ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VĂN ĐẠO

CƠ HỌC GIẢI TÍCH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VĂN ĐẠO

CƠ HỌC GIẢI TÍCH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI - 2001

MỤC LỤC

CHƯƠNG III. CÁC PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG

CHƯƠNG IV. CÁC PHƯƠNG TRÌNH HAMINTƠN

CHƯƠNG V. CÁC NGUYÊN LÝ TÍCH PHÂN

CHƯƠNG VI. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI CHÍNH TẮC

CHƯƠNG VII. PHƯƠNG TRÌNH HAMINTƠN - GIACÔBI

LỜI NÓI ĐẦU

Cơ học giải tích được sử dụng rất có hiệu quả trong việc nghiên cứu các hệ động lực không tự do phức tạp thường gặp trong kỹ thuật, trong việc nghiên cứu nhiều lĩnh vực của vật lý lý thuyết.

Có hai quan điểm xây dựng Cơ học giải tích:

1. Dựa trên các nguyên lý vi phân, mà cốt lõi là" Nguyên lý công ảo".

2. Dựa trên các nguyên lý tích phân, dùng các phép tính biến phân với "Nguyên lý tác dụng tối thiểu" làm nòng cốt.

Trong cuốn sách này, cả hai quan điểm trên đây sẽ được lần lượt trình bày. Nhiều ví dụ minh họa sẽ giúp người đọc hiểu được bản chất của vấn đề và cách vận dụng lý thuyết trong việc giải các bài toán cụ thể.

Để hiểu các vấn đề nêu trong cuốn sách này, người đọc cần có những kiến thức cơ bản về Cơ học lý thuyết và Toán học cao cấp. Sách được dùng cho sinh viên và nghiên cứu sinh các ngành Toán, Cơ, Vật lý, Kỹ thuật và các chuyên gia khác muốn tìm hiểu sâu về Cơ học.

Các công thức, phương trình, hình vẽ và ví dụ trong cuốn sách này được đánh số bằng chữ số kép. Số đầu chỉ Chương, còn số sau chỉ thứ tự của công thức, phương trình, hình vẽ và ví dụ trong Chương đó. Chẳng hạn, công thức (3.5) là công thức thứ năm thuộc Chương ba. Phương trình được đánh số bằng chữ số đơn là phương trình thuộc một ví dụ cụ thể.

Tác giả chân thành cảm ơn các Giáo sư Nguyễn Văn Đình, Đào Huy Bích, Đỗ Sanh và Lê Lương Tài đã đọc bản thảo và đóng góp nhiều ý kiến quí báu, cám ơn Phó giáo sư, Tiến sĩ Nguyễn Thị Ngọc Quyên đã giúp biên tập cẩn thận trước khi in và cám ơn anh Phùng Văn Tiêu , cô Bùi Thị Hồng Lâm đã rất kiên nhẫn đánh máy và sửa bản thảo trên máy vi tính.

Chúng tôi rất mong được bạn đọc góp ý kiến để cuốn sách trong lần tái bản sau được hoàn chỉnh hơn.

MỞ ĐẦU

Phần cơ bản và lâu đời nhất của Cơ học là lý thuyết về sự cân bằng và chuyển động của các vật thể. Những khái niệm cơ sở của Cơ học là **không gian, thời gian** và **khối lượng** (hoặc **lực**). Sự phát triển của Cơ học gắn liền với sự phát triển của Hình học nói riêng và Toán học nói chung, đặc biệt rõ nét là trong Động hình học (kinematics) và Động lực học (dynamics). Hình học được nói tới ở đây là hình học Ơclit với độ dài của vectơ được xác định bởi định lý Pitago, theo đó bình phương của chiều dài một vectơ bằng tổng của bình phương các thành phần của vectơ đó. Hình học Ơclit được dùng làm nền tảng của Cơ học Niutơn. Trong Cơ học Niutơn người ta chấp nhận giả thuyết về sự tồn tại của một không gian tuyệt đối-không gian Ơclit và một thời gian tuyệt đối trôi đi độc lập với không gian.

Cơ học Niutơn dựa trên ba định luật được Ông phát biểu vào năm 1687 trong cuốn "Những nguyên lý toán học của các khoa học tự nhiên".

Định luật thứ nhất: Một vật điểm sẽ chuyển động trên đường thẳng với vận tốc không đổi nếu nó không chịu tác dụng của lực nào .

Vật điểm là mô hình lý tưởng của một vật thể với các kích thước rất nhỏ so với khoảng cách đến các vật thể khác và chuyển động bên trong của nó không ảnh hưởng đến chuyển động của toàn bộ vật thể. Về mặt toán học, vật điểm được biểu diễn bằng một điểm hình học có khối lượng. Gọi $\vec{F}$ là lực tác dụng nên vật điểm và $\vec{v}$ là vận tốc của vật điểm trong hệ quy chiếu quán tính, định luật thứ nhất có thể viết:

$$\text{Nếu } \vec{F} = 0 \text{ thì } \vec{v} = const.$$

Định luật thứ hai: Một vật điểm chịu tác dụng bởi một lực sẽ chuyển động sao cho vectơ lực đó bằng tốc độ biến đổi theo thời gian của vectơ động lượng.

Vectơ động lượng $\vec{p}$ được xác định như tích của khối lượng m của vật điểm với vận tốc $\vec{v}$ của nó : $\vec{p} = m\vec{v}$.Định luật thứ hai được biểu diễn dưới dạng toán học:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}).$$

Hai định luật nói trên đã được Galilê phát hiện ra trước . Song, Niutơn là người đã phát biểu các định luật đó một cách định lượng rõ ràng.

Định luật thứ ba: Khi hai vật điểm tác dụng tương hỗ với nhau thì các lực tương tác giữa chúng là trực đối nhau và nằm trên đường nối hai vật điểm .

Người ta còn gọi định luật này là định luật về tác dụng và phản tác dụng . Nếu gọi $\vec{F}_{12}$ là lực mà vật điểm 2 tác dụng lên vật điểm 1, thì định luật thứ ba có thể viết dưới dạng :

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

trong đó $\vec{F}_{21}$ là lực mà vật điểm 1 tác dụng lên vật điểm 2. Ngoài ba định luật trên đây, Niutơn còn phát biểu định luật hấp dẫn vũ trụ, theo đó hai vật điểm vũ trụ hút nhau với một lực có cường độ :

$$F(r) = \frac{Gm_1 m_2}{r^2},$$

ở đây lực hút hướng theo đường nối hai vật điểm , r là khoảng cách giữa chúng, G là hằng số hấp dẫn vũ trụ , m_1, m_2 là khối lượng các vật điểm. Định luật này còn được gọi là luật tỉ lệ ngược với bình phương khoảng cách.

Luật hấp dẫn vũ trụ cùng với ba định luật nêu ở trên tạo thành cơ sở của Cơ học thiên thể.

Các định luật Niutơn tuy được phát biểu cho các vật điểm, song có thể mở rộng cho hệ nhiều vật điểm. Trong Cơ học Niutơn - còn gọi là **Cơ học vectơ** - người ta dựa trực tiếp vào các định luật Niutơn và nghiên cứu chuyển động nhờ sử dụng các đại lượng vectơ như lực và động lượng, khảo sát từng vật thể và các lực tác dụng lên mỗi vật thể. Cách làm này đòi hỏi phải tính các phản lực liên kết hình thành do những mối quan hệ động học, mặc cho có thể người ta không thật quan tâm đến các lực đó.

Một cách tiếp cận khác đối với việc nghiên cứu Cơ học do Laibnit (Leibnitz) và Lagrăng đề xuất là nghiên cứu toàn bộ hệ cơ học, chứ không nghiên cứu từng vật thể riêng rẽ. Theo hướng này, các bài toán cơ học được xây dựng trên cơ sở của hai đại lượng vô hướng cơ bản là **công** và **động năng**. Khác với Cơ học vectơ, ở đây chúng ta có một lĩnh vực được gọi là **Cơ học giải tích**, trong đó các phản lực liên kết không xuất hiện và các toạ độ suy rộng được sử dụng thay thế cho các toạ độ vật lý thông thường. Nhu cầu nghiên cứu Cơ học giải tích dẫn đến việc phát triển phép tính biến phân. Cũng vì lý do này mà Cơ học giải tích còn được coi như cách **tiếp cận biến phân** đối với Cơ học. Sự trừu tượng toán học cao của Cơ học giải tích không chỉ loại bỏ hoàn toàn sự phụ thuộc của cách phát biểu các mệnh đề vào các hệ toạ độ, mà còn cho phép giải quyết có hiệu quả các bài toán của hệ nhiều bậc tự do cũng như các bài toán trong tọa độ cong hoặc các loại liên kết khác nhau.

Nội dung chủ yếu của Cơ học giải tích là trình bày các nguyên lý tổng quát của cơ học, từ đó rút ra các phương trình vi phần cơ bản của chuyển động, nghiên cứu các phương trình đó và đề ra các phương pháp tích phân chúng.

Cơ học được trình bày trong cuốn sách này là **Cơ học cổ điển** (Classical Mechanics) dựa trên các định luật Niutơn và nguyên lý Galilê, theo đó quy luật chuyển động cơ học (sự thay đổi vị trí theo thời gian) là bất biến khi chuyển việc đo đạc và tính toán từ hệ qui chiếu quán tính này sang hệ qui chiếu quán tính khác (Hệ qui chiếu quán tính là hệ qui chiếu chuyển động tịnh tiến, thẳng, đều đối với hệ qui chiếu cố định so với các sao cố định trên bầu trời).

Cơ học cổ điển chỉ có thể dùng để nghiên cứu chuyển động của các vật thể có kích thước lớn so với kích thước của nguyên tử và chuyển động với vận tốc nhỏ so với vận tốc ánh sáng ($c = 3.10^8$ m/s). Các vật thể mà ta gặp trong đời sống hàng ngày đều là những vật thể đáp ứng yêu cầu này. Vì vậy, Cơ học cổ điển đã, đang và sẽ còn được sử dụng để nghiên cứu sự chuyển động của chúng.

Để nghiên cứu các hạt chuyển động với vận tốc lớn (có thể so được với vận tốc ánh sáng, trong các hiện tượng về các sóng điện từ, về ánh sáng) ta phải dùng **Lý thuyết tương đối của Anhxtanh** (Albert Einstein) với các công thức biến đổi Loren (Lozentz) thay cho công thức Galilê khi chuyển đổi các hệ qui chiếu quán tính. Trong Lý thuyết tương đối của Anhxtanh, khi vật thể chuyển động với vận tốc lớn, khối lượng của nó sẽ không cố định mà tăng lên, không gian bị co lại và thời gian diễn ra chậm hơn, không gian và thời gian phụ thuộc lẫn nhau. Những điều này hoàn toàn khác với Cơ học cổ điển.

Sự chuyển động của các hạt vi mô gồm các phân tử, các nguyên tử và các hạt cơ bản (electron, position, proton, neutron, ...) được nghiên cứu trong **Cơ học lượng tử**. Kích thước của các hạt vi mô là rất nhỏ: nguyên tử là vào khoảng một phần trăm triệu của xăngtimet (cm), các hạt cơ bản là vào khoảng 10^{-33} cm. Các hiện tượng vi mô thường xảy ra trong khoảng thời gian cực kỳ ngắn, từ 10^{-5} đến 10^{-25} giây. Cũng như Lý thuyết tương đối của Anhxtanh, Cơ học lượng tử ra đời vào đầu thế kỷ 20 với các công trình nghiên cứu của Đờbrơi (Louis De Broglie), Srôđingơ (Erwin Schrödinger), Haidenbec (Werner Heisenberg), Plăng (Max Planck). Trong Cơ học cổ điển, sóng và hạt là hai thực thể vật lý rất khác nhau. Còn trong Cơ học lượng tử chúng quan hệ chặt chẽ với nhau và bản chất lưỡng tính sóng - hạt của ánh sáng được thừa nhận.

Chương I

NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Liên kết. Di chuyển khả dĩ. Di chuyển ảo. Công ảo. Bậc tự do của cơ hệ. Toạ độ và vận tốc suy rộng. Lực suy rộng.

1.1. LIÊN KẾT VÀ PHÂN LOẠI LIÊN KẾT. CƠ HỆ TỰ DO VÀ CƠ HỆ KHÔNG TỰ DO

Xét chuyển động của hệ N chất điểm $P_i (i = 1, 2, ..., N)$ trong hệ toạ độ quán tính. Những hạn chế hình học hoặc động học đối với vị trí và vận tốc của các điểm của hệ được gọi là **những liên kết**. Các hệ cơ học chịu những liên kết như vậy được gọi là các **hệ cơ học không tự do**, để phân biệt với các **hệ cơ học tự do**, trong đó không có những liên kết tương tự.

Về mặt toán học, liên kết được biểu thị bởi các đẳng thức :

$$f_k(t, \vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i) = 0, \ k = 1, 2, ..., m, \tag{1.1}$$

trong đó m là số liên kết, $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ là vận tốc của điểm thứ i của hệ khảo sát, dấu chấm trên vectơ $\vec{r}_i$ chỉ đạo hàm theo thời gian, vectơ

$\vec{r}_i$ có gốc tại điểm O cố định (gốc toạ độ) và có các thành phần trên các trục toạ độ Đềcac là x_i, y_i, z_i. Hàm f_k cùng các đạo hàm của nó được giả thiết là liên tục.

Nếu vận tốc $\dot{\vec{r}}_i$ không có mặt trong phương trình liên kết (1.1) thì liên kết được gọi là **liên kết hình học** hoặc **liên kết hữu hạn** hoặc **liên kết hôlônôm** và phương trình liên kết có dạng

$$f_k(t, \vec{r}_i) = 0. \tag{1.2}$$

Nếu mọi liên kết trong cơ hệ đều là hôlônôm thì cơ hệ được gọi là **hệ hôlônôm**. Nếu phương trình liên kết chứa các yếu tố vận tốc và không thể khử được chúng khỏi các phương trình liên kết nhờ việc tích phân thì liên kết được gọi là **phi hôlônôm** (nonholonom), cơ hệ tương ứng được gọi là **hệ phi hôlônôm**. Các liên kết phi hôlônôm không đặt những điều kiện ràng buộc lên vị trí của các điểm thuộc hệ, nhưng hệ không thể có vận tốc tùy ý.

Trong cuốn sách này ta sẽ nghiên cứu chủ yếu các hệ hôlônôm, nghĩa là xét hệ với các liên kết mô tả bởi các phương trình (1.2).

Liên kết dừng và không dừng. Nếu phương trình liên kết không chứa rõ biến thời gian t thì liên kết được gọi là dừng hoặc sclêrônôm . Hệ cơ học chỉ chịu các liên kết sclêrônôm được gọi là **hệ sclêrônôm**. Ngược lại, khi liên kết phụ thuộc rõ vào thời gian thì nó được gọi là liên kết không dừng hoặc rêônôm. Hệ cơ học có dù chỉ một liên kết rêônôm được gọi là **hệ rêônôm**.

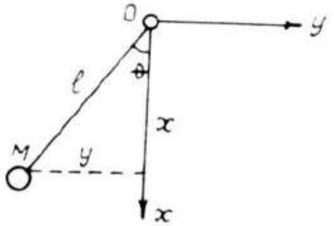
Liên kết giữ và không giữ. Nếu các liên kết được mô tả bằng những đẳng thức thì chúng được gọi là các liên kết giữ hoặc liên kết hai phía (xem phương trình (1.2)). Nếu các liên kết được viết dưới dạng những bất đẳng thức thì chúng được gọi là liên kết không giữ, hoặc liên kết một phía:

$$f_k(t, \vec{r}_i) \geq 0. \tag{1.3}$$

Khác với các **cơ hệ tự do**, ở đó không chịu các liên kết đã nói ở trên, **cơ hệ không tự do là cơ hệ mà vị trí và vận tốc của các điểm của nó bị ràng buộc bởi những liên kết**.

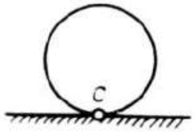
Ví dụ 1.1. Hệ thống Mặt Trời, trong đó mỗi hành tinh được coi như một chất điểm, là một **cơ hệ tự do**.

Ví dụ 1.2. Con lắc là một cơ hệ không tự do. Điểm O của con lắc phải luôn luôn cố định. Khoảng cách OM phải không đổi.



Hình 1.1
Con lắc toán học gồm điểm nặng M treo vào sợi dây OM

Ví dụ 1.3. Bánh xe lăn không trượt trên đường ray cũng là một cơ hệ không tự do. Tiếp điểm C của bánh xe với đường ray phải có vận tốc bằng không.



Hình 1.2
Bánh xe lăn không trượt. Điểm C là tâm quay tức thời

Ví dụ 1.4. Chất điểm chỉ có thể chuyển động trên một mặt. Giả thử phương trình của mặt được cho dưới dạng

$$f(\vec{r}) = 0. \tag{1}$$

hoặc

$$f(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

Đó là liên kết hữu hạn dừng hoặc liên kết hình học dừng. Nếu mặt chuyển động hoặc biến dạng thì trong phương trình của mặt sẽ có thời gian t:

$$f(t, \vec{r}) = 0. \tag{3}$$

hoặc

$$f(t, x, y, z) = 0. \tag{4}$$

Ta có liên kết hữu hạn nhưng không dừng.

Ví dụ 1.5. Hai chất điểm được gắn vào hai đầu một thanh rắn, chiều dài l (hình 1.3). Trong trường hợp này, phương trình của liên kết có dạng

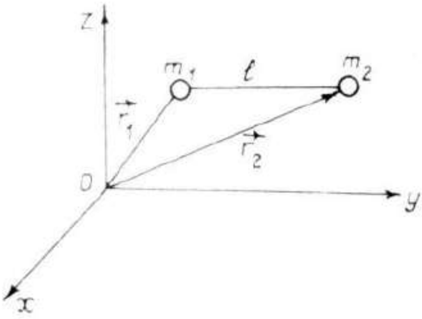
$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - l^2 = 0 \tag{5}$$

hoặc

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0. \tag{6}$$

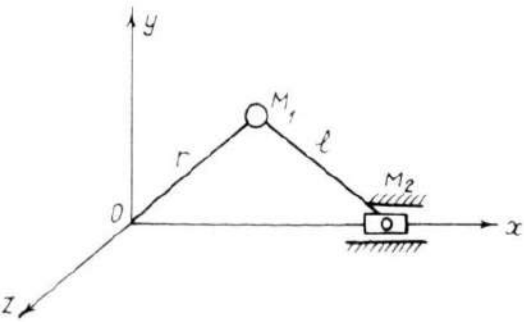
Nếu l không đổi, ta có hệ hôlônôm và sclêrônôm. Nếu l thay đổi theo thời gian $l = f(t)$, ta có hệ hôlônôm và rêônôm.

Nhận xét rằng vật tuyệt đối rắn là một hệ chất điểm mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của nó là không đổi, nghĩa là thỏa mãn phương trình liên kết (5). Vậy vật tuyệt đối rắn tự do là trường hợp riêng của hệ chất điểm hôlônôm và sclêrônôm.



Hình 1.3
Hai chất điểm m_1, m_2 được gắn vào hai đầu của thanh cứng m_1, m_2

Ví dụ 1.6. Xét cơ cấu tay quay- thanh truyền chuyển động trong mặt phẳng (x, y).



Hình 1.4
Cơ cấu tay quay (OM_1) - thanh truyền (M_1M_2)

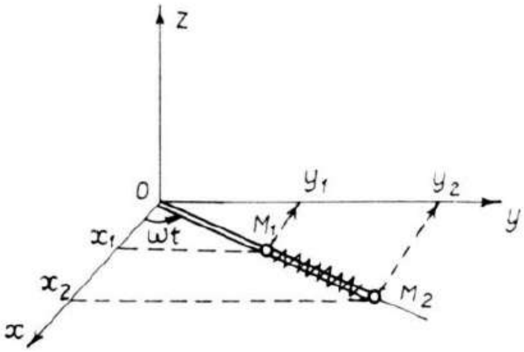
Gọi x_1, y_1, z_1 là các tọa độ của điểm M_1 và x_2, y_2, z_2 là tọa độ của điểm M_2. Ta có phương trình liên kết sau đây:

$$z_1 = z_2 = 0, \quad y_2 = 0,$$

$$x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0,$$
$$(x_2 - x_1)^2 + y_1^2 - l^2 = 0.$$

Đây là các liên kết hôlônôm.

Ví dụ 1.7. Một thanh quay quanh trục thẳng đứng Oz với vận tốc góc không đổi ω. Trên thanh có hai chất điểm chuyển động M_1 và M_2 được nối với nhau bởi một lò xo.



Hình 1.5

Thanh OM_2 quay trong mặt phẳng ngang oxy, quanh trục thẳng đứng Oz

Trong trường hợp này ta có các liên kết hôlônôm, không dừng bởi vì thời gian t có mặt trong các phương trình liên kết:

$$x_1 \sin\omega t - y_1 \cos\omega t = 0,$$
$$x_2 \sin\omega t - y_2 \cos\omega t = 0,$$
$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 0,$$

trong đó x_i, y_i, z_i là tọa độ của điểm M_i, $i = 1, 2$.

Ví dụ 1.8. Hai chất điểm được gắn vào hai đầu của một thanh có chiều dài l không đổi. Chúng chuyển động trong mặt phẳng x, y sao cho vận tốc của điểm giữa của thanh hướng dọc theo thanh. Các phương trình liên kết có dạng:

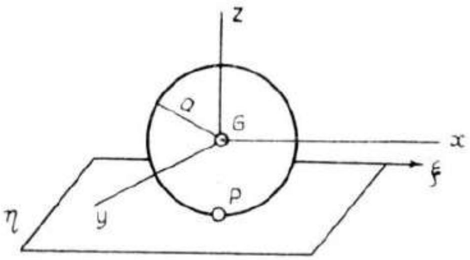
$$z_1 = z_2 = 0,$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0,$$

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2}.$$

Hệ khảo sát là phi hôlônôm vì phương trình cuối cùng xác định liên kết vi phân không khả tích.

Ví dụ 1.9. Quả cầu bán kính a lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang.



Hình 1.6
Quả cầu lăn không trượt trên mặt phẳng ngang

Điều kiện lăn không trượt của quả cầu là điểm P - tiếp điểm của nó với mặt nằm ngang - phải là tâm quay tức thời của quả cầu. Nghĩa là vận tốc tuyệt đối của điểm P phải bằng không. Gọi ξ, η là các toạ độ của tâm G của quả cầu. Vận tốc theo $\vec{v}_e$ của quả cầu có các thành phần $\dot{\xi}, \dot{\eta}$: Ký hiệu φ, ψ, θ là các góc Ơle xác định chuyển động quay của quả cầu quanh tâm G; p, q, r là hình chiếu của vận tốc góc tức thời của quả cầu trên hệ trục động $Gxyz$ gắn với quả cầu. Giữa p, q, r và các góc φ, ψ, θ có mối liên hệ :

$$p = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,$$
$$q = -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi.$$

Vận tốc tương đối của điểm P là

$$\vec{v_R} = \vec{\omega} \times \vec{GP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix}$$

Vì vận tốc tuyệt đối của điểm P bằng không nên $\vec{v}_R = -\vec{v}_e$:

$$\dot{\xi} = qa, \ \dot{\eta} = -pa$$

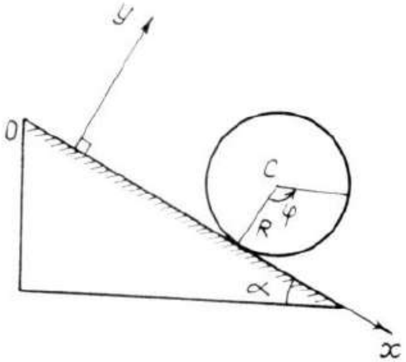
hoặc

$$\dot{\xi} + a\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - a\dot{\theta}\sin\psi = 0, \tag{1}$$
$$\dot{\eta} + a\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + a\dot{\theta}\cos\psi = 0. \tag{2}$$

Các liên kết này là không khả tích. Thực vậy, phương trình (1) không thể đưa được về dạng $\dfrac{d}{dt}f(\xi, \varphi, \psi, \theta) = 0$ vì rằng trong đó chỉ có mặt ψ, còn $\dot{\psi}$ thì vắng mặt. Tương tự như vậy đối với phương trình (2). Trong trường hợp này, ta có các liên kết phi hôlônôm.

Ví dụ 1.10. Khối hình trụ bán kính R lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng một góc α so với đường nằm ngang. Vị trí của hình trụ được xác định bởi hoành độ x_c của trọng tâm C của nó và bởi góc quay φ. Ta có $v_c = R\omega$ hoặc $\dot{x}_c = R\dot{\varphi}$. Đây là một liên kết vi phân, song phương trình cuối cùng có thể tích phân được và cho

$$x_c = R\varphi.$$



Hình 1.7
Khối trụ lăn trên mặt phẳng nghiêng

Phương trình liên kết chỉ chứa các toạ độ, không chứa vận tốc. Do vậy, liên kết trong trường hợp này là hôlônôm.

1.2. DI CHUYỂN KHẢ DĨ. DI CHUYỂN ẢO. BẬC TỰ DO CỦA CƠ HỆ. CÔNG ẢO

Các khái niệm về di chuyển khả dĩ và di chuyển ảo của các điểm của cơ hệ là những khái niệm cơ bản của Cơ học giải tích. Trước hết, ta đưa ra các khái niệm này cho một chất điểm.

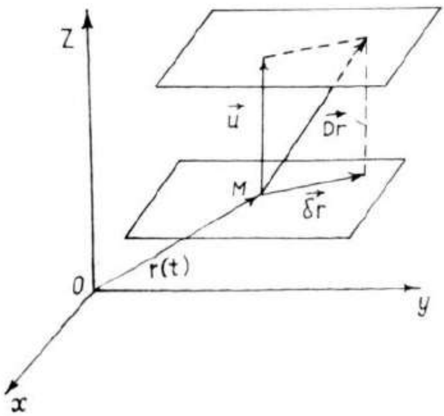
Di chuyển khả dĩ từ một vị trí xác định của một chất điểm là di chuyển vô cùng nhỏ phù hợp với liên kết và diễn ra trong khoảng thời gian vô cùng nhỏ . **Di chuyển thực** trong khoảng thời gian vô cùng nhỏ là một trong các di chuyển khả dĩ.

Di chuyển ảo của một chất điểm là di chuyển vô cùng nhỏ $\delta\vec{r}$, phù hợp với liên kết tại thời điểm đang xét (nghĩa là trong phương trình liên kết, thời gian t được xem như cố định: $t = const, dt = 0$).

Tại thời điểm này ta tạm cho các liên kết dừng lại, không thay đổi. Do đó, khái niệm di chuyển ảo của cơ hệ là một khái niệm thuần túy hình học, đặc trưng cho cấu trúc của các liên kết ràng buộc cơ hệ tại một thời điểm đã cho.

Nếu liên kết không phụ thuộc vào thời gian (liên kết dừng) thì các di chuyển ảo sẽ trùng với các di chuyển khả dĩ.

Ví dụ 1.11. Xét một điểm M di chuyển trên sàn thang máy đang chạy lên trên với vận tốc $\vec{u}$ (hình 1.8). Ở đây ta có liên kết (thang máy) không dừng. Di chuyển ảo $\delta\vec{r}$ của điểm M là tập hợp tất cả các di chuyển vô cùng nhỏ của M trên mặt sàn thang máy (lúc này thang máy được xem như bị dừng lại). Di chuyển thực $D\vec{r}$ của điểm M là tổng hợp của hai di chuyển: Di chuyển $\delta\vec{r}$ trên sàn thang máy của M và di chuyển $\vec{u}$ lên phía trên của thang máy.



Hình 1.8

Sàn thang máy chạy lên phía trên. Điểm M di chuyển trên sàn

$D\vec{r}$ là di chuyển thực của M, còn $\delta\vec{r}$ là một trong các di chuyển ảo của M.

Ta chuyển sang các biểu thức giải tích của các di chuyển khả dĩ và di chuyển ảo. Giả thử rằng chất điểm M chịu liên kết cho bởi phương trình:

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{1.4}$$

Đây là phương trình của một mặt $\sum$ di động trong không gian x, y, z (chẳng hạn, sàn thang máy trong ví dụ trên).

Di chuyển thực. Giả thử chuyển động của điểm M dưới tác dụng của các lực và với điều kiện đầu về vị trí x_0, y_0, z_0 và vận tốc $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, tại thời điểm $t = t_0$, được xác định bởi bán kính véc tơ $\vec{r}(t)$ hoặc bởi các tọa độ x, y, z của điểm M:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.5}$$

Thay (1.5) vào (1.4) ta được đồng nhất thức:

$$f[x(t), y(t), z(t), t] \equiv 0.$$

Lấy đạo hàm của đồng nhất thức này theo thời gian ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{1.6}$$

Các tọa độ đầu x_0, y_0, z_0 và vận tốc đầu $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ phải thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \dot{x}_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \dot{y}_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \dot{z}_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0 = 0, \tag{1.7}$$

trong đó chỉ số o có nghĩa là các đạo hàm được tính tại các giá trị $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $t = t_0$.

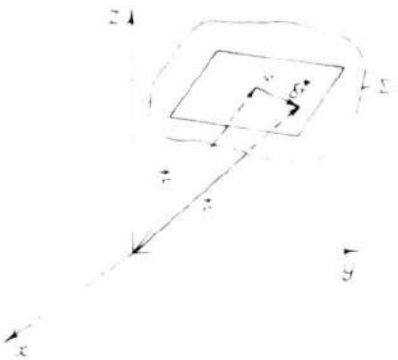
Biểu thức (1.6) là điều kiện mà các thành phần của **vận tốc thực** $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ của chất điểm M phải thỏa mãn. **Di chuyển thực** $D\vec{r}$ của chất điểm là vectơ

$$D\vec{r} = \vec{v}dt.$$

Hình chiếu của vectơ di chuyển thực $Dx = \dot{x}dt$, $Dy = \dot{y}dt$, $Dz = \dot{z}dt$ trên các trục tọa độ phải thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial f}{\partial x}Dx + \frac{\partial f}{\partial y}Dy + \frac{\partial f}{\partial z}Dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0, \tag{1.8}$$

thu được từ (1.6) bằng cách nhân cho dt.



Hình 1.9

Di chuyển ảo $\delta\vec{r}$ nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với $\sum$, tại M

Một vectơ $d\vec{r}$ bất kỳ với các thành phần dx, dy, dz:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k},$$

thỏa mãn phương trình (1.8) được gọi là **vectơ di chuyển khả dĩ**. Ở đây ta thấy di chuyển thực của chất điểm là một trong các di chuyển khả dĩ, ứng với những điều kiện đầu đã cho ($x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ tại t_0). Sau này, ta cũng dùng ký hiệu $d\vec{r}$ để chỉ di chuyển thực.

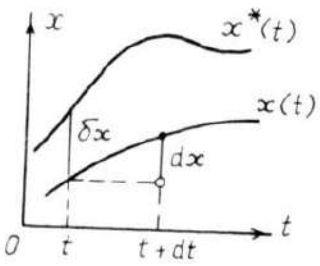
Di chuyển ảo. Xét tập hợp các vị trí M' của điểm M rất gần với vị trí của nó tại thời điểm cố định t và phù hợp với liên kết tại thời điểm cố định này. Vị trí M tại thời điểm cố định t được xác định bởi bán kính vectơ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, còn các vị trí M' được xác định bởi bán kính vectơ $\vec{r}'(t)$:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \delta\vec{r} = (x + \delta x)\vec{i} + (y + \delta y)\vec{j} + (z + \delta z)\vec{k},$$

trong đó $\delta x, \delta y, \delta z$ là những hình chiếu trên trục Ox, Oy, Oz của véctơ $\delta\vec{r}$:

$$\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}.$$

Vectơ $\delta\vec{r}$ là số gia vô cùng bé của bán kính vectơ $\vec{r}$ trong di chuyển tưởng tượng của điểm M từ vị trí xác định bởi vectơ $\vec{r}(t)$ sang vị trí xác định bởi vectơ $\vec{r}'(t)$. Véc tơ $\delta\vec{r}$ được gọi là **vectơ di chuyển ảo**. Người ta còn gọi $\delta\vec{r}$ là biến phân (variation) của vectơ $\vec{r}$, còn các hình chiếu của chúng $\delta x, \delta y, \delta z$ được gọi là các biến phân của tọa độ. Biến phân δx của hàm $x(t)$ là số gia nhỏ của x, khi thời gian t không đổi, là kết quả của sự biến đổi của bản thân hàm $x(t)$, nghĩa là sự chuyển từ hàm $x(t)$ sang hàm $x^*(t)$ gần với $x(t)$. Trên hình 1.10 chỉ rõ sự khác nhau giữa vi phân dx và biến phân δx của hàm $x(t)$.



Hình 1.10
Sự khác nhau giữa biến phân δx (thời gian bất biến) và vi phân dx

Các hình chiếu $x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z$, của vectơ $\vec{r}'(t)$ phải thỏa mãn phương trình liên kết (1.4), trong đó t được xem là hằng số:

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t) = 0.$$

Bỏ qua các số hạng vô cùng bé cao hơn 1 đối với $\delta x, \delta y, \delta z$ ta có điều kiện ràng buộc đối với các biến phân của tọa độ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0. \quad (1.9)$$

Vì rằng khi tìm biểu thức (1.9) ta đã coi thời gian t là không đổi, nên các biến phân $\delta x, \delta y, \delta z$ được gọi là **các biến phân đẳng thời.**

Nếu liên kết là dừng, nghĩa là thời gian t không có mặt rõ trong (1.4) thì các thành phần hình chiếu của các di chuyển khả dĩ (dx, dy, dz) thỏa mãn phương trình dạng (1.8):

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0. \quad (1.10)$$

So sánh (1.9) và (1.10) ta thấy trong trường hợp này tập hợp các vectơ di chuyển khả dĩ trùng với tập hợp các vectơ di chuyển ảo.

Điều kiện (1.9) có ý nghĩa hình học như sau. Tại một thời điểm t xác định, phương trình $f(x, y, z, t) = 0$ biểu diễn một mặt cố định. Điều kiện (1.9) cho thấy các vectơ di chuyển ảo $\delta\vec{r}$ nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt đã cho tại điểm ứng với vị trí của M tại thời điểm t (xem hình 1.9).

Đối với hệ chất điểm ta cũng có các định nghĩa tương tự như với một chất điểm. Nếu liên kết đặt vào hệ N chất điểm được mô tả bởi α phương trình:

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \quad (j = 1, \ldots, \alpha), \quad (1.11)$$

thì **các di chuyển khả dĩ** của hệ N chất điểm là các vectơ

$$d\vec{r}_s = dx_s\vec{i} + dy_s\vec{j} + dz_s\vec{k}, \quad (s = 1, \cdots, N).$$

mà các thành phần hình chiếu của chúng dx_s, dy_s, dz_s thỏa mãn α phương trình

$$\sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_s}dx_s + \frac{\partial f_j}{\partial y_s}dy_s + \frac{\partial f_j}{\partial z_s}dz_s\right) + \frac{\partial f_j}{\partial t}dt = 0, \quad (j = 1, \cdots, \alpha). \tag{1.12}$$

Các di chuyển ảo của hệ N chất điểm, chịu α liên kết (1.11) là tập hợp các vectơ vô cùng bé

$$\delta\vec{r}_s = \delta x_s\vec{i} + \delta y_s\vec{j} + \delta z_s\vec{k},$$

mà các hình chiếu của chúng δx_s, δy_s, δz_s thỏa mãn hệ phương trình:

$$\sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\delta x_s + \frac{\partial f_j}{\partial y_s}\delta y_s + \frac{\partial f_j}{\partial z_s}\delta z_s\right) = 0, \quad (j = 1, \cdots, \alpha). \tag{1.13}$$

Nhận xét rằng, với các liên kết dừng thì các phương trình (1.12) có dạng

$$\sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_s}dx_s + \frac{\partial f_j}{\partial y_s}dy_s + \frac{\partial f_j}{\partial z_s}dz_s\right) = 0, \quad (j = 1, \cdots, \alpha). \tag{1.14}$$

So sánh (1.13) và (1.14) ta thấy, với các liên kết dừng thì các di chuyển khả dĩ trùng với các di chuyển ảo.

Hệ N chất điểm có $3N$ biến phân tọa độ δx_s, δy_s, δz_s, $s = 1, \ldots, N$. Tuy nhiên, các biến phân tọa độ này phụ thuộc nhau thông qua α ràng buộc (1.13). Nếu α phương trình này là độc lập với nhau, thì trong số $3N$ di chuyển ảo $\delta x_s, \delta y_s, \delta z_s$ sẽ chỉ có $n = 3N - \alpha$ di chuyển độc lập. Số n được gọi là **số bậc tự do** của cơ hệ đã cho. Như vậy, **bậc tự do của cơ hệ là số tối đa các di chuyển ảo độc lập của cơ hệ đó.**

Như sẽ thấy sau này, với các hệ chịu liên kết hôlônôm, số các tọa độ độc lập để định vị của hệ cũng chính là số bậc tự do của hệ. Còn với các hệ chịu liên kết phi hôlônôm số các tọa độ độc lập để định vị của hệ lớn hơn số bậc tự do của hệ. Số bậc tự do n liên hệ với số các liên kết hôlônôm α, và số các liên kết phi hôlônôm β bởi hệ thức:

$$n = 3N - \alpha - \beta.$$

trong đó N là số chất điểm của hệ.

Ví dụ 1.12. Con lắc đơn là hệ cơ học có một bậc tự do. Để xác định vị trí của con lắc chỉ cần một thông số, chẳng hạn góc lệch φ.

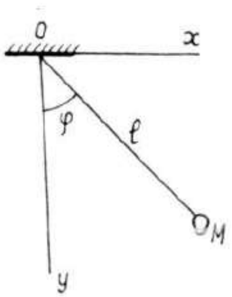
Về mặt giải tích, ta có phương trình liên kết sau đây :

$$x^2 + y^2 = l^2,$$

và hệ thức (1.9) có dạng :

$$2x\delta x + 2y\delta y = 0.$$

Do vậy, trong hai biến phân δx, δy chỉ có một biến phân độc lập.

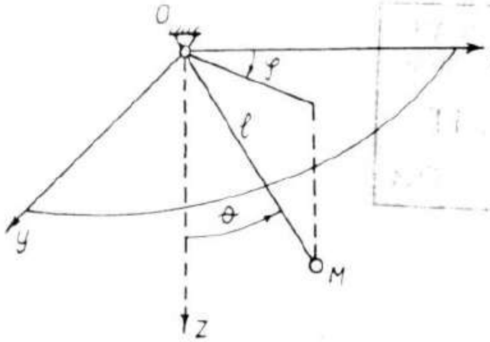


Hình 1.11

Con lắc đơn chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng

Ví dụ 1.13. Con lắc cầu là một cơ hệ có hai bậc tự do.

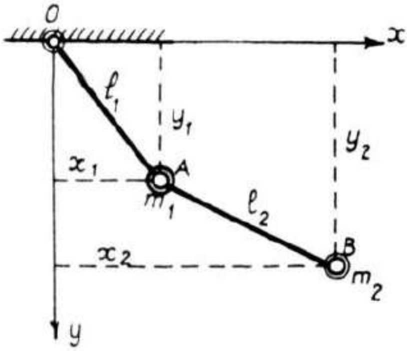
Thực vậy, vị trí của con lắc chiều dài l có thể được xác định bởi hai góc $q_1 = \theta$ và $q_2 = \varphi$. Khi đó, các tọa độ Đề các x, y, z của điểm M sẽ là:



Hình 1.12
Con lắc cầu gồm điểm nặng M treo vào sợi dây OM

$$x = l\sin\theta\cos\varphi = l\sin q_1\cos q_2,$$
$$y = l\sin\theta\sin\varphi = l\sin q_1\sin q_2,$$
$$z = l\cos\theta = l\cos q_1.$$

Ví dụ 1.14. Với con lắc kép có hai chất điểm m_1, m_2, ta có $N = 2$. Con lắc chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy nên:



Hình 1.13
Con lắc kép tạo thành từ hai con lắc đơn :
OA quay quanh O và AB quay quanh A

$$f_1 = z_1 = 0,$$
$$f_2 = z_2 = 0.$$

Ngoài ra, các chiều dài OA và AB của các thanh là không đổi, nên ta còn có các liên kết:

$$f_3 = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0,$$
$$f_4 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0.$$

Ở đây liên kết đều là hôlônôm. Vậy $p = 4, q = 0$ và ta có:

$$n = 3N - p - q = 6 - 4 = 2.$$

Hệ có hai bậc tự do.

Ví dụ 1.15. Với cơ cấu phẳng ta có thể xác định bậc tự do của nó như sau. Ta hình dung cơ cấu đang chuyển động. Nếu ta dừng chuyển động tịnh tiến hoặc chuyển động quay của một khâu nào đó mà toàn bộ cơ cấu dừng lại, thì cơ cấu đó có một bậc tự do. Trong trường hợp ta làm như vậy mà một bộ phận của cơ cấu vẫn còn tiếp tục chuyển động, nhưng nếu dừng tiếp một khâu khác của cơ cấu mà toàn bộ cơ cấu dừng lại, thì cơ cấu đó có hai bậc tự do v...v...

1.3. LIÊN KẾT LÝ TƯỞNG

Công ảo. Nếu ở một vị trí đã cho và tại một thời điểm t cố định, hệ N chất điểm chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$, còn các di chuyển ảo của các chất điểm của hệ là $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \cdots, \delta\vec{r}_N$, thì biểu thức

$$\delta A = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \delta\vec{r}_s. \tag{1.15}$$

hoặc

$$\delta A = \sum_{s=1}^{N}(X_s\delta x_s + Y_s\delta y_s + Z_s\delta z_s). \qquad (1.16)$$

được gọi là công ảo (công của các lực trong di chuyển ảo của hệ), trong đó X_s, Y_s, Z_s là những hình chiếu của lực $\vec{F}_s$ trên các trục tọa độ Đềcac.

Liên kết lý tưởng là những liên kết giữ, mà công ảo của tất cả các phản lực liên kết trong di chuyển ảo bất kỳ của hệ bằng không; nghĩa là

$$\sum_{s=1}^{N}\vec{R}_s.\delta\vec{r}_s = 0, \qquad (1.17)$$

trong đó $\vec{R}_s$ là phản lực liên kết đặt lên điểm thứ s.

Xuất phát từ (1.17) ta sẽ biểu diễn các phản lực liên kết nhờ các thừa số bất định của Lagrăng. Viết điều kiện (1.17) dưới dạng

$$\sum_{s=1}^{N}(X_s\delta x_s + Y_s\delta y_s + Z_s\delta z_s) = 0. \qquad (1.18)$$

Lưu ý rằng các biến phân của tọa độ $\delta x_s, \delta y_s, \delta z_s$ thỏa mãn hệ phương trình (1.13). Ta nhân lần lượt các phương trình (1.13) với các thừa số bất định Lagrăng $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, trong đó λ_j có thể là những hàm của tọa độ và thời gian, sẽ được :

$$\sum_{s=1}^{N}\lambda_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\delta x_s + \frac{\partial f_j}{\partial y_s}\delta y_s + \frac{\partial f_j}{\partial z_s}\delta z_s\right) = 0. \quad (j = 1, \cdots, \alpha).$$

Cộng các phương trình này lại với nhau ta có

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\delta x_s\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_s} + \delta y_s\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial y_s} + \delta z_s\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial z_s}\right] = 0. \quad (1.19)$$

Trừ các biểu thức (1.18) và (1.19) với nhau ta được:

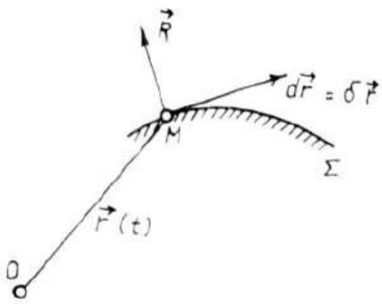
$$\sum_{s=1}^{N}\left[\delta x_s\left(X_s-\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\right)+\delta y_s\left(Y_s-\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial y_s}\right)+\right.$$

$$\left.+\delta z_s\left(Z_s-\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial z_s}\right)\right]=0. \tag{1.20}$$

Như đã nói ở trên, số các biến phân độc lập của các tọa độ bằng $3N-\alpha$, nên ta sẽ lựa chọn các thừa số Lagrăng $\lambda_1,\ldots,\lambda_\alpha$ sao cho các hệ số của α biến phân của các tọa độ bằng không. Khi đó, trong phương trình (1.20) còn lại $3N-\alpha$ biến phân tọa độ độc lập, và do vậy, hệ số của chúng phải bằng không. Vậy là, ta có:

$$X_s=\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_s},\quad Y_s=\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial y_s},\quad Z_s=\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial z_s}. \tag{1.21}$$

Ví dụ 1.16. Chất điểm M buộc phải chuyển động trên mặt nhẵn $\sum$ cố định (Hình 1.14).

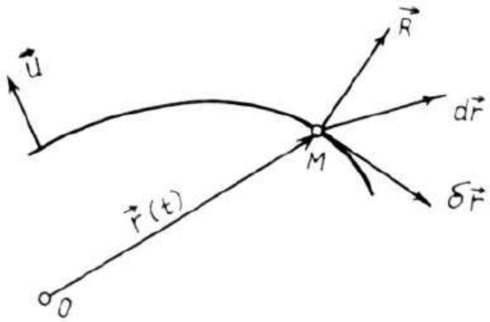


Hình 1.14
Khi mặt $\sum$ cố định,
di chuyển ảo $\delta\vec{r}$ trùng với di chuyển khả dĩ $d\vec{r}$

Trong trường hợp này **di chuyển khả dĩ** $d\vec{r}$ của chất điểm trùng với di chuyển ảo $\delta\vec{r}$, nằm trong mặt phẳng tiếp xúc với mặt Σ tại điểm M, còn phản lực $\vec{R}$ của mặt nhẵn hướng theo pháp tuyến với mặt Σ tại điểm M. Do vậy ta luôn luôn có

$$\vec{R}d\vec{r} = \vec{R} \cdot \delta\vec{r} = 0.$$

Ví dụ 1.17. Chất điểm M buộc phải di chuyển trên một mặt nhẵn $\sum$ di động (Hình 1.15).



Hình 1.15
Khi mặt $\sum$ di động, di chuyển ảo $\delta\vec{r}$ (nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với $\sum$) không trùng với di chuyển khả dĩ $d\vec{r}$

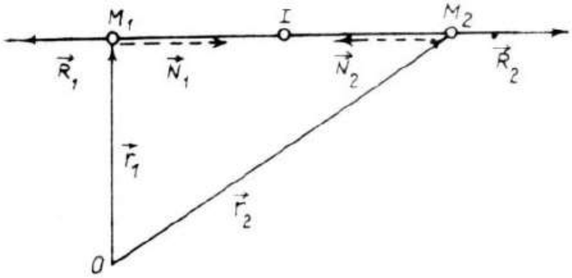
Bây giờ di chuyển khả dĩ $d\vec{r} = \vec{v}dt$ của chất điểm không còn nằm trong mặt phẳng tiếp xúc. Di chuyển ảo $\delta\vec{r}$ là di chuyển vô cùng nhỏ của chất điểm khi mặt (liên kết) bị "dừng lại", hoặc bị "đóng băng" lại, và do vậy $\delta\vec{r}$ nằm trong mặt phẳng tiếp xúc. Do phản lực của mặt vẫn hướng theo pháp tuyến với mặt, mặc cho nó di động, nên $\vec{R}\,\delta\vec{r} = 0$ (trong khi $\vec{R}\,d\vec{r} \neq 0$).

Qua hai ví dụ trên đây ta thấy, **mặt nhẵn** dù cố định hay di động đều **là liên kết lý tưởng**.

Ví dụ này giải thích rằng vì sao khi định nghĩa các liên kết lý tưởng không dừng ta lại cho bằng không công của các phản lực liên kết trong những di chuyển ảo tùy ý, chứ không phải trong các di chuyển khả dĩ.

Các ví dụ tiếp sau đây chỉ nói về các liên kết dừng (không phụ thuộc rõ vào thời gian).

Ví dụ 1.18. Hai chất điểm nối với nhau bằng một thanh cứng, chiều dài không đổi và có trọng lượng không đáng kể.



Hình 1.16

Hai chất điểm M_1 và M_2 gắn vào hai đầu của thanh cứng M_1M_2

Gọi $\vec{R}_1$ và $\vec{R}_2$ là những phản lực liên kết đặt vào các điểm M_1 và M_2. Khi đó, theo định luật về tác dụng và phản tác dụng của Niutơn, thanh sẽ chịu tác dụng của các lực : $\vec{N}_1 = -\vec{R}_1$, $\vec{N}_2 = -\vec{R}_2$. Các lực $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ đối nghịch nhau và các phản lực $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ cũng đối nghịch nhau, hướng dọc theo thanh. Vì liên kết là dừng, ta có:

$$\vec{R}_1\delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2\delta\vec{r}_2 = \vec{R}_1 d\vec{r}_1 + \vec{R}_2 d\vec{r}_2 = \vec{R}_2(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{R}_2 d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

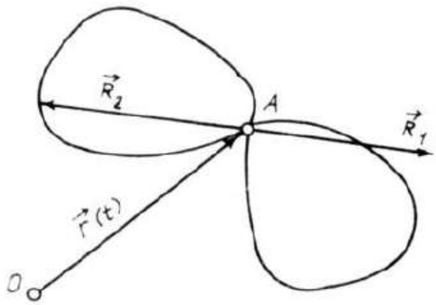
Giả thử $\vec{R}_2 = c(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Khi đó:

$$\vec{R}_1\delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2\delta\vec{r}_2 = c(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{c}{2}d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 = 0,$$

vì: $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 - l^2 = const$. Ta có liên kết lý tưởng.

Vật tuyệt đối rắn là hệ chất điểm, trong đó giữa hai điểm bất kỳ có liên kết lí tưởng thuộc loại vừa khảo sát. Vì vậy, có thể xem vật tuyệt đối rắn là hệ chất điểm có liên kết lí tưởng.

Ví dụ 1.19. Hai vật tuyệt đối rắn được gắn bản lề với nhau tại điểm A. Bỏ qua khối lượng và kích thước của bản lề, có thể khẳng định như trong ví dụ trước là $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0$. Khi đó, $\vec{R}_1\delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2\delta\vec{r}_2 = (\vec{R}_1 + \vec{R}_2)\delta\vec{r} = 0$. Ta có trường hợp liên kết lí tưởng.

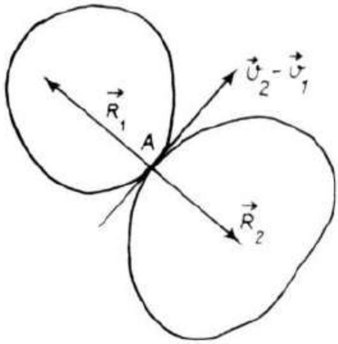


Hình 1.17
Hai vật rắn được gắn bản lề tại A

Ví dụ 1.20. Hai vật tuyệt đối rắn chuyển động tựa vào nhau bởi các mặt hoàn toàn nhẵn (không có ma sát giữa hai mặt).

Trong trường hợp này ta lại có: $\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0$ và các lực $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ hướng theo pháp tuyến chung với hai mặt tại điểm tiếp xúc. Mặt khác, vận tốc tương đối của các vật tại điểm tiếp xúc $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ và hiệu các dịch chuyển khả dĩ $d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1 = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)dt$ đều nằm trong mặt phẳng tiếp xúc, nghĩa là $\vec{R}_2 \perp d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1$. Do vậy,

$$\vec{R}_1\delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2\delta\vec{r}_2 = \vec{R}_1 d\vec{r}_1 + \vec{R}_2 d\vec{r}_2 = \vec{R}_2(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = 0.$$



Hình 1.18

Hai vật tuyệt đối rắn tựa lên nhau tại A

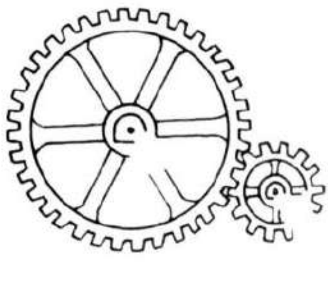
Ví dụ 1.21. Hai vật rắn chuyển động tựa vào nhau bởi các bánh răng ăn khớp lý tưởng (vận tốc trượt tương đối giữa các răng bằng không). Gọi $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ là vận tốc của điểm tiếp xúc thuộc hai bánh răng, ta có $= \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 0$. Do vậy,

$$d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1 = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)dt = 0.$$

và

$$\vec{R}_1\delta\vec{r}_1 + \vec{R}_2\delta\vec{r}_2 = \vec{R}_1 d\vec{r}_1 + \vec{R}_2 d\vec{r}_2 = \vec{R}_2(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = 0.$$

Vậy liên kết là lí tưởng.



Hình 1.19

Hai bánh răng ăn khớp với nhau

Có thể xem một cơ cấu máy phức tạp bất kỳ như một hệ chất điểm chịu liên kết lí tưởng, nếu các khớp nối là tuyệt đối rắn, các bản lề là lí tưởng và các mặt tiếp xúc là hoàn toàn nhẵn hoặc là những bánh răng ăn khớp lí tưởng.

Nhận xét rằng trong nhiều trường hợp thực tế, việc lí tưởng hóa như vậy là không thể chấp nhận được. Khi đó, điều kiện lí tưởng hóa của các liên kết phải vứt bỏ và thay nó bằng những điều kiện khác, căn cứ vào đặc trưng của liên kết và các quy luật của ma sát. Tuy vậy, cũng có thể làm theo cách khác, coi các liên kết là lí tưởng khi chỉ kể đến các thành phần pháp tuyến của phản lực của các mặt không nhẵn, còn các lực ma sát được coi như những lực hoạt động chưa biết. Với cách làm như vậy, việc ứng dụng khái niệm liên kết lí tưởng trở nên phổ dụng trong thực tế.

1.4. TỌA ĐỘ, VẬN TỐC VÀ GIA TỐC SUY RỘNG

Việc Lagrăng đưa vào các toạ độ suy rộng để nghiên cứu các hệ cơ học đã chuyển động lực học từ một thế giới vật lý sang vương quốc toán học giải tích, đồng thời mở ra cách tiếp cận mới đối với bài toán tích phân chuyển động dựa trên các phép biến đổi toạ độ và các tích phân đầu của chuyển động.

Các thông số độc lập đủ để xác định vị trí của hệ cơ học được gọi là các **tọa độ suy rộng**. Chúng có thứ nguyên khác nhau : độ dài, góc,... và được ký hiệu là $q_1, q_2, \ldots, q_n$, để phân biệt với tọa độ Đềcác thông thường ký hiệu là x, y, z. Các tọa độ Đềcác cũng được biểu diễn qua các tọa độ suy rộng. Với điểm thứ k của cơ hệ xác định bởi tọa độ Đềcác x_k, y_k, z_k, ta có:

$$x_k = x_k(q_1, \ldots, q_n, t),$$
$$y_k = y_k(q_1, \ldots, q_n, t),$$
$$z_k = z_k(q_1, \ldots, q_n, t).$$

Tương tự như vậy, với bán kính vectơ định vị $\vec{r}_k$ của điểm đó ta có:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, \ldots, q_n, t).$$

Dưới đây ta sẽ xét (nếu không có ghi chú đặc biệt) các hệ hôlônôm, trong đó số các tọa độ độc lập định vị một hệ cơ học bằng số bậc tự do n của cơ hệ đó. Vì các tọa độ suy rộng $q_1, \ldots, q_n$ là độc lập với nhau nên các di chuyển ảo $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ cũng độc lập với nhau.

Đạo hàm theo thời gian của các tọa độ suy rộng $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ được gọi là **vận tốc suy rộng**. Đạo hàm cấp hai của các tọa độ suy rộng theo thời gian $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$ được gọi là các **gia tốc suy rộng**.

Như đã biết, vec tơ vận tốc $\vec{v}_k$ của điểm M_k là đạo hàm theo thời gian của bán kính vectơ $\vec{r}_k$ của điểm đó. Ta có:

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k(q_1, \ldots, q_n, t)}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}. \tag{1.22}$$

Từ đây suy ra:

$$\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}. \tag{1.23}$$

Công thức tương tự

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial f}{\partial q_s}$$

cũng đúng cho hàm khả vi $f = f(q_1, \ldots, q_n, t)$ của các tọa độ suy rộng.

Tương tự, di chuyển ảo tuỳ ý $\delta\vec{r}_i$ có thể được biểu diễn qua các biến phân δq_i bởi hệ thức :

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j.$$

Lưu ý rằng ở đây không xuất hiện biến phân của thời gian δt vì theo định nghĩa, trong di chuyển ảo người ta chỉ xét sự dịch chuyển của các toạ độ, coi thời gian t như không đổi.

Giả thử hệ N chất điểm chịu ràng buộc bởi α liên kết hình học

$$f_j(t, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = 0 \quad (j = 1, \cdots, \alpha). \tag{1}$$

Trong trường hợp này, các tọa độ Đềcác của các điểm của hệ không phải là độc lập với nhau vì $3N$ tọa độ x_k, y_k, z_k bị ràng buộc với nhau bởi α phương trình độc lập (1). Giải các phương trình này đối với α tọa độ nào đó, ta biểu diễn α tọa độ này qua $n = 3N - \alpha$ tọa độ còn lại. Số n tọa độ này có thể lấy những giá trị tùy ý và xác định vị trí các chất điểm của hệ. Số n là số bậc tự do của cơ hệ.

Nhận xét rằng việc giải hệ α phương trình (1) chỉ có thể thực hiện được đối với các tọa độ, mà với chúng định thức hàm Giacôbi (Jacobien) sau đây khác không:

$$D = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial u_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial u_\alpha} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_\alpha} & \cdots & \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial u_\alpha} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

trong đó $u_1, \cdots, u_\alpha$ là những tọa độ Đêcác, mà với chúng định thức D khác không.

Biểu thức động năng của hệ trong tọa độ và vận tốc suy rộng.

Với hệ rêônôm (hệ chịu liên kết phụ thuộc vào thời gian) gồm N chất điểm với các toạ độ $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)(i = 1, ..., N)$ ta có biểu thức động năng :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 + \dot{z}_j^2) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j(\dot{\vec{r}}_j)^2 = T_0 + T_1 + T_2, \tag{1.24}$$

trong đó T_0 là hàm bậc không đối với các vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$

$$T_0 = T_0(t, q_1, \ldots, q_n) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t}\right)^2,$$

T_1 là hàm tuyến tính đối với các vận tốc suy rộng:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} B_i \dot{q}_i.$$

$$B_i(t, q_1, \ldots, q_n) = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}.$$

còn T_2 là hàm bậc hai của các vận tốc suy rộng:

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k.$$

$$A_{ik}(t, q_1, \ldots, q_n) = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_k}.$$

Từ đây ta suy ra tính đối xứng của hệ số A_{ik}:

$$A_{ik} = A_{ki} \quad (i, k = 1, \cdots, n).$$

Với hệ sclêrônôm, các **liên kết là dừng**, $\vec{r}_j$ không phụ thuộc rõ vào thời gian. Khi đó, rõ ràng là ta có:

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial t} = 0, \quad T_0 = 0, \quad B_i = 0, \quad T_1 = 0,$$

$A_{ik} = A_{ik}(q_1, \ldots, q_n)$ và biểu thức T có dạng bậc hai xác định dương của các vận tốc suy rộng:

$$T = T_2(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n). \tag{1.25}$$

1.5. LỰC SUY RỘNG

Xét một hệ cơ học gồm N chất điểm chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$. Giả thử hệ có n bậc tự do và vị trí của hệ được xác định bởi n tọa độ suy rộng $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Ta thực hiện một di chuyển ảo δq_1 của tọa độ q_1, trong khi các tọa độ còn lại giữ cho không đổi. Khi đó, bán kính vectơ $\vec{r}_k$ của chất điểm thứ k sẽ thực hiện di chuyển

$$(\delta\vec{r}_k)_1 = \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1.$$

Tổng công ảo của tất cả các lực tác dụng lên hệ trong di chuyển ảo đó là:

$$\delta A_1 = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k(\delta\vec{r}_k)_1 = \delta q_1\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1} = Q_1\,\delta q_1.$$

trong đó

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1}. \qquad (1.26)$$

Đại lượng Q_1 được gọi là **lực suy rộng tương ứng với tọa độ suy rộng** q_1. Tương tự như vậy, ta có lực suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng khác.

Nếu cho cơ hệ một di chuyển ảo, trong đó **tất cả** các tọa độ suy rộng đều dịch chuyển thì tổng công ảo của các lực tác dụng lên hệ sẽ là:

$$\delta' A = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k.\delta\vec{r_k} = \sum_{i,k}\vec{F}_k\cdot\frac{\partial\vec{r_k}}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i. \qquad (1.27)$$

ở đây Q_i là **những thành phần của lực suy rộng** :

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\cdot\frac{\partial\vec{r_k}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N}\left(X_k\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right). \qquad (1.28)$$
$$(i = 1, ..., n)$$

Chú ý rằng vì q_i không nhất thiết có thứ nguyên của chiều dài, nên Q_i không nhất thiết có thứ nguyên của lực, nhưng $Q_i\,\delta q_i$ luôn luôn phải có thứ nguyên của công.

Để tìm lực suy rộng, trước hết ta cần xác định số bậc tự do của cơ hệ và các tọa độ suy rộng, xác định các lực sẽ sinh công trong di chuyển ảo (kể cả lực ma sát). Sau đó, để tìm lực suy rộng Q_1 ta cho hệ thực hiện di chuyển ảo, trong đó chỉ tọa độ suy rộng q_1 thay đổi một số gia dương δq_1. Tổng công ảo của các lực tác dụng trong di chuyển ảo này chia cho δq_1 sẽ cho ta biểu thức của lực suy rộng tương ứng Q_1 ứng với tọa độ q_1. Tương tự như vậy sẽ tính được $Q_2, \ldots, Q_n$.

1.6. MỘT SỐ HỆ THỨC BIẾN PHÂN

Giữa các phép tính vi phân d và biến phân δ có tính giao hoán(qui tắc $d\delta = \delta d$). Thực vậy, trong khi tính biến phân δ thời gian t được xem như cố định nên

$$\delta dq_s(t,\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha} dq_s(t,\alpha).\delta\alpha = d\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} q_s(t,\alpha)\delta\alpha\right] = d\delta q_s(t,\alpha).$$

Chia hai vế cho dt và dùng ký hiệu $\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$ ta có :

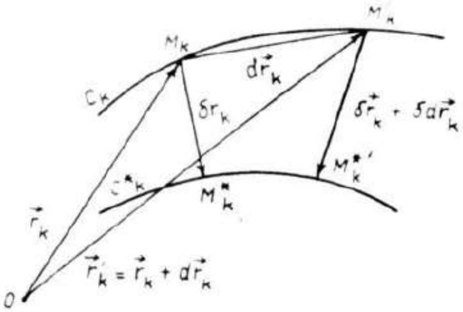
$$\delta\dot{q}_s - (\delta q_s)^{\cdot} = 0. \tag{1.29}$$

Khảo sát cơ hệ gồm N chất điểm. Điểm M_k của nó được xác định bởi bán kính vectơ $\vec{r}_k(q_1, \ldots, q_n, t)$.
Dịch chuyển vô cùng bé của điểm M_k trong chuyển động thực của hệ trong khoảng thời gian dt được xác định bởi vi phân

$$d\vec{r}_k = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s} dq_s + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t} dt. \tag{1.30}$$

Cùng với $d\vec{r}_k$ ta xét di chuyển ảo của điểm M_k, ký hiệu là $\delta\vec{r}_k$. Đó là vectơ vô cùng nhỏ thể hiện sự biến đổi của bán kính vectơ $\vec{r}_k$ từ vị trí đang xét sang một trong vô vàn (∞^n) vị trí ở lân cận vô cùng gần của $\vec{r}_k$ và phù hợp với các liên kết. Vectơ vô cùng bé $\delta\vec{r}_k$ được tính ở thời điểm t cố định với độ chính xác đến các lũy thừa bậc nhất đối với các biến phân δq_i:

$$\delta\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1 + \delta q_1, \cdots, q_n + \delta q_n, t) - \vec{r}_k(q_1, \cdots, q_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i. \tag{1.31}$$



Hình 1.20

Di chuyển của điểm M_k thuộc cơ hệ

Dưới đây ta sẽ coi các biến phân δq_i là những hàm khả vi của thời gian t. Lấy đạo hàm theo thời gian biểu thức (1.31) của di chuyển ảo, ta được

$$\begin{aligned}(\delta\vec{r}_k)^{\cdot} &= \sum_{s=1}^{n}\left[\delta q_s \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}\right)^{\cdot} + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}(\delta q_s)^{\cdot}\right] = \\ &= \sum_{s=1}^{n}\left[\delta q_s \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_s}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial t \partial q_s}\right) + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}(\delta q_s)^{\cdot}\right].\end{aligned} \tag{1.32}$$

Mặt khác, từ (1.30) ta có vectơ vận tốc của điểm M_k:

$$\vec{v}_k = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}.$$

Thực hiện phép tính biến phân biểu thức này ta được

$$\begin{aligned}\delta\vec{v}_k &= \sum_{i=1}^{n}\left[\dot{q}_i\delta\left(\frac{\vec{r}_k}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta\dot{q}_i\right] + \delta\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_s\partial q_i}\delta q_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}\delta\dot{q}_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2\vec{r}_k}{\partial q_s\partial t}\delta q_s.\end{aligned} \tag{1.33}$$

Lấy hiệu của các biểu thức (1.32) và (1.33) và chú ý đến (1.29), ta đi đến hệ thức

$$(\delta\vec{r}_k)^{\cdot} - \delta\vec{v}_k = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}[(\delta q_s)^{\cdot} - \delta\dot{q}_s] = 0.$$

hoặc dưới dạng vi phân:

$$d\delta\vec{r}_k - \delta d\vec{r}_k = 0, \ (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{1.34}$$

Chương II

CÁC NGUYÊN LÝ VI PHÂN

Nguyên lý công ảo. Nguyên lý Đalămbe. Phương trình tổng quát của động lực học. Nguyên lý Gauxơ.

Nguyên lý công ảo là một nguyên lý của tĩnh học, trong đó người ta nghiên cứu các điều kiện cân bằng của cơ hệ dưới tác dụng của các lực. Nguyên lý công ảo có ý nghĩa nền tảng đối với sự phát triển của cơ học. Lagrăng đã phát biểu nguyên lý tổng quát cho phép dễ dàng tìm được các điều kiện cân bằng của các hệ cơ học bất kỳ .

2.1. NGUYÊN LÝ CÔNG ẢO

Nguyên lý công ảo: Điều kiện cần và đủ để một cơ hệ chịu liên kết lí tưởng giữ và dừng được cân bằng tại một vị trí đã cho là tổng công ảo của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên hệ đều bằng không trong di chuyển ảo bất kỳ từ vị trí đã cho:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = 0. \tag{2.1}$$

Lực hoạt động ở đây được hiểu là mọi lực tác dụng lên hệ, trừ các lực liên kết.

Chứng minh điều kiện cần. Từ phương trình chuyển động $m_k\ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k$ suy ra rằng trong trường hợp cân bằng, vì gia tốc của tất cả các điểm đều bằng không nên

$$0 = \vec{F}_k + \vec{R}_k, \ (k = 1, 2, ..., N)$$

trong đó $\vec{R}_k$ là phản lực liên kết, $\vec{F}_k$ là lực hoạt động tác dụng lên chất điểm thứ k của cơ hệ (gồm N chất điểm).

Bây giờ cho hệ một di chuyển ảo $\delta\vec{r}_k$. Nhân đẳng thức sau cùng với $\delta\vec{r}_k$ và lấy tổng theo các điểm ta được

$$0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k\delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k\delta\vec{r}_k.$$

Vì các liên kết là lý tưởng nên tổng thứ hai bằng không. Do vậy, ta đã chứng minh được điều kiện cần:

$$0 = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k\delta\vec{r}_k. \tag{1}$$

Điều kiện đủ. Xuất phát từ giả thiết rằng tổng công của các lực hoạt động của hệ trong mọi di chuyển ảo là bằng không và hệ yên nghỉ ở thời điểm ban đầu t_0. Nói cách khác, có hệ thức (1) với $\vec{v}_k(t_0) = 0$, $k = 1, 2..., N$, các liên kết của hệ là dừng và giữ. Ta sẽ chứng minh rằng hệ sẽ tiếp tục ở trạng thái yên nghỉ.

Thực vậy, giả thử rằng hệ chuyển động. Theo định lý động năng của động lực học thì biến thiên động năng của hệ bằng tổng công nguyên tố của tất cả các lực hoạt động và phản lực liên kết tác dụng lên hệ. Tổng đó dương, vì rằng tại thời điểm ban đầu t_0 năng lượng của hệ bằng không và sau khoảng thời gian dt năng lượng dương:

$$dT = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k d\vec{r}_k > 0.$$

Song, vì các liên kết là dừng nên di chuyển thực $d\vec{r}_k (k = 1, 2, ..., N)$ trùng với một trong các di chuyển ảo $\delta\vec{r}_k (k = 1, 2, ..., N)$ và ta cũng có

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \delta\vec{r}_k > 0.$$

Vì các liên kết là lý tưởng ($\sum_{k=1}^{N} \vec{R}_k \delta\vec{r}_k = 0$) nên từ đây suy ra

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \delta\vec{r}_k > 0.$$

Điều này trái với giả thiết ban đầu $\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \delta\vec{r}_k = 0$ với mọi $t > t_0$. Do vậy, giả thiết hệ chuyển động là sai. Hệ khảo sát phải yên nghỉ.

Nguyên lý công ảo cho phép thiết lập điều kiện cân bằng tổng thể của cơ hệ, không cần xét sự cân bằng của từng bộ phận của hệ đó. Chú ý rằng nguyên lí công ảo còn đúng đối với các bài toán cơ học khi có ma sát, nếu ta đưa lực ma sát vào nhóm các lực hoạt động. Cũng bằng cách này ta có thể dùng nguyên lí công ảo để xác định phản lực liên kết nhờ giải phóng liên kết, thay liên kết bằng các phản lực liên kết. Song **cần chú ý rằng, sau khi giải phóng liên kết, số bậc tự do của cơ hệ khảo sát có thể thay đổi so với trước.**

Ví dụ 2.1. Điều kiện cân bằng của hệ vật rắn dưới tác dụng của trọng lực.

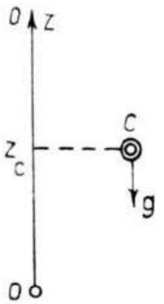
Gọi M là khối lượng của toàn hệ, z_c là tọa độ thẳng đứng của trọng tâm C của hệ (trục z hướng thẳng đứng lên trên). Khi đó ta có công ảo của trọng lực:

$$\delta A = -Mg\delta z_c.$$

Do vậy, điều kiện cân bằng của hệ theo nguyên lí công ảo là

$$\delta z_c = 0.$$

Vậy, vị trí cân bằng của hệ vật rắn là vị trí trong đó trọng tâm của hệ tương đối theo chiều thẳng đứng so với các vị trí lân cận chiếm vị trí thấp nhất, cao nhất hoặc một vị trí dừng. Đây chính là nguyên lí Torixơli.

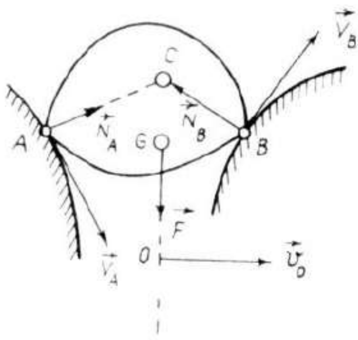


Hình 2.1

C là trọng tâm của hệ vật rắn

Ví dụ 2.2. Một vật rắn phẳng có thể trượt không ma sát, tựa hai điểm A, B của mình trên những đường cong cố định nằm trong một mặt phẳng thẳng đứng. Với lực tác dụng $\vec{F}$ như thế nào thì vật rắn sẽ cân bằng ?

Bài giải: Gọi 0 là một điểm nào đó nằm trên đường tác dụng của lực $\vec{F}$. Khi đó, từ điều kiện cân bằng $\delta A = \vec{F}\vec{v}_0 dt = 0$ suy ra rằng $\vec{v}_0 \perp \vec{F}$. Từ đây suy ra rằng tâm vận tốc tức thời của hình phẳng phải nằm trên đường tác dụng của lực $\vec{F}$. Vậy, vật rắn sẽ cân bằng nếu đường tác dụng của lực $\vec{F}$ đi qua tâm vận tốc tức thời của hình phẳng.

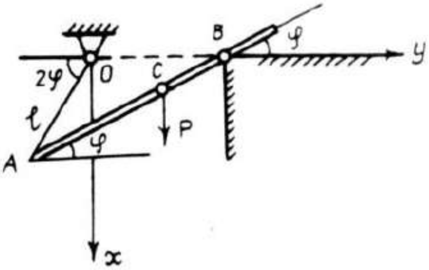


Hình 2.2
Vật rắn phẳng tựa trên hai đường cong cố định, nhẵn, nằm trong mặt phẳng thẳng đứng

Nhận xét: Ở đây các kết quả thu được phù hợp với các lập luận theo tĩnh học: có ba lực tác dụng lên vật rắn: ngoại lực $\vec{F}$ và các phản lực $\vec{N}_A, \vec{N}_B$ của các đường cong, hướng vuông góc với các đường cong đó. Vì hệ ba lực cân bằng nên chúng phải đồng qui. Từ đó suy ra lực $\vec{F}$ phải đi qua giao điểm C của hai lực $\vec{N}_A$ và $\vec{N}_B$. Điểm C cũng đồng thời là tâm quay tức thời của hình phẳng (các vận tốc của điểm A và B vuông góc với bán kính CA và CB). Lưu ý rằng lực $\vec{F}$ có thể có hướng và giá trị tùy ý, miễn rằng đường tác dụng của nó đi qua C.

Ví dụ 2.3. Một thanh nặng , đồng chất, chiều dài $2l$ tựa vào điểm B của góc tường. Đầu A của thanh được giữ bằng sợi dây AO, chiều dài l không giãn. Cho $OA = OB = l$. Hãy tìm góc φ tạo nên bởi thanh với đường nằm ngang khi hệ cân bằng. Coi thanh là nhẵn và các điểm O và B nằm trên đường ngang.

Bài giải: Ở đây, lực hoạt động tác dụng lên hệ chỉ là trọng lực P. Theo công thức (2.1), điều kiện cân bằng của thanh là:



Hình 2.3

Thanh nặng AB tựa trên góc tường

$$\vec{P}\delta\vec{r}_c = P\delta x_c = 0 \quad \text{hoặc} \quad \delta x_c = 0.$$

Vì

$$x_c = l\sin 2\varphi - l\sin\varphi,$$

nên

$$\delta x_c = l(2\cos 2\varphi - \cos\varphi)\delta\varphi = 0.$$

Do $\delta\varphi$ được lựa chọn tùy ý nên lấy $\delta\varphi \neq 0$ và vì vậy,

$$2\cos 2\varphi - \cos\varphi = 0.$$

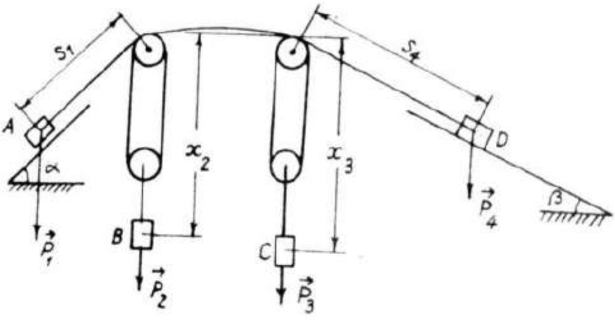
hoặc

$$4\cos^2\varphi - \cos\varphi - 2 = 0.$$

Từ đây tìm được

$$\cos\varphi = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \simeq 0,842, \;\; \varphi = \arccos(0,842).$$

Ví dụ 2.4. Tìm quan hệ giữa các trọng lượng P_1, P_2, P_3 và P_4 của các vật nặng A, B, C và D để hệ biểu diễn trên hình vẽ được cân bằng. Dây được giả thiết là không có trọng lượng và không giãn. Bỏ qua ma sát.



Hình 2.4
Hệ vật nặng treo vào các ròng rọc

Bài giải. Các đại lượng s_1, x_2, x_3, s_4 xác định vị trí của các vật nặng A,B,C,D. Các lực hoạt động ở đây là các trọng lực P_1, P_2, P_3, P_4. Theo nguyên lí công ảo, phương trình cân bằng (2.1) có dạng:

$$P_1 \sin\alpha\, \delta s_1 + P_2\, \delta x_2 + P_3\, \delta x_3 + P_4 \sin\beta\, \delta s_4 = 0. \qquad (1)$$

Từ điều kiện không giãn của dây ta có:

$$s_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_4 = const.$$

Do vậy:

$$\delta s_1 + 2\delta x_2 + 2\delta x_3 + \delta s_4 = 0.$$

Coi $\delta x_2, \delta x_3, \delta s_1$ là những biến độc lập ta có:

$$\delta s_4 = -(\delta s_1 + 2\delta_2 + 2\delta x_3). \qquad (2)$$

Thay thế biểu thức (2) vào (1) ta được:

$$(P_1 \sin\alpha - P_4 \sin\beta)\delta s_1 + (P_2 - 2P_4 \sin\beta)\delta x_2 + (P_3 - 2P_4 \sin\beta)\delta x_3 = 0.$$

Vì $\delta s_1, \delta x_2, \delta x_3$ độc lập với nhau nên suy ra các hệ thức mà P_1, P_2, P_3, P_4 phải thỏa mãn:

$$P_1 \sin\alpha - P_4 \sin\beta = 0, \quad P_2 - 2P_4 \sin\beta = 0, \quad P_3 - 2P_4 \sin\beta = 0,$$

hoặc

$$P_2 = P_3, \quad P_1 \sin\alpha = P_4 \sin\beta. \tag{3}$$

Vài ứng dụng hình học

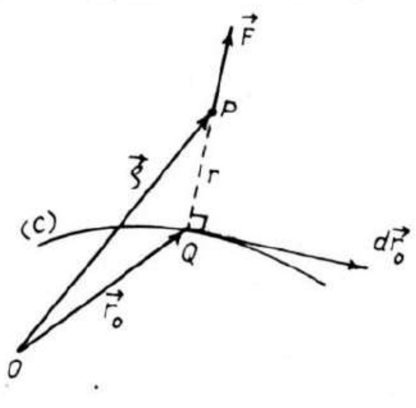
Nhận xét mở đầu. Trong mặt phẳng ta xét đường cong C và điểm P.

Vạch từ điểm P một đường PQ vuông góc với C và gọi r là khoảng cách PQ và $\vec{r} = \overrightarrow{QP}$. Đặt vào điểm P một lực $\vec{F}$ hướng theo pháp tuyến QP. Nếu $\vec{F}$ hướng theo chiều $\overrightarrow{QP}$ ta coi F là dương và $F < 0$ trong trường hợp ngược lại. Ta có công nguyên tố của lực $\vec{F}$:

$$dA = \vec{F} d\vec{\rho} = \vec{F}(d\vec{r}_0 + d\vec{r}).$$

Nhưng $d\vec{r}$ là tổng của hai dịch chuyển nguyên tố: dọc theo QP với độ lớn của dịch chuyển là dr và dịch chuyển của điểm P gây ra bởi sự quay của bán kính QP quanh điểm Q. Dịch chuyển sau cùng vuông góc với QP. Vì vận tốc $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}_0}{dt}$ của điểm Q nằm theo tiếp tuyến của C nên vuông góc với PQ. Vậy ta có:

$$dA = F dr. \tag{1}$$

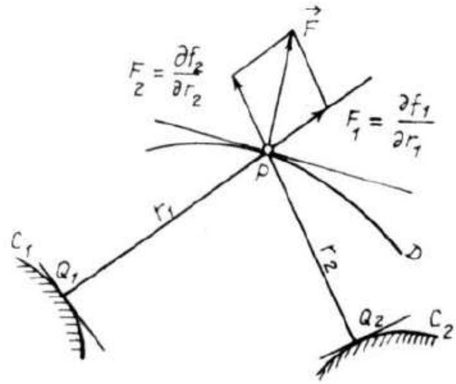


Hình 2.5

Minh hoạ nhận xét mở đầu

Ví dụ 2.5. Giả thử có n đường cong $C_1, C_2, \ldots, C_n$ và điểm P cùng nằm trong một mặt phẳng (một vài hoặc tất cả các đường cong C_i có thể suy biến thành những điểm cố định). Gọi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ là những khoảng cách theo pháp tuyến từ điểm P đến các đường cong đó. Ta xét trong mặt phẳng của các đường cong một đường cong D đi qua P cho bởi phương trình:

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0. \qquad (2)$$



Hình 2.6

Dựng pháp tuyến của đường cong D tại điểm P

Vì mỗi r_i là hàm của các tọa độ Đềcác x, y của điểm P nên (2) là phương trình của một đường cong nào đó đi qua P. Ta sẽ chỉ ra cách vẽ pháp tuyến với đường cong D tại điểm P.

Với di chuyển nhỏ bất kỳ của điểm P trên đường cong D ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial r_i} dr_i = 0. \qquad (3)$$

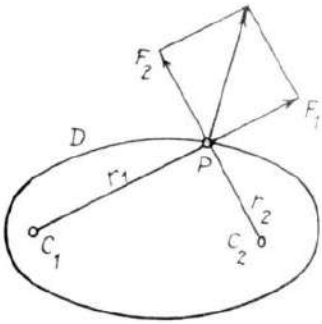
Bây giờ ta đặt vào điểm P các lực $F_i = \dfrac{\partial f}{\partial r_i}$ hướng dọc theo pháp tuyến $r_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Khi đó, đẳng thức (3) có dạng :

$$\sum_{i=1}^{n} F_i dr_i = 0.$$

Theo nhận xét mở đầu thì điều này có nghĩa là tổng công của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ trong dịch chuyển nguyên tố tùy ý của điểm P trên đường D bằng không. Nhưng khi đó điểm không tự do P sẽ ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. Vì vậy, hợp lực $\vec{F}$ của các lực này phải hướng theo pháp tuyến với đường D. Ta có được phương pháp đơn giản để dựng bằng hình học pháp tuyến với đường cong D cho bởi phương trình (2).

Hãy xét một vài trường hợp riêng:

Trường hợp 1. C_1, C_2 suy biến thành điểm và D là đường enlip:



Hình 2.7

Dựng pháp tuyến của đường Enlip tại điểm P

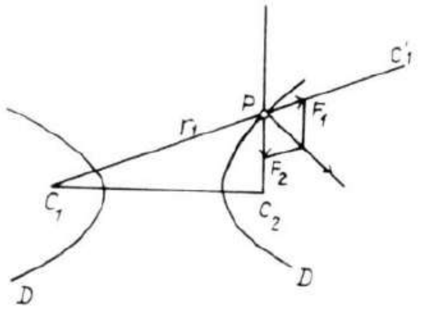
Phương trình (2) bây giờ có dạng $f = r_1 + r_2 - 2a = 0$ (theo định nghĩa của đường enlip, C_1, C_2 là những tiêu điểm của enlip). Do vậy,

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial r_1} = 1, \qquad F_2 = \frac{\partial f}{\partial r_2} = 1.$$

và pháp tuyến của enlip tại P là đường phân giác của góc $\widehat{C_1PC_2}$.

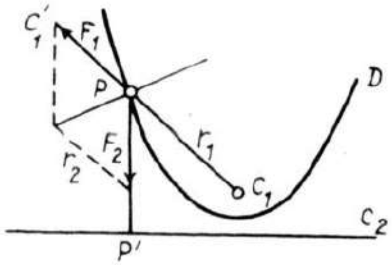
Trường hợp 2. D là đường hypecbôn. Theo định nghĩa, phương trình của đường hypecbôn có dạng $f = r_1 - r_2 - 2a = 0$.

Do vậy, $F_1 = \dfrac{\partial f}{\partial r_1} = 1$, $F_2 = \dfrac{\partial f}{\partial r_2} = -1$. Do vậy, pháp tuyến với đường hypecbôn tại điểm P là phân giác của góc $\widehat{C_2PC_1''}$ (xem Hình 2.8).



Hình 2.8
Dựng pháp tuyến của đường hypecbôn tại điểm P

Trường hợp 3. D là đường parabôn. Khi đó, C_1 suy biến thành một điểm còn C_2 là đường thẳng.



Hình 2.9
Dựng pháp tuyến của đường parabôn tại điểm P

Theo định nghĩa của đường parabôn ta có: $f = r_1 - r_2 = 0$. Do vậy, $F_1 = -F_2 = 1$ và pháp tuyến với đường parabôn tại điểm P là phân giác của góc $\widehat{P'PC_1'}$.

Ứng dụng nguyên lý công ảo. Tìm điều kiện cân bằng của cơ hệ trong toạ độ suy rộng.

Trong các tọa độ suy rộng, điều kiện cân bằng(2.1) có dạng

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0. \tag{2.2}$$

Đối với hệ hôlônôm, các biến phân $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ là độc lập với nhau nên các lực suy rộng phải đồng thời triệt tiêu:

$$Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0. \tag{2.3}$$

Do vậy, **điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết hôlônôm lý tưởng cân bằng là tất cả các lực suy rộng của mọi lực tác dụng lên hệ đều bằng không**.

Trường hợp các lực thế. Nếu tất cả các lực tác dụng lên hệ đều là lực thế, thì như đã biết, tồn tại hàm lực U chỉ phụ thuộc vào tọa độ x_k, y_k, z_k của các điểm của hệ mà tổng công ảo nguyên tố của các lực tác dụng lên hệ bằng biến phân toàn phần của hàm lực đó:

$$\sum \delta A_k = \delta U.$$

Ta có

$$U = U(x_k, y_k, z_k) = U(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Vậy

$$\sum \delta A_k = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_n}\delta q_n.$$

So sánh với biểu thức (1.27) ta rút ra:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \cdots, \tag{2.4}$$

trong đó $\Pi = -U$ là thế năng của cơ hệ.

Nếu tất cả các lực tác dụng lên hệ đều là lực thế thì lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng q_k là đạo hàm riêng theo q_k của hàm lực U.

Điều kiện (2.3) về sự cân bằng của hệ hôlônôm bây giờ có thể viết dưới dạng

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.5}$$

Từ đây suy ra rằng, tại vị trí cân bằng thế năng của hệ hôlônôm đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu).

Các lực thế quen biết là trọng lực, lực đàn hồi và lực hấp dẫn.

- **Với trường trọng lực**, nếu trục thẳng đứng Oz hướng lên trên, thì $dA = -Pdz$, trong đó P là trọng lực. Do vậy, nếu coi rằng $U = 0$ khi $z = 0$ ta sẽ có

$$U = -Pz. \tag{2.6}$$

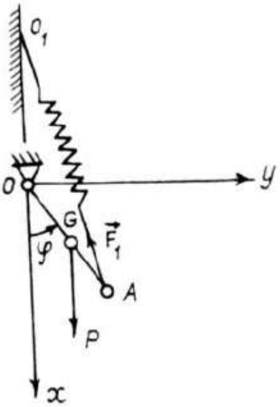
-**Với trường lực đàn hồi** tác dụng dọc theo trục ox, ta có $dA = -cxdx$, trong đó c là hệ số đàn hồi. Nếu coi rằng $U = 0$ khi $x = 0$ thì

$$U = -\frac{1}{2}cx^2 \tag{2.7}$$

- **Với trường lực hấp dẫn**, ta có $dA = -mgR^2 d\left(\frac{1}{r}\right)$. Do vậy, nếu coi rằng $U = 0$ khi $r = \infty$ thì

$$U = mg\frac{R^2}{r}, \; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.8}$$

Ví dụ 2.6 . Thanh đồng chất OA, trọng lượng P có thể quay không ma sát quanh trục nằm ngang oz vuông góc với nó. Gắn vào đầu A của thanh một lò xo O_1A, có độ dài tự nhiên là l_0, độ cứng c. Điểm treo O_1 của lò xo ở cách trục quay một đoạn $O_1O = OA = r$. Chiều dài của lò xo khi hệ cân bằng là l. Lấy góc φ làm tọa độ suy rộng, hãy tìm biểu thức của lực suy rộng và điều kiện cân bằng của thanh OA.



Hình 2.10

Con lắc đơn $0A$ chịu liên kết đàn hồi

Bài giải. Từ hình vẽ ta có:

$$x_A = r\cos\varphi, \qquad y_A = r\sin\varphi,$$
$$x_G = \frac{r}{2}\cos\varphi, \qquad y_G = \frac{r}{2}\sin\varphi,$$

trong đó x_G, y_G là tọa độ của trọng tâm G của thanh OA. Lực tác dụng của lò xo lên thanh OA bằng

$$F_1 = c|l - l_0|,$$

ở đây $l = O_1A = 2r\cos\widehat{OAO_1} = 2r\cos\dfrac{\varphi}{2}$. Hình chiếu của lực F_1 trên các trục tọa độ x, y là:

$$X_1 = -c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right)\cos\frac{\varphi}{2}, \quad Y_1 = -c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right)\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Hình chiếu của trọng lực P trên các trục là:

$$X_2 = P, \qquad Y_2 = 0.$$

Vậy, ta có lực suy rộng (1.28) như sau:

$$Q = X_1 \frac{\partial x_A}{\partial \varphi} + Y_1 \frac{\partial y_A}{\partial \varphi} + X_2 \frac{\partial x_c}{\partial \varphi} + Y_2 \frac{\partial y_c}{\partial \varphi},$$

hoặc

$$Q = cr\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right)\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{P_r}{2}\sin\varphi,$$

hoặc

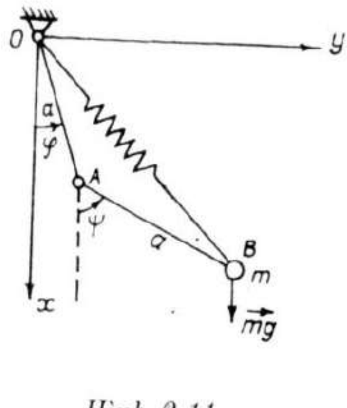
$$Q = r\left[c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right) - P\cos\frac{\varphi}{2}\right]\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Cho $Q = 0$ ta có điều kiện cân bằng của thanh OA. Từ đó tìm được:

1) $\sin\frac{\varphi}{2} = 0 \to \varphi = \varphi_1 = 0$ và

2) nếu $\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0$, ta có $c\left(2r\cos\frac{\varphi}{2} - l_0\right) - P\cos\frac{\varphi}{2} = 0$, hoặc $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{cl_0}{2rc - P}$, $\varphi = \varphi_2 = 2\text{arccos}\frac{cl_0}{2rc - P}$ với $\frac{cl_0}{|2rc - P|} < 1$ hoặc $P < c(2r - l_0)$ và $P > c(2r + l_0)$.

Ví dụ 2.7. Các thanh OA và AB không trọng lượng, cùng chiều dài a được gắn bản lề với nhau tại A (con lắc kép). Thanh OA có thể quay tự do quanh điểm O. Tại B gắn một điểm nặng khối lượng m. Các điểm O và B được nối với nhau bằng một lò xo có độ cứng c và độ dài tự nhiên a. Cả hệ khảo sát nằm trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy. Hãy tìm các vị trí cân bằng của hệ.



Hình 2.11

Con lắc kép OAB chịu liên kết đàn hồi

Bài giải. Hệ có hai bậc tự do. Lấy các góc φ và ψ làm các tọa độ suy rộng. Biểu thức thế năng của hệ có dạng:

$$\Pi = -mgx_B + \frac{1}{2}c\lambda^2,$$

trong đó $\lambda = OB - a = 2a\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - a$ là độ giãn của lò xo, $x_B = a(\cos\varphi + \cos\psi)$. Vậy

$$\Pi = -mga(\cos\varphi + \cos\psi) + \frac{1}{2}ca^2(2\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - 1)^2. \qquad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} &= mga\sin\varphi + ca^2(2\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - 1)\sin\frac{\psi - \varphi}{2},\\ \frac{\partial\Pi}{\partial\psi} &= mga\sin\psi - ca^2(2\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - 1)\sin\frac{\psi - \varphi}{2}.\end{aligned} \qquad (2)$$

Các góc ψ và φ tại vị trí cân bằng được xác định nhờ các phương trình $\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = \frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = 0$. Từ đây tìm được

1) $\varphi_1 = 0, \quad \psi_1 = 0$

2) $\varphi_2 = \pi, \quad \psi_2 = \pi$

Ngoài ra, cộng hai phương trình (2) với nhau ta còn có một vị trí cân bằng nữa thỏa mãn điều kiện:

$$\sin\varphi_3 + \sin\psi_3 = 0,$$

nghĩa là khi

$$\psi_3 = -\varphi_3.$$

Ví dụ 2.8. Tìm các lực suy rộng đối với trường hợp con lắc cầu (Hình 1.12). Theo công thức (1.28) ta có

$$Q_1 = X\frac{\partial x}{\partial\theta} + Y\frac{\partial y}{\partial\theta} + Z\frac{\partial z}{\partial\theta},$$

$$Q_2 = X\frac{\partial x}{\partial \varphi} + Y\frac{\partial y}{\partial \varphi} + Z\frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Vì $X = Y = 0$, $Z = P$, $x = l\sin\theta\cos\varphi$, $y = l\sin\theta\sin\varphi$, $z = l\cos\theta$ nên

$$Q_1 = -Pl\sin\theta,\ \ Q_2 = 0.$$

Ta có thể tìm các lực suy rộng bằng các phương pháp khác, chẳng hạn tính công ảo (1.27):

$$\delta A = \vec{F}\delta\vec{r} = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Vì $\delta z = -l\sin\theta\delta\theta$ và $X = Y = 0, \quad Z = -P$,
nên

$$\delta A = -Pl\sin\theta\delta\theta.$$

Do vậy,

$$Q_1 = -Pl\sin\theta, \quad Q_2 = 0.$$

Ví dụ 2.9 . Tìm vị trí cân bằng của cơ cấu tay quay - thanh truyền cho trên Hình 2.12. Tại các điểm O, A, B có các bản lề. Các thanh OA và AB đồng chất, có chiều dài a và khối lượng m. Con chạy M có khối lượng m_1. Điểm giữa C_1, C_2 của các thanh được nối với nhau bởi một lò xo có độ cứng c. Chiều dài tự nhiên của lò xo là $l_0 < a$. Cơ cấu nằm trong mặt phẳng thẳng đứng. Các lực ma sát không đáng kể.

Bài giải. Hệ có một bậc tự do. Lấy góc φ giữa thanh OA và trục thẳng đứng Ox làm tọa độ suy rộng. Thế năng của hệ là:

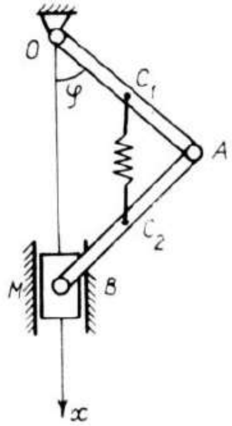
$$\Pi = -mgx_{c_1} - mgx_{c_2} - m_1gx_B + \frac{1}{2}c\lambda^2,$$

ở đây

$$x_{c_1} = \frac{a}{2}\cos\varphi, \quad x_{c_2} = \frac{3a}{2}\cos\varphi, \quad x_B = 2a\cos\varphi,$$

còn $\lambda = C_1C_2 - l_0 = a\cos\varphi - l_0$ là độ giãn của lò xo. Do vậy,

$$\Pi = -2(m+m_1)ga\cos\varphi + \frac{c}{2}(a\cos\varphi - l_0)^2.$$



Hình 2.12

Cơ cấu tay quay - thanh truyền

Ta có

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = 2(m+m_1)ga\sin\varphi - ac(a\cos\varphi - l_0)\sin\varphi.$$

Điều kiện cân bằng (2.5) cho ta:

$$[-2(m+m_1)ga + ac(a\cos\varphi - l_0)]\sin\varphi = 0.$$

Từ đây suy ra:

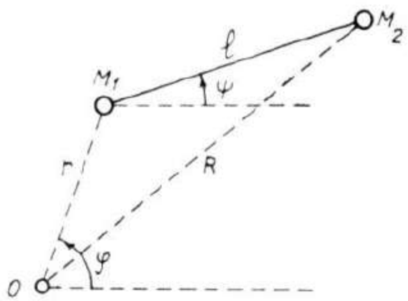
1) $\sin\varphi = 0$ và $\varphi = 0$ là một trong những vị trí cân bằng của hệ.

2) $-2(m+m_1)g + c(a\cos\varphi - l_0) = 0$, $\cos\varphi = \dfrac{2(m+m_1)g + cl_0}{ca}$.

Trạng thái cân bằng này có thể tồn tại nếu $\cos\varphi \leq 1$, nghĩa là:

$$2(m+m_1)g < c(a+l_0).$$

Điều kiện này sẽ trở thành hiện thực, chẳng hạn khi lò xo có độ cứng (c) đủ lớn. Trong trường hợp ngược lại thì hệ chỉ có một trạng thái cân bằng ứng với $\varphi = 0$.



Hình 2.13

Hai điểm nặng M_1, M_2 gắn vào thanh M_1M_2 và bị hút về tâm 0

Ví dụ 2.10. Hai chất điểm M_1, M_2 nối với nhau bằng một thanh không trọng lượng, chiều dài l và bị hút về tâm 0 theo quy luật hấp dẫn vũ trụ. Tìm các vị trí cân bằng của hệ, biết rằng hệ chuyển động trong một mặt phẳng.

Bài giải. Vì các chất điểm chuyển động trong một mặt phẳng nên mỗi điểm được xác định bởi hai tọa độ. Giữa bốn tọa độ của hai chất điểm có một ràng buộc là khoảng cách M_1, M_2 không đổi. Vậy chỉ còn ba tọa độ độc lập. Hệ khảo sát có ba bậc tự do. Ta chọn r, φ, ψ làm các tọa độ suy rộng (Hình 2.13). Thế năng của hệ là:

$$\Pi = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{R} \quad ,$$

trong đó α, β là những hằng số hấp dẫn. Chú ý rằng

$$R = \sqrt{r^2 + l^2 - 2rl\cos(\pi - \varphi + \psi)} \quad ,$$

nên

$$\Pi = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{\sqrt{S}}, \quad S = r^2 + l^2 + 2rl\cos(\varphi - \psi).$$

Từ đó,

$$\frac{\partial\Pi}{\partial r} = \frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta[r + l\cos(\varphi - \psi)]}{S^{3/2}},$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = \frac{-\beta rl\sin(\varphi - \psi)}{S^{3/2}},$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = \frac{\beta rl\sin(\varphi - \psi)}{S^{3/2}}.$$

Điều kiện cân bằng của hệ là:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial r} = \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = \frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = 0.$$

Từ đây rút ra

$$\sin(\varphi - \psi) = 0,$$
$$\alpha[r^2 + l^2 + 2rl\cos(\varphi - \psi)]^{3/2} + r^2\beta[r + l\cos(\varphi - \psi)] = 0.$$

Hệ hai phương trình này chỉ có một nghiệm

$$\varphi = \psi + \pi, \quad r = l\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}.$$

Tại vị trí cân bằng này, tâm hút O nằm trong khoảng giữa M_1 và M_2.

Ứng dụng nguyên lý công ảo tìm điều kiện cân bằng của vật tuyệt đối rắn

Trước hết ta đưa ra công thức bổ trợ cho công của các lực tác dụng lên vật tuyệt đối rắn. Giả thử phần tử Δm_k của vật chịu tác dụng của lực $\vec{F}_k = \vec{F}_{ke} + \vec{F}_{ki}$, tổng hình học của ngoại lực và nội lực. Công nguyên tố dA của các lực trong di chuyển tuỳ ý vô cùng nhỏ của vật là

$$dA = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\vec{v}_k dt = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k(\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_k)dt =$$
$$= \left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\right)\vec{v}_0 + \vec{\omega}\sum_{k=1}^{n}(\vec{r}_k\times\vec{F}_k)\right\}dt.$$

(vì $\vec{F}_k.\vec{\omega} \times \vec{F}_k = \vec{\omega}.(\vec{r}_k \times \vec{F}_k)$). Ở đây, 0 là một điểm nào đó của vật rắn, $\vec{v}_0$ là vận tốc của điểm 0.

Theo tính chất của các nội lực, ta có

$$\sum \vec{F}_{ki} = 0, \quad \sum(\vec{r}_k \times \vec{F}_{ki}) = 0.$$

Do vậy, ta có

$$dA = (\vec{F}^e.\vec{v}_0 + \vec{\omega}.\vec{M}_0^e)dt, \tag{2.9}$$

trong đó , $\vec{F}^e$ là vectơ chính của các ngoại lực, $\vec{M}_0^e$ là mômen chính của các ngoại lực đối với điểm 0.

Công thức (2.9) sẽ được dùng để tìm điều kiện cân bằng của vật tuyệt đối rắn. Theo nguyên lý công ảo, điều kiện cân bằng của vật rắn là $\delta A = 0$:

$$\delta A = (\vec{F}^e\vec{v}_0 + \vec{\omega}\vec{M}_0^e)\delta t = 0. \tag{2.10}$$

Ta xét các trường hợp riêng sau đây.

Vật rắn tự do. Khi đó $\vec{v}_0$ và $\vec{\omega}$ có thể lấy những giá trị tuỳ ý. Do vậy phải có

$$\vec{F}^e = 0, \ \vec{M}_0^e = 0. \tag{2.11}$$

Vậy là, **Điều kiện cần và đủ để vật tuyệt đối rắn được cân bằng là véctơ chính và mômen chính của các ngoại lực tác dụng lên vật đối với điểm cố định bất kỳ phải bằng không.**

Vật rắn quay quanh một điểm cố định. Lấy điểm cố định này làm cực 0 (do vậy $\vec{v}_0 = 0$,) ta có :

$$\delta A = \vec{\omega}.\vec{M}_0^e\delta t = 0.$$

Song vì $\vec{\omega}$ là vectơ tuỳ ý nên rút ra $\vec{M}_0^e = 0$.

Vậy là, **Điều kiện cần và đủ để vật rắn quay quanh một điểm 0 cố định được cân bằng là mômen chính cuả các ngoại lực tác dụng lên vật đối với điểm 0 bằng không và vật yên nghỉ tại thời điểm đầu.**

Vật rắn quay quanh một trục cố định. Khi đó theo (2.9) ta có $\delta A = \vec{M}_0^e.\vec{\omega}\delta t = 0$, trong đó vectơ $\vec{\omega}$ nằm trên trục quay. Phân vectơ $\vec{M}_0^e$ thành hai thành phần : vuông góc với trục quay ($\perp\vec{\omega}$) và $(\vec{M}_o^e)_\omega$ hướng theo trục quay. Như ta biết $(\vec{M}_0^e)_\omega$ cũng chính là mômen chính của các ngoại lực tác dụng lên vật đối với trục quay.

Vậy là, **Điều kiện cần và đủ để vật rắn quay quanh một trục cố định được cân bằng là tổng đại số mômen của các ngoại lực tác dụng lên vật đối với trục đó bằng không và vật yên nghỉ tại thời điểm đầu.**

2.2. NGUYÊN LÝ ĐALĂMBE

Trong các bài toán về chuyển động của vật thể không tự do, các ẩn số thường là gia tốc của vật, sức căng của dây, phản lực của các gối tựa v...v.... Sử dụng các định lý khác nhau của cơ học ta có thể xác định được những ẩn số đó. Tuy nhiên, cách làm này khá phức tạp. Đalămbe (D'alembert (1717-83) nhà toán học Pháp) đã đưa ra một phương pháp hiệu quả hơn, có thể dùng để giải mọi bài toán về chuyển động của vật thể không tự do. Khi đã biết chuyển động của hệ, dùng nguyên lý Đalămbe ta dễ dàng xác định được các phản lực liên kết ngoại; cũng có thể tìm được các phản lực liên kết nội nếu dùng phương pháp tách vật. Nguyên lý Đalămbe còn được dùng để thiết lập các phương trình vi phân của chuyển động của cơ hệ.

1. Nguyên lý Đalămbe. Xét cơ hệ gồm N chất điểm. Trong hệ qui chiếu quán tính, chuyển động của điểm m_k được mô tả bởi phương trình :

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k - m_k\vec{\gamma}_k = 0, \ (k = 1, 2, ..., N) \tag{2.12}$$

trong đó $\vec{F}_k$ là lực hoạt động tác dụng lên điểm m_k, $\vec{R}_k$ là phản lực. Vectơ $\vec{F}_k^{qt} = -m_k\vec{\gamma}_k$ được gọi là lực quán tính Đalămbe của chất điểm m_k. Cần lưu ý rằng, trong hệ qui chiếu quán tính chỉ có các lực hoạt động $\vec{F}_k$ và các phản lực liên kết $\vec{R}_k$ mới làm thay đổi được vận tốc của điểm m_k, còn lực quán tính $\vec{F}_k^{qt}$ thì không. Theo nghĩa này, lực quán tính Đalămbe là lực ảo, không có cùng bản chất vật lý như lực $\vec{F}_k$ và $\vec{R}_k$ là những lực do tương tác mà có. Phương trình (2.12) có thể được diễn tả bằng lời như sau :

Nguyên lý Đalămbe : Tại mỗi thời điểm, đối với điểm bất kỳ của cơ hệ , tổng hình học của lực hoạt động, phản lực liên kết và lực quán tính Đalămbe sẽ bằng không.

Nếu tại một thời điểm bất kỳ, ta dừng cơ hệ và các liên kết lại và đặt lên tất cả các điểm m_k lực hoạt động $\vec{F}_k$, phản lực liên kết $\vec{R}_k$ và lực quán tính $\vec{F}_k^{qt}$ thì cơ hệ sẽ ở trạng thái yên nghỉ. Vì vậy, người ta nói rằng các lực kể trên là "cân bằng".

Hệ quả : Tại mỗi thời điểm của chuyển động của cơ hệ, vectơ chính (tổng hình học) của các lực hoạt động, các phản lực liên kết và các lực quán tính của cơ hệ cũng như mômen chính (tổng các mômen) của các lực đó đều bằng không :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_k + \sum \vec{R}_k + \sum \vec{F}_k^{qt} = 0, \\ \sum m_0(\vec{F}_k) + \sum m_0(\vec{R}_k) + \sum m_0(\vec{F}_k^{qt}) = 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

ở đây 0 là điểm bất kỳ. Tổng mômen của các lực nói trên đối với trục cố định bất kỳ cũng bằng không.

Bây giờ ta áp dụng các phương trình (2.13) cho trường hợp vật rắn chuyển động song phẳng. Phương trình chuyển động của khối tâm C của vật rắn và phương trình chuyển động quay của vật rắn quanh trục Cz đi qua khối tâm và vuông góc với mặt phẳng chuyển động có dạng

$$\begin{aligned} M\vec{\gamma}_C &= \sum \vec{F}_k + \sum \vec{R}_k, \\ J_{Cz}\varepsilon &= \sum m_{Cz}(\vec{F}_k) + \sum m_{Cz}(\vec{R}_k). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Mặt khác, theo (2.13) ta có

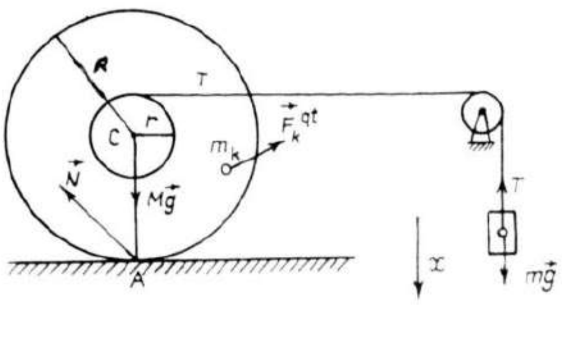
$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_k + \sum \vec{R}_k + \sum \vec{F}_k^{qt} = 0, \\ \sum m_{Cz}(\vec{F}_k) + \sum m_{Cz}(\vec{R}_k) + \sum m_{Cz}(\vec{F}_k^{qt}) = 0.\end{aligned} \qquad (2.15)$$

So sánh các hệ thức (2.14) và (2.15) ta được

$$\sum \vec{F}_k^{qt} = -M\vec{\gamma}_c, \ \sum m_{Cz}(\vec{F}_k^{qt}) = -J_{Cz}\varepsilon. \qquad (2.16)$$

Vậy là, **Vectơ chính của các lực quán tính Đalămbe của vật rắn bằng lực quán tính của khối tâm của nó với giả thiết toàn bộ khối lượng của vật tập trung tại đó** . Trong chuyển động song phẳng của vật rắn, tổng mômen của các lực quán tính Đalămbe đối với trục đi qua tâm quán tính và vuông góc với mặt phẳng chuyển động bằng $-J_{Cz}\varepsilon$, nghĩa là bằng mômen quán tính của vật đối với trục Cz nhân với gia tốc góc của vật, lấy dấu trừ.

Ví dụ 2.11. Vật nặng m treo vào sợi dây vắt qua ròng rọc và cuốn vào tang của bánh xe (Hình 2.14). Bánh xe lăn không trượt trên đường nằm ngang. Tính gia tốc của vật nặng.



Hình 2.14

Hệ ròng rọc và vật nặng

Bài giải. Xét riêng bánh xe. Các lực thực tác dụng lên nó gồm trọng lực $M\vec{g}$, lực căng $\vec{T}$ của dây, phản lực $\vec{N}$ của đường. Với mỗi điểm m_k của bánh xe ta đặt lực quán tính $\vec{F}_k^{qt} = -m_k\vec{\gamma}_k$. Ta có hệ lực "cân bằng" $(M\vec{g}, \vec{T}, \vec{N}, \sum \vec{F}_k^{qt})$. Tổng mômen của tất cả các lực này đối với trục đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng của hình vẽ phải bằng không :

$$-J_A\varepsilon + T(R+r) = 0,$$

trong đó R và r tương ứng là bán kính của bánh xe và của tang bánh xe.

Phương trình chuyển động của vật nặng m có dạng:

$$m\ddot{x} = mg - T.$$

Từ hai phương trình trên đây ta tìm được

$$-J_A\varepsilon + m(g-\ddot{x})(R+r) = 0,$$

trong đó $\ddot{x} = (R+r)\varepsilon$ là gia tốc của vật nặng, $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ là gia tốc góc của bánh xe. Khử ε từ hai phương trình cuối cùng ta có :

$$\ddot{x} = \frac{m(R+r)^2}{m(R+r)^2 + M(R^2+\rho^2)} \cdot g.$$

Ở đây ta đã sử dụng công thức tính mômen quán tính $J_A = J_C + MR^2 = M(\rho^2 + R^2)$, trong đó ρ là bán kính quán tính của bánh xe đối với trục đi qua trọng tâm C.

2.3. NGUYÊN LÝ ĐALĂMBE-LAGRĂNG. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Khi trình bày nguyên lý Đalămbe, ta đã đưa vào khái niệm lực quán tính đối với tất cả các điểm của cơ hệ. Những lực này được định nghĩa như là tích của khối lượng của các điểm và gia tốc của chúng, lấy với dấu trừ. Sau khi bổ xung các lực quán tính vào các lực hoạt động và các phản lực ta được sự "cân bằng" của các lực trong hệ chuyển động. Do vậy mở ra khả năng áp dụng nguyên lý công ảo ở tĩnh học cho động lực học.

Xét hệ N chất điểm chịu các liên kết lý tưởng và giữ. Ký hiệu $\vec{F}_k$ là hợp các lực hoạt động tác dụng lên chất điểm m_k, còn hợp các phản lực là $\vec{R}_k$. Theo định luật thứ hai của Niutơn ta có :

$$m_k\vec{\gamma}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k \tag{2.17}$$

hoặc

$$\vec{F}_k + \vec{F}_k^{qt} + \vec{R}_k = 0.$$

ở đây $\vec{F}_k^{qt} = -m_k\vec{\gamma}_k$. Nói cách khác, hệ các lực hoạt động, các phản lực và lực quán tính Đalămbe là "cân bằng".

Bây giờ ta cố định thời điểm t và cho hệ một di chuyển ảo $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, ..., \delta\vec{r}_N$. Nhân vô hướng mỗi phương trình (2.17) cho $\delta\vec{r}_k$ tương ứng rồi cộng lại ta được

$$\sum_{k=1}^{N}(\vec{F}_k - m_k\vec{\gamma}_k)\delta\vec{r}_k = 0, \tag{2.18}$$

ở đây $\sum\limits_{k=1}^{N}\vec{R}_k\delta\vec{r}_k = 0$ vì liên kết là lý tưởng. Phương trình (2.18) được gọi là **phương trình tổng quát của động lực học**. Dưới dạng triển khai theo các toạ độ Đềcác, phương trình (2.18) có dạng

$$\sum_{k=1}^{N}\{(F_{kx} - m_k\ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{ky} - m_k\ddot{y}_k)\delta y_k + \\ + (F_{kz} - m_k\ddot{z}_k)\delta z_k\} = 0 \tag{2.19}$$

trong đó F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} là hình chiếu của lực $\vec{F}_k$ lên các trục toạ độ x, y, z, còn x_k, y_k, z_k là các toạ độ của điểm m_k. Các phương trình

(2.18) và (2.19) không chứa các phản lực liên kết và được dùng để thiết lập các phương trình vi phân của chuyển động của cơ hệ. Các phương trình (2.18) và (2.19) có thể được trình bày dưới dạng nguyên lý Đamlămbe -Lagrăng :

Nguyên lý Đalămbe - Lagrăng : Tại mỗi thời điểm của chuyển động của cơ hệ chịu liên kết lý tưởng và giữ, tổng công của các lực hoạt động và các lực quán tính Đalămbe trong di chuyển ảo bất kỳ là bằng không

$$\sum_k \delta W^{(k)} + \sum_k \delta W_{qt}^{(k)} = 0. \tag{2.20}$$

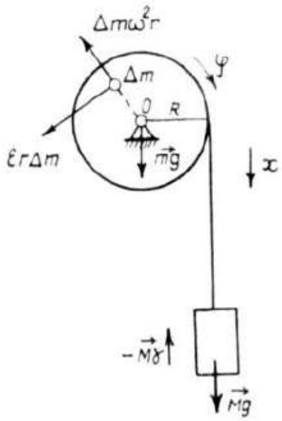
Nguyên lý Đalămbe - Lagrăng là một trong những nguyên lý tổng quát nhất trong cơ học. Nó bao trùm toàn bộ cơ học của các hệ chịu liên kết lý tưởng, hôlônôm cũng như phi hôlônôm.

Nếu các liên kết không phải là lý tưởng ta vẫn có cách sử dụng nguyên lý trên đây. Chẳng hạn, nếu chuyển động xảy ra với ma sát, thì ta có thể dùng các định luật vật lý của ma sát rồi đưa lực ma sát vào nhóm các lực hoạt động, còn thành phần pháp tuyến $\vec{N}_k$ của phản lực liên kết sẽ thỏa mãn điều kiện liên kết lý tưởng ($\sum \vec{N}_k \delta \vec{r}_k = 0$).

Ví dụ 2.12. Một cái tời hình trụ khối lượng m, bán kính R có thể quay tự do xung quanh trục nằm ngang. Trên tời có quấn một sợi dây, cuối sợi dây treo vật nặng khối lượng M. Giả thiết rằng các liên kết là lý tưởng, ma sát ở trục O không có, sợi dây không có trọng lượng và không giãn. Hãy xác định gia tốc của vật nặng.

Bài giải

Ta áp dụng nguyên lý Đalămbe - Lagrăng. Các lực hoạt động tác dụng lên hệ (gồm tời, dây và vật nặng) là : $m\vec{g}$ và $M\vec{g}$. Lực quán tính của vật nặng là $-M\vec{\gamma}$. Lực quán tính của phần tử Δm của tời bằng tích của khối lượng Δm với gia tốc của điểm Δm lấy với dấu trừ. Gia tốc của Δm gồm gia tốc hướng tâm $\omega^2 r$ và gia tốc tiếp tuyến εr, trong đó r là khoảng cách từ Δm đến tâm 0 của trục quay. Theo biểu thức (2.18), công của tất cả các lực hoạt động và lực quán tính của hệ trong di chuyển ảo bất kỳ phải bằng không, chẳng hạn, khi vật nặng M chuyển xuống dưới một đoạn δx và tời quay một góc tương ứng $\delta\varphi$. Trọng lực $m\vec{g}$ và các lực quán tính ly tâm không sinh công trong di chuyển ảo nói trên vì điểm đặt 0 của trọng lực cố định, còn lực quán tính ly tâm hướng vuông góc với phương di chuyển của điểm đặt của nó.



Hình 2.15
Tời kéo và vật nặng

Ta có

$$Mg\delta x - M\gamma\delta x - \sum \Delta m\varepsilon r . r\delta\varphi = 0.$$

Đặt $J = \sum \Delta m r^2 = \dfrac{mR^2}{2}$ - mômen quán tính của tời đối với trục của nó và chú ý rằng $R\delta\varphi = \delta x$, $\gamma = \varepsilon R$ ta tìm được

$$\gamma = \frac{g}{1 + \dfrac{J}{MR^2}} \quad \text{hoặc} \quad \gamma = g\frac{1}{1 + \dfrac{m}{2M}}.$$

2.4. NGUYÊN LÝ GAUXƠ (GAUSS)

Gauxơ đã đưa ra một nguyên lý rất hay của cơ học - **Nguyên lý cưỡng bức tối thiểu**.

Xét hệ gồm N chất điểm. Nếu ở thời điểm t điểm m_s của cơ hệ có vị trí thực $\vec{r}_s(t)$ và vận tốc thực $\dot{\vec{r}}_s(t) = \vec{v}_s(t)\ (s = 1, \ldots, N)$, thì với các liên kết tác dụng thường xuyên lên cơ hệ, các lực khác nhau sẽ gây ra những biến đổi nhỏ của vận tốc $d\vec{v}_s$ trong khoảng thời gian vô cùng nhỏ dt. Gauxơ đã đưa ra một nguyên lý giúp phân biệt các chuyển động thực với các chuyển động tưởng tượng xảy ra với cùng các giá trị $\vec{r}_s, \vec{v}_s$, phù hợp với liên kết tại thời điểm t, nhưng khác gia tốc (chuyển động này sẽ xảy ra nếu lực tác dụng được điều chỉnh thích hợp).

Ký hiệu $d\vec{v}_s$ biến đổi vận tốc của chuyển động thực của điểm m_s trong khoảng thời gian dt, còn $\delta\vec{v}_s$ là biến đổi vận tốc của chuyển động tưởng tượng. Để cho đơn giản, giả thiết rằng cơ hệ khảo sát có liên kết lý tưởng hôlônôm:

$$f_\nu(t, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, \alpha). \tag{2.21}$$

Tại thời điểm $t + dt$, dưới tác dụng của lực hoạt động $\vec{F}_s$ và phản lực liên kết $\vec{R}_s$, vị trí thực của điểm m_s được xác định bởi vectơ $\vec{r}_s(t + dt)$. Ta có:

$$\vec{r}_s(t + dt) = \vec{r}_s + \vec{v}_s dt + \frac{1}{2}\vec{\gamma}_s dt^2 + \ldots, (s = 1, \ldots, N). \tag{2.22}$$

Giả thử rằng ở thời điểm t, chất điểm m_s bắt đầu chuyển động tự do, không bị ràng buộc bởi các liên kết, mà chỉ chịu tác dụng của lực hoạt động $\vec{F}_s$ nhưng vẫn nhận các giá trị $\vec{r}_s$ và $\vec{v}_s$ như khi có liên kết. Khi đó, tại thời điểm $t + dt$, chất điểm sẽ có vị trí $\vec{r}_{*s}$:

$$\vec{r}_{*s}(t + dt) = \vec{r}_s + \vec{v}_s dt + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}_s}{m_s} dt^2, \ldots, (s = 1, \ldots, N). \tag{2.23}$$

Hiệu giữa (2.22) và (2.23) cho độ lệch $\vec{D}_s$ của chất điểm m_s trong chuyển động không có liên kết (tức chuyển động tự do với gia tốc $\vec{F}/m_s$) và chuyển động có liên kết (tức chuyển động thực với gia tốc $\vec{\gamma}_s$):

$$\vec{D}_s = \vec{r}_{*s}(t+dt) - \vec{r}_s(t+dt) = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{F}_s}{m_s} - \vec{\gamma}_s\right)dt^2,$$

ở đây bỏ qua các vô cùng bé bậc cao đối với dt. Độ lệch này do liên kết gây ra. Gauxơ đã đưa ra đại lượng Z sau đây gọi là **độ cưỡng bức** của cơ hệ:

$$Z = \sum_{s=1}^{N} m_s\left(\frac{\vec{F}_s}{m_s} - \vec{w}_s\right)^2 = \sum_{s=1}^{N}\frac{1}{m_s}\left(\vec{F}_s - m_s\vec{w}_s\right)^2,$$

hoặc

$$Z = \sum_{s=1}^{N} m_s\left[\left(\frac{X_s}{m_s} - \ddot{x}_s\right)^2 + \left(\frac{Y_s}{m_s} - \ddot{y}_s\right)^2 + \left(\frac{Z_s}{m_s} - \ddot{z}_s\right)^2\right]. \tag{2.24}$$

trong đó N là số chất điểm của cơ hệ,X_s, Y_s, Z_s là các thành phần của lực hoạt động $\vec{F}_s$ tác dụng lên chất điểm m_s trên các trục tọa độ Đềcác, x_s, y_s, z_s của chất điểm m_s, $\vec{w}_s$ là gia tốc của điểm m_s trong chuyển động tưởng tượng. Độ cưỡng bức Z có quan hệ trực tiếp với độ lệch D_s^2.

Nguyên lý cưỡng bức tối thiểu của Gauxơ : Độ cưỡng bức Z của cơ hệ có giá trị nhỏ nhất trên chuyển động thực của cơ hệ (xem Hình 2.16):

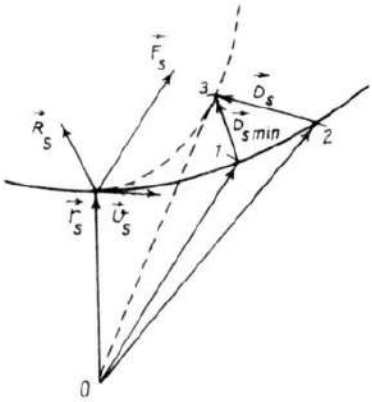
$$\delta Z = 0, \quad \delta^2 Z > 0.$$

Chú ý rằng, trong việc xác định các độ lệch $\vec{D}_s$ ta đã giữ nguyên vị trí $\vec{r}_s(t)$ và vận tốc $\vec{v}_s$ của cơ hệ tại thời điểm t và giữ nguyên các lực hoạt động $\vec{F}_s$. Do đó chỉ có gia tốc là biến thiên (khi lấy biến phân, thời gian t được giữ cố định). Ta có:

$$\delta\vec{r}_s = \delta\vec{v}_s = \delta\vec{F}_s = 0, \quad \delta\vec{\gamma}_s \neq 0. \tag{2.25}$$

Song, $\delta\vec{\gamma}_s$ không được hoàn toàn tùy ý mà phải phù hợp với các liên kết đã đặt lên hệ. Chẳng hạn, với hệ chỉ chịu liên kết hôlônôm (2.21), ta có:

$$\sum_{s=1}^{N} \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_s}\delta\vec{r}_s = 0.$$



Hình 2.16

Minh hoạ nguyên lý cưỡng bức tối thiểu của Gauxơ

1. $\vec{r}_s(t+dt)$, chuyển động thực. 2. $\vec{r}_{ks}(t+dt)$, chuyển động khả dĩ. 3. $\vec{r}_{*s}(t+dt)$, chuyển động tự do.

Lấy đạo hàm hai lần theo thời gian và hoán vị phép lấy đạo hàm với phép biến phân sẽ được

$$\sum_{s=1}^{N}\left\{\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_s}\right)\delta\vec{r}_s + 2\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_s}\right)\delta\dot{\vec{r}}_s + \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_s}\delta\ddot{\vec{r}}_s\right\} = 0.$$

Do các hệ thức (2.25) nên ta có các ràng buộc sau đây đối với các biến phân $\delta\vec{\gamma}_s(\vec{\gamma}_s = \ddot{\vec{r}}_s)$:

$$\sum_{s=1}^{N} \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}_s}\delta\vec{\gamma}_s = 0.$$

Độ cưỡng bức Gauxơ chính là độ lệch trung bình bình phương của gia tốc $\vec{\gamma}_s$ so với các gia tốc $m_s^{-1}\vec{F}_s$ của các điểm trong chuyển động được giải phóng khỏi các liên kết. Độ cưỡng bức Gauxơ là hàm của thời gian t và của các tọa độ suy rộng q_i, các đạo hàm $\dot{q}_i, \ddot{q}_i$ của chúng. Ta có :

$$\dot{\vec{r}}_s = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial t}, \ (s = 1, \ldots, N), \tag{2.26}$$

$$\vec{\gamma}_s = \ddot{\vec{r}}_s = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_k}\ddot{q}_k + 2\frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial t\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k\dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_s}{\partial t^2},$$

$$\vec{F}_s = \vec{F}_s(\vec{r}_s, \dot{\vec{r}}_s, t), \ (s = 1, \ldots, N), \ n = 3N - \alpha.$$

Là hàm của các gia tốc suy rộng $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$, độ cưỡng bức Gauxơ có thể biểu diễn được dưới dạng:

$$Z = Z_2 + Z_1 + Z_0,$$

trong đó Z_0 không phụ thuộc vào gia tốc suy rộng, còn Z_2, Z_1 tương ứng là các dạng bậc hai (Z_2) và bậc nhất (Z_1) của các gia tốc suy rộng.

Nguyên lý cưỡng bức tối thiểu bây giờ có thể phát biểu như sau: **Độ cưỡng bức Gauxơ, như là hàm của các gia tốc suy rộng, lấy giá trị cực tiểu trên chuyển động thực của cơ hệ.**

Ví dụ 2.13. Một chất điểm buộc phải chuyển động không ma sát dọc theo một dây thép cong dạng parabôn trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy (Hình 2.17). Parabôn có phương trình $y = bx^2$. Dùng nguyên lý Gauxơ, hãy viết phương trình chuyển động của chất điểm.

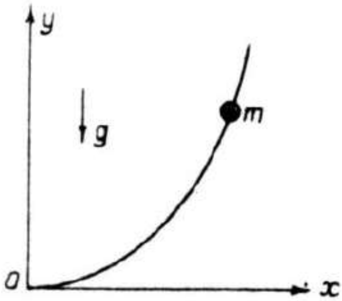
Bài giải Ở đây có các liên kết hôlônôm:

$$y = bx^2, \quad z = 0.$$

Đạo hàm hai lần theo thời gian t ta được

$$\dot{y} = 2bx\dot{x} \quad \text{và} \quad \dot{z} = 0,$$

$$\ddot{y} = 2b\dot{x}^2 + 2bx\ddot{x} \quad \text{và} \quad \ddot{z} = 0. \tag{1}$$



Hình 2.17

Điểm nặng chuyển động trên đường parabôn

Trong khi thực hiện phép tính biến phân ở nguyên lý Gauxơ, dịch chuyển (x, y, z) và vận tốc $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ được xem như không thay đổi và chỉ có gia tốc $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ là biến đổi. Do vậy, thực hiện phép biến phân phương trình (1) sẽ có

$$\delta\ddot{y} = 2bx\delta\ddot{x}. \tag{2}$$

Biểu thức Z (2.24) bây giờ có dạng

$$Z = \frac{1}{m}\left[(X - m\ddot{x})^2 + (Y - m\ddot{y})^2 + (Z - m\ddot{z})^2\right],$$

với $X = Z = 0$, $Y = -mg$. Phương trình $\delta Z = 0$ cho ta:

$$\ddot{x}\delta\ddot{x} + (g + \ddot{y})\delta\ddot{y} = 0,$$

hoặc theo (2):

$$[\ddot{x} + 2bx(g + \ddot{y})]\delta\ddot{x} = 0.$$

Vì $\delta\ddot{x}$ là tùy ý nên hệ số của nó phải triệt tiêu :

$$\ddot{x} + 2bx(g + \ddot{y}) = 0.$$

Thay giá trị của $\ddot{y}$ từ (1) vào đây ta được phương trình chuyển động của chất điểm:

$$(1 + 4b^2x^2)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2gbx = 0.$$

Nguyên lý cưỡng bức tối thiểu của Gauxơ có thể coi như mệnh đề xuất phát để tìm các phương trình chuyển động của cơ hệ hôlônôm. Thực vậy, coi $Z(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)$ là hàm chỉ của gia tốc suy rộng $\ddot{q}$, còn $\dot{q}$ và t được coi là những thông số cố định ứng với trạng thái của hệ tại thời điểm t. Khi đó các điểm dừng Z được xác định bởi các hệ thức:

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{q}_k} = 0, \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.27}$$

Chú ý đến các hệ thức (2.24),(2.26) ta có:

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{q}_k} = \sum_{s=1}^{N} m_s \left(\ddot{\vec{r}}_s - \frac{\vec{F}_s}{m_s} \right) \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_s}{\partial \ddot{q}_k} = \sum_{s=1}^{N} (m_s \ddot{\vec{r}}_s - \vec{F}_s) \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_k},$$

vì $\dfrac{\partial \ddot{\vec{r}}_s}{\partial \ddot{q}_k} = \dfrac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_k}$. Do vậy, các hệ thức (2.27) có dạng:

$$\sum_{s=1}^{N} (m_s \ddot{\vec{r}}_s - \vec{F}_s) \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.28}$$

Mặt khác, theo (2.26) và theo nguyên lý Dalămbe-Lagrăng (2.18)

$$\sum_{s=1,k=1}^{N,n}(m_s\ddot{\vec{r}}_s-\vec{F}_s)\frac{\partial\vec{r}_s}{\partial q_k}\delta q_k=0. \tag{2.29}$$

Từ hệ thức (2.29) suy ra các hệ thức (2.28). Các hệ thức này sau khi biến đổi sẽ có dạng :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k,\ (k=1,\dots,n). \tag{2.30}$$

trong đó $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i(\dot{\vec{r}}_i)^2$, $Q_k=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$. Trong chương III ta sẽ thấy các phương trình (2.30) chính là các phương trình Lagrăng.

Để nhận biết tính chất dừng của độ cưỡng bức Gauxơ $Z(\ddot{q},\dot{q},q,t)$ ta hãy tính vi phân cấp hai theo $\ddot{q}$ tại điểm đó:

$$d^2Z=\sum_{k,i=1}^{n}\frac{\partial^2 Z}{\partial\ddot{q}_k\partial\ddot{q}_i}d\ddot{q}_kd\ddot{q}_i=\sum_{s=1}^{N}\sum_{k,i=1}^{n}m_s\frac{\partial\vec{r}_s}{\partial q_k}\frac{\partial\vec{r}_s}{\partial q_i}d\ddot{q}_kd\ddot{q}_i=$$
$$=\sum_{s=1}^{N}m_s\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_s}{\partial q_k}d\ddot{q}_k\right)^2\geq 0,$$

ở đây dấu bằng $(=0)$ chỉ xảy ra khi tất cả $d\ddot{q}_k$ triệt tiêu, bởi vì biểu thức d^2Z có dạng tương tự với hai lần động năng T của hệ khi các liên kết bị hoá rắn:

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N}m_s\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2.$$

Do vi phân cấp hai của Z dương trong toàn miền giá trị của các gia tốc suy rộng nên độ cưỡng bức Gauxơ đạt cực tiểu tại điểm dừng. Đó là điều phải chứng minh.

Chương III

CÁC PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG

Phương trình Lagrăng loại một. Phương trình Lagrăng loại hai. Phương trình Lagrăng trong trường lực thế. Xác định phản lực liên kết nhờ các phương trình Lagrăng. Phương trình Lagrăng trong trường lực Gyrôscôp và trường lực hao tán. Sự bất biến của các phương trình Lagrăng. Các tích phân đầu của hệ phương trình Lagrăng. Phương trình Appen. Toạ độ xyclic.

Một cách tiếp cận khác đối với việc nghiên cứu cơ học là **xét toàn** bộ hệ cơ học dựa trên những đại lượng vô hướng cơ bản là **công và** động năng, sử dụng các toạ độ suy rộng thay cho các toạ độ Đềcác. Phương trình tổng quát của động lực học khi viết dưới dạng các tọa độ suy rộng sẽ trở thành những phương trình Lagrăng. Dưới đây, đầu tiên ta đưa ra một số biến đổi bổ trợ, sau đó sẽ trình bày các phương trình Lagrăng.

3.1. VÀI BIẾN ĐỔI BỔ TRỢ

Phương trình tổng quát của động lực học (2.18) có thể viết dưới dạng khác như sau. Ta có

$$m_k\vec{\gamma}_k\delta\vec{r}_k = m_k\dot{\vec{v}}_k\delta\vec{r}_k = \frac{d}{dt}(m_k\vec{v}_k.\delta\vec{r}_k) - m_k\vec{v}_k(\delta\vec{r}_k)^{\cdot} =$$
$$= \frac{d}{dt}(m_k\vec{v}_k\delta\vec{r}_k) - m_k\vec{v}_k\delta\vec{v}_k + m_k\vec{v}_k[\delta\vec{v}_k - (\delta\vec{r}_k)^{\cdot}].$$

Áp dụng quy tắc hoán vị của các tác dụng vi phân và biến phân

$$(\delta\vec{r}_k)^{\cdot} = \delta\vec{v}_k,$$

ta sẽ thấy thành phần cuối cùng trong phương trình trên bị triệt tiêu. Nhận xét thêm rằng

$$\vec{v}_k\delta\vec{v}_k = \frac{1}{2}\delta(\vec{v}_k.\vec{v}_k) = \frac{1}{2}\delta v_k^2,$$

ta biến đổi phương trình tổng quát của động lực học (2.18) về dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k\delta\vec{r}_k\right) = \delta\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2\right) + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k.\delta\vec{r}_k,$$

hoặc

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k\delta\vec{r}_k\right) = \delta T + \delta^{'} W, \tag{3.1}$$

trong đó T là động năng của toàn hệ, δT là biến phân của động năng, $\delta^{'} W$ là công nguyên tố của các lực hoạt động. Phương trình (3.1) được gọi là **phương trình Lagrăng trung tâm**.

Phương trình Lagrăng trung tâm (3.1) có thể được biến đổi về dạng khác trong tọa độ suy rộng. Ta xem biểu thức

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k\delta\vec{r}_k,$$

như "công nguyên tố của các vectơ động lượng $m_k\vec{v}_k$ của chuyển động" trong các dịch chuyển ảo $\delta\vec{r}_k$ của các điểm của hệ. Vì vậy, cũng tương tự như khi đưa vào khái niệm về các lực suy rộng Q_s (1.28), ở đây ta đưa vào khái niệm các xung lực suy rộng

$$p_s = \sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s}.$$

Đồng thời, hệ thức (3.1) sẽ được đặt tương ứng với đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k\delta\vec{r}_k = \sum_{s=1}^{n} p_s\delta q_s.$$

Dùng hệ thức (1.23) ta có thể viết

$$p_s = \sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_s} = \sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_s} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\vec{v}_k\vec{v}_k\right),$$

hoặc

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s} \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{3.2}$$

nghĩa là xung lực suy rộng bằng đạo hàm riêng theo vận tốc suy rộng của động năng.

Biểu thức của phương trình Lagrăng trung tâm (3.1) bây giờ được đưa về dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n} p_s\delta q_s\right) = \delta T + \sum_{s=1}^{n} Q_s\delta q_s. \tag{3.3}$$

Nếu các lực là những lực thế, thì theo (2.4):

$$Q_s = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_s}, \quad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial\Pi}{\partial q_s}\delta q_s = \delta\Pi$$

và phương trình (3.3) trở thành

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n} p_s\delta q_s\right) = \delta L, \quad L = T - \Pi.$$

3.2. PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG LOẠI MỘT

Ta hãy tìm biểu thức của các phản lực liên kết $\vec{R}_k$ trong các phương trình chuyển động

$$m_k\vec{\gamma}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k \quad (k = 1, ..., N) \tag{3.4}$$

nhờ các nhân tử bất định Lagrăng. Giả thử rằng hệ N chất điểm chịu α liên kết hữu hạn

$$f_j(t, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = 0, \qquad (j = 1, \ldots \alpha), \tag{3.5}$$

và β liên kết vi phân:

$$\varphi_g = \sum_{k=1}^{N} \vec{l}_{gk}\vec{v}_k + D_g = 0, \qquad (g = 1, \ldots, \beta), \tag{3.6}$$

hoặc dưới dạng khai triển:

$$\varphi_g = \sum_{k=1}^{N}(A_{gk}\dot{x}_k + B_{gk}\dot{y}_k + C_{gk}\dot{z}_k) + D_g = 0, \quad (g = 1, \ldots, \beta)$$

Từ đây, ta có:

$$A_{gk} = \frac{\partial\varphi_g}{\partial\dot{x}_k}, \qquad B_{gk} = \frac{\partial\varphi_g}{\partial\dot{y}_k}, \qquad C_{gk} = \frac{\partial\varphi_g}{\partial\dot{z}_k}. \tag{3.7}$$

Các di chuyển ảo của các điểm của cơ hệ thỏa mãn các phương trình liên kết sau đây với t là cố định:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial\vec{r}_k}\delta\vec{r}_k = 0, \qquad (j = 1, \ldots, \alpha), \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{l}_{gk}\delta\vec{r}_k = 0, \qquad (g = 1, \ldots, \beta), \tag{3.9}$$

hoặc dưới dạng hình chiếu

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_j}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_j}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0, \quad (j = 1, \ldots, \alpha),$$

$$\sum_{k=1}^{N}(A_{gk}\delta x_k + B_{gk}\delta y_k + C_{gk}\delta z_k) = 0, \quad (g = 1, \ldots, \beta).$$

Nhân từng số hạng của các đẳng thức (3.8) và (3.9) lần lượt với các nhân tử tùy ý $-\lambda_j$ và $-\mu_g$ rồi cộng chúng lại với nhau và cộng với đẳng thức mô tả liên kết lý tưởng (1.17):

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k\delta\vec{r}_k = 0,$$

ta sẽ được

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{R}_k - \sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_k} - \sum_{g=1}^{\beta}\mu_g\vec{l}_{gk}\right)\delta\vec{r}_k = 0. \tag{3.10}$$

Dưới dạng khai triển, hệ thức này có dạng

$$\sum_{k=1}^{N}\left(R_{kx} - \sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_k} - \sum_{g=1}^{\beta}\mu_g A_{gk}\right)\delta x_k + \{y\}_k\delta y_k + \{z\}_k\delta z_k = 0. \tag{3.11}$$

Ở đây, $\{y\}_k$ và $\{z\}_k$ là những ký hiệu của các biểu thức, khác với biểu thức của hệ số δx_k ở chỗ thay x, A bởi y, B hoặc z, C tương ứng.

Các hệ thức (3.8), (3.9) cho phép biểu diễn $\alpha+\beta$ trong số 3N di chuyển ảo qua $n = 3N - \alpha - \beta$ di chuyển ảo còn lại với định thức D khác không, cấp $\alpha + \beta$, lập nên từ các hệ số của các "di chuyển ảo phụ thuộc" trong (3.8).

Ta sẽ chọn $\alpha+\beta$ nhân tử λ_j, μ_g sao cho trong đẳng thức (3.11) các hệ số của $\alpha + \beta$ "di chuyển ảo phụ thuộc" bằng không. Điều này hoàn toàn có thể thực hiện được một cách duy nhất vì định thức D từ các hệ số của các đại lượng xác định λ_j, μ_g khác không. Sau đó, trong đẳng thức (3.11) sẽ chỉ còn lại các thành phần với n di chuyển ảo độc lập $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$. Nhưng khi ấy cả các hệ số của các di chuyển ảo độc lập đó cũng phải bằng không. Nói cách khác, các nhân tử λ_j, μ_g có thể được lựa chọn sao cho tất cả các hệ số vô hướng trong đẳng thức (3.11) và do đó, tất cả các hệ số vectơ trong đẳng thức (3.10) đều bằng không. Nhờ vậy ta xác định được các phản lực liên kết qua các nhân tử Lagrăng λ_j, μ_g ($j = 1, 2, \ldots, \alpha,\ g = 1, 2, \ldots, \beta$):

$$\vec{R}_k = \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_k} + \sum_{g=1}^{\beta} \mu_g \vec{l}_{gk}, \qquad (k = 1, \ldots, N), \tag{3.12}$$

hoặc dưới dạng triển khai:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \sum_{g=1}^{\beta} \mu_g A_{gk}, \\ R_y &= \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k} + \sum_{g=1}^{\beta} \mu_g B_{gk}, \\ R_z &= \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_k} + \sum_{g=1}^{\beta} \mu_g C_{gk}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

ở đây dùng các ký hiệu (3.7).

Thay các biểu thức của $\vec{R}_k$ (3.12) vào phương trình vi phân của chuyển động (3.4) ta được:

$$m_k \vec{\gamma}_k = \vec{F}_k + \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_k} + \sum_{g=1}^{\beta} \mu_g \vec{l}_{gk}, \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

hoặc dưới dạng khai triển:

$$\begin{cases} m_k\ddot{x}_k = F_{kx} + \sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k} + \sum_{g=1}^{\beta}\mu_g\dfrac{\partial\varphi_g}{\partial\dot{x}_k}, \\ m_k\ddot{y}_k = F_{ky} + \sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\dfrac{\partial f_j}{\partial y_k} + \sum_{g=1}^{\beta}\mu_g\dfrac{\partial\varphi_g}{\partial\dot{y}_k}, \\ m_k\ddot{z}_k = F_{kz} + \sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\dfrac{\partial f_j}{\partial z_k} + \sum_{g=1}^{\beta}\mu_g\dfrac{\partial\varphi_g}{\partial\dot{z}_k}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Các phương trình này được gọi là những **phương trình Lagrăng loại một** và được đi kèm với các phương trình liên kết:

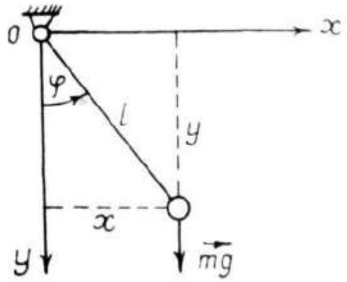
$$f_j(t,\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N) = 0,\ \ \sum_{k=1}^{N}\vec{l}_{gk}\dot{\vec{r}}_k + D_g = 0$$
$$(j = 1,\ldots,\alpha,\quad g = 1,\ldots,\beta).$$

Như vậy là, ta có cả thảy $3N+\alpha+\beta$ phương trình vô hướng với $3N+\alpha+\beta$ đại lượng vô hướng chưa biết: $x_k, y_k, z_k, \lambda_j, \mu_g$. Tích phân hệ các phương trình đó ta sẽ xác định được chuyển động của hệ và các phản lực liên kết (3.12). Tuy nhiên, trong trường hợp hệ gồm nhiều chất điểm, việc tích phân các phương trình nói trên thường là rất khó, do số phương trình quá nhiều. Vì vậy, các phương trình Lagrăng loại một ít được dùng trong thực tế. Sau này, chúng ta sẽ trình bày các phương trình Lagrăng loại hai cho hệ hôlônôm, và như sẽ thấy, số các ẩn ở những phương trình này chỉ là $3N-\alpha$.

Ví dụ 3.1. Con lắc toán học khối lượng m chiều dài l chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng $0xy$. Tìm phương trình chuyển động của con lắc và xác định phản lực liên kết tại điểm O.

Bài giải. Ta có phương trình liên kết

$$f = x^2 + y^2 - l^2 = 0. \tag{1}$$



Hình 3.1. Con lắc toán học

Ở đây $\alpha = 1, \beta = 0$. Theo (3.14) ta có các phương trình

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2\lambda x, \\ m\ddot{y} = mg + 2\lambda y. \end{cases} \tag{2}$$

Khử λ giữa hai phương trình này ta được:

$$\ddot{y}x - \ddot{x}y = gx. \tag{3}$$

Chuyển sang tọa độ góc, đặt

$$x = l\sin\varphi, \qquad y = l\cos\varphi. \tag{4}$$

Ta có

$$\dot{x} = l\cos\varphi.\dot{\varphi}, \qquad \dot{y} = -l\sin\varphi.\dot{\varphi}$$

$$\ddot{x} = -l\sin\varphi.\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi.\ddot{\varphi}, \qquad \ddot{y} = -l\cos\varphi.\dot{\varphi}^2 - l\sin\varphi.\ddot{\varphi}.$$

Thay các biểu thức trên đây vào phương trình (3) ta được phương trình dao động quen thuộc của con lắc toán học

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0, \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}. \tag{5}$$

Tích phân phương trình này với các điều kiện đầu: $t = 0, \varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ ta được

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 - 2\omega^2(1 - \cos\varphi). \tag{6}$$

Bây giờ ta tìm phản lực của sợi dây. Theo công thức (3.13) ta có:

$$R_x = 2\lambda x, \qquad R_y = 2\lambda y.$$

Do vậy

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 2|\lambda|\sqrt{x^2 + y^2} = 2|\lambda|l = ml\left|\frac{\ddot{x}}{x}\right|$$

hoặc

$$R = ml\left|\dot{\varphi}^2 - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\ddot{\varphi}\right|.$$

Thay vào đây các giá trị của $\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ từ (5) và (6) sẽ được

$$R = ml|\dot{\varphi}_0^2 - \omega^2(2 - 3\cos\varphi)|.$$

Từ kết quả này ta thấy, liên kết dây là giữ nếu $R \geq 0$ khi $\varphi = \pi$. Điều này sẽ xảy ra nếu vận tốc góc đầu $\dot{\varphi}_0$ thỏa mãn bất đẳng thức $\dot{\varphi}_0^2 \geq \dfrac{5g}{l}$.

Ví dụ 3.2. Hai chất điểm nặng M_1 và M_2 có cùng khối lượng $m = 1$, được nối với nhau bởi một thanh cứng, không trọng lượng, chiều dài l. Hệ chỉ có thể chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy sao cho vận tốc của điểm giữa I của thanh hướng dọc theo thanh. Hãy xác định chuyển động của các điểm M_1, M_2.

Bài giải. Gọi x_1, y_1 và x_2, y_2 là các tọa độ của các điểm M_1 và M_2. Tọa độ điểm $I\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Vận tốc của điểm I: $\vec{v}\left(\dfrac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}, \dfrac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{2}\right)$.

Điều kiện để $\vec{v}$ hướng dọc theo thanh là:

$\vec{v} = c\overrightarrow{M_1M_2}$ hoặc $\dfrac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2} = c(x_2-x_1)$, $\dfrac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{2} = c(y_2-y_1)$

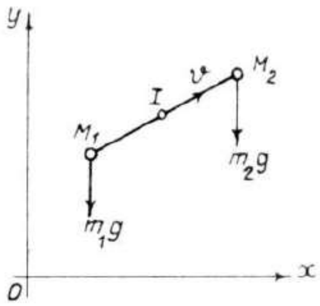
hoặc $\dfrac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{\dot{y}_1+\dot{y}_2} = \dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$. Vậy ta có các phương trình liên kết dạng (3.5):

$$f = \frac{1}{2}[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 - l^2] = 0,$$

và dạng (3.6) :

$$\varphi = (x_2-x_1)(\dot{y}_2+\dot{y}_1) - (\dot{x}_1+\dot{x}_2)(y_2-y_1) = 0. \qquad (1)$$

Ở đây ta có $\alpha = \beta = 1$. Ngoại lực tác dụng là trọng lực mg.



Hình 3.2

Thanh cứng hai đầu gắn các vật nặng

Các phương trình Lagrăng dưới dạng khai triển trên các trục tọa độ x, y với các nhân tử λ và μ (3.14) bây giờ có dạng:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\lambda(x_2-x_1) - \mu(y_2-y_1),\\ \ddot{y}_1 &= -g - \lambda(y_2-y_1) + \mu(x_2-x_1),\end{aligned} \qquad (2)$$

và

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 &= \lambda(x_2-x_1) - \mu(y_2-y_1),\\ \ddot{y}_2 &= -g + \lambda(y_2-y_1) + \mu(x_2-x_1).\end{aligned} \qquad (3)$$

Giải các phương trình (2) đối với λ và μ ta được

$$\begin{aligned}
-\lambda &= \frac{g}{l^2}(y_2 - y_1) + \frac{1}{l^2}[(x_2 - x_1)\ddot{x}_1 + (y_2 - y_1)\ddot{y}_1],\\
\mu &= \frac{g}{l^2}(x_2 - x_1) - \frac{1}{l^2}[(y_2 - y_1)\ddot{x}_1 - (x_2 - x_1)\ddot{y}_1].
\end{aligned} \tag{4}$$

Nhận xét rằng các phương trình (3) có thể được suy ra từ (2) nếu thay trong đó λ bởi $-\lambda$ và $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1$ bởi $\ddot{x}_2, \ddot{y}_2$. Vì vậy, từ (2) ta tìm được:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{g}{l^2}(y_2 - y_1) + \frac{1}{l^2}[(x_2 - x_1)\ddot{x}_2 + (y_2 - y_1)\ddot{y}_2],\\
\mu &= \frac{g}{l^2}(x_2 - x_1) - \frac{1}{l^2}[(y_2 - y_1)\ddot{x}_2 - (x_2 - x_1)\ddot{y}_2].
\end{aligned} \tag{5}$$

So sánh các giá trị λ và μ trong (4) và (5) ta được:

$$\begin{aligned}
&(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)(y_2 - y_1) - (\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1)(x_2 - x_1) = 0,\\
&(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1)(x_2 - x_1) + (\ddot{y}_2 + \ddot{y}_1)(y_2 - y_1) + 2g(y_2 - y_1) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Đưa vào các ký hiệu

$$u = x_2 - x_1, \quad v = y_2 - y_1, \quad P = \dot{x}_1 + \dot{x}_2, \quad Q = \dot{y}_1 + \dot{y}_2, \tag{7}$$

ta có thể viết các phương trình liên kết và (6) dưới dạng

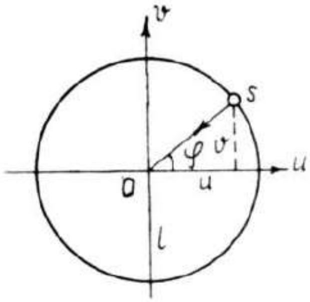
$$u^2 + v^2 = l^2, \qquad \ddot{u}v - u\ddot{v} = 0, \tag{8}$$

$$Pv - Qu = 0, \tag{9}$$

$$\dot{P}u + \dot{Q}v + 2gv = 0. \tag{10}$$

Các đẳng thức (8) chứng tỏ rằng trong mặt phẳng (u, v), điểm S có tọa độ u, v chuyển động theo quỹ đạo tròn, bán kính l; có tâm tại gốc $u = v = 0$ với gia tốc $(\ddot{u}, \ddot{v})$ hướng vào tâm (Hình 3.3). Vì gia tốc tiếp tuyến bằng không nên S chuyển động đều. Do vậy,

$$u = l\cos\varphi, \quad v = l\sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega = const, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0. \quad (11)$$



Hình 3.3

Điểm S(u, v) chuyển động theo quĩ đạo tròn

Theo đẳng thức (9) ta có thể đặt

$$P = \frac{z}{l}u, \qquad Q = \frac{z}{l}v. \tag{12}$$

Thay các biểu thức này vào (10) và kể tới các đẳng thức (8) và (11) ta tìm được

$$\dot{z} + \frac{2g}{l}v = 0 \text{ hoặc } \dot{z} = -2g\sin\varphi \text{ hoặc } \frac{dz}{d\varphi} = -\frac{2g}{\omega}\sin\varphi.$$

Tích phân lên ta có

$$z = \frac{2g}{\omega}\cos\varphi + 2C_1,$$

trong đó C_1 là hằng tích phân. Do vậy, theo (11) và (12) ta có:

$$P = 2\left(C_1 + \frac{g}{\omega}\cos\varphi\right)\cos\varphi, \qquad Q = 2\left(C_1 + \frac{g}{\omega}\cos\varphi\right)\sin\varphi, \tag{13}$$

và

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \int P dt = \frac{1}{\omega} \int P d\varphi \\ \qquad = \frac{2C_1}{\omega} \sin\varphi + \frac{g}{2\omega^2} \sin 2\varphi + \frac{g}{\omega^2}\varphi + 2C_2, \\ y_1 + y_2 = \int Q dt = -\frac{2C_1}{\omega} \cos\varphi - \frac{g}{\omega^2} \cos^2\varphi + 2C_3. \end{cases} \tag{14}$$

Cuối cùng, giải các phương trình (14), (11), (7) ta được

$$\begin{cases} x_1 = \frac{C_1}{\omega} \sin\varphi + \frac{g}{4\omega^2} \sin 2\varphi + \frac{g}{2\omega^2}\varphi - \frac{l}{2}\cos\varphi + C_2, \\ y_1 = -\frac{C_1}{\omega} \cos\varphi - \frac{g}{2\omega^2} \cos^2\varphi - \frac{l}{2}\sin\varphi + C_3, \\ x_2 = \frac{C_1}{\omega} \sin\varphi + \frac{g}{4\omega^2} \sin 2\varphi + \frac{g}{2\omega^2}\varphi + \frac{l}{2}\cos\varphi + C_2, \\ y_2 = -\frac{C_1}{\omega} \cos\varphi - \frac{g}{2\omega^2} \cos^2\varphi + \frac{l}{2}\sin\varphi + C_3, \end{cases} \tag{15}$$

$\varphi = \omega t + \varphi_0$, còn $\omega, \varphi_0, C_1, C_2, C_3$ là những hằng tùy ý.

3.3. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CƠ HỆ TRONG TỌA ĐỘ SUY RỘNG - PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG LOẠI HAI

Để viết các phương trình chuyển động của cơ hệ trong tọa độ suy rộng ta hãy trở lại phương trình tổng quát của động lực học dưới dạng (2.20) và giả thiết rằng không phải tất cả các liên kết đặt lên hệ đều là hôlônôm lý tưởng, trong đó tổng thứ nhất của (2.20) có thể chứa công của lực ma sát. Giả thử hệ có n bậc tự do và các tọa độ suy rộng của hệ là $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Ta có (1.27):

$$\begin{aligned} \sum_k \delta W^{(k)} &= \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i, \\ \sum_k \delta W_{qt}^{(k)} &= \sum_{i=1}^{n} Q_i^{qt} \delta q_i, \end{aligned} \tag{3.15}$$

trong đó Q_i^{qt} là các lực quán tính suy rộng được tính theo công thức (1.26):

$$Q_i^{qt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{qt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}.$$

Thay thế (3.15) vào (2.20) ta có phương trình:

$$\sum_{i=1}^{n} (Q_i + Q_i^{qt}) \delta q_i = 0. \tag{3.16}$$

Song, vì các δq_i độc lập với nhau nên từ (3.16) suy ra

$$Q_i + Q_i^{qt} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.17}$$

Các phương trình này sẽ có dạng rất đơn giản nếu ta biểu diễn các lực quán tính suy rộng qua động năng của hệ. Lấy Q_1^{qt} làm ví dụ. Ta có:

$$Q_1^{qt} = \sum_k \vec{F}_k^{qt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = -\sum_k m_k \vec{\gamma}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = -\sum_k m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}. \tag{3.18}$$

Sử dụng công thức (1.23) $\dfrac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_1} = \dfrac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}$ và chú ý rằng các phép tính đạo hàm toàn phần theo t và đạo hàm riêng theo q_1 có thể giao hoán nên

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_1}.$$

Vậy cuối cùng ta có

$$\frac{d\vec{v}_k}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_k\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial\dot{q}_1}\right) - \vec{v}_k\frac{\partial\vec{v}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\vec{v}_k^2}{\partial\dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\vec{v}_k^2}{\partial q_1}.$$

Vì $\vec{v}_k^2 = v_k^2$ nên biểu thức (3.18) có dạng

$$-Q_1^{qt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\sum_k\frac{m_k v_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum_k\frac{m_k v_k^2}{2}\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1},$$

trong đó $T = \sum_{k=1}^{N}\frac{m_k v_k^2}{2}$ là động năng của cơ hệ (xem (1.24)):

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k(\dot{\vec{r}}_k)^2 = T_2 + T_1 + T_0, \tag{3.19}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, = \frac{1}{2}[A(q,t)\dot{q}, q],$$
$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i\dot{q}_i = [a(q,t), \dot{q}], \quad T_0 = a_0$$

với $A(q,t) = (a_{ik}),\ a(q,t) = (a_1, a_2, ..., a_n),\ q = (q_1, q_2, ...q_n)$,

$$a_{ik} = \sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_k},$$
$$a_i = \sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t},$$
$$a_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\frac{\partial\vec{r}_k}{\partial t}\right)^2.$$

Tương tự như vậy ta có các biểu thức đối với các tọa độ suy rộng còn lại và n phương trình (3.17) sẽ có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.20}$$

Các phương trình (3.20) là những phương trình vi phân của chuyển động của cơ hệ trong tọa độ suy rộng. Các phương trình này còn được gọi là những **phương trình Lagrăng loại hai**, gọi tắt là các phương trình Lagrăng. Số các phương trình này bằng số bậc tự do của cơ hệ. Các biến $q_i, \dot{q}_i$ được gọi là các biến Lagrăng.

Ưu điểm nổi bật của các phương trình Lagrăng là dạng và số lượng của chúng không phụ thuộc vào số vật thể thuộc cơ hệ và sự chuyển động của các vật thể đó. Hơn nữa, nếu liên kết là lý tưởng thì trong các phương trình Lagrăng không có mặt các phản lực liên kết chưa biết.

Ghi chú: Ta cũng đi đến các phương trình Lagrăng loại hai bằng cách sử dụng phương trình tổng quát của động lực học dưới dạng (2.18) và dùng các tọa độ suy rộng $q_1, \ldots, q_n$:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{\gamma}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \delta A_k = \delta A.$$

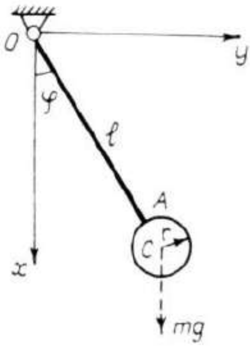
Dễ dàng chứng minh được rằng

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i; \tag{3.21}$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{\gamma}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} \delta q_i.$$

Ví dụ 3.3. Lập phương trình chuyển động của con lắc vật lý gồm một đĩa đồng chất khối lượng M, bán kính r, gắn chặt với đầu A

của thanh chiều dài l. Đầu O của thanh là điểm treo của con lắc. Khối lượng của thanh không đáng kể.



Hình 3.4
Con lắc vật lý

Bài giải. Hệ khảo sát có một bậc tự do. Lấy góc φ giữa thanh và trục thẳng đứng làm tọa độ suy rộng. Tọa độ của trọng tâm C của đĩa là

$$x_c = (l + r)\cos\varphi, \qquad y_c = (l + r)\sin\varphi.$$

Động năng của con lắc bằng

$$T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_0 \dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

ở đây $I_0 = I_c + M(l + r)^2$ là mômen quán tính của con lắc đối với trục Oz, còn I_c là mômen quán tính của đĩa đối với tâm C. Ta có

$$I_c = \frac{1}{2} M r^2, \qquad I_0 = \frac{M}{2}[r^2 + 2(l + r)^2].$$

Theo công thức (1.28) thì lực suy rộng sẽ là

$$Q = X \cdot \frac{\partial x_c}{\partial \varphi} = -Mg(l + r)\sin\varphi.$$

Phương trình Lagrăng (3.20) cho ta

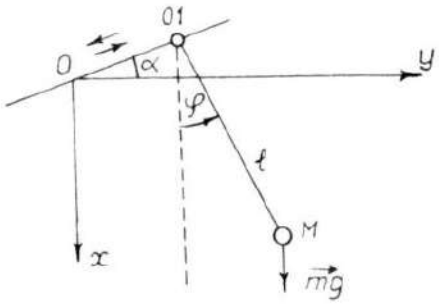
$$I_0\ddot{\varphi} = -Mg(l+r)\sin\varphi$$

hoặc

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_1}\sin\varphi = 0,$$

trong đó $l_1 = \dfrac{r^2 + 2(l+r)^2}{2(l+r)}$ là chiều dài thu gọn của con lắc.

Ví dụ 3.4. Lập phương trình chuyển động của con lắc toán học khối lượng m, chiều dài l khi điểm treo O_1 của nó dao động điều hòa trong mặt phẳng thẳng đứng, dọc theo đường thẳng OO_1 làm với đường nằm ngang một góc α.



Hình 3.5
Con lắc toán học

Bài giải. Giả thử luật chuyển động của điểm O_1 là $OO_1 = a\sin\omega t$, trong đó a, ω là những hằng số. Lấy φ làm tọa độ suy rộng của hệ. Tọa độ của điểm M phụ thuộc vào góc lệch φ như sau:

$$x = l\cos\varphi - OO_1\sin\alpha = l\cos\varphi - a\sin\omega t.\sin\alpha,$$

$$y = l\sin\varphi + OO_1\cos\alpha = l\sin\varphi + a\sin\omega t.\cos\alpha.$$

Vì rằng

$$\dot{x} = -l\sin\varphi\dot{\varphi} - a\omega\cos\omega t.\sin\alpha,$$
$$\dot{y} = l\cos\varphi\dot{\varphi} + a\omega\cos\omega t.\cos\alpha,$$

nên động năng của điểm M được xác định từ biểu thức

$$T = \frac{1}{2}mv^2,$$
$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}a\omega\cos\omega t\cos(\varphi - \alpha) + a^2\omega^2\cos\omega t.$$

Do vậy, ta có

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}^2 + mla\omega\cos\omega t\cos(\varphi - \alpha),$$
$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = -mla\omega\dot{\varphi}\cos\omega t\sin(\varphi - \alpha).$$

Công ảo của trọng lực là:

$$\delta A = mg\delta x = -mgl\sin\varphi\delta\varphi.$$

Từ đây, ta tìm được lực suy rộng

$$Q = -mgl\sin\varphi.$$

Phương trình Lagrăng có dạng

$$\frac{d}{dt}[ml^2\dot{\varphi} + mla\omega\cos\omega t\cos(\varphi - \alpha)]$$
$$+ mla\omega\dot{\varphi}\cos\omega t\sin(\varphi - \alpha) = -mgl\sin\varphi,$$

hoặc

$$\ddot{\varphi} - \frac{a}{l}\omega^2\sin\omega t\cos(\varphi - \alpha) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \qquad (1)$$

Với các giá trị φ nhỏ ($\sin\varphi \simeq \varphi, \cos\varphi \simeq 1$), phương trình này có dạng:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{a}{l}\omega^2\sin\alpha\sin\omega t\right)\varphi = \frac{a}{l}\omega^2\cos\alpha\sin\omega t.$$

Các trường hợp riêng

1) Dao động của con lắc có điểm treo di động trên phương nằm ngang

Trong trường hợp này $\alpha = 0$ và phương trình (1) trở thành

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} sin\varphi = \frac{a}{l}\omega^2 sin\omega t cos\varphi. \tag{2}$$

2) Dao động của con lắc có điểm treo di động theo phương thẳng đứng quanh vị trí cân bằng ổn định ($\varphi^* = 0$)

Khi đó $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ta có phương tình chuyển động dưới dạng

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{l}(g - a\omega^2 sin\omega t) sin\varphi = 0. \tag{3}$$

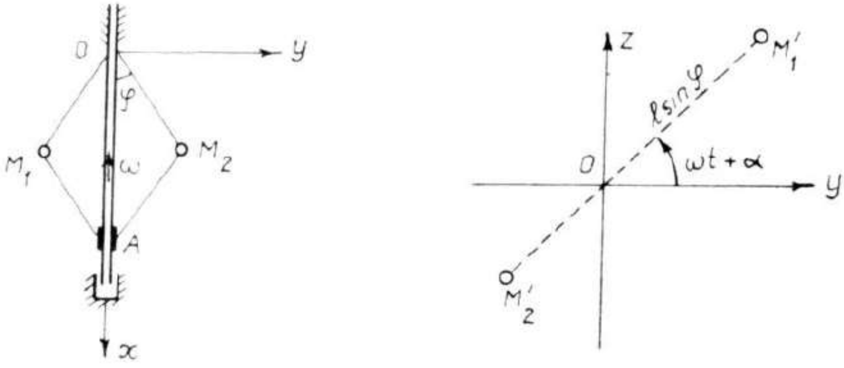
3) Dao động của con lắc có điểm treo di động theo phương thẳng đứng quanh vị trí cân bằng không ổn định ($\varphi^* = \pi$)

Thay trong (1) φ bởi $\pi + \xi$ và $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ta có:

$$\ddot{\xi} - \frac{1}{l}(g + a\omega^2 sin\omega t) sin\xi = 0. \tag{4}$$

Ví dụ 3.5. Lập phương trình chuyển động của máy điều tiết ly tâm. Các điểm nặng M_1 và M_2 có khối lượng m. Khối lượng của con trượt A là M. Các thanh có chiều dài l và khối lượng không đáng kể. Tốc độ quay của máy điều tiết là ω không đổi. Bỏ qua ma sát.

Bài giải. Hệ khảo sát có một bậc tự do và gồm ba vật nặng: M_1, M_2 và con trượt A. Lấy góc φ làm tọa độ suy rộng. Trong hệ trục tọa độ cố định $Oxyz$, các tọa độ của $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ và của con trượt $A(x_3, y_3, z_3)$ như sau:



Hình 3.6

Sơ đồ máy điều tiết ly tâm

$$x_1 = l\cos\varphi,\quad y_1 = l\sin\varphi\cos(\omega t+\alpha),\quad z_1 = l\sin\varphi\sin(\omega t+\alpha),$$
$$x_2 = l\cos\varphi,\quad y_2 = -l\sin\varphi\cos(\omega t+\alpha),\quad z_2 = -l\sin\varphi\sin(\omega t+\alpha),$$
$$x_3 = 2l\cos\varphi,\quad y_3 = 0,\qquad z_3 = 0,$$

trong đó α là góc do mặt phẳng M_1OM_2 lập với mặt phẳng cố định tại thời điểm $t=0$. Vận tốc của các điểm M_1, M_2 và con trượt A được xác định từ các biểu thức:

$$v_{M_1}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + l^2\omega^2\sin^2\varphi,$$
$$v_{M_2}^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 = l^2\dot{\varphi}^2 + l^2\omega^2\sin^2\varphi,$$
$$v_A^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi.$$

Vậy động năng của hệ là

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(v_{M_1}^2 + v_{M_2}^2) + \frac{1}{2}Mv_A^2 \\ &= l^2(m + 2M\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + ml^2\omega^2\sin^2\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Từ đây tìm được

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = 2l^2(m + 2M\sin^2\varphi)\dot{\varphi},$$
$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 4Ml^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + 2ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Công ảo của trọng lực là

$$\delta A = mg\delta x_1 + mg\delta x_2 + mg\delta x_3 = -2gl(M + m)\sin\varphi.\delta\varphi.$$

Do vậy, ta có lực suy rộng

$$Q = -2gl(m + M)\sin\varphi. \tag{2}$$

Thiết lập phương trình Lagrăng ta được

$$\begin{aligned}&(m + 2M\sin^2\varphi)\ddot{\varphi} + 2m\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi\\ &- m\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{g}{l}(m + M)\sin\varphi.\end{aligned} \tag{3}$$

Vị trí cân bằng tương đối của máy điều tiết trong mặt phẳng OM_1M_2 ứng với giá trị $\varphi = \varphi_0 = const$ thỏa mãn hệ thức:

$$\cos\varphi_0 = \frac{(m + M)g}{ml\omega^2}.$$

Điều này chỉ xảy ra khi $|\cos\varphi_0| < 1$ hoặc khi $\omega^2 > \dfrac{(m + M)g}{ml}$. Để có phương trình dao động nhỏ của máy điều tiết quanh vị trí cân bằng tương đối $\varphi = \varphi_0$, ta đưa vào biến mới $\theta : \theta = \varphi - \varphi_0$. Chú ý rằng với θ nhỏ

$$\sin(\varphi_0 + \theta) = \sin\varphi_0 cos\theta + \cos\varphi_0\sin\theta \simeq \sin\varphi_0 + \theta\cos\varphi_0, \ldots$$

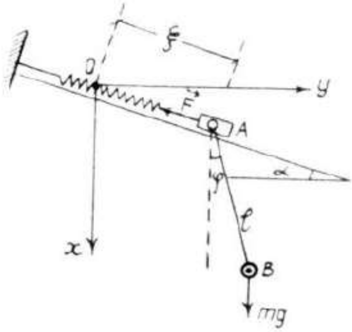
phương trình (3) sẽ đưa được về dạng

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = 0, \tag{4}$$

trong đó

$$\Omega^2 = \frac{m\omega^2\sin^2\varphi_0}{m + 2M\sin^2\varphi_0}, \qquad \sin^2\varphi_0 = 1 - \left[\frac{(m + M)g}{ml\omega^2}\right]^2.$$

Ví dụ 3.6. Lập các phương trình chuyển động của cơ hệ gồm vật nặng A, khối lượng M, chuyển động không ma sát trên mặt phẳng nghiêng và con lắc toán học treo ở A. Lò xo giữ vật A có độ cứng C. Con lắc có chiều dài l và khối lượng m.



Hình 3.7
Hệ dao động gồm một chấn tử trên mặt phẳng nghiêng và con lắc toán học

Bài giải. Hệ khảo sát có hai bậc tự do. Gọi O là vị trí cân bằng tĩnh của lò xo. Lấy khoảng cách $\xi = OA$ và góc φ do con lắc tạo thành với đường thẳng đứng làm hai tọa độ suy rộng của hệ. Các trục tọa độ cố định Oxy được chọn như trên hình vẽ. Ta có tọa độ của các điểm A, B:

$$x_A = \xi\sin\alpha, \qquad y_A = \xi\cos\alpha,$$
$$x_B = \xi\sin\alpha + l\cos\varphi, \quad y_B = \xi\cos\alpha + l\sin\varphi.$$

Do vậy

$$\dot{x}_A = \dot{\xi}\sin\alpha, \qquad \dot{y}_A = \dot{\xi}\cos\alpha,$$
$$\dot{x}_B = \dot{\xi}\sin\alpha - l\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad \dot{y}_B = \dot{\xi}\cos\alpha + l\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

và biểu thức động năng của hệ là:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) = \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{\xi}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\xi}\dot{\varphi}\cos(\varphi + \alpha)]. \end{aligned} \tag{1}$$

Từ đây tìm được:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = (M + m)\dot{\xi} + ml\dot{\varphi}\cos(\varphi + \alpha), \\ &\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{\xi}\cos(\varphi + \alpha), \\ &\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -ml\dot{\xi}\dot{\varphi}\sin(\varphi + \alpha). \end{aligned} \tag{2}$$

Để tìm các lực suy rộng hãy tính công ảo của các lực tác dụng lên hệ:

$$\delta A = F_x\delta x_A + F_y\delta y_A + Mg\delta x_A + mg\delta x_B,$$

trong đó $F = c(\xi + \lambda)$ với λ là độ giãn tĩnh của lò xo:

$$\lambda = \frac{(M + m)g\sin\alpha}{c}. \tag{3}$$

Do vậy

$$\delta A = -c(\xi + \lambda)\sin\alpha\delta x_A - c(\xi + \lambda)\cos\alpha\delta y_A + Mg\delta x_A + mg\delta x_B.$$

Chú ý rằng

$$\delta x_A = \sin\alpha\delta\xi, \qquad \delta y_A = \cos\alpha\delta\xi, \qquad \delta x_B = \sin\alpha\delta\xi - l\sin\varphi\delta\varphi,$$

ta có

$$\delta A = [-c(\xi + \lambda) + (M + m)g\sin\alpha]\delta\xi - mgl\sin\varphi\delta\varphi.$$

Do vậy, ta có các lực suy rộng

$$Q_\xi = -c(\xi + \lambda) + (M + m)g\sin\alpha = -c\xi, (\text{ theo } (3)),$$
$$Q_\varphi = -mgl\sin\varphi. \tag{4}$$

Thay (2) và (4) vào (3.20) ta được các phương trình Lagrăng của chuyển động của cơ hệ khảo sát:

$$(M + m)\ddot{\xi} + ml\ddot{\varphi}\cos(\varphi + \alpha) - ml\dot{\varphi}^2\sin(\varphi + \alpha) = -c\xi,$$
$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{\xi}\cos(\varphi + \alpha) = -mgl\sin\varphi. \tag{5}$$

3.4. PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG TRONG TRƯỜNG LỰC THẾ

Nếu các lực tác dụng lên cơ hệ là những lực thế, nghĩa là khi các lực suy rộng Q_i có thể biểu diễn qua thế năng Π của cơ hệ như công thức (2.4), thì các phương trình Lagrăng (3.20) sẽ có dạng rất gọn

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{3.22}$$

Vì thế năng Π chỉ phụ thuộc vào tọa độ suy rộng q_i, nên $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0$, và ta có thể viết các phương trình cuối cùng dưới dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{3.23}$$

trong đó

$$L = T - \Pi,$$

được gọi là **hàm Lagrăng** hoặc Lagrăngiên (Lagrangian). Vậy là **trong trường lực thế**, biết hàm Lagrăng $L(t, q_i, \dot{q}_i)$ ta có thể viết được các phương trình vi phân của chuyển động của cơ hệ. Các biến $t, q_i, \dot{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ trong biểu thức của hàm Lagrăng L được gọi là các biến Lagrăng. Chuyển động của cơ hệ trong trường lực thế sẽ được hoàn toàn xác định khi biết hàm Lagrăng và trạng thái ban đầu của chuyển động ấy. Dạng (3.23) của các phương trình Lagrăng được gọi là **dạng chuẩn**.

Ghi chú quan trọng. Nếu ngoài các lực thế, hệ cơ học còn chịu tác dụng của những lực không có thế thì thay cho các phương trình (3.22) là các phương trình sau đây:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i^*, \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.24}$$

ở đây $Q_i^*(i = 1, \ldots, n)$ là lực suy rộng tương ứng với các lực không có thế. Rõ ràng là các phương trình (3.20) và (3.22) chỉ là những trường hợp riêng của các phương trình (3.24).

Hàm Lagrăng L, cũng như động năng T, là hàm bậc hai đối với các vận tốc suy rộng:

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \tag{3.25}$$

trong đó

$$L_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \qquad L_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i\dot{q}_i, \qquad L_0 = c_0.$$

Ở đây các hệ số c_{ik}, c_i, c_0 là những hàm của các tọa độ $q_1, \ldots, q_n$ và thời gian t. So (3.25) với (3.19) ta có:

$$L_2 = T_2, \qquad L_1 = T_1, \qquad L_0 = T_0 - \Pi. \tag{3.26}$$

Nhận xét rằng, nếu các lực hoạt động

$$\vec{F}_s = X_s\vec{i} + Y_s\vec{j} + Z_s\vec{k} \qquad (s = 1, \ldots, N)$$

tác dụng lên các chất điểm là những lực có hàm thế $\Pi(t, x_s, y_s, z_s)$ trong tọa độ Đềcác $x_s, y_s, z_s (s = 1, \ldots, N)$, nghĩa là:

$$X_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_s}, \quad Y_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_s}, \quad Z_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_s}, \quad (s = 1, \ldots, N),$$

thì những lực đó cũng có hàm thế đúng bằng Π trong các tọa độ suy rộng độc lập $q_i \, (i = 1, \ldots, n)$ (điều khẳng định ngược lại nói chung không đúng). Thực vậy,

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \sum_{s=1}^{N} (X_s \delta x_s + Y_s \delta y_s + Z_s \delta z_s) = -\delta \Pi = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i .$$

Từ đây suy ra các công thức (2.4) : $Q_i = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i}, (i = 1, ..., n)$.

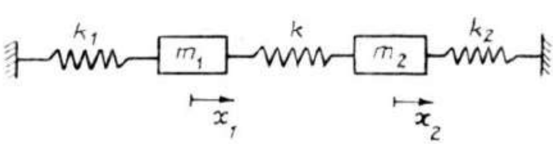
Ví dụ 3.7. Viết hàm Lagrăng cho hệ như trên Hình 3.8.

Bài giải. Ta có các biểu thức của động năng T và thế năng Π của hệ như sau:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2,$$
$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2.$$

Do vậy

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} (k_1 + k) x_1^2 - \frac{1}{2} (k_2 + k) x_2^2 + k x_1 x_2.$$

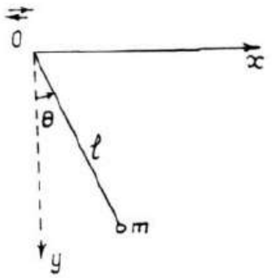


Hình 3.8
Hệ dao động có hai bậc tự do

Ví dụ 3.8. Điểm treo O của con lắc đơn, chiều dài l, dịch chuyển ngang theo luật $x = A\sin\omega t$. Tìm phương trình vi phân của chuyển động.

Bài giải. Trước hết nhận xét rằng ở đây ta có trường hợp liên kết động (phụ thuộc thời gian). Do vậy, hệ khảo sát là rêônôm. Chú ý rằng tác dụng của lực duy trì chuyển động của điểm treo 0 được phản ánh qua sự phụ thuộc vào thời gian t của động năng T của điểm m, chứ không thể hiện trong biểu thức của lực suy rộng. Ở đây ta có thể dùng dạng chuẩn (3.23) của phương trình Lagrăng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (1)$$



Hình 3.9

Con lắc có điểm treo di động ngang

Biểu thức động năng của điểm m là:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2),$$

$$v_x = \dot{x} + v_r\cos\theta = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta,$$

$$v_y = v_r\sin\theta = l\dot{\theta}\sin\theta.$$

Vậy,

$$T = \frac{m}{2}(A^2\omega^2\cos^2\omega t + l^2\dot{\theta}^2 + 2Al\omega\dot{\theta}\cos\theta\cos\omega t). \quad (2)$$

Lấy O làm gốc quy chiếu, ta có biểu thức của thế năng Π:

$$\Pi = -mgl\cos\theta.$$

Hàm Lagrăng sẽ là

$$\begin{aligned} L &= T - \Pi \\ &= \frac{m}{2}(A^2\omega^2\cos^2\omega t + l^2\dot{\theta}^2 + 2Al\omega\dot{\theta}\cos\theta\cos\omega t) + mgl\cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= mAl\omega\cos\theta\cos\omega t + ml^2\dot{\theta}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) &= ml^2\ddot{\theta} - mAl\omega^2\cos\theta\sin\omega t - mAl\omega\dot{\theta}\sin\theta\cos\omega t, \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} &= -mAl\omega\dot{\theta}\sin\theta\cos\omega t - mgl\sin\theta. \end{aligned}$$

Phương trình (1) bây giờ có dạng

$$ml^2\ddot{\theta} - mAl\omega^2\cos\theta\sin\omega t + mgl\sin\theta = 0,$$

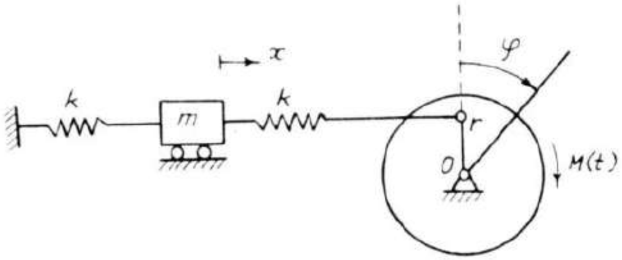
hoặc

$$\ddot{\theta} - \frac{A}{l}\omega^2\cos\theta\sin\omega t + \frac{g}{l}\sin\theta = 0. \tag{4}$$

Với θ nhỏ, ta có thể thay $\sin\theta \sim \theta$ và $\cos\theta \sim 1$ và có phương trình vi phân tuyến tính quen biết:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{A}{l}\omega^2\sin\omega t. \tag{5}$$

Ví dụ 3.9. Lập các phương trình chuyển động của hệ cho trên Hình 3.10:



Hình 3.10

Hệ cơ học có hai bậc tự do

Vật dao động trên mặt phẳng ngang. Đĩa quay quanh trục O

Bài giải. Động năng T và thế năng Π của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2,$$
$$\Pi = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(r\varphi - x)^2,$$

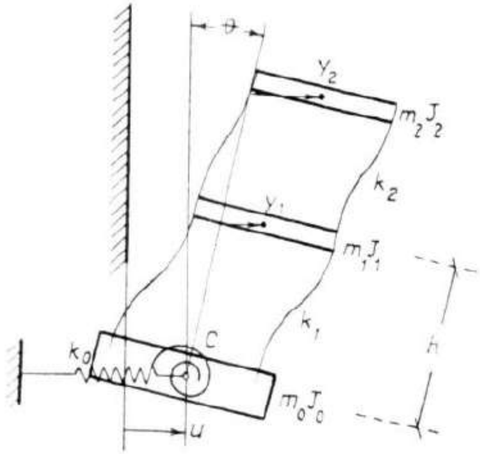
trong đó J là mômen quán tính của đĩa đối với trục quay. Công ảo của ngoại lực tác dụng:

$$\delta A = M(t).\delta\varphi.$$

Do vậy ta có lực suy rộng $Q_\varphi = M(t)$. Thay thế các biểu thức của T, Π và Q_φ vào (3.24) ta được các phương trình chuyển động sau đây:

$$m\ddot{x} + 2kx - kr\varphi = 0,$$
$$J\ddot{\varphi} - krx + kr^2\varphi = M(t).$$

Ví dụ 3.10. Trên hình vẽ là mô hình giản lược của ngôi nhà hai tầng mà móng của nó chịu dịch chuyển tịnh tiến và quay. Hãy xác định động năng T, thế năng Π và các phương trình chuyển động.



Hình 3.11
Mô hình ngôi nhà hai tầng

Bài giải. Ta chọn u và θ cho dịch chuyển tịnh tiến và quay của móng nhà và y_1, y_2 cho dịch chuyển đàn hồi của các tầng. Các phương trình cho T và Π trở thành:

$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{u}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{u} + h\dot{\theta} + \dot{y}_1)^2 + $$
$$+ \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{u} + 2h\dot{\theta} + \dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}^2,$$
$$\Pi = \frac{1}{2}k_0u^2 + \frac{1}{2}c\theta^2 + \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2,$$

ở đây u, θ, y_1 và y_2 là những tọa độ suy rộng. Thay thế vào các phương trình Lagrăng (3.24) ta được các phương trình vi phân của chuyển động. Chẳng hạn với tọa độ suy rộng θ ta có

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = (J_0 + J_1 + J_2)\dot{\theta} + m_1h(\dot{u} + h\dot{\theta} + \dot{y}_1) + 2m_2h(\dot{u} + 2h\dot{\theta} + \dot{y}_2),$$
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = c\theta.$$

Bây giờ phương trình

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \theta}$$

có dạng:

$$(m_1+2m_2)h\ddot{u}+(J_0+J_1+J_2+m_1h^2+4m_2h^2)\ddot{\theta}+m_1h\ddot{y}_1+2m_2h\ddot{y}_2=-c$$

Tương tự như vậy, đối với các tọa độ suy rộng khác:

$$(m_0+m_1+m_2)\ddot{u}+(m_1+2m_2)h\ddot{\theta}+m_1\ddot{y}_1+m_2\ddot{y}_2=-k_0u,$$

$$m_1\ddot{u}+m_1h\ddot{\theta}+m_1\ddot{y}_1=-(k_1+k_2)y_1+k_2y_2,$$

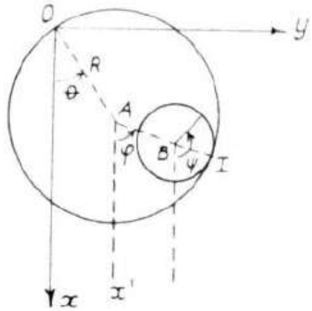
$$m_2\ddot{u}+2m_2h\ddot{\theta}+m_2\ddot{y}_2=k_2y_1-k_2y_2.$$

Nếu viết các phương trình này dưới dạng ma trận ta sẽ có:

$$\begin{bmatrix} m_0+m_1+m_2 & (m_1+2m_2)h & m_1 & m_2 \\ (m_1+2m_2)h & \sum J+m_1h^2+4m_2h^2 & m_1h & 2m_2h \\ m_1 & m_1h & m_1 & 0 \\ m_2 & 2m_2h & 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{u}\\ \ddot{\theta}\\ \ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ \theta\\ y_1\\ y_2\end{bmatrix}=0.$$

Nhận xét rằng các phương trình biểu diễn bởi góc trên bên trái của các ma trận là phương trình chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của vật rắn.

Ví dụ 3.11. Một bánh xe đồng chất khối lượng M, bán kính R, dao động quanh điểm 0 trong mặt phẳng thẳng đứng cố định oxy. Một bánh xe thứ hai nhỏ hơn, khối lượng m, bán kính r lăn không trượt bên trong bánh xe lớn. Hãy xác định vị trí cân bằng của hệ và những dịch chuyển nhỏ quanh vị trí này.



Hình 3.12
Cơ hệ gồm hai bánh xe. Bánh nhỏ lăn bên trong bánh xe lớn

Gọi A, B tương ứng là tâm của vòng tròn lớn và vòng tròn nhỏ. Đặt $\angle xOA = \theta$, $\angle x'AB = \varphi$ và ψ là góc của một bán kính xác định của vòng tròn nhỏ làm với đường thẳng đứng.

Trước hết ta viết điều kiện lăn không trượt của vòng tròn nhỏ trên vòng tròn lớn. Gọi $\vec{\Omega}$ là vận tốc góc của vòng tròn lớn trong chuyển động quay quanh trục Oz; $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của vòng tròn nhỏ. Chiếu các vectơ $\vec{\Omega}$ và $\vec{\omega}$ trên các trục Ox, Oy và Oz ta được:

$$\vec{\Omega}(0,0,\dot{\theta}), \qquad \vec{\omega}(0,0,\dot{\psi}).$$

Vận tốc của điểm I thuộc vòng tròn lớn là: $\vec{v}_I = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OI}$, ở đây

$$\overrightarrow{OI}(R\cos\theta + R\cos\varphi, R\sin\theta + R\sin\varphi, 0).$$

Do vậy

$$\vec{v}_I[-R\dot{\theta}(\sin\theta + \sin\varphi), R\dot{\theta}(\cos\theta + \cos\varphi), 0]. \tag{1}$$

Vận tốc của điểm I_* thuộc vòng tròn nhỏ trùng với điểm I thuộc vòng tròn lớn, là:

$$\vec{V}_{I^*} = \vec{V}_B + \vec{\omega} \times \overrightarrow{BI_*}. \tag{2}$$

Điểm B có tọa độ

$$x_B = R\cos\theta + (R-r)\cos\varphi,$$
$$y_B = R\sin\theta + (R-r)\sin\varphi,$$
$$z_B = 0,$$

và do vậy

$$\begin{aligned} \dot{x}_B &= -R\dot{\theta}\sin\theta - (R-r)\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y}_B &= R\dot{\theta}\cos\theta + (R-r)\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{z}_B &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ta tính các thành phần của $\vec{\omega} \times \vec{BI_*}$. Vì các vectơ $\vec{\omega}$, $\vec{BI_*}$ có các thành phần

$$\vec{\omega}(0, 0, \dot{\psi}), \qquad \vec{BI_*}(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$$

nên

$$\vec{S} = \vec{\omega} \times \vec{BI_*} = \vec{S}(-r\dot{\psi}\sin\varphi, r\dot{\psi}\cos\varphi, 0). \tag{4}$$

Thay (3), (4) vào (2) ta được

$$\begin{aligned} \vec{V}_{I^*}[&-R\dot{\theta}\sin\theta - (R-r)\dot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\psi}\sin\varphi, \\ &R\dot{\theta}\cos\theta + (R-r)\dot{\varphi}\cos\varphi + r\dot{\psi}\cos\varphi, 0]. \end{aligned} \tag{5}$$

Để cho vòng tròn nhỏ lăn không trượt trên vòng tròn lớn ta phải có

$$\vec{V}_I = \vec{V}_{I^*}.$$

So sánh (1) và (5) ta được điều kiện lăn không trượt như sau:

$$R(\dot{\theta} - \dot{\varphi}) = r(\dot{\psi} - \dot{\varphi}). \tag{6}$$

Vậy góc ψ là hàm tuyến tính của θ và φ:

$$\psi = \alpha\theta + \beta\varphi + \gamma.$$

Hệ khảo sát là một hệ hôlônôm. Vị trí của hệ phụ thuộc hai thông số độc lập θ và φ. Ở đây lực hoạt động là các trọng lực với lực hàm

$$U = Mgx_A + mgx_B = g[(M+m)R\cos\theta + m(R-r)\cos\varphi],$$

và vì U đạt cực đại với $\theta = 0$ và $\varphi = 0$ nên tại vị trí này, hệ cân bằng ổn định.

Ta tính động năng T của hệ khảo sát trong chuyển động quanh vị trí $\theta = 0$, $\varphi = 0$. Động năng T_1 của vòng tròn lớn là $\frac{1}{2}I_0\Omega^2 = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2$, $I_0 = 2MR^2$. Do vậy $T_1 = MR^2\dot{\theta}^2$. Động năng T_2 của vòng tròn nhỏ là:

$$T_2 = \frac{1}{2}(mV_B^2 + mr^2\dot{\psi}^2)$$

với V_B tại $\theta = \varphi = 0$ là

$$V_B[0, R\dot{\theta} + (R-r)\dot{\varphi}, 0]$$

Vậy chú ý đến biểu thức (6) ta có

$$T = T_1 + T_2 = (M+m)R^2\dot{\theta}^2 + m(R-r)^2\dot{\varphi}^2,$$
$$L = T + U = (M+m)R^2\dot{\theta}^2 + m(R-r)\dot{\varphi}^2$$
$$+ (M+m)gR\cos\theta + m(R-r)g\cos\varphi.$$

Các phương trình Lagrăng đối với θ và φ cho ta

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{2R}\sin\theta, \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{2(R-r)}\sin\varphi.$$

Với các chuyển động nhỏ của hệ quanh vị trí cân bằng $\theta = 0$, $\varphi = 0$ ta có $\sin\theta \simeq \theta$, $\sin\varphi \simeq \varphi$ và

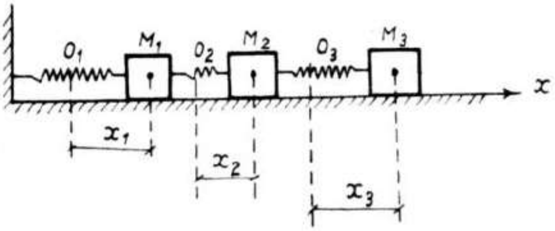
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{2R}\theta, \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{2(R-r)}\varphi.$$

Các phương trình này có thể tích phân một cách dễ dàng:

$$\theta = a\cos(\omega_1 t + \theta_0), \qquad \varphi = b\cos(\omega_2 t + \varphi_0), \qquad (7)$$

ở đây $a, \theta_0, b, \varphi_0$ là các hằng số, $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2R}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2(R-r)}}$. Vậy, chuyển động nhỏ của hệ ((a,b) nhỏ) quanh vị trí $\theta = \varphi = 0$ là những chuyển động dao động.

Ví dụ 3.12. Viết các phương trình vi phân của chuyển động của hệ gồm ba vật nặng M_1, M_2, M_3 nối với nhau bởi các lò xo như trên hình vẽ. Khối lượng của các vật là m_1, m_2, m_3. Độ cứng của các lò xo là c_1, c_2, c_3.



Hình 3.13

Hệ dao động gồm ba vật nặng nối với nhau bằng các lò xo

Bài giải. Hệ có ba bậc tự do. Các vật nặng được coi như những vật điểm. Ta chọn tọa độ suy rộng là các khoảng cách x_1, x_2, x_3 từ các chất điểm đến vị trí O_1, O_2, O_3, tại đó các lò xo không bị giãn. Khi đó ta có các biểu thức động năng T và thế năng Π của hệ như sau:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2,$$
$$\Pi = \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{2}c_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}c_3(x_3 - x_2)^2.$$

Viết hàm Lagrăng $L = T - \Pi$, ta tìm được

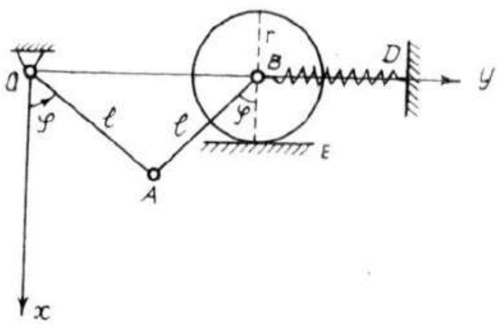
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m_3\dot{x}_3,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1),$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -c_2(x_2 - x_1) + c_3(x_3 - x_2),$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -c_3(x_3 - x_2).$$

Cuối cùng ta có các phương trình Lagrăng (3.23) dưới dạng

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2(x_1 - x_2) = 0,$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) + c_3(x_2 - x_3) = 0,$$
$$m_3\ddot{x}_3 + c_3(x_2 - x_3) = 0.$$

Ví dụ 3.13. Viết phương trình chuyển động của hệ gồm hai thanh đồng chất nặng, khối lượng m, chiều dài l nối bản lề với nhau tại A và quay quanh một bản lề O cố định như trên hình vẽ. Đầu B của thanh AB được gắn bản lề với tâm của một bánh xe đồng chất, bán kính r, khối lượng M. Tâm B của đĩa được gắn với lò xo có độ cứng c và có một đầu cố định. Bánh xe lăn không trượt trên đường nằm ngang.



Hình 3.14

Hệ tay quay - thanh truyền gắn với bánh xe

Bài giải. Hệ khảo sát có một bậc tự do. Lấy góc φ giữa trục $0x$ và thanh OA làm tọa độ suy rộng. Tọa độ trọng tâm x_i, y_i của các thanh $OA(x_1, y_1)$ và $AB(x_2, y_2)$ và của điểm $B(x_3, y_3)$ là:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{l}{2}\cos\varphi, & y_1 &= \frac{l}{2}\sin\varphi, \\ x_2 &= \frac{l}{2}\cos\varphi, & y_2 &= l\sin\varphi + \frac{l}{2}\sin\varphi = \frac{3}{2}l\sin\varphi, \\ x_3 &= 0, & y_3 &= 2l\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Động năng T của hệ bằng (dùng định lý Koenig):

$$T = \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}Mv_3^2 + \frac{1}{2}I_B\omega^2,$$

trong đó I_0 là mômen quán tính của thanh $0A$ đối với trục $0z$, I_B - momen quán tính của bánh xe đối với tâm B, còn ω - vận tốc góc của bánh xe,

$$I_0 = \frac{ml^2}{3}, \quad I = \frac{ml^2}{12}, \quad I_B = \frac{Mr^2}{2}.$$

Vì

$$\dot{x}_2 = -\frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad \dot{y}_2 = \frac{3}{2}l\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{x}_3 = 0, \quad \dot{y}_3 = 2l\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

nên

$$v_2^2 = \frac{l^2}{4}(1 + 8\cos^2\varphi)\dot{\varphi}^2, \quad v_3^2 = 4l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi,$$

$$\omega = \frac{v_3}{r} = \frac{2l}{r}\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

và

$$T = \frac{1}{2}(K + N\cos^2\varphi)\dot{\varphi}^2,$$

ở đây,

$$K = I_0 + I + \frac{ml^2}{4} = \frac{3}{2}ml^2, \quad N = 2ml^2 + 6Ml^2 = 2(m + 3M)l^2.$$

Thế năng của hệ là:

$$\Pi = -mgx_1 - mgx_2 + \frac{1}{2}cy_3^2 = -mgl\cos\varphi + 2cl^2\sin^2\varphi.$$

Do vậy,

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}(K + Ncos^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi - 2cl^2\sin^2\varphi.$$

Từ đây tìm được

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (K + N\cos^2\varphi)\dot{\varphi},$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -N\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 - mgl\sin\varphi - 4cl^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Phương trình Lagrăng (3.23) bây giờ có dạng

$$(K+N\cos^2\varphi)\ddot{\varphi} - N\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + 4cl^2\sin\varphi\cos\varphi + mgl\sin\varphi = 0.$$

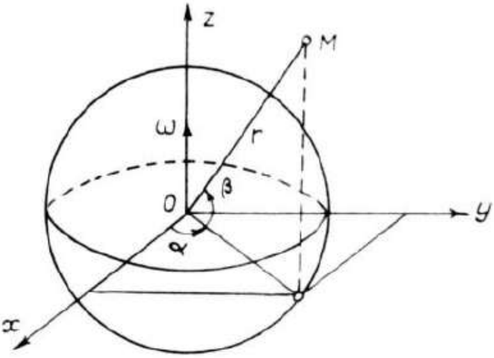
Nếu góc φ nhỏ ($\sin\varphi \simeq \varphi, \cos\varphi \simeq 1$) thì ta có phương trình sau đây:

$$(K + N)\ddot{\varphi} + (4cl^2 + mgl)\varphi = 0.$$

Vậy là hệ sẽ thực hiện dao động điều hòa với tần số Ω:

$$\Omega = \sqrt{\frac{4cl^2 + mgl}{K + N}} = \sqrt{\frac{12cl + 3mgl}{2(4m + 9M)l}}.$$

Ví dụ 3.14. Viết phương trình chuyển động của chất điểm M khối lượng m dưới tác dụng của lực hấp dẫn Niutơn của Trái Đất (không kể đến chuyển động quay của Trái Đất). Coi Trái Đất như một quả cầu đồng chất.



Hình 3.15
Mô hình Trái Đất và chất điểm nặng

Bài giải. Ta đưa vào hệ trục tọa độ $0xyz$, trục $0z$ hướng theo trục quay của Trái Đất, tâm O tại tâm của Trái Đất. Coi rằng hệ tọa độ này không tham gia vào chuyển động quay của Trái Đất. Chuyển động của điểm M đối với hệ trục này là chuyển động tuyệt đối. Ta lấy các tọa độ $q_1 = r, q_2 = \alpha, q_3 = \beta$ là những tọa độ suy rộng (Hình 3.15). Các tọa độ Đềcác x, y, z của điểm M sẽ là:

$$x = r\cos\beta\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta\sin\alpha, \quad z = r\sin\beta.$$

Do vậy

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\beta\cos\alpha - r\dot{\beta}\sin\beta\cos\alpha - r\dot{\alpha}\cos\beta\sin\alpha, \ldots$$

Ta có động năng của chất điểm

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2 + r^2\dot{\alpha}^2\cos^2\beta). \quad (1)$$

Thế năng của chất điểm trong trường lực hấp dẫn Niutơn là:

$$\Pi = -\frac{m\mu^2}{r}. \quad (2)$$

Khi $r = R$ thì $\Pi = -mg$. Do vậy $\mu^2 = gR^2$. Ta có:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\beta}^2 + r^2\dot{\alpha}^2\cos^2\beta) + \frac{m\mu^2}{r}. \tag{3}$$

Từ đây tìm được

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\beta}^2 + mr\dot{\alpha}^2\cos^2\beta - \frac{m\mu^2}{r^2},\\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = mr^2\dot{\alpha}cos^2\beta, \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = mr^2\dot{\beta},\\
&\frac{\partial L}{\partial \beta} = -mr^2\dot{\alpha}^2\cos\beta\sin\beta.
\end{aligned} \tag{4}$$

Các phương trình Lagrăng (3.23) bây giờ có dạng

$$\begin{aligned}
&\ddot{r} - r(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2\cos^2\beta) = -\frac{\mu^2}{r^2},\\
&mr^2\dot{\alpha}\cos^2\beta = c_1,\\
&\frac{d}{dt}(r^2\dot{\beta}) + \frac{1}{2}r^2\dot{\alpha}^2\sin 2\beta = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

trong đó c_1 là hằng tích phân.

3.5. PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG TRONG TRƯỜNG HỢP HÀM THẾ SUY RỘNG

Bây giờ ta xét trường hợp khi tồn tại một hàm thế suy rộng $V(t, q_k, \dot{q}_k)$ thay cho hàm thế thông thường $\Pi(t, q_k)$ sao cho các lực suy rộng Q_i được biểu diễn qua V nhờ các công thức:

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{3.27}$$

Khi đó, các phương trình Lagrăng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \dots, n).$$

lại viết được dưới dạng (3.23) với

$$L = T - V. \tag{3.28}$$

Từ các công thức (3.27) suy ra

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \ldots, \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.29}$$

trong đó các số hạng không viết ra $(\ldots)$ không chứa các gia tốc suy rộng $\ddot{q}_k$, $(k = 1, \ldots, n)$.

Vì rằng trong cơ học ta chỉ xét những trường hợp khi các lực suy rộng không phụ thuộc rõ vào các gia tốc suy rộng, mà chỉ phụ thuộc vào tọa độ, vận tốc suy rộng và thời gian

$$Q_i = Q_i(t, q_k, \dot{q}_k), \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

nên theo các công thức (3.29), trong những trường hợp này tất cả các đạo hàm riêng cấp hai của V theo các vận tốc suy rộng phải đồng nhất bằng không, nghĩa là hàm thế suy rộng V phụ thuộc tuyến tính vào các vận tốc suy rộng

$$V = \sum_{i=1}^{n} b_i \dot{q}_i + \Pi = V_1 + \Pi, \tag{3.30}$$

ở đây $b_i (i = 1, \ldots, n)$ và Π là những hàm của các tọa độ $q_1, \ldots, q_n$ và thời gian t. Nhưng khi đó, theo (3.28), hàm Lagrăng L lại là dạng toàn phương đối với các vận tốc $\dot{q}_i$ và thay cho các biểu thức (3.26) ta có

$$L_2 = T_2, \qquad L_1 = T_1 - V_1, \qquad L_0 = T_0 - \Pi,$$

vì rằng với hàm thế thông thường $c_i = a_i$, còn với hàm thế suy rộng $c_i = a_i - b_i$, ngoài ra luôn có $c_{ik} = a_{ik}, c_0 = a_0 - \Pi$. Thay thế biểu thức (3.30) vào (3.27) ta sẽ được

$$Q_i = \frac{db_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{k=1}^{n} b_k\dot{q}_k + \Pi\right] \tag{3.31}$$

$$= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial b_i}{\partial q_k} - \frac{\partial b_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial b_i}{\partial t}, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Các công thức (3.31) chứng tỏ rằng nếu phần tuyến tính V_1 của hàm thế suy rộng không phụ thuộc rõ vào thời gian ($\dfrac{\partial b_i}{\partial t} = 0$) thì các lực suy rộng Q_i là tổng của các lực thế $-\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ và các lực gyrôscốp:

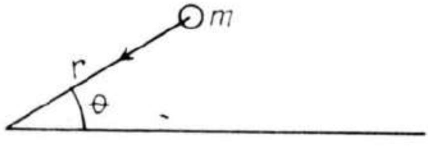
$$Q_i^* = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_k, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

trong đó

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} = \frac{\partial b_i}{\partial q_k} - \frac{\partial b_k}{\partial q_i}, \qquad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{3.32}$$

Các hệ kinh điển, trong đó các lực có hàm thế thông thường $V(t, q_i)$ hoặc hàm thế suy rộng $V(t, q_i, \dot{q}_i)$ được gọi là **các hệ tự nhiên**. Đối với các hệ này hàm Lagrăng L là hàm bậc hai của các vận tốc suy rộng, nghĩa là được biểu diễn bởi biểu thức (3.25), trong đó L_2 là dạng toàn phương xác định dương đối với các vận tốc suy rộng.

Ví dụ 3.15. Viết các phương trình Lagrăng của chuyển động của chất điểm trong mặt phẳng dưới tác dụng của lực xuyên tâm.



Hình 3.16

Chất điểm chuyển động trong trường lực xuyên tâm

Ta chọn các tọa độ suy rộng $q_1 = r, q_2 = \theta$. Khi đó

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \\ V &= V(r), \\ L &= T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \end{aligned}$$

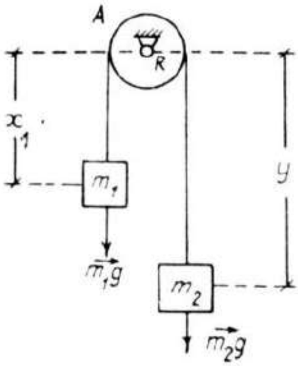
Vì

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + F_r,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr\dot{\theta}^2, \qquad F_r = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

nên các phương trình (3.23) có dạng

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + F_r, \qquad \frac{d}{dt}(mr\dot{\theta}^2) = 0.$$

Ví dụ 3.16. Hai vật nặng khối lượng m_1 và m_2 nối với nhau bằng một sợi dây mảnh, không giãn, chiều dài l vắt qua ròng rọc A bán kính R. Mômen quán tính của ròng rọc đối với trục quay là I. Bỏ qua sự trượt giữa dây và ròng rọc cũng như ma sát ở ổ trục quay. Tìm gia tốc của các vật nặng.



Hình 3.17

Ròng rọc đơn

Hệ khảo sát có một bậc tự do. Lấy khoảng cách x_1 của vật m_1 làm tọa độ định vị của hệ. Vận tốc góc ω của ròng rọc là: $\omega = \frac{v_1}{R} = \frac{\dot{x}_1}{R}$. Biểu thức động năng của cả hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Thế năng V của hệ là:

$$V = -m_1gx_1 - m_2gx_2.$$

Ở đây: $x_1 + x_2 = l - \pi R$. Do vậy $\dot{x}_2 = -\dot{x}_1$ và $x_2 = l - x_1 - \pi R$, Do đó,

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})\dot{x}_1^2 + (m_1 - m_2)gx_1 + const.$$

Phương trình Lagrăng (3.23) cho ta:

$$(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2})\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g$$

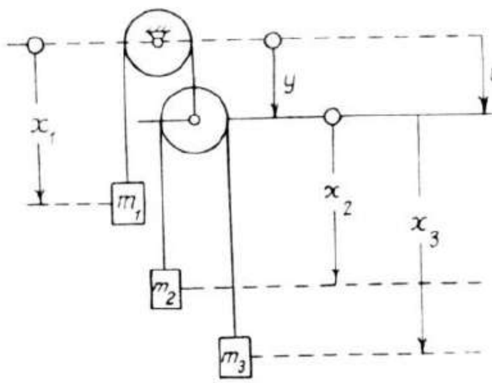
hoặc

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}g.$$

Ta thấy rằng nếu $m_1 > m_2$ thì vật m_1 đi xuống, còn $m_1 < m_2$ thì vật m_1 đi lên với gia tốc không đổi.

Ví dụ 3.17. Khảo sát hệ ròng rọc kép gồm hai ròng rọc cùng kích thước, một cố định và một di động. Để đơn giản, ta giả thiết khối lượng của các ròng rọc có thể bỏ qua so với khối lượng của các vật nặng m_1, m_2, m_3. Chiều dài của các dây là l và l_1.

Bài giải. Ta có hệ hai bậc tự do. Chọn các tọa độ độc lập x_1 và x_2 như trên Hình 3.18 để định vị hệ thống. Ta có:



Hình 3.18

Ròng rọc kép

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{u} + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{u} + \dot{x}_3)^2,$$
$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g(u + x_2) - m_3 g(u + x_3).$$

Vì $u + x_1 = l - \pi R$ nên $u + x_2 = x_2 - x_1 + l - \pi R, \dot{u} = -\dot{x}_1$

$x_2 + x_3 = l_1 - \pi R$ nên $\dot{x}_3 = -\dot{x}_2, u + x_3 = -x_2 - x_1 + l + l_1 - 2\pi R$

và

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_2 + \dot{x}_1)^2 + $$
$$+ (m_1 - m_2 - m_3)gx_1 + (m_2 - m_3)gx_2 + const.$$

Các phương trình Lagrăng (3.23) bây giờ có dạng

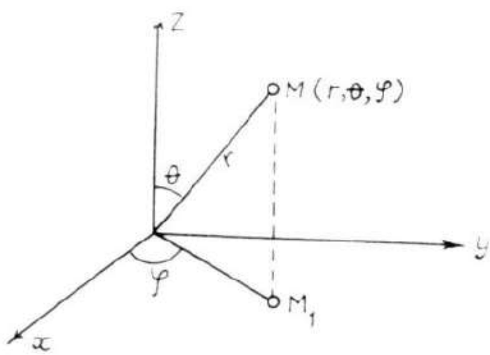
$$m_1\ddot{x}_1 + m_2(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + m_3(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = (m_1 - m_2 - m_3)g,$$

$$m_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + m_3(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1) = (m_2 - m_3)g.$$

Ví dụ 3.18. Một chất điểm tự do có khối lượng bằng đơn vị chuyển động trong hệ tọa độ cố định $0xyz$. Vị trí của chất điểm được xác định bởi các tọa độ cầu r, θ, φ. Chất điểm chịu tác dụng của lực với hàm lực

$$U = f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta},$$

trong đó f, g và h tương ứng là những hàm của r, θ và φ. Hãy viết các phương trình Lagrăng đối với các tọa độ r, θ và φ và chứng minh rằng chúng có thể tích phân bằng những cầu phương.



Hình 3.19
Hệ toạ độ cầu

Bài giải. Ta có các hệ thức sau đây giữa các tọa độ Đềcác x, y, z và các tọa độ cầu r, φ, θ:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Do vậy

$$2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta.$$

Gọi $f'(r)$, $g'(\theta)$ và $h'(\varphi)$ là những đạo hàm của các hàm f, g và h

đối với các đối số của chúng, ta có:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta),$$
$$\frac{\partial U}{\partial r} = f'(r) - \frac{2}{r^3}\left[g(\theta) + \frac{h(\varphi)}{\sin^2\theta}\right],$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = r^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{g'(\theta)}{r^2} - \frac{2h(\varphi)\cos\theta}{r^2\sin^3\theta},$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{h'(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}.$$

Phương trình Lagrăng đối với biến r sẽ là:

$$\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) = f'(r) - \frac{2}{r^3}\left[g(\theta) + \frac{h(\varphi)}{\sin^2\theta}\right]. \tag{1}$$

Phương trình Lagrăng đối với biến θ:

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\dot{\varphi}^2 sin\theta\cos\theta = \frac{g'(\theta)}{r^2} - \frac{2h(\varphi)\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}, \tag{2}$$

và cuối cùng, đối với biến φ:

$$r^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta + 2r^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta = \frac{h'(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}. \tag{3}$$

Bây giờ ta nghiên cứu cách tích phân các phương trình này. Trước hết viết (3) dưới dạng:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) = \frac{h'(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}$$

hoặc

$$r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta) = \dot{\varphi}h'(\varphi) = \frac{dh(\varphi)}{dt}.$$

Tích phân lên ta được

$$r^4\dot{\varphi}^2\sin^4\theta = 2[h(\varphi) + \alpha] = 2H(\varphi), \tag{4}$$

trong đó α là hằng số, được xác định bởi các điều kiện đầu.

Dùng (4) ta có thể viết vế trái của (2) như sau:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r^2\dot{\varphi}^2 sin\theta\cos\theta = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - \frac{2[h(\varphi)+\alpha]\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}$$

và phương trình (2) có dạng

$$r^2\dot{\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \dot{\theta}g'(\theta) + \frac{2\alpha\dot{\theta}\cos\theta}{sin^2\theta} = \frac{d}{dt}\left[g(\theta) - \frac{\alpha}{\sin^2\theta}\right].$$

Tích phân lên ta được

$$r^4\dot{\theta}^2 = 2\left[g(\theta) - \frac{\alpha}{\sin^2\theta} + \beta\right] = 2G(\theta), \tag{5}$$

trong đó β là một hằng số tích phân mới.

Ta dùng định lý động năng: $T = U + const$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = 2f(r) + \frac{2g(\theta)}{r^2} + \frac{2h(\varphi)}{r^2\sin^2\theta} + const.$$

Song theo (4) và (5), ta có:

$$\dot{r}^2 + \frac{2}{r^2}\left[g(\theta) - \frac{\alpha}{\sin^2\theta} + \beta\right] + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}[h(\varphi)+\alpha] =$$
$$= 2f(r) + \frac{2g(\theta)}{r^2} + \frac{2h(\varphi)}{r^2\sin^2\theta} + const,$$

và sau cùng

$$\dot{r}^2 = 2\left[f(r) - \frac{\beta}{r^2}\right] + const = 2F(r). \tag{6}$$

Từ đây ta tìm được r theo t bằng một cầu phương.

Quay trở lại các phương trình (5) và (6)

$$\frac{dr^2}{dt^2} = 2F(r)\ , \quad r^4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2G(\theta),$$

ta có
$$\frac{dr}{r^2\sqrt{F(r)}} = \pm\frac{d\theta}{\sqrt{G(\theta)}}.$$
Bằng hai phép cầu phương ta sẽ tìm được một hệ thức giữa r và θ.

Sau cùng, từ các phương trình (4) và (5)
$$r^4\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin^4\theta = 2H(\varphi), \qquad r^4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2G(\theta),$$
ta có
$$\frac{d\varphi}{\sqrt{H(\varphi)}} = \pm\frac{d\theta}{\sqrt{G(\theta)}\sin^2\theta}.$$
Bằng hai phép cầu phương ta tìm được một hệ thức giữa θ và φ.

Ví dụ 3.19. Trong trường điện từ, lực Lorentz tác dụng lên hạt tích điện có dạng
$$\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{H}), \tag{1}$$
trong đó $\vec{v}$ là vận tốc của hạt, e là điện tích, c là tốc độ ánh sáng, còn $\vec{E}$ và $\vec{H}$ là các cường độ của điện trường và từ trường. Các vectơ $\vec{E}$ và $\vec{H}$ được biểu diễn qua hàm thế vô hướng φ và vectơ $\vec{A}$ nhờ các công thức:
$$\vec{E} = -grad\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = rot\vec{A}; \tag{2}$$
$$rot\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$
Từ các phương trình (1),(2) ta có:
$$\begin{aligned}
F_x &= -e\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right] = \\
&= -e\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \frac{e}{c}\left(\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) = \\
&= -e\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) \\
&\quad + \frac{e}{c}\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right). \qquad (3
\end{aligned}$$

Ta đưa vào hàm V như sau:

$$V = e\varphi - \frac{e}{c}(\vec{v}.\vec{A}) = e\varphi - \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z), \qquad (4)$$

và lập biểu thức

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial V}{\partial x} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{e}{c}\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right). \qquad (5)$$

So sánh các đẳng thức (3) và (5) ta được

$$F_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial V}{\partial x}. \qquad (6)$$

Tương tự như vậy, có thể chứng minh rằng

$$F_y = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Vậy là, ta có thế năng suy rộng cho lực Lorentz (1) dưới dạng (4), còn hàm Lagrăng L sẽ là:

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{v}.\vec{A}).$$

3.6. XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC LIÊN KẾT NHỜ CÁC PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG LOẠI HAI

Cơ sở lý luận

Trên đây, khi lập các phương trình vi phân của chuyển động dưới dạng Lagrăng loại hai ta đều giả thiết rằng liên kết là lý tưởng và do vậy phản lực liên kết không có mặt trong các phương trình đó. Tuy nhiên, nhiều khi lại cần tìm các phản lực chưa biết nào đó của các liên kết hôlônôm lý tưởng. Để giải quyết bài toán này, khi lập các phương trình Lagrăng loại hai ta ghép các phản lực liên kết cần tìm vào số các lực hoạt động (nguyên lý giải phóng liên kết). Khi đó ta có biểu thức công ảo (3.21)

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k + \vec{R}_k)\delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} (Q_i + Q_i^*)\delta q_i,$$

ở đây Q_i^* là các lực suy rộng tương ứng với các phản lực liên kết. Do vậy, trong các phương trình Lagrăng, các lực suy rộng sẽ gồm hai thành phần tương ứng với các lực hoạt động (Q_i) và phản lực liên kết (Q_i^*):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^*, \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (3.33)$$

Tìm phản lực liên kết đặt thêm vào hệ

Nếu các liên kết là lý tưởng thì theo các công thức (1.21)

$$R_{kx} = \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k}, \; R_{ky} = \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k}, \; R_{kz} = \sum_{j=1}^{\alpha} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_k}, \quad (3.34)$$

trong đó (x_k, y_k z_k) là điểm đặt phản lực, λ_j là các thừa số Lagrăng, còn

$$f_j(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \qquad (j = 1, \ldots, \alpha),$$

là các phương trình liên kết.

Tìm phản lực của liên kết cũ trong hệ

Theo công thức (1.27) ta có

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^{N} \left(R_{kx} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + R_{ky} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + R_{kz} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

hoặc, theo (3.34)

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial y_k} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}.\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial f_j}{\partial y_k}.\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial f_j}{\partial z_k}.\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) =$$

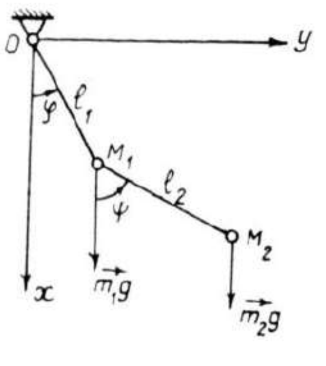
$$= \sum_{j=1}^{\alpha}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Vậy là, các phương trình (3.33) có thể viết được dưới dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial q_i} + \cdots + \lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.35}$$

Về thực chất, các phương trình (3.35) là những phương trình Lagrăng loại một (3.14) viết trong các tọa độ suy rộng.

Ví dụ 3.20. Tìm phản lực của liên kết tác dụng lên con lắc toán học kép khi điểm M_1 chỉ có thể trượt trên máng thẳng đứng. Khối lượng của các vật nặng M_1 và M_2 là m_1 và m_2 còn chiều dài của con lắc là l_1 và l_2.



Hình 3.20
Con lắc toán học kép

Bài giải. Trước hết ta lập các phương trình chuyển động cho trường hợp "con lắc kép tự do" quay quanh trục oz, trong mặt phẳng $0xy$ khi chưa đặt liên kết mới. Hệ khảo sát có hai bậc tự do. Lấy các góc φ và ψ, do các thanh OM_1 và M_1M_2 làm với đường thẳng đứng, làm các tọa độ suy rộng. Gọi tọa độ của M_i là (x_i, y_i) (i = 1, 2) ta có:

$$x_1 = l_1 \cos\varphi, \qquad y_1 = l_1 \sin\varphi,$$
$$x_2 = l_1 \cos\varphi + l_2 \cos\psi, \quad y_2 = l_1 \sin\varphi + l_2 \sin\psi,$$

Do vây,

$$\dot{x}_1 = -l_1\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y}_1 = l_1\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$\dot{x}_2 = -l_1\dot{\varphi}\sin\varphi - l_2\dot{\psi}\sin\psi, \quad \dot{y}_2 = l_1\dot{\varphi}\cos\varphi + l_2\dot{\psi}\cos\psi,$$

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)\\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2[l_2^2\dot{\psi}^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi)],\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi} + m_2l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi),$$
$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = -m_2l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi),$$
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = m_2l_2^2\dot{\psi}^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}\cos(\varphi - \psi),$$
$$\frac{\partial T}{\partial\psi} = m_2l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi).$$

Ta có biểu thức công ảo của các trọng lực

$$\begin{aligned}\delta A &= m_1g\delta x_1 + m_2g\delta x_2\\ &= (-m_1gl_1\sin\varphi - m_2gl_1\sin\varphi)\delta\varphi - m_2l_2g\sin\psi\delta\psi.\end{aligned}$$

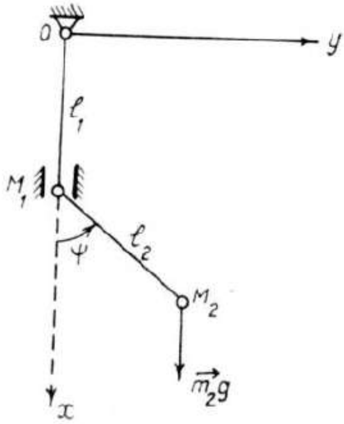
Từ đây ta có các lực suy rộng:

$$Q_\varphi = -(m_1 + m_2)gl_1\sin\varphi, \qquad Q_\psi = -m_2l_2g\sin\psi.$$

Các phương trình chuyển động của hệ có dạng

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi)\ddot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}^2 \sin(\varphi - \psi) =$$
$$= -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi,$$
$$m_2 l_2^2 \ddot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi)\ddot{\varphi} - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \psi) =$$
$$= -m_2 l_2 g \sin\psi. \tag{1}$$

Quay trở lại bài toán đặt ra về "con lắc chịu liên kết", **khi điểm** M_1 **chỉ có thể trượt trong máng thẳng đứng**(Hình 3.21). Cần xác định phản lực tại M_1 của máng lên con lắc. Ta có phương trình liên kết



Hình 3.21
Một trường hợp đặc biệt của con lắc kép

$$f(x_k, y_k, z_k) = y_1 = l_1 \sin\varphi = 0. \tag{2}$$

Bây giờ, các phương trình (3.35) có dạng

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi} + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi)\ddot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}^2 \sin(\varphi - \psi) =$$
$$= -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi + \lambda l_1 \cos\varphi,$$
$$m_2 l_2^2 \ddot{\psi} + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi)\ddot{\varphi} - m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \psi) =$$
$$= -m_2 l_2 g \sin\psi. \tag{3}$$

Vì rằng $y_1 \equiv 0$ (điểm M_1 bất động) nên $\varphi \equiv 0$, và do đó $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$. Phương trình thứ hai của (3) trở thành phương trình dao động của con lắc đơn:

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l_2}\sin\psi = 0. \tag{4}$$

Phương trình thứ nhất của (3) cho ta giá trị λ:

$$\lambda = m_2 l_2 \cos\psi . \ddot{\psi} - m_2 l_2 \dot{\psi}^2 \sin\psi. \tag{5}$$

Theo định lý biến thiên động năng của con lắc đơn, ta có:

$$\dot{\psi}^2 = \dot{\psi}_0^2 - 2\frac{g}{l_2}(1 - \cos\psi), \tag{6}$$

ở đây giả thiết khi t $= 0$, $\psi = \psi_0 = 0, \dot{\psi} = \dot{\psi}_0$. Thay các giá trị của $\ddot{\psi}, \dot{\psi}^2$ từ (4), (6) vào (5) ta được:

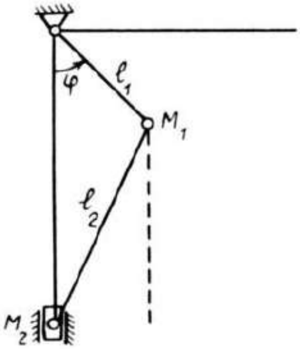
$$\lambda = -\sin\psi[m_2 l_2 \dot{\psi}_0^2 - m_2 g(2 - 3\cos\psi)].$$

Theo (3.34) ta có:

$$R_{1x} = 0, \qquad R_{1y} = \lambda = -\sin\psi[m_2 l_2 \dot{\psi}_0^2 - m_2 g(2 - 3\cos\psi)].$$

Bây giờ ta xét trường hợp **khi điểm M_2 chỉ có thể trượt trong máng thẳng đứng** (Hình 3.22). Hãy xác định phản lực liên kết tại M_2. Khi đó, phương trình liên kết có dạng

$$f(x_k, y_k, z_k) = y_2 = l_1 \sin\varphi + l_2 \sin\psi = 0. \tag{7}$$



Hình 3.22

Trường hợp đặc biệt thứ hai của con lắc kép

Để có các phương trình (3.35), ta cần bổ xung vào vế phải của phương trình thứ nhất của (1) số hạng:

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial\varphi} = \lambda l_1\cos\varphi,$$

và của phương trình thứ hai của (1) số hạng

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial\psi} = \lambda l_2\cos\psi.$$

Để đơn giản bài toán, ta xét trường hợp $l_1 = l_2 = l$. Trong trường hợp này, từ phương trình liên kết (7) ta có:

$$\sin\psi = -\sin\varphi \Rightarrow \psi = -\varphi.$$

Thay kết quả này vào các phương trình chuyển động ta được:

$$\begin{aligned}
&(m_1+m_2)l^2\ddot{\varphi} - m_2l^2\cos 2\varphi\ddot{\varphi} + m_2l^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi = \\
&= -(m_1+m_2)gl\sin\varphi + \lambda l\cos\varphi, \\
&- m_2l^2\ddot{\varphi} + m_2l^2\cos 2\varphi\ddot{\varphi} - m_2l^2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi = \\
&= m_2gl sin\varphi + \lambda l\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{8}$$

Trừ hai phương trình này với nhau sẽ có:

$$(m_1 + 4m_2\sin^2\varphi)\ddot{\varphi} + 2m_2\dot{\varphi}^2\sin 2\varphi = -(m_1+2m_2)\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{9}$$

Nhờ phương trình này ta tìm được chuyển động của hệ.

Bây giờ cộng các phương trình (8) với nhau ta tìm được λ:

$$\lambda = \frac{m_1l\ddot{\varphi}}{2\cos\varphi} + \frac{m_1g}{2}tg\varphi.$$

Sau khi tìm được φ như hàm của thời gian t từ (9), ta sẽ xác định phản lực liên kết tại M_2:

$$R_{2x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad R_{2y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y_2} = \lambda.$$

Ta chuyển sang việc tìm các phản lực suy rộng của các liên kết được bỏ bớt đi. Ở đây hệ khảo sát là hệ hôlônôm có n bậc tự do. Gọi $q_1, \ldots, q_n$ là những tọa độ suy rộng xác định vị trí của hệ. Giả thử có r liên kết được bỏ bớt đi. Khi đó, số bậc tự do sẽ tăng thành $n + r$. Bổ sung vào n tọa độ suy rộng cũ $q_1, \ldots, q_n$, các tọa độ mới $q_{n+1}, \ldots, q_{n+r}$ và chú ý rằng nếu $q_{n+1} = q_{n+2} = \cdots = q_{n+r} \equiv 0$ thì hệ tọa độ mới sẽ trùng với hệ tọa độ cũ. Ta có thể diễn tả việc chuyển từ hệ mới về hệ cũ như là đặt thêm vào hệ mới r liên kết mới dạng

$$f_{n+\mu} = q_{n+\mu} = 0, \qquad (\mu = 1, \ldots, r). \tag{3.36}$$

Khi đó, theo phương trình (3.35) ta có:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{\mu=1}^{r} \lambda_\mu \frac{\partial f_{n+\mu}}{\partial q_i}, \qquad (i = 1, \ldots, n + r)$$

$$T = T(q_1, ..., q_n, ..., q_{n+r}, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_{n+r}). \tag{3.37}$$

Song, vì

$$\frac{\partial f_{n+\mu}}{\partial q_i} = \frac{\partial q_{n+\mu}}{\partial q_i} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } n + \mu \neq i \\ 1 \text{ nếu } n + \mu = i \end{cases}$$

$$(i = 1, \ldots, , n + r, \qquad \mu = 1, \ldots, r)$$

nên các phương trình (3.37) có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i\,, \qquad (i = 1, \ldots, n + r), \tag{3.38}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \lambda_j\,, \qquad (j = n + 1, \ldots, n + r). \tag{3.39}$$

Các phương trình này cần được khảo sát đồng thời với các phương trình (3.36) với chú ý rằng

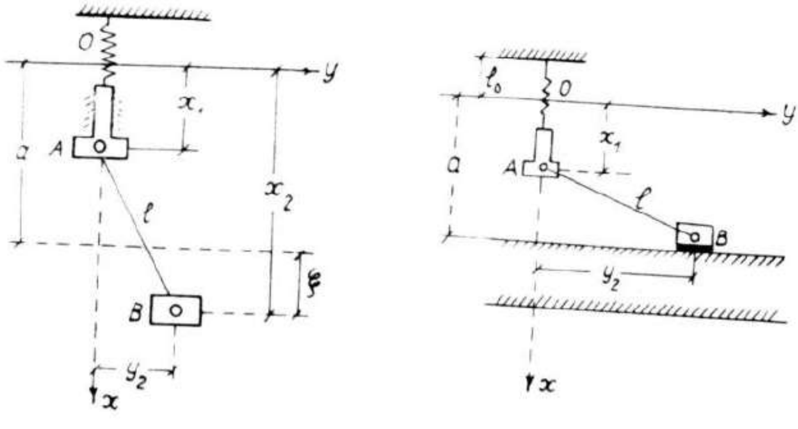
$$q_{n+\mu} \equiv 0, \qquad \dot{q}_{n+\mu} = 0, \qquad \ddot{q}_{n+\mu} = 0, \qquad \mu = 1, \ldots, r. \tag{3.40}$$

Như vậy, để có được các phản lực suy rộng của các liên kết được bỏ bớt đi ta dùng phương trình (3.39):

$$\lambda_j = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]_0 - \left[\frac{\partial T}{\partial q_j}\right]_0 - [Q_j]_0, \qquad (j = n+1, \ldots, n+r), \tag{3.41}$$

trong đó các hệ thức (3.40) được thỏa mãn.

Ví dụ 3.21. Vật nặng A, khối lượng m_1 được treo vào lò xo có độ cứng c có thể tịnh tiến trên đường thẳng đứng. Bằng liên kết bản lề người ta gắn vào A một thanh không trọng lượng chiều dài l. Tại đầu kia của thanh có gắn một vật nặng B, khối lượng m_2. Vật B chuyển động trên mặt nằm ngang. Bỏ qua ma sát, hãy xác định phản lực của mặt nằm ngang.



Hình 3.23
Hệ dao động gồm vật nặng chuyển động thẳng đứng và con lắc đơn

Bài giải. Lấy gốc O của tọa độ tại vị trí của vật A khi lò xo không bị giãn. Hệ khảo sát có một bậc tự do. Lấy tung độ $q_1 = x_1$ của vật A tính từ gốc O làm tọa độ suy rộng. Để tìm phản lực của mặt nằm ngang lên B, ta giả thiết liên kết tựa trên mặt nằm ngang sẽ bị bỏ đi. Khi đó hệ sẽ có hai bậc tự do. Ta bổ xung thêm một tọa độ suy rộng nữa $q_2 = \xi$. Khi $\xi \equiv 0 \quad (\dot{\xi} = 0, \ddot{\xi} = 0)$ hệ mới sẽ trùng với hệ xuất phát. Tọa độ của các vật $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ là

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1, \qquad & y_1 &= 0, \\ x_2 &= a + \xi, \qquad & y_2 &= \sqrt{l^2 - (a + \xi - x_1)^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

trong đó a là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường nằm ngang ban đầu. Động năng của hệ sẽ là

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}[(m_1 + Km_2)\dot{x}_1^2 - 2m_2K\dot{x}_1\dot{\xi} + m_2\dot{\xi}^2].$$

ở đây

$$K = \frac{(a + \xi - x_1)^2}{l^2 - (a + \xi - x_1)^2}. \tag{2}$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = -m_2K\dot{x}_1 + m_2\dot{\xi}, \\ &\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{2}m_2\frac{\partial K}{\partial \xi}\dot{x}_1^2 - m_2\frac{\partial K}{\partial \xi}\dot{x}_1\dot{\xi}, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) = -m_2K\ddot{x}_1 - m_2\frac{dK}{dt}\dot{x}_1 + m_2\ddot{\xi}, \end{aligned} \tag{3}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \xi} &= \frac{2l^2(a + \xi - x_1)}{[l^2 - (a + \xi - x_1)^2]^2}, \\ \frac{dK}{dt} &= \frac{2l^2(a + \xi - x_1)}{[l^2 - (a + \xi - x_1)^2]^2}(\dot{\xi} - \dot{x}_1). \end{aligned}$$

Theo (3.41) và (3.40), $(\xi = 0, \ \dot{\xi} = 0, \ddot{\xi} = 0)$, ta có:

$$\lambda_2 = -m_2\frac{(a - x_1)^2}{l^2 - (a - x_1)^2}\ddot{x}_1 + m_2\frac{l^2(a - x_1)}{[l^2 - (a - x_1)^2]^2} - Q_2. \tag{4}$$

Để tính Q_2 ta dùng biểu thức công ảo

$$\delta A = (-cx_1 + m_1g)\delta x_1 + m_2g\delta\xi.$$

Từ đây tìm được

$$Q_1 = -cx_1 + m_1 g, \qquad Q_2 = m_2 g.$$

và do vậy,

$$\lambda_2 = -m_2 \frac{(a-x_1)^2}{l^2-(a-x_1)^2}\ddot{x}_1 + m_2 \frac{l^2(a-x_1)}{[l^2-(a-x_1)^2]^2}\dot{x}_1^2 - m_2 g. \quad (5)$$

Biến x_1 thỏa mãn phương trình Lagrăng (3.38):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1,$$

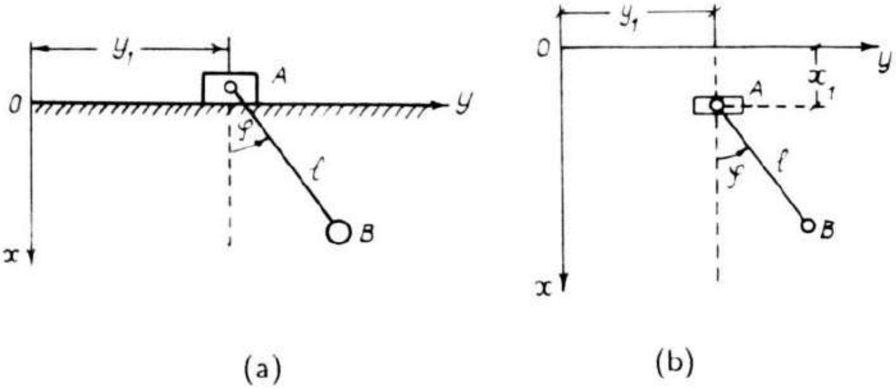
với điều kiện $\xi = \dot{\xi} = \ddot{\xi} = 0$. Cụ thể, ta có:

$$\left[m_1 + m_2 \frac{(a-x_1)^2}{l^2-(a-x_1)^2}\right]\ddot{x}_1 - \frac{m_2 l^2 (a-x_1)\dot{x}_1^2}{[l^2-(a-x_1)^2]^2} = -c_1 x_1 + m_1 g. \quad (6)$$

Ví dụ 3.22. Vật A khối lượng M có thể chuyển động trên đường nằm ngang, nhẵn. Gắn vào A một thanh không trọng lượng, chiều dài l nhờ một bản lề . Đầu kia của thanh có gắn vật nặng B, khối lượng m. Tìm phản lực của đường nằm ngang, coi A, B là những vật điểm.

Bài giải. Hệ khảo sát có hai bậc tự do. Lấy các tọa độ y_1 và φ làm các tọa độ suy rộng (Hình 3.24, a). Để tìm phản lực của đường nằm ngang tác dụng lên vật A, ta giả định đường nằm ngang bị bỏ đi. Khi đó hệ sẽ có ba bậc tự do (Hình 3.24, b) và tọa độ suy rộng mới được bổ sung thêm là $q_3 = x_1$. Khi $x_1 \equiv 0$ thì hệ mới sẽ trùng với hệ xuất phát. Gọi x_1, y_1 là tọa độ của điểm A và x_2, y_2 là tọa độ của điểm B. Ta có:

$$x_2 = x_1 + l\cos\varphi, \quad y_2 = y_1 + l\sin\varphi.$$



Hình 3.24

Con lắc đơn có điểm treo gắn với vật nặng di động

Động năng T của hệ sau khi bỏ đường nằm ngang được xác định bởi biểu thức:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) =$$
$$\frac{1}{2}(M+m)(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\dot{x}_1\dot{\varphi}\sin\varphi + 2l\dot{y}_1\dot{\varphi}\cos\varphi) \quad (1)$$

Từ đây tìm được:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (M+m)\dot{x}_1 - ml\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = (M+m)\ddot{x}_1 - ml\ddot{\varphi}\sin\varphi - ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi. \quad (2)$$

Theo (3.41) và (3.40) ($x_1 = \dot{x}_1 = \ddot{x}_1 = 0$) ta có:

$$\lambda_3 = -ml\ddot{\varphi}\sin\varphi - ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi - Q_3. \quad (3)$$

Để tìm lực suy rộng Q_3 ta dùng biểu thức công ảo:

$$\delta A = Mg\delta x_1 + mg\delta x_2 = (M+m)g\delta x_1 - mgl\sin\varphi\delta\varphi.$$

Từ đây ta có:

$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = -mgl\sin\varphi, \qquad Q_3 = (M+m)g, \tag{4}$$

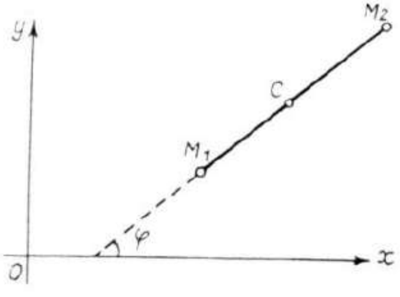
và do vậy

$$\lambda_3 = -ml\ddot{\varphi}\sin\varphi - ml\dot{\varphi}^2\cos\varphi - (M+m)g. \tag{5}$$

Các giá trị $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ sẽ tìm được từ những phương trình Lagrăng (3.38) cho các tọa độ y_1 và φ với điều kiện $x_1 = \dot{x}_1 = \ddot{x}_1 = 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[(M+m)\dot{y}_1 + ml\dot{\varphi}\cos\varphi] = 0, \\ &\ddot{\varphi} + \frac{\ddot{y}_1}{l}\cos\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Ví dụ 3.23. Hai chất điểm khối lượng m_1 và m_2, nối với nhau bằng một sợi dây không trọng lượng, chiều dài l, chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang Oxy. Hãy xác định lực kéo của dây lên các chất điểm.



Hình 3.25

Hai điểm nặng liên kết với nhau bởi một sợi dây

Bài giải. Hệ có ba bậc tự do. Lấy tọa độ của trọng tâm $C(x_c, y_c)$ và góc φ làm tọa độ suy rộng. Ta có phương trình liên kết:

$$f = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - l = 0, \tag{1}$$

trong đó x_1, x_2, y_1, y_2 là các tọa độ của M_1, M_2. Để tìm lực kéo của dây (phản lực liên kết) ta bỏ liên kết dây. Khi đó hệ có thêm một bậc tự do nữa là 4. Lấy s làm tọa độ mới thỏa mãn điều kiện:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = l + s.$$

Ta có các liên hệ sau đây giữa các tọa độ Đêcac của các điểm M_1, M_2 và 4 tọa độ độc lập x_c, y_c, φ, s:

$$x_1 = x_c - \frac{m_2(l+s)\cos\varphi}{m_1 + m_2}, \quad x_2 = x_c + \frac{m_1(l+s)\cos\varphi}{m_1 + m_2},$$

$$y_1 = y_c - \frac{m_2(l+s)\sin\varphi}{m_1 + m_2}, \quad y_2 = y_c + \frac{m_1(l+s)\sin\varphi}{m_1 + m_2}.$$

Biểu thức động năng của hệ có dạng

$$T = \frac{M}{2}(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{m}{2}[\dot{s}^2 + (l+s)^2\dot{\varphi}^2], \tag{2}$$

$$M = m_1 + m_2, \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Vì rằng không có ngoại lực hoạt động tác dụng lên hệ nên các phương trình Lagrăng (3.38), (3.39) cho ta:

$$\begin{aligned} &M\ddot{x}_c = 0, \quad M\ddot{y}_c = 0, \quad \frac{d}{dt}[m(l+s)^2\dot{\varphi}] = 0, \\ &m\ddot{s} - m(l+s)\dot{\varphi}^2 = \lambda. \end{aligned} \tag{3}$$

Khi $s \equiv 0$ ($\dot{s} = \ddot{s} = 0$), ba phương trình đầu của (3) cho luật chuyển động của hệ: $x_c = x_c(0) + \dot{x}_c(0)t$, $y_c = y_c(0) + \dot{y}_c(0)t$, $\varphi = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t$, còn phương trình thứ tư của (3) cho thừa số Lagrăng λ:

$$\lambda = ml\dot{\varphi}^2 = ml\dot{\varphi}(0)^2.$$

Phản lực của sợi dây tác dụng lên vật điểm M_1 là: (3.34):

$$R_{1x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\lambda}{l}(x_1 - x_2), \; R_{1y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\lambda}{l}(y_1 - y_2).$$

Phản lực của dây tác dụng lên vật điểm M_2 là :

$$R_{2x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\lambda}{l}(x_2 - x_1), \; R_{2y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{\lambda}{l}(y_2 - y_1).$$

Vậy là, trong quá trình chuyển động, sợi dây bị kéo căng với lực không đổi bằng λ.

3.7. PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG TRONG TRƯỜNG LỰC GYRÔSCÔP VÀ LỰC HAO TÁN

Giả thử rằng, ngoài các lực thế xác định bởi hàm Π cơ hệ còn chịu tác dụng của các lực không có thế Q_i^*:

$$Q_i^* = Q_i^*(t, q_j, \dot{q}_j), \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Khi đó,

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^*,$$

và cac phương trình Lagrăng có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^*, \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{3.42}$$

Ta đưa vào biểu thức E của năng lượng toàn phần của cơ hệ bằng tổng động năng và thế năng:

$$E = T + \Pi,$$

và tính đạo hàm $\dfrac{dE}{dt}$. Trước hết, ta có

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) + \frac{\partial T}{\partial t}\\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}.\end{aligned}$$

Nhận xét rằng $T = T_2 + T_1 + T_0$, trong đó T_m là dạng đẳng cấp bậc m của tọa độ suy rộng $\dot{q}_i$, và chú ý rằng nếu $f(x_1, \ldots, x_n)$ là hàm đẳng cấp bậc m của $x_1, \ldots, x_n$, thì $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}x_i = mf$, và sử dụng phương trình Lagrăng (3.42) ta có:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) + \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - Q_i^*\right)\dot{q}_i\\ &= 2\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}Q_i^*\dot{q}_i.\end{aligned}$$

Do vậy

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n}Q_i^*\dot{q}_i + \left[\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t}\right] + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{3.43}$$

Thành phần thứ nhất ở vế phải của (3.43):

$$\sum_{i=1}^{n}Q_i^*\dot{q}_i = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}Q_i^*dq_i}{dt} = \frac{\delta A^*}{\partial t},$$

là **công suất** của các lực không có thế $Q_i^*(i = 1, \ldots, n)$, trong đó δA^* là công nguyên tố của các lực không có thế Q_i^*. Thành phần trong móc vuông ở vế phải của (3.43):

$$\frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t},$$

khác không chỉ với hệ rêônôm (còn với hệ sclêrônôm thì $T_1 = T_0 = 0$ và $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$). Thành phần cuối cùng $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$ ở vế phải của (3.43) khác không chỉ khi thế năng Π phụ thuộc rõ vào thời gian.

Công thức (3.43) xác định sự biến đổi của năng lượng toàn phần trong chuyển động của hệ hôlônôm bất kỳ.

Ta xét một vài trường hợp riêng.

1/ Hệ sclêrônôm. Khi đó

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

2/ Hệ sclêrônôm và thế năng không phụ thuộc vào thời gian. Khi đó

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i. \tag{3.44}$$

Như vậy, với hệ này thì đạo hàm theo thời gian của năng lượng toàn phần bằng công suất của các lực không có thế.

3/ Hệ bảo toàn là hệ sclêrônôm, tất cả các lực đều có thế và thế năng của hệ không phụ thuộc rõ vào thời gian. Do vậy

$$\frac{dE}{dt} = 0, \tag{3.45}$$

nghĩa là trong mọi chuyển động của hệ

$$E = const = h.$$

Nói cách khác, năng lượng toàn phần của hệ bảo toàn, không thay đổi trong quá trình chuyển động.

Lực gyrôscôp và lực hao tán. Các lực không thế được gọi là những lực gyrôscôp nếu công suất của chúng bằng không:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i = 0, \tag{3.46}$$

và được gọi là **lực hao tán** nếu công suất của chúng âm hoặc bằng không:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i \leq 0. \qquad (3.47)$$

Nếu thế năng của hệ không phụ thuộc rõ vào thời gian t thì từ các phương trình (3.44) và (3.46) suy ra $\frac{dE}{dt} = 0$ và như vậy, **với hệ sclêrônôm chịu tác dụng của các lực gyrôscôp tồn tại tích phân năng lượng E = const.**

Nếu hệ là sclêrônôm và chịu tác dụng của các lực hao tán, thì trong chuyển động của hệ năng lượng toàn phần sẽ giảm theo thời gian, vì theo (3.44) và (3.47)

$$\frac{dE}{dt} \leq 0.$$

Trong trường hợp này hệ được gọi là **hệ hao tán**.

Ghi chú. Đối với hệ sclêrônôm ta có

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu d\vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i dq_i,$$

hoặc

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \vec{v}_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \dot{q}_i.$$

Vì vậy, đẳng thức (3.46) cho điều kiện gyrôscôp trong tọa độ Đềcác:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \vec{v}_\nu = 0.$$

còn đẳng thức (3.47) cho điều kiện hao tán:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \vec{v}_\nu \leq 0.$$

Ta xét hai trường hợp riêng của lực không thế Q_i^* khi chúng phụ thuộc tuyến tính và đẳng cấp vào vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$:

Trường hợp 1:

$$Q_i^* = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_k, \quad \gamma_{ik} = -\gamma_{ki},\ \gamma_{ii} = 0, \quad (i,k = 1,\ldots,n). \quad (3.48)$$

Khi này, Q_i^* sẽ là các lực gyrôscôp. Thực vậy, ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^*\dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ii}\dot{q}_i^2 + \sum_{i<k}^{1,\ldots,n} (\gamma_{ik} + \gamma_{ki})\dot{q}_i\dot{q}_k = 0.$$

Đẳng thức cuối cùng chứng tỏ rằng, tính phản đối xứng của ma trận các hệ số γ_{ik} không chỉ là điều kiện đủ mà còn là điều kiện cần để các lực (3.48) tác dụng lên hệ sclêrônôm là gyrôscôp.

Đẳng thức (3.48) được xem như **định nghĩa về lực gyrôscôp**, là lực phụ thuộc tuyến tính vào vận tốc suy rộng với $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$, trong đó γ_{ki} là hàm của toạ độ suy rộng và thời gian.

Ví dụ 3.24. Các lực quán tính Côriôlit đối với hệ sclêrônôm là những lực gyrôscôp.

Thực vậy, lực quán tính Côriôlit đặt vào điểm P_ν của cơ hệ được xác định bởi công thức

$$\vec{F}_\nu = -2m_\nu(\vec{\omega} \times \vec{v}_\nu), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N,$$

trong đó m_ν là khối lượng của điểm $P_\nu, \vec{v}_\nu$ là vận tốc của nó trong hệ tọa độ không quán tính khảo sát, còn $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của chuyển động quay của cơ hệ đối với hệ quy chiếu quán tính nào đó. Song, khi đó

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu.\vec{v}_\nu = 0.$$

Ví dụ 3.25. Vật rắn quay quanh điểm cố định O chịu tác dụng của các lực với mômen chính $\vec{L}_0 = I(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$, trong đó I là đại lượng vô hướng, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ là vận tốc góc của vật rắn. Khi đó các lực tác dụng lên vật là những lực gyrôscôp, vì rằng công suất của chúng bằng không:

$$\vec{L}_0.\vec{\omega} = 0.\ .$$

Nếu vật rắn có tính đối xứng động lực thì mômen $\vec{L}_0 = I(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)$ được gọi là mômen gyrôscôp, trong đó I là mômen quán tính của vật đối với trục đối xứng, $\vec{\omega}_2$ là vận tốc góc của chuyển động quay thuần túy; $\vec{\omega}_2$ nằm trên trục đối xứng, còn $\vec{\omega}_1$ là vận tốc góc của chuyển động tuế sai. Vậy, các lực tạo nên mômen gyrôscôp là những lực gyrôscôp.

Trường hợp 2. Giả thử

$$Q_i^* = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_k, \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.49}$$

trong đó ma trận các hệ số b_{ik} là đối xứng:

$$b_{ik} = b_{ki} \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

và giả thiết dạng toàn phương $\sum\limits_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ là dương:

$$\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \geq 0.$$

Khi đó, đối với hệ scleônôm, công suất của các lực Q_i^* bằng:

$$\sum_{k=1}^{n} Q_i^*\dot{q}_i = -\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \leq 0, \tag{3.50}$$

và các lực Q_i^* là những lực hao tán. Trong trường hợp này, dạng toàn phương

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \tag{3.51}$$

được gọi là **hàm hao tán Rơle**.

Dễ thấy rằng, các lực suy rộng (3.49) liên hệ với hàm hao tán Rơle bởi công thức:

$$Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.52}$$

Nếu hệ là sclêrônôm và thế năng không phụ thuộc rõ vào thời gian thì theo (3.44), (3.50) và (3.52) ta có:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \dot{q}_i = -2R,$$

nghiã là tốc độ giảm của năng lượng toàn phần gấp đôi hàm Rơle.

Nếu hàm Rơle (3.51) là dạng toàn phương xác định dương của các vận tốc suy rộng thì người ta nói về sự hao tán hoàn toàn của năng lượng. Trong trường hợp này, do biểu thức cuối cùng, năng lượng toàn phần của hệ suy giảm nghiêm ngặt.

Ví dụ 3.26. Xét các lực cản của môi trường đặt lên các điểm của một cơ hệ tỷ lệ bậc nhất với vận tốc của các điểm:

$$\vec{F}_\nu = -\beta \vec{v}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Trong trường hợp này

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \vec{v}_\nu = -\beta \sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2, \quad R = \frac{1}{2}\beta \sum_{\nu=1}^{N} v_\nu^2.$$

3.8. SỰ BẤT BIẾN CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG

Dạng Niutơn của các phương trình vi phân của chuyển động của cơ hệ phụ thuộc vào việc lựa chọn hệ tọa độ và thay đổi khi chuyển sang hệ tọa độ mới (trừ trường hợp hệ tọa độ chuyển động tịnh tiến đều). Trái lại, **dạng của các phương trình Lagrăng là bất**

biến đối với sự thay đổi hệ tọa độ. Điều này được chứng minh như sau.

Giả thử giữa các tọa độ suy rộng cũ q_i và mới q_i^* có quan hệ một đối một

$$q_i = q_i(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*, t), \tag{3.53}$$

với Jacobian $det \left\| \dfrac{\partial q_i}{\partial q_j^*} \right\|$ khác không. Phép biến đổi (3.53) được gọi là **phép biến đổi điểm**. Khi đó,

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial q_k^*} \dot{q}_k^* + \frac{\partial q_i}{\partial t}. \tag{3.54}$$

Các hàm Lagrăng, là những đại lượng vô hướng, sẽ lấy giá trị bằng nhau trong tọa độ cũ $L(q, \dot{q}, t)$ và mới $L^*(q^*, \dot{q}^*, t)$:

$$L(q, \dot{q}, t) = L^*(q^*, \dot{q}^*, t).$$

Ta có:

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_j^*} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial q_j^*} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j^*} \right). \tag{3.55}$$

Nhưng theo (3.54)

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j^*} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 q_i}{\partial q_k^* \partial q_j^*} \dot{q}_k^* + \frac{\partial^2 q_i}{\partial t \partial q_j^*} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_j^*} \right),$$

và biểu thức (3.55) có dạng:

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_j^*} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial q_j^*} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_j^*} \right) \right].$$

Từ (3.54) ta có:

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j^*} = \frac{\partial q_i}{\partial q_j^*}.$$

Do vậy,

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial q_j^*}.$$

Phương trình Lagrăng cho các tọa độ mới q_i^* sẽ là:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_j^*}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_j^*} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}.\frac{\partial q_i}{\partial q_j^*}\right) -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}.\frac{\partial q_i}{\partial q_j^*} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_j^*}\right)\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right\}\frac{\partial q_i}{\partial q_j^*} = 0.$$

Từ các phương trình Lagrăng trong tọa độ cũ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

suy ra các phương trình Lagrăng trong tọa độ mới

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot q_j^*}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_j^*} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

và ngược lại (vì Jacobian $det\left\|\frac{\partial q_i}{\partial q_j^*}\right\| \neq 0$). Như vậy là, **dạng của các phương trình Lagrăng không phụ thuộc vào việc chọn các toạ độ suy rộng của cơ hệ**. Nói cách khác, dạng của các phương trình Lagrăng bất biến đối với phép biến đổi điểm (3.53).

3.9. CÁC TÍCH PHÂN ĐẦU CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG

Với các hệ chịu lực tác dụng của lực thế, hàm Lagrăng (3.25) là hàm quan trọng nhất. Ý nghĩa vật lý sâu sắc của hàm Lagrăng được thể hiện qua các tích phân đầu của hệ phương trình Lagrăng gắn với tính đối xứng của trường lực và những liên kết đặt trên hệ, tức là với các định luật bảo toàn.

Mối liên hệ của hàm Lagrăng với luật bảo toàn năng lượng

Xét cơ hệ, mà hàm Lagrăng của nó không phụ thuộc rõ vào thời gian, nghĩa là $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0, L = L(q, \dot{q})$. Giả thiết rằng hệ không chịu tác dụng của các lực hao tán. Ta sẽ chứng minh rằng năng lượng toàn phần của hệ được bảo toàn.

Ta có:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right).$$

Thay $\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ bởi $\dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ theo công thức (3.23), ta được:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

hoặc

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0.$$

Chú ý rằng

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T,$$

nên

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - (T - U) = T + U = E,$$

là năng lượng toàn phần của cơ hệ. Vậy trong quá trình chuyển động của hệ, năng lượng toàn phần của nó bảo toàn.

Ghi chú. Hàm Lagrăng sẽ không phụ thuộc rõ vào thời gian nếu các bán kính vectơ của các chất điểm của hệ chỉ phụ thuộc vào tọa độ suy rộng, mà không phụ thuộc rõ vào thời gian. Nói cách khác, hệ cơ học chỉ bị ràng buộc bởi các liên kết dừng. Ngoài ra, các ngoại lực khác tác dụng lên hệ cũng phải không phụ thuộc vào thời gian.

3.10. CÁC PHƯƠNG TRÌNH APPEN (APPELL) ĐỐI VỚI HỆ PHI HÔLÔNÔM

Để nghiên cứu chuyển động của các hệ phi hôlônôm, Appen đã đưa ra một dạng tổng quát của các phương trình chuyển động vào năm 1925. Khi trong hệ khảo sát không có các liên kết phi hôlônôm thì các phương trình Appen trùng với các phương trình Lagrăng loại hai (3.20).

Xét hệ phi hôlônôm chịu α liên kết hữu hạn (3.5) và β liên kết vi phân (3.6). Trước tiên, dùng α liên kết hữu hạn, ta biểu diễn các bán kính vectơ của các điểm của hệ qua m tọa độ độc lập $q_1, \ldots, q_m$, $m = 3N - \alpha$ và thời gian t:

$$\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(t, q_1, \ldots, q_m), \quad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{3.56}$$

Từ đây,

$$\dot{\vec{r}}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.57}$$

và

$$\delta \vec{r}_\nu = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}\delta q_j, \quad (\nu = 1, \ldots, N).$$

Tuy nhiên, $\vec{r}_\nu$ và $\dot{\vec{r}}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ còn phải thỏa mãn các liên kết phi hôlônôm (3.6):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{l}_{g\nu}\dot{\vec{r}}_\nu + D_g = 0, \quad (g = 1, \ldots, \beta), \tag{3.58}$$

trong đó $\vec{l}_{g\nu}$ và D_g là những hàm của t và $\vec{r}_\nu (\nu = 1, \ldots, N)$.

Thay các biểu thức (3.56), (3.57) vào các phương trình liên kết (3.58) ta được:

$$\sum_{j=1}^{m} A_{gj}\dot{q}_j + A_g = 0, \quad (g = 1, \ldots, \beta), \tag{3.59}$$

ở đây các hệ số A_{gj} và số hạng tự do A_g là những hàm của t và $q_1, \ldots, q_m$.

Vậy là, đối với hệ phi hôlônôm các tọa độ $q_1, \ldots, q_m$ có thể lấy những giá trị tùy ý, nhưng các vận tốc suy rộng $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ lại không có thể là tùy ý được, mà chúng liên hệ với nhau bởi β hệ thức (3.59). Coi β liên kết (3.59) là độc lập, từ các phương trình (3.59) ta có thể biểu diễn β vận tốc suy rộng, chẳng hạn $\dot{q}_{n+1}, \ldots, \dot{q}_m$ qua n vận tốc suy rộng còn lại: $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ $(n = m - \beta = 3N - \alpha - \beta$ là số bậc tự do của cơ hệ). Các vận tốc suy rộng $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ có thể lấy những giá trị tùy ý, và khi đó các giá trị của các vận tốc suy rộng còn lại $\dot{q}_{n+1}, \ldots, \dot{q}_m$ là hoàn toàn xác định.

Tuy nhiên, chúng ta sẽ làm theo cách tổng quát hơn, lấy các đại lượng độc lập không phải là n vận tốc suy rộng nữa, mà là n tổ hợp tuyến tính độc lập của các vận tốc suy rộng:

$$\dot{\pi}_s = \sum_{j=1}^{m} f_{sj}\dot{q}_j, \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{3.60}$$

trong đó f_{sj} là các hàm của t và $q_1, \ldots, q_m$. Đối với các dạng (3.60) ta cần đặt chỉ một điều kiện là n dạng tuyến tính (3.60) cùng với β dạng tuyến tính (3.59) phải tạo thành một hệ đầy đủ $m = n + \beta$ dạng độc lập tuyến tính, nghĩa là, định thức các hệ số của m dạng đó phải khác không. Khi đó các đại lượng $\dot{\pi}_s (s = 1, \ldots, n)$ có thể lấy những giá trị tùy ý, vì rằng với các giá trị bất kỳ của các đại lượng này ta sẽ tìm được các $\dot{q}_j (j = 1, \ldots, m)$ tương ứng bằng cách giải hệ các phương trình tuyến tính (3.59) và (3.60):

$$\dot{q}_j = \sum_{s=1}^{n} h_{js}\dot{\pi}_s + h_j, \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{3.61}$$

trong đó h_{js} và h_j là những hàm của t và $q_1, \ldots, q_m$.

Các đại lượng $\dot{\pi}_s$ là các dạng tuyến tính của các vận tốc suy rộng và được gọi là các **á vận tốc** , còn π_s được gọi là các **á tọa độ**

$(s = 1, \ldots, n)$. Ở đây không tồn tại π_s như hàm của q, t vì chúng được xác định theo $\dot{\pi}_s$ bất khả tích. Trong trường hợp tổng quát, $n + m$ đại lượng $\dot{\pi}_s$ và $\dot{q}_j$ liên hệ với nhau bởi các hệ thức (3.60) và (3.61).

Để tìm những hạn chế do các liên kết vi phân áp đặt lên các di chuyển ảo δq_i ta thay trong (3.59) $\dot{q}_j$ bởi δq_j và bỏ đi số hạng tự do A_g. Ta có:

$$\sum_{j=1}^{m} A_{gj}\delta q_j = 0, \quad (g = 1, \ldots, \beta). \tag{3.62}$$

Cùng với các đẳng thức (3.60) ta đưa vào các ký hiệu:

$$\delta\pi_s = \sum_{j=1}^{m} f_{sj}\delta q_j, \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{3.63}$$

trong đó, π_s là các á toạ độ. Các hàm f_{sj} và A_{gj} là những hàm của $q_1, ..., q_m, t$. Theo giả thiết thì các dạng (3.62) và (3.63) là độc lập tuyến tính. Vì vậy, $\delta\pi_s$ có thể lấy những giá trị tùy ý, còn δq_j tương ứng sẽ được xác định từ các hệ phương trình (3.62), (3.63):

$$\delta q_j = \sum_{s=1}^{n} h_{js}\delta\pi_s, \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{3.64}$$

Biểu thức cho công của các lực suy rộng trong các di chuyển ảo có thể viết dưới dạng:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{m} Q_j\delta q_j. \tag{3.65}$$

Cũng như đối với hệ hôlônôm, ở đây:

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}, \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Thay δq_j trong (3.65) bởi biểu thức (3.64) ta sẽ được

$$\delta A = \sum_{j=1}^{m} Q_j \left(\sum_{s=1}^{n} h_{js} \delta\pi_s \right) = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} h_{js} Q_j \right) \delta\pi_s,$$

nghĩa là

$$\delta A = \sum_{s=1}^{n} \Pi_s \delta\pi_s, \tag{3.66}$$

trong đó

$$\Pi_s = \sum_{j=1}^{m} h_{js} Q_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{\nu=1}^{N} h_{js} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \vec{F}_\nu \right) \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Đại lượng Π_s được gọi là các lực **suy rộng tương ứng với các á tọa độ** $\pi_s (s = 1, \ldots, n)$.

Mặt khác, thay $\dot{q}_j$ trong các biểu thức (3.57) bởi các giá trị (3.61) ta được

$$\dot{\vec{r}}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \vec{e}_{\nu s} \dot{\pi}_s + \vec{e}_\nu, \quad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{3.67}$$

ở đây $\vec{e}_{\nu s}$ và $\vec{e}_\nu$, $\quad (\nu = 1, \ldots, N, s = 1, \ldots, n)$ là những hàm vectơ của t và $q_1, \ldots, q_m$. Từ các đẳng thức (3.67) ta có:

$$\delta \vec{r}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \vec{e}_{\nu s} \delta\pi_s, \quad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{3.68}$$

và

$$\ddot{\vec{r}}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \vec{e}_{\nu s} \ddot{\pi}_s + \cdots, \quad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{3.69}$$

ở đây trong vế phải của (3.69) ta chỉ viết ra các số hạng chứa á gia tốc $\ddot{\pi}_s$, $\quad (s = 1, \ldots, n)$.

Nhờ các đẳng thức (3.66) và (3.68) ta viết được phương trình tổng quát của động lực học

$$\delta A - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu \delta \vec{r}_\nu = 0$$

dưới dạng

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\Pi_s - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu \vec{e}_{\nu s}\right)\delta\pi_s = 0.$$

Vì $\delta\pi_s$ là những thừa số hoàn toàn tùy ý, nên từ đây suy ra

$$\Pi_s = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu \vec{e}_{\nu s}. \qquad (3.70)$$

Ta đưa vào một khái niệm mới **"năng lượng của gia tốc"** như sau:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\ddot{\vec{r}}_\nu)^2 = U(t, q_i, \dot{\pi}_s, \ddot{\pi}_s). \qquad (3.71)$$

Năng lượng gia tốc có cấu trúc giống với động năng của hệ. Khi đó, theo (3.69):

$$\vec{e}_{\nu s} = \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_s}, \quad (\nu = 1, \ldots, N, s = 1, \ldots, n),$$

ta có thể viết các phương trình (3.70) dưới dạng:

$$\Pi_s = \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_s}, \quad (s = 1, \ldots, n). \qquad (3.72)$$

Các phương trình này được gọi là **những phương trình Appen**. Ở đây, số phương trình bằng số bậc tự do (n) của hệ.

Số n phương trình Appen (3.72) cùng với β phương trình liên kết (3.59) và n hệ thức vi phân (3.60) lập thành một hệ phương trình vi phân xác định chuyển động của hệ phi hôlônôm.

Nhận xét. Trong những trường hợp riêng, nếu lấy ngay các vận tốc suy rộng độc lập $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ thay cho các á vận tốc $\dot{\pi}_s$, thì để xác định các lực suy rộng tương ứng $Q_1', \ldots, Q_n'$ cần phải biểu diễn $\delta q_{n+1}, \ldots, \delta q_m$ trong các đẳng thức (3.65) qua $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$:

$$\delta A = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j = \sum_{s=1}^{n} Q_s' \delta q_s.$$

Trong trường hợp này "năng lượng gia tốc" S có thể biểu diễn dưới dạng hàm của $t, q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$ và các phương trình Appen có dạng

$$Q'_s = \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s}, \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{3.73}$$

Các phương trình Appen (3.72) được dùng chủ yếu cho hệ phi hôlônôm. Tuy vậy, trong nhiều trường hợp chúng cũng được dùng rất thuận lợi cho hệ hôlônôm như một trường hợp riêng của hệ phi hôlônôm. Khi đó , tất cả các vận tốc $\dot{q}_i$ là độc lập, $Q_i = Q'_i (i = 1, \ldots, n)$ và các phương trình (3.73) là cách viết khác của các phương trình Lagrăng loại hai.

Ví dụ 3.27. Lập các phương trình chuyển động của điểm khối lượng m dưới tác dụng của lực hoạt động $\vec{F}$. Chuyển động của điểm bị ràng buộc bởi liên kết vi phân

$$\dot{r}_1 = r_3 \dot{r}_2,$$

trong đó $\vec{r} = r_1 \vec{i} + r_2 \vec{j} + r_3 \vec{k}$ là bán kính vectơ của điểm, còn $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các vectơ đơn vị.

Bài giải: Ta dùng các phương trình Appen. Năng lượng gia tốc có dạng

$$S = \frac{m}{2} \ddot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2} (\ddot{r}_1^2 + \ddot{r}_2^2 + \ddot{r}_3^2).$$

Các gia tốc $\ddot{r}_1$ và $\ddot{r}_2$ thoả mãn điều kiện

$$\ddot{r}_1 = \dot{r}_3 \dot{r}_2 + r_3 \ddot{r}_2.$$

Do vậy,

$$S = \frac{m}{2} \left[(\dot{r}_3 \dot{r}_2 + r_3 \ddot{r}_2)^2 + \ddot{r}_2^2 + \ddot{r}_3^2 \right].$$

Các gia tốc $\ddot{r}_2$ và $\ddot{r}_3$ không có liên hệ về mặt động học. Ta viết các phương trình Appen:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{r}_2} = m[r_3(\dot{r}_3\dot{r}_2 + r_3\ddot{r}_2) + \ddot{r}_2] = \Pi_2,$$
$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{r}_3} = m\ddot{r}_3 = \Pi_3.$$

Công của lực hoạt động $\vec{F}$ trong di chuyển ảo tuỳ ý có dạng

$$A = \vec{F}\delta\vec{r} = F_1\delta r_1 + F_2\delta r_2 + F_3\delta r_3.$$

Các di chuyển ảo thỏa mãn phương trình

$$\delta r_1 = r_3\delta r_2.$$

Do vậy,

$$A = (F_1 r_3 + F_2)\delta r_2 + F_3\delta r_3 = \Pi_2\delta r_2 + \Pi_3\delta r_3.$$

Từ đây suy ra

$$\Pi_2 = F_1 r_3 + F_2, \;\; \Pi_3 = F_3.$$

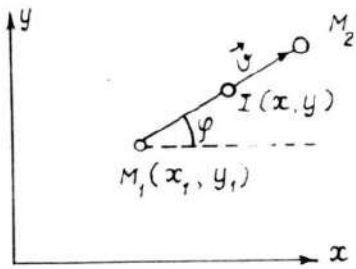
Hệ đầy đủ các phương trình chuyển động, gồm các phương trình Appen và phương trình động học sẽ là:

$$(1 + r_3^2)\ddot{r}_2 + r_3\dot{r}_3\dot{r}_2 = \frac{1}{m}(F_1 r_3 + F_2),$$
$$\ddot{r}_3 = \frac{1}{m}F_3, \quad \dot{r}_1 = r_3\dot{r}_2.$$

Hai phương trình đầu cho phép tìm $\dot{r}_2$, $\dot{r}_3$. Phương trình cuối cùng xác định $\dot{r}_1$.

Ví dụ 3.28. Giải bài toán nêu trong ví dụ 3.2 bằng cách dùng các phương trình Appen.

Bài giải: Ta lấy tọa độ (x, y) của trung điểm I của thanh M_1, M_2 và góc φ tạo nên bởi thanh M_1, M_2 với đường nằm ngang làm các tọa độ độc lập (Hình 3.26).



Hình 3.26

Khi đó ta có:

$$x_1 = x - \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad y_1 = y - \frac{l}{2}\sin\varphi,$$
$$x_2 = x + \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad y_2 = y + \frac{l}{2}\sin\varphi,$$

và

$$\dot{x} sin\varphi - \dot{y} cos\varphi = 0,$$
$$\dot{x} cos\varphi + \dot{y} sin\varphi = \dot{\pi}.$$

Từ đây suy ra

$$\dot{x} = \dot{\pi} cos\varphi,$$
$$\dot{y} = \dot{\pi} sin\varphi.$$

Phương trình liên kết - điều kiện để vận tốc $\vec{v}$ của điểm I hướng theo thanh M_1, M_2 - là:

$$\frac{\dot{x}}{\cos\varphi} = \frac{\dot{y}}{\sin\varphi}.$$

Năng lượng gia tốc S (3.71) sẽ là:

$$S = \frac{1}{2}(\ddot{x}_1^2 + \ddot{y}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{y}_2^2) = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \frac{1}{4}l^2(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4).$$

Ta đưa vào á vận tốc $\dot{\pi}$, liên hệ với các vận tốc suy rộng $\dot{x}, \dot{y}$ bởi các biểu thức loại (3.60):

$$\dot{\pi} = \frac{\dot{x}}{\cos\varphi} = \frac{\dot{y}}{\sin\varphi}.$$

Khi đó, ta có:

$$S = \ddot{\pi}^2 + \frac{1}{4}l^2\ddot{\varphi}^2 + \cdots, \tag{1}$$

ở đây các biểu thức không viết ra (...) không chứa các gia tốc.

Bây giờ hãy tìm các lực suy rộng. Muốn vậy ta viết biểu thức biến phân của công (3.66) dưới dạng:

$$\delta A = Q_\pi \delta\pi + Q_\varphi \delta\varphi. \tag{2}$$

Mặt khác, ta có $\delta A = -2g\delta y = -2g\sin\varphi\delta\pi$. So sánh hai biểu thức của δA, ta tìm được

$$Q_\pi = -2g\sin\varphi, \quad Q_\varphi = 0. \tag{3}$$

Các phương trình Appen (3.72) có dạng:

$$Q_\pi = \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = 2\ddot{\pi}, \quad Q_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}} = \frac{1}{2}l^2\ddot{\varphi}. \tag{4}$$

Thay vào đây các giá trị Q_π và Q_φ từ (3), ta rút ra:

$$\ddot{\pi} = -g\sin\varphi, \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Tích phân lên sẽ được:

$$\begin{aligned} &\varphi = \omega t + \varphi_0, \\ &\frac{d\dot{\pi}}{d\varphi} = \frac{1}{\omega}\ddot{\pi} = -\frac{g}{\omega}\sin\varphi, \quad \dot{\pi} = \frac{g}{\omega}\cos\varphi + c_1. \end{aligned}$$

Ta có:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{\omega}\dot{x} = \frac{1}{\omega}\dot{\pi}\cos\varphi = \frac{g}{\omega^2}\cos^2\varphi + \frac{c_1}{\omega}\cos\varphi,$$
$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\omega}\dot{y} = \frac{1}{\omega}\dot{\pi}\sin\varphi = \frac{g}{\omega^2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{c_1}{\omega}\sin\varphi.$$

Từ đây tìm được kết quả (14) nêu trong ví dụ 3.2:

$$x = \frac{g}{2\omega^2}\varphi + \left(\frac{c_1}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2}\cos\varphi\right)\sin\varphi + c_2,$$
$$y = -\left(\frac{c_1}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2}\cos\varphi\right)\cos\varphi + c_3.$$

Chú ý đến biểu thức của φ, ta tìm được luật chuyển động phụ thuộc vào năm hằng số tuỳ ý:

$$\omega, \varphi_0, c_1, c_2, c_3.$$

Các công thức cho x, y chỉ đúng trong trường hợp $\omega \neq 0$, nghĩa là khi hệ có vận tốc đầu $\dot{\varphi}$ khác không. Trong trường hợp đó sự phụ thuộc $x(\varphi)$ chứa số hạng tuyến tính đối với φ. Do vậy khối tâm dịch chuyển dọc theo trục x. Theo đường thẳng đứng (y), khối tâm dao động quanh một giá trị trung bình không đổi nào đó của toạ độ y. Cả hệ thống dịch chuyển theo hướng nằm ngang về phía bên phải hoặc bên trái, tuỳ thuộc vào dấu của vận tốc góc ω.

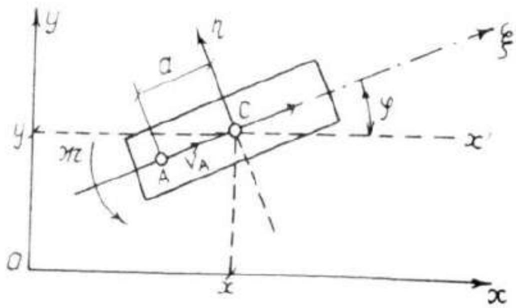
Nếu $\omega = 0$ thì góc φ sẽ không đổi và hệ sẽ trượt dọc theo đường thẳng nghiêng với hệ số góc $\dfrac{dy}{dx} = tg\varphi_0$. Á vận tốc $\dot{\pi}$ có ý nghĩa của môđun của vận tốc của khối tâm.

So sánh với cách giải trước đây trong ví dụ (3.2), ta thấy phương trình Appen đã được sử dụng rất có hiệu quả.

Ví dụ 3.29. Một xe trượt chuyển động phẳng (Hình 3.27), được xem như một tấm chữ nhật đồng chất, có khối lượng M, có mômen quán tính trung tâm đối với trục vuông góc với mặt phẳng hình vẽ

là J_c. Tại A, cách khối tâm C của tấm một đoạn a, gắn một mép sắc nhằm tạo cho điểm A vận tốc hướng theo AC.
Tác dụng lên xe trượt lực $\vec{F}$ luôn luôn hướng theo AC và ngẫu lực có mômen M trong mặt phẳng chuyển động. Bỏ qua ma sát. Hãy viết phương trình vi phân chuyển động của xe trượt.

Bài giải: Xe trượt là vật rắn chuyển động phẳng. Ta sẽ chọn ba tọa độ suy rộng là $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = \varphi$ là ba thông số định vị của tấm phẳng trong hệ qui chiếu cố định $Oxyz$, trong đó x, y là toạ độ của khối tâm C. Gọi $C\xi\eta\zeta$ là hệ trục quán tính chính trung tâm của tấm.



Hình 3.27
Mô hình xe trượt chuyển động trong mặt phẳng x, y

Vì bánh xe con tạo cho điểm A vận tốc $\vec{V}_A$ luôn luôn hướng theo AC, vậy có phương trình liên kết:

$$\frac{V_{Ax}}{(\vec{CA})_x} = \frac{V_{Ay}}{(\vec{CA})_y}. \tag{1}$$

hưng $(\vec{CA})_x = -a\cos\varphi, (\vec{CA})_y = -a\sin\varphi$, và vì rằng $\vec{V}_A = \vec{V}_C + \vec{V}_{AC}$, tức là $V_{Ax} = V_{Cx} + (\vec{V}_{AC})_x = \dot{x} + a\dot{\varphi}\sin\varphi, V_{Ay} = \dot{y} - a\dot{\varphi}\cos\varphi,$

nên phương trình liên kết (1) trở thành

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x} + a\dot{\varphi}\sin\varphi}{-a\cos\varphi} &= \frac{\dot{y} - a\dot{\varphi}\cos\varphi}{-a\sin\varphi},\\ \dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi + a\dot{\varphi} &= 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Phương trình liên kết (2) không khả tích, vậy liên kết đã cho là phi hôlônôm và xe trượt là một cơ hệ phi hôlônôm. Hệ có ba tọa độ đủ, liên kết với nhau bởi phương trình liên kết duy nhất phi hôlônôm (2). Vậy hệ có hai bậc tự do. Để lập phương trình vi phân của chuyển động cơ hệ, ta sẽ áp dụng phương trình Appen trong á tọa độ.

Đầu tiên ta tính hàm gia tốc năng của hệ $S = \dfrac{\sum m_k\gamma_k^2}{2}$, trong đó m_k và $\vec{\gamma}_k$ là khối lượng và gia tốc của chất điểm M_k thuộc xe trượt. Chọn C làm cực ta viết được:

$$\vec{\gamma}_k = \vec{\gamma}_{M_k} = \vec{\gamma}_C + \vec{\gamma}_{M_kC}, \text{ và } \quad \gamma_k^2 = \gamma_C^2 + \gamma_{M_kC}^2 + 2\vec{\gamma}_C\vec{\gamma}_{M_kC}.$$

Thay giá trị này của γ_k^2 vào biểu thức của S sẽ có:

$$2S = \sum m_k\gamma_k^2 = \sum m_k\gamma_C^2 + \sum m_k\gamma_{M_kC}^2 + 2\sum m_k\vec{\gamma}_C\vec{\gamma}_{M_kC}. \tag{3}$$

Ta có:

$$\sum m_k\gamma_C^2 = \gamma_C^2\sum m_k = M(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2), \quad M = \sum m_k$$

$$\sum m_k\vec{\gamma}_C\vec{\gamma}_{M_kC} = \vec{\gamma}_C\sum m_k\vec{\gamma}_{M_kC} = \vec{\gamma}_C.M\vec{\gamma}_{CC} = 0$$

vì $\gamma_{CC} = 0$. Còn số hạng $\sum m_k\gamma_{M_kC}^2$ thì tính được như sau:

$$\vec{\gamma}_{M_kC} = \vec{\gamma}_{M_kC}^{\tau} + \vec{\gamma}_{M_kC}^{n},$$

trong đó

$$|\vec{\gamma}_{M_kC}^{\tau}| = M_kC.|\varepsilon| = r_k|\ddot{\varphi}|, \gamma_{M_kC}^{n} = M_kC\omega^2 = r_k\dot{\varphi}^2,$$

ta đã ký hiệu $r_k = CM_k$ là khoảng cách từ chất điểm M_k đến khối tâm C của tấm chữ nhật.

Vậy

$$\gamma^2_{M_kC} = (\gamma^\tau_{M_kC})^2 + (\gamma^n_{M_kC})^2 = r_k^2(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4), \text{ và} \sum m_k\gamma^2_{M_kC} =$$
$$= \sum m_k r_k^2(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4) = (\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4)\sum m_k r_k^2 = J_c(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4).$$

Thay các giá trị đã tìm thấy của ba số hạng trong biểu thức của $2S$, ta được kết quả:

$$S = \frac{M}{2}(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) + \frac{J_C}{2}(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4). \tag{4}$$

Dựa vào biểu thức này của hàm gia tốc năng, ta chọn hai á tọa độ suy rộng π và φ cho cơ hệ, có liên kết với các tọa độ suy rộng x, y và φ bởi các công thức sau:

$$\begin{cases} \dot{x}sin\varphi - \dot{y}cos\varphi = -a\dot{\varphi}, \\ \dot{x}cos\varphi + \dot{y}sin\varphi = \dot{\pi}. \end{cases}$$

Từ đó tìm được

$$\dot{x} = \dot{\pi}cos\varphi - a\dot{\varphi}sin\varphi,\ \ddot{x} = \ddot{\pi}cos\varphi - a\ddot{\varphi}sin\varphi - \dot{\pi}\dot{\varphi}sin\varphi - a\dot{\varphi}^2cos\varphi,$$
$$\dot{y} = \dot{\pi}sin\varphi + a\dot{\varphi}cos\varphi,\ \ddot{y} = \ddot{\pi}sin\varphi + a\ddot{\varphi}cos\varphi + \dot{\pi}\dot{\varphi}cos\varphi - a\dot{\varphi}^2sin\varphi,$$
$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = \ddot{\pi}^2 + a^2\ddot{\varphi}^2 - 2\ddot{\pi}a\dot{\varphi}^2 + 2a\ddot{\varphi}\dot{\pi}\dot{\varphi} + \dots. \tag{5}$$

Kết hợp (5) với (4) ta tìm được biểu thức của hàm gia tốc năng theo các á tọa độ suy rộng :

$$S = \frac{M\ddot{\pi}^2}{2} + J_c\frac{\ddot{\varphi}^2}{2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(J_c\dot{\varphi}^2 + M\dot{\pi}^2).$$

Từ đây, suy ra:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = M\ddot{\pi}, \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\varphi}} = J_c\ddot{\varphi}. \tag{6}$$

Bây giờ ta chuyển qua tìm biểu thức của các á lực suy rộng tương ứng với các tọa độ π và φ:

$$\sum \delta A_k = \vec{F}\delta\vec{r}_c + \mathcal{M}\delta\varphi = F(\delta x_r \cos\varphi + \delta y_c \sin\varphi) + \mathcal{M}\delta\varphi.$$

Nhưng $\delta x_c = \delta x, \delta y_c = \delta y$, vậy có:

$$\sum \delta A_k = F(\delta x \cos\varphi + \delta y \sin\varphi) + \mathcal{M}\delta\varphi.$$

Theo (5) ta tính được dễ dàng δx và δy theo $\delta\pi$ và $\delta\varphi$:

$$\delta x = \delta\pi \cos\varphi, \delta y = \delta\pi \sin\varphi.$$

Vậy hệ thức cần tìm là:

$$\sum \delta A_k = F(\delta\pi \cos^2\varphi + \delta\pi \sin^2\varphi) + \mathcal{M}\alpha\delta\varphi = F\delta\pi + \mathcal{M}\delta\varphi.$$

Từ đó suy ra:

$$Q_\pi = F \quad \text{và} \quad Q_\varphi = \mathcal{M}. \tag{7}$$

Thay các kết quả (6) và (7) vào phương trình Appen (3.72), ta được phương trình vi phân của chuyển động của xe trượt như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = Q_\pi, \text{ hoặc } M\ddot{\pi} = F, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = Q_\varphi, \text{ hoặc } J_c\ddot{\varphi} = \mathcal{M}. \end{cases} \tag{8}$$

Từ hệ phương trình (8) dễ dàng trở lại các biến cũ x, y và φ. Theo (5) thì $\dot{x} = \dot{\pi}\cos\varphi, \dot{y} = \dot{\pi}\sin\varphi$, do đó có $\ddot{\pi} = \ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi$. Thay giá trị này của $\ddot{\pi}$ vào (8) và kết hợp với phương trình liên kết (2) ta được hệ phương trình vi phân chuyển động của xe trượt trong tọa độ x, y, φ như sau:

$$\begin{cases} M(\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi) = F, \\ J_c\ddot{\varphi} = \mathcal{M}, \\ \dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2 = 0. \end{cases}$$

Ta đã lập được đủ ba phương trình chứa ba ẩn số.

Như vậy là để có hệ phương trình kín đối với hệ phi hôlônôm bao giờ cũng phải gắn các phương trình liên kết phi hôlônôm với các phương trình vi phân của chuyển động trong tọa độ đủ. Đó là điều khác nhau chủ yếu giữa hệ phi hôlônôm và hệ hôlônôm.

Ví dụ 3.30. Áp dụng phương trình Appen để lập phương trình vi phân của chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định. Cho biết các mômen quán tính chính tại tâm cố định của vật khảo sát là $J_x = A, J_y = B, J_z = C$, và cho biết mômen tổng hợp của các lực tác dụng lên vật đối với tâm cố định là $\vec{M}$, với ba hình chiếu lên ba trục quán tính chính nói trên là M_x, M_y, M_z.

Bài giải. Ở đây ta có cơ hệ hôlônôm ba bậc tự do, mà ba tọa độ suy rộng có thể chọn là ba góc Ơle, φ, ψ, θ. Để cho đơn giản, ta sẽ áp dụng phương trình Appen lập phương trình vi phân của chuyển động của vật. Gọi $\vec{\omega}$ là vectơ vận tốc góc tức thời của vật, gọi hình chiếu của vectơ ấy lên ba trục quán tính chính tại O của vật lần lượt là $\omega_x = p, \omega_y = q, \omega_z = r$.

Trước hết, hãy tính biểu thức gia tốc năng của vật. Gọi $\vec{V}_k, \vec{\gamma}_k$ là vận tốc, gia tốc của chất điểm M_k thuộc vật ta có $2S = \sum m_k \gamma_k^2$, trong đó $\vec{\gamma}_k = \vec{\gamma}_{M_k} = \vec{\gamma}_\omega + \vec{\gamma}_\epsilon$, mà $\vec{\gamma}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}_k$ và $\vec{\gamma}_\epsilon = \vec{\epsilon} \times \vec{r}_k$, với $\vec{\varepsilon}$ là vectơ gia tốc góc tức thời của vật và $\vec{r}_k$ là vectơ định vị của chất điểm M_k đối với tâm cố định O.

Vậy,

$$\gamma_k^2 = (\vec{\omega} \times \vec{v}_k)^2 + (\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_k)^2 + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_k)(\vec{\epsilon} \times \vec{r}_k)$$

và

$$2S = \sum m_k (\vec{\omega} \times \vec{v}_k)^2 + \sum m_k (\vec{\epsilon} \times \vec{r}_k)^2 + 2 \sum m_k (\vec{\omega} \times \vec{v}_k)(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_k).$$

Trong lúc tính toán, khai triển và rút gọn biểu thức trên đây, chú ý rằng $Oxyz$ là hệ trục quán tính chính tại O của vật rắn, nên có

$$\sum m_k x_k y_k = \sum m_k y_k z_k = \sum m_k z_k x_k = 0,$$
$$\sum m_k(y_k^2 + z_k^2) = A, \quad \sum m_k(z_k^2 + x_k^2) = B,$$
$$\sum m_k(x_k^2 + y_k^2) = C,$$

trong đó x_k, y_k, z_k là tọa độ của chất điểm M_k trong hệ quy chiếu $Oxyz$ nói trên. Cuối cùng ta được biểu thức:

$$2S = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 + 2\dot{p}qr(C-B) + 2\dot{q}rp(A-C) + 2\dot{r}pq(B-A). \tag{1}$$

Dựa vào biểu thức này, ta sẽ chọn các á tọa độ ứng với các á vận tốc là $\omega_1 = p, \omega_2 = q, \omega_3 = r$. Các biến phân tương ứng của á tọa độ biểu diễn di chuyển ảo của vật là $\delta\pi_1, \delta\pi_2, \delta\pi_3$.

Bây giờ chuyển qua tính các lực suy rộng tương ứng với các á tọa độ đã chọn. Công nguyên tố của các lực hoạt động trong một di chuyển thực vô cùng bé là $\sum dA_k = \vec{M}\vec{\omega}dt = (M_x p + M_y q + M_z r)dt$. Vậy công nguyên tố của các lực đó trong một di chuyển ảo bất kỳ sẽ là $\sum \delta A_k = M_x\delta\pi_1 + M_y\delta\pi_2 + M_z\delta\pi_3$. Từ đó suy ra các lực suy rộng giả:

$$\pi_1 = M_x, \ \ \pi_2 = M_y, \ \ \pi_3 = M_z. \tag{2}$$

Thay các kết quả nhận được ở (1) và (2) vào phương trình Appen $\dfrac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_1} = \pi_1, \dfrac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_2} = \pi_2, \dfrac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_3} = \pi_3$, ta được lại hệ phương trình động lực học Ơle đã biết:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= M_x, \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= M_y, \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= M_z. \end{aligned} \tag{3.74}$$

3.11. TỌA ĐỘ XYCLIC

Tọa độ q_α được gọi là xyclic nếu nó **không có mặt rõ trong hàm Lagrăng** L, nghĩa là $\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$. Đại lượng $\dot{q}_\alpha$ tương ứng được gọi là **vận tốc xyclic**. Sở dĩ có tên gọi **toạ độ xyclic** (vòng) là do trong nhiều bài toán cơ học, toạ độ đó là góc quay φ đặc trưng cho chuyển động theo một quĩ đạo khép kín (vòng). Toạ độ xyclic còn có tên gọi khác là **toạ độ khử được** (ignorable) bởi vì ở các bài toán có toạ độ xyclic người ta có thể khử được toạ độ này trong một số phương trình chuyển động. Các toạ độ suy rộng còn lại của hệ, không phải là toạ độ xyclic, được gọi là các **toạ độ vị trí** (positional).

Xung suy rộng $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ tương ứng với tọa độ xyclic q_α giữ giá trị không đổi trong suốt quá trình chuyển động. Thực vậy, do $\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$ nên phương trình Lagrăng có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = 0 \quad \text{hoặc} \quad \dot{p}_\alpha = 0, \tag{3.75}$$

nghĩa là

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = const = c_\alpha. \tag{3.76}$$

Đây là một tích phân đầu của chuyển động, được gọi là **tích phân xyclic**. Để giải thích ý nghĩa vật lý của tích phân này, ta cho tọa độ q_α một số gia dq_α và giữ không đổi tất cả các tọa độ còn lại $q_1, \ldots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \ldots, q_n$. Nếu khi đó toàn bộ hệ chất điểm chuyển động tịnh tiến như một vật rắn thì lấy hướng của chuyển động này làm trục x của hệ tọa độ Đềcác cố định và khai triển biểu thức $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ trong (3.76) ta có:

$L = T - V$, trong đó V không chứa $\dot{q}_i$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\sum_{k=1}^{N} m_k(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} m_k\left(\dot{x}_k\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{y}_k\frac{\partial \dot{y}_k}{\partial \dot{q}_\alpha} + \dot{z}_k\frac{\partial \dot{z}_k}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} m_k\left(\dot{x}_k\frac{\partial x_k}{\partial q_\alpha} + \dot{y}_k\frac{\partial y_k}{\partial q_\alpha} + \dot{z}_k\frac{\partial z_k}{\partial q_\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{N} m_k\dot{x}_k,$$

bởi vì trong trường hợp này

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_\alpha} = 1, \quad \frac{\partial y_k}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial z_k}{\partial q_\alpha} = 0.$$

Nhưng đại lượng $\sum\limits_{k=1}^{N} m_k\dot{x}_k$ lại chính là hình chiếu của vectơ động lượng $\vec{Q} = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k\dot{\vec{r}}_k$ của chuyển động của hệ trên trục x. Vì vậy tích phân đầu (3.76) biểu thị luật bảo toàn động lượng của chuyển động của hệ trong hình chiếu trên trục x, dọc theo nó hệ có thể dịch chuyển như một vật rắn khi thay đổi tọa độ q_α.

Bây giờ giả thử rằng khi biến đổi q_α một lượng dq_α và giữ không đổi các tọa độ còn lại, hệ chất điểm thực hiện chuyển động quay một góc $d\varphi$ quanh một trục cố định Δ nào đó. Khi đó ta đặt trục Oz của hệ tọa độ Đềcac cố định dọc theo trục Δ và thực hiện phép đổi biến:

$$x_k = r_k\cos\varphi_k, \quad y_k = r_k\sin\varphi_k \quad \text{với} \quad d\varphi_k = dq_\alpha.$$

Ta có:

$$\frac{\partial x_k}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial x_k}{\partial \varphi_k} = -r_k\sin\varphi_k = -y_k,$$

$$\frac{\partial y_k}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial y_k}{\partial \varphi_k} = r_k\cos\varphi_k = x_k,$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial q_\alpha} = 0,$$

và do đó:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k\dot{y}_k - \dot{x}_k y_k) = \dot{\varphi}\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2 + y_k^2) = I_z\dot{\varphi}$$

là mô men động lượng của chuyển động của hệ chất điểm đối với trục z. Vậy là, nếu tọa độ xyclic q_α là một góc nào đó thì tích phân xyclic (3.76) biểu thị luật bảo toàn mômen động lượng của hệ chất điểm như một vật rắn đối với trục quay của hệ khi thay đổi tọa độ góc q_α.

Ví dụ 3.31. Xét chuyển động của máy điều tiết ly tâm trên hình 3.6. Bây giờ ta coi đại lượng $\psi = \int_0^t \omega dt$ là tọa độ suy rộng thứ hai, trong đó ω là vận tốc góc, $\omega = \dot{\psi}$. Động năng của hệ có dạng

$$T = l^2(m + 2M\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + ml^2\dot{\psi}^2\sin^2\varphi. \qquad (1)$$

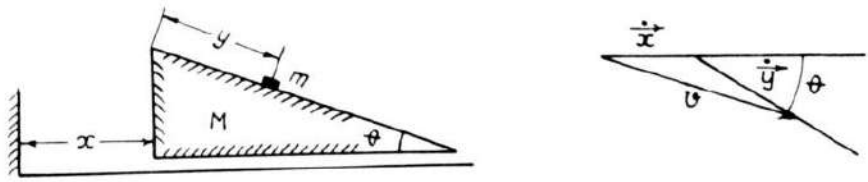
Dễ thấy rằng thế năng của máy điều tiết không phụ thuộc vào ψ cũng như $\dot{\psi}$. Theo (1), biến ψ là tọa độ xyclic. Do đó, ta có tích phân

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 2ml^2\dot{\psi}\sin^2\varphi = c_1. \qquad (2)$$

Vì rằng ψ là góc biến thiên nên tích phân (2) biểu thị sự bảo toàn của mômen động của máy điều tiết trong hình chiếu lên trục x (xem Hình 3.6).

Ví dụ 3.32. Viết phương trình chuyển động của vật nặng trượt không ma sát trên mặt phẳng nghiêng di động, không ma sát. Khối lượng của vật là m và của mặt nghiêng là M.

Bài giải. Hệ có hai bậc tự do. Ta chọn các tọa độ x, y để định vị mặt nghiêng (x) và vị trí tương đối của vật nặng, coi như là một chất điểm, trên mặt nghiêng (y)-(Hình 3.28).



Hình 3.28

Vật nặng trượt trên mặt phẳng nghiêng di động

Vận tốc $\vec{v}$ của chất điểm là $\vec{v} = \dot{\vec{x}} + \dot{\vec{y}}$. Ta có

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\theta.$$

Do vậy, động năng T của hệ gồm mặt nghiêng và chất điểm là:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\theta) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2.$$

Thế năng V của hệ không chứa x, vì mặt nghiêng di chuyển ngang:

$$V = -mgy\sin\theta + const.$$

Vậy hàm Lagrăng có dạng:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\theta) + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + mgy\sin\theta + const.$$

Các phương trình Lagrăng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y},$$

cho ta

$$m(\ddot{x} + \ddot{y}\cos\theta) + M\ddot{x} = 0, \;\; m(\ddot{y} + \ddot{x}\cos\theta) = mg\sin\theta.$$

Vì hàm L không chứa x nên x là tọa độ xyclic. Ta có tích phân đầu (3.76):

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + m\dot{y}\cos\theta = const.$$

Chương IV

CÁC PHƯƠNG TRÌNH HAMINTƠN

Hệ phương trình chính tắc Hamintơn. Móc Poatsông. Phương trình Rauxơ.

Hamintơn đã phát triển cơ học lên một bước mới khi thay thế tập hợp n phương trình Lagrăng cấp hai bằng một hệ $2n$ phương trình cấp một. Ông đã mở rộng khái niệm các phép biến đổi bằng việc xem các toạ độ và xung suy rộng như những biến chính tắc độc lập.

4.1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC HAMINTƠN. CÁC TÍCH PHÂN ĐẦU

Như đã thấy, các phương trình Lagrăng là n phương trình vi phân cấp hai đối với các tọa độ và vận tốc suy rộng q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Bây giờ ta biến đổi các phương trình này về dạng, trong đó vế trái chứa đạo hàm cấp một của toạ độ và xung suy rộng $q_1, ..., q_n$, $p_1, ..., p_n$, còn vế phải là đạo hàm riêng của một hàm nào đó theo các biến này.

Trong hàm Lagrăng $L(q_i, \dot{q}_i)$, các biến q_i và $\dot{q}_i$ không độc lập với nhau vì $\dot{q}_i$ là đạo hàm theo thời gian của q_i. Để chuyển về hệ $2n$ phương trình cấp một đối với các biến chưa biết, cách đơn giản nhất là đưa vào n biến mới u_i nhờ các hệ thức:

$$\dot{q}_i = u_i \quad (i = 1, \dots, n). \tag{4.1}$$

Đây là n phương trình vi phân cấp một liên kết $2n$ biến q_i và u_i. Bây giờ hàm Lagrăng $L(q_i, u_i)$ cũng là hàm của $2n$ biến và các phương trình Lagrăng (3.23) cũng là những phương trình bậc nhất:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q_i, u_i)}{\partial u_i} - \frac{\partial L(q_i, u_i)}{\partial q_i} = 0, \ (i = 1, \dots, n) \tag{4.2}$$

Các phương trình (4.1) và (4.2) tạo thành hệ $2n$ phương trình vi phân cấp một và trạng thái của cơ hệ được hoàn toàn xác định khi cho các giá trị của q_k và u_k tại một điểm. Trước đây trong §3.4 ta đã có quĩ đạo là đường cong trong không gian $2n$ thứ nguyên q_i, u_i.

Thuận lợi hơn nếu thay cho các tọa độ q_i, u_i ta dùng một tập hợp biến khác sao cho các phương trình chuyển động đối xứng hơn các phương trình (4.1) và (4.2). Muốn vậy, ta đưa vào những biến mới p_i như sau:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \tag{4.3}$$

p_i được gọi là **các xung chính tắc hoặc các xung suy rộng**. Các hệ thức (4.3) xác định phép thế biến, chuyển từ $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ sang $p = (p_1, \dots, p_n)$. Phép biến đổi này được gọi là **biến đổi Lơgiăng** với $L(\dot{q}, q, t)$ là hàm sinh. Hamintơn lấy các đại lượng $t, q_i, p_i (i = 1, \dots, n)$ làm các biến cơ bản đặc trưng cho trạng thái của hệ. Những biến này được gọi là **các biến Hamintơn**. Các biến Hamintơn có thể biểu diễn được qua **các biến Lagrăng** $t, q_i, \dot{q}_i$ và ngược lại. Trạng thái của hệ có thể được đặc trưng bởi **các giá trị** của những biến Lagrăng cũng như bởi các giá trị của những biến Hamintơn. Chú ý rằng $L = T + U$, trong đó $U = U(q, t)$, còn T được viết dưới dạng (3.19). Phép biến đổi Lơgiăng (4.3) có thể biểu diễn dưới dạng hiển:

$$p = A\dot{q} + a,$$

và luôn luôn tồn tại phép biến đổi ngược

$$\dot{q} = A^{-1}(p - a),$$

trong đó $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Vậy , phép biến đổi Lơgiăng là đơn trị, hai chiều và xác định sự đổi biến số. Sự thay thế ngược các biến $p \to \dot{q}$ có thể xem như phép biến đổi Lơgiăng với hàm sinh

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \widehat{\dot{q}_i} - \widehat{L}(\dot{q}, q, t). \tag{4.4}$$

Ở đây , ký hiệu $\widehat{F}$ để chỉ hàm F sau khi thay trong đó $\dot{q}$ bởi biểu thức qua p. Hàm $\widehat{F}$ được gọi là **hàm liên hợp** của F. Hàm $H(p, q, t)$ được gọi là **hàm Hamintơn** hoặc Hamintơniên (Hamiltonian). Các biến p, q, t được gọi là các biến Hamintơn, để phân biệt với các biến Lagrăng $q, \dot{q}, t$.

Ta viết biểu thức vi phân toàn phần

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial t}dt. \tag{1}$$

Mặt khác, theo (4.4):

$$dH = pd\dot{q} + \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt,$$

hoặc

$$dH = \dot{q}dp - \frac{\partial L}{\partial q}dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{2}$$

do các số hạng chứa $d\dot{q}$ triệt tiêu lẫn nhau theo (4.3). So sánh hệ số của các vi phân độc lập dp, dq, dt trong các biểu thức vi phân (1) và (2) của dH ta có:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{4.5}$$

Hệ thức thứ nhất là phép biến đổi Lơgiăng ngược.

Phương trình Lagrăng

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

với các hệ thức (4.4), (4.5) có thể viết dưới dạng

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{4.6}$$

Phương trình đầu của (4.5) và phương trình (4.6) cho ta **hệ phương trình chính tắc Hamintơn** (canonical equations):

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_i}, \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Đây là hệ $2n$ phương trình vi phân cấp một đã giải ra đối với đạo hàm. Cũng như trước kia, các vế phải của phương trình (4.7) thỏa mãn định lý tồn tại và duy nhất nghiệm (chẳng hạn, chúng là những hàm liên tục với các đạo hàm riêng liên tục theo tất cả các biến). Các biến $(q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots, p_n)$ được gọi là những **biến chính tắc** Hamintơn (canonical variables).

Cũng tương tự như ở §3.8 ta có thể chứng minh rằng dạng của các phương trình chính tắc (4.7) là bất biến đối với phép biến đổi điểm (3.53).

Ví dụ 4.1. Cho hệ có một bậc tự do với biểu thức động năng T và thế năng Π

$$T = a\frac{\dot{q}^2}{2}, \quad \Pi = c\frac{q^2}{2},$$

trong đó a và c là những hằng số dương. Lập các phương trình Hamintơn cho hệ và tích phân chúng.

Bài giải. Hàm Lagrăng có dạng:

$$L = T + U = T - \Pi = \frac{a}{2}\dot{q}^2 - \frac{c}{2}q^2.$$

Ta có xung suy rộng

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a\dot{q},$$

và hàm Hamintơn:

$$H = \sum_i p_i\widehat{\dot{q}_i} - \widehat{L} = p\widehat{\dot{q}} - \frac{a}{2}\widehat{\dot{q}^2} + \frac{c}{2}q^2$$

Với chú ý rằng

$$p\widehat{\dot{q}} = p \cdot \frac{p}{a} = \frac{p^2}{a},$$
$$a\widehat{\dot{q}}^2 = a\left(\frac{p}{a}\right)^2 = \frac{p^2}{2a},$$

a có :

$$H = \frac{1}{2a}p^2 + \frac{c}{2}q^2.$$

Các phương trình Hamintơn cho ta

$$\begin{cases} \dot{q} & = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{a}, \\ \dot{p} & = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -cq. \end{cases}$$

Từ hai phương trình này tìm được:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \quad k^2 = \frac{c}{a}.$$

Nghiệm của phương trình này là:

$$q = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt \text{ hoặc } q = A\sin(kt + \alpha),$$

ở đây c_1, c_2, A, α là những hằng được xác định bởi điều kiện đầu. Cuối cùng ta có:

$$p = a\dot{q} = ak(-c_1 \sin kt + c_2 \cos kt) = akA\cos(kt + \alpha).$$

Để thấy ý nghĩa vật lý của hàm Hamintơn H ta xét trường hợp hệ sclêrônôm. Khi đó, động năng $T = T_2$ của hệ là dạng đẳng cấp bậc hai đối với $\dot{q}_i$ (xem (1.25)) và thế năng Π không phụ thuộc vào $\dot{q}_i$. Theo công thức Ơle cho dạng đẳng cấp bậc hai, ta có:

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i.$$

Do đó, từ (4.4) và (3.2) ta có thể biểu diễn H qua các biến Lagrăng $q, \dot{q}, t$:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \widehat{\dot{q}}_i - \widehat{L} = 2T - (T - \Pi) = T + \Pi. \tag{4.8}$$

Vậy với hệ sclêrônôm H là năng lượng toàn phần của hệ được biểu diễn qua các biến Hamintơn p_i và q_i.

Trong trường hợp tổng quát, động năng T của hệ có dạng (xem (1.24)):

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

ở đây T_i là dạng đẳng cấp bậc i của các vận tốc suy rộng $\dot{q}_1 \ldots, \dot{q}_n$. Ta có:

$$L = T - \Pi = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi,$$

và theo công thức Ơle về hàm đẳng cấp, ta có thể viết:

$$H = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - \Pi).$$

Do vậy,

$$H = T_2 - T_0 + \Pi.$$

Ví dụ 4.2. Đối với một chất điểm tự do trong trường thế $\Pi = \Pi(t, x, y, z)$, các tọa độ Đề các x, y, z là độc lập và hàm Lagrăng có dạng

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi(t, x, y, z). \tag{1}$$

Các xung ứng với các tọa độ x, y, z là:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

Thay các giá trị của $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ từ đây theo p_x, p_y, p_z vào (1) ta có biểu thức $\widehat{L}$ liên hợp của L:

$$\widehat{L} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \Pi(t, x, y, z),$$

và

$$H = p_x\widehat{\dot{x}} + p_y\widehat{\dot{y}} + p_z\widehat{\dot{z}} - \widehat{L} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(t, x, y, z).$$

Các phương trình (4.7) bây giờ có dạng

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m}p_x, \quad \dot{y} = \frac{1}{m}p_y, \quad \dot{z} = \frac{1}{m}p_z.$$

Từ đây ta có các phương trình quen thuộc đối với x, y, z:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

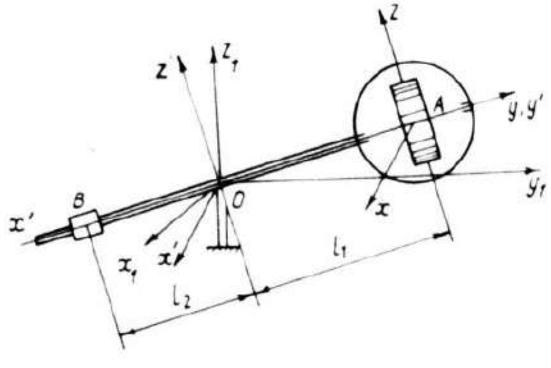
Nhận xét. Nếu hàm Hamintơn không phụ thuộc rõ vào thời gian thì nó sẽ là hằng số trên mọi quỹ đạo của chuyển động và $H(p, q) = const$ là một tích phân đầu của hệ (4.7), được gọi là tích phân năng lượng suy rộng, còn hệ cơ học khảo sát được gọi là hệ bảo toàn mở rộng.

Chứng minh. Đạo hàm của hàm Hamintơn dựa vào hệ (4.7) có dạng

$$\frac{dH(p,q)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} \equiv 0.$$

Nếu chú ý đến biểu thức (4.8) ta có thể kết luận: **Trong trường hợp các liên kết là dừng và các lực tác dụng là bảo toàn thì hàm Hamintơn H là đại lượng không đổi, bằng cơ năng toàn phần của hệ.**

Ví dụ 4.3. Lập các phương trình chính tắc cho con lắc gyrôscôp. Rô-to có khối lượng m_1 còn trọng tâm của nó nằm cách điểm cố định O một khoảng cách l_1. Vật nặng B có khối lượng m_2 và đặt cách điểm O một khoảng cách l_2. Bỏ qua khối lượng của thanh và khung tròn.

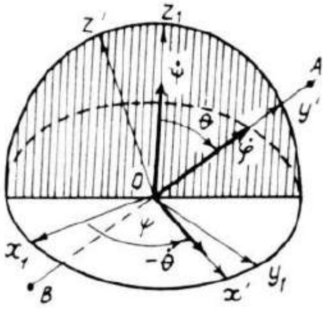


Hình 4.1
Mô hình con lắc gyrôscôp

Bài giải. Trục y' của hệ tọa độ $Ox'y'z'$ hướng theo thanh, còn trục x' hướng theo đường nằm ngang vuông góc với thanh. Hệ tọa độ $Axyz$ có các trục song song với các trục của hệ tọa độ $Ox'y'z'$. Ta lấy các tọa độ suy rộng như sau:

$$q_1 = \psi, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi,$$

ở đây, φ là góc quay của rô-to quanh trục y, còn θ và ψ xác định vị trí của thanh AB.



Hình 4.2
Hệ toạ độ suy rộng ψ, θ, φ

Các tọa độ của trọng tâm của rô-to (A) và của vật nặng (B) được xác định bởi các công thức:

$$x_{1A} = -l_1 \sin\theta \sin\psi, \quad y_{1A} = l_1 \sin\theta \cos\psi, \quad z_{1A} = l_1 \cos\theta,$$
$$x_{1B} = l_2 \sin\theta \sin\psi, \quad y_{1B} = -l_2 \sin\theta \cos\psi, \quad z_{1B} = -l_2 \cos\theta.$$

Các hình chiếu của vận tốc góc của rô- to trên các trục tọa độ $Axyz$ bằng $\omega_x = -\dot{\theta}$, $\omega_y = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$, $\omega_z = \dot{\psi}\sin\theta$.

Ta có biểu thức động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) + \frac{1}{2}m_2 v_B^2.$$

Vì rằng

$$v_A^2 = \dot{x}_{1A}^2 + \dot{y}_{1A}^2 + \dot{z}_{1A}^2 = l_1^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta),$$
$$v_B^2 = \dot{x}_{1B}^2 + \dot{y}_{1B}^2 + \dot{z}_{1B}^2 = l_2^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta),$$

và $I_x = I_z$, nên

$$T = \frac{1}{2}\left[(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + I_x)(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta) + I_y(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2\right].$$

Biểu thức thế năng của hệ có dạng:

$$\Pi = m_1 g z_{1A} + m_2 g z_{1B} = (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \cos\theta.$$

Bây giờ ta tìm các xung suy rộng:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi}\sin^2\theta + I_y(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta,$$
$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = A\dot{\theta},$$
$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_y(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}),$$

ở đây $A = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + I_x$. Giải hệ phương trình này đối với các vận tốc suy rộng $\dot{\psi}, \dot{\theta}$ và $\dot{\varphi}$ ta được:

$$\dot{\psi} = \frac{p_1 - p_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_2}{A}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_3}{I_y} - \frac{p_1 - p_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}\cos\theta.$$

Hàm Hamintơn được biểu diễn bởi công thức:

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2A}\left[p_2^2 + \frac{(p_1 - p_3\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right] + \frac{p_3^2}{2I_y} + (m_1 l_1 - m_2 l_2) g \cos\theta$$

Vì các tọa độ ψ và φ là xyclic nên

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0, \quad \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0,$$

nghĩa là $p_1 = \alpha_1$, $p_3 = \alpha_3$ - những hằng số. Từ đây

$$H = \frac{1}{2A}\left[p_2^2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_3\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right] + \frac{\alpha_3^2}{2I_y} + (m_1l_1 - m_2l_2)g\cos\theta.$$

Bây giờ ta lập các phương trình chính tắc:

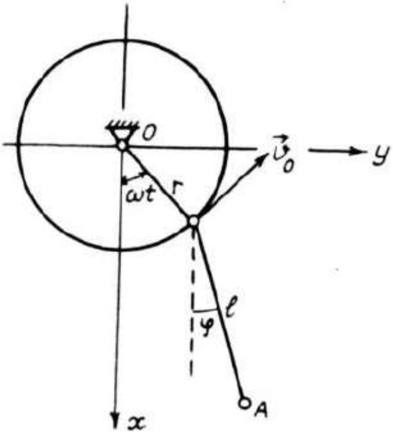
$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = \frac{(m_1l_1 - m_2l_2)}{A}g\sin\theta - \frac{(\alpha_1 - \alpha_3\cos\theta)(\alpha_3 - \alpha_1\cos\theta)}{A\sin^3\theta},$$
$$\dot{q}_2 = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{A}, \quad \dot{q}_1 = \dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\alpha_1 - \alpha_3\cos\theta}{A\sin^2\theta},$$
$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_3} == \frac{\alpha_3}{I_y} - \frac{\alpha_1 - \alpha_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}\cos\theta.$$

Nhận xét rằng hệ đã cho có tích phân năng lượng

$$H = T + \Pi = h,$$

vì rằng thời gian t cũng là biến xyclic.

Ví dụ 4.4. Viết các phương trình chính tắc cho chuyển động của con lắc toán học chiều dài l, điểm treo B của nó chuyển động trên vòng tròn bán kính r với vận tốc v_0 không đổi.



Hình 4.3

Con lắc toán học có điểm treo chuyển động tròn

Bài giải. Ta lấy góc φ làm tọa độ suy rộng. Tọa độ của điểm A:

$$x_A = r\cos\omega t + l\cos\varphi, \quad y_A = r\sin\omega t + l\sin\varphi, \quad \omega = \frac{v_0}{r}.$$

Do vậy biểu thức động năng T có dạng

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) = \frac{1}{2}m[l^2\dot{\varphi}^2 + 2v_0 l\dot{\varphi}\cos(\varphi - \omega t)] + c,$$

trong đó c là một hằng số. Khi tìm các lực suy rộng, tất cả các liên kết được xem như dừng lại tức thời. Vì vậy, ta có biểu thức thế năng

$$\Pi = -mg(l\cos\varphi + r\cos\omega t),$$

và hàm Lagrăng:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m[l^2\dot{\varphi}^2 + 2lv_0\dot{\varphi}\cos(\varphi - \omega t)] + mg(l\cos\varphi + r\cos\omega t).$$

Do vậy,

$$p = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + mv_0 l\cos(\varphi - \omega t).$$

Từ đây tìm được

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos(\varphi - \omega t). \tag{1}$$

Ta lập hàm Hamintơn

$$H = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mg(l\cos\varphi + r\cos\omega t). \tag{2}$$

Nếu $v_0 = 0$ thì

$$H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2} - mg(l\cos\varphi + r\cos\omega t) = T + \Pi.$$

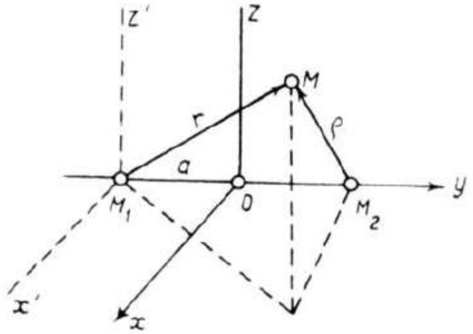
Thay (1) vào (2) ta có:

$$H = \frac{1}{2}ml^2\left[\frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos(\varphi - \omega t)\right]^2 - mg(l\cos\varphi + r\cos\omega t),$$
$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = mlv_0\left[\frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos(\varphi - \omega t)\right]\sin(\varphi - \omega t) - mgl\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos(\varphi - \omega t).$$

và do vậy,

$$\begin{aligned}\dot p &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}\\ &= -mlv_0\left[\frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos(\varphi - \omega t)\right]\sin(\varphi - \omega t) + mglsin\varphi,\\ \dot\varphi &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2} - \frac{v_0}{l}\cos(\varphi - \omega t).\end{aligned}$$

Ví dụ 4.5. Điểm M khối lượng m bị hút vào hai tâm cố định M_1 và M_2 bằng những lực tỷ lệ với khoảng cách từ điểm đến các tâm đó. Tìm quỹ đạo của điểm, biết điều kiện đầu $t = 0$, $x = 0$, $\dot x = v_0$, $y = b > a$, $\dot y = 0$, $z = h$, $\dot z = 0$. Khoảng cách giữa hai tâm là $M_1M_2 = 2a$.



Hình 4.4
Điểm M bị hút về hai tâm cố định M_1, M_2.

Bài giải. Lấy gốc tọa độ O tại trung điểm của đoạn M_1, M_2, trục y hướng theo chiều $\overrightarrow{OM_2}$. Lấy $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ - những tọa độ Đề các của điểm M - làm tọa độ suy rộng. Ta có các biểu thức động năng và thế năng của M:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad \Pi = \frac{c_1}{2}r^2 + \frac{c_2}{2}\rho^2,$$

trong đó c_1 và c_2 là các hệ số tỷ lệ,

$$r^2 = x^2 + (y+a)^2 + z^2, \quad \rho^2 = x^2 + (y-a)^2 + z^2.$$

Vì rằng $p_1 = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $p_2 = m\dot{y}$, $p_3 = m\dot{z}$ nên theo (4.8):

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{c_1}{2}[x^2 + (y+a)^2 + z^2] + \frac{c_2}{2}[x^2 + (y-a)^2 + z^2].$$

Do đó,

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = -c_1 x - c_2 x, \ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -c_1(y+a) - c_2(y-a),$$
$$\dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial z} = -c_1 z - c_2 z, \ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m}, \ \dot{y} = \frac{p_2}{m}, \ \dot{z} = \frac{p_3}{m}.$$

Từ đây ta có các phương trình chuyển động

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad \ddot{y} + k^2 y = N, \quad \ddot{z} + k^2 z = 0,$$

trong đó

$$k^2 = \frac{c_1 + c_2}{m}, \quad N = \frac{(c_2 - c_1)a}{m}.$$

Nghiệm tổng quát của các phương trình này là:

$$x = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt,$$
$$y = A_2 \cos kt + B_2 \sin kt + \frac{N}{k^2},$$
$$z = A_3 \cos kt + B_3 \sin kt.$$

Dùng các điều kiện đầu ta xác định được các hằng A_i, B_i:

$$A_1 = 0, B_1 = \frac{v_0}{k}, A_2 = b - \frac{N}{k^2}, B_2 = 0, A_3 = h, B_3 = 0,$$

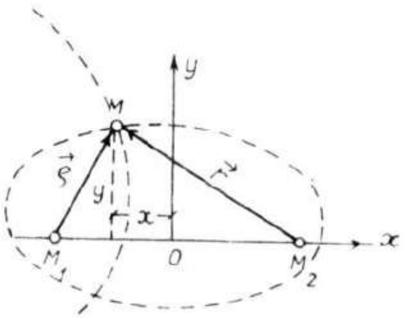
và do vậy

$$x = \frac{v_0}{k}\sin kt, y = (b - \frac{N}{k^2})\cos kt + \frac{N}{k^2}, z = h\cos kt.$$

Nếu $h = 0$ thì $z = 0$ và chuyển động xảy ra trong mặt phẳng xy. Quỹ đạo của chuyển động là một đường enlip:

$$\frac{k^2}{v_0^2}x^2 + \frac{(y - N/k^2)^2}{(b - N/k^2)^2} = 1.$$

Ví dụ 4.6. Lập các phương trình chính tắc cho chuyển động phẳng của chất điểm M, khối lượng m, được hút về hai tâm cố định với những lực tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ chất điểm đến tâm hút M_1 và M_2.



Hình 4.5
Điểm M bị hút về hai tâm cố định

Bài giải. Lấy gốc O của các tọa độ tại trung điểm của đoạn M_1, M_2 và hướng trục x theo hướng từ M_1 đến M_2. Độ dài đoạn $M_1M_2 = a$. Ta có các biểu thức động năng và thế năng của điểm M:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \Pi = -\frac{c_1 m}{\rho} - \frac{c_2 m}{r},$$

ở đây x, y là tọa độ của điểm M, còn c_1 và c_2 là các hệ số tỷ lệ,

$$\rho = MM_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Ta lấy các tọa độ λ, μ: $q_1 = \lambda$, $q_2 = \mu$ làm các tọa độ suy rộng:

$$\lambda = \frac{1}{2a}(r + \rho), \;\; \mu = \frac{1}{2a}(r - \rho).$$

Khi λ không đổi, phương trình thứ nhất biểu diễn một đường enlip. Khi μ không đổi, phương trình thứ hai biểu diễn một đường hypecbôn. Vì rằng $r + \rho \geq 2a$ và $|r - \rho| \leq 2a$ nên các tọa độ λ và μ chỉ có thể lấy các giá trị thỏa mãn các bất đẳng thức:

$$1 \leq \lambda \leq \infty, \quad -1 < \mu < 1.$$

Từ các biểu thức đối với ρ, λ, r và μ suy ra:

$$x = -a\lambda\mu, \quad y = a\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)},$$
$$\dot{x} = -a(\dot{\lambda}\mu + \dot{\mu}\lambda), \quad \dot{y} = a\left(\lambda\dot{\lambda}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2 - 1}} - \mu\dot{\mu}\sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \mu^2}}\right).$$

Ta có biểu thức của động năng và thế năng:

$$T = \frac{1}{2}ma^2\left[(\dot{\lambda}\mu + \dot{\mu}\lambda)^2 + \left(\lambda\dot{\lambda}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}} - \mu\dot{\mu}\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}ma^2(\lambda^2 - \mu^2)\left(\frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2 - 1} + \frac{\dot{\mu}^2}{1 - \mu^2}\right),$$
$$\Pi = -\frac{c_1 m}{a(\lambda - \mu)} - \frac{c_2 m}{a(\lambda + \mu)} =$$
$$= -\frac{m}{a(\lambda^2 - \mu^2)}[(c_1 + c_2)\lambda + (c_1 - c_2)\mu].$$

Thay thế vào biểu thức của T các đại lượng

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot\lambda} = ma^2(\lambda^2 - \mu^2)\frac{\dot\lambda}{\lambda^2 - 1},$$
$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot\mu} = -ma^2(\lambda^2 - \mu^2)\frac{\dot\mu}{\mu^2 - 1},$$

ta được

$$T = \frac{1}{2m(\lambda^2 - \mu^2)a^2}[p_1^2(\lambda^2 - 1) + p_2^2(1 - \mu^2)].$$

Do vậy,

$$H = \frac{1}{2m(\lambda^2 - \mu^2)a^2}[p_1^2(\lambda^2 - 1) + p_2^2(1 - \mu^2)] - \frac{m}{a(\lambda^2 - \mu^2)}[(c_1 + c_2)\lambda + (c_1 - c_2)\mu].$$

Các phương trình chính tắc sẽ là:

$$\dot p_1 = -\frac{\lambda(1 - \mu^2)(p_1^2 + p_2^2)}{ma^2(\lambda^2 - \mu^2)^2} - \frac{m}{a(\lambda^2 - \mu^2)^2}[c_1(\lambda + \mu)^2 + c_2(\lambda - \mu)^2],$$
$$\dot p_2 = \frac{\mu(\lambda^2 - 1)(p_2^2 - p_1^2)}{ma^2(\lambda^2 - \mu^2)^2} + \frac{m}{a(\lambda^2 - \mu^2)^2}[c_1(\lambda + \mu)^2 - c_2(\lambda - \mu)^2],$$
$$\dot\lambda = \frac{p_1(\lambda^2 - 1)}{ma^2(\lambda^2 - \mu^2)}, \quad \dot\mu = \frac{p_2(1 - \mu^2)}{ma^2(\lambda^2 - \mu^2)}.$$

Giả thử rằng hệ khảo sát có m tọa độ xyclic và $n - m$ tọa độ không xyclic. Ký hiệu các tọa độ không xyclic bởi

$$q_1, q_2, \ldots, q_{n-m},$$

các tọa độ xyclic bởi

$$q_{n-m+1}, \ldots, q_n.$$

Trong trường hợp này hàm Hamintơn của hệ phụ thuộc vào $n-m$ tọa độ không xyclic $(q_1,\ldots,q_{n-m})$ và $n-m$ xung suy rộng của chúng. Thực vậy, trong biểu thức của hàm Hamintơn các tọa độ xyclic $q_{n-m+1},\ldots,q_n$ không có mặt, còn các xung suy rộng tương ứng với chúng là những hằng c_α (3.76), $(\alpha = n-m+1,\ldots,n)$. Do đó, ta có hệ độc lập các phương trình chính tắc đối với các tọa độ không xyclic $q_1,\ldots,q_{n-m}$:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j},\ (j = 1,\ldots,n-m), \tag{4.9}$$

ở đây,

$$H = H(q_1,\ldots,q_{n-m},p_1,\ldots,p_{n-m},c_{n-m+1},\ldots,c_n,t). \tag{4.10}$$

Hệ $2(n-m)$ phương trình vi phân cấp một (4.9) là khép kín, hoàn toàn không chứa các tọa độ xyclic và các xung suy rộng tương ứng.

Giả thử rằng hệ $2(n-m)$ phương trình (4.9) là khả tích, nghĩa là có thể tìm được tất cả các tọa độ không xyclic và các xung suy rộng của chúng như những hàm của thời gian. Các hàm này phụ thuộc vào $2(n-m)$ hằng tùy ý. Ngoài ra, chúng còn phụ thuộc m hằng tùy ý khác là $c_{n-m+1},\ldots,c_n$:

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(t,c_{n-m+1},\ldots,c_n,D_1,\ldots,D_{2(n-m)}),\\ p_j &= p_j(t,c_{n-m+1},\ldots,c_n,D_1,\ldots,D_{2(n-m)}). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Bây giờ có thể đưa các tích phân tìm được (4.11) vào hàm Hamintơn (4.10). Kết quả là ta có hàm H chỉ phụ thuộc vào thời gian và $2(n-m)+m = 2n-m$ hằng tùy ý:

$$H = H(t,c_{n-m+1},\ldots,c_n,D_1,\ldots,D_{2(n-m)}). \tag{4.12}$$

Tiếp theo, ta có thể viết các phương trình Hamintơn độc lập cho các tọa độ xyclic, lưu ý rằng các xung xyclic phải được thay thế bởi các hằng $c_{n-m+1},\ldots,c_n$:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial c_\alpha},\ (\alpha = n-m+1,\ldots,n),$$

trong đó $H(4.12)$ chỉ phụ thuộc vào thời gian và các hằng số. Do vậy,

$$q_\alpha = \int \frac{\partial H}{\partial c_\alpha} dt + N_\alpha, \ (\alpha = n - m + 1, \dots, n),$$

ở đây số các hằng N, C, D là $m + 2n - m = 2n$ đúng bằng bậc của hệ phương trình Hamintơn đối với tất cả các biến Hamintơn.

Vậy là, **với sự xuất hiện của m tọa độ xyclic, cấp của hệ phương trình cần tích phân (4.9) giảm đi $2m$ đơn vị so với hệ xuất phát.**

4.2. MÓC POATSÔNG (POISSON)

Khái niệm móc Poatsông tỏ ra rất ưu việt khi tính đạo hàm của hàm số dựa vào các phương trình chính tắc Hamintơn .

Định nghĩa. Móc Poatsông (f, g) của hai hàm $f(p, q, t)$ và $g(p, q, t)$ là biểu thức:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right); \tag{4.13}$$

Với định nghĩa này, đạo hàm theo thời gian của hàm $F(q, p, t)$, trong đó p, q thỏa mãn (4.7), được viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial F}{\partial t} + (F, H). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Tính chất. Móc Poatsông có các tính chất sau đây đối với mọi hàm hai lần khả vi f, g:

$a)$ $(f, g) = -(g, f)$ - tính phản đối xứng

$$(f,f) = (g,g) = 0,\ (f,c) = (c,g) = 0,\ c = const, \tag{4.15}$$

b) $(\lambda f, g) = (f, \lambda g) = \lambda(f,g)$ - song tuyến tính, (4.16)

c) $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g),$ (4.17)

$(f_1 f_2, g) = f_1(f_2, g) + f_2(f_1, g).$ (4.18)

d) $\frac{\partial}{\partial x}(f,g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial x}\right),$ (4.19)

g) $(f_1,(f_2,f_3)) + (f_2,(f_3,f_1)) + (f_3,(f_1,f_2)) = 0.$ (4.20)

Hệ thức (4.20) còn được gọi là hằng đẳng thức Giacôbi.

Sự đúng đắn của các tính chất (4.14) - (4.19) có thể chứng minh một cách dễ dàng bằng cách tính trực tiếp. Ta chứng minh tính chất (4.20).

Xét biểu thức

$$(f_1,(f_2,f_3)) - (f_3,(f_2,f_1)) = \left(f_1, \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f_2}{\partial q_i}\frac{\partial f_3}{\partial p_i} - \frac{\partial f_2}{\partial p_i}\frac{\partial f_3}{\partial q_i}\right]\right) - \\ - \left(f_3, \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f_2}{\partial q_i}\frac{\partial f_1}{\partial p_i} - \frac{\partial f_2}{\partial p_i}\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\right]\right). \tag{4.21}$$

Dùng các tính chất (4.17), (4.18) và nhóm các số hạng lại với nhau ta có thể biểu diễn (4.21) dưới dạng

$$(f_1,(f_2,f_3)) - (f_3,(f_2,f_1)) = S_1 + S_2, \tag{4.22}$$

ở đây,

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial p_i}\left[\left(f_1, \frac{\partial f_3}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i}, f_3\right)\right] \right. \\ \left. - \frac{\partial f_2}{\partial q_i}\left[\left(f_1, \frac{\partial f_3}{\partial p_i}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_i}, f_3\right)\right]\right\},$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\left(f_3, \frac{\partial f_2}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial f_1}{\partial q_i}\left(f_3, \frac{\partial f_2}{\partial p_i}\right) \right. \\ \left. - \frac{\partial f_3}{\partial p_i}\left(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial f_3}{\partial q_i}\left(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial p_i}\right)\right].$$

Theo (4.19) ta có thể biến đổi S_1 về dạng:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f_2}{\partial p_i} \frac{\partial (f_1, f_3)}{\partial q_i} - \frac{\partial f_2}{\partial q_i} \frac{\partial (f_1, f_3)}{\partial p_i} \right] = \Big(f_2, (f_1, f_3) \Big).$$

Nếu tính trực tiếp sẽ có $S_2 = 0$. Vậy, công thức (4.22) cho ta

$$\Big(f_1, (f_2, f_3)\Big) - \Big(f_3, (f_2, f_1)\Big) = \Big(f_2, (f_1, f_3)\Big). \tag{4.23}$$

Do các tính chất (4.14) và (4.16) biểu thức (4.23) chính là hằng đẳng thức Giacôbi (4.20).

Định lý Giacôbi - Poatsông. Nếu $f_1(p, q, t)$ và $f_2(p, q, t)$ là hai tích phân đầu của các phương trình chính tắc Hamintơn

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{4.24}$$

thì móc Poatsông (f_1, f_2) cũng là tích phân đầu của các phương trình (4.24).

Chứng minh. Ta tính đạo hàm theo thời gian của móc Poatsông (f_1, f_2) trên quỹ đạo của hệ Hamintơn (4.24), sử dụng các tính chất đã nêu ở trên:

$$\frac{d}{dt}(f_1, f_2) = \Big((f_1, f_2), H\Big) + \Big(\frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2\Big) + \Big(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t}\Big).$$

Song, vì f_k là tích phân đầu của (4.24) nên dọc theo các quỹ đạo pha của (4.24) ta có theo (4.14):

$$\begin{aligned}
\frac{df_k}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_k}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f_k}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = (f_k, H) + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0 \\
&\Longrightarrow \frac{\partial f_k}{\partial t} = -(f_k, H).
\end{aligned}$$

Vậy theo hằng đẳng thức Giacôbi (4.17) ta có

$$\frac{d(f_1, f_2)}{dt} = \Big(H, (f_2, f_1)\Big) + \Big(f_2, (f_1, H)\Big) + \Big(f_1, (H, f_2)\Big) = 0.$$

Do đó móc Poatsông của hai tích phân đầu (f_1, f_2) là hằng trên quỹ đạo pha của hệ phương trình (4.24), nghĩa là, là tích phân đầu của hệ ấy.

Ví dụ 4.7. Đối với một chất điểm cô lập tự do ta có các tích phân động lượng của chuyển động

$$p_x = m\dot{x} = c_1, \quad p_y = m\dot{y} = c_2, \quad p_z = m\dot{z} = c_3,$$

và tích phân mômen động lượng của chuyển động

$$K_x = yp_z - zp_y = c_4, K_y = zp_x - xp_z = c_5, K_z = xp_y - yp_x = c_6.$$

Ta sẽ chứng minh rằng:

$$(K_x, K_y) = K_z = c_6.$$

Thực vậy,

$$\begin{aligned}(K_x, K_y) = {} & \frac{\partial K_x}{\partial x}\frac{\partial K_y}{\partial p_x} - \frac{\partial K_x}{\partial p_x}\frac{\partial K_y}{\partial x} + \frac{\partial K_x}{\partial y}\frac{\partial K_y}{\partial p_y} - \\ & - \frac{\partial K_x}{\partial p_y}\frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_x}{\partial z}\frac{\partial K_y}{\partial p_z} - \frac{\partial K_x}{\partial p_z}\frac{\partial K_y}{\partial z} = \\ & = (-p_y)(-x) - yp_x = xp_y - yp_x = c_6.\end{aligned}$$

4.3. PHƯƠNG TRÌNH RAUXƠ (ROUTH)

Để giải bài toán động lực học, đôi khi người ta dùng một phần biến Lagrăng và một phần biến Hamintơn. Khi đó ta đi đến mộ dạng phương trình hỗn hợp giữa các phương trình Lagrăng và các phương trình Hamintơn và được gọi là các phương trình Rauxơ. Ngoài ra, như sẽ thấy dưới đây, khi một vài toạ độ Lagrăng là xyclic thì nhờ các tích phân đầu tương ứng người ta có thể hạ thấp hạng của hệ phương trình vi phân của chuyển động.

Các biến Rauxơ được lựa chọn là :

$$t,\ q_j,\ \dot q_j,\ q_\mu,\ p_\mu \quad (j = 1, \dots, m, \mu = m+1, \dots, n), \tag{4.25}$$

ở đây m là một số cố định tùy ý, $m < n$. Để chuyển từ các biến Lagrăng sang các biến Rauxơ (4.25) cần phải biểu diễn tất cả $\dot q_\mu$ qua các đại lượng p_μ. Muốn vậy, ta dùng các hệ thức (4.3):

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\mu} \quad (\mu = m+1, \dots, n). \tag{4.26}$$

Giả thử rằng

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_\mu \partial \dot q_\sigma}\right)_{\mu,\sigma=m+1}^{n} \neq 0.$$

Điều này luôn luôn đúng đối với hệ cơ học vì $L_2 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\mu,\sigma} a_{\mu\sigma}\dot q_\mu \dot q_\sigma$ là dạng toàn phương xác định dương và định thức con chính lập nên từ các hệ số của dạng toàn phương:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q_\mu \partial \dot q_\sigma}\right)_{\mu,\sigma=m+1}^{n} = \det(a_{\mu,\sigma})_{\mu,\sigma=m+1}^{n},$$

phải là dương. Khi đó, tồn tại phép biến đổi ngược của (4.26):

$$\dot q_\mu = \frac{\partial R}{\partial p_\mu} \quad (\mu = m+1, \dots, n), \tag{4.27}$$

ở đây $R = R(t, q_j, q_\mu, \dot q_j, p_\mu)$ là **hàm Rauxơ** được xác định bởi biểu thức

$$R = \sum_{\mu=m+1}^{n} p_\mu \widehat{\dot q_\mu} - \widehat{L}, \tag{4.28}$$

trong đó dấu mũ ∧ để chỉ rằng mọi $\dot{q}_\mu$ được biểu diễn qua p_μ. Ở đây, các biến $t, q_j, q_\mu, \dot{q}_j, (j = 1, \ldots, m; \mu = m+1, \ldots, n)$ được xem như những tham số và do vậy ta cũng có:

$$\frac{\partial R}{\partial q_j} = -\frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\mu} = -\frac{\partial L}{\partial q_\mu} \quad (\mu = m+1, \ldots, n), \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Do các hệ thức (4.29), các phương trình Lagrăng đối với các tọa độ q_j sẽ có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{4.31}$$

Các phương trình

$$\frac{dp_\mu}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\mu}, \quad (\mu = m+1, \ldots, n),$$

cùng với các công thức (4.27) và (4.30) cho ta:

$$\frac{dq_\mu}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_\mu}, \quad \frac{dp_\mu}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_\mu}, \quad (\mu = m+1, \ldots, n). \tag{4.32}$$

Các phương trình (4.31) và (4.32)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m), \\ \dfrac{dq_\mu}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial p_\mu}, \quad \dfrac{dp_\mu}{dt} = -\dfrac{\partial R}{\partial q_\mu}, \quad (\mu = m+1, \ldots, n), \end{cases} \tag{4.33}$$

lập thành **Hệ các phương trình Rauxơ**. Hệ này gồm m phương trình vi phân cấp hai loại Lagrăng và $2(n-m)$ phương trình vi phân cấp một loại Hamintơn, trong đó hàm Rauxơ R đóng vai trò của hàm Lagrăng trong nhóm phương trình thứ nhất và đóng vai trò của hàm Hamintơn trong nhóm phương trình thứ hai.

Ta lại xét hệ với $n-m$ toạ độ vị trí $q_1, q_2, ..., q_{n-m}$ và m toạ độ xyclic $q_{n-m+1}, ..., q_n$. Như sẽ thấy dưới đây, nhờ các phương trình Rauxơ ta có thể được một hệ $n-m$ phương trình cấp hai loại Lagrăng. Thực vậy, thay các xung suy rộng p_α tương ứng với tọa độ xyclic q_α bởi các hằng $c_\alpha, (\alpha = n-m+1, \ldots, n)$ ta có thể viết hàm Rauxơ dưới dạng hàm của $t, q_j, \dot{q}_j$ và c_α:

$$R = R(t, q_j, \dot{q}_j, c_\alpha), \; (j = 1, \ldots, n-m, \alpha = n-m+1, \ldots, n).$$

Khi đó, các phương trình Rauxơ đối với các tọa độ không xyclic

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0, \; (j = 1, \ldots, n-m) \tag{4.34}$$

tạo thành hệ $n-m$ phương trình cấp hai độc lập dạng Lagrăng. Tích phân hệ này ta được q_j, sau đó các tọa độ xyclic sẽ được xác định bởi các công thức:

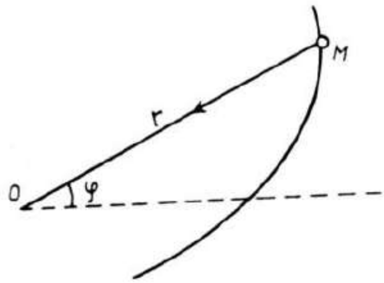
$$q_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial c_\alpha} dt + N_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} dt + N_\alpha, \tag{4.35}$$

ở đây, trong biểu thức $\dfrac{\partial R}{\partial p_\alpha}$ tất cả các hàm q_j và $\dot{q}_j$ được thay thế bởi các nghiệm của (4.34)- những hàm của t, c_α vàN_α.

Như vậy, cũng do việc tồn tại m toạ độ *xylic*, để mô tả chuyển động của hệ n bậc tự do $(n > m)$ ta chỉ cần sử dụng hệ $n-m$ phương trình Lagrăng loại 2. Khi đã biết các nghiệm của chúng, ta sẽ tìm được tất cả các toạ độ suy rộng còn lại bằng cách tính các tích phân (4.35). Do đó, hệ (4.34) được gọi là hệ qui gọn của hệ xuất phát.

Ví dụ 4.8. Xét chuyển động của chất điểm bị hút về một tâm cố định theo luật hấp dẫn vũ trụ.

Bài giải. Ta dùng các tọa độ cực $q_1 = \varphi$, $q_2 = r$.



Hình 4.6

Điểm M trong trường hấp dẫn vũ trụ

Ta có :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \quad \Pi = -\frac{k^2}{r};$$

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{k^2}{r}.$$

Tọa độ φ là xyclic. Do vậy, theo (3.76) ta có

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = p = const. \quad (1$$

Biểu thức này chính là **tích phân diện tích**.

Ta thành lập hàm Rauxơ (4.28):

$$R = p\widehat{\dot{\varphi}} - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\widehat{\dot{\varphi}^2}) - \frac{k^2}{r},$$

ở đây

$$\widehat{\dot{\varphi}} = \frac{p}{mr^2}.$$

Do vậy,

$$R = \frac{p^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{k^2}{r},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} = -m\dot{r}, \quad \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{p^2}{mr^3} + \frac{k^2}{r^2}.$$

Phương trình Rauxơ (4.34) đối với tọa độ không xyclic r có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0,$$

hoặc

$$m\ddot{r} - \frac{p^2}{mr^3} + \frac{k^2}{r^2} = 0. \tag{2}$$

Toạ độ xyclic φ đã được khử khỏi phương trình (2). Phương trình này cho phép xác định r như hàm của thời gian. Vì rằng

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \frac{p}{mr^2},$$

nên ta có biểu thức (4.35) sau đây cho tọa độ xyclic φ:

$$\varphi = \int \frac{\partial R}{\partial p} dt = \int \frac{p}{mr^2} dt,$$

trong đó r cần được thay bởi nghiệm của phương trình (2).

Quay trở lại phương trình (2), ta có $\ddot{r} = \dfrac{d\dot{r}}{dt} = \dot{r}\dfrac{d\dot{r}}{dr}$ và phương trình này được viết lại như sau:

$$m\dot{r}d\dot{r} = \left(\frac{p^2}{mr^3} - \frac{k^2}{r^2}\right) dr.$$

Tích phân ta được

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = -\frac{p^2}{2mr^2} + \frac{k^2}{r} + h. \tag{3}$$

Đây chính là **tích phân năng lượng** $T + \Pi = h$ và hệ là bảo toàn.

Xét các chuyển động không đi ra vô tận (khi $r \to \infty$ thì $h > 0$), ứng với các giá trị $h < 0$. Ta đặt $h = -\beta^2$. Theo (3) ta có:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(-\frac{p^2}{2mr^2} + \frac{k^2}{r} - \beta^2\right)},$$

hoặc

$$\sqrt{\frac{2}{m}}dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{k^2}{r} - \frac{p^2}{2mr^2} - \beta^2}}.$$

Tích phân sẽ được

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0) = \frac{1}{\beta}\int \frac{rdr}{\sqrt{\frac{k^2}{\beta^2}r - \frac{p^2}{2m\beta^2} - r^2}}.$$

Đưa vào các ký hiệu

$$\mu = \frac{\beta}{a}\sqrt{\frac{2}{m}}, \ \ a = \frac{k^2}{2\beta^2}, \ \ b = \frac{k^4}{4\beta^4} - \frac{p^2}{2m\beta^2},$$

ta có

$$\mu(t - t_0)a = \int \frac{rdr}{\sqrt{b - (a - r)^2}}.$$

Đặt $a - r = \sqrt{b}\cos u$, ta có :

$$\mu(t - t_0) = \int (1 - e\cos u)du,$$

trong đó $e = \frac{\sqrt{b}}{a}$. Giả thử $u = u_0$ khi $t = t_0$, ta được

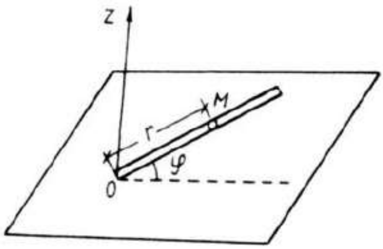
$$\mu(t - t_0) = u - u_0 - e(\sin u - \sin u_0), \tag{4}$$

với

$$u = arccos\frac{a - r}{ae}.$$

Phương trình (4) được gọi là *phương trình Kêple*, thường gặp trong cơ học thiên thể.

Ví dụ 4.9. Một máng nằm ngang quay quanh trục thẳng đứng. Một chất điểm khối lượng m chuyển động trong máng. Lực tác dụng lên chất điểm có thế $\Pi(r)$, trong đó r là khoảng cách từ điểm đến trục quay.



Hình 4.7

Máng OM quay quanh trục thẳng đứng $0z$

Gọi φ là góc quay của máng, còn $I = md^2$ là mômen quán tính của máng đối với trục quay thẳng đứng oz. Lấy r và φ làm các tọa độ độc lập. Ta có

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2+(r^2+d^2)\dot{\varphi}^2],$$

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\dot{\varphi}^2] - \Pi(r).$$

Rõ ràng φ là tọa độ xyclic. Do vậy

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(r^2 + d^2)\dot{\varphi} = const. \qquad (1)$$

Ta lập hàm Rauxơ (4.28):

$$R = p_\varphi\widehat{\dot{\varphi}} - \widehat{L} = m(r^2 + d^2)\widehat{\dot{\varphi}^2} - \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\widehat{\dot{\varphi}^2}] + \Pi(r)$$

$$= \frac{-1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2m(r^2 + d^2)} + \Pi(r)$$

$$= \frac{-1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{c}{2m(r^2 + d^2)} + \Pi(r), \quad c = p_\varphi^2 = const.$$

Việc tìm chuyển động của chất điểm được đưa về giải phương trình vi phân cấp hai đối với tọa độ vị trí (r):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0,$$

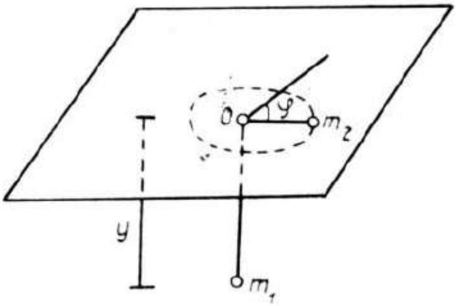
hoặc

$$m\ddot{r} = \frac{c}{m}\frac{r}{(r^2+d^2)^2} - \Pi'(r). \tag{2}$$

Toạ độ xyclic φ đã được khử khỏi phương trình (2). Đây chính là phương trình chuyển động tương đối của chất điểm trong máng. Biểu thức thứ nhất ở vế phải của (2) chính là lực quán tính ly tâm vì:

$$\frac{c}{m}\frac{r}{(r^2+d^2)^2} = \frac{p_\varphi^2 r}{m(r^2+d^2)^2} = mr\dot{\varphi}^2.$$

Ví dụ 4.10. Khảo sát chuyển động của hệ gồm hai chất điểm m_1 và m_2 nối với nhau bởi một sợi dây không trọng lượng, chiều dài l. Chất điểm m_2 có thể dịch chuyển tự do trên mặt phẳng nằm ngang, còn sợi dây có thể chuyển động không ma sát qua một lỗ trên mặt phẳng và điểm m_1 thì chuyển động thẳng đứng.



Hình 4.8

Hai chất điểm liên kết với nhau bằng một sợi dây xuyên qua O

Bài giải. Hệ hai chất điểm có hai bậc tự do. Chọn các tọa độ y và φ làm những tọa độ suy rộng của hệ (Hình 4.8). Ta có các biểu thức của động năng T và thế năng V:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),\ r = l - y.$$

$$V = -m_1 gy.$$

Do vậy,

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2 r^2 \dot{\varphi}^2 + m_1 gy.$$

Trong L không có mặt góc φ. Vậy φ là tọa độ xyclic. Hàm Rauxơ (4.28) bây giờ có dạng:

$$R = p_\varphi \dot{\varphi} - \widehat{L} = \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \widehat{L} = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 - m_1 gy.$$

Hệ rút xuống chỉ còn một bậc tự do ($p_\varphi = const$) với một hàm á thế

$$U^*(y) = \frac{p_\varphi^2}{2m_2(l-y)^2}.$$

Ví dụ 4.11. Trong động lực học của vật rắn quay quanh một điểm cố định, ở trường hợp Lagrăng - Poatsông khi vật có tính đối xứng động lực ($A = B$), các biểu thức của động năng T và thế năng Π có dạng:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \ \ \Pi = mg\xi cos\theta,$$

trong đó p, q, r là các thành phần của vận tốc góc $\vec{\omega}$ của vật rắn trên các trục toạ độ động gắn cố định vào vật rắn và có các biểu thức

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},$$

θ, φ, ψ là các góc Ơle, còn ξ là độ cao của trọng tâm của vật rắn.

Hàm Lagrăng có dạng

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\left[A(\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2\right] - mg\xi\cos\theta. \tag{1}$$

Hàm này không chứa rõ các góc φ và ψ. Vì vậy chúng là những toạ độ xyclic. Các tích phân xyclic tương ứng là

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= \dot{\psi}(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta) + C\dot{\varphi}\cos\theta = const = \beta A,\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = const = Cr_0,\end{aligned} \tag{2}$$

trong đó β và r_0 là những hằng tuỳ ý. Ta tìm hàm Rauxơ

$$R = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\dot{\psi} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = L - \beta A\dot{\psi} - Cr_0\dot{\varphi}. \tag{3}$$

Thay vào đây các giá trị của $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ từ các tích phân xyclic (2)

$$\dot{\psi} = \frac{\beta - br_0\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad b = \frac{C}{A}, \quad \dot{\varphi} = r_0 - \dot{\psi}\cos\theta, \tag{4}$$

ta có

$$R = L - A(\beta - br_0\cos\theta)\dot{\psi} - Cr_0^2 = L - A\frac{(\beta - br_0\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} - Cr_0^2.$$

Từ (1) và (4) rút ra

$$L = \frac{A}{2}\left[\dot{\theta}^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(\beta - br_0\cos\theta)^2\right] + \frac{C}{2}r_0^2 - mg\xi\cos\theta.$$

Do vậy,

$$R = \frac{1}{2}\left\{A\left[\dot{\theta}^2 - \frac{(\beta - br_0\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right] - Cr_0^2\right\} - mg\xi\cos\theta. \tag{5}$$

Vì hàm Rauxơ không phụ thuộc rõ vào thời gian nên ta có tích phân năng lượng (suy rộng):

$$A\left[\dot{\theta}^2 + \frac{(\beta - br_0\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right] + Cr_0^2 + 2mg\xi\cos\theta = h \tag{6}$$

Chú ý đến các công thức (2), (4) và (6) ta có hệ đầy đủ các phương trình vi phân cấp một đối với các góc Ơle như sau:

$$\dot{\psi}^2 sin^2\theta + \dot{\theta}^2 = \alpha - a\cos\theta,\ \ \alpha = \frac{1}{A}(h - Cr_0^2),\ \ a = \frac{2mg\xi}{A},$$

$$\begin{aligned} &\dot{\psi} sin^2\theta = \beta - br_0\cos\theta, \\ &\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = r_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Thay trong phương trình thứ nhất của (7) giá trị $\dot{\psi}$ từ phương trình thứ hai, ta được

$$(\beta - br_0\cos\theta)^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\theta = (\alpha - a\cos\theta)\sin^2\theta.$$

Đưa vào biến mới $u = \cos\theta$ ta có

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0u)^2 = f(u),$$

$$\dot{\psi} = \frac{\beta - br_0u}{1 - u^2},$$

$$\dot{\varphi} = r_0 - u\dot{\psi} = r_0 - u\frac{\beta - br_0u}{1 - u^2}.$$

Chương V

CÁC NGUYÊN LÝ TÍCH PHÂN

Phép tính biến phân. Nguyên lý tác dụng tối thiểu Hamintơn. Từ phương trình Lagrăng đến nguyên lý Hamintơn. Các phương trình chính tắc của chuyển động. Nguyên lý tác dụng dừng Lagrăng.

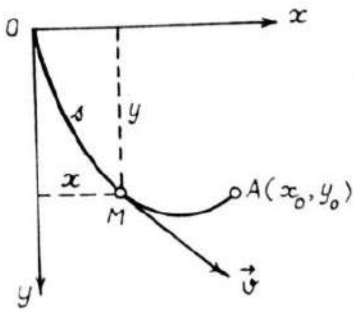
Trong các Chương II, III và IV chúng ta đã dùng các nguyên lý vi phân để lập phương trình chuyển động của các hệ cơ học, xuất phát từ các định luật Niutơn và căn cứ vào các tính chất của chuyển động **tại mỗi thời điểm**. Chương này sẽ dành cho việc trình bày các nguyên lý tích phân để lập phương trình chuyển động của các hệ cơ học, căn cứ vào các tính chất tổng thể của chuyển động trong cả một khoảng thời gian dài , chứ không phải chỉ ở một thời điểm.

Mặc dầu các nguyên lý vi phân và nguyên lý tích phân được phát biểu dưới những dạng khác nhau, song chúng liên quan mật thiết với nhau và đương nhiên cho cùng một kết quả đối với các phương trình chuyển động của cơ hệ.

Việc xét chuyển động của cơ hệ tại từng thời điểm như ở các chương trước và việc xét tính chất tổng thể của chuyển động trong khoảng thời gian dài ở chương này có sự tương tự như trong tĩnh học, khi tìm dạng cân bằng của sợi dây xích nặng, đồng chất, có hai mút được giữ cố định (đường dây xích). Ở đây có hai cách làm. Cách thứ nhất là xét một mẩu (yếu tố) của sợi dây được tách tưởng tượng ra khỏi dây và chịu tác dụng của các lực đặt lên mẩu dây đó. Từ đây sẽ lập được phương trình cân bằng của cả sợi dây. Cách thứ hai là nhìn một cách tổng thể, đòi hỏi trọng tâm của sợi dây phải ở vị trí thấp nhất.

5.1. SƠ LƯỢC VỀ PHÉP TÍNH BIẾN PHÂN

Bài toán cổ điển về thời gian ngắn nhất. Năm 1696, Iôhan Becnuli (Johan Bernoulli, 1667-1748) nhà toán học Thụy sỹ đã đặt và giải bài toán sau đây, gọi là bài toán đoản thời (brachystochrone). Một chất điểm M chuyển động dưới tác dụng của trọng lực trên đường cong trong mặt phẳng thẳng đứng, từ điểm O đến điểm A, không có vận tốc đầu, không ma sát. Trong tập hợp các đường cong nối điểm O và điểm A, hãy tìm đường mà điểm M đi từ O đến A trong thời gian T ngắn nhất.



Hình 5.1
Điểm M chuyển động trên đường cong trong mặt phẳng thẳng đứng

Gọi $\overset{\frown}{OM} = s$, ta có

$$v = \frac{ds}{dt} \to dt = \frac{ds}{v},$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2}dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Từ định lý bảo toàn cơ năng ta có $v = \sqrt{2gy}$. Do vậy

$$\int_0^T dt = T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} dx. \tag{5.1}$$

Thời gian di chuyển của điểm M từ O đến A phụ thuộc vào việc lựa chọn hàm $y(x)$. Tích phân (5.1) được gọi là **phiếm hàm**. Bài toán đặt ra được đưa về việc tìm hàm $y = y(x)$ sao cho T lấy giá trị nhỏ nhất. Như sẽ thấy dưới đây, $y(x)$ phải là đường *xycloit*.

Phiếm hàm đơn giản nhất là tích phân đường phụ thuộc vào việc ựa chọn một hàm số $y(x)$ thuộc dạng:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)]dx. \tag{5.2}$$

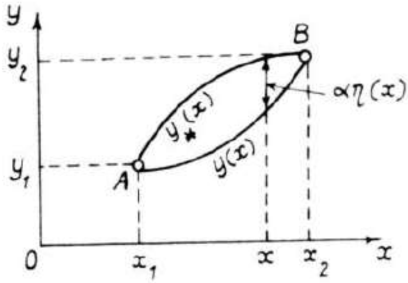
Bài toán cơ bản của phép tính biến phân là tìm hàm $y(x)$ àm cho phiếm hàm J đạt cực trị và thỏa mãn các điều kiện biên

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \tag{5.3}$$

Giả thử rằng hàm $y(x)$ là nghiệm cần tìm của bài toán biến phân. 'a sẽ tìm các điều kiện cần mà hàm đó phải thỏa mãn để phiếm àm J đạt cực trị. Muốn vậy, ta hãy lập hàm mới $y_*(x)$ gần với (x):

$$y_*(x) = y(x) + \alpha\eta(x), \tag{5.4}$$

ong đó $\eta(x)$ là hàm tùy ý thỏa mãn điều kiện biên (hình 5.2):



Hình 5.2

Đường cong $y = y(x)$ biểu diễn nghiệm cần tìm.

Đường $y^*(x)$ gần với đường $y(x)$ và có chung hai mút A, B:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \tag{5.5}$$

và α là một tham số bé. Thay (5.4) vào (5.2) ta sẽ được một hàm của α:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F[x, \overbrace{y(x) + \alpha\eta(x)}^{y_*(x)}, \overbrace{y'(x) + \alpha\eta'(x)}^{y'_*(x)}]dx. \tag{5.6}$$

Do đó, bài toán tìm cực trị của phiếm hàm (5.2) được đưa về xét cực trị của hàm một biến $J(\alpha)$. Như đã biết, muốn vậy cần phải tìm giá trị của đạo hàm $\dfrac{dJ}{d\alpha}$ tại $\alpha = 0$ và cho nó bằng không (nhớ rằng theo giả thiết thì cực trị của phiếm hàm (5.2) ứng với hàm $y(x)$,có được từ (5.4) khi $\alpha = 0$). Ta có:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_*}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'_*}\eta'(x)\right] dx. \tag{5.7}$$

Tính tích phân thứ hai ở vế phải của (5.7) theo từng phần:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'_*}\eta'(x)dx = \frac{\partial F}{\partial y'_*}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_*}\right)\eta(x)dx.$$

Do điều kiện biên (5.5) nên số hạng thứ nhất bằng không. Vậy

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_*} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_*} \right) \right] \eta(x) dx.$$

Từ đây,

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx = 0. \tag{5.8}$$

Vì $\eta(x)$ là hàm tùy ý nên đẳng thức (5.8) dẫn đến **phương trình Ơle-Lagrăng**:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{5.9}$$

Đây là phương trình vi phân thường cấp 2. Nghiệm của nó chứa hai hằng tùy ý. Những hằng này được xác định từ những điều kiện biên (5.3).

Vậy là, hàm $y(x)$ phải tìm - nghiệm của bài toán biến phân nêu ở trên - phải thỏa mãn phương trình Ơle- Lagrăng (5.9). Có thể phát biểu kết quả thu được dưới dạng khác, nếu đưa vào khái niệm về biến phân cấp 1 của phiếm hàm: δJ.

Biến phân cấp một của phiếm hàm (5.2) là đại lượng xác định bởi biểu thức:

$$\delta J = \alpha \left(\frac{dJ}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} \tag{5.10}$$

Chú ý đến (5.8) ta có thể viết

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0, \tag{5.11}$$

trong đó δy là biến phân của hàm $y(x)$, xác định bởi hệ thức:

$$\delta y = \alpha\eta(x) = y_*(x) - y(x). \tag{5.12}$$

Đẳng thức (5.11) chứng tỏ rằng hàm $y(x)$- nghiệm của bài toán biến phân - triệt tiêu biến phân cấp một của phiếm hàm δJ. Điều khẳng định này kéo theo đòi hỏi (5.9).

Ta hãy xét **một số qui tắc tính biến phân**. Trước hết, nhận xét rằng biến phân của một hàm bất kỳ $y(x)$ cũng kéo theo biến phân đạo hàm $y'(x)$ của nó. Ta có

$$\delta y' = y'_*(x) - y'(x) = [y(x) + \alpha\eta(x)]' - y'(x) = \alpha\eta'(x). \quad (5.13)$$

Mặt khác, đạo hàm đẳng thức (5.12) theo x ta có

$$\frac{d}{dx}(\delta y) = \frac{d}{dx}[y_*(x) - y(x)] = \frac{d}{dx}[\alpha\eta(x)] = \alpha\eta'(x). \quad (5.14)$$

So sánh (5.13) và (5.14) ta kết luận

$$\frac{d}{dx}(\delta y) = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad (5.15)$$

nghĩa là **các phép tính đạo hàm và biến phân là giao hoán nhau**.

Ta sẽ chứng minh rằng, các phép tính tích phân và biến phân cũng giao hoán được. Thực vậy, trong (5.7) cho $\alpha = 0$ và sau đó nhân hai vế của đẳng thức nhận được với α và chú ý đến định nghĩa (5.12), (5.13) sẽ được:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx = \int_{x_1}^{x_2}\delta F dx,$$

hoặc

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2}\delta F dx. \quad (5.16)$$

Không có gì khó khăn, ta có thể mở rộng bài toán cơ bản của phép tính biến phân cho trường hợp phiếm hàm phụ thuộc vào n

hàm độc lập $y_i(x)$ và các đạo hàm $y_i'(x)$ của chúng:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)]dx. \tag{5.17}$$

Cũng như trong trường hợp đơn giản nhất (5.2), bài toán được đưa về tìm cực trị của hàm $J(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, trong đó α_i là những tham số bé được đưa vào trong biến phân của các hàm $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ với các điểm biên giữ cố định, nghĩa là

$$y_{1i}(x) = y_i(x) + \alpha_i\eta_i(x), \quad \delta y_i = \alpha_i\eta_i(x), \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{5.18}$$

trong đó $\eta_i(x)$ là những hàm tùy ý triệt tiêu tại các điểm $x = x_1$ và $x = x_2$. Ta có thể biểu diễn biến phân của hàm (5.17) dưới dạng:

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha_i = o} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i'\right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\right] \delta y_i dx.$$

Vì $y_i(x)$ là các hàm độc lập, nên các biến phân δy_i của chúng cũng là độc lập. Do đó, đẳng thức $\delta J = 0$ kéo theo các hệ số của δy_i cũng phải bằng không. Vậy là, các hàm $y_i(x)$ làm cực trị phiếm hàm (5.17)phải thỏa mãn **hệ phương trình Ơle - Lagrăng**:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{5.19}$$

Nhận xét rằng nếu ta thay thế một cách hình thức các biến trong (5.19):

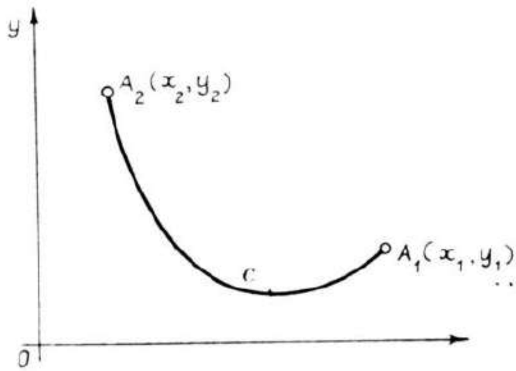
$x \to t, \quad y_i(x) \to q_i(t), \quad y_i'(x) \to \dot{q}_i(t)$ và $F \to L,$

thì các phương trình (5.19) sẽ trùng hoàn toàn với các phương trình Lagrăng (3.23) trước đây cho các cơ hệ chịu tác dụng của các lực thế. Điều đó chứng tỏ rằng các phương trình Lagrăng là những phương trình Ơle đối với một bài toán biến phân nào đó của cơ học mà ta sẽ khảo sát trong phần dưới.

Ví dụ 5.1. Dạng cân bằng của dây xích nặng, đồng chất được cột chặt ở hai đầu.

Coi dây xích như một hệ chất điểm nằm trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy. Trọng tâm C của dây xích được tính theo công thức:

$$y_c = \frac{\int\limits_{A_1A_2} y ds}{\int\limits_{A_1A_2} ds}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$



Hình 5.3

Dạng cân bằng của một dây xích nặng

Vì chiều dài $l = \int\limits_{A_1A_2} ds$ của dây xích là không đổi nên ta có:

$$\delta \int\limits_{A_1A_2} y ds = \delta \int\limits_{y_1}^{y_2} y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = 0.$$

o với (5.2) thì $F = y\sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$ và phương trình (5.9) có dạng:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

đây $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\quad \dfrac{\partial F}{\partial x'} = y\dfrac{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}}$.

Ta có phương trình:

$$\frac{d}{dy}\left\{ y\frac{\dfrac{dx}{dy}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}} \right\} = 0.$$

ừ đây tìm được:

$$y\frac{\dfrac{dx}{dy}}{\sqrt{1 + (\dfrac{dx}{dy})^2}} = c_0 \quad \text{và} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{c_0}{\sqrt{y^2 - c_0^2}},$$

ong đó c_0 là một hằng số. Tích phân đẳng thức cuối cùng ta được ương trình của đường dây xích:

$$y = \frac{c}{2}[e^{\frac{(x-\alpha)}{c}} + e^{\frac{-(x-\alpha)}{c}}] = c.ch\frac{x-\alpha}{c},$$

đây các hằng c và α được xác định từ các điều kiện biên ở hai u dây.

ững trường hợp riêng của phương trình Ơle- Lagrăng (5.9)

Trở lại phương trình (5.9):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad F = F(x, y, y'). \tag{5.20}$$

Ta có:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'', \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx}. \tag{5.21}$$

Theo (5.20), thay $\frac{\partial F}{\partial y}$ trong (5.21) bởi $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ ta được:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + y''\frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Sắp xếp lại các số hạng của biểu thức này ta có:

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}. \tag{5.22}$$

Bây giờ (5.20) và (5.22) là những phương trình vi phân cho ta hàm $y(x)$ cần tìm. Ta chú ý đến hai trường hợp riêng:

1. Nếu F không chứa y thì theo (5.20)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

hoặc

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = const. \tag{5.23}$$

2. Nếu F không chứa x tường minh thì phương trình (5.22) cho ta:

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

hoặc

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = const. \tag{5.24}$$

Ví dụ 5.2. Cho hai điểm $A(x_0, y_0)$ và $B(x_1, y_1)$ với $x_0 < x_1$. Câu hỏi được đặt ra là trong số các đường đi qua hai điểm A và B, có tồn tại hay không một đường mà độ dài của nó giữa A và B là ngắn nhất?. Nói cách khác là biến phân của tích phân biểu diễn độ dài đó bằng không:

$$\delta \int_{(A)}^{(B)} ds = \delta \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Ở đây ta có:

$$F = \sqrt{1+y'^2}.$$

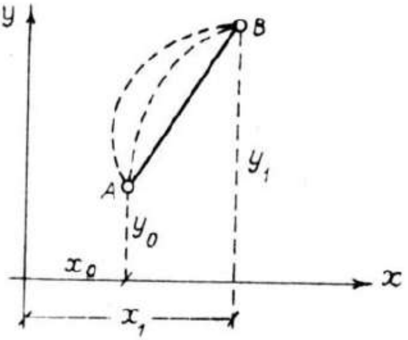
Vì hàm F không chứa y tường minh nên theo công thức (5.24) ta có tích phân đầu:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = const$$

hoặc

$$y' = a = const, \qquad y = ax + b.$$

Dễ dàng biểu diễn a, b qua các tọa độ của các điểm A và B. Ta có kết luận: đường ngắn nhất đi qua hai điểm trong mặt phẳng là đường thẳng.



Hình 5.4

Đường ngắn nhất đi qua hai điểm trong mặt phẳng x, y

Ví dụ 5.3. Đường ngắn nhất đi qua hai điểm A và B trong không gian: $A(x_0, y_0, z_0), B(x_1, y_1, z_1)$. Ta phải giải bài toán biến phân với hai hàm chưa biết của x là $y(x)$ và $z(x)$:

$$\delta \int\limits_{AB} ds = \delta \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}dx = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad z' = \frac{dz}{dx}.$$

Ở đây

$$F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

Cũng tương tự như trong ví dụ trước, ta có các tích phân đầu:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = const,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = const.$$

Hai phương trình này là độc lập với nhau và chỉ chứa các đạo hàm của y' và z', do vậy y' và z' là những hằng số:

$$y' = a_1 = const, \quad z' = a_2 = const,$$

$$y = a_1 x + b_1, \quad z = a_2 x + b_2.$$

Vậy, đường ngắn nhất qua hai điểm A và B trong không gian Ơclit là đường thẳng.

Ví dụ 5.4. Đường ngắn nhất đi qua hai điểm A và B trên mặt cầu bán kính r.

Tọa độ cầu của điểm M nằm trên mặt cầu là r, φ, θ với $r = const$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Ta có:

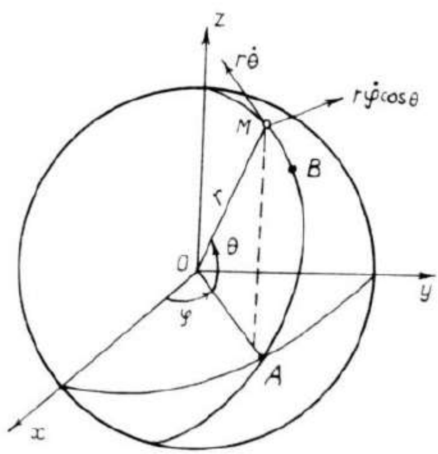
$$v^2 = r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \cos^2\theta,$$
$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \cos^2\theta d\varphi^2.$$

ấy θ làm biến độc lập, ở đây ta có bài toán biến phân:

$$\delta \int ds = \delta \int r\sqrt{1+\cos^2\theta\varphi'^2}d\theta, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\theta}.$$

ì hàm $F = r\sqrt{1+\cos^2\theta\varphi'^2}$ không chứa biến φ nên φ là toạ độ yclic và ta có tích phân đầu (5.23):

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi'} = \frac{\cos^2\theta\varphi'}{\sqrt{1+\cos^2\theta\varphi'^2}} = const = c. \tag{1}$$



Hình 5.5
Đường ngắn nhất qua hai điểm trên mặt cầu

Ta có thể chọn mặt phẳng tọa độ $0xy$ sao cho tại điểm (r, θ_0, φ_0) giá trị của đạo hàm φ_0' bằng không. Muốn vậy, ta o đường cần tìm tiếp tuyến với đường của các cực tại điểm M_0 Khi đó, hằng tích phân (c) sẽ bằng không. Tử số của biểu thức đồng nhất không. Vì $\cos\theta$ chỉ bằng không tại hai cực trên mặt ($\theta = \pm\frac{\pi}{2}$), nên đạo hàm φ' phải đồng nhất bằng không và φ là t hằng số. Như vậy đường phải tìm sẽ là giao của mặt cầu với t phẳng kinh tuyến $\varphi = const$. Đó chính là một vòng tròn lớn.

Ví dụ 5.5. Giải tiếp bài toán đoản thời (brachystochrone). Quay trở lại phương trình (5.1). Bài toán đưa về tìm cực trị của phiếm hàm $T(5.1)$ với hàm $F = \sqrt{1+y'^2}\Big/\sqrt{2gy}$. Phương trình của đường cong $y = y(x)$ được xác định từ (5.9):

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\right) = 0.$$

Thực hiện các phép tính và biến đổi ta sẽ có:

$$2yy'' + 1 + y'^2 = 0.$$

Đặt $y' = u$ ta được:

$$\frac{2udu}{1+u^2} = -\frac{dy}{y}.$$

Từ đây

$$\ln(1+u^2) = \ln 2R - \ln y$$

và

$$y = \frac{2R}{1+y'^2}, \tag{1}$$

trong đó $2R$ là hằng tích phân. Đưa vào tham số θ

$$\frac{dy}{dx} = y' = \text{tg}\theta, \tag{2}$$

từ (1) ta có:

$$y = \frac{2R}{1+tg^2\theta} = 2R\cos^2\theta = R(1+\cos 2\theta). \tag{3}$$

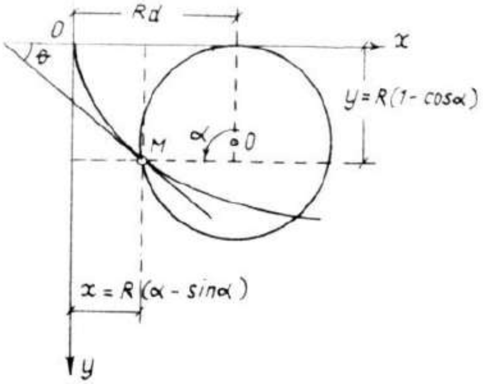
Các hệ thức (2), (3) cho ta:

$$dx = ctg\theta dy = -2R(1+\cos 2\theta)d\theta.$$

Tích phân lên ta được:

$$x = -R(2\theta + \sin 2\theta) + C_2, \tag{4}$$

trong đó C_2 là hằng tích phân. Đường cong xác định bởi các phương trình thông số (3) và (4) chính là một cung của đường xyclôit, tạo nên bởi điểm M trên vòng tròn bán kính R khi vòng này lăn không trượt trên trục Ox (Hình 5.6) trong mặt phẳng thẳng đứng xOy.



Hình 5.6
Đường xyclôit

Vì biểu thức F không chứa x nên có thể giải bài toán trên đây ằng cách khác, dựa vào phương trình (5.24). Ta có:

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} - y'\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = const = 2R. \tag{5}$$

ấy đạo hàm và giản ước các số hạng ta có:

$$y(1+y'^2) = 2R. \tag{6}$$

ể tích phân phương trình này, ta đưa vào thông số α, đặt

$$y' = \text{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

hay y' vào (5) sẽ được:

$$\begin{aligned} y &= 2R\sin^2\frac{\alpha}{2} = R(1-\cos\alpha).\\ dy &= R\sin\alpha d\alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

và do đó

$$dx = \text{tg}\frac{\alpha}{2}dy = R\sin\alpha tg\frac{\alpha}{2}d\alpha = R(1 - \cos\alpha)d\alpha.$$

Tích phân sẽ được

$$x = R(\alpha - \sin\alpha) + C, \tag{8}$$

trong đó C là hằng tích phân. Các phương trình (7), (8) là những phương trình thông số của đường Cyclôit. Để xác định hằng tích phân ta lấy vị trí đầu của điểm M làm gốc tọa độ: $x = y = \alpha = 0$. Từ đây tìm được $C = 0$.

5.2. NGUYÊN LÝ TÁC DỤNG TỐI THIỂU HAMINTƠN

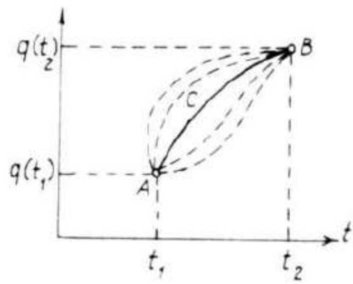
Xét cơ hệ bảo toàn chịu các liên kết hôlônôm lý tưởng. Giả thu chuyển động thực của cơ hệ được mô tả bởi các tọa độ suy rộng

$$q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t). \tag{5.25}$$

Ta đưa vào đây một khái niệm mới là **không gian trạng thái củ** cơ hệ - không gian $n+1$ thứ nguyên của các tọa độ suy rộng v thời gian t. Biểu diễn không gian này trên một mặt phẳng mà trụ hoành là thời gian t, còn trục tung là tập hợp các giá trị cuả tất c các tọa độ suy rộng $q = q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Khi đó, mỗi điểm trê mặt phẳng (t, q) sẽ biểu diễn một trạng thái xác định của cơ hệ t thời điểm t đã cho (Hình 5.7).

Giả thử rằng trong khoảng thời gian $t_2 - t_1$ cơ hệ chuyển t trạng thái A sang trạng thái B. Có vô số con đường chuyển h từ A sang B phù hợp với liên kết đặt lên cơ hệ, trong đó có m con đường được gọi là **con đường thực hoặc con đường thẳn** tương ứng với **chuyển động thực** của cơ hệ (chẳng hạn ACB

Các con đường còn lại được gọi là những **đường vòng**. Vấn đề được đặt ra là đưa ra một tiêu chuẩn để nhận biết con đường thực ấy. Nguyên lí Hamintơn dưới đây sẽ cho câu trả lời:



Hình 5.7
Những con đường dẫn cơ hệ từ A đến B

Nguyên lý Hamintơn. Đối với cơ hệ hôlônôm chịu liên kết lí tưởng và dưới tác dụng của các lực thế, con đường thực đưa cơ hệ từ trạng thái A sang trạng thái B là con đường tương ứng với giá trị cực trị của hàm tác dụng S:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt, \tag{5.26}$$

trong đó $L = T - \Pi$ là hàm Lagrăng. S **được gọi là tác dụng theo Hamintơn**.

Nói cách khác, với chuyển động thực của cơ hệ, biến phân cấp một của phiếm hàm (5.26) triệt tiêu:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = 0. \tag{5.27}$$

Điều này có nghĩa là tác dụng S lấy giá trị dừng trong chuyển động thực. Nguyên lý Hamintơn còn được gọi là **nguyên lý tác dụng**

cực trị hoặc **nguyên lý tác dụng tối thiểu** hoặc **nguyên lý tác dụng dừng**.

Ví dụ 5.6. Lập các phương trình Haminton từ nguyên lý tác dụng tối thiểu.

Sử dụng định nghĩa hàm Haminton $H = H(q_i, p_i)$, $H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$ ta có thể viết nguyên lý tác dụng tối thiểu dưới dạng:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt \right) = 0.$$

Thay đổi thứ tự phép tính tích phân và phép tính biến phân ở vế trái của biểu thức này ta được:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right] dt + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} p_i d(\delta q_i).$$

Thành phần cuối cùng ở vế phải được chuyển thành:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} p_i d(\delta q_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt.$$

Chú ý đến điều kiện biên: $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} p_i d(\delta q_i) = - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt.$$

Vậy,

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt.$$

Vì các biến phân của tọa độ δq_i và xung suy rộng δp_i là độc lập nên đẳng thức $\delta S = 0$ chỉ có thể xảy ra khi những hệ số của δq_i và δp_i bằng không, nghĩa là nếu p_i, q_i thỏa mãn các phương trình Hamintơn (4.7):

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

5.3. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CƠ HỆ

Từ nguyên lý Hamintơn ta hãy rút ra các phương trình chuyển động của cơ hệ. Cùng với chuyển động thực và con đường thẳng của cơ hệ cho bởi các tọa độ suy rộng (5.25), ta biểu diễn các con đường vòng bằng những phương trình thông số:

$$q_{*i}(t) = q_i(t) + \delta q_i, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{5.28}$$

trong đó các biến phân δq_i của các tọa độ suy rộng là các hàm khả vi vô cùng bé bất kỳ (do tính độc lập của các tọa độ suy rộng q_i), thỏa mãn các điều kiện ở hai mút của các con đường vòng (hình 5.7):

$$(\delta q_i)_{t=t_1} = 0, \quad (\delta q_i)_{t=t_2} = 0. \tag{5.29}$$

Từ (5.28) ta có:

$$\delta q_i = q_{*i}(t) - q_i(t), \quad (i = 1, \ldots, n),$$

và biến phân của các tọa độ suy rộng là sự biến đổi của các tọa độ này khi thời gian cố định. Những biến phân như vậy được gọi là những biến phân đẳng thời.

Với độ chính xác đến các số hạng bé bậc nhất đối với δq_i và $\delta \dot{q}_i$ ta có:

$$\delta L = L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i. \tag{5.30}$$

Từ (5.26) ta tính biểu thức δS:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt.$$

Chú ý đến biểu thức δL (5.30) ta có:

$$\begin{aligned}\delta S &= \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt\\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt.\end{aligned}$$

Song, vì $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ (5.29) nên:

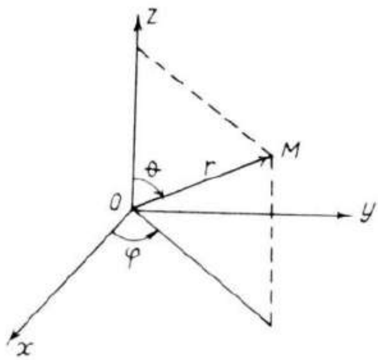
$$\delta S = \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right]dt. \tag{5.31}$$

Theo nguyên lý Hamintơn thì $\delta S = 0$ trong chuyển động thực của cơ hệ. Do sự tùy ý của khoảng tích phân, điều này chỉ có thể xảy ra khi tất cả các hệ số của những biến phân độc lập δq_i trong biểu thức (5.31) bằng không, nghĩa là nếu các tọa độ suy rộng q_i thỏa mãn các phương trình Lagrăng

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.32}$$

Nhận xét rằng các phương trình này có thể nhận được **dễ dàng** từ hệ phương trình Ơle - Lagrăng (5.19).

Ví dụ 5.7. Viết các phương trình vi phân của chuyển động của chất điểm trong trường trọng lực, dùng tọa độ cầu r, θ, φ. Ở đây θ được tính từ trục thẳng đứng.



Hình 5.8
Toạ độ cầu của điểm M

Bài giải. Ta có các biểu thức động năng T và thế năng Π như sau:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2),$$
$$\Pi = mgr\cos\theta,$$

và hàm Lagrăng có dạng:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - mgr\cos\theta.$$

Từ đây tìm được:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r},$$
$$\frac{\partial L}{\partial r} = m(r\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - mg\cos\theta.$$

Do vậy phương trình chuyển động gắn với tọa độ r là:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + mg\cos\theta = 0. \tag{1}$$

Tương tự như vậy, ta có:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta},$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + mgr\sin\theta,$$

và phương trình đối với tọa độ θ có dạng:

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mr^2\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta - mgr\sin\theta = 0. \qquad (2)$$

Phương trình đối với φ sẽ là:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = mr^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + 2mr\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta + 2mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta.$$

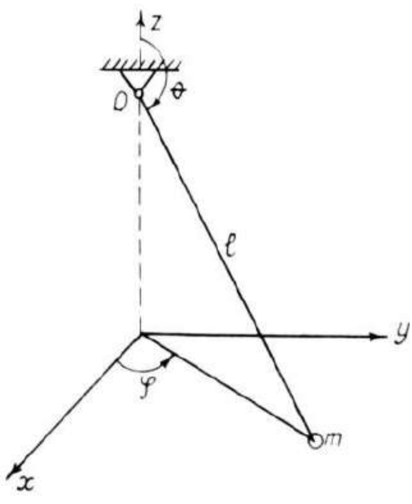
Do vậy,

$$mr^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + 2mr\dot{r}\dot{\varphi}\sin^2\theta + 2mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta = 0. \qquad (3)$$

Nếu $r \neq 0$, $\theta \neq 0$, ta có thể viết các phương trình (1), (2) và (3) dưới dạng:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta &= -g\cos\theta, \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta &= g\sin\theta, \qquad (4) \\ r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta &= 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 5.8. Tìm các phương trình vi phân của chuyển động cho con lắc cầu chiều dài l



Hình 5.9

Con lắc cầu quay quanh điểm O

Bài giải. Dùng tọa độ cầu (l, θ, φ)với gốc O là điểm treo con lắc ta có kết quả tương tự như bài trước. Ở đây $r = l = const$. Do vậy:

$$L = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - mgl\cos\theta,$$

và các phương trình chuyển động bây giờ có dạng:

$$ml^2\ddot{\theta} - ml^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta = 0,$$

$$ml^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta + 2ml^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta = 0.$$

Phương trình cuối cùng có thể viết dưới dạng:

$$\frac{d}{dt}(ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi}) = 0 \quad \text{hoặc} \quad ml^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = const.$$

Đây chính là quy luật bảo toàn mômen động của chất điểm m đối với trục thẳng đứng $0z$ đi qua điểm treo con lắc.

Ví dụ 5.9. Một viên bi M khối lượng m có thể trượt không ma sát trong một ống hình tròn, bán kính r. Ống quay quanh đường kính thẳng đứng với vận tốc góc ω không đổi: $\omega\, rad/sec$. Hãy viết phương trình vi phân của chuyển động. Nếu viên bi bị hất nhẹ khỏi vị trí cân bằng không ổn định $\theta = 0$ thì hãy tìm vị trí ứng với động năng cực đại và vị trí ứng với $\dot{\theta}$ cực đại, biết rằng $\dot{\theta}$ dương ở vị trí ban đầu.

Bài giải. Ta sẽ dùng các tọa độ cầu r, θ, φ để mô tả vị trí của điểm M. Trong trường hợp này hệ có hai liên kết hôlônôm. Cụ thể là liên kết sclêrônôm $r = const$ và liên kết rêônôm $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Ở đây ω và φ_0 là những hằng. Do vậy, hệ sẽ chỉ còn một bậc tự do với θ là tọa độ suy rộng tương ứng.

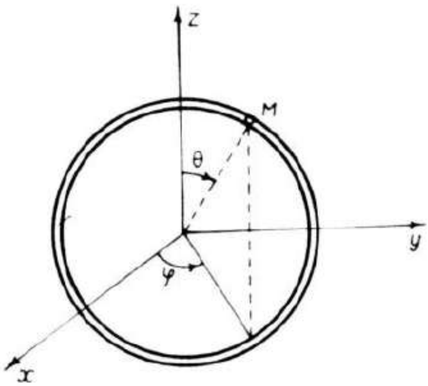
Sau nữa, ta có các biểu thức động năng T và thế năng Π:

$$T = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\omega^2\sin^2\theta), \tag{1}$$

$$\Pi = mgr\cos\theta, \tag{2}$$

và do đó

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2\sin^2\theta - mgr\cos\theta.$$



Hình 5.10

Viên bi trượt trong ống tròn quay quanh đường kính thẳng đứng

Dùng phương trình Lagrăng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q^*,$$

trong đó Q^* là lực suy rộng ứng với các lực không thế. Trong trường hợp khảo sát ở đây $Q^* = 0$. Ta có:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mgr\sin\theta = 0. \tag{3'}$$

và do vậy phương trình chuyển động có dạng

$$mr^2\ddot{\theta} - mr^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mgr\sin\theta = 0. \tag{3}$$

Để tìm θ ứng với giá trị cực đại của động năng, ta cần biểu diễn T như hàm chỉ của θ, thay cho hàm của hai biến θ và $\dot{\theta}$. Từ phương trình (3) ta tìm được biểu thức của $\dot{\theta}^2$ theo θ. Thực vậy, vì:

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta},$$

nên phương trình (3) có thể viết dưới dạng

$$\frac{1}{2}d\dot{\theta}^2 = (\omega^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{g}{r}\sin\theta)d\theta.$$

Tích phân lên ta được (khi $\theta = 0$ thì $\dot{\theta} = 0$)

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 \sin^2\theta + \frac{2g}{r}(1 - \cos\theta). \tag{4}$$

Thay giá trị này của $\dot{\theta}^2$ vào (1) sẽ có:

$$T = mr^2\omega^2\sin^2\theta + mgr(1 - \cos\theta). \tag{5}$$

Để tìm giá trị cực đại của T ta đặt $\frac{dT}{d\theta} = 0$:

$$\frac{dT}{d\theta} = 2mr^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mgr\sin\theta = 0.$$

Từ đây rút ra:

1) $\theta = 0, \quad \pi$

2) $\theta = \text{arccos}\left(-\frac{g}{2r\omega^2}\right).$

Giá trị $\theta = 0$ tương ứng giá trị cực tiểu của T vì $T = 0$ tại vị trí này. Giá trị T_{max} ứng với $\theta = \pi$ hoặc $\theta = \text{arccos}\left(-\frac{g}{2r\omega^2}\right)$, tùy thuộc ω^2 nhỏ thua hay lớn hơn $\frac{g}{2r}$. Thay thế vào (5) ta sẽ thấy:

$$T_{max} = 2mgr \quad (\omega^2 \leq \frac{g}{2r}), \quad \theta = \pi.$$

$$T_{max} = m(r^2\omega^2 + gr + \frac{g^2}{4\omega^2}), \quad \omega^2 \geq \frac{g}{2r}.$$

Vị trí ứng với $\dot{\theta}$ cực đại có thể tìm được bằng cách lấy đạo hàm của biểu thức (4) theo θ và cho kết quả bằng không. Ta viết:

$$\frac{d}{d\theta}(\dot{\theta}^2) = 2\omega^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{2g}{r}\sin\theta = 0.$$

Vì $\dot{\theta}$ và $\dot{\theta}^2$ cùng đạt giá trị cực đại ở vị trí như nhau, do vậy vị trí ứng với $\dot{\theta}$ cực đại được rút ra từ phương trình cuối cùng:

$$\theta = \pi \quad \text{và } \theta = \arccos\left(-\frac{g}{r\omega^2}\right).$$

(theo (4) thì giá trị $\theta = 0$ ứng với $\dot{\theta} = 0$). Thay thế các giá trị này vào (4) ta được:

$$\dot{\theta}_{max} = 2\sqrt{\frac{g}{r}} \quad (\omega^2 \leq \frac{g}{r}), \quad \theta = \pi,$$

$$\dot{\theta}_{max} = \sqrt{\omega^2 + \frac{2g}{r} + \frac{g^2}{r^2\omega^2}} \quad (\omega^2 \geq \frac{g}{r}).$$

5.4. TỪ PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG ĐẾN NGUYÊN LÝ HAMINTƠN

Trong mục trước, từ nguyên lý Hamintơn ta đã tìm được phương trình chuyển động dưới dạng Lagrăng. Bây giờ, coi rằng các tọa độ suy rộng q_i thỏa mãn các phương trình Lagrăng (5.32) ta sẽ đi đến nguyên lý Hamintơn (5.27).

Thực vậy, nhân mỗi phương trình (5.32) với biến phân tương ứng và cộng các biểu thức thu được với nhau ta sẽ được:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right]\delta q_i = 0. \tag{5.33}$$

Vì

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i,$$

nên có thể viết biểu thức (5.33) dưới dạng:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) = 0$$

hoặc theo (5.30)

$$\delta L - \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = 0. \qquad (5.34)$$

Nhân hai vế của biểu thức này cho dt và tích phân trong các giới hạn từ t_1 đến t_2 với t_1, t_2 là những thời điểm tùy ý ta có:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L dt - \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = \delta\int_{t_1}^{t_2} L dt - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}$$
$$= \delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

i có điều kiện đầu (5.29), còn thời gian không biến đổi. Vậy là ta ó biểu thức (5.27) của nguyên lý Hamintơn:

$$\delta S = 0.$$

Ghi chú

1. Như đã thấy, từ các phương trình Lagrăng ta đã suy ra nguyên Hamintơn và ngược lại. Vì vậy **ta có thể dùng nguyên lý Hamtơn để làm cơ sở cho động lực học các hệ hôlônôm.**

2. Ta hãy so sánh các phương trình vi phân của chuyển động của hệ (5.32) với nguyên lý biến phân (5.27) $\delta S = 0$. Các phương

trình (5.32) cho quan hệ giữa vị trí, vận tốc, gia tốc của các điểm của cơ hệ **tại mỗi thời điểm** t. Trái lại, nguyên lý biến phân (5.27) cho ta đặc trưng tổng thể của con đường thật, đó là tính dừng của một phiếm hàm S. Nhờ đặc trưng này mà ta có thể phân biệt con đường thật (thẳng) với các con đường khác (đường vòng).

3. **Với cơ hệ hôlônôm không bảo toàn** nguyên lý Hamintơn có dạng:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i) dt = 0, \tag{5.35}$$

trong đó T là động năng của hệ, Q_i là các lực không bảo toàn suy rộng. Trong (5.35), biến đổi tích phân $\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt$ như đã làm ở trên với tích phân $\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt$ (5.27) ta sẽ được các phương trình Lagrăng dạng (3.20):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.36}$$

Vậy là từ nguyên lý Hamintơn (5.35) ta tìm được các phương trình vi phân của chuyển động dưới dạng Lagrăng (5.36).

Ngược lại, ta sẽ chứng minh rằng từ các phương trình Lagrăng (5.36) ta sẽ tìm lại được nguyên lý Hamintơn (5.35). Thực vậy, nhân mỗi phương trình của hệ (5.36) với các biến phân tương ứng của tọa độ suy rộng δq_i rồi cộng các biểu thức thu được lại với nhau ta sẽ có:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i - Q_i \delta q_i \right] = 0. \tag{5.37}$$

Dễ thấy rằng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

và chú ý rằng

$$\delta T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i,$$

a có thể viết (5.37) dưới dạng:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \delta T - \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0.$$

Nhân biểu thức này với dt và tích phân từ t_1 đến t_2 ta được nguyên ý Hamintơn:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i) dt = 0, \tag{5.38}$$

i các đầu đường được giữ cố định $\delta q_i(t)|_{t=t_1} = \delta q_i(t)|_{t=t_2} = 0$ nên

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = 0.$$

Cần lưu ý rằng nguyên lý Hamintơn dưới dạng (5.38) không còn nguyên lý biến phân nữa. Nó chỉ khẳng định rằng trong chuyển ộng của cơ hệ từ trạng thái ứng với t_1 sang trạng thái ứng với dọc theo con đường thực (thẳng) thì tích phân (5.38) sẽ bằng hông. Thực vậy, trong các lực suy rộng ta tách những lực bảo toàn không bảo toàn:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^*, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ong đó Π là thế năng còn Q_i^* là lực suy rộng sinh ra do các lực ông bảo toàn. Chú ý rằng $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0$, ta có thể viết (5.38) dưới ng:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi + \sum_{i=1}^{n} Q_i^* \delta q_i) dt = 0, \tag{5.39}$$

trong đó

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Nhưng vì $L = T - \Pi$ và thời gian coi như cố định nên biểu thức (5.39) cho ta:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} Q_i^* \delta q_i dt = 0.$$

Đưa vào đại lượng δS^* ta có thể viết phương trình này dưới dạng:

$$\delta S^* = \delta S + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} Q_i^* \delta q_i dt = 0.$$

Phương trình (5.39) chỉ khẳng định rằng đại lượng δS^* bằng không trên con đường thực; còn bản thân phiếm hàm S^* lại không tồn tại

5.5. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA CHUYỂN ĐỘNG

Ta sẽ chứng minh rằng, từ nguyên lý Hamintơn có thể tìm được các phương trình chính tắc của chuyển động của cơ hệ. Thực vậy xét hàm Hamintơn $H(q_i, p_i)$ (4.4):

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i).$$

Từ điều kiện (5.27) (nguyên lý Hamintơn) suy ra:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) = 0. \quad (5.40)$$

Vì

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i,$$

và ngoài ra

$$\delta \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\delta p_i + \sum_{i=1}^{n} p_i\delta\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\delta p_i + \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{d}{dt}\delta q_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\delta p_i + \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i\delta q_i,$$

nên hệ thức (5.40) có dạng:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i\right] = 0, \qquad (5.41)$$

bởi vì

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Mặc dầu q_i và p_i có mặt trong hàm H như là những biến độc lập, khi tính tích phân (5.41) không thể coi δq_i và δp_i là độc lập với nhau, vì rằng chúng phụ thuộc nhau qua các hệ thức:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

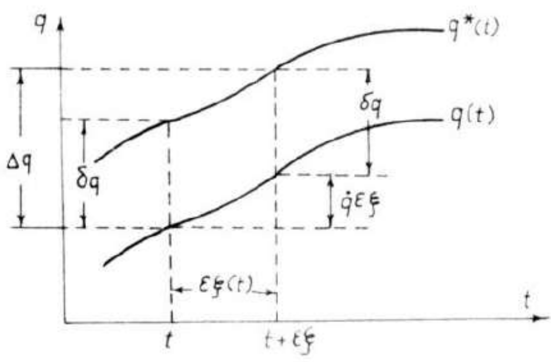
Nhưng các đẳng thức $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ được suy ra từ định nghĩa của hàm Hamintơn (4.4); vì vậy do tính độc lập của các biến phân δq_i tất cả các thừa số của δq_i sẽ triệt tiêu. Vậy là ta có các phương trình chính tắc Hamintơn:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (5.42)$$

5.6. NGUYÊN LÝ TÁC DỤNG DỪNG LAGRĂNG

1. Biến phân không đẳng thời

Trong nguyên lý Hamintơn trình bày trước đây, khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 được chọn tùy ý, song t_1 và t_2 là những thời điểm cố định và thời điểm t được giữ cố định khi lấy biến phân δq_i của tọa độ suy rộng q_i (biến phân đẳng thời). Nói cách khác, khi so sánh trạng thái của hệ trên con đường thực (đường thẳng) với trạng thái của hệ trên con đường vòng nào đó ta đã giả thiết rằng các trạng thái đó ứng với cùng một thời điểm. Dưới đây ta sẽ làm theo cách khác, khảo sát các chuyển động với các mút thời gian t_1 và t_2 không cố định và sẽ thực hiện các biến phân không đẳng thời!



Hình 5.11

Các quĩ đạo của chuyển động thẳng q_s và chuyển động vòng q_s^*

Cho vị trí của hệ trong chuyển động thực (chuyển động thẳng) bởi các tọa độ suy rộng $q_s(t)$, ta có thể xác định vị trí của hệ trong chuyển động vòng vô cùng gần với chuyển động thực và **tuân thủ liên kết** bằng các hàm $q_s^*(t + \varepsilon\xi(t)$ mà các hiệu

$$q_s^*(t) - q_s(t) = \delta q_s.$$

là những biến phân đẳng thời của các tọa độ suy rộng vừa được đưa vào trên đây. Đại lượng $\xi(t)$ **là hàm khả vi tuỳ ý** của thời gian, còn ε là đại lượng vô cùng bé. Chỉ kể đến các đại lượng vô cùng bé bậc nhất, ta có:

$$q_s^*[t+\varepsilon\xi(t)] = q_s^*(t) + \varepsilon\dot{q}_s^*(t)\xi(t) = q_s(t) + \delta q_s + \varepsilon\dot{q}_s(t)\xi(t),$$

ở đây đã bỏ qua vô cùng bé bậc cao hơn một trong biểu thức $\varepsilon\dot{q}_s^*\xi(t)$ vì $q_s(t)$ và $q_s^*(t)$ rất gần nhau và nếu đặt $q_s^*(t) = q_s(t) + \alpha\eta_s(t)$ với α vô cùng bé thì $\dot{q}_s^*(t) \simeq \dot{q}_s(t)$. Do vậy,

$$q_s^*[t+\varepsilon\xi(t)] - q_s(t) = \Delta q_s(t) = \delta q_s + \varepsilon\dot{q}_s(t)\xi(t), \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{5.43}$$

Các đẳng thức này xác định các biến phân không đẳng thời, ký hiệu bằng Δq_s. Với một hàm f bất kỳ của thời gian ta cũng có:

$$\Delta f = \delta f + \varepsilon\dot{f}\xi(t). \tag{5.44}$$

Nói riêng,

$$\Delta\dot{q}_s = \delta\dot{q}_s + \varepsilon\ddot{q}_s\xi(t). \tag{5.45}$$

Vì vậy,

$$(\Delta f)^{\cdot} = (\delta f)^{\cdot} + \varepsilon\ddot{f}\xi(t) + \dot{f}[\varepsilon\xi(t)]^{\cdot} \tag{5.46}$$

và

$$(\Delta q_s)^{\cdot} = (\delta q_s)^{\cdot} + \varepsilon\ddot{q}_s\xi(t) + \dot{q}_s\varepsilon\xi(t)^{\cdot} = \Delta\dot{q}_s + \dot{q}_s\varepsilon\xi(t). \tag{5.47}$$

Do đó các toán tử Δ và d là không giao hoán (khác với δ và d).

Áp dụng công thức (5.44) cho tích phân:

$$\int_0^t F dt$$

ta có

$$\Delta \int_0^t F dt = \delta \int_0^t F dt + \varepsilon F \xi(t). \qquad (*)$$

Mặt khác

$$\int_0^t \Delta F dt = \int_0^t [\delta F + \varepsilon \dot{F} \xi(t)] dt = \int_0^t [\delta F - F \varepsilon \xi(t)^{\cdot}] dt + \varepsilon F \xi(t) \Big|_0^t.$$

Từ đây ta có

$$\delta \int_0^t F dt = \int_0^t \delta F dt =$$
$$= \int_0^t \Delta F dt + \int_0^t F \varepsilon \xi(t)^{\cdot} dt - \varepsilon F \xi(t) \Big|_0^t$$

Thay $\delta \int_0^t F dt$ vào (*), ta được

$$\Delta \int_0^t F dt = \int_0^t [\Delta F + F \varepsilon \xi(t)^{\cdot}] dt + [F \varepsilon \xi(t)]_{t=0}.$$

Nhận xét rằng

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_0^{t_2} F dt - \int_0^{t_1} F dt,$$

ta có

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{t_1}^{t_2} [\Delta F + F \varepsilon \xi(t)^{\cdot}] dt. \qquad (5.48)$$

2. Nguyên lý tác dụng dừng Lagrăng

Xét cơ hệ với các liên kết hôlônôm dừng. Các lực hoạt động được giả thiết là những lực thế và do vậy cơ năng toàn phần của cơ hệ là không đổi trong quá trình chuyển động thực:

$$T + \Pi = h. \tag{5.49}$$

Xét các chuyển động vòng giữa hai vị trí cố định q_s^1, q_s^2 của con đường thẳng và có cùng cơ năng như chuyển động thẳng (đường thực). Vì điều kiện (5.49) đặt ra một số hạn chế đối với vận tốc của các điểm của cơ hệ trong chuyển động vòng, cho nên sẽ là sai lầm nếu qui trạng thái q_s^* của cơ hệ trên đường vòng ứng với trạng thái q_s của nó trên đường thẳng vào cùng một thời điểm. Nói riêng, ta không thể đòi hỏi việc chuyển hệ từ vị trí đầu đến vị trí cuối theo đường vòng được thực hiện trong cùng khoảng thời gian $t_2 - t_1$ như chuyển động theo đường thẳng.

Chẳng hạn, trong chuyển động trên đường thẳng của chất điểm không chịu tác dụng của lực, chuyển động theo đường thực được xác định bởi phương trình:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad \Pi = 0,$$

$$T + \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = h$$

$$v = \dot{x} = \sqrt{\frac{2h}{m}} = \text{hằng} \quad \text{hoặc} \quad x = \sqrt{\frac{2h}{m}}t.$$

Rõ ràng là ta không thể đi theo một đường vòng trong một thời gian $t_2 - t_1$ như nhau để vẫn giữ cho hằng số năng lượng h không đổi, vì khi đó tốc độ $\dot{x}$ là không đổi, trong khi quãng đường vòng lại dài hơn. Như vậy, nếu trong chuyển động thẳng (thực) chất điểm đến vị trí x_1 vào thời điểm t_1 thì trong chuyển động vòng chất điểm sẽ đến x_1 vào thời điểm $t_1 + \Delta t_1$. Nếu dùng biến phân đẳng thời như trước kia thì ta phải đặt điểm (x_1, t_1) trong chuyển động thực tương ứng với điểm $(x_1 + \Delta x_1, t_1)$ trong chuyển động vòng. Song, tiện lợi hơn và tự nhiên hơn, ta đặt điểm (x_1, t_1) trong chuyển động thực tương ứng với điểm $(x_1, t_1 + \Delta t_1)$ trong chuyển động vòng. Nói cách khác, ta sẽ lấy vị trí cuối (x_1) như nhau trong mọi chuyển động và ở đây phải dùng đến biến phân không đẳng thời.

Thực hiện phép biến phân không đẳng thời đối với đẳng thức (5.49) và theo công thức (5.44) ta được:

$$\Delta h = \Delta(T + \Pi) = \delta(T + \Pi) + (T + \Pi)^{\cdot} \Delta t = \delta(T + \Pi) = \delta h = 0.$$

Bây giờ chú ý (5.34), ta có:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n} p_s \delta q_s\right) = \delta L = \delta T - \delta\Pi = 2\delta T.$$

Sau khi thay vào đây biểu thức δq_s (5.43) và lưu ý rằng với các liên kết dừng

$$\sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s = 2T,$$

ta được theo (5.44):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n} p_s \Delta q_s &= 2\delta T + \frac{d}{dt} 2T\Delta t = \\
&= 2\delta T + 2\dot{T}\Delta t + 2T(\Delta t)^{\cdot} = \\
&= 2\Delta T + 2T(\Delta t)^{\cdot}
\end{aligned}$$

Tích phân hai vế trong các giới hạn t_1, t_2, nhớ đến công thức (5.48) và nhận xét rằng:

$$\Delta q_s(t_1) = 0, \quad \Delta q_s(t_2) = 0, \quad (s = 1, \ldots, n),$$

vì các đường vòng cắt đường thực tại các thời điểm t_1 và t_2, ta sẽ được đẳng thức:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0. \tag{5.50}$$

Đại lượng

$$A = \int_{t_1}^{t_2} 2T dt, \tag{5.51}$$

được gọi là **tác dụng theo Lagrăng**.

Với hệ chỉ có một chất điểm

$$A = \int_{t_1}^{t_2} m\vec{v}.\vec{v}dt = \int_{(1)}^{(2)} m\vec{v}.d\vec{r}, \tag{5.52}$$

trong đó các giới hạn của tích phân tương ứng với các vị trí đầu và vị trí cuối của chất điểm. Với hệ gồm N chất điểm, tác dụng A có thể được xác định như tổng công của các vectơ động lượng của chuyển động theo con đường thực nối các vị trí đầu và cuối của các điểm của hệ:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i d\vec{r}_i. \tag{5.53}$$

Hệ thức (5.50) biểu thị nguyên lý tác dụng dừng Lagrăng: **Với sự bảo toàn của cùng một giá trị không đổi của cơ năng toàn phần, chuyển động thực của cơ hệ khác với các chuyển động vòng ở chỗ: trong chuyển động thực, tác dụng theo Lagrăng giữa hai vị trí cố định của cơ hệ có giá trị dừng.** Nguyên lý này được nhà toán học người Pháp Môpectuýt (Mopertus) phát biểu đầu tiên dưới một dạng không thật rõ ràng lắm. Nguyên lý này còn được gọi là nguyên lý tác dụng dừng Môpectuýt - Lagrăng.

Trong cách trình bày trên đây, nguyên lý tác dụng dừng được xem như hệ quả của phương trình Lagrăng. Tuy nhiên, nếu thừa nhận nguyên lý tác dụng dừng như là một mệnh đề xuất phát của động lực học của hệ hôlônôm với các liên kết dừng dưới tác dụng của các lực thế thì từ nguyên lý này ta sẽ có được các phương trình chuyển động của hệ.

Nhận xét: Quan hệ giữa tác dụng theo Hamintơn S (5.26) và tác dụng theo Lagrăng A (5.51).

Với $t_1 = 0$ và $t_2 = t$ tác dụng Hamintơn (5.26) có dạng:

$$S = \int_0^t L dt = \int_0^t (T - \Pi) dt.$$

Vì $T + \Pi = h$ nên:

$$S = \int_0^t 2T dt - ht = A - ht.$$

Xem t biến thiên và lấy biến phân không đẳng thời ta có:

$$\Delta A = \Delta S + h\Delta t.$$

Áp dụng công thức (5.44) ta được:

$$\Delta A = \delta S + (\dot{S} + h)\Delta t.$$

Thay $\dot{S} = L$ vào đây ta có:

$$\Delta A = \delta S + (L + h)\Delta t. \tag{5.54}$$

Chương VI

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI CHÍNH TẮC

Phương pháp biến đổi chính tắc. Phép biến đổi Lơgiăng. Áp dụng biến đổi Lơgiăng cho hàm Lagrăng.

Trong chương IV ta đã đưa các phương trình vi phân của chuyển động về dạng chính tắc rất đẹp. Tuy nhiên, mục tiêu cuối cùng của ta là phải tìm được nghiệm của các phương trình đó. Cho đến nay vẫn chưa có các phương pháp tổng quát tích phân trực tiếp các phương trình chính tắc. Do vậy ta phải đi đường vòng, tìm cách biến đổi các tọa độ sao cho nhận được các phương trình vi phân của chuyển động có dạng đơn giản nhất hoặc có những tích phân đầu nào đó. Lẽ tự nhiên là ta mong muốn tìm nhóm các phép biến đổi tọa độ bảo toàn dạng chính tắc của các phương trình chuyển động. Lý thuyết các phép biến đổi chính tắc gắn với tên tuổi của Giacôbi.

6.1. PHƯƠNG PHÁP CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI CHÍNH TẮC

Mục đích của các phép biến đổi chính tắc, nghĩa là của việc chuyển từ các biến chính tắc $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ sang những biến chính tắc khác $q_1^*, \ldots, q_n^*, p_1^*, \ldots, p_n^*$, là để cho các phương trình chuyển động viết trong các biến chính tắc mới **đơn giản hơn**.

Khi lập các phương trình Lagrăng (3.20) hoặc các phương trình chính tắc Hamintơn (4.7) việc chọn các tọa độ suy rộng là tùy ý theo nghĩa rằng các tọa độ đó là những thông số độc lập bất kỳ, xác định đơn trị vị trí của hệ động lực khảo sát. Như đã thấy trong §3.8 dạng của các phương trình chuyển động đó không phụ phuộc vào hệ tọa độ suy rộng đã lựa chọn. Điều này có nghĩa rằng nếu ta chuyển từ một hệ tọa độ suy rộng cũ $q_1, \ldots, q_n$ sang hệ tọa độ suy rộng mới $q_1^*, \ldots, q_n^*$ theo những công thức

$$q_i^* = q_i^*(q_1, \ldots, q_n, t), \quad (i = 1, ..., n), \tag{6.1}$$

thì dạng của các phương trình Lagrăng và Hamintơn vẫn sẽ như cũ. Khi đó,

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1^*, ..., q_n^*, t) \tag{6.2}$$

và phương trình Lagrăng trong tọa độ mới sẽ là

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}^*}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_i^*} = Q_i^*. \tag{6.3}$$

Trong các phương trình chính tắc với các biến cũ q_i, p_i

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6.4}$$

ngoài các tọa độ suy rộng q_i còn có các xung suy rộng p_i đóng vai trò các biến độc lập. Nếu ta chuyển $2n+1$ biến $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t$ sang các biến mới $q_1^*, \ldots, q_n^*, p_1^*, \ldots, p_n^*, t$ theo công thức

$$\begin{aligned}
& q_i^* = q_i^*(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t), \\
& p_i^* = p_i^*(q, \ldots, q_n, p_1 \ldots, p_n, t), \\
& \frac{\partial(q_1^*, p_1^*, \ldots, q_n^*, p_n^*)}{\partial(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)} \neq 0, \\
& (i = 1, \ldots, n),
\end{aligned} \tag{6.5}$$

thì trong trường hợp tổng quát các phương trình chính tắc không giữ được dạng (6.4). Tuy vậy, vẫn có những phép đổi biến, trong đó các phương trình chính tắc giữ được nguyên dạng của mình. Những phép biến đổi như vậy được gọi là các **phép biến đổi chính tắc.**

Nói cách khác, ta có **định nghĩa sau đây**. Phép biến đổi (6.5) các tọa độ trong không gian pha $2n$ - thứ nguyên (chứa biến thời gian t như một thông số trong trường hợp tổng quát) được gọi là phép biến đổi chính tắc nếu phép biến đổi đó chuyển hệ Hamintơn bất kỳ (6.4) về hệ Hamintơn cùng dạng:

$$\dot{q}_i^* = \frac{\partial H^*}{\partial p_i^*}, \quad \dot{p}_i^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i^*}, \tag{6.6}$$

ở đây, nói chung $H^* \neq H$. **Mục đích của phép biến đổi là để có hàm H^* với cấu trúc đơn giản hơn hàm H ban đầu.**

Ví dụ 6.1. Phép biến đổi

$$q_i^* = \alpha q_i, \quad p_i^* = \beta p_i \quad (i = 1, \ldots, n, \alpha \neq 0, \beta \neq 0),$$

là chính tắc. Nó chuyển hệ (6.4) $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$ về $\dfrac{\dot{q}_i^*}{\alpha} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i^*}\beta$ hoặc $\dot{q}_i^* = \dfrac{\partial H^*}{\partial p_i^*}$. Tương tự, $\dot{p}_i^* = -\dfrac{\partial H^*}{\partial q_i^*}$ với $H^* = \alpha\beta H$.

Ví dụ 6.2. Phép biến đổi

$$q_i^* = \alpha p_i, \quad p_i^* = \beta q_i, \quad (i = 1, \ldots, n, \alpha \neq 0, \beta \neq 0),$$

là chính tắc. Trong trường hợp này

$$H^* = -\alpha\beta H.$$

Ví dụ 6.3. Phép biến đổi

$$q_i^* = p_i \operatorname{tg} t, \quad p_i^* = q_i \operatorname{cotg} t, \quad (i = 1, \ldots, n),$$

là chính tắc, vì dễ dàng thử lại rằng từ các phương trình (6.4) sẽ có các phương trình (6.6) với

$$H^* = -H + \frac{1}{sint cost}\sum_{i=1}^{n} q_i^* p_i^*.$$

Ghi chú. Nếu trong không gian pha ta thực hiện liên tiếp hai phép biến đổi chính tắc, thì phép biến đổi tổng hợp cũng sẽ là chính tắc. Ngoài ra, phép biến đổi ngược của một phép biến đổi chính tắc luôn luôn là chính tắc và phép biến đổi đồng nhất $q_i^* = q_i$, $p_i^* = p_i$ $(i = 1, \dots, n)$ là chính tắc. Vì vậy tất cả các phép biến đổi chính tắc tạo thành một **nhóm**.

Bây giờ tìm các **điều kiện chính tắc** của phép biến đổi, nghĩa là những điều kiện mà phép biến đổi (6.5) phải thỏa mãn để các phương trình chuyển động trong các biến mới cũng có dạng chính tắc:

$$\dot{q}_i^* = \frac{\partial H^*}{\partial p_i^*}, \quad \dot{p}_i^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i^*} \quad (i = 1, \dots, n), \tag{6.7}$$

ở đây $H^* = H^*(q_i^*, p_i^*, t)$ là hàm Hamintơn mới của hệ.

Trong §5.2 ta đã chứng minh rằng các phương trình chính tắc $\left(\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$ với các biến cũ q_i, p_i có thể tìm được từ nguyên lý tác dụng tối thiểu:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H(q, p, t)dt\right] = 0. \tag{6.8}$$

Tương tự như vậy, các phương trình chuyển động (6.7) trong các biến mới q_i^*, p_i^* phải thỏa mãn điều kiện

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^* dq_i^* - H^*(q^*, p^*, t)\right] dt = 0. \tag{6.9}$$

Nhưng các đẳng thức (6.8) và (6.9) sẽ tương đương với nhau trong trường hợp nếu các biểu thức dưới dấu tích phân chỉ sai khác nhau một vi phân toàn phần của một hàm S nào đó, nghĩa là:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H(q,p,t)dt\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^* dq_i^* - H^*(q^*,p^*,t)dt\right] = dS \tag{6.10}$$

hoặc

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - Hdt = \sum_{i=1}^{n} p_i^* dq_i^* - H^* dt + dS. \tag{6.11}$$

Thực vậy, tích phân của (6.10)

$$\sigma = \int_{t_1}^{t_2} dS = S(t_2) - S(t_1)$$

chỉ phụ thuộc vào giá trị đầu và cuối, không phụ thuộc vào đường tích phân nên biến phân $\delta\sigma$ của nó bằng không.

Vậy là, phép biến đổi chính tắc bất kỳ (6.5) được đặc trưng bởi một hàm S nào đó được gọi là **hàm sinh** của phép biến đổi chính tắc. Trong trường hợp tổng quát, hàm sinh S phụ thuộc vào $4n+1$ biến : q_i, p_i, q_i^*, p_i^* và t. Tuy nhiên, các biến này phải thỏa mãn $2n$ phương trình của phép biến đổi (6.5) và số các biến độc lập mà hàm S phải phụ thuộc vào chỉ còn lại là $2n+1$. Do vậy, có khả năng tồn tại bốn loại hàm sinh như sau:

$$S_1(q,q^*,t), \quad S_2(q,p^*,t), \quad S_3(p,q^*,t), \quad S_4(p,p^*,t). \tag{6.12}$$

Dưới đây ta sẽ lần lượt xét các phép biến đổi chính tắc tương ứng với các hàm sinh này.

Trước hết xét phép biến đổi chính tắc với **hàm sinh** $S_1(q,q^*,t)$. Trong trường hợp này các biểu thức đứng dưới dấu các tích phân (6.8) và (6.9) được liên hệ với nhau bởi hệ thức dạng (6.10) hoặc

$$dS_1(q,q^*,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} p_i^* dq_i^* + (H^* - H)dt. \tag{6.13}$$

Mặt khác,

$$dS_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_1}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_1}{\partial q_i^*} dq_i^* + \frac{\partial S_1}{\partial t}.$$

Do vậy từ hai biểu thức cuối cùng suy ra:

$$p_i = \frac{\partial S_1}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \tag{6.14}$$

$$p_i^* = -\frac{\partial S_1}{\partial q_i^*}, \quad (i = 1, \dots, n), \tag{6.15}$$

$$H^* = H + \frac{\partial S_1}{\partial t}. \tag{6.16}$$

Các phương trình (6.14) chỉ chứa q_i, p_i, q_i^* và t. Từ n phương trình này có thể tìm được tất cả các tọa độ mới q_i^* theo q_i, p_i và t. Vậy là ta có được phần thứ nhất của phép biến đổi (6.5). Sau đó, thay vào các hệ thức (6.15) ta tìm được n phương trình còn lại của phép biến đổi (6.5). Cuối cùng, phương trình (6.16) cho phép tìm hàm Hamintơn mới H^*.

Ví dụ 6.4. Hàm sinh

$$S_1(q, q^*, t) = \sum_{i=1}^{n} q_i q_i^*, \tag{1}$$

dẫn đến phép biến đổi (6.5) theo các công thức (6.14) và (6.15):

$$p_i = q_i^*, \quad p_i^* = -q_i \quad (i = 1, \dots, n). \tag{2}$$

Vậy là, phép biến đổi (2) chỉ là sự thay đổi tên lẫn nhau giữa các tọa độ và các xung (các tọa độ mới trùng với các xung cũ, còn các xung mới khác với tọa độ cũ chỉ bởi dấu). Ví dụ này cho thấy sự "bình đẳng" của các tọa độ và xung trong phương pháp Hamintơn. Nhờ vậy mà các biến q_i và p_i còn được gọi là các đại lượng liên hợp chính tắc. Đồng thời, điều này nêu ra tính ước lệ của các hình dung của chúng ta về các biến q_i như là về những tọa độ không gian và về p_i như các biến động lực đo bằng tích của khối lượng với vận tốc. Sự khác nhau giữa chúng thực tế chỉ ở tên gọi và vì vậy khi nghiên cứu quá trình cơ học bất kỳ không thể đặt đối lập động học của nó với động lực học và ngược lại, vì rằng động học và động lực học tạo thành một thể thống nhất trong chuyển động của hệ cơ học bất kỳ.

Với hàm sinh $S_2(q, p^*, t)$, để có khai triển mà các vi phân chính là dq_i, dp_i^*, dt - nghĩa là vi phân của các biến q_i, p_i^*, t của S_2 - ta bổ sung thành phần $d\sum_{i=1}^{n} q_i^* p_i^*$ vào hai vế của phương trình (6.13). Ta có :

$$dS_2(q,p^*,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i + \sum_{i=1}^{n} q_i^* dp_i^* + (H^* - H)dt,$$

trong đó

$$S_2(q,p^*,t) = S_1(q,q^*,t) + \sum_{i=1}^{n} q_i^* p_i^*.$$

Từ đây rõ ràng rằng các công thức của phép biến đổi chính tắc với hàm sinh $S_2(q,p^*,t)$ sẽ là:

$$\begin{cases} q_i^* = \dfrac{\partial S_2}{\partial p_i^*}, \\ p_i = \dfrac{\partial S_2}{\partial q_i}, \\ H^* = H + \dfrac{\partial S_2}{\partial t}. \end{cases} \tag{6.17}$$

Nhờ các đẳng thức này ta có được biến đổi (6.5) cần tìm và hàm Hamintơn mới H^*.

Ví dụ 6.5. Giả thử hàm sinh có dạng

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(q_1, \ldots, q_n, t) p_i^* + h(q_1, \ldots, q_n, t),$$

ở đây f_i, h là các hàm của những tọa độ suy rộng cũ. Khi đó, ta có các biểu thức (6.17) sau đây cho các tọa độ mới q_i^*:

$$p_i = \frac{\partial S_2}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_i} p_i^* + \frac{\partial h}{\partial q_i},$$
$$q_i^* = \frac{\partial S_2}{\partial p_i^*} = f_i(q_1, \dots, q_n, t), \quad (i = 1, \dots, n),$$

trùng với các phương trình của phép biến đổi điểm (6.1). Từ đây có thể kết luận rằng, **phép biến đổi điểm bất kỳ đều là phép biến đổi chính tắc.**

Ví dụ 6.6. Xét chuyển động của chất điểm tự do trong trường trọng lực bằng cách sử dụng các tọa độ trụ r, φ và z. Ta đưa vào các ký hiệu $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ và có các biểu thức của động năng T, thế năng Π của chất điểm và các xung suy rộng p_i như sau:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2),$$
$$\Pi = mgz = mgq_3, \quad L = T - \Pi = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3,$$
$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = mq_1^2\dot{q}_2, \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = m\dot{q}_3.$$

Do đó,

$$H = \sum p_i\hat{\dot{q}}_i - \hat{L} = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} + p_3^2\right) + mgq_3.$$

Ta xét phép biến đổi chính tắc với hàm sinh

$$S_2 = q_1p_1^* cosq_2 + q_1p_2^* sinq_2 + q_3p_3^*.$$

Trên cơ sở các đẳng thức (6.17) ta có:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\partial S_2}{\partial q_1} = p_1^* \cos q_2 + p_2^* \sin q_2, \\
p_2 &= \frac{\partial S_2}{\partial q_2} = -q_1 p_1^* \sin q_2 + q_1 p_2^* \cos q_2, \\
p_3 &= \frac{\partial S_2}{\partial q_3} = p_3^*, \\
q_1^* &= \frac{\partial S_2}{\partial p_1^*} = q_1 \cos q_2, \\
q_2^* &= \frac{\partial S_2}{\partial p_2^*} = q_1 \sin q_2, \\
q_3^* &= \frac{\partial S_2}{\partial p_3^*} = q_3.
\end{aligned} \tag{1}$$

Từ hai phương trình đầu tiên của hệ (1), ta rút ra:

$$p_1^* = m(\dot{q}_1 \cos q_2 - q_1 \dot{q}_2 sin q_2) = m\dot{q}_1^*,$$
$$p_2^* = m(\dot{q}_1 \sin q_2 + q_1 \dot{q}_2 \cos q_2) = m\dot{q}_2^*.$$

Phương trình thứ ba của (1) cho

$$p_3^* = m\dot{q}_3 = m\dot{q}_3^*.$$

/ậy là ta có được phép biến đổi chính tắc cần tìm (6.5). Hàm H^* nới có dạng

$$H^* = H + \frac{\partial S_2}{\partial t} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} + p_3^2) + mgq_3.$$

hay vào đây các giá trị p_1, p_2, p_3, q_3 theo các tọa độ mới (1) ta ược

$$H^* = \frac{1}{2m}(p_1^{*2} + p_2^{*2} + p_3^{*2}) + mgq_3^*.$$

õ ràng rằng các tọa độ mới q_1^*, q_2^*, q_3^* là những tọa độ Đềcac của hất điểm.

Nhận xét. Ở ví dụ đang xét, các phương trình vi phân của chuyển động trong toạ độ Đềcác là rất đơn giản, trong khi các phương trình đó trong toạ độ trụ khá phức tạp. Phép biến đổi từ toạ độ trụ sang toạ độ Đềcác là phép biến đổi chính tắc.

Ví dụ 6.7. Xét chuyển động thẳng của điểm dưới tác dụng của lực phục hồi: $f = -cx$, trong đó $|x|$ là khoảng cách từ điểm đến tâm hút, $c > 0$.

Lấy x làm tọa độ suy rộng: $q = x$, ta có các biểu thức động năng T và thế năng Π của chất điểm:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2}cq^2.$$

Vì rằng $L = T - \Pi = \dfrac{1}{2}(m\dot{q}^2 - cq^2)$ nên

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}.$$

Hàm Hamintơn bây giờ có dạng

$$H = p\widehat{\dot{q}} - \widehat{L} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}k^2mq^2, \quad k^2 = \frac{c}{m}.$$

Ta lập các phương trình chính tắc

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -k^2mq, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}.$$

Vì hệ khảo sát là bảo toàn nên hàm Hamintơn H bằng năng lượng toàn phần của hệ, nghĩa là $H = h = const$. Ta sẽ tìm phép biến đổi chính tắc sao cho hàm Hamintơn mới H^* không chứa tọa độ mới q^*, còn xung mới p^* có mặt trong H^* ở dạng bậc nhất, nghĩa là sao cho

$$H^* = kp^*.$$

Ta dùng dạng thứ hai của phép biến đổi chính tắc $S_2 = S_2(q, p^*)$. Theo các công thức (6.17) ta có: $H^* = H$, nghĩa là

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m} + k^2 m q^2\right) = kp^*.$$

Từ đây

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q} = \sqrt{2mkp^* - k^2m^2q^2} \qquad (1)$$

và

$$S_2 = \int_0^q \sqrt{2mkp^* - k^2m^2q^2} \quad dq.$$

Vì theo (6.17)

$$q^* = \frac{\partial S_2}{\partial p^*} = \int\limits_0^q \frac{mkdq}{\sqrt{2mkp^* - k^2m^2q^2}} = \text{arcsin}\sqrt{\frac{km}{2p^*}}q$$

nên

$$q = \sqrt{\frac{2p^*}{km}} sinq^*. \qquad (2)$$

Từ công thức (1) và (2) ta có:

$$p = \sqrt{2mkp^*}\,|cosq^*|. \qquad (3)$$

Tọa độ mới q^* là *xyclic* vì nó không có mặt trong biểu thức của hàm Haminton H^*. Do vậy xung mới p^* là một hằng:

$$p^* = \frac{h}{k}.$$

Tọa độ mới q^* được xác định từ phương trình chính tắc

$$\dot{q}^* = \frac{\partial H^*}{\partial p^*} = k.$$

Từ đây tìm được

$$q^* = kt + \alpha, \quad \alpha \text{ là hằng.}$$

Thay vào (2), (3) ta có

$$q = \sqrt{\frac{2h}{mk^2}}\sin(kt+\alpha), \quad p = \sqrt{2mh}\cos(kt+\alpha).$$

Ví dụ 6.8. Giả thử hàm sinh có dạng $S_2 = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i^*$. Khi đó, phép biến đổi chính tắc được xác định theo công thức (6.17):

$$p_i = \frac{\partial S_2}{\partial q_i} = p_i^*, \quad q_i^* = \frac{\partial S_2}{\partial p_i^*} = q_i.$$

Từ đây suy ra rằng **phép biến đổi đồng nhất cũng là phép biến đổi chính tắc**.

Với hàm sinh $S_3(p, q^*, t)$, ta bổ sung thành phần $-d\sum_{i=1}^{n} q_i p_i$ vào hai vế của phương trình (6.13) sẽ có

$$dS_3(p, q^*, t) = -\sum_{i=1}^{n} q_i dp_i - \sum_{i=1}^{n} p_i^* dq_i^* + (H^* - H)dt,$$

trong đó

$$S_3(p, q^*, t) = S_1(q, q^*, t) - \sum_{i=1}^{n} q_i p_i.$$

Rõ ràng là các công thức của phép biến đổi chính tắc với hàm sinh $S_3(p, q^*, t)$ sẽ là:

$$q_i = -\frac{\partial S_3}{\partial p_i}, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6.18}$$

$$p_i^* = -\frac{\partial S_3}{\partial q_i^*}, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{6.19}$$

$$H^* = H + \frac{\partial S_3}{\partial t}. \tag{6.20}$$

Từ các phương trình này ta xác định được phép biến đổi cần tìm. Thực vậy, từ n phương trình (6.18) chứa các biến q_i, p_i, q_i^*, t ta sẽ tìm được các tọa độ mới q_i^* như là hàm của q_i, p_i và t:

$$q_i^* = q_i^*(q_i, p_i, t), \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6.21}$$

Thay (6.21) vào các phương trình (6.19) ta có

$$p_i^* = p_i^*(q_i, p_i, t), \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Cuối cùng, phương trình (6.20) cho ta hàm Hamintơn mới H^*.

Với hàm $S_4(p, p^*, t)$, ta bổ sung vào hai vế của phương trình (6.13) thành phần $d\sum_{i=1}^{n} q_i^* p_i^* - d\sum_{i=1}^{n} q_i p_i$ sẽ được

$$dS_4(p, p^*, t) = -\sum_{i=1}^{n} q_i dp_i + \sum_{i=1}^{n} q_i^* dp_i^* + (H^* - H)dt, \tag{6.22}$$

trong đó

$$S_4(p, p^*, t) = S_1(q, q^*, t) + \sum_{i=1}^{n} q_i^* p_i^* - \sum_{i=1}^{n} q_i p_i.$$

Vì

$$dS_4(p, p^*, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_4}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_4}{\partial p_i^*} dp_i^* + \frac{\partial S_4}{\partial t} dt$$

nên phương trình (6.22) có thể viết dưới dạng

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(q_i + \frac{\partial S_4}{\partial p_i} \right) dp_i + \sum_{i=1}^{n} \left(q_i^* - \frac{\partial S_4}{\partial p_i^*} \right) dp_i^* + \\ + \left(H^* - H - \frac{\partial S_4}{\partial t} \right) dt = 0.$$

Hệ thức này sẽ được thỏa mãn nếu

$$q_i = -\frac{\partial S_4}{\partial p_i}, \tag{6.23}$$

$$q_i^* = \frac{\partial S_4}{\partial p_i^*}, \quad (i = 1, ..., n) \tag{6.24}$$

$$H^* = H + \frac{\partial S_4}{\partial t}. \tag{6.25}$$

Rõ ràng là, cho hàm $S_4(p, p^*, t)$ thì từ (6.23) có thể tìm p_i^* như hàm của q_i, p_i và t:

$$p_i^* = p_i^*(q_i, p_i, t). \tag{6.26}$$

Sau đó thay (6.26) vào (6.24) sẽ được

$$q_i^* = q_i^*(q_i, p_i, t) \tag{6.27}$$

và do vậy có được phép biến đổi cần tìm. Phương trình (6.25) cho ta hàm Hamintơn mới H^*.

Nhận xét quan trọng

1. Quá trình chuyển động của hệ cơ học có thể được xem như phép biến đổi chính tắc liên tục với hàm sinh là hàm Hamintơn. Điều khẳng định này được rút ra từ lập luận sau đây. Giả thử rằng q_t, p_t là những giá trị của các biến chính tắc của hệ tại thời điểm t, còn $q_{t+\Delta t}$ và $p_{t+\Delta t}$ là những giá trị của chúng tại thời điểm $t + \Delta t$ vô cùng gần với t. Các đại lượng $q_{t+\Delta t}$, $p_{t+\Delta t}$ là các hàm của q_t, p_t và Δt, nghĩa là

$$q_{t+\Delta t} = q(q_t, p_t, \Delta t), \quad p_{t+\Delta t} = p(q_t, p_t, \Delta t). \tag{1}$$

Song, giá trị của các biến chính tắc tại thời điểm bất kỳ thỏa mãn các phương trình chuyển động $\left(\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$. Vì vậy, phép biến đổi (1) là chính tắc. Với sự hình dung như vậy về chuyển động cơ học, ta còn có thể chứng minh thêm rằng, tất cả các tích phân đầu của các phương trình chuyển động là những hàm sinh của những phép biến đổi chính tắc, không làm thay đổi hàm Hamintơn của cơ hệ.

2. Để tìm được các phương trình của phép biến đổi chính tắc ương ứng với ba loại hàm sinh S_2, S_3, S_4 (6.12) ta đã thực hiện rong phương trình (6.13) phép biến đổi thích hợp, được gọi là biến đổi Lơgiăng.

.2. PHÉP BIẾN ĐỔI LƠGIĂNG

Cho hàm F của n biến $u_1, \ldots, u_n$:

$$F = F(u_1, \ldots, u_n) \tag{6.28}$$

nà ta gọi là **hàm sinh** đối với các biến $u_1, \ldots, u_n$. Ta đưa vào n iến mới $v_1, \ldots v_n$ nhờ phép biến đổi

$$v_i = \frac{\partial F}{\partial u_i} \tag{6.29}$$

ới

$$\det \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_k} \right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{6.30}$$

iều kiện (6.30) đảm bảo tính độc lập của n biến v_i và từ phương inh (6.29) có thể biểu diễn u_i qua v_i.

Ta xác định hàm G mới như sau:

$$G = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i - F. \tag{6.31}$$

hay vào đây các giá trị tìm được từ (6.29) của u_i theo v_i, ta được m G chỉ của các biến mới v_i:

$$G = G(v_1, \ldots, v_n). \tag{6.32}$$

G được gọi là **hàm sinh đối với các biến** $v_1, \ldots, v_n$.

Bây giờ ta xét biến phân vô cùng bé của hàm G, tạo nên bởi các biến phân vô cùng bé tùy ý của v_i. Từ (6.31) và (6.32) ta được $(u_i = u_i(v))$:

$$\delta G = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial v_i} \delta v_i.$$

Mặt khác, theo (6.31)

$$\begin{aligned} \delta G &= \sum_{i=1}^{n} (u_i \delta v_i + v_i \delta u_i) - \delta F \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[u_i \delta v_i + \left(v_i - \frac{\partial F}{\partial u_i} \right) \delta u_i \right] = \sum_{i=1}^{n} u_i \delta v_i \end{aligned}$$

(do 6.29). So sánh các biểu thức trên đây của δG ta được

$$u_i = \frac{\partial G}{\partial v_i}. \qquad (6.33)$$

Việc chuyển từ các biến u_i sang các biến v_i và từ hàm F san hàm G được gọi là **phép biến đổi Lơgiăng**. Các hệ thức (6.29 (6.33) xác định các phép biến đổi thuận, nghịch. Kết quả này nó lên **tính đối ngẫu** tuyệt vời của phép biến đổi Lơgiăng mà ta có th giải thích bằng sơ đồ sau đây:

	Hệ cũ	**Hệ mới**
Biến:	$u_1, \ldots, u_n$	$v_1, \ldots, v_n$
Hàm:	$F = F(u_1, \ldots, u_n)$	$G = G(v_1, \ldots, v_n)$

Phép biến đổi

$$\begin{array}{ll} v_i = \dfrac{\partial F}{\partial u_i} & u_i = \dfrac{\partial G}{\partial v_i} \\ G = \sum u_i v_i - F & F = \sum u_i v_i - G \\ G = G(v_1, \ldots, v_n) & F = F(u_1, \ldots, u_n) \end{array} \qquad (6.3$$

Như vậy, các biến mới (v_i) là những đạo hàm riêng của hàm cũ (F) theo các biến cũ (u_i), còn các biến cũ là những đạo hàm riêng của hàm mới (G) theo các biến mới.

Phép biến đổi xác định bởi (6.34) là đối xứng hoàn toàn. **Trong phép biến đổi Lơgiăng các hệ "cũ" và "mới" là tương đương hoàn toàn.**

Phạm vi ứng dụng của phép biến đổi Lơgiăng có thể mở rộng hơn. Giả thử rằng hàm F phụ thuộc vào hai hệ thống biến $u_1, \ldots, u_n$, $w_1, \ldots, w_m$:

$$F = F(u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m) \tag{6.35}$$

Các biến w_j không phụ thuộc vào các biến u_i. Chúng có mặt trong hàm F như những thông số và không tham gia vào phép biến đổi trước đây. Ta sẽ gọi u_i là các **biến chủ động**, còn w_j là các **biến thụ động**. Hàm mới G cũng sẽ chứa cả w_j:

$$G(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m). \tag{6.36}$$

Quay lại các phương trình (6.34), ta tìm biến phân đầy đủ của hàm G với những biến phân tùy ý của tất cả v_i và w_j với các hệ thức (6.29), (6.31)

$$\delta G = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial v_i}\delta v_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial G}{\partial w_j}\delta w_j.$$

Mặt khác, theo (6.31)

$$\begin{aligned}\delta G &= \sum_{i=1}^{n}(u_i\delta v_i + v_i\delta u_i) - \delta F\\ &= \sum_{i=1}^{n}(u_i\delta v_i + v_i\delta u_i) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial u_i}\delta u_i - \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial w_j}\delta w_j.\end{aligned}$$

Chú ý đến (6.29) và so sánh hai biểu thức trên đây của δG ta rút ra:

$$\begin{cases} u_i = \dfrac{\partial G}{\partial v_i}, \quad (i = 1, \ldots, n), \\ \dfrac{\partial F}{\partial w_j} = -\dfrac{\partial G}{\partial w_j}, \quad (j = 1, \ldots, m). \end{cases} \tag{6.37}$$

Vậy là, các hệ thức (6.29), (6.33) vẫn không thay đổi. Tuy nhiên, ở đây xuất hiện m hệ thức mới (6.37).

Tóm lại, **phép biến đổi Lơgiăng thay thế hàm đã cho**(F) **của hệ các biến đã cho** (u_i) **bởi hàm mới** (G) **của hệ các biến mới** (v_i). **Các biến cũ và mới liên hệ với nhau bởi phép biến đổi điểm (6.29), (6.33). Tính chất kỳ diệu của phép biến đổi Lơgiăng là sự đối xứng của nó đối với cả hai hệ biến. Phép biến đổi chuyển từ hệ cũ sang hệ mới cũng dẫn từ hệ mới sang hệ cũ.**

6.3. ÁP DỤNG PHÉP BIẾN ĐỔI LƠGIĂNG CHO HÀM LAGRĂNG

Trong trường hợp tổng quát, hàm Lagrăng L phụ thuộc vào n tọa độ vị trí q_i và n vận tốc $\dot{q}_i(n = 1, 2, ..., n)$ và thời gian t:

$$L = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots \dot{q}_n, t). \tag{6.38}$$

Mặc dầu $\dot{q}_i$ là vận tốc của chuyển động thực, trong lập luận dưới đây ta coi chúng là những biến độc lập với q_i. Áp dụng phép biến đổi Lơgiăng, ta coi $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ là những biến chủ động, còn các biến còn lại q_i, t là những biến thụ động. Nói cách khác, nếu so với lý thuyết trình bày ở trên kia thì $\dot{q}_i$ đóng vai trò của các biến u_i, còn q_i và t đóng vai trò của các biến w_j. Vì vậy, trong bài toán đang xét ở đây số m biến thụ động bằng $n + 1$. Theo lược đồ chung của phép biến đổi Lơgiăng, ta tiến hành lần lượt các thao tác sau đây:

1. Đưa vào các "biến mới" mà ta gọi là các xung, ký hiệu p_i:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6.39}$$

(L đóng vai trò của hàm F trước đây, p_i đóng vai trò v_i). Từ phương trình Lagrăng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

ta suy ra

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{6.40}$$

2. Đưa vào một hàm mới H gọi là "năng lượng toàn phần" như sau:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L. \tag{6.41}$$

(H đóng vai trò của hàm G trước đây)

3. Biểu diễn hàm mới H (6.41) qua các biến mới p_i, sau khi giải hệ phương trình (6.39) đối với $\dot{q}_i$ và thay chúng vào (6.41). Kết quả ta được

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \widehat{\dot{q}}_i - \widehat{L} = H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t). \tag{6.42}$$

Hàm H được gọi là "hàm Hamintơn".

4. Phương trình (6.37) bây giờ có dạng:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{6.43}$$

Lược đồ chung của phép biến đổi như sau:

	Hệ cũ	**Hệ mới**
Hàm :	Lagrăng L	Hamintơn H
Biến :	vận tốc $(\dot{q}_i)$	xung (p_i)

Các biến thụ động: các tọa độ vị trí (q_i) và thời gian.

Bản chất đối ngẫu của phép biến đổi được phản ánh trong các phương trình sau:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} & \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ H &= \sum p_i \dot{q}_i - L & L &= \sum p_i \dot{q}_i - H \qquad (6.44) \\ H &= H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) & L &= L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots \dot{q}_n, t) \end{aligned}$$

Ta đã xuất phát từ hàm Lagrăng L để xây dựng hàm H. Tương tự như vậy, có thể bắt đầu từ hàm Hamintơn H để xây dựng hàm Lagrăng L.

Vậy là, **phép biến đổi Lơgiăng có thể áp dụng cho hàm Lagrăng L, coi các vận tốc $\dot{q}_i$ như những biến chủ động của phép biến đổi, còn các tọa độ vị trí q_i và thời gian t như những biến thụ động. Các vận tốc $\dot{q}_i$ chuyển thành xung p_i, hàm Lagrăng L chuyển thành hàm Hamitơn H.**

Chương VII

PHƯƠNG TRÌNH HAMINTƠN - GIACÔBI

Phương trình chuẩn Hamintơn - Giacôbi. Các dạng đặc biệt của phương trình Hamintơn - Giacôbi. Phương pháp biến thiên hằng số. Các phương trình chính tắc của chuyển động bị nhiễu. Sự tương tự giữa cơ học cổ điển của hạt và quá trình sóng. Phương trình Srôđingơ.

Như đã thấy trong chương VI, phép biến đổi chính tắc được ặc trưng bởi một hàm duy nhất - **hàm sinh**. *Vì vậy bài toán tìm hép biến đổi chính tắc nào đó giúp đơn giản hàm Hamintơn và m cho phương trình chính tắc có thể tích phân trực tiếp được ương đương với bài toán tìm* **hàm sinh**. *Như sẽ thấy dưới đây, àm này được xác định bởi một phương trình đạo hàm riêng cấp ột được gọi là phương trình Hamintơn - Giacôbi. Bài toán ải hệ phương trình chính tắc được thay thế bằng bài toán giải ương trình đạo hàm riêng này.*

1. PHƯƠNG TRÌNH CHUẨN HAMINTƠN - GIACÔBI

Cho hệ hôlônôm, chuyển động của nó được mô tả bởi các phương trình chính tắc Hamintơn:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7.1}$$

Ta tìm một phép biến đổi chính tắc chuyển từ các biến Hamintơn cũ q_i, p_i sang các biến Hamintơn mới q_i^*, p_i^* sao cho trong hệ phương trình Hamintơn mới:

$$\dot{q}_i^* = \frac{\partial H^*}{\partial p_i^*}, \quad \dot{p}_i^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i^*}, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7.2}$$

hàm Hamintơn H^* đồng nhất bằng không:

$$H^* \equiv 0.$$

Khi đó, hệ phương trình (7.2) cho ngay các tích phân

$$p_i^* = \alpha_i, \quad q_i^* = \beta_i, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7.3}$$

ở đây α_i và β_i là $2n$ hằng tùy ý. Sau khi đã xác định được phép biến đổi chính tắc, nghĩa là tìm được mối liên hệ giữa các biến Hamintơn cũ $q_i, p_i (i = 1, \ldots, n)$ và các biến mới $q_i^*, p_i^* (i = 1, \ldots, n)$, ta sẽ biểu diễn tất cả các biến cũ q_i, p_i qua thời gian t và $2n$ hằng tùy ý $\alpha_i, \beta_i (i = 1, \ldots, n)$. Như vậy là tìm được tất cả các nghiệm của hệ (7.1) và do đó tìm được chuyển động của hệ hôlônôm đã cho.

Dưới đây ta sẽ chứng minh rằng để có phép biến đổi chính tắc như đã trình bày thì hàm sinh S tương ứng phải thỏa mãn *phương trình chuẩn Hamintơn - Giacôbi*:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0. \tag{7.4}$$

Muốn vậy, giả thử rằng bằng cách dùng dạng thứ hai (S_2) của các phép biến đổi chính tắc (xem 6.17) với hàm sinh

$$S = S(q_1, \ldots, q_n, p_1^*, \ldots, p_n^*, t), \quad det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial p_k^*}\right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad q_i^* = \frac{\partial S}{\partial p_i^*}, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.5}$$

ta tìm được hàm Hamintơn mới thuộc dạng

$$H^* = f(p_1^*, \ldots, p_n^*), \tag{7.6}$$

trong đó f là một hàm nào đó. Sau này ta sẽ chọn $f \equiv 0$. Khi đó, đối với các biến mới q_i^*, p_i^* ta có

$$\dot{q}_i^* = \frac{\partial H^*}{\partial p_i^*}, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7.7}$$

$$\dot{p}_i^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i^*} = 0, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7.8}$$

và

$$H^* = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{7.9}$$

Từ các phương trình (7.8) suy ra rằng

$$p_i^* = \alpha_i, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7.10}$$

trong đó α_i là hằng tích phân. Thay các biểu thức (7.10) vào (7.7) ta có

$$\dot{q}_i^* = \left.\frac{\partial f(p_1^*, \ldots, p_n^*)}{\partial p_i^*}\right|_{p_i^* = \alpha_i} = \omega_i = const.$$

Do vậy

$$q_i^* = \omega_i t + \beta_i, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7.11}$$

ở đây β_i là các hằng tích phân. Các biểu thức (7.10) và (7.11) là những tích phân của các phương trình (7.7), (7.8). Dùng các hệ thức (7.5) ta sẽ tìm được các biến cũ q_i và p_i, nghĩa là giải được bài toán về chuyển động của hệ. Tuy nhiên, ta không thể làm được như vậy vì chưa biết hàm S. Ta hãy xét hệ thức (7.9), chú ý đến hệ thức (7.6):

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = f(p_1^*, \ldots, p_n^*). \tag{7.12}$$

Các tọa độ $q_1^*, \ldots, q_n^*$ đều không có mặt trong hàm Hamintơn H^* nên tất cả các tọa độ này là *xyclic* và tương ứng với chúng là các tích phân (7.10). Theo (7.5) và (7.10) ta thay trong (7.12) p_i bởi $\dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ và p_i^* bởi α_i:

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_n}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \quad (7.13)$$

Vậy là, ta đã nhận được phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp một mà hàm sinh $S(q_1, \ldots, q_n, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ phải thỏa mãn với $n+1$ biến cơ bản $q_1, \ldots, q_n, t$. Bây giờ ta lấy

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv 0,$$

nghĩa là ta quan tâm đến lớp hàm Hamintơn đặc biệt $H^* \equiv 0$. Khi đó phương trình (7.13) trở thành phương trình Hamintơn - Giacôbi (7.4), còn các biến mới q_i^* và p_i^* là những hằng (7.3).

Ví dụ 7.1. *Lập phương trình Hamintơn - Giacôbi cho điểm chuyển động phẳng trong trường trọng lực.*

Lấy các tọa độ Đềcac x, y của điểm làm các tọa độ suy rộng: $q_1 = x$, $q_2 = y$. Ta viết các biểu thức động năng T và thế năng Π của điểm:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad \Pi = mgq_2.$$

Vì $p_1 = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1, \quad p_2 = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{q}_2, H = T + \Pi$ *nên*

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + mgq_2, \quad (1)$$

và phương trình Hamintơn - Giacôbi sẽ có dạng (7.4):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2 + mgq_2 = 0. \quad (2)$$

Nghiệm của phương trình vi phân đạo hàm riêng chứa số hằng số tùy ý bằng số biến độc lập được gọi là **tích phân đầy đủ** của phương trình đó. Trong trường hợp ở đây, số các biến độc lập là $n+1$ và nghiệm đầy đủ phải chứa $n+1$ hằng tích phân. Trong phương trình Hamintơn - Giacôbi,bản thân hàm S không có mặt, mà chỉ xuất hiện các đạo hàm riêng của S. Do vậy, trong tích phân đầy đủ D của nó sẽ có một thành phần hằng số (α_0) đứng độc lập. Nói cách khác, D có dạng

$$D = S(q_1, \ldots, q_n, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \alpha_0,$$

ở đây α_0 là hằng tùy ý. Thực vậy, nếu $S(q_1, \ldots, q_n, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ là nghiệm của phương trình (7.4) thì bởi vì

$$\frac{\partial D}{\partial q_i} = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t},$$

nên hàm D cũng là nghiệm của phương trình (7.4), chứa $n+1$ hằng tùy ý $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, nghĩa là D là tích phân đầy đủ của (7.4). Nhận xét rằng hằng số cộng α_0 không nhập vào phép biến đổi chính tắc nên có thể bỏ nó đi ngay từ đầu. Chính vì vậy mà sau này **nghiệm $S(q_1, \ldots, q_n, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ của phương trình (7.4), chứa n hằng tùy ý** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ với điều kiện

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial q_1}, \ldots, \dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha_1 \partial q_n}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha_n q_1}, \ldots, \dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha_n \partial q_n}, \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (7.14)$$

cũng được **gọi là tích phân đầy đủ** của phương trình (7.4). Với điều kiện (7.14), thì không một hằng số $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nào là hằng số cộng.

Vậy là, để tìm nghiệm q_i, p_icủa hệ phương trình xuất phát (7.1) ta có thể tiến hành theo các bước sau đây:

1) Lấy nghiệm $S = S(q_1, \dots, q_n, t, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ của phương trình (7.4), phụ thuộc n hằng số tích phân $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ làm hàm sinh.

2) Trong các công thức của phép biến đổi chính tắc (7.5) ta thay p_i^* bởi α_i và q_i^* bởi β_i (7.3) (do $H^* = f = 0$). Khi đó theo (7.11) ta có

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (i = 1, \dots, n),$$
$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \tag{7.15}$$

vì khi $f \equiv 0$ thì $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_i} \equiv 0, \quad (i = 1, \dots, n)$. Ở đây β_i là những hằng tùy ý.

3) Giải các phương trình (7.15) ta tìm được các tọa độ suy rộng $q_1, \dots, q_n$ và các xung p_i theo thời gian t và $2n$ hằng tùy ý α_i và β_i $(i = 1, \dots, n)$:

$$q_i = q_i(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n),$$
$$p_i = p_i(t, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n),$$
$$(i = 1, \dots, n).$$

Tóm lại, nếu biết tích phân đầy đủ của phương trình Hamintơn - Giacôbi thì bài toán tích phân hệ (7.1) được thay thế bằng bài toán tìm tích phân đầy đủ của phương trình Hamintơn - Giacôbi (7.4). Ta có định lý Giacôbi sau đây:

"Bài toán tìm tích phân tổng quát của hệ phương trình chính tắc Hamintơn (7.1)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

được đưa về bài toán xây dựng tích phân đầy đủ của phương trình đạo hàm riêng cấp một (7.4) :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_1, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0,$$

nghĩa là nghiệm

$$S(q_1, \ldots, q_n, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

chứa n hằng tùy ý $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ và thỏa mãn điều kiện

$$\mathbf{det}\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_i\partial q_k}\right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0.$$

Biết tích phân đầy đủ $S(q_1, \ldots, q_n, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ này, ta sẽ tìm được tích phân tổng quát của hệ phương trình chính tắc (7.1) nhờ các phương trình hữu hạn (7.15):

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_i} = \beta_i, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \ldots, n),$$

trong đó $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ là $2n$ hằng tùy ý."

Phương trình vi phân đạo hàm riêng đối với hàm S (7.4) do Hamintơn đưa ra vào năm 1834, còn định lý trên đây được Giacôbi chứng minh vào năm 1837.

Ví dụ 7.2. Từ ví dụ 7.1, áp dụng các công thức (7.15) ta có :

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial S}{\partial\alpha_2} = \beta_2.$$

$$p_1 = m\dot{q}_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = m\dot{q}_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}.$$

Ví dụ 7.3. Xét một hạt chuyển động trên đường thẳng trong trường lực mạnh dần theo thời gian - Chẳng hạn, chuyển động của khối lượng từ trong từ trường biến thiên. Thế năng trên một đơn vị khối lượng của trường đó bằng - Atx, ở đây $A = const$. Khi đó ta có

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2, \quad \Pi = -Atx$$

và

$$H = \frac{1}{2}p^2 - Atx.$$

Phương trình Hamintơn - Giacôbi (7.4) có dạng

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - Atx = 0. \tag{1}$$

Ta tìm tích phân đầy đủ của phương trình (1) dưới dạng

$$S = \frac{1}{2}At^2x + \alpha x - \varphi(t), \tag{2}$$

trong đó φ là hàm cần tìm, α là hằng tuỳ ý. Thay (2) vào (1) sẽ có:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}At^2 + \alpha\right)^2.$$

Tích phân lên ta được

$$\varphi = \frac{1}{40}A^2t^5 + \frac{1}{6}A\alpha t^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 t.$$

Phương trình (7.15) bây giờ có dạng

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = x - \alpha t - \frac{1}{6}At^3.$$

Từ đây rút ra:

$$x = \alpha t + \frac{1}{6}At^3 + \beta.$$

7.2. CÁC DẠNG ĐẶC BIỆT CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMINTƠN - GIACÔBI

7.2.1. Hệ bảo toàn và hệ bảo toàn mở rộng. Xét hệ chuyển động trong trường lực thế dừng. Trong trường hợp này, hàm Hamintơn không phụ thuộc rõ vào thời gian và phương trình (7.4) có dạng

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0. \tag{7.16}$$

Giả thử E là năng lượng toàn phần của cơ hệ khảo sát, $E = const$. Ta tìm tích phân đầy đủ của phương trình (7.16) dưới dạng

$$S(q_1, \ldots, q_n, t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = -Et + W(q_1, \ldots, q_n, E, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \tag{7.17}$$

Ở đây $E = \alpha_1$ và $\alpha_i\,(i = 2, \ldots, n)$ là những hằng tùy ý và W là hàm cần tìm. Khác với S, ở đây hàm W không còn phụ thuộc vào thời gian t nữa. Thay (7.17) vào (7.16) với chú ý rằng

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \ldots, n),$$

ta có phương trình được gọi là **phương trình Hamintơn - Giacôbi "cải biên"** (không thời gian)

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = E = const. \tag{7.18}$$

Bây giờ ta phải tìm một tích phân đầy đủ của (7.18) phụ thuộc vào hằng số E và vào $n-1$ hằng số khác $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Vậy là, để lập phương trình Hamintơn - Giacôbi "cải biên" cho hệ bảo toàn mở rộng, chỉ cần viết luật bảo toàn năng lượng mở rộng và trong biểu thức của năng lượng thay tất cả các xung bằng những đạo hàm riêng của hàm W cần tìm theo các tọa độ tương ứng.

Tích phân phương trình (7.18) ta được:

$$W = W(q_1, \ldots, q_n, E, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \tag{7.19}$$

với điều kiện:

$$\det\left\|\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_k}\right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0, \qquad \alpha_1 = E. \tag{7.20}$$

Từ (7.17) ta có:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W}{\partial E}\,, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad , \quad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Theo (7.15):

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W}{\partial E},$$

$$\beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Cuối cùng, đặt $\beta_1 = -t_0$, ta có các tích phân của các phương trình chuyển động dưới dạng rất đơn giản

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial E} = t - t_0, \\ &\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (i = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned} \tag{7.21}$$

Ngoài ra, theo (7.15) và (7.17) ta còn có

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7.22}$$

Từ n phương trình (7.21) ta tìm được các tọa độ suy rộng $q_1, \ldots, q_n$ theo t, α và β. Kết hợp với phương trình (7.22) ta biểu diễn được q_i, p_i qua t, α và β, nghĩa là tìm được nghiệm của các phương trình (7.1):

$$q_i = q_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n),$$
$$p_i = p_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n).$$

$n - 1$ phương trình cuối của (7.21) không chứa thời gian, chúng xác định một đường cong trong không gian - quĩ đạo của chuyển động. Phương trình đầu của (7.21) cho chuyển động trên quĩ đạo (phương trình của thời gian). Như vậy ta thấy rằng trong những trường dừng, quĩ đạo có thể được xem xét độc lập với chuyển động - một tình huống không xảy ra trong trường hợp các trường biến thiên theo thời gian.

Ta có thể nêu ra **trình tự giải bài toán** như sau:

1. Viết phương trình năng lượng (7.18)

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = E.$$

2. Trong phương trình này ta thay p_i bằng các đạo hàm riêng của hàm W nào đó theo các biến q_i:

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = E.$$

3. Tìm tích phân đầy đủ nào đó (7.19) chứa n hằng $E, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$W = W(q_1, \ldots, q_n, E, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

4. Viết n phương trình (7.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} &= \beta_i, \quad (i = 2, \ldots, n) \\ \frac{\partial W}{\partial E} &= t - t_0. \end{aligned}$$

5. Giải các phương trình này đối với q_i, ta sẽ được nghiệm cần ìm:

$$q_i = q_i(E, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_2, \ldots, \beta_n, t - t_0).$$

/í dụ 7.4. Khảo sát chuyển động của một chất điểm tự do, không hịu tác dụng của ngoại lực. Trong trường hợp này thế năng Π bằng hông. Trong hệ tọa độ Đềcac biểu thức động năng của chất điểm ó dạng:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

rong đó x, y, z là tọa độ của chất điểm. Vì

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\ , \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}\ , \quad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

nên ta có hàm Hamintơn như sau:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

và phương trình năng lượng có dạng

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = E. \tag{1}$$

Phương trình Hamintơn - Giacôbi "cải biên" (7.18) bây giờ có dạng:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] = E. \tag{2}$$

Tích phân đầy đủ của phương trình này, phụ thuộc ba hằng số E, α_2, α_3, có dạng

$$W = \sqrt{2mE} \quad (\alpha_2 x + \alpha_3 y + \gamma z), \tag{3}$$

trong đó α_2, α_3 là những hằng độc lập tùy ý, $\gamma = \gamma(\alpha_2, \alpha_3)$ và

$$\gamma^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1. \tag{4}$$

Vi phân hai vế của biểu thức (4) và chú ý rằng α_2, α_3 là độc lập ta tìm được:

$$\left(\gamma\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2} + \alpha_2\right) d\alpha_2 + \left(\gamma\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_3} + \alpha_3\right) d\alpha_3 \equiv 0$$

hoặc

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2} = -\frac{\alpha_2}{\gamma}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_3} = -\frac{\alpha_3}{\gamma}\cdot$$

Các phương trình (7.21) cho:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= \sqrt{2mE}\left(x - \frac{\alpha_2 z}{\gamma}\right) = \beta_2, \\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} &= \sqrt{2mE}\left(y - \frac{\alpha_3 z}{\gamma}\right) = \beta_3, \end{aligned} \tag{5}$$

trong đó β_2, β_3 là những hằng tùy ý. Trong không gian x, y, z các phương trình (5) biểu diễn các đường thẳng với những côsin chỉ phương $\alpha_2, \alpha_3, \gamma$ vuông góc với mặt $W = const$. Chuyển động trên một trong những đường thẳng này được xác định bởi phương trình cho thời gian t (7.21):

$$\frac{\partial W}{\partial E} = \frac{m}{\sqrt{2mE}}(\alpha_2 x + \alpha_3 y + \gamma z) = t - t_0.$$

Vậy chuyển động là thẳng, đều với vận tốc

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad \left(\frac{mv^2}{2} = E\right).$$

Cuối cùng, ta dễ dàng thiết lập các hệ thức:

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} \quad \text{hoặc} \quad mv_x = m\alpha_2 v = \alpha_2\sqrt{2mE},$$
$$p_y = \frac{\partial W}{\partial y} \quad \text{hoặc} \quad mv_y = m\alpha_3 v = \alpha_3\sqrt{2mE},$$
$$p_z = \frac{\partial W}{\partial z} \quad \text{hoặc} \quad mv_z = m\gamma v = \gamma\sqrt{2mE}.$$

hư vậy, tích phân đầy đủ (3) xác định lớp các chuyển động thẳng, ều theo hướng $\alpha_2, \alpha_3, \gamma$ với vận tốc $\sqrt{\frac{2E}{m}}$.

7.2.2. Phương pháp phân ly biến số

Việc tích phân các phương trình chính tắc Hamintơn trong trường ợp hệ bảo toàn hoặc hệ bảo toàn mở rộng có thể thay bằng việc n tích phân đầy đủ của phương trình Hamintơn - Giacôbi. Trong ường hợp tổng quát, cả hai bài toán này đều khó như nhau. Tuy iên có những bài toán động lực ở đó việc tìm tích phân đầy đủ của ương trình Hamintơn - Giacôbi dễ hơn việc tích phân các phương nh Hamintơn. Khả năng này náy sinh trong những trường hợp khi hàm Hamintơn $H(q,p)$ có dạng đặc biệt cho phép **phân ly biến số**. Ta sẽ nói rằng các **biến số được phân ly** nếu tích phân đầy đủ của phương trình (7.18) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$W = \sum_i W_i(q_i).$$

Ta xét hai trường hợp sau đây:

Trường hợp 1. Hàm Hamintơn H là hàm của n hàm $f_1, \ldots, f_n$, mỗi hàm f_i phụ thuộc chỉ vào một cặp biến Hamintơn "của mình" q_i, p_i:

$$H(q,p) = H[f_1(q_1, p_1), \ldots, f_n(q_n, p_n)], \tag{7.23}$$

với $\partial f_i/\partial p_i \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Trong trường hợp này, phương trình Hamintơn - Giacôbi "cải biên" có dạng:

$$H\left[f_1\left(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\right), \ldots, f_n\left(q_n, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right)\right] = E. \tag{7.24}$$

Nếu tìm nghiệm của phương trình này dưới dạng

$$W = W_1(q_1) + \cdots + W_n(q_n) \tag{7.25}$$

thì do tính độc lập của các tọa độ suy rộng nên mỗi hàm $f_i\left(q_i, \dfrac{dW_i}{dq_i}\right)$ $(i = 1, \ldots, n)$ phải là hằng.

Ta đặt

$$f_i\left(q_i, \frac{dW_i}{dq_i}\right) = \alpha_i, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7.26}$$

trong đó α_i là những hằng tùy ý. Rõ ràng là

$$H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = E.$$

Giải hệ phương trình (7.26) đối với $\dfrac{dW_i}{dq_i}$ và chú ý đến (7.15) ta được:

$$\frac{dW_i}{dq_i} = p_i = \Psi_i(q_i, \alpha_i), \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7.27}$$

Do đó

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} \int \Psi_i(q_i, \alpha_i) dq_i.$$

Ở đây cũng như sau này ta hiểu tích phân là xác định với cận trên biến thiên và cận dưới là hằng không phụ thuộc vào $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Bây giờ hàm S (7.17) theo (7.24) - (7.26) có dạng:

$$S = -H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).t + \sum_{i=1}^{n} \int \Psi_i(q_i, \alpha_i) dq_i,$$

hoặc

$$S = -Et + \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i, \alpha_i).$$

Do các hệ thức đầu của (7.15), ta có

$$\beta_i = -\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} t + \frac{dW_i}{d\alpha_i} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

hoặc

$$\frac{dW_i}{d\alpha_i} = \beta_i + \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} t, \tag{7.28}$$

β_i là những hằng tùy ý.

Ta sẽ chứng minh rằng

$$A = det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0. \tag{7.29}$$

Thật vậy, vì

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} = 0 \quad (i \neq k),$$

nên định thức (7.29) có dạng chéo và có giá trị bằng tích các số hạng trên đường chéo:

$$A = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_i}.$$

Từ các hệ thức (7.26) và (7.27) ta có

$$f_i(q_i, \Psi_i(q_i, \alpha_i)) \equiv \alpha_i.$$

Lấy đạo hàm đồng nhất thức này theo α_i ta được

$$\frac{\partial f_i}{\partial \Psi_i} \cdot \frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_i} = 1 \quad \text{hoặc} \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_i} = 1.$$

Do vậy, theo giả thiết từ đầu $\dfrac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0$, ta có:

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)} \neq 0,$$

Vậy định thức A khác không. Đó là điều cần chứng minh.

Trình tự giải bài toán trong trường hợp khảo sát sẽ như sau. Thoạt tiên theo công thức (7.17) tìm hàm S, sau đó dùng các công thức(7.15). Không thể dùng trực tiếp các công thức (7.21), (7.22), vì rằng khi rút ra các công thức này ta đã coi E là hằng thứ n, còn trong trường hợp ở đây ta đã đưa vào n hằng $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ và E trở thành hàm của chúng: $E = E(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Ví dụ 7.5. Xét chất điểm khối lượng m chuyển động dọc theo trục x (tọa độ q) trong trường lực đàn hồi với hệ số đàn hồi c (chấn tử tuyến tính). Trong trường hợp này ta có dạng đơn giản nhất của công thức (7.23):

$$H = E = f(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}.$$

Phương trình Hamintơn - Giacôbi "cải biên" (7.24) sẽ là:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{cq^2}{2} = E.$$

Đẳng thức (7.26) trở thành : $\frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2} = \alpha$, và (7.27) cho ta:

$$p = \Psi(q, \alpha) = \sqrt{2m\alpha - mcq^2}.$$

Tích phân đầy đủ của phương trình Hamintơn - Giacôbi "cải biên" có dạng:

$$W = \int \sqrt{2m\alpha - mcq^2}dq.$$

Do hệ thức (7.17) với $E = \alpha$ ta có :

$$S = -\alpha t + \int \sqrt{2m\alpha - mcq^2}dq,$$

còn do (7.15):

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - mcq^2},$$
$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \frac{1}{\omega}\int \frac{dq}{\sqrt{a^2 - q^2}} = -t + \frac{1}{\omega}arcsin\frac{q}{a},$$

trong đó, $a^2 = \frac{2\alpha}{c}$ còn $\omega^2 = \frac{c}{m}$. Vậy ta tìm được chuyển động của chấn tử tuyến tính dưới dạng quen biết:

$$q = asin\omega(t + \beta).$$

Ví dụ 7.6. Khảo sát chuyển động của con lắc đơn (hình 1.1). Lấy góc lệch θ của con lắc khỏi trục thẳng đứng làm tọa độ suy rộng. Ta có biểu thức động năng T và thế năng Π

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2\ , \quad I = ml^2\ , \quad \Pi = mgl(1 - cos\theta),$$

trong đó m là khối lượng và l là chiều dài của con lắc. Vì

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta},$$

nên

$$H = T + \Pi = \frac{p_\theta^2}{2I} + mgl(1 - cos\theta).$$

Phương trình Hamintơn - Giacôbi "cải biên" (7.24) có dạng

$$\frac{1}{2I}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + mgl(1 - cos\theta) = E. \quad (1)$$

Các đẳng thức (7.26), (7.27) sẽ là :

$$\frac{1}{2I}p_\theta^2 + mgl(1 - cos\theta) = \alpha$$
$$p_\theta = \frac{dW}{d\theta}.$$

Từ đây rút ra:

$$p_\theta = \Psi(\theta, \alpha) = \sqrt{2I[\alpha - mgl(1 - cos\theta)]}. \quad (2$$

Tích phân đầy đủ của phương trình (1) có dạng

$$W = \int \sqrt{2I[\alpha - mgl(1 - cos\theta)]}d\theta \quad (3$$

Do hệ thức (7.17) với $E = \alpha$ ta có :

$$S = -\alpha t + \int \sqrt{2I[\alpha - mgl(1 - cos\theta)]}\, d\theta, \quad (4$$

còn do (7.15):

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{2I[\alpha - mgl(1 - cos\theta)]}, \quad (5$$

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \int \frac{I}{\sqrt{2I[\alpha - mgl(1 - cos\theta)]}} d\theta. \quad (6$$

Từ phương trình (1) với $E = \alpha$ ta thấy rằng α là năng lượng toà
phần của con lắc. Vì vậy, nếu gọi a là biên độ dao động của con lắ

$a = \max|\theta|$) thì ta có thể biểu diễn α như là giá trị cực đại của hế năng:

$$\alpha = mgl(1 - \cos a).$$

Thay thế giá trị này của α vào phương trình (6) ta được :

$$t + \beta = \int \frac{Id\theta}{\sqrt{2Imgl(\cos\theta - \cos a)}}.$$

oặc

$$t + \beta = \int \frac{Id\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{Imgl(\sin^2\dfrac{a}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2})}}.$$

uối cùng, đặt

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\sigma,$$

có

$$t + \beta = \int \frac{Id\sigma}{\sqrt{Imgl(1 - k^2\sin^2\sigma)}}, \tag{7}$$

đây $k = \sin\frac{a}{2}$. Phương trình (7) là tích phân *enliptic* loại một. ới những dao động nhỏ của con lắc (a nhỏ) phương trình (7) cho :

$$\theta = a\sin\sqrt{\frac{mgl}{I}}(t + \beta) = a\sin\sqrt{\frac{g}{l}}(t + \beta). \tag{8}$$

dụ 7.7. Khảo sát chuyển động phẳng của chất điểm bị hút về m cố định với lực hút tỷ lệ với khoảng cách từ chất điểm đến tâm t.

Lấy gốc tọa độ 0 của hệ trục $0xy$ tại tâm hút. Lấy tọa độ Đềcac chất điểm $q_1 = x, q_2 = y$ làm tọa độ suy rộng. Ta có các biểu rc động năng T và thế năng Π:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\ , \quad \Pi = \frac{c}{2}(q_1^2 + q_2^2),$$

ở đây m là khối lượng của chất điểm, c là hệ số tỷ lệ. Vì rằng

$$p_1 = m\dot{q}_1 \ , \quad p_2 = m\dot{q}_2,$$

nên hàm Hamintơn sẽ là

$$H = T + \Pi = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{c}{2}q_1^2 + \frac{c}{2}q_2^2 = f_1(q_1, p_1) + f_2(q_2, p_2),$$

$$f_1 = \frac{c}{2}q_1^2 + \frac{p_1^2}{2m} \ , \quad f_2 = \frac{c}{2}q_2^2 + \frac{p_2^2}{2m},$$

và phương trình Hamintơn - Giacôbi "cải biên" (7.24) có dạng:

$$\frac{c}{2}q_1^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{c}{2}q_2^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 = E.$$

Ta tìm nghiệm W của phương trình này dưới dạng (7.25):

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2),$$

trong đó W_1 và W_2 thỏa mãn các hệ thức (7.26):

$$\frac{c}{2}q_1^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 = \alpha_1,$$
$$\frac{c}{2}q_2^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 = \alpha_2,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 = E.$$

Từ đây

$$W_1 = \int \sqrt{m(2\alpha_1 - cq_1^2)}dq_1 \quad , \quad W_2 = \int \sqrt{m(2\alpha_2 - cq_2^2)}dq_2.$$

Theo các biểu thức (7.28) ta có:

$$\frac{dW_1}{d\alpha_1} = \beta_1 + t \ , \quad \frac{dW_2}{d\alpha_2} = \beta_2 + t.$$

Mặt khác,

$$\frac{dW_1}{d\alpha_1} = \sqrt{\frac{m}{c}}\,\text{arcsin}\frac{q_1}{\sqrt{2\alpha_1/c}}\ , \quad \frac{dW_2}{d\alpha_2} = \sqrt{\frac{m}{c}}\,\text{arcsin}\frac{q_2}{\sqrt{2\alpha_2/c}}.$$

Do vậy,

$$\text{arcsin}\frac{q_1}{\sqrt{2\alpha_1/c}} = \sqrt{\frac{c}{m}}(t+\beta_1),$$
$$\text{arcsin}\frac{q_2}{\sqrt{2\alpha_2/c}} = \sqrt{\frac{c}{m}}(t+\beta_2).$$

Vì rằng

$$\frac{dW_1}{dq_1} = p_1 = m\dot{q}_1 = \sqrt{m(2\alpha_1 - cq_1^2)},$$
$$\frac{dW_2}{dq_2} = p_2 = m\dot{q}_2 = \sqrt{m(2\alpha_2 - cq_2^2)},$$

ên cho các điều kiện đầu ta sẽ xác định được các hằng $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ và $_2$. Chẳng hạn, giả thử khi $t = 0$, $\quad q_1 = a, q_2 = 0$, $\quad \dot{q}_1 = 0, \dot{q}_2 =$ $_0$, ta sẽ có các phương trình đối với $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ và β_2 như sau:

$$a = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\beta_1\ , \quad 0 = \sqrt{\frac{2\alpha_2}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}\beta_2,$$

$$\sqrt{m(2\alpha_1 - ca^2} = 0 \quad , \quad \sqrt{2\alpha_2 m} = mv_0.$$

ừ đây tìm được

$$\alpha_1 = \frac{ca^2}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{mv_0^2}{2}\ , \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{c}}\ , \quad \beta_2 = 0,$$

do vậy

$$q_1 = a\cos\sqrt{\frac{c}{m}}t\ , \quad q_2 = v_0\sqrt{\frac{m}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t.$$

Ta đã tìm được nghiệm chỉ bằng cầu phương.

Trường hợp 2. Giả thử hàm Hamintơn (năng lượng toàn phần hoặc năng lượng mở rộng), được biểu diễn liên tiếp bởi "hàm của hàm", trong đó mỗi hàm chỉ phụ thuộc vào hàm đứng ngay trước nó và vào các biến "của mình":

$$H = f_n[f_{n-1}, q_n, p_n], \tag{7.30}$$

ở đây

$$f_{n-1} = f_{n-1}[f_{n-2}, q_{n-1}, p_{n-1}].$$

Đến lượt mình

$$f_{n-2} = f_{n-2}[f_{n-3}, q_{n-2}, p_{n-2}], \quad v \ldots v \ldots$$

Nói cách khác,

$$H = f_n\{\{f_{n-1}\{\ldots f_3[f_2 < f_1(q_1, p_1), q_2, p_2 >, q_3, p_3],\\ \ldots q_{n-1}, p_{n-1}\}, q_n, p_n\}\}.$$

Khi đó phương trình (7.18) đối với W được viết như sau:

$$f_n\Big\{\Big\{f_{n-1}\Big\{\ldots f_3\Big[f_2\langle f_1\Big(q_1, \frac{\partial W}{\partial q_1}\Big), q_2, \frac{\partial W}{\partial q_2}\rangle, q_3, \frac{\partial W}{\partial q_3}\Big]\\ \ldots\Big\}, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_n}\Big\}\Big\} = E.$$

Giả thiết rằng $\dfrac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Ta đặt

$$f_1(q_1, p_1) = \alpha_1,$$

$$f_2(q_2, p_2, \alpha_1) = \alpha_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(q_n, p_n, \alpha_{n-1}) = \alpha_n.$$

Giải hệ phương trình này đối với p_i và chú ý đến (7.22) ta có:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial W}{\partial q_1} = \Psi_1(q_1, \alpha_1), \\ p_2 &= \frac{\partial W}{\partial q_2} = \Psi_2(q_2, \alpha_1, \alpha_2), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_n &= \frac{\partial W}{\partial q_n} = \Psi_n(q_n, \alpha_{n-1}, \alpha_n). \end{aligned} \tag{7.31}$$

Do đó,

$$dW = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) dq_i.$$

Tích phân lên ta được

$$W = \sum_{i=1}^{n} \int \Psi_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) dq_i. \tag{7.32}$$

Theo (7.17), hàm S bây giờ có dạng

$$S = -\alpha_n t + \sum_{i=1}^{n} \int \Psi_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i) dq_i. \tag{7.33}$$

Vì rằng

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_i}, \\ &\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k} = 0 \quad \text{với} \quad i < k, \quad (i, k = 1, \ldots, n), \end{aligned}$$

nên điều kiện (7.20)

$$A = \det \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\|_{i,k=1}^{n} \neq 0,$$

được dẫn về

$$A = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_i} \neq 0.$$

Để chứng minh hệ thức cuối cùng, ta chú ý rằng phương trình

$$f_i(q_i, p_i, \alpha_{i-1},) = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.34}$$

tương đương với phương trình

$$p_i = \Psi_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.35}$$

và do vậy, lấy đạo hàm hai vế của (7.34) theo α_i ta được:

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} . \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} = 1.$$

Theo giả thiết ban đầu $\dfrac{\partial f_i}{\partial p_i} \neq 0$, suy ra

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \right)^{-1} \Bigg|_{p_i = \Psi_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)} \neq 0. \tag{7.36}$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

Sau này ta cần dùng biểu thức đạo hàm $\dfrac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_{i-1}}$, được suy ra từ các phương trình (7.34), (7.35): $\dfrac{\partial f_i}{\partial \alpha_{i+1}} = 0$ hoặc $\dfrac{\partial f_i}{\partial \alpha_{i-1}} + \dfrac{\partial f_i}{\partial p_i} . \dfrac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_{i-1}} = 0$. Từ đây tìm được

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_{i-1}} = - \left\{ \frac{\dfrac{\partial f_i}{\partial \alpha_{i-1}}}{\dfrac{\partial f_i}{\partial p_i}} \right\}_{p_i = \Psi_i(q_i, \alpha_{i-1}, \alpha_i)} \tag{7.37}$$

Cuối cùng, thay biểu thức (7.33) vào các phương trình hữu hạn (7.15) và chú ý đến các công thức (7.36) .(7.37), ta có:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dq_i}{\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial p_i}\right)_{p_i=\Psi_i(q_i,\alpha_{i-1},\alpha_i)}} - \\
&-\int \left(\frac{\dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial \alpha_i}}{\dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial p_{i+1}}}\right)_{p_{i+1}=\Psi_{i+1}(q_{i+1},\alpha_i,\alpha_{i+1})} dq_{i+1} = \beta_i, \\
&(i = 1, \ldots, n-1), \\
&-t + \int \frac{dq_n}{\left(\dfrac{\partial f_n}{\partial p_n}\right)_{p_n=\Psi_n(q_n,\alpha_{n-1},\alpha_n)}} = \beta_n.
\end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

Ở đây $n-1$ phương trình đầu của (7.38) là những phương trình ho họ quĩ đạo trong không gian định vị. Các phương trình đó chứa $n-1$ hằng tùy ý $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.

Sau khi đã tìm được $q_i(t, \alpha_k, \beta_k)$, $(i = 1, \ldots, n)$ từ (7.38) và hay vào các phương trình (7.35), ta tìm được các xung p_i $(i = , \ldots, n)$ như là các hàm của t và của tất cả các hằng số α_i, β_i $i = 1, \ldots, n)$, nghĩa là tìm được nghiệm của hệ phương trình chính ắc (7.1)

í dụ 7.8. Xét chuyển động của một chất điểm khối lượng m, bị út về một tâm với một lực tỷ lệ ngược với bình phương khoảng ách đến tâm.

ài giải. Dùng tọa độ cầu $q_1 = q_\psi = \psi$, $q_2 = q_\theta = \theta$, $q_3 = q_r =$ ta có các biểu thức của động năng và thế năng:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2), \quad \Pi = -\frac{c}{r},$$

ở đây c là hằng số. Ta có:

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2) + \frac{c}{r},$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},\ p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\psi}.$$

Do vậy hàm

$$H = E = T + \Pi = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\psi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) - \frac{c}{r}$$

có cấu trúc vừa nêu ở trên.

Bây giờ ta đặt

$$\begin{cases} f_1 \equiv p_\psi = \alpha_1 \\ f_2 \equiv p_\theta^2 + \dfrac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta} = \alpha_2 \\ f_3 \equiv E = \dfrac{1}{2m}\left(p_r^2 + \dfrac{\alpha_2}{r^2}\right) - \dfrac{c}{r} = \alpha_3 = E. \end{cases} \qquad (1)$$

Vậy là, quá trình phân ly các biến đã dẫn đến số hằng số cần thiế
Bây giờ khi tích phân sẽ không xuất hiện các hằng số bổ sung.

Phương trình Hamintơn - Giacôbi "cải biên" (7.24) có dạng

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right]\right\} - \frac{c}{r} = E.$$

Theo (7.31) từ (1) rút ra:

$$\varphi_1 = p_\psi = \alpha_1$$

$$\varphi_2 = p_\theta = \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}$$

$$\varphi_3 = p_r = \sqrt{2m\alpha_3 + \frac{2mc}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}}$$

và do vậy hàm W (7.32) sẽ là:

$$W = \int \psi_1 d\psi + \int \psi_2 d\theta + \int \psi_3 dr$$
$$= \alpha_1\psi + \int \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta + \int \sqrt{2m(\alpha_3 + \frac{c}{r}) - \frac{\alpha_2}{r^2}}\, dr.$$

Theo các công thức (7.21), (7.22) hoặc (7.38) ta tìm được

$$\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \psi - \alpha_1 \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha_2 - \dfrac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}}, \tag{2}$$

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \int \frac{d\theta}{2\sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}} - \int \frac{dr}{2r^2\sqrt{2m(\alpha_3 + \dfrac{c}{r}) - \dfrac{\alpha_2}{r^2}}}, \tag{3}$$

$$\beta_3 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = -t + \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(\alpha_3 + \dfrac{c}{r}) - \dfrac{\alpha_2}{r^2}}}. \tag{4}$$

Vậy là ta đã tìm được các phương trình hữu hạn cho chuyển động khảo sát (chuyển động Kêple). Khi nghiên cứu chuyển động này ta luôn luôn có thể chọn các tọa độ sao cho vận tốc đầu của điểm nằm trong mặt phẳng kinh tuyến $\psi = const$. Khi đó $\dfrac{d\psi}{d\theta} = 0$ tại thời điểm ban đầu và do vậy, theo biểu thức của p_ψ, theo $\dot{\psi}$ và biểu thức của ψ_1 suy ra $\alpha_1 = 0$. Từ đó theo công thức (2). $\psi = \beta_1 = const$, nghĩa là chuyển động là phẳng. Đạo hàm từng số hạng của (3) và (4) ta sẽ tìm được vận tốc diện tích (đạo hàm theo thời gian của diện tích vạch nên bởi bán kính vectơ xuất phát từ tâm hút):

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha}_2}{2m} = const,$$

nghĩa là chuyển động của chất điểm trong mặt phẳng $\psi = const$ xảy ra theo luật diện tích. Đặt $\dfrac{1}{r} = x$, công thức (3) với $\alpha_1 = 0$ trở thành:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\gamma + 2kx - x^2}} = \beta - \theta,$$

ở đây

$$\gamma = \frac{2m\alpha_3}{\alpha_2}, \qquad k = \frac{mc}{\alpha_2}, \qquad \beta = 2\beta_2\sqrt{\alpha}_2.$$

Tính tích phân

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\gamma + 2kx - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(k^2+\gamma) - (x-k)^2}} =$$

$$= \int \frac{d\left(\dfrac{x-k}{\sqrt{k^2+\gamma}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x-k}{\sqrt{k^2+\gamma}}\right)^2}} = \arccos \frac{x-k}{\sqrt{k^2+\gamma}} = \theta - \beta$$

hoặc

$$x = k + \sqrt{k^2+\gamma}\cos(\theta - \beta).$$

Quay trở lại biến $r = \dfrac{1}{x}$ ta sẽ được phương trình quĩ đạo của chất điểm

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \beta)},$$

$$p = \frac{1}{k} = \frac{\alpha_2}{mc}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{\gamma}{k^2}} = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_2\alpha_3}{mc^2}}.$$

Đó là phương trình của các tiết diện cônic trong tọa độ cực r, θ, mà tâm hút nằm tại một trong các tiêu điểm của nó.

Ví dụ 7.9. Áp dụng phương pháp phân ly biến số cho trường hợp hàm Hamintơn có dạng

$$H = \frac{f_1(q_1, p_1) + \cdots + f_n(q_n, p_n)}{g_1(q_1, p_1) + \cdots + g_n(q_n, p_n)}. \tag{7.39}$$

Bài giải. Trong trường hợp này, phương trình Hamintơn "cải biên" (7.18)

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = E, \tag{1}$$

có thể viết dưới dạng

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f_i\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) - Eg_i\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right)\right] = 0. \qquad (2)$$

Đặt

$$f_i\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) - Eg_i\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_i, \qquad (i = 1, \ldots, n), \quad (3)$$

trong đó $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ là những hằng tùy ý, còn α_n biểu diễn được qua $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ do các công thức (2), (3)

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_n = -\alpha_1 - \cdots - \alpha_{n-1}.$$

Giải các phương trình (3) ta tìm được $\dfrac{\partial W}{\partial q_i}$:

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i(q_i, \alpha_i, E), \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (4)$$

Do đó

$$dW = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial q_i}dq_i = \sum_{i=1}^{n}Q_i(q_i, \alpha_i, E)dq_i$$

$$W = \sum_{i=1}^{n}\int Q_i(q_i, \alpha_i, E)dq_i.$$

vậy tích phân đầy đủ của phương trình Hamintơn-Giacôbi (7.17) dạng

$$S = -Et + \sum_{i=1}^{n}\int Q_i(q_i, \alpha_i, E)dq_i.$$

i đó ta có các phương trình hữu hạn (7.15) nhờ các cầu phương

$$\int \frac{\partial Q_j}{\partial \alpha_j} dq_j - \int \frac{\partial Q_n}{\partial \alpha_n} dq_n = \beta_j, \quad (j = 1, \ldots, n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int \frac{\partial Q_i}{\partial E} dq_i = t + \beta_n. \tag{5}$$

$$p_i = Q_i(q_i, \alpha_i, E). \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0).$$

Giả thiết rằng điều kiện giải được đối với hệ phương trình (3) được thỏa mãn:

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - E\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0.$$

Khi đó đạo hàm hệ thức (3) theo α_i cho ta

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - E\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right] \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_i} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - E\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right] \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i} = 1$$

hoặc

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_i} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - E\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1}_{p_i = Q_i(q_i, \alpha_i, E)}$$

và

$$\frac{\partial Q_i}{\partial E} = \left\{\left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - E\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right]^{-1} g_i(q_i, p_i)\right\}_{p_i = Q_i(q_i, \alpha_i, E)}.$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

Cuối cùng, các phương trình (5) có dạng

$$\int \left[\frac{\partial f_j}{\partial p_j} - E\frac{\partial g_j}{\partial p_j}\right]^{-1}_{p_j = Q_j(q_j, \alpha_j, E)} dq_j -$$

$$- \int \left[\frac{\partial f_n}{\partial p_n} - E\frac{\partial g_n}{\partial p_n}\right]^{-1}_{p_n = Q_n(q_n, \alpha_n, E)} dq_n = \beta_j.$$

$$(j = 1, \ldots, n-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int \left\{ \left[\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - E\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \right]^{-1} g_i(q_i, p_i) \right\}_{p_i = Q_i(q_i, \alpha_i, E)} dq_i = t + \beta_n,$$

$$p_i = Q_i(q_i, \alpha_i, E), \qquad (i = 1, \dots, n)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0).$$

Ta được định lý Liuvin như một trường hợp riêng:

Nếu động năng T và thế năng Π của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)\sum_{i=1}^{n} B_i \dot{q}_i^2, \qquad \Pi = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Pi_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \tag{7.40}$$

trong đó A_i, B_i và Π_i là những hàm của biến q_i, $(i = 1, \dots, n)$, thì việc tích phân phương trình Hamintơn - Giacôbi sẽ được đưa về những cầu phương.

Thực vậy, đối với hệ thống Liuvin thì

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^2}{B_i} + 2\Pi_i\right)}{2\sum_{i=1}^{n} A_i},$$

nhưng đây là trường hợp riêng của biểu thức (7.39).

Ví dụ 7.10. Với các tọa độ suy rộng $q_1 = \lambda$, $q_2 = \mu$ trong ví dụ 7.6) động năng và thế năng của hệ có dạng (7.40) và do vậy có thể dùng phương pháp tách biến để tích phân phương trình Hamintơn-Giacôbi. Ta có hàm Hamintơn dưới dạng

$$H = \frac{1}{2ma^2(q_1^2 - q_2^2)}[p_1^2(q_1^2 - 1) + p_2^2(1 - q_2^2)] - \\ - \frac{m}{a(q_1^2 - q_2^2)}[(c_1 + c_2)q_1 - (c_1 - c_2)q_2],$$

và do vậy, phương trình Haminton-Giacôbi (7.18) sẽ là

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 (q_1^2 - 1) + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 (1 - q_2^2) - \\ - 2m^2 a[(e_1 + e_2)q_1 - (e_1 - e_2)q_2] - 2ma^2 E(q_1^2 - q_2^2) = 0. \tag{1}$$

Ta tìm nghiệm W của phương trình này dưới dạng

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2).$$

Thay vào (1) sẽ được

$$\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 (q_1^2 - 1) - 2m^2 a(e_1 + e_2)q_1 - 2ma^2 Eq_1^2 + \\ + \left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 (1 - q_2^2) + 2m^2 a(e_1 - e_2)q_2 + 2ma^2 Eq_2^2 = 0.$$

Phương trình này sẽ được thỏa mãn nếu

$$\left(\frac{dW_1}{dq_1}\right)^2 (q_1^2 - 1) - 2m^2 a(e_1 + e_2)q_1 - 2ma^2 Eq_1^2 = \alpha_1,$$

$$\left(\frac{dW_2}{dq_2}\right)^2 (1 - q_2^2) + 2m^2 a(e_1 - e_2)q_2 + 2ma^2 Eq_2^2 = -\alpha_1.$$

trong đó α_1 là một hằng tùy ý. Từ đây ta có:

$$W_1 = \int \sqrt{\frac{\alpha_1 + 2m^2 a(e_1 + e_2)q_1 + 2ma^2 Eq_1^2}{q_1^2 - 1}}\, dq_1.$$

$$W_2 = \int \sqrt{\frac{-\alpha_1 - 2m^2 a(e_1 - e_2)q_2 - 2ma^2 Eq_2^2}{1 - q_2^2}}\, dq_2.$$

Tích phân đầy đủ $W = W_1 + W_2$ của phương trình Haminton-Giacôbi chứa hai hằng tùy ý α_1 và E. Các tích phân hữu hạn của các phương trình chuyển động sẽ tìm được bằng cách dùng các công thức (7.21):

$$\frac{\partial W}{\partial E} = \int \frac{ma^2 q_1^2 dq_1}{\sqrt{q_1^2 - 1}\sqrt{\alpha_1 + 2m^2 a(c_1 + c_2)q_1 + 2ma^2 E q_1^2}} + \\ + \int \frac{ma^2 q_2^2 dq_2}{\sqrt{q_2^2 - 1}\sqrt{\alpha_1 + 2m^2 a(c_1 - c_2)q_2 + 2ma^2 E q_2^2}} = t - t_0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dq_1}{2\sqrt{q_1^2 - 1}\sqrt{\alpha_1 + 2m^2 a(c_1 + c_2)q_1 + 2ma^2 E q_1^2}} + \\ + \int \frac{dq_2}{2\sqrt{q_2^2 - 1}\sqrt{\alpha_1 + 2m^2 a(c_1 - c_2)q_2 + 2ma^2 E q_2^2}} = \beta_1,$$

nghĩa là bài toán được đưa về các cầu phương.

Sự phân ly của các biến trong bài toán này hoặc bài toán khác không minh chứng cho những tính chất vật lý đặc biệt của các hệ cơ học tương ứng, mà chỉ là kết quả của việc lựa chọn thích hợp hệ tọa độ. Chẳng hạn, trong bài toán về chuyển động của chất điểm trong trường lực xuyên tâm đối xứng, việc phân ly biến số có thể thực hiện được trong các tọa độ cực, nhưng lại không thể thực hiện được trong các tọa độ Đềcac. Vậy là, nếu ở bài toán đã cho các biến không phân ly trong một hệ tọa độ nào đó, thì chúng hoàn toàn có thể phân ly sau một phép biến đổi điểm tương ứng. Tiếc rằng, đối với nhiều bài toán quan trọng của thực tế (ví dụ, bài toán ba vật thể) sự phân ly biến số không thể thực hiện được trong bất kỳ hệ tọa độ nào.

7.2.3. Hệ có tọa độ xyclic. Giả thử $q_{m+1}, \ldots, q_n$ là các tọa độ xyclic. Khi đó các tọa độ này không có mặt trong hàm Hamintơn H:

$$H = H(t, q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_n).$$

Ta tìm tích phân toàn phần của phương trình Hamintơn - Giacôbi (7.4) dưới dạng

$$S = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j q_j + S_0(t, q_1, \ldots, q_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n). \qquad (7.41)$$

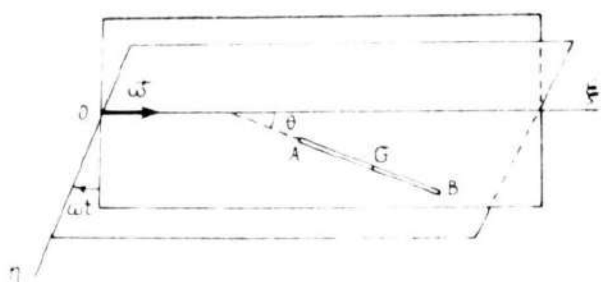
Thay (7.41) vào (7.4) ta có:

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_m, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n\right) = 0. \quad (7.42)$$

Ví dụ 7.11. Giả thử thanh AB, khối lượng $M = 1$, chuyển động trên mặt phẳng nhẵn. Mặt phẳng này quay với vận tốc góc ω quanh trục nằm ngang thuộc chính mặt phẳng đó. Giả thử $O\xi, O\eta$ là những trục gắn chặt với mặt phẳng, trong đó $O\xi$ là trục quay cố định nằm ngang, còn mặt phẳng $O\xi\eta$ ở vị trí thấp hơn mặt phẳng nằm ngang $O\xi\zeta$ một góc ωt. Nếu góc nghiêng của thanh AB với trục $O\xi$ tại thời điểm t nào đó là θ thì ta có:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \omega^2\eta^2) + \frac{1}{2}k^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta) + g\eta\sin\omega t.$$

ở đây, ξ, η là tọa độ trọng tâm G của thanh AB, còn Mk^2 là mômen quán tính của thanh đối với trục đi qua G và vuông góc với thanh.



Hình 7.1
Thanh chuyển động trong mặt phẳng quay

Do vậy:

$$p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot\xi} = \dot\xi, \quad p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot\eta} = \dot\eta, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = k^2\dot\theta,$$

và

$$H = T_2 - T_0 + \Pi,$$

$$H = \frac{1}{2}\left(p_\xi^2 + p_\eta^2 + \frac{1}{k^2}p_\theta^2\right) - \frac{1}{2}\omega^2\eta^2 - \frac{1}{2}k^2\omega^2\sin^2\theta - g\eta\sin\omega t,$$

ở đây ξ là tọa độ xyclic.

Phương trình vi phân Haminton có dạng:

$$\frac{2\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 - \omega^2\eta^2 - k^2\omega^2\sin^2\theta - 2g\eta\sin\omega t = 0. \quad (1)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình này dưới dạng (7.42):

$$S = \alpha_1\xi + R(\theta) + F(\eta, t). \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$2\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 + \alpha_1^2 - \omega^2\eta^2 - 2g\eta\sin\omega t + \frac{1}{k^2}\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 - k^2\omega^2\sin^2\theta = 0.$$

Phương trình này sẽ được thỏa mãn nếu:

$$2\frac{\partial F}{\partial t} + (\frac{\partial F}{\partial \eta})^2 + \alpha_1^2 - \omega^2\eta^2 - 2g\eta\sin\omega t = -\alpha_3^2, \quad (3)$$

$$\frac{1}{k^2}\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 - k^2\omega^2\sin^2\theta = \alpha_3^2,$$

trong đó α_3 là một hằng tùy ý. Nghiệm của (3) có dạng

$$F(\eta, t) = \frac{1}{2}\omega\eta^2 + \eta\varphi(t) + \psi(t),$$

trong đó $\varphi(t)$, $\psi(t)$ là những hàm của thời gian thỏa mãn các phương trình:

$$\dot{\varphi} + \omega\varphi = g\sin\omega t, \tag{4}$$

$$2\dot{\psi} + \varphi^2 + \alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 0.$$

Từ (4) tìm được:

$$\varphi = \alpha_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}(\sin\omega t - \cos\omega t),$$

trong đó α_2 là hằng và tích phân đầy đủ có dạng

$$\begin{aligned} S = \alpha_1\xi + k\int_0^\theta \sqrt{\alpha_3^2 + k^2\omega^2 sin^2\theta}d\theta + \\ + \frac{1}{2}\omega\eta^2 + \left\{\alpha_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}(\sin\omega t - \cos\omega t)\right\}\eta - \\ - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_3^2)t - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi^2 dt. \end{aligned}$$

Nghiệm của bài toán sẽ là:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \xi - \alpha_1 t, \tag{5}$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \eta e^{-\omega t} - \int_0^t \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}dt, \tag{6}$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = k\alpha_3\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_3^2 + k^2\omega^2\sin^2\theta}} - \alpha_3 t. \tag{7}$$

hương trình (5) cho chuyển động đều theo tọa độ ξ, còn phương ình (7) đưa đến hệ thức

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 \sin^2 \theta + \frac{\alpha_3^2}{k^2}.$$

ừ đây ta có

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \cos \theta \sin \theta.$$

hương trình (6) cho ta:

$$\eta = -\beta_2 e^{\omega t} + \frac{\alpha_2}{\omega} \operatorname{sh} \omega t - \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

dụ 7.12. Điện tử trong trường lực xuyên tâm. Xét điện tử uyển động với khối lượng thay đổi

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

ng đó m_0 là khối lượng của điện tử ở trạng thái nghỉ, v là vận của điện tử, c là vận tốc ánh sáng. Ta đưa vào hàm T^*:

$$T^* = \frac{1}{2} \int mv dv = \frac{1}{2} \int\limits_0^v \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{c^2}}} x dx$$

$$= \frac{1}{2} m_0 c^2 \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right\}. \tag{2}$$

n động năng T của điện tử có dạng

$$T = \frac{1}{2} mv^2 - T^* = \frac{1}{2} m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - 1 \right\}. \tag{3}$$

Nếu điện tử chuyển động trong trường lực cơ học với thế năng Π và trường tĩnh điện với thế năng Ω thì hàm Lagrăng có dạng

$$L = T^* - V = \frac{1}{2}m_0c^2\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right\} - V, \qquad (4)$$

ở đây $V = \Pi + e\Omega$ còn e là điện tích của điện tử. Vận tốc v được biểu diễn qua các tọa độ suy rộng và các đạo hàm theo t của chúng. Đặt

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

ta có:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \dot{x}} = \frac{m_0}{4\rho}\frac{\partial v^2}{\partial \dot{x}} = \frac{m_0}{2\rho}\dot{x},$$

$$p_y = \frac{m_0}{2\rho}\dot{y},\ p_z = \frac{m_0}{2\rho}\dot{z}.$$

Do vậy, hàm Hamintơn sẽ là:

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L = \frac{1}{2}m_0c^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right\} + V, \quad (5$$

trong đó vận tốc v được biểu diễn qua các tọa độ suy rộng và cá xung tương ứng.

Giả thử rằng điện tử chuyển động trong mặt phẳng dưới tác dụn của lực hút về gốc tọa độ và trường lực có thế năng $V_{(}r)$. Dùng tọ độ cực r, θ ta có:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2, \qquad (6$$

$$\frac{\partial v}{\partial \dot{r}} = \frac{\dot{r}}{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial \dot{\theta}} = \frac{r^2\dot{\theta}}{v}.$$

Từ biểu thức (4) và (6) ta tính được

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m_0\dot{r}}{2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_0 r^2\dot{\theta}}{2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Do vậy

$$p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 = \frac{m_0^2 v^2}{4(1-\dfrac{v^2}{c^2})},$$

$$\frac{m_0^2c^2}{4} + p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 = \frac{m_0^2c^2}{4(1-\dfrac{v^2}{c^2})},$$

$$\sqrt{\frac{m_0^2c^2}{4} + p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2} = \frac{m_0 c}{2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Thay giá trị này vào (5) ta có biểu thức của H:

$$H = c\sqrt{\frac{m_0^2c^2}{4} + p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2} - \frac{1}{2}m_0c^2 + V. \tag{8}$$

Phương trình Hamintơn- Giacôbi cải biên (7.18) sẽ là:

$$c\sqrt{\frac{m_0^2c^2}{4} + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2} = E - V + \frac{1}{2}m_0c^2. \tag{9}$$

Ta tìm tích phân đầy đủ của phương trình này dưới dạng (7.41):

$$W = \alpha\theta + R(r), \tag{10}$$

trong đó R là hàm cần tìm. Thay (10) vào (9) ta có phương trình sau đây đối với R:

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = m(E-V) + \left(\frac{E-V}{c}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{r^2}. \tag{11}$$

Ký hiệu vế phải của (11) bằng $f(r)$ ta có biểu thức sau đây của tích phân đầy đủ:

$$W = \alpha\theta + \int_a^r \sqrt{f(r)}dr, \tag{12}$$

trong đó a là nghiệm đơn của phương trình $f(r) = 0$. Trong phần lớn trường hợp, chuyển động là dao động theo r giữa hai nghiệm đơn a và b của phương trình $f(r) = 0$ với $f(r) > 0$ khi $a < r < b$.

Nghiệm của bài toán đặt ra được cho bởi các hệ thức (7.21) (7.22):

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \frac{\partial W}{\partial E} = \frac{1}{c^2}\int_a^r \frac{\frac{1}{2}m_0c^2 + E - V}{\sqrt{f(r)}}dr, \\ \beta &= \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \theta - \int_a^r \frac{\frac{\alpha}{r^2}}{\sqrt{f(r)}}dr, \end{aligned} \tag{13}$$

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial r} = \sqrt{f(r)} = \frac{m_0\dot{r}}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$p_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \alpha = \frac{m_0r^2\dot{\theta}}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{(theo(7))}.$$

7.2.4. Hệ bảo toàn có tọa độ xyclic. Trong trường hợp nà hàm Hamintơn có dạng

$$H = H(q_1, ..., q_m, p_1, ...p_n), \tag{7.43}$$

ở đây $q_{m+1}, ..., q_n$ là các tọa độ xyclic. Kết hợp hai trường hợ vừa nêu ở trên, ta sẽ tìm tích phân toàn phần của phương trìn Hamintơn- Giacôbi (7.4) dưới dạng:

$$S = -Et + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j q_j + W(q_1, ..., q_m). \tag{7.44}$$

Khi đó, hàm W được xác định từ phương trình Hamintơn - Giacôbi "cải biên"

$$H(q_1, \ldots, q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n) = E, \qquad (7.45)$$

ở đây p_j trong hàm $H(7.43)$ đã được thay bởi $\frac{\partial W}{\partial q_j}(j = 1, \ldots, m)$, còn p_k được thay bởi $\alpha_k(k = m+1, \ldots, n)$.

Nghiêm của phương trình (7.45) có thể tìm dưới dạng

$$W = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j q_j + R(q_1, ..., q_m). \qquad (7.46)$$

Khi đó, phương trình Hamintơn - Giacôbi

$$H(q_1, ..., q_m, \frac{\partial R}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial R}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_n) = E,$$

sẽ được dùng để xác định hàm R của m biến $q_1, ..., q_m$. Giả thử rằng đã tìm được tích phân đầy đủ của phương trình này (với độ chính xác đến hằng số cộng):

$$R = R(q_1, \ldots, q_m, E, \alpha_2, \ldots, \alpha_m).$$

Theo (7.21) ta có các tích phân của các phương trình chuyển động dưới dạng đơn giản

$$\begin{aligned} &\frac{\partial R}{\partial E} = t - t_0, \\ &\frac{\partial R}{\partial \alpha_j} = -q_j + \beta_j, \quad (j = m+1, \ldots, n), \\ &\frac{\partial R}{\partial \alpha_\nu} = \beta_\nu, \quad (\nu = 2, \ldots, m). \end{aligned} \qquad (7.47)$$

Để áp dụng phương pháp tách biến, việc lựa chọn các tọa độ suy rộng là rất quan trọng, vì rằng với hệ tọa độ suy rộng này các biến có thể tách nhau, còn với hệ tọa độ khác các biến lại không tách nhau.

Ví dụ 7.13. Xét phương trình (2) **trong ví dụ 7.1**. Rõ ràng tọa độ $q_1 = x$ là xyclic. Do vậy ta có

$$S = -Et + \alpha_1 q_1 + W(q_2),$$

và khi đó hàm W được xác định từ các phương trình (1) trong ví dụ 7.1 và (7.45):

$$\frac{\alpha_1^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq_2}\right)^2 + mgq_2 = E,$$

ở đây vế trái nhận được từ (1), ví dụ 7.2 bằng cách thay trong đó p_1 bởi $\alpha_1$và p_2 bởi $\dfrac{dW}{dq_2}$. Từ đây suy ra

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq_2}\right)^2 + mgq_2 = \alpha_2, \tag{1}$$

với

$$\alpha_2 = E - \frac{\alpha_1^2}{2m} \quad \text{hoặc} \quad E = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{2m}.$$

Vì rằng

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial E}{\partial \alpha_1}t + q_1 = -\frac{\alpha_1}{m}t + q_1 = \beta_1,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = -\frac{\partial E}{\partial \alpha_2}t + \frac{dW}{d\alpha_2} = -t + \frac{dW}{d\alpha_2} = \beta_2,$$

nên

$$q_1 = \frac{\alpha_1}{m}t + \beta_1, \quad \frac{dW}{d\alpha_2} = t + \beta_2.$$

Bây giờ tìm nghiệm của phương trình (1). Ta viết phương trình này dưới dạng:

$$\frac{dW}{dq_2} = \sqrt{2m(\alpha_2 - mgq_2)}.$$

Từ đây tìm được

$$W = \int \sqrt{2m(\alpha_2 - mgq_2)}\, dq_2 + c$$

à

$$\frac{dW}{d\alpha_2} = \int \frac{m dq_2}{\sqrt{2m(\alpha_2 - mgq_2)}} = -\frac{1}{mg}\sqrt{2m(\alpha_2 - mgq_2)}.$$

Do vậy,

$$q_1 = \frac{\alpha_1}{m}t + \beta_1, \quad -\frac{1}{mg}\sqrt{2m(\alpha_2 - mgq_2)} = t + \beta_2,$$

oặc

$$q_1 = \frac{\alpha_1}{m}t + \beta_1, \quad q_2 = -\frac{g(t+\beta)^2}{2} + \frac{\alpha_2}{mg}.$$

goài ra

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = \alpha_1 = p_1 = m\dot{q}_1,$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = \frac{dW}{dq_2} = -mg(t + \beta_2) = p_2 = m\dot{q}_2.$$

Giả thử các điều kiện đầu $q_1 = 0, q_2 = E$, $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ khi $t = 0$. a có

$$\alpha_1 = mv_0, \quad \alpha_2 = mgE, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0$$

$$q_1 = v_0 t, \quad q_2 = E - \frac{gt^2}{2}.$$

dụ 7.14. Xét chất điểm tự do khối lượng m chuyển động trong rờng lực có thế năng $V(\vec{r}) = kz - \frac{m\mu}{r}$, ở đây μ, k là hằng số, $= |\vec{r}|$.

Ta sẽ dùng các tọa độ parabôn (ξ, η, φ) để mô tả chuyển động. ữa các tọa độ này và tọa độ Đềcác x, y, z có mối liên hệ

$$x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi, \quad 0 < \xi < +\infty, \quad 0 < \eta < +\infty$$

$$y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad \varphi \quad mod \quad 2\pi. \tag{1}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(\xi+\eta)^2}{4} \to r = \frac{\xi+\eta}{2}. \tag{2}$$

Ta có biểu thức động năng

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = m\left[\frac{\xi+\eta}{4}\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right) + \frac{\xi\eta}{2}\dot{\varphi}^2\right],$$

$$p_\xi = \frac{\partial T}{\partial\dot{\xi}} = \frac{m\dot{\xi}(\xi+\eta)}{2\xi}, \quad p_\eta = \frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}} = \frac{m\dot{\eta}(\xi+\eta)}{2\eta},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = m\xi\eta\dot{\varphi}. \tag{3}$$

Hàm Hamintơn và phương trình Hamintơn - Giacôbi có dạng (7.4)

$$H = \frac{2\xi p_\xi^2 + 2\eta p_\eta^2}{m(\xi+\eta)} + \frac{p_\varphi^2}{2m\xi\eta} - \frac{2m\mu}{\xi+\eta} + \frac{k}{2}(\xi-\eta), \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &+ \frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)^2 + \eta\left(\frac{\partial S}{\partial\eta}\right)^2\right] + \\ &+ \frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2 - \frac{2m\mu}{\xi+\eta} + \frac{k}{2}(\xi-\eta) = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Ở đây rõ ràng φ là tọa độ xyclic và hàm H không phụ thuộc rõ vào thời gian. Do vậy tích phân đầy đủ của phương trình Hamintơn - Giacôbi (5) sẽ được tìm dưới dạng (7.44):

$$S = -Et + \alpha_1\varphi + W_1(\xi) + W_2(\eta). \tag{6}$$

Thay (6) vào (5) ta được

$$\begin{aligned}\frac{2\xi}{m(\xi+\eta)}\left(\frac{dW_1}{d\xi}\right)^2 + \frac{2\eta}{m(\xi+\eta)}\left(\frac{dW_2}{d\eta}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{2m\xi\eta} - \\ - \frac{2m\mu}{\xi+\eta} + \frac{k}{2}(\xi-\eta) = E.\end{aligned} \tag{7}$$

u khi nhân hai vế của (7) với $(\xi + \eta)$, ta viết nó dưới dạng:

$$f_1(\xi, \frac{dW_1}{d\xi}) + f_2(\eta, \frac{dW_2}{d\eta}) = 0,$$

$$f_1 = \frac{2\xi}{m}\left(\frac{dW_1}{d\xi}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{2m\xi} - 2m\mu + \frac{k}{2}\xi^2 - E\xi,$$

$$f_2 = \frac{2\eta}{m}\left(\frac{dW_2}{d\eta}\right)^2 + \frac{\alpha_1}{2m\eta} - \frac{k}{2}\eta^2 - E\eta.$$

các biến ξ và η là độc lập nên các hàm f_1 và f_2 phải là những ng. Nói cách khác, phải có $f_1 = \alpha_2, f_2 = -\alpha_2$. Từ đó tìm được:

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{d\xi} &= \psi_1(\xi, \alpha_1, \alpha_2, E), \\ \psi_1 &= \pm\sqrt{\frac{m}{2\xi}\left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{2m\xi} + 2m\mu - \frac{k}{2}\xi^2 + E\xi\right)}, \\ \frac{dW_2}{d\eta} &= \psi_2(\eta, \alpha_1, \alpha_2, E), \\ \psi_2 &= \pm\sqrt{\frac{m}{2\eta}\left(E\eta - \frac{k}{2}\eta^2 - \alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{2m\eta}\right)}. \end{aligned} \tag{8}$$

ch phân lên sẽ có:

$$\begin{aligned} W_1 &= \int \psi_1(\xi, \alpha_1, \alpha_2, E)d\xi, \\ W_2 &= \int \psi_2(\eta, \alpha_1, \alpha_2, E)d\eta. \end{aligned} \tag{9}$$

các tích phân đầu sẽ tìm được từ các công thức (7.15) :

$$p_\xi = \frac{\partial S}{\partial \xi} = \psi_1, \quad p_\eta = \frac{\partial S}{\partial \eta} = \psi_2, \quad p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \alpha_1, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \varphi + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_1}, \\ \beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial W_2}{\partial \alpha_2}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W_1}{\partial E} + \frac{\partial W_2}{\partial E} - t. \tag{12}$$

Các hệ thức (11), không chứa thời gian t, xác định quỹ đạo của chất điểm trong hệ tọa độ parabôn, còn phương trình (12) cho phép tìm luật chuyển động.

Ví dụ 7.15. Xét chuyển động của con lắc gyrôscôp trong ví dụ 4.3 với hàm Hamintơn: $H = H(q_2, p_1, p_2, p_3)$:

$$H = \frac{1}{2A}\left[p_2^2 + \frac{(p_1 - p_3\cos q_2)^2}{\sin^2 q_2}\right] + \frac{p_3^2}{2I_y} + (m_1l_1 - m_2l_2)g\cos q_2, \tag{1}$$

ở đây q_1 và q_3 là những tọa độ xyclic. Hàm S (7.44) bây giờ có dạng:

$$S = -Et + \alpha_1 q_1 + \alpha_3 q_3 + W(q_2).$$

Để xác định W ta dùng công thức (7.45), thay p_2 trong H ở biểu thức (1) bởi $\dfrac{dW}{dq_2}$, p_1 bởi α_1, và p_3 bởi α_3 :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2A}\left[\left(\frac{dW}{dq_2}\right)^2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_3\cos q_2)^2}{\sin^2 q_2}\right]\\ &+ \frac{\alpha_3^2}{2I_y} + (m_1l_1 - m_2l_2)g\cos q_2 = E.\end{aligned} \tag{2}$$

Đây là phương trình vi phân thường cấp một. Theo các công thức (7.47) ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial E} &= t - t_0,\\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} &= -q_1 + \beta_1,\\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} &= -q_3 + \beta_3.\end{aligned}$$

Ta viết lại phương trình (2) dưới dạng

$$\sin q_2 \frac{dW}{dq_2} = \Bigg(2A\Big[(m_2l_2 - m_1l_1)g\sin^2 q_2 \cos q_2 + (E - \frac{\alpha_3^2}{2I_y})\sin^2 q_2\Big] - (\alpha_1 - \alpha_3\cos q_2)^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

hoặc

$$W = \int D dq_2,$$

$$D = \sqrt{2A\left[(m_2l_2 - m_1l_1)g\cos q_2 + E - \frac{\alpha_3^2}{2I_y}\right] - \frac{(\alpha_1 - \alpha_3\cos q_2)^2}{\sin^2 q_2}}.$$

Cuối cùng ta có:

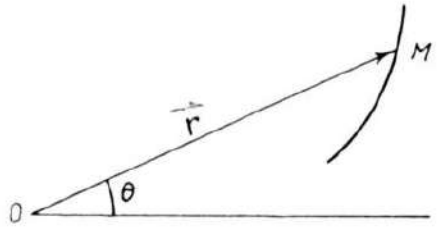
$$\int \frac{A dq_2}{D} = t - t_0,$$

$$-\int \frac{(\alpha_1 - \alpha_3\cos q_2)dq_2}{D\sin^2 q_2} = -q_1 + \beta_1,$$

$$-\int \left[\frac{2A\alpha_3}{I_y} - \frac{2(\alpha_1 - \alpha_3\cos q_2)\cos q_2}{\sin^2 q_2}\right]\frac{dq_2}{D} = -q_3 + \beta_3.$$

Đây là bài toán được đưa về các cầu phương.

Ví dụ 7.16. Khảo sát chuyển động của chất điểm khối lượng $m = 1$ trong trường lực xuyên tâm với thế năng $\Pi(r)$.



Hình 7.2

Quĩ đạo trong trường lực xuyên tâm

Lấy các tọa độ r, θ làm những tọa độ suy rộng. Ta có biểu thức động năng: $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ và do vậy

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad m = 1$$

$$H = T + \Pi(r) = \frac{1}{2}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2) + \Pi(r).$$

Phương trình (7.18) bây giờ có dạng:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 = 2(E - \Pi). \tag{1}$$

Cần phải tìm nghiệm chứa một hằng α tùy ý, ngoài E. Vì rằng tọa độ θ là xyclic, nên theo (7.46) ta sẽ tìm hàm W dưới dạng

$$W = \alpha\theta + R(r). \tag{2}$$

Thay (2) vào (1) ta có

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = 2E - 2\Pi(r) - \frac{\alpha^2}{r^2}. \tag{3}$$

Đặt vế phải của (3) là $f(r)$ và tích phân lên ta được:

$$R = \int_a^r \sqrt{2E - 2\Pi(\xi) - \frac{\alpha^2}{\xi^2}}\, d\xi = \int_a^r \sqrt{f(\xi)}d\xi,$$

ở đây a là nghiệm đơn của phương trình $f(r) = 0$. Trong phần lớn trường hợp, chuyển động sẽ dao động theo r giữa hai nghiệm đơn a và b của phương trình $f(r) = 0$, hơn nữa $f(r) > 0$ với $a < r < b$. Vậy ta có:

$$W = \alpha\theta + \int_a^r \sqrt{2E - 2\Pi(\xi) - \frac{\alpha^2}{\xi^2}}d\xi.$$

Nghiệm của bài toán bây giờ được xác định bởi các phương trình (7.47):

$$t - t_0 = \frac{\partial R}{\partial E} = \int_a^r \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}$$

$$\beta = \theta + \frac{\partial R}{\partial \alpha}$$

hoặc

$$\beta = \theta - \alpha \int_a^r \frac{d\xi}{\xi^2 \sqrt{f(\xi)}}$$

Ví dụ 7.17. Nghiên cứu chuyển động không gian của con lắc gồm chất điểm nặng khối lượng m treo vào sợi dây có chiều dài a không đổi, đầu 0 cố định.

Ta có

$$x = r\cos\varphi = a\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi = a\sin\theta\sin\varphi,\ z = a\cos\theta.$$

Do vậy,

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2),$$

$$\Pi = mga\cos\theta, \quad p_\theta = \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = ma^2\sin^2\theta\dot{\varphi}.$$

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2ma^2}(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}p_\varphi^2) + mga\cos\theta.$$

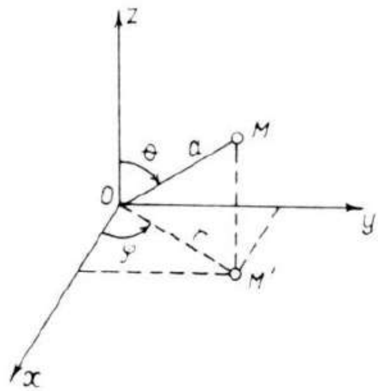
Phương trình (7.18) bây giờ có dạng

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2 = 2ma^2(E - mga\cos\theta). \qquad (1)$$

Vì φ là tọa độ xyclic nên nghiệm của phương trình (1) sẽ được biểu diễn dưới dạng (7.46):

$$W = \alpha\varphi + R(\theta), \qquad (2)$$

trong đó $R(\theta)$ là hàm cần tìm. Thay (2) vào (1) ta tìm được phương trình đối với R:



Hình 7.3
Con lắc cầu

$$\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 = 2ma^2E - 2n^2\cos\theta - \frac{\alpha^2}{\sin^2\theta}, \qquad (3)$$

ở đây $n^2 = m^2ga^3$. Ký hiệu vế phải của (3) qua $f(\theta)$ ta có tích phân đầy đủ W dưới dạng

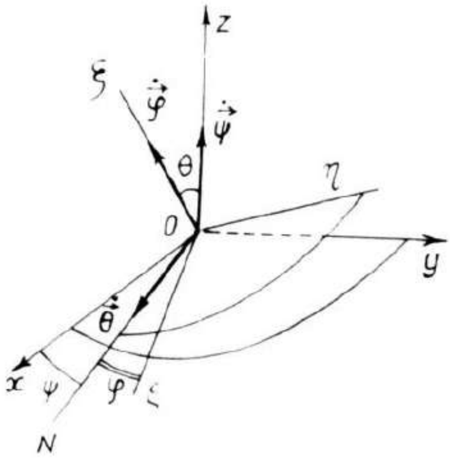
$$W = \alpha\varphi + \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{f(\xi)}d\xi.$$

Cận dưới của tích phân là nghiệm đơn của phương trình $f(\xi) = 0$. Các tích phân của phương trình chuyển động bây giờ có dạng (7.47):

$$t - t_0 = \frac{\partial R}{\partial E} = ma^2\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}},$$

$$\beta = \varphi - \int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{\alpha}{\sin^2\xi\sqrt{f(\xi)}}d\xi.$$

Ví dụ 7.18. **Con quay** là vật rắn tròn xoay quanh một điểm O cố định nằm trên trục đối xứng. Các toạ độ của các điểm của con quay có thể xác định nhờ các góc Ơle θ, φ, Ψ giữa các trục toạ độ cố định $Oxyz$ và trục toạ độ động $O\xi\eta\varsigma$ gắn chặt với con quay. Để đơn giản, ta chọn ba trục chính của Elipxoit quán tính của con quay đối với điểm O làm hệ trục toạ độ động $O\xi\eta\varsigma$. Khi đó, biểu thức động năng T của con quay là



Hình 7.4

Hệ toạ độ động $\xi\eta\varsigma$ gắn với con quay

$$T = \frac{1}{2}A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2}Cr^2,$$

trong đó A, C là các mômen quán tính chính của con quay, p, q, r là những hình chiếu của vận tốc góc tức thời của các vật lên hệ toạ độ động O, ξ, η, ς

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$$

Xem các công thức này trong phần động học vật rắn quay quanh điểm cố định). Do vậy,

$$T = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2,$$

Thế năng của con quay có dạng quen biết

$$\Pi = Mgl\cos\theta$$

Do vậy

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = A\dot{\theta},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta),$$

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\dot{\psi}\sin^2\theta + C\cos\theta(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)$$

và

$$A\dot{\psi}\sin^2\theta = p_\psi - p_\varphi\cos\theta.$$

Vậy là,

$$H = T + \Pi = \frac{1}{2A}p_\theta^2 + \frac{1}{2A\sin^2\theta}(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)^2 + \frac{1}{2C}p_\varphi^2 + Mgl\cos\theta.$$

Phương trình đạo hàm riêng đối với W(7.45) bây giờ có dạng:

$$\frac{1}{A}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{A\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi} - \frac{\partial W}{\partial \varphi}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2$$
$$= 2(E - Mgl\cos\theta). \quad (1)$$

Vì φ và ψ là những tọa độ xyclic nên nghiệm của (1) sẽ tìm dưới dạng:

$$W = \alpha_2\psi + \alpha_3\varphi + R(\theta), \quad (2)$$

trong đó $R(\theta)$ là hàm cần tìm. Thay (2) vào (1) ta sẽ được phương trình đối với R:

$$\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 = 2A(E - Mgl\cos\theta) - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_3\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 - \frac{A}{C}\alpha_3^2. \quad (3)$$

ý hiệu vế phải của (3) bởi $f(\theta)$ ta có biểu thức sau đây của tích
hân đầy đủ

$$W = \alpha_2\psi + \alpha_3\varphi + \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{f(\xi)}d\xi,$$

ong đó θ_0 là nghiệm đơn của phương trình $f(\theta) = 0$.

Nghiệm của bài toán được cho bởi các công thức (7.47)

$$t - t_0 = \frac{\partial R}{\partial E} = A\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}},$$

$$\beta_2 = \psi + \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = \psi - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\alpha_2 - \alpha_3\cos\xi}{\sin^2\xi\sqrt{f(\xi)}}\, d\xi, \tag{4}$$

$$_3 = \varphi + \frac{\partial R}{\partial \alpha_3} = \varphi - \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \frac{A}{C}\alpha_3 - \frac{\cos\xi}{\sin^2\xi}(\alpha_2 - \alpha_3\cos\xi) \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}}.$$

ương trình đầu của (4) cho sự phụ thuộc của θ vào thời gian t,
n phương trình thứ hai của (4) cho mối liên hệ giữa các tọa độ
và θ, nghĩa là vị trí của trục con quay trong không gian. Phương
nh cuối cùng cho liên hệ giữa φ và θ. Thường người ta ít quan
n đến mối liên hệ này.

. PHƯƠNG PHÁP BIẾN THIÊN HẰNG SỐ. CÁC PHƯƠNG ÌNH CHÍNH TẮC CỦA CHUYỂN ĐỘNG BỊ NHIỄU

Xét cơ hệ, chuyển động của nó được mô tả bởi các phương trình
nh tắc Haminton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{7.48}$$

Giả thử đã biết nghiệm của hệ (7.48):

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n), \\ p_i &= p_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n), \\ &(i = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{7.49}$$

trong đó α_i, β_i là những hằng độc lập. Bài toán được đặt ra là xác định nghiệm(chuyển động) của hệ" bị nhiễu" với hàm Hamintơn mới $H_1 = H + H^*$. Nói cách khác là xác định nghiệm của hệ

$$\dot{q}_i = \frac{\partial(H + H^*)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial(H + H^*)}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7.50}$$

Ởđây, sự xuất hiện của hàm H^* là do có những lực nhiễu tác dụng bổ sung lên hệ (7.48).

Dưới đây ta sẽ tìm nghiệm của hệ (7.50) dưới dạng (7.49) với quan niệm rằng α_i, β_i không còn là hằng nữa, mà là những hàm chưa biết của thời gian:

$$\begin{aligned} q_i &= q_i[t, \alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t), \beta_1(t), \ldots, \beta_n(t)], \\ p_i &= p_i[t, \alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t), \beta_1(t), \ldots, \beta_n(t)]. \end{aligned} \tag{7.51}$$

Bây giờ bài toán tìm các hàm q_i, p_i thỏa mãn hệ phương trình (7.50) được đưa về việc xác định các hàm $\alpha_i(t), \beta_i(t)$ trong các biểu thức (7.51). Trước hết, ta hãy tìm các phương trình mà các hàm α_i, β_i phải thỏa mãn. Giả thử rằng các phương trình (7.49)có thể giải ra được đối với các đại lượng α_i, β_i:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n), \\ \beta_i &= \beta_i(t, q_1 \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n). \end{aligned} \tag{7.52}$$

Ta tính các đạo hàm của α_i, và β_i theo thời gian

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_i &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_k} \dot{p}_k \right), \\ \dot{\beta}_i &= \frac{\partial \beta_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \beta_i}{\partial p_k} \dot{p}_k \right), \\ &(i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Kể đến các hệ thức (7.50) ta viết các phương trình này dưới dạng

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_k}\frac{\partial (H+H^*)}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_k}\frac{\partial (H+H^*)}{\partial q_k}\right],$$
$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial \beta_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial \beta_i}{\partial q_k}\frac{\partial (H+H^*)}{\partial p_k} - \frac{\partial \beta_i}{\partial p_k}\frac{\partial (H+H^*)}{\partial q_k}\right],$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

Theo định nghĩa và các tính chất của các móc Poatsông, có thể viết:

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\alpha_i, H + H^*) = \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\alpha_i, H) + (\alpha_i, H^*),$$
$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial \beta_i}{\partial t} + (\beta_i, H + H^*) = \frac{\partial \beta_i}{\partial t} + (\beta_i, H) + (\beta_i, H^*),$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

/ì rằng các hàm (7.52) khi α_i, β_i không đổi là những tích phân của ıệ phương trình (7.48), nên theo các điều kiện (27.1)

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} + (\alpha_i, H) = 0,$$
$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} + (\beta_i, H) = 0,$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

à do vậy

$$\dot{\alpha}_i = (\alpha_i, H^*) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right),$$
$$\dot{\beta}_i = (\beta_i, H^*) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial p_k} - \frac{\partial \beta_i}{\partial p_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right), \tag{7.53}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

ác phương trình (7.53) là những phương trình của chuyển động bị hiễu.

Trong phần đầu của §6.1 đã thấy, nếu có thể tìm nghiệm

$$S = S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$$

(trong đó $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ là những hằng tùy ý) của phương trình Ham intơn - Giacôbi (7.4) thì nghiệm của hệ (7.48) sẽ được xác định bở các hệ thức (7.15), trong đó $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ là những hằng tùy ý Giải các phương trình này đối với q_i và p_i ta cũng sẽ được các biể thức (7.49)

Vì rằng nghiệm của hệ (7.50) được tìm dưới dạng (7.51), nên c thể xem các biểu thức (7.51) như phép biến đổi các biến q_i và p của hệ (7.50) sang các biến mới α_i và β_i. Ta sẽ chứng minh rằn phép biến đổi như vậy là chính tắc. Muốn vậy cần chứng minh rằn phương trình (6.11) với điều kiện 7.4 sẽ được thoả mãn đồng nhất nghĩa là

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - (H + H^*) \equiv \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\dot{\beta}_i - H_1 + \frac{dS}{dt}. \qquad (7.54$$

Ở đây H_1 là hàm Hamintơn mới của các biến mới α_i, β_i. Ta chọ hàm S dưới dạng

$$S = \psi(t, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i,$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i}\dot{\alpha}_i\right) + \frac{\partial\psi}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n}\dot{\alpha}_i\beta_i - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\dot{\beta}_i.$$

Thay $\dfrac{dS}{dt}$ vào (7.54) và kể đến điều kiện (7.15), ta được:

$$-(H + H^*) = -H_1 + \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

nghĩa là phép biến đổi sẽ là chính tắc nếu:

$$H_1 = H + H^* + \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

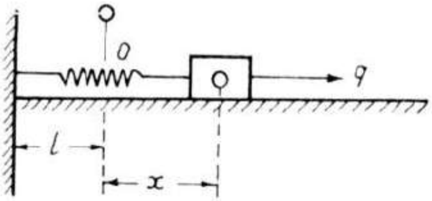
Song, $H + \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ do phương trình (4.7), nên $H_1 = H^*$.

Vậy là, các biến mới α_i, β_i sẽ thỏa mãn các phương trình chính tắc dạng

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial \beta_i}, \qquad \dot{\beta}_i = \frac{\partial H^*}{\partial \alpha_i}, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7.55}$$

Các biến mới α_i, β_i có một tính chất tuyệt diệu: đối với chuyển động không bị nhiễu ($H^* \equiv 0$) chúng có giá trị không đổi, còn đối với chuyển động bị nhiễu ($H^* \not\equiv 0$) chúng là các hàm của thời gian - nghiệm tổng quát của hệ Hamintơn (7.55), trong đó hàm Hamintơn là "năng lượng nhiễu" H^*. Tóm lại, dùng lý thuyết các phép biến đổi chính tắc ta đã thay việc tích phân hệ Hamintơn (7.50) bằng việc tích phân các hệ Hamintơn đơn giản hơn (7.48) và (7.55).

Ví dụ 7.19. Vật nặng khối lượng m được gắn với giá thẳng đứng cố định nhờ lò xo phi tuyến yếu và có thể dịch chuyển theo mặt ngang nhẵn. Xác định chuyển động của vật nặng.



Hình 7.5

Chấn tử phi tuyến dịch chuyển trên mặt ngang

Đặt gốc tọa độ tại điểm O ứng với trạng thái không co giãn của lò xo, trong đó l là độ dài tự nhiên của lò xo. Lấy độ lệch x của vật nặng từ gốc tọa độ làm tọa độ suy rộng q. Ta có động năng T của vật và lực suy rộng Q như sau:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2, \qquad Q = -cq - \gamma q^3,$$

trong đó c, γ là các hệ số cứng tuyến tính và phi tuyến của lò xo, $|\gamma| \ll 1$. Biểu thức thế năng Π của hệ có dạng

$$\Pi = -\int_0^q Q dq = \frac{1}{2}cq^2 + \frac{\gamma}{4}q^4.$$

Hàm Hamintơn của hệ này sẽ là:

$$H_0 = T + \Pi = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}cq^2 + \frac{\gamma}{4}q^4 = H + H^*,$$

trong đó

$$H = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}cq^2, \quad H^* = \frac{\gamma}{4}q^4.$$

Khi $\gamma = 0$ (lò xo tuyến tính) khối lượng m sẽ thực hiện dao động điều hòa theo luật

$$q = \alpha \sin kt + \beta \cos kt, \quad k^2 = \frac{c}{m}, \tag{1}$$

α, β là những hằng tùy ý.

Để giải bài toán phi tuyến ($\gamma \neq 0$), ta tìm chuyển động dưới dạng (1), nhưng coi α, β là những hàm thỏa mãn phương trình (7.55). Ta có:

$$H^* = \frac{\gamma}{4}(\alpha \sin kt + \beta \cos kt)^4.$$

Do vậy,

$$\frac{\partial H^*}{\partial \alpha} = \gamma \sin kt(\alpha \sin kt + \beta \cos kt)^3,$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial \beta} = \gamma \cos kt(\alpha \sin kt + \beta \cos kt)^3,$$

và các phương trình (1) có dạng

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\gamma\cos kt(\alpha\sin kt + \beta\cos kt)^3,\\ \dot{\beta} &= \gamma\sin kt(\alpha\sin kt + \beta\cos kt)^3.\end{aligned} \tag{2}$$

Vì γ rất nhỏ so với đơn vị nên α, β biến thiên chậm theo thời gian. Do vậy ta thay thế vế phải của (2) bằng các giá trị trung bình của chúng theo thời gian:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\gamma}{2\pi k}\int_0^{2\pi}\cos\theta(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)^3 d\theta,$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\gamma}{2\pi k}\int_0^{2\pi}\sin\theta(\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta)^3 d\theta.$$

Tính tích phân ở vế phải ta được

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{3\gamma\beta}{8k}(\alpha^2 + \beta^2),\\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{3\gamma\alpha}{8k}(\alpha^2 + \beta^2).\end{aligned} \tag{3}$$

Chia phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất ta được:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Từ đó suy ra $\alpha^2 + \beta^2 = A^2 = const$. Ký hiệu $\Omega = 3\gamma A^2/8k$, các phương trình (3) viết được dưới dạng

$$\dot{\alpha} = -\Omega\beta, \qquad \dot{\beta} = \Omega\alpha$$

Nghiệm của các phương trình này là

$$\alpha = b\cos\Omega t + a\sin\Omega t, \quad \beta = b\sin\Omega t - a\cos\Omega t, \tag{4}$$

trong đó a, b là các hằng. Thay các giá trị tìm được của α, β vào (1) ta được

$$q = a\sin(k+\Omega)t + b\cos(k+\Omega)t. \tag{5}$$

Từ (4) suy ra

$$A^2 = \alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2,$$

nghĩa là A là biên độ của dao động phi tuyến. Vì vậy tần số dao động phi tuyến $k + \Omega$ phụ thuộc vào biên độ dao động.

7.4. SỰ TƯƠNG TỰ GIỮA CƠ HỌC CỔ ĐIỂN CỦA HẠT VÀ QUÁ TRÌNH SÓNG. PHƯƠNG TRÌNH SRÔĐINGƠ

Ngoài việc cho nghiệm của các phương trình chính tắc Hamintơn (7.1), ý nghĩa quan trọng của phương trình Hamintơn - Giacôbi còn ở chỗ nó cho thấy sự tương tự giữa Cơ học cổ điển của hạt và quá trình sóng, đóng vai trò quan trọng việc giải thích các tính chất sóng của các hạt trong Cơ học lượng tử.

Ta hãy xét sự tương tự này qua ví dụ của một hạt tự do chuyển động trong trường lực thế, dừng $U(\vec{r})$.

Trong hệ tọa độ Đềcac x, y, z ta có biểu thức động năng T:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Do vậy

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

và

$$H = T + U(\vec{r}) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(\vec{r}),$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Phương trình Hamintơn - Giacôbi (7.16) bây giờ có dạng

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + U(\vec{r}) = 0. \quad (7.50)$$

ghiệm của phương trình này có thể biểu diễn dưới dạng (7.17):

$$S(\vec{r}, t) = -Et + W(\vec{r}).$$

hương trình Haminton - Giacôbi "cải biên" (7.18) sẽ là

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] + U(\vec{r}) = E$$

oặc

$$(\nabla W)^2 = 2m[E - U(\vec{r})], \tag{7.57}$$

đây dùng ký hiệu

$$\nabla W = \frac{\partial W}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial W}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\vec{k}.$$

ới đây, $S(\vec{r}, t)$ được gọi là "hàm tác dụng", còn $W(\vec{r})$ được gọi "tác dụng thu gọn".

Ta gọi *mặt đẳng tác* là quỹ tích hình học của các điểm không n, tại đó tác dụng S của hạt lấy giá trị không đổi nào đó, nghĩa

$$S(\vec{r}, t) = -Et + W(\vec{r}) = const. \tag{7.58}$$

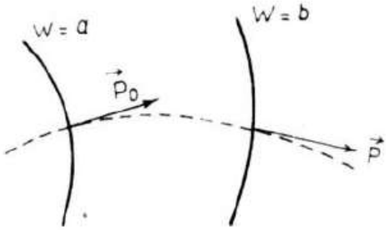
biểu thức này rõ ràng là theo thời gian các mặt đẳng tác dịch yển trong không gian, tại mỗi thời điểm trùng với những mặt đó của tác dụng thu gọn $W = const$. Vậy là, chuyển động của $W = const$ tương tự như sự lan truyền mặt trước của sóng nh 7.5). Vận tốc của sóng này khác nhau đối với các điểm khác u của mặt $S = const$ và được xác định bởi biểu thức $u = dl/dt$, g đó dl là khoảng cách mà sóng đi qua trong thời gian dt theo ng vuông góc với mặt S.

iểu diễn đẳng thức (7.58) dưới dạng

$$-Et + W[\vec{r}(l)] = const$$

và đạo hàm nó theo thời gian

$$-E + \nabla W.\frac{d\vec{r}}{dl}.\frac{dl}{dt} = 0.$$



Hình 7.6
Mặt đẳng tác

Chú ý rằng $\dfrac{d\vec{r}}{dl} = \dfrac{\nabla W}{|\nabla W|}$ và $\nabla W = \vec{p}$, ta có

$$p_x = \frac{\partial W}{\partial x},\ p_y = \frac{\partial W}{\partial y},\ p_z = \frac{\partial W}{\partial z},$$
$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = m\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = mv = |\nabla W|,$$
$$u = \frac{dl}{dt} = \frac{E}{\nabla W \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dl}} = \frac{E}{\nabla W \cdot \dfrac{\nabla W}{|\nabla W|}} = \frac{E}{|\nabla W|} = \frac{E}{p} = \frac{E}{mv}. \tag{7.59}$$

Trong chuyển động của mặt đẳng tác W, mỗi điểm của nó d
chuyển theo đường cong vuông góc cả với hai mặt W và S, nghĩa l
theo đường cong với tiếp tuyến hướng theo hướng của véctơ xun
$\vec{p}$ của hạt.

Vậy là, quỹ đạo của hạt trùng với đường cong vạch ra bởi mộ
điểm nào đó trong số các điểm của mặt đẳng tác S khi mặt này c
chuyển. Điều đó chứng tỏ rằng chuyển động của hạt cổ điển trê
quỹ đạo cũng tương tự như sự lan truyền các tia sáng trong Quan

hình học. Cũng tương tự như quỹ đạo của hạt cổ điển, tia sáng là đường do một điểm nào đó của mặt đẳng pha (hoặc là mặt tiền của sóng điện từ) vạch ra khi mặt này di chuyển trong không gian. Do đó, ta có nhận xét sau đây: Phương trình (7.57) xác định quỹ đạo của hạt cổ điển trùng về dạng với phương trình Âykônan trong Quang hình học:

$$(\nabla L)^2 = n^2(\vec{r}). \tag{7.60}$$

đây L là Âykônan và $n(\vec{r})$ là chỉ số khúc xạ của môi trường không ồng nhất về mặt quang học trong đó sóng điện từ được lan truyền; ức là tỷ số bằng vận tốc của ánh sáng trong chân không chia cho ận tốc của ánh sáng trong môi trường đã cho.

Có thể nhận được phương trình (7.60) từ phương trình sóng

$$\Delta f - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \tag{7.61}$$

ong đó $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, còn f là thành phần bất kỳ của ờng độ $\vec{\varepsilon}$ của điện trường và cảm ứng $\vec{B}$ của từ trường sóng điện . Nếu n là đại lượng không đổi, thì một trong những nghiệm của ương trình (7.61) là sóng đơn sắc phẳng:

$$f(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)},$$

đây A, ω là biên độ và tần số của sóng; còn $\vec{k}$ là vectơ sóng, chỉ ớng lan truyền sóng, giá trị tuyệt đối của nó có thể biểu diễn dưới ng

$$k = \frac{n\omega}{c} = n\frac{2\pi}{cT_1} = k_0 n, \qquad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

là độ dài sóng trong chân không, T_1 là chu kỳ sóng, $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega}$).

Nếu như chỉ số khúc xạ môi trường n là hàm của $\vec{r}$ thì nghiệm phương trình (7.61) phải tìm dưới dạng

$$f(\vec{r}, t) = A(\vec{r})e^{i[k_0 L(\vec{r}) - \omega t]}, \tag{7.62}$$

ở đây đại lượng $L(\vec{r})$ được gọi là Âykônan hoặc là độ dài quang học của đường đi của tia sáng.

Các tính toán cho thấy rằng

$$-\frac{n^2(\vec{r})}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = k_0^2 n^2(\vec{r}) f; \tag{7.63}$$

$$\Delta f = \left[\frac{\Delta A}{A} - k_0^2(\nabla L)^2\right] f + ik_0\left[\Delta L + \frac{2\nabla A\nabla L}{A}\right] f. \tag{7.64}$$

Thay các biểu thức (7.63), (7.64) vào (7.61) và cho bằng không các phần thực và phần ảo của biểu thức thu được, ta sẽ được hệ phương trình để xác định biên độ A và Âykônan L của sóng điện từ (7.62):

$$\begin{aligned} \Delta A + k_0^2[n^2(\vec{r}) - (\Delta L)^2]A = 0, \\ A\Delta L + 2\bigtriangledown A \bigtriangledown L = 0. \end{aligned} \tag{7.65}$$

Ta viết phương trình đầu của (7.65) dưới dạng

$$\left(\frac{\lambda_0}{2\pi}\right)^2 \Delta A + [n^2(\vec{r}) - (\nabla L)^2]A = 0. \tag{7.66}$$

Người ta gọi là **xấp xỉ quang hình học** trường hợp khi có thể bỏ qua sự biến đổi của chỉ số khúc xạ của môi trường ở những khoảng cách cỡ độ dài sóng, nghĩa là khi độ dài sóng nhỏ có thể bỏ qua được. Về hình thức, điều này có nghĩa là độ dài sóng $\lambda_0 \to 0$. Thực hiện trong (7.66) việc chuyển sang giới hạn như vậy ta sẽ được phương trình Âykônan (7.60). Trong trường hợp giới hạn đó, nghiệm của phương trình sóng (7.61) có thể viết gần đúng dưới dạng:

$$f(\vec{r}, t) = Ae^{i[k_0 L(\vec{r}) - \omega t]}, \tag{7.67}$$

trong đó biên độ A được xem như không phụ thuộc $\vec{r}$. Khi đó các mặt

$$k_0 L(\vec{r}) - \omega t = const \tag{7.68}$$

ợc gọi là **những mặt đẳng pha**. Khi mặt (7.68) dịch chuyển ong không gian, tất cả các điểm của nó vạch nên những đường ng vuông góc với mặt đã cho và được gọi là các tia. Hướng của được xác định bởi vectơ sóng $\vec{k} = k_0 \nabla L$. Biểu diễn đẳng thức 68) dưới dạng

$$k_0 L[\vec{r}(l)] - \omega t = const$$

đạo hàm nó theo thời gian, ta sẽ được vận tốc lan truyền v của t tiền của sóng điện từ:

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{\omega}{k_0 |\nabla L|} = \frac{\omega}{k}. \tag{7.69}$$

So sánh các công thức (7.57), (7.58) và (7.59) với các công thức 60), (7.68) và (7.69), dễ dàng thiết lập sự tương tự giữa các đại ng đặc trưng cho chuyển động của các hạt cổ điển và sự lan ền các tia sáng:

$$\begin{aligned}
&S(\vec{r}, t) \sim k_0 L(\vec{r}) - \omega t, \\
&W(\vec{r}) \sim k_0 L(\vec{r}), \\
&E \sim \omega, \quad \vec{p} \sim \vec{k}, \\
&2m[E - U(\vec{r})] \sim n^2(\vec{r}).
\end{aligned} \tag{7.70}$$

ể cho có sự tương ứng đầy đủ giữa các đại lượng đứng ở vế với các đại lượng đứng ở vế phải của các đẳng thức (7.70), cần nhân các vế trái của các đẳng thức đó với một hằng số có thứ ên của tác dụng. Trong Cơ học lượng tử, đó là hằng số Plăng Planck) $\hbar = 1,054.10^{-34} J.c.$

 tương tự trên đây giữa Cơ học cổ điển và Quang hình học đã Hamintơn thiết lập vào năm 1834. Tuy nhiên, ý nghĩa vật lý ó vẫn chưa được làm rõ trước khi Cơ học lượng tử hiện đại i. Chỉ đến năm 1926 Đờbrơi (Louis de Broglie) và Srôđingơ n Schrödinger) mới nêu ra rằng ý nghĩa thực sự của sự tương tự Cơ - Quang là ở chỗ nó chỉ ra sự tồn tại của các tính chất sóng ở các đối tượng vật chất bên cạnh các tính chất hạt.

Theo Cơ học lượng tử phi tương đối, tính chất của vật thể vi mô bất kỳ chuyển động trong trường lực thế $U(\vec{r})$ được mô tả bởi một hàm sóng nào đó $\psi(\vec{r},t)$ - nghiệm của phương trình chuyển động trong Cơ lượng tử

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U(\vec{r})\psi. \quad (7.71)$$

Phương trình (7.71) được gọi là **phương trình Srôđingơ**. Ý nghĩa vật lý của hàm ψ là ở chỗ đại lượng $|\psi|^2/dV$ cho xác suất phát hiện ra vi hạt trong một yếu tố thể tích dV của không gian.

Cuối cùng, ta sẽ chỉ ra rằng khi đến giới hạn $\hbar \to 0$, phương trình Srôđingơ (7.71) sẽ chuyển thành phương trình Hamintơn - Giacôbi (7.56). Thực vậy, tương tự như biểu thức (7.67), khi $\hbar \to 0$ ta có thể biểu diễn hàm sóng của vi hạt dưới dạng

$$\psi(\vec{r},t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}S(\vec{r},t)}.$$

Hơn nữa, có thể chỉ ra rằng

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial t}\psi \quad (7.72)$$

và

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = \left[\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 - \frac{i\hbar}{2m}\Delta S\right]\psi. \quad (7.73)$$

Thay các biểu thức (7.72), (7.73) vào (7.71) ta được phương trình

$$-\frac{\partial S}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + U(\vec{r}) - \frac{i\hbar}{2m}\Delta S\right]\psi$$

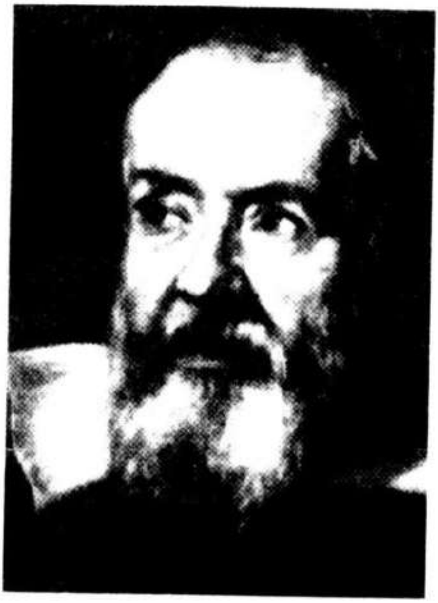
hoặc

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + U(\vec{r}) - \frac{i\hbar}{2m}\Delta S = 0. \quad (7.7$$

õ ràng là phương trình (7.74) và cùng với nó là phương trình rôđingơ (7.71) khi $h \to 0$ sẽ chuyển thành phương trình Hamintơn Giacôbi (7.56). Sự tồn tại của việc chuyển giới hạn từ phương ình Srôđingơ sang phương trình Hamintơn - Giacôbi cho ta cơ sở ể xem cơ học Niutơn như trường hợp giới hạn của cơ học lượng r, thích hợp cả cho việc mô tả chuyển động của các vật thể vi mô ing như vĩ mô.

CHÂN DUNG MỘT SỐ NHÀ CƠ HỌC

...alilê(Galileo Galilei 1564-1642), người Italia.



...alilê dự định theo học ...h Y, song các công ... khoa học của Oclit ...lid) và Acsimet (Archi...es) đã hấp dẫn Ông ... Ông trở thành giáo ...án học.

...alilê nghiên cứu quy ...chuyển động của con ... chứng minh gia tốc ...g đối của các vật thể ...uống mặt đất. Ông ...ám phá ra nhiều quy ... chuyển động, tuy ... không đưa ra được ...g công thức định lượng. ...ường cônic được biết ...ừ nhiều năm về trước đã được đưa vào ứng dụng dưới thời ...: Đường parabôn trong quỹ đạo bay của các viên đạn và đường ... trong chuyển động của các vật thể vũ trụ.

...ững quan điểm về vũ trụ của Galilê thời đó bị nhà thờ coi là ...o và ở tuổi 73 Ông đã bị kết án tù chung thân, bị quản thúc. ...mất vào năm 1642 trong trạng thái đau yếu, mù loà.

2. **Niutơn (Isaac Newton, 1642-1727), người Anh.**

Niutơn sinh đúng vào ngày lễ Nôen năm 1642- năm mất của Galilê. Ông vào học tại trường Đại học Cambridge, nước Anh, năm 1661. Hoá học là ngành học đầu tiên mà Niutơn yêu thích và yêu thích suốt đời. Tuy vậy, Ông nghiên cứu các công trình toán học của Ơclit và làm quen với các công trình khoa học của Galilê, Phecma (Fermat) và Huyghen (Huygens). Trong một bức thư gửi cho Huc (Robert Hooke) Niutơn viết "Nếu tôi nhìn được xa hơn Đềcác, thì đó là nhờ tôi đã đứng trên vai người kh lồ".

Niutơn đã khái quát hoá và thống nhất các ý tưởng của Ga về chuyển động cơ học và phát biểu thành các định luật, mà này chúng ta gọi là các định luật Niutơn. Ông cũng đã phát b định luật hấp dẫn giữa hai vật thể vũ trụ, theo đó lực hấp dẫn t nghịch với bình phương khoảng cách giữa hai vật .Vào năm 16 khi tính toán kiểm tra định luật hấp dẫn của mình cho trường mặt trăng/ trái đất , Ông đã tìm ra bán kính của trái đất.

Do những bất đồng với Huc (người đã phát minh ra định về quan hệ giữa lực và biến dạng của vật thể đàn hồi, đã sáng ra kính thiên văn) về công trình màu sắc của ánh sáng. Niutơn yết định không công bố các phát minh của mình. Sau, nhờ sự ên trì của Halây (Edmond Halley, 1656-1742, người đã khám phá o chối Halây) mà công trình quan trọng nhất của Niutơn "Các uyên lý toán học của khoa học tự nhiên" lần đầu tiên được xuất n vào năm 1687. Niutơn mất ngày 20 tháng 3 năm 1727.

Ơle (Leonhard Euler, 1707-1783), người Thụy sĩ.

Ơle sinh ngày 15 tháng năm 1707 tại thành phố xen (Basel). Tại trường i học Baxen, Ông theo c các ngành thần học, ên văn học, vật lý, các ôn ngữ phương đông và án học. Về toán học, ng đã được Becnuli (Johann Bernoulli, 1667-1748), c biệt quan tâm, giúp , dạy thêm mỗi tuần một . Ông đã kết bạn thân i các con của Becnuli aniel và Nikolaus rnoulli). Năm 17 tuổi

g đỗ thạc sĩ. Năm 1727 Ơle đến thành phố Xanh Pêtecbua Petersburg) của Nga, và đến năm 1733, ở tuổi 26, ông đã trở nh nhà toán học chủ chốt của Viện Hàn Lâm Khoa Học Nga.

Một trong những công trình khoa học quan trọng nhất của Ơle uộc về Cơ học. Lần đầu tiên, các phép tính giải tích đã được ứng ng trong cơ học, mở ra một kỷ nguyên mới cho ngành khoa học y. Đặc biệt, Ơle đã nghiên cứu về Cơ học của các vật rắn, đã đề ra phương pháp xấp xỉ để giải bài toán ba vật thể (trái đất , mặt trăng, mặt trời). Thời kỳ này Ông bị hỏng mắt phải.

Năm 1740 Ơle đến làm việc tại Viện Hàn Lâm Khoa Học Béclin, trong 26 năm, quan tâm đến các vấn đề ứng dụng như Thuỷ lợi, Đạo hàng v.v...Năm 1766, ở tuổi 59, Ơle quay trở lại Xanh Pêtecbua, được nữ hoàng Catêrin (Catherine) rất trọng dụng. Chẳng bao lâu sau đó Ông bị mù cả hai mắt.

Trong lịch sử, Ơle được xem là nhà toán học có nhiều công trình nghiên cứu nhất. Ông đã công bố cả thảy 886 cuốn sách và các công trình toán học, tính trung bình là 800 trang mỗi năm. Trong suốt gần nửa thế kỷ sau khi Ông qua đời, các công trình nghiên cứu của Ông vẫn còn tiếp tục được công bố tại Viện Hàn Lâm Khoa Học Xanh Petecbua. Các ký hiệu toán học do Ông đề xuất vẫn còn được dùng cho tới tận ngày nay.

4. Đalămbe (Jean le Rond D' Alembert, 1717-1783), người Pháp.

Cũng như Ơle và Becnuli, Đalămbe được học về luật, y, khoa học tự nhiên và toán học. Một trong các việc lớn đầu tiên được hoàn thành của Ông là cộng tác với Điđơrô (Denis Diderot, 1713-1784) để soạn thảo Từ điển bách khoa gồm 28 tập, trong đó Đalămbe phụ trách về phần Khoa học tự nhiên và Toán học.

Năm 24 tuổi, Đalămbe được bầu làm thư ký và u này trở thành Thư ký suốt đời của Viện Hàn Lâm Khoa Học áp. Một trong những phát minh đầu tiên của Đalămbe là Lôgarit a các số âm, mà về sau cùng với Ơle, Ông đã chỉ ra đó là các số ức. Đalămbe còn nghiên cứu về Toán học giải tích, đưa ra khái ệm về giới hạn, về đạo hàm. Ông có những đóng góp quan trọng ng sự phát triển của Động lực học.

Lagrăng (Joseph Louis Lagrăng, 1736-1813), người Pháp.

Thời niên thiếu Lagrăng say mê Toán học. Năm tuổi Ông đã trở thành o sư toán học tại trường áo binh. Trong thời gian Ông đã có những công nh về phép tính biến phân, cực trị của các phiếm m và được Ơle nhiệt liệt n nghênh và nâng đỡ. nh Ơle đã đề nghị Lagrăng gười tiếp tục công việc mình tại Viện Hàn Lâm oa Học Beclin, khi Ơle Đức sang Nga, 1766. răng sống ở Đức 20 n, sau đó 1786 Ông sang Pari, trở thành giáo sư của Đại học h khoa Pari.

Cuốn sách "Cơ học giải tích" xuất bản vào năm 1788 là công h có giá trị nhất của Lagrăng. Ở đây, công cụ toán học giải tích được phát huy đầy đủ nhất để nghiên cứu Cơ học. Nhờ phép biến phân, Lagrăng đã trình bày thống nhất được toàn bộ Cơ học và cuốn sách nói trên có thể được ví như "Một bài thơ kho học" như lời nhân xét của Hamintơn

6. Gauxơ (Johann Rriedrich Carl Gauss, 1777-1859), ngườ Đức.

Gauxơ sinh ngày 30 tháng tư năm 1777, nhận học vị tiến sĩ lúc 22 tuổi, năm 1799. Từ 1807 cho đến cuối đời, Ông làm giám đốc Đài thiên văn Guêt-tinh-gen (Göttingen).

Trong luận văn tiến sĩ của mình, Ông đã chứng minh một định lý cơ bản của Đại số học: Mỗi phương trình đại số bậc n có n nghiệm. Trong các năm 1821 - 1848 Ông làm cố vấn khoa học cho chính phủ trong chương trình trắc đạc. Ông nghiên cứu các mặt cong, các đường trắc địa, phương pháp bình phương tối thiể hình học vi phân.

Trong Cơ học, Gauxơ quan tâm đến bài toán cực trị, đưa r nguyên lý cực trị của Cơ học, nguyên lý cưỡng bức tối thiểu.

Cũng như Niutơn, Gauxơ không thích công bố các phát minh củ mình. Ông ham mê nghiên cứu khoa học chỉ bởi tính hiếu kỳ, s ham hiểu biết, chứ ít nghĩ đến chuyện công bố kết quả nghiên cứ Ông thường ghi chép chúng trong các cuốn nhật ký và sau khi Ôn mất, nhiều phát minh của Ông mới được công bố.

. Hamintơn (William Rowan Hamilton, 1805-1865), người Ai-len

Thủa nhỏ, Hamintơn rất ay mê học ngoại ngữ và iết nhiều thứ tiếng: Hy p, Latin, Batư... Năm 7 tuổi Ông đã thông thạo ác phép tính vi, tích phân. ng đọc các công trình hoa học của Niutơn và agrăng và có những phát inh cơ bản về Quang học. ăm 18 tuổi Ông vào đại ọc và đã nhanh chóng trở ên nổi tiếng. Người ta áo nhau rằng có một iutơn thứ hai xuất hiện. ào năm 22 tuổi Ông được

yển chọn làm giáo sư về Thiên văn học, vượt qua nhiều nhà thiên n nổi tiếng lúc ấy. Ở tuổi 32 Ông được bầu làm Chủ tịch Viện Hàn m Khoa Học Ai-len. Ông là người nước ngoài đầu tiên được bầu n Viện sĩ Viện Hàn Lâm Khoa Học Quốc gia của Hoa kỳ (thành o năm 1863).

Cơ học giải tích của Lagrăng đã được Hamintơn phát triển lên ột tầm cao mới.

Giacôbi (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851), người Đức

Thời trẻ Giacôbi quan tâm đến các vấn đề Triết học và Toán học. ng rất say mê với nghề dạy học và trở thành người thầy toán học p dẫn nhất thời đó. Ông đậu tiến sĩ năm 21 tuổi, sau đó giảng y toán tại Đại học Beclin. Ông gặp Hamintơn vào năm 1842 và rất vui mừng được tiếp tục công việc nghiên cứu của Hamintơn về Động lực học.

Giacôbi đã có những cống hiến quan trọng vào Lý thuyết các hàm enliptic, Hàm biến phức, Lý thuyết các định thức. Trong Động lực học, Ông là người đầu tiên đứng sau Lagrăng và Hamintơn. Phương trình Hamintơn-Giacôbi đóng vai trò rất quan trọng trong Cơ học giải tích và Cơ học lượng tử.

Ông mất năm 47 tuổi vì bệnh đậu mùa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

..йзерман М.А., Классическая Механика, Изд. /Наука/, Москва 974

..утенин Н.В. Фуфаев Н.А., Введение в Аналитическую Механику. ..зд. /Наука/, Москва 1991.

..ильке В.Г., Теоретическая Механика, Изд. МГУ. 1998.

..антмахер Ф.Р., Лекции по Аналитической Механике, Москва, ..зд. /Наука/, 1978.

..олубев Ю.Ф., Основы Теоретической Механики. Изд. МГУ, ..осква 2000.

..ирнов Н.И., Классическая Механика, Москва, 1980.

..уравлев В.Ф., Курс Теоретической Механики, Москва 1995.

..nczos C., The Variational Principles of Mechanics, University of ..oronto Press, 1966.

..урье А.И. Аналитическая Механика, Москва, 1961.

..ARS L.A., A treatise on Analytical Dynamics - Heinemann, London ..964.

..оляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П., Теоретическая ..еханика. Высшая Школа, Москва 2000.

..barrok B., Rimrott F.P.J., Variational Methods and Complementary ..ormulations in Dynamics, Kluwer Academic Publishers, 1994.

13. Тарг-С.М., Кратцкий Курс Теоретической Механики, /Вокмаснсикда/, Москва 1996.

14. Четаев Н.Г., Теоретическая Механика, Москва, Наука 198

15. Đào Huy Bích, Phạm Huyễn. Cơ học lý thuyết, NXB Đại học Q gia Hà Nội 1999.

16. Nguyễn Văn Đạo và các tác giả khác. Cơ học lý thuyết, NXB học, Hà Nội 1969.

17. Đỗ Sanh, Cơ học Tập 2, Động lực học, NXB Giáo dục, 1996.

18. Bùi Tường, Cơ học giải tích, NXB Đại học, Hà Nội 1971.

MỤC TỪ TRA CỨU

A

B

C

D

Đ

G

H

L

M

N

P

T