Đội tuyển 5-9-24

Bài 1

Đề bài

Một chiếc xe đẩy di chuyển trên một con đường lầy lội. Bán kính của bánh xe là $R = 0.6\ \mathrm{m}$. Một chút bùn nhỏ bong ra khỏi vành bánh xe ở độ cao $h = \frac{3}{2}R$ so với mặt đất.
a) Tìm tốc độ của xe đẩy nếu cục bùn rơi trở lại bánh xe ở cùng độ cao.
b) Tìm chiều dài của cung trên vành bánh xe nối các điểm bong ra và rơi trở lại.
c) Tìm khoảng cách mà xe đã di chuyển trong thời gian đó.

Lời giải

a) Hãy xem xét hiện tượng từ một hệ quy chiếu gắn với xe đẩy đang chuyển động đều. Trong hệ quy chiếu này, cục bùn rời khỏi vành bánh xe theo hướng tiếp tuyến, nghĩa là trong hệ này vận tốc ban đầu của vật ném tạo một góc $a = 60^\circ$ so với phương ngang. Vì cục bùn rơi trở lại cùng độ cao mà nó bắt đầu, khoảng cách giữa các điểm này là khoảng cách của vật ném:

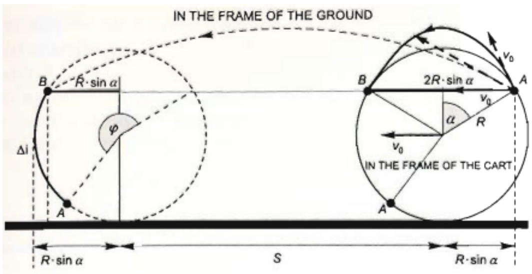
$$x_{\max} = 2R\sin\alpha$$

Vì vậy, trong hệ quy chiếu của xe đẩy:

$$\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 2R\sin\alpha$$

trong đó v_0 là vận tốc ngoại vi của vành bánh xe và cũng là vận tốc di chuyển của xe đẩy. Từ đây

$$v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{0.6\ \mathrm{m}\cdot 9.81\ \mathrm{m/s^2}}{0.5}} = \sqrt{11.772\ \mathrm{m^2/s^2}} \approx 3.43\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$



b) Thời gian của cú ném xiên của cục bùn là

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} = \frac{2\cdot 3.43\ \mathrm{m/s}\cdot 0.866}{9.81\ \mathrm{m/s^2}} = 0.61\ \mathrm{s}$$

Trong thời gian này, điểm trên vành bánh xe nơi cục bùn bong ra di chuyển qua một cung có độ dài là

$$i = v_0 t = 3.43\ \mathrm{m/s}\cdot 0.61\ \mathrm{s} = 2.09\ \mathrm{m} \approx 2.1\ \mathrm{m}$$

do chuyển động lăn không trượt, từ cung này i' mà cục bùn đã bay theo, nghĩa là,

$$i' = R\cdot\frac{2\pi}{3} = 1.257\ \mathrm{metres},$$

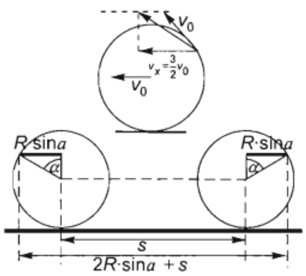
nên được trừ đi, do đó chiều dài của cung yêu cầu là

$$\Delta i = i - i' = 2.09\ \mathrm{m} - 1.257\ \mathrm{m} = 0.833\ \mathrm{m} \approx 0.8\ \mathrm{m}$$

c) Chuyển động của xe đẩy là lăn không trượt, các trục của bánh xe di chuyển chính xác với vận tốc $v_0 = 3.43\ \mathrm{m/s}$, vì vậy trong khoảng thời gian giữa lúc cục bùn bong ra và rơi trở lại, xe đẩy di chuyển một khoảng cách là

$$s = v_0 t = 3.43\ \mathrm{m/s}\cdot 0.61\ \mathrm{s} = 2.09\ \mathrm{m} \approx 2.1\ \mathrm{m}$$

điều này rõ ràng bằng với i.



(Góc ném đặc biệt cho phép chúng ta đi đến kết luận nhanh hơn. Cụ thể, trong hệ tọa độ gắn với mặt đất, cục bùn di chuyển chính xác với vận tốc $v_x = v_0\cos 60^\circ + +v_0 = 3x_0/2$ theo phương ngang, gấp $3/2$ lần vận tốc của xe đẩy. Do đó, độ dịch chuyển theo phương ngang của cục bùn gấp $3/2$ lần độ dịch chuyển của xe đẩy, nghĩa là,

$$2R\sin\alpha + s = \frac{3}{2}s$$

Từ đây, khoảng cách mà xe đẩy đã di chuyển là:

$$s = 4R\sin\alpha = 4\cdot 0.6m\cdot 0.866 = 2.1m$$

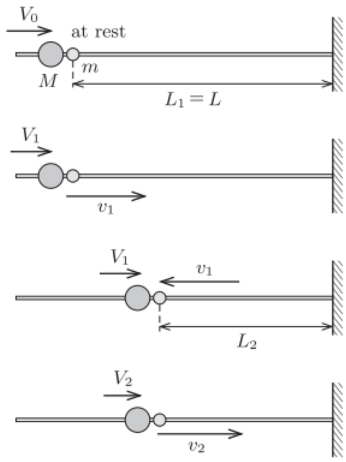
Bài 2

Đề bài

Hai quả cầu nhỏ được xâu vào một thanh ngang không ma sát nhô ra từ một bức tường thẳng đứng. Quả cầu nhẹ hơn có khối lượng m ban đầu ở trạng thái nghỉ, cách tường một khoảng L, trong khi quả cầu thứ hai nặng hơn nhiều, có khối lượng M, tiến về phía tường từ một khoảng cách lớn hơn L (xem hình). Sau va chạm đàn hồi của chúng, quả cầu khối lượng m trượt về phía tường, bật trở lại đàn hồi và lại va chạm với quả cầu nặng hơn. Quá trình sau đó lặp lại nhiều lần.
Khoảng cách nhỏ nhất từ quả cầu lớn đến tường là bao nhiêu?
Coi các quả cầu như chất điểm, $m \ll M$

Lời giải

Ký hiệu vận tốc của quả cầu có khối lượng M sau lần va chạm thứ n là V_n, vận tốc của quả cầu có khối lượng m là v_n, và khoảng cách giữa vị trí của va chạm thứ n và tường là L_n. Dữ liệu về vị trí và vận tốc cho hai lần va chạm đầu tiên được hiển thị trong hình.



Trong quá trình va chạm, động lượng tuyến tính và năng lượng cơ học được bảo toàn. Hãy viết các định luật bảo toàn này cho lần va chạm thứ $(n+1)$:

$$\frac{1}{2}(MV_n^2 - V_{n+1}^2) = \frac{1}{2}m(v_{n+1}^2 - v_n^2)$$
$$M(V_n - V_{n+1}) = m(v_{n+1} - (-v_n))$$

$1+2$
Chia các vế tương ứng của hai phương trình này cho nhau, và thực hiện một sắp xếp lại nhỏ của kết quả, ta được

$$V_n + v_n = v_{n+1} - V_{n+1} \tag{3}$$

Quả cầu nặng hơn, di chuyển với tốc độ V_1, di chuyển một khoảng cách $L_1 - L_2$ giữa hai lần va chạm được hiển thị trong hình; quả cầu nhẹ hơn bao phủ một đường đi có độ dài $L_1 + L_2$ với tốc độ v_1 trong cùng khoảng thời gian đó. Do đó

$$\frac{L_1 - L_2}{V_1} = \frac{L_1 + L_2}{v_1}$$

từ đó

$$L_2 = \frac{v_1 - V_1}{v_1 + V_1}L_1$$

Tương tự, có thể tìm thấy một mối liên hệ giữa các khoảng cách L_{n-1} và L_n liên quan đến va chạm thứ n:

$$L_n = \frac{v_{n-1} - V_{n-1}}{v_{n-1} + V_{n-1}}L_{n-1} \tag{4}$$

Từ phương trình (3) với n được thay thế bằng $n-1$, biểu thức $v_{n-1} + V_{n-1}$ ở mẫu số của (4) có thể được thay thế bằng $v_n - V_n$ để thu được kết quả

$$L_n\left(v_n - V_n\right) = L_{n-1}\left(v_{n-1} - V_{n-1}\right) \tag{5}$$

Nói cách khác, tích $L_k\left(v_k - V_k\right)$ có cùng một giá trị, bất kể giá trị của k là gì.

Một ứng dụng cụ thể của kết quả này, chúng ta có thể cho các tích tương ứng với va chạm đầu tiên và va chạm thứ N bằng nhau, trong đó va chạm thứ N là va chạm xảy ra gần tường nhất:

$$L_N = L_1 \frac{v_1 - V_1}{v_N - V_N} \tag{6}$$

Đối với va chạm đầu tiên, $L_1 = L$, và hơn nữa, từ phương trình (3), ta có $v_1 - V_1 = v_0 + V_0 = V_0$ (vì $v_0 = 0$). Do đó (6) rút gọn thành

$$L_N = L \frac{V_0}{v_N - V_N} \tag{7}$$

Sau va chạm thứ N (theo định nghĩa), tốc độ của quả cầu nặng hơn sẽ bằng không hoặc rất gần bằng không. [28] Ngay cả khi nó không bao giờ dừng lại hoàn toàn, chúng ta có thể chắc chắn rằng quả cầu sẽ di chuyển 'ra xa tường' sau va chạm tiếp theo. Vì vậy, với mục đích thực tế, chúng ta có thể coi V_N bằng không.

Vì tốc độ của quả cầu lớn bằng không (hoặc gần bằng không) khi nó ở gần tường nhất, tổng động năng ban đầu của nó sẽ được truyền cho quả cầu nhỏ hơn:

$$\frac{1}{2} M V_0^2 = \frac{1}{2} m v_N^2$$

từ đó suy ra

$$v_N = \sqrt{\frac{M}{m}} V_0$$

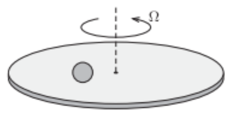
Thay điều này vào (7), và xem xét điều kiện $V_N \approx 0$, cuối cùng ta thu được khoảng cách tối thiểu cần thiết là

$$L_{\min} = L_N = \sqrt{\frac{m}{M}} L$$

Bài 3

Đề bài

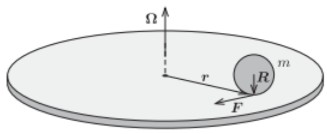
Một đĩa phẳng ngang rất lớn có bề mặt nhám đang quay quanh trục đối xứng thẳng đứng của nó với vận tốc góc Ω. Một quả bóng cao su đặc bán kính R được đặt trên đĩa sao cho nó lăn mà không trượt, và tâm của nó di chuyển theo một đường tròn có bán kính r_0 và đồng tâm với đĩa.



a) Tìm vận tốc ban đầu và vận tốc góc mà quả bóng phải có cho loại chuyển động này.
b) Tâm của quả bóng sẽ di chuyển như thế nào nếu nó được bắt đầu từ cùng một vị trí với cùng độ lớn của vận tốc ban đầu như đã chỉ định trong phần a), nhưng với hướng ngược lại?

Lời giải

Chúng ta sử dụng ký hiệu như trong . Vectơ $\boldsymbol{R}$ chỉ từ tâm quả bóng đến điểm tiếp xúc tạm thời của nó với đĩa, $\boldsymbol{r}$ hướng từ tâm đĩa đến cùng điểm đó, và $\boldsymbol{F}$ là lực ma sát tĩnh tác dụng lên quả bóng. Vì, so với tâm của đĩa, tâm của quả bóng nằm tại $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}$ và $\boldsymbol{R}$ là một vectơ không đổi, ta có vận tốc của nó là $v = \dot{\boldsymbol{r}}$. Vận tốc góc là $\boldsymbol{\Omega}$ cho đĩa và ω cho quả bóng (vectơ này không được hiển thị trong hình).



Gia tốc $\dot{v}$ của tâm khối lượng của quả bóng, có khối lượng m, được gây ra bởi lực ma sát tĩnh, do đó phương trình chuyển động ngang có thể được viết là

$$\boldsymbol{F} = m\dot{\boldsymbol{v}} \tag{1}$$

Gia tốc góc của quả bóng cũng được gây ra bởi lực ma sát, do đó phương trình cho chuyển động quay có dạng

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F} = \frac{2}{5} m R^2 \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{2}$$

vì $\frac{2}{5} m R^2$ là mômen quán tính của hình cầu đồng chất đặc quanh một trong các đường kính của nó.

Vì không có trượt, điểm thấp nhất của quả bóng và điểm tiếp xúc trên đĩa di chuyển cùng nhau, do đó

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} \tag{3}$$

Lấy đạo hàm theo thời gian của cả hai vế của điều kiện (3) cho một kết nối tương tự giữa các tốc độ thay đổi:

$$\dot{\boldsymbol{v}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}$$

Sử dụng điều này và các phương trình (1) và (2) ta được

$$\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{5}{2mR^2} [\boldsymbol{R} \times (m\dot{\boldsymbol{v}})] \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}$$

Hướng của tích vectơ ba là giống với hướng của $\dot{\boldsymbol{v}}$ và độ lớn của nó là $mR^2 \dot{v}$. Sau khi thay thế điều này, và thực hiện một số đơn giản hóa và sắp xếp lại, ta có

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}} \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}$$

mà, sử dụng ký hiệu $\boldsymbol{\Omega}_0 = \frac{2}{7}\boldsymbol{\Omega}$, có thể được viết là

$$\dot{v} = \boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{v} \tag{4}$$

Đó là, gia tốc vuông góc với cả vận tốc hiện tại và trục quay. Hơn nữa, bằng cách lấy tích vô hướng của phương trình (4) với $\boldsymbol{v}$, chúng ta có thể suy ra rằng độ lớn của v không thay đổi theo thời gian:

$$\frac{\mathrm{d}\left(v^2\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} = 2\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{v}) = 0$$

Chuyển động tròn đều có chính xác những tính chất này!
Hoặc bằng cách lưu ý các hệ quả của những quan sát này, hoặc sau khi tích phân thời gian đơn giản của (4), chúng ta có thể viết phương trình mô tả tốc độ thay đổi của vectơ vị trí $\boldsymbol{r}$ dưới dạng

$$\dot{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}^* \tag{5}$$

trong đó $\boldsymbol{v}^*$ là một hằng số phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu.
Bây giờ, đối với bất kỳ vectơ vận tốc (tùy ý) $\boldsymbol{v}^*$, chúng ta luôn có thể tìm thấy một vectơ vị trí $\boldsymbol{r}^*$ sao cho $\boldsymbol{v}^*$ có thể được viết dưới dạng $-\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{r}^*$. Vì lý do này, phương trình (5) có thể được biến đổi thành

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\Omega}_0 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^*) \tag{5'}$$

Dễ dàng nhận thấy rằng phương trình (5') mô tả chuyển động đều, với vận tốc góc $\boldsymbol{\Omega}_0 = \frac{2}{7}\boldsymbol{\Omega}$, quanh một đường tròn có tâm tại $\boldsymbol{r}^*$. Với sự trợ giúp của kết quả tổng quát này, câu trả lời có thể được đưa ra cho hai câu hỏi cụ thể được đặt ra.

a) Để quả bóng di chuyển dọc theo một đường tròn có bán kính r_0 và đồng tâm với tâm của đĩa, chúng ta cần đặt $\boldsymbol{r}^*$ trong phương trình (5') bằng vectơ không. Khi đó vận tốc ban đầu của tâm khối lượng được cho bởi

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{r}_0 \tag{6}$$

trong đó $\boldsymbol{r}_0$ cho vị trí ban đầu của quả bóng, cách trục quay một khoảng r_0. Từ đó, độ lớn của vận tốc ban đầu phải là

$$v_0 = |\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{r}_0| = r_0\Omega_0 = \frac{2}{7}r_0\Omega$$

Vận tốc góc ban đầu của quả bóng có thể được xác định bằng cách sử dụng điều kiện 'không trượt' (3). Có tính đến điều kiện (6) và mối quan hệ giữa Ω_0 và Ω, nó mang lại

$$\boldsymbol{\omega_0} \times \boldsymbol{R} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{v_0} \tag{7}$$

Độ lớn và hướng của tích vectơ ở phía bên trái không bị ảnh hưởng bởi thành phần thẳng đứng (song song với $\boldsymbol{R}$) của vectơ vận tốc góc ω_0 của quả bóng, và do đó, về nguyên tắc, thành phần này có thể có bất kỳ giá trị tùy ý nào.

Kết luận này giả định rằng quả bóng cao su chỉ tiếp xúc với đĩa tại một điểm duy nhất. Trong thực tế, quả bóng, cũng như đĩa, bị biến dạng một chút, và do đó, để tránh các hiệu ứng phát sinh từ ma sát tại các bề mặt tiếp xúc, thành phần thẳng đứng của vận tốc góc nên được chọn bằng 0! Trong trường hợp này, vectơ vận tốc góc nằm ngang, và độ lớn của nó có thể được tìm thấy bằng cách lấy tích vectơ của (7) với $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}_0 = \frac{2}{5}[\boldsymbol{R} \times (\omega_0 \times \boldsymbol{R})] = \frac{2}{5}\left[R^2\boldsymbol{\omega}_0 - (\omega_0 \cdot \boldsymbol{R})\boldsymbol{R}\right] = \frac{2}{5}R^2\boldsymbol{\omega}_0$$

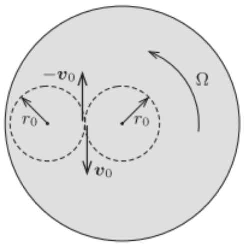
Theo đó, vận tốc góc ban đầu cần thiết (quanh một trục ngang) là

$$\omega_0 = \frac{5}{2}\frac{|\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}_0|}{R^2} = \frac{5}{2}\frac{v_0}{R} = \frac{5}{7}\frac{r_0\Omega}{R}$$

b) Lần này, vị trí ban đầu của quả bóng vẫn là $\boldsymbol{r}_0$, nhưng vận tốc ban đầu của nó là $-\boldsymbol{v}_0$. Trong những trường hợp này, phương trình (5') được đọc là

$$-\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{\Omega}_0 \times (\boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{r}^*)$$

So sánh điều này với (6), rõ ràng là chúng ta phải có $\boldsymbol{r}^* = 2\boldsymbol{r}_0$. Vì vậy, trong trường hợp này, quả bóng cao su vẫn di chuyển dọc theo quỹ đạo tròn có bán kính r_0, nhưng tâm của nó bây giờ cách tâm đĩa một khoảng $2r_0$ (xem Hình 2). Độ lớn của động lượng góc của quả bóng có thể được tìm thấy bằng cách sử dụng cùng một dòng lập luận như mô tả trong phần a), và kết quả là $\omega_0 = 9r_0\Omega/(7R)$.



Bài 4

Đề bài

Một quả bóng được ném lên với vận tốc v_0 nghiêng một góc θ. Lực cản từ không khí có dạng $\boldsymbol{F}_{\mathbf{d}} = -\beta\boldsymbol{v} \equiv -m\alpha\boldsymbol{v}$.

1. Tìm $x(t)$ và $y(t)$.
2. Giả sử rằng hệ số cản có giá trị sao cho độ lớn của lực cản lúc đầu bằng trọng lượng của quả bóng. Nếu mục đích của bạn là có x lớn nhất có thể khi y đạt giá trị lớn nhất (bạn không cần phải quan tâm đến giá trị lớn nhất của y là bao nhiêu), hãy chỉ ra rằng θ phải thỏa mãn $\sin\theta = (\sqrt{5}-1)/2$, giá trị này vô tình lại là giá trị nghịch đảo của tỷ số vàng.

Lời giải

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ cho ta $\ddot{x} = -\alpha\dot{x}$ và $\ddot{y} = -g - \alpha\dot{y}$. Sử dụng vận tốc ban đầu, phương trình theo trục x được tích phân thành

$$\dot{x} = Ae^{-\alpha t} \Longrightarrow \dot{x} = v_0 \cos\theta e^{-\alpha t} \tag{1}$$

Giả sử vị trí ban đầu bằng không, ta có thể tích phân tiếp để có

$$x = -\left(v_0 \cos\theta/\alpha\right)e^{-\alpha t} + B \quad \Longrightarrow \quad x = \left(v_0 \cos\theta/\alpha\right)\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \tag{2}$$

Phương trình theo trục y là $\ddot{y} = -\alpha(g/\alpha + \dot{y})$, có thể được viết lại thành $(d/dt)(g/\alpha + \dot{y}) = -\alpha(g/\alpha + \dot{y})$. Tích phân biểu thức này, ta có

$$\frac{g}{\alpha} + \dot{y} = Ce^{-\alpha t} \Longrightarrow \dot{y} = Ce^{-\alpha t} - \frac{g}{\alpha} \Longrightarrow \dot{y} = \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{\alpha}\right)e^{-\alpha t} - \frac{g}{\alpha} \tag{3}$$

Tích phân tiếp, ta được

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{\alpha}\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{\alpha}\right)e^{-\alpha t} - \frac{gt}{\alpha} + D \\ \Longrightarrow y &= \frac{1}{\alpha}\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{\alpha}\right)\left(1 - e^{-\alpha t}\right) - \frac{gt}{\alpha} \end{aligned} \tag{4}$$

(b) Ta có $m\alpha v_0 = mg \Longrightarrow g/\alpha = v_0$. Do đó, phương trình (55) cho ta $\dot{y} = (v_0 \sin\theta + v_0)e^{-\alpha t} - v_0$. Tại điểm cao nhất của chuyển động, ta có $\dot{y} = 0 \Longrightarrow e^{-\alpha t} = 1/(1 + \sin\theta)$. Sử dụng phương trình (54), giá trị của x tại thời điểm này là

$$x = \frac{v_0 \cos\theta}{g/v_0}\left(1 - \frac{1}{1 + \sin\theta}\right) = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{1 + \sin\theta}\right) \tag{5}$$

Lấy đạo hàm để tìm giá trị cực đại của biểu thức này, và sử dụng $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, ta thu được phương trình bậc ba, $\sin^3\theta + 2\sin^2\theta - 1 = 0$. Phương trình này có nghiệm $\sin\theta = -1$. Phương trình bậc hai còn lại cho nghiệm dương là $\sin\theta = (\sqrt{5} - 1)/2 \Longrightarrow \theta \approx 38.2°$.