

Giải bài hạt mưa

Mô hình của bài tập mưa rơi:

1. Không có tác dụng của gió, vì thế hạt mưa sẽ rơi thẳng.
2. Hạt mưa to ra vì nhận được khối lượng nước bổ sung khi quét qua một thể tích mây hơi nước. Xét trong một thời gian chuyển động rất nhỏ và hạt mưa coi như không đổi về khối lượng, tức là bán kính không đổi trong khoảng thời gian rất nhỏ.



Hiện tượng: Hạt mưa sẽ quét qua một thể tích mây hơi nước là $dV = \pi r^2 v dt$

3. Thực tế, do nhận được khối lượng hơi nước trong không khí nên hạt mưa to dần ra, nên kích cỡ hạt mưa rơi sẽ có dạng



Xét khối lượng nước nhận thêm : là khối lượng hơi nước với khối lượng riêng ρ_0 :

$$dm = \pi \rho_0 r^2 v dt$$

Khối lượng nước chính là khối lượng hạt nước được nhận thêm, xét tại thời điểm đó, khối lượng của hạt nước vẫn là :

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

Và biến thiên khối lượng vi phân:

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr$$

Vì thế, dễ có:

$$dm = 3m \frac{dr}{r}$$

Đẳng thức thông qua phương trình biến thiên khối lượng, khối lượng giọt nước tăng lên chính là của lượng hơi nước nhập vào:

$$\begin{aligned} \pi \rho_0 r^2 v dt &= 4\pi r^2 \rho dr \\ v &= \frac{4\rho}{\rho_0} \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

Nhận thấy vận tốc rơi của giọt nước tỉ lệ với độ biến đổi bán kính theo một hằng số, tức là dạng giọt nước khi rơi là hình nón

Áp dụng định lí biến thiên động lượng:

$$\vec{F} = \frac{d(\vec{p})}{dt} \text{ bỏ dấu vector : } F = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

Cần rất cẩn thận trong khâu bỏ dấu vector (tương đương với chiếu lên trục z)

Dễ thấy F ở đây chính là trọng lượng của giọt nước, $F = mg$

$$\begin{aligned} mg &= m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \\ mg &= m \frac{4\rho}{\rho_0} \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{4\rho}{\rho_0} \frac{dr}{dt} 3 \frac{m}{r} \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

Loại bỏ m

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{4\rho} g &= \frac{3\dot{r}^2}{r} + \ddot{r} \\ \frac{\rho_0}{4\rho} gr - 3\dot{r}^2 - \ddot{r} &= 0 \end{aligned}$$

Nhận thấy, kết quả của vế phải là một hằng số, đây gọi là phương trình vi phân phi tuyến tính bậc 2 kết hợp với điều kiện đầu khi tại $t = 0$ kích thước hạt mưa không đáng kể, tức là $r(0) = 0$, nhận hàm $r(t)$ là hàm

$$r(t) = At^2 + B$$

Với $B = 0$, khi đó

$$\frac{\rho_0}{4\rho}g = \frac{3\dot{r}^2}{r} + \ddot{r} = \frac{3 \cdot 4A^2t^2}{At^2} + 2A = 14A$$

Vậy

$$A = \frac{\rho_0 g}{56\rho}$$

$r(t)$ có dạng:

$$r(t) = \frac{\rho_0 g}{56\rho}t^2$$

Dùng $v = \frac{4\rho}{\rho_0} \frac{dr}{dt}$, tìm được gia tốc:

$$a = \dot{v} = \frac{4\rho}{\rho_0} \frac{\rho_0 g}{28\rho} = \frac{g}{7}$$

Tự làm ý 4.

Gud luck !!!