

Chuyên đề về phương pháp ảnh điện

Bài 95

Một điện tích q nằm trong chân không cách tâm 1 quả cầu dẫn nối đất 1 đoạn L bán kính của quả cầu là R ($R < L$).

- Xác định điện tích cảm ứng trên quả cầu?
- Tính lực tương tác giữa điện tích và quả cầu
- Xét quả cầu được giữ ở 1 điện thế không đổi.

Bài giải

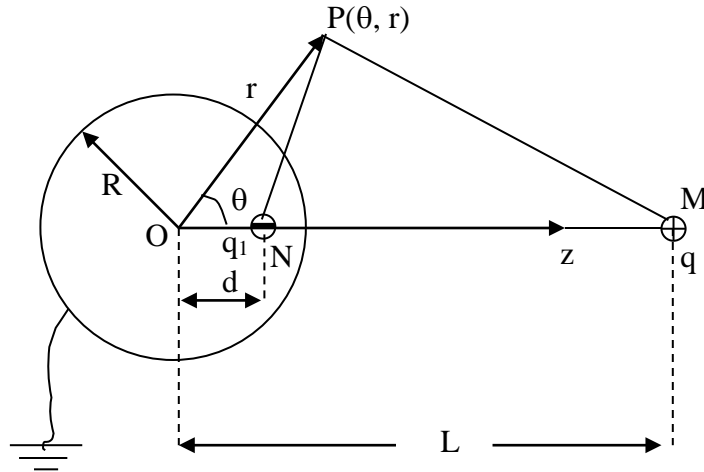
a/ thay hệ (Quả cầu + đ.t q) bằng hệ 2 điện tích (q_1, q).

+ q_1 có độ lớn sao và vị trí sao cho điện trường tạo bởi hệ điện tích (q_1, q) giống hệt với điện trường tạo bởi hệ điện tích q và tất cả các điện tích hưởng ứng trên quả cầu, có nghĩa là đảm bảo điện thế do q_1 & q gây ra tại mọi điểm trên mặt cầu đều bằng không (vì quả cầu nối đất)

+ chọn hệ toạ độ cực cực có gốc trùng với tâm O của quả cầu, trục Oz đi qua điện tích q_1, q .

Như vậy vị trí của q_1 và q được xác định: $q_1(0, d)$; $q(0, L)$.

Xét 1 điểm $P(\theta, r)$ ta có:



$$V_P = \frac{Kq_1}{NP} + \frac{Kq}{MP}$$

Theo hệ thức trong tam giác

$$NP = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}$$

$$MP = \sqrt{r^2 + L^2 - 2rL \cos \theta}$$

$$V_P = \frac{Kq_1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} + \frac{Kq}{\sqrt{r^2 + L^2 - 2rL \cos \theta}}$$

Theo lý luận trên thì thế tại mọi điểm trên mặt quả cầu = 0 $\rightarrow V(\theta, R) = 0$ với mọi θ .

* với $\theta = 0$ ta có:

$$V(0, R) = \frac{Kq_1}{\sqrt{(R-d)^2}} + \frac{Kq}{\sqrt{(L-R)^2}} = 0 \rightarrow \frac{q_1}{(R-d)} = \frac{q}{(L-R)} \quad (1)$$

$$* \text{ Với } \theta = \pi \text{ ta có: } V(\pi, R) = \frac{Kq_1}{(R+d)} + \frac{Kq}{(L+R)} = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) \rightarrow

$$\frac{q_1}{q} = \frac{R-d}{L-R} = \frac{R+d}{L+R} \Rightarrow d = \frac{R^2}{L} \quad (3); \text{ Thay (3) vào (1)} \Rightarrow q_1 = -q \frac{R}{L}$$

b) Lực tương tác giữa điện tích và quả cầu là :

$$F = \frac{K|q \cdot q_1|}{(L-d)^2} = \frac{KRLq^2}{(L^2 - R^2)^2}$$

c/

Bài 96

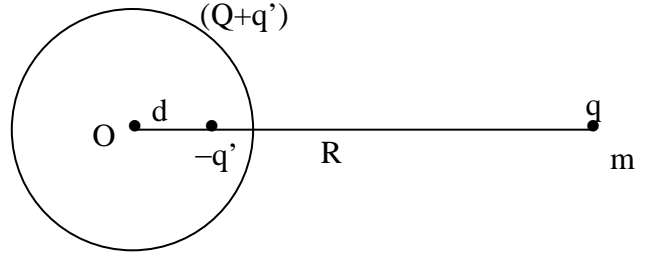
Một chất điểm khối lượng m , điện tích q quay quanh quả cầu dẫn điện bán kính r , tích điện Q . Quỹ đạo của chất điểm là đường tròn bán kính R và tâm trùng với tâm quả cầu. Tính chu kỳ quay của chất điểm.

Bài giải

*Giả sử khi q quay xung quanh quả cầu làm xuất hiện điện tích $-q'$ là ảnh điện tích của q cách O một khoảng là d.

Ta có:

$$\left. \begin{aligned} q' &= -q \frac{r}{R} \\ d &= \frac{r^2}{R} \end{aligned} \right\} \text{ đã chứng minh}$$



Như vậy điện tích của quả cầu lúc này là $(Q + q')$

* Lực tác dụng lên điện tích q sẽ là: $F = \frac{K(q \cdot q')}{(R-d)^2} - \frac{K(Q+q') \cdot q}{R^2}$ Hướng vào tâm O đóng vai trò của lực

hướng tâm

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{Kq^2 \frac{r}{R}}{(R-d)^2} - \frac{K\left(Q+q \frac{r}{R}\right)q}{R^2} &= m\omega^2 R \\ \frac{Kq^2 r}{R\left(R - q \frac{r^2}{R}\right)^2} - \frac{K\left(Q+q \frac{r}{R}\right)q}{R^3} &= m\omega^2 R \\ \frac{Kq^2 r R}{\left(R^2 - qr^2\right)^2} - \frac{K(RQ+rq)q}{R^3} &= m\omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Kq^2 r}{\left(R^2 - qr^2\right)^2 \cdot m} - \frac{K(RQ+rq^2)}{mR^4}} \end{aligned}$$

Bài 97

Một quả cầu dẫn điện bán kính

$r = 2\text{cm}$ được nối đất. Có 1 điện tử ban đầu từ xa cđ với vận tốc v_0 theo hướng thẳng cách tâm quả cầu một khoảng bằng $2r$. hãy xác định giá trị vận tốc của điện tử khi bay tới gần quả cầu nhất, nếu biết rằng tại vị trí gần nhất điện tử cách tâm quả cầu một khoảng $3r/2$.

Bài giải

* Theo phương pháp ảnh điện thì ảnh của điện tích p là ở p'

$$x' = \frac{r^2}{x}; \quad e' = -e \frac{r}{x}$$

Ta có:

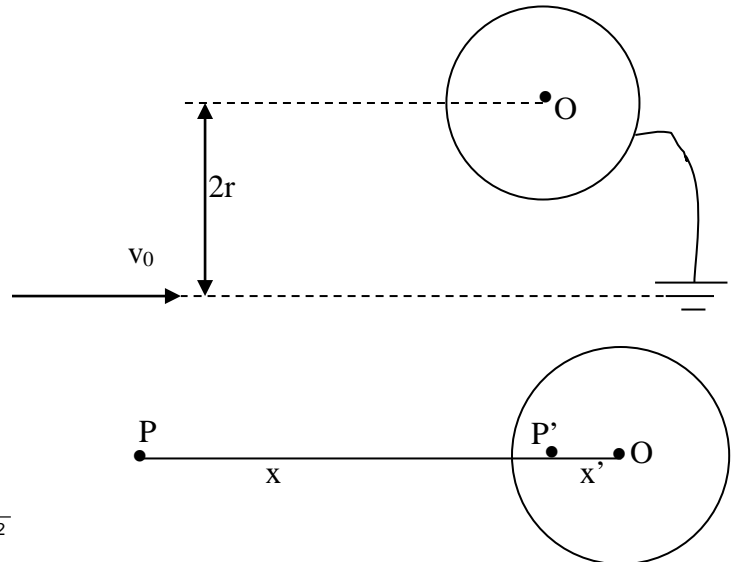
$$F_{(x)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e \cdot e'}{(x-x')^2} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{rx}{(x^2 - r^2)^2}$$

$$\text{thống} \text{ ng ẽ } P \text{ ụ } E_P = -\int F_{(x)} dx = -\frac{e^2 r}{8\pi\epsilon_0 (x^2 - r^2)} + C$$

Khi $x = \infty$ thì $E_P = 0 \rightarrow C = 0$

$$\text{*Theo ĐLBTLN ta có: } \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2 r}{8\pi\epsilon_0 (x^2 - r^2)} \text{ với } x = \frac{3r}{2} \rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{10\pi\epsilon_0 r} \quad (1)$$

* Bảo toàn mô men động lượng:



$$\frac{3}{2} r \cdot mv = 2r \cdot mv_0$$

$$(2) \quad \text{tu (1) và (2)} \rightarrow v = e \sqrt{\frac{32}{70} \cdot \frac{1}{\pi \epsilon_0 r m}}$$

Bài 113

Máy gia tốc tăng tốc cho các proton và cấp cho mỗi proton 1 động năng E . Một chùm nhỏ proton từ máy chạy đến 1 quả cầu bán kính r đặt ở xa máy gia tốc và ở vị trí sao cho tâm của quả cầu không nằm trên đường đi của chùm tia. Khoảng cách từ tâm quả cầu đến đường đi của chùm tia là d . Sau 1 thời gian đủ dài quả cầu có điện thế bằng bao nhiêu. Tính cho trường hợp $E = 2 \text{ keV}$ và $d = r/2$. Hiện tượng gì sẽ xảy ra nếu ta thay chùm proton bằng chùm điện tử.

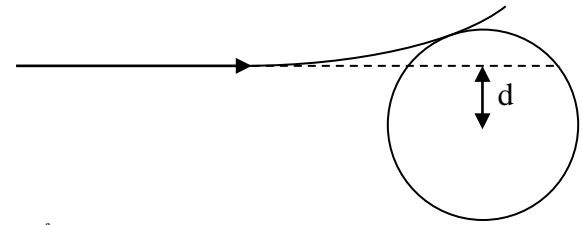
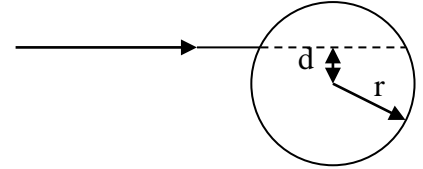
Bài giải

Theo ĐLBTK năng lượng: $E = eU + \frac{mv^2}{2}$

Bảo toàn mô men động lượng: $mv_0 d = mvr$

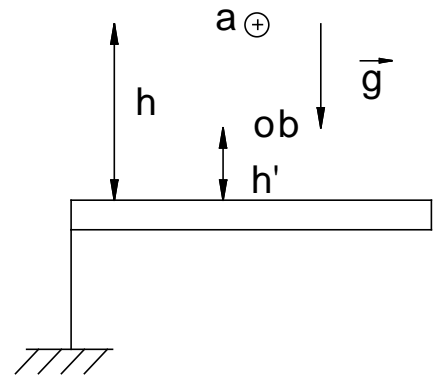
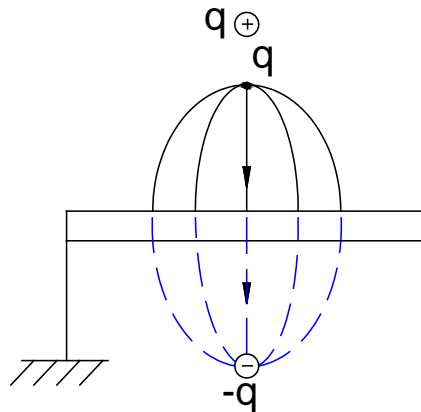
$$\rightarrow U = \frac{E}{e} \left(1 - \frac{d^2}{r^2} \right)$$

Khi thay proton bằng điện tử thì quả cầu tích điện âm và quỹ đạo của chùm điện tử sẽ không tiếp tuyến với quả cầu mà gặp quả cầu ở 1 điểm nào đó.



Bài 36

Có một tấm kim loại mỏng, phẳng rộng vô hạn được nối đất. phía trên có một điện tích q đặt trong không khí có $\epsilon = 1$ cách tấm kim loại một khoảng là h , khối lượng của điện tích là m , thả cho điện tích q rơi xuống. Tính vận tốc của điện tích q khi nó cách mặt phẳng một đoạn là h' .



Giải

- Giả sử có điện tích $-q^*$ nằm đối xứng với $+q \rightarrow$ hệ thống đường sức nằm đối xứng nhau.

Nếu bỏ tấm kim loại đi \rightarrow hệ thống đường sức không đối xứng và tương tác tĩnh điện cũng không đổi.

$$\text{Do đó ta có } V_{-q} = -\frac{kq}{2h} \rightarrow W = q \cdot V_{-q} = -\frac{kq^2}{2h}$$

áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho vị trí ban đầu A và vị trí B (vị trí lúc q có vận tốc V và

cách mặt phẳng khoảng h') ta có:

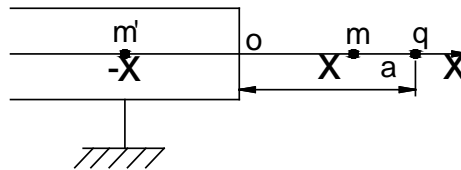
$$mgh - \frac{kq^2}{2h} = mgh' + \frac{mV^2}{2} - \frac{kq^2}{2h'}$$

$$\frac{mV^2}{2} = mg(h - h') + \frac{kq^2}{2} \left(\frac{1}{h'} - \frac{1}{h} \right). \text{ Do đó } V^2 = 2g(h - h') + \frac{kq^2}{2} \left(\frac{h - h'}{hh'} \right)$$

$$\text{Vậy } V = \sqrt{2g(h - h') + \frac{kq^2(h - h')}{mhh'}}$$

Bài 50

Một điện tích điểm $q = 20, \mu \text{ C}$ đặt trong chân không cách một thành phẳng bằng kim loại đã nối đất một khoảng $a = 50 \text{ mm}$. Tính lực F mà thành hút điện tích đó. Giả sử các kích thước của thành vô cùng lớn.



Giải

Chúng ta cần tính điện trường $E_{l(x)}$ tạo bởi các điện tích cảm ứng trên thành tại điểm $M_x (x > 0)$.

Do tính đối xứng (thành rộng vô hạn nên $\vec{E}_{l(x)}$ có hướng dọc theo trục ox).

Ta hãy tính điện thế $V_{l(x)}$ tại $M(x)$ gây bởi các điện tích cảm ứng của thành.

Xét điểm $M'_{(x)}$ nằm trong k loại. Vì thành rộng vô hạn, có thể xem các điện tích cảm ứng chỉ phân bố trên mặt phẳng trung trực của MM' do đó: $V_{t(x)} = V_{t(-x)}$ (1)

Điện thế tại M' là $V_{(-x)} = 0$ Vì thành nối đất. Hơn nữa $V_{t(-x)}$ là kết quả của sự chồng chất $V_{t(x)}$ và $V_{q(-x)}$ nên:

$$0 = V_{(-x)} = V_{t(-x)} + V_{q(-x)} = V_{t(x)} + \frac{kq}{a + x} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \rightarrow V_{t(x)} = -\frac{kq}{(a + x)^2} \quad (3)$$

$$\text{Do đó } E_{(x)} = \frac{d_x V_{(x)}}{dx} = -\frac{kq}{(a + x)^2} \quad \text{Suy ra } F = E_{(a)} \cdot q = -\frac{kq^2}{4a^2}$$

Dấu (-) chứng tỏ F hướng theo chiều âm của ox tức là thành hút điện tích. Độ lớn của F là $\frac{kq^2}{4a^2} = 0,36 \text{ mN}$

Ta nhận thấy $E_{(x)}$ giống như một điện trường gây bởi một điện tích điểm $-q$ đặt đối xứng với q qua mặt phẳng. Điều đó cho phép ta áp dụng phương pháp ảnh điện tức là thay toàn bộ điện tích cảm ứng trên thành bằng một điện tích điểm ảnh $-q$ đặt đối xứng với q .

Bài 32 : Cho một quả cầu kim loại bán kính R đặt cách một điện tích q một đoạn L ($L > R$)

1. Hãy tính điện thế tại tâm quả cầu kim loại

2. Nối quả cầu với đất. Tính điện tích Q của quả cầu.

Giải

1. Do hưởng ứng tĩnh điện nên các điện tích xuất hiện trên quả cầu như hình vẽ

Ta có $V_0 = V_{0q} + \sum V_{0\Delta q'} + \sum V_{0\Delta q}$ (V là điện thế)

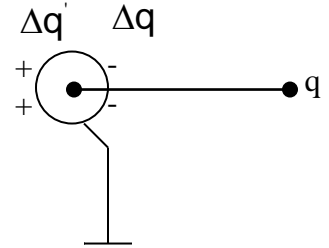
$$V_0 = \frac{kq}{\varepsilon L} + \sum k \frac{\Delta q'}{R} + \sum k \frac{\Delta q}{R} \rightarrow V_0 = \frac{kq}{\varepsilon L} + \frac{k}{R} (\sum \Delta q' + \sum \Delta q) \quad (1)$$

Theo định luật bảo toàn điện tích thì $\sum \Delta q' + \sum \Delta q = 0$ (2)

$$\text{Do đó từ (1) và (2)} \rightarrow V_0 = \frac{kq}{\varepsilon L}$$

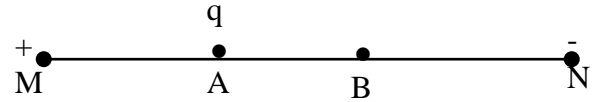
2. Khi nối đất $V_0 = 0 \rightarrow$ điện thế quả cầu kim loại = 0 còn điện tích q là vật đẳng thế do đó:

$$\frac{kq}{\varepsilon L} = -\frac{k}{R} (\sum \Delta q + \sum \Delta q') = -\frac{kQ}{R} \rightarrow Q = -q \frac{R}{\varepsilon L}$$



Bài 33:

Có hai điện tích đặt cố định tại M và N. một điện tích q thả tự do trên đường nối MN. điện tích +q di chuyển từ A \rightarrow B trong thời gian t. nếu thả tại A điện tích là 3q thì điện tích đó di chuyển từ A \rightarrow B trong thời gian t' là bao nhiêu? biết $m_q = m_{3q}$.



Giải

Công của lực điện trường làm +q di chuyển từ A \rightarrow x là

$$A_{Ax} = q \cdot U_{Ax} \quad (1)$$

Theo định lý về động năng:

$$A_{Ax} = \Delta W_{dAx} = \frac{1}{2} m V^2 - 0 \quad (2)$$

(x là điểm bất kỳ trên AB và V là vận tốc tại x)

$$\text{tương tự với điện tích } q' = 3q : A'_{Ax} = q' U_{Ax} = \frac{1}{2} m V'^2 = 3q U_{Ax} \quad (3)$$

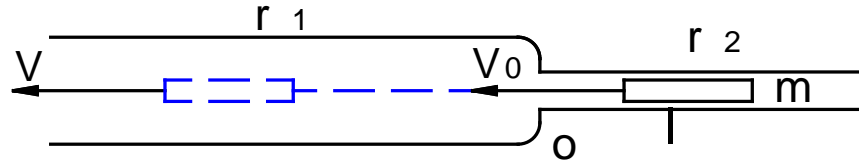
$$\text{Từ (1), (2), (3).} \rightarrow V'^2 = 3V^2 \rightarrow V' = V\sqrt{3}$$

$$\text{Mà } \int dt = \int \frac{ds}{V} \rightarrow t = \int \frac{ds}{V} \quad t' = \int \frac{ds}{V'} = \int \frac{ds}{V\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{ds}{V} = \frac{t}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy nếu thả } q' = 3q \text{ trên đường AB thì nó dịch chuyển từ A } \rightarrow \text{ B mất thời gian } t' = \frac{t}{\sqrt{3}}$$

Bài 35 :

Có một rãnh hẹp hình trụ rất dài một phần bán kính là R_1 , một phần bán kính là R_2 được khoét trong một khối kim loại. Một dây kim loại khối lượng m có bán kính rất nhỏ, chiều dài $l \gg R_1, R_2$ được phóng với vận tốc V_0 dọc theo rãnh, mật độ điện tích trên dây kim loại trên một đơn vị chiều dài là ρ (V_0 là vận tốc của dây kim loại khi còn ở rất xa chỗ thắt O). hãy tính vận tốc của thanh khi nó qua rãnh rất xa O.

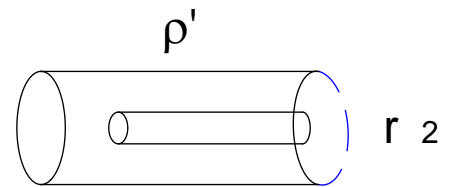


Giải

Chọn mặt gao như hình vẽ.

Mật độ điện tích mặt trên mặt Gao là ρ'

$$\rho \Delta \ell + 2\pi R_2 \Delta \ell \rho' = \sum \epsilon E S = 0 \rightarrow \rho' = -\frac{\rho}{2\pi R_2} \quad (1)$$



$$\Delta V = \frac{k\rho' \Delta S}{R_2} \quad (\Delta V \text{ là điện thế do một phần diện tích } \Delta S \text{ trên mặt Gao gây ra tại dây } \Delta \ell)$$

- Thế năng tĩnh điện trên đoạn dây Δl là:

$$\text{Ta có} \quad W = \Delta V \cdot \rho \cdot \Delta \ell = k\rho' \frac{\Delta S}{R_2} \rho \Delta \ell$$

$$\text{Thế năng tĩnh điện của cả sợi dây là: } W = \sum \Delta W = \sum k\rho' \frac{\Delta S}{R_2} \rho \Delta \ell = \frac{k\rho\rho'}{R_2} \sum \Delta S \Delta \ell \quad (2)$$

$$\text{Thay } \rho' \text{ từ (1) vào (2)} \rightarrow W = -\frac{k\rho^2}{2\pi R_2^2} \sum \Delta S \Delta \ell \quad \text{với } \sum \Delta S \Delta l = 2\pi R_2 \ell \cdot \ell = 2\pi R_2 \ell^2$$

$$\text{Do đó năng lượng lúc ban đầu là: } E = \frac{1}{2} m V_0^2 - k \frac{\rho^2}{2\pi R_2^2} 2\pi R_2 \ell^2; \quad E = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{k\rho^2 \ell^2}{R_2} \quad (*)$$

$$\text{Tương tự năng lượng toàn phần lúc sau ở ống lớn là: } E' = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{k\rho^2 \ell^2}{R_1} \quad (**)$$

$$\text{áp dụng định luật bảo toàn năng lượng } E = E' \rightarrow \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{k\rho^2 \ell^2}{R_2} = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{k\rho^2 \ell^2}{R_1}$$

$$\text{Từ đó rút ra: } V^2 = V_0^2 + 2 \frac{k\rho^2 \ell^2}{m} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \rightarrow V = \sqrt{V_0^2 + \frac{2k\rho^2 \ell^2}{m} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

cách giải thứ 2

Vì hình trụ là vật dẫn nên điện tích hưởng ứng xuất hiện trên hình trụ là : $q' = -\rho \cdot l$
 $= -q$

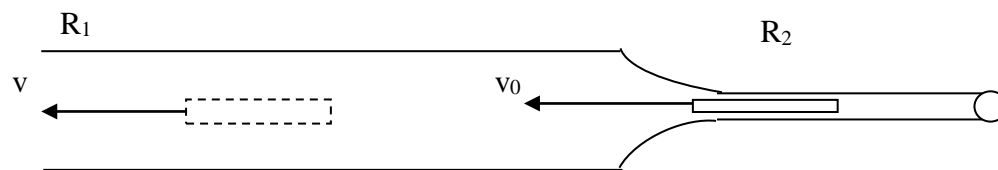
Năng lượng của vật ở đầu ống nhỏ là:

$$E_1 = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{K\rho^2 l^2}{R_2} \quad (1)$$

Năng lượng của vật khi nó c.đ tới đầu lớn của ống là: $E_2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K\rho^2l^2}{R_1}$ (2)

Theo BTNL từ (1) và (2) →

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{K\rho^2l^2}{R_2} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K\rho^2l^2}{R_1} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2K\rho^2l^2}{m} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$



Hình vẽ