

# Chiết suất biến đổi

log

## 1 Chiết suất phẳng

### Bài 1: 2 SPhO 2014

I. Một thùng đựng nước muối có đáy hình vuông cạnh dài 3 m. Thành bên của thùng hấp thụ hoàn toàn ánh sáng, đáy thùng bằng thủy tinh có độ dày không đáng kể có thể bỏ qua. Độ sâu của nước trong thùng là 1 m. Thùng được đặt nằm yên trong thời gian dài. Khi đó, nồng độ muối trong thùng không đồng đều, mà tăng theo chiều sâu. Nước muối nặng hơn nước tinh khiết nên chiết suất của nước muối trong thùng cũng tăng theo chiều sâu. Giả thiết rằng chiết suất của nước trong thùng ở bề mặt là  $n_0 = 1.3$  và tăng theo chiều sâu với tốc độ tăng  $\alpha = 0.05 \text{ m}^{-1}$ . Không khí bao quanh thùng có chiết suất  $n_a = 1$ .

Một nguồn sáng nhỏ đặt ở tâm của đáy thùng, phát ánh sáng ra mọi hướng.

a. Để đơn giản, giả thiết rằng nước muối đồng nhất và có chiết suất  $n_0$ . Hãy tính diện tích bề mặt nước được chiếu sáng, nếu nhìn bề mặt nước từ phía trên xuống.

b. Xét trường hợp thực tế khi nước có nồng độ muối không đồng nhất đã trình bày ở trên. Hãy xác định điều kiện đối với góc phát ra của tia sáng ở đáy thùng để tia sáng có thể ló ra khỏi bề mặt nước. Phác họa đường đi của tia sáng không thỏa mãn điều kiện đó.

II. Xét không khí ở phía trên mặt đường cao tốc dưới ánh nắng mùa hè. Trên mặt đường, nhiệt độ không khí là  $T_h = 60^\circ\text{C}$ . Lên cao, nhiệt độ giảm dần. Từ độ cao 1 m trở lên, không khí mát hơn và có nhiệt độ  $T_c = 30^\circ\text{C}$ . Chiết suất  $n(T)$  của không khí là một hàm của nhiệt độ và liên quan đến mật độ không khí  $\rho(T)$  theo hệ thức

$$n(T) - 1 \sim \rho(T).$$

Ở đây,  $T$  là nhiệt độ tuyệt đối của không khí. Giả thiết rằng mật độ không khí tỷ lệ nghịch với nhiệt độ, áp suất không khí như nhau tại mọi điểm và bằng 1 atm. Chiết suất không khí ở nhiệt độ  $15^\circ\text{C}$  và áp suất 1 atm là 1.000276.

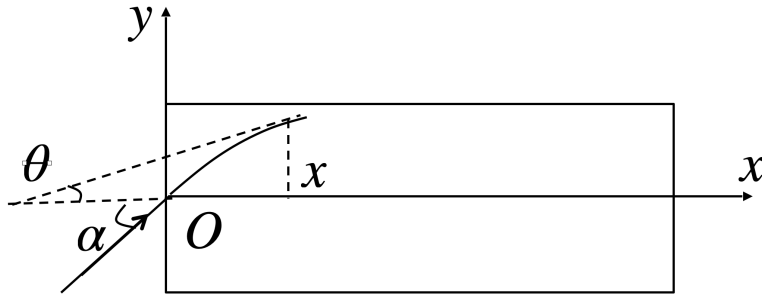
Nếu mắt người lái xe ô tô cách mặt đường 1.5 m thì mặt đường trở nên mờ ảo ở cách mắt bao xa (hiện tượng ảo ảnh)?

### Bài 2: 4.1 TST 2009

Một đoạn sợi quang thẳng có dạng hình trụ bán kính  $R$ , hai đầu phẳng và vuông góc với trục sợi quang, đặt trong không khí sao cho trục đối xứng của nó trùng với trục tọa độ  $Ox$ . Giả thiết chiết suất của chất liệu làm sợi quang thay đổi theo quy luật:  $n = n_1\sqrt{1 - k^2x^2}$ , trong đó  $r$  là khoảng

cách từ điểm đang xét tới trục  $Ox$ ,  $n_1$  và  $k$  là các hằng số dương. Một tia sáng chiếu tới một đầu của sợi quang tại điểm  $O$  dưới góc  $\alpha$  như hình vẽ.

1. Gọi  $\theta$  là góc tạo bởi phương truyền của tia sáng tại điểm có hoành độ  $x$  với trục  $Ox$ . Chứng minh rằng  $n \cos \theta = C$  trong đó  $n$  là chiết suất tại điểm có hoành độ  $x$  trên đường truyền của tia sáng và  $C$  là một hằng số. Tính  $C$ .
2. Viết phương trình quỹ đạo biểu diễn đường truyền của tia sáng trong sợi quang.
3. Tìm điều kiện để mọi tia sáng chiếu đến sợi quang tại  $O$  đều không ló ra ngoài thành sợi quang.
4. Chiều dài  $L$  của sợi quang thỏa mãn điều kiện nào để tia sáng ló ra ở đáy kia của sợi quang theo phương song song với trục  $Ox$ ?



### Bài 3: 4.2 TST 2014

Vào những ngày nắng to, mặt đường nhựa hấp thụ mạnh ánh sáng mặt trời nên bị nung nóng và làm nóng phần khí sát mặt đường. Kết quả là nhiệt độ của không khí thay đổi theo độ cao. Giả thiết rằng chiết suất của không khí phụ thuộc vào nhiệt độ theo biểu thức  $n = 1 + \frac{a}{T}$ . Người ta tìm được mối liên hệ của  $T$  theo độ cao  $z$  tính từ mặt đường có dạng như sau:

$$z = \frac{1}{k} \left[ 1 - \frac{bT}{(T+a)^2} \right].$$

Trong đó  $a$ ,  $b$  và  $k$  là các hệ số dương ( $b > 1$ ).

1. Một nguồn sáng điểm nằm trên mặt đường ( $z = 0$ ) phát ánh sáng theo mọi phương. Mặt đường được coi là mặt phẳng nằm ngang. Xác định dạng đường truyền của một tia sáng phát ra từ nguồn theo phương ban đầu hợp với phương ngang một góc  $\alpha_0$ .
2. Xác định khoảng cách xa nhất để một người còn có thể nhìn thấy nguồn sáng, biết mắt người đó ở độ cao  $h$  so với mặt đường.

## Bài 4: 2 SPhO 2017

Giả sử miền không gian  $x > 0$  bị lấp đầy bởi vật liệu có chiết suất  $n(x)$  thay đổi theo tọa độ  $x$ . Một tia sáng truyền theo phương lập góc  $\alpha_0$  so với trục  $x$  đi vào môi trường nói trên.

- a. Chứng minh rằng bán kính  $R$  của quỹ đạo tia sáng tại điểm  $x > 0$  thỏa mãn hệ thức

$$Rd\alpha = \frac{dx}{\cos \alpha},$$

trong đó  $\alpha$  là góc giữa phương truyền của tia sáng tại điểm  $x$  với trục  $x$ .

- b. Hãy tìm biểu thức xác định bán kính quỹ đạo của tia sáng như là hàm của  $x$  bên trong môi trường.

- c. Chiết suất  $n(x)$  phụ thuộc vào  $x$  như thế nào để phần quỹ đạo cong của tia sáng trong miền  $x > 0$  có dạng tròn? Trong trường hợp này, tia sáng đi vào môi trường đến độ sâu bao nhiêu? Hãy phác họa đường đi của tia sáng.

## 2 Chiết suất cầu

### Bài 1: 4.2 VPhO 2014

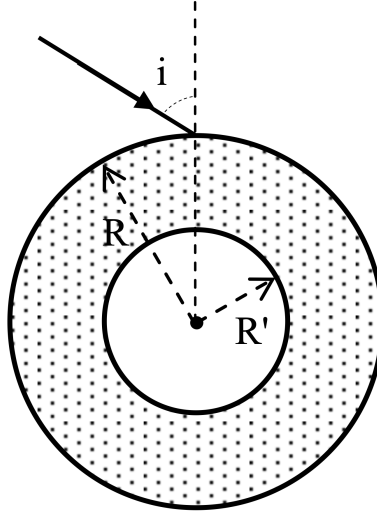
Cho một khối thủy tinh dạng hình trụ rỗng có tiết diện thẳng như hình vẽ. Các giá trị bán kính ngoài và bán kính trong của khối lần lượt là  $R$  và  $R' = \frac{R}{2}$ . Chiết suất của môi trường bên ngoài và phần không khí nằm bên trong hốc trụ đều có giá trị bằng 1. Chiết suất của khối thủy tinh thay đổi theo khoảng cách  $r$  đến trục đối xứng theo quy luật

$$n_r = \sqrt{2 + \frac{R^2}{4r^2}}, \left( \frac{R}{2} \leq r \leq R \right).$$

Chiếu một tia sáng tới mặt ngoài của khối thủy tinh. Tia sáng này nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục đối xứng của khối và hợp với pháp tuyến tại điểm tới một góc là  $i$ .

1. Chứng minh rằng tại một vị trí nằm trên đường truyền tia sáng nằm cách trục một khoảng là  $r$ , góc lệch của tia sáng  $i_r$  so với phương bán kính luôn thỏa mãn hệ thức:  $n_r r \sin i_r = \text{const.}$
2. Góc tới  $i$  phải thỏa mãn điều kiện nào để tia sáng tới được mặt trong của khối?
3. Góc tới  $i$  phải thỏa mãn điều kiện nào để tia sáng lọt được vào trong hốc trụ không khí?
4. Tính góc lệch giữa tia sáng tới và tia sáng ló ra khỏi khối trong các trường hợp góc tới  $i = 30^\circ$  và  $i = 60^\circ$ .

Cho:  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ .



## Bài 2: 4.2 VPhO 2018

Cho một khối cầu được làm từ vật liệu quang học trong suốt có chiết suất phân bố đối xứng tâm theo quy luật  $n = \frac{n_0}{1 + \frac{r^2}{R^2}}$ . Trong đó  $r$  là khoảng cách từ tâm khối cầu đến điểm đang xét,  $R$  là bán kính của khối cầu, hằng số  $n_0 > 2$ . Tốc độ ánh sáng trong chân không là  $c$ .

1. Chiếu một tia sáng tới một điểm trên bề mặt của khối cầu dưới góc tới  $i_0$ , tìm phương trình mô tả đường truyền của tia sáng đi trong khối cầu.
2. Cho  $S$  là một điểm sáng trên bề mặt của khối cầu. Các tia sáng xuất phát từ  $S$  đi vào trong khối cầu và sau đó hội tụ tại một điểm  $S'$ .

a) Xác định vị trí điểm  $S'$ .

b) Tính thời gian để một tia sáng bất kì xuất phát từ điểm  $S$  truyền trong khối cầu đến điểm  $S'$ .

Cho tích phân:  $\int \frac{k(1+x^2)}{x\sqrt{x^2-k^2(1+x^2)}} dx = \arcsin\left(\frac{k}{1-k^2} \frac{x^2-1}{x}\right) + C$ .

## Bài 3: 4.2 VPhO 2021

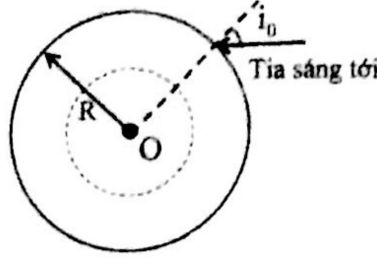
Chiếu một tia sáng đơn sắc vào một điểm trên mặt một khối cầu đặt cố định trong không khí dưới góc tới  $i_0$  như Hình 4. Khối cầu có tâm  $O$ , bán kính  $R$ , được làm từ vật liệu quang học trong suốt có chiết suất phân bố đối xứng cầu quanh tâm  $O$  theo quy luật:

$$n(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2R}{r}} - 1 & \frac{R}{2} \leq r \leq R \\ \sqrt{3} & 0 \leq r < \frac{R}{2} \end{cases}$$

trong đó  $r$  là khoảng cách từ tâm  $O$  đến điểm đang xét. Biết rằng, tia sáng truyền trong khối cầu tới một điểm nằm trên một mặt cầu tâm  $O$  bán kính  $r$  dưới góc tới  $i$  thì  $i$  thỏa mãn điều kiện  $\sin i = \frac{R \sin i_0}{rn(r)}$ .

1. Góc tới  $i_0$  phải thỏa mãn điều kiện nào để tia sáng tới được vùng có chiết suất  $n = \sqrt{3}$ ?
2. Gọi khoảng cách ngắn nhất từ tâm  $O$  đến đường truyền của tia sáng trong khối cầu là  $r_{min}$ . Vẽ phác đường truyền của tia sáng và xác định góc tới  $i_0$  của tia sáng khi  $r_{min} = \frac{2R}{3}$ .
3. Xét tia sáng đến bề mặt khối cầu tại điểm  $M$  với góc tới  $i_0 = 45^\circ$ . Vẽ phác đường truyền của tia sáng và xác định vị trí điểm  $N$  trên bề mặt khối cầu mà tại đó tia sáng ló ra khỏi khối cầu.

Cho:  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ .



Hình 4.

#### Bài 4: 4 SPhO 2015

Một tia laser đi vào môi trường có đối xứng cầu (xem hình vẽ). Chiết suất của môi trường thay đổi theo khoảng cách  $r$  tới tâm đối xứng  $O$  theo quy luật

$$n(r) = \begin{cases} n_0 \frac{r}{R} & r \geq r_0 \\ n_0 & r \leq r_0 \end{cases}$$

Đường đi của tia laser nằm trong mặt phẳng chứa tâm  $O$ . Ở khoảng cách  $r_1 > r_0$ , tia laser lập góc  $\varphi_1$  với vector bán kính  $\vec{r}_1$  (xem hình vẽ). Tìm biểu thức xác định khoảng cách nhỏ nhất từ tâm  $O$  đến tia laser. Tính khoảng cách nhỏ nhất đó với  $n_0 = 1$ ,  $r = 30$  cm,  $r = 40$  cm,  $\varphi = 30^\circ$ .

