_Q = -\vec{OQ} \times m\vec{v}_0 + I_C \cdot \vec{\omega}_0 = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{QP = h = \frac{7}{5}R}.$$

### 3 Quỹ đạo của bi xoáy trên mặt bàn \*\*\*



Hình 4: Phân tích động lực học vật rắn và quỹ đạo chuyển động của bi

Xét một trường hợp đánh cơ vào bi sao cho, ngay sau khi buông cơ thì bi có một vận tốc khối tâm  $\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$  trong hệ tọa độ Descartes và vận tốc góc  $\vec{\omega}_0$  được biểu thị qua hệ tọa độ cực với thông số  $(\omega_0, \theta, \varphi)$ . Các cơ thủ gọi đây là hiện tượng "Coriolis-massé".

- Tìm dạng quỹ đạo của bi trên mặt phẳng  $Oxy$ .
- Tìm khoảng thời gian  $T$  từ lúc bi bắt đầu chuyển động đến lúc lăn không trượt.
- Tìm vận tốc  $v_C$  của bi khi bi bắt đầu lăn không trượt.
- Tìm vector vị trí  $\vec{s}$  của bi so với gốc tọa độ  $O$  tại thời điểm bi bắt đầu lăn không trượt.
- Tìm khoảng cách  $b$  giữa đường lăn không trượt của bi và đường thẳng song song với nó qua gốc tọa độ  $O$ . Giá trị  $b$  này có ý nghĩa gì trong thực tế?

(a) Trước khi bi lăn không trượt, tại thời điểm  $t$  bất kì, vận tốc của điểm tiếp xúc của bi với mặt bàn là:

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{R}. \\ \Rightarrow \frac{d\vec{v}_P}{dt} &= \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R}.\end{aligned}$$

Định luật Newton 2:

$$\vec{f} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu mg \cdot \hat{v}_P.$$

$$\vec{R} \times \vec{f} = \frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Suy ra được tốc độ biến thiên của vận tốc tiếp xúc là:

$$\frac{d\vec{v}_P}{dt} = -\frac{7}{2}\mu g \cdot \hat{v}_P.$$

Từ đó, ta có thể thấy vận tốc tiếp xúc  $\vec{v}_P$  chỉ giảm độ lớn nhưng không thay đổi hướng, đồng thời lực ma sát có độ lớn và phương chiều không đổi, nghĩa là quỹ đạo chuyển động của bi lúc trượt là **một đoạn parabol**, sau đó chuyển động thẳng đều liên tục với parabol đó khi lăn không trượt (hình vẽ).

(b) Xét tại thời điểm  $t = 0$ , ta tìm được vận tốc tiếp xúc là:

$$\vec{v}_P(0) = v_0 \cdot \vec{j} + \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_0 \sin \theta \cos \varphi & \omega_0 \sin \theta \sin \varphi & \omega_0 \cos \theta \\ 0 & 0 & -R \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \vec{v}_P(0) = (v_0 + \omega_0 R \sin \theta \cos \varphi) \cdot \vec{j} - \omega_0 R \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{i}.$$

$$\frac{d\vec{v}_P}{dt} = -\frac{7}{2}\mu g \cdot \hat{v}_P \Rightarrow -\vec{v}_P(0) = -\frac{7}{2}\mu g \hat{v}_P \cdot T.$$

$$T = \frac{2}{7\mu g} \cdot |\vec{v}_P(0)|.$$

$$\Rightarrow T = \frac{2}{7\mu g} \cdot \sqrt{(v_0 + \omega_0 R \sin \theta \cos \varphi)^2 + (\omega_0 R \sin \theta \sin \varphi)^2}.$$

(c)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu g \cdot \hat{v}_P \Rightarrow \vec{v}_C - \vec{v}_0 = \mu g \hat{v}_P \cdot T = -\frac{2}{7}\vec{v}_P.$$

$$\vec{v}_C = \left( \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}\omega_0 R \sin \theta \cos \varphi \right) \cdot \vec{j} + \frac{2}{7}\omega_0 R \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{i}.$$

$$v_C = \sqrt{\left( \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}\omega_0 R \sin \theta \cos \varphi \right)^2 + \left( \frac{2}{7}\omega_0 R \sin \theta \sin \varphi \right)^2}.$$

(d) Vị trí của bi tại thời điểm  $T$  là:

$$\vec{s} = \vec{v}_0 \cdot T - \frac{1}{2}\mu g \hat{v}_P \cdot T^2.$$

$$\vec{s} = \frac{2}{7\mu g} |\vec{v}_P| \cdot \left[ \frac{1}{7}\omega_0 R \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{i} + \left( \frac{6}{7}v_0 - \frac{1}{7}\omega_0 R \sin \theta \cos \varphi \right) \cdot \vec{j} \right].$$

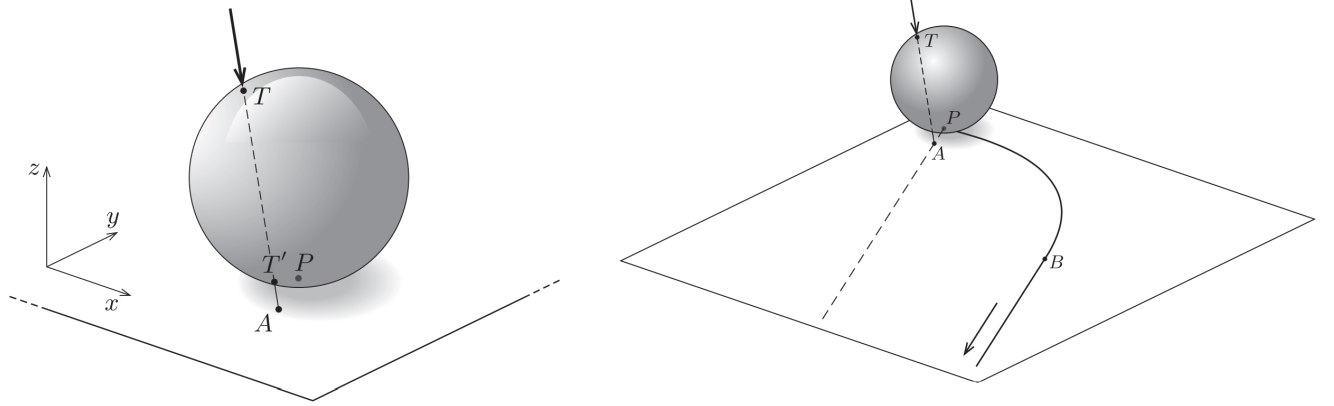
(e) Gọi góc  $\alpha, \beta$  lần lượt là góc tạo bởi các vector  $\vec{s}, \vec{v}_C$  với phương  $Ox$ .

$$\tan \alpha = \frac{6v_0}{\omega_0 R \sin \theta \sin \varphi} - \cot \varphi.$$

$$\tan \beta = \frac{5v_0}{2\omega_0 R \sin \theta \sin \varphi} - \cot \varphi.$$

$$\Rightarrow \boxed{b = |\vec{s}| \cdot \sin(\alpha - \beta)}.$$

Trong một vài thế bi khó, khi mà giữa bi mục tiêu và bi cái có một số bi cản, nếu không được phép sử dụng "**Jump shot**" thì ta cần làm một cú "**Massé**" khiến bi đi vòng và chạm bi mục tiêu.



Hình 5: Kỹ thuật Coriolis-massé

Giờ chúng ta xét theo khía cạnh tương tác giữa cơ và bi, phương của cây cơ sẽ cắt mặt bàn tại điểm A.

Momen động lượng của hệ qua trục  $PA$  là 0, nên sau khi bi lăn không trượt tại  $B$  và đi thẳng thì đường thẳng đó sẽ song song với đoạn  $PA$ .

#### **\*Đối với những cú đánh thẳng**

Khi đánh cơ xuyên tâm bi, khi đó thông số động của bi như sau:

$$\vec{\omega}_0 = 0$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{j}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_C = \frac{5}{7}v_0\vec{j}}$$

**Kỹ thuật Cu-lê (Follow shot):** Khi đánh cây cơ vào điểm trên tâm bi, khi đó thông số động của bi như sau:

$$\vec{\omega}_0 = -\omega_0 \cdot \vec{i}.$$



$$\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{j}.$$

$$\Rightarrow \vec{v}_C = \left( \frac{5}{7}v_0 + \frac{2}{7}\omega_0 R \right) \cdot \vec{j} > \vec{v}_0.$$

Khi bi cái va chạm với bi mục tiêu đứng yên, bi cái sau đó sẽ tăng tốc do ma sát và đạt tốc độ  $\vec{v}'_C = \frac{2}{7}\omega_0 R \cdot \vec{j}$  và đi tiếp.

**Kĩ thuật *trô bi* (*Draw shot*):** Khi đánh cây cơ vào điểm phía dưới tâm bi, khi đó thông số động của bi như sau:

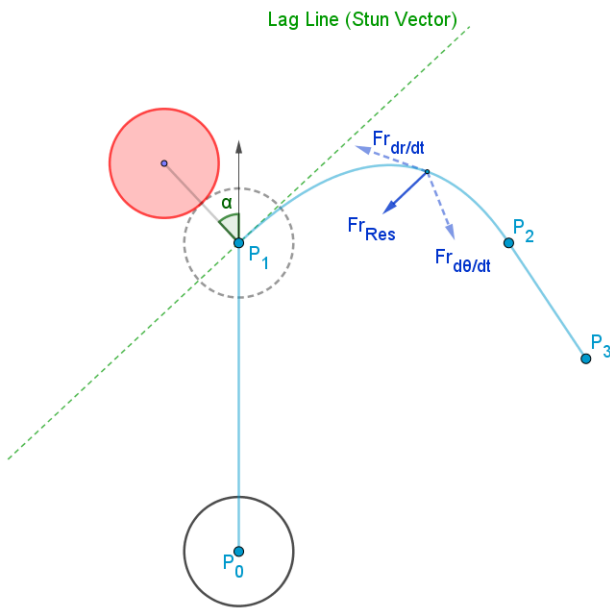
$$\vec{\omega}_0 = \omega_0 \cdot \vec{i}.$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{j}.$$

$$\Rightarrow \vec{v}_C = \left( \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}\omega_0 R \right) \cdot \vec{j} < \vec{v}_0.$$

Khi bi cái va chạm với bi mục tiêu đứng yên, bi cái sau đó sẽ tăng tốc do ma sát và đạt tốc độ  $\vec{v}'_C = -\frac{2}{7}\omega_0 R \cdot \vec{j}$  và bị giật lùi trở lại.

Dưới đây là mô phỏng và phân tích quỹ đạo của một cú "***Draw shot***" va chạm không xuyên tâm với bi mục tiêu



$$P_0 : \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$P_1 : \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$P_2 : \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$P_3 : \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$[P_0 \rightarrow P_1]$ : Bi lăn có trượt do bị xoáy ngược và chạm vào bi mục tiêu.

$[P_1 \rightarrow P_2]$ : Bi lăn có trượt và quỹ đạo có dạng parabol.

$[P_2 \rightarrow P_3]$ : Bi lăn không trượt, quỹ đạo là một đường thẳng và cuối cùng dừng lại do ma sát lăn.