I. V. Savelyev

PHYSICS

A General Course

MECHANICS

MOLECULAR PHYSICS

I

Mir Publishers
Moscow

I. V. SAVELYEV

PHYSICS

A GENERAL COURSE

(In three volumes)

VOLUME I

MECHANICS
MOLECULAR PHYSICS

MIR PUBLISHERS
MOSCOW

Translated from Russian by G. Leib

First published 1980
Revised from the 1977 Russian edition
Second printing 1985
Third printing 1989

Printed in the Union of Soviet Socialist Republics

ISBN 5-03-000901-9, 1977
ISBN 5-03-000900-0, 1980

AUTHOR'S PREFACE TO THE ENGLISH EDITION

The present book is the first volume of the three-volume general course in physics. The course is a result of twenty five year's work in the Department of General Physics of the Moscow Institute of Engineering Physics. I was in constant personal contact with my students not only at lectures, but also, perhaps even more importantly, at exercises, consultations, and examinations. These fruitful contacts helped me refine and improve the exposition of the various topics in the course.

The advice and friendly criticism of my colleagues in the department has also been a great help. I would like to make a special mention of the part played by N. B. Narozhny, who, in particular, is the author of the original and comparatively simple statistical derivation of the equation $\mathrm{d}S = \mathrm{d}'Q/T$ [phương trình. (??)].

In writing the book, I have done everything in my power to acquaint students with the basic ideas and methods in physics and to teach them how to think physically. This is why the book is not encyclopedic in its nature. It is mainly devoted to explaining the meaning of physical laws and showing how to apply them consciously. What I have tried to achieve is a deep knowledge of the fundamental principles of physics rather that a shallower acquaintance with the a wide range of questions.

While using the book, try not to memorise the material formalistically and mechanically, but logically, *i.e.*, memorise the material by thoroughly understanding it. I have tried to present physics not as a science for "cramming", not as a certain volume of information to be memorised, but as a clever, logical, and attractive science. It is left to the reader to judge the extent to which I have succeeded in doing this.

Acknowledging the fact that a thick volume by its very appearance makes a student despondent, I have done my utmost to limit the size of the course. This was achieved by carefully choosing the material which in my opinion should be included in a general course of physics. I also tried to be concise, but not at the expense of clarity.

Notwithstanding my desire to reduce the size, I considered it essential to include a number of mathematical sections in the course: on vectors, linear differential equations, the basic concepts of the theory of probability, etc. This was done to impart a "physical" tinge to the relevant concepts and relations. In addition, the mathematical "inclusions" make it possible to go on with the physics even if, as is often the case, the relevant material has not yet been covered in a mathematics course.

The present course is intended above all for higher technical schools with an extended syllabus in physics. The material has been arranged, however, so that the book can be used as a teaching aid for higher technical schools with ordinary syllabus simply omitting some sections.

Igor Savelyev

Moscow, July, 1979

Mục lục

INTRODUCTION

Physics is a science dealing with the most general properties and forms of motion of matter.

A classical definition of matter was given by V. Lenin in his book *Materialism and Empirio-Criticism*: “Matter is a philosophical category denoting the objective reality which is given to man by his sensations, and which is copied, photographed and reflected by our sensations, while existing independently of the”[1]. Two propositions are significant in this definition, namely, (1) matter is what exists objectively, *i.e.*, independently of anyone’s consciousness or sensations, and (2) matter is copied and reflected by our sensations and, consequently, is cognizable.

It follows from the definition of physics that it concentrates knowledge accumulated on the most general properties and phenomena of the world surrounding us. As academician S. Vavilov noted in one of his articles, “the extremely common character of a considerable part of the contents of physics, its facts and laws drew physics and philosophy together from time immemorial. . . . Sometimes physical statements have such a nature that they are difficult to distinguish and separate from philosophical statements, and a physicist must be a philosopher”.

Two kinds of matter are known at present: substance and field. The first kind of matter—substance—includes, for example, atoms, molecules, and all bodies built of them. Electromagnetic, gravitational, and other fields form the second kind of matter. The different kinds of matter can change into each other. For instance, an electron and a positron (representatives of substance) may transform into photons

[1] V. I. Lenin. *Collected Works*, Vol. 14, p. 130. Moscow, Foreign Languages Publishing House (1962).

(*i.e.*, into an electromagnetic field). The reverse process is also possible.

Matter is in continuous motion, which is understood to mean any change in general in dialectical materialism[2]. Motion is an inalienable property of matter, which, like matter itself, cannot be created or destroyed. Matter exists and moves in space and in time, which are forms of existence of matter.

The laws of physics are established by generalizing experimental facts. They express the objective regularities existing in nature. These laws are customarily expressed in the form of quantitative relationships between various physical quantities.

The fundamental method of investigation in physics is the running of an experiment, *i.e.*, the observation of the phenomenon being studied in accurately controlled conditions. The latter must permit one to watch the course of the phenomenon and reproduce it each time when these conditions are repeated. Phenomena can be produced experimentally that are not observed in nature. For example, more than ten of the chemical elements known at present have meanwhile not been discovered in nature and were obtained artificially by means of nuclear reactions.

Hypotheses are enlisted to explain experimental data. A hypothesis is a scientific assumption advanced to explain a definite fact or phenomenon and requiring verification and proving to become a scientific theory or law. The correctness of a hypothesis is verified by running the corresponding experiments and by determining whether the corollaries following from the hypothesis agree with the results of experiments and observations. A hypothesis that has successfully passed such verification and has been proved becomes a scientific law or theory.

A physical theory is a system of basic ideas summarizing experimental data and reflecting the objective regularities of nature. A physical

[2]Dialectical materialism is the name given to the Marxist-Leninist philosophy. The fundamental issue of any philosophy as to what is primary—matter or consciousness—is solved by dialectic materialism in favour of matter when it states that matter is primary and consciousness is secondary. The method of this philosophy is dialectics. It considers matter in constant motion and development whose source is contained in the internal contradictions inherent in objects and phenomena themselves.

theory explains a whole field of natural phenomena from a single viewpoint.
Physics is subdivided into the so-called classical physics and quantum physics. The term classical is applied to the physics whose creation was completed at the beginning of the 20th century. Classical physics was founded by Isaac Newton (1642-1727), who formulated the fundamental laws of classical mechanics. Newtonian mechanics proved to be exceedingly fruitful and mighty, and physicists acquired the conviction that any physical phenomenon can be explained with the aid of Newton's laws.
The edifice of classical physics built up by the end of the last century was very harmonious. Most physicists were convinced that they already knew everything about nature that could be known. The most perspicacious physicists, however, understood that the edifice of classical physics had weak spots. For example, the British physicist William Thomson (Lord Kelvin, 1824-1907) said that there are two dark clouds on the horizon of the cloudless sky of classical physics—the unsuccessful attempts to set up a theory of blackbody radiation, and the contradictory behaviour of ether—the hypothetical medium in which light waves were supposed to propagate. The persistent attempts to surmount these difficulties led to unexpected results. To solve these problems, which were beyond the possibilities of classical physics, it became necessary to revise quite radically the established, habitual notions and introduce concepts that were alien to the spirit of classical physics. Max Planck (1858-1947) succeeded in solving the problem of blackbody radiation in 1900 by introducing the concept of light emission in separate portions—quanta. Thus, at the threshold of the 20th century, the concept of the quantum appeared. It plays an exceedingly important part in modern physics and has resulted in the creation of quantum mechanics.
The contradictory nature of the experimental facts relating to ether induced Albert Einstein (1879-1955) to revise the notions of space and time that were considered to be obvious from Newton's times. The result was the appearance of the theory of relativity. The latter gives equations of motion appreciably differing from those of Newtonian mechanics for bodies travelling with speeds that are noticeable in comparison with the speed of light.

The year 1897 saw the discovery of the electron. The atoms of all the chemical elements were found to contain these particles. Thus, atoms, previously considered indivisible, appeared to have a complicated structure.
The beginning of the 20th century was thus marked in physics by the radical breaking down of numerous habitual concepts and notions. New physical discoveries and theories destroyed the notions of the structure of matter formed by many physicists. Some of them interpreted this as the vanishing of matter. Many physicists lapsed into idealism, and a crisis began in physics.
V. Lenin in his book *Materialism and Empirio-Criticism* written in 1908 gave annihilating criticism of "physical" idealism. He showed that the new discoveries indicate not the vanishing of matter, but the vanishing of the limit up to which matter was known before that time. "Matter disappears", wrote Lenin, "means that the limit within which we have hitherto known matter disappears and that our knowledge is penetrating deeper; properties of matter are likewise disappearing which formerly seemed absolute, immutable, and primary (impenetrability, inertia, mass, etc.) and which are now revealed to be relative and characteristic only of certain states of matter. For the sole 'property' of matter with whose recognition philosophical materialism is bound up is the property of being an objective reality, of existing outside the mind."[3].
The process of recognizing the world is infinite. Our knowledge at any given stage of development of science is due to the historically achieved level of cognition and cannot be considered as final or complete. It is of necessity relative knowledge, *i.e.*, requires further development, further verification, and more precise definition. At the same time, any truly scientific theory, notwithstanding its relativity and incompleteness, contains elements of absolute, *i.e.*, complete, knowledge, and thus signifies a step in the cognition of the objective world. For instance, mechanics based on Newton's laws is not correct, strictly speaking. But for a certain range of phenomena, this mechanics is quite satisfactory. Thus, the development of science did not cross out Newtonian mechanics. It only established the limits within which

[3] V. I. Lenin. *Collected Works*, Vol. 14, p. 260. Moscow, Foreign Languages Publishing House (1962).

it is correct. Newtonian mechanics formed a constituent part of the general edifice of the physical science.

The beginning of the 20th century is characterized by persistent attempts to penetrate into the internal structure of atoms. The key to determining their structure was found to be the studying of atomic spectra. The theory of the atom developed by Niels Bohr (1885-1962) in 1913 was the first striking success in explaining the observed spectra. This theory, however, has obvious features of inconsistency: in addition to the motion of an electron in an atom obeying the laws of classical mechanics, the theory imposes special quantum restrictions on this motion. The theory soon had to pay for this lack of consistency. After the first successes in explaining the spectra of the simplest atom—that of hydrogen—it was found that Bohr's theory is unable to explain the behaviour of atoms with two or more electrons. The need to develop a new comprehensive theory of atoms became pressing. A bold hypothesis of Louis de Broglie put forward in 1924 placed the cornerstone in such a theory. It was known by that time that light, while being a wave process, also exhibits a corpuscular nature in a number of cases, *i.e.*, behaves like a stream of particles. De Broglie put forth the idea that the particles of a substance, in turn, should display wave properties too in definite conditions. De Broglie's hypothesis soon received a brilliant experimental confirmation—it was proved that a wave process is associated with the particles of a substance, and it must be taken into account when considering the mechanics of an atom. A result of this discovery was the development by Erwin Schrödinger (1887-1961) and Werner Heisenberg (1901-1976) of a new physical theory—wave or quantum mechanics. The latter achieved striking successes in explaining atomic processes and the structure of a substance. Results were obtained that showed excellent agreement with experimental data when 'it was found possible to surmount the mathematical difficulties.

The latest decades were noted by remarkable achievements in the field of studying the atomic nucleus. Scientists and engineers have mastered nuclear processes to such an extent that the practical use of nuclear energy has become possible. One of the leading places in this field belongs to Soviet physics. Particularly, the first atomic power plant in the world was erected in the USSR.

Finally, in recent years, the walls of laboratories created by the hands of man were moved apart beyond the limits of our globe. On October 4, 1957, an artificial satellite of the Earth was launched in the Soviet Union the first time in history. It was a small laboratory outfitted with apparatus for scientific research. April 12, 1961, saw the first flight of a man into outer space. The first Soviet cosmonaut, Yuri Gagarin, flew around the Earth and landed safely. The first space rockets were built in the Soviet Union. They left the field of the Earth's attraction and transmitted to the Earth by means of radio signals valuable results of studying outer space and, particularly, photographs of the reverse side of the Moon. In 1969, U.S. astronauts landed on the Moon. In 1975, two Soviet automatic spaceships made a soft landing on Venus and transmitted valuable information on the physical conditions on this planet, and also photographs of its surface.

There is no doubt that the nearest future will be marked with new fundamental discoveries in the science of physics.

PART I

CƠ SỞ VẬT LÍ CỦA CƠ HỌC

Chương 1

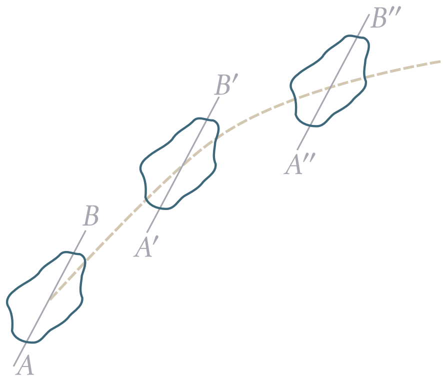
ĐỘNG HỌC

1.1 Chuyển động cơ học

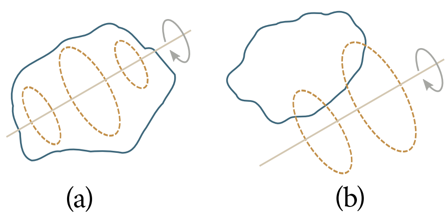
Chuyển động cơ học có mặt trong sự chuyển dịch của các vật hoặc của các phần của vật với nhau là dạng chuyển động đơn giản nhất của vật chất. Chúng ta thường xuyên quan sát được sự dịch chuyển của các vật trong đời sống hàng ngày. Vì thế mà các khái niệm cơ học là rất cụ thể. Điều này giải thích tại sao trong tất cả các khoa học tự nhiên thì cơ học phát triển rộng rãi trước các khoa học khác.
Tập hợp các vật được tách riêng ra để nghiên cứu được gọi là một **hệ cơ học**. Cần phải đưa các vật nào vào hệ là tùy thuộc vào tính chất của các bài toán phải giải. Đôi khi hệ có thể gồm một vật duy nhất.
Trên đây đã chỉ ra rằng trong cơ học sự thay đổi vị trí tương hỗ của các vật được gọi là sự chuyển động. Nếu tưởng tượng một vật cô lập tách biệt nằm trong không gian, trong đó không có các vật khác thì ta không thể nói về chuyển động của nó, vì chẳng có cái gì để vật này có thể thay đổi vị trí của mình đối với cái đó. Từ đó suy ra rằng nếu ta tập trung nghiên cứu chuyển động của một vật nào đó thì nhất thiết cần phải chỉ ra chuyển động này xảy ra đối với các vật nào khác.
Chuyển động xảy ra cả trong không gian và cả trong thời gian (không gian và thời gian là các dạng không thể tách rời được của sự tồn tại của vật chất).Do đó để mô tả chuyển động cũng cần phải xác định thời gian. Điều này được thực hiện nhờ đồng hồ.
Tập hợp các vật không chuyển động đối với nhau mà người ta khảo

sát sự chuyển động đối với chúng và các đồng hồ tính thời gian tạo thành một **hệ quy chiếu**.
Chuyển động của cùng một vật đối với các hệ quy chiếu khác nhau có thể có tính chất khác nhau. Để làm ví dụ ta hãy tưởng thượng một đoàn tàu đang tăng vận tốc. Giả thử rằng một hành khách đi dọc theo hành lang của một toa tàu với vận tốc không đổi. Khi đó chuyển động của hành khách đối với toa tàu là chuyển động đều, còn đối với mặt đất là chuyển động có gia tốc.
Mô tả chuyển động của vật có nghĩa là chỉ ra vị trí trong không gian và vận tốc của vật tại mỗi thời điểm. Muốn vậy khi cho trạng thái của một hệ cơ, cần phải chỉ ra vị trí và vận tốc của tất cả các vật tạo thành hệ. Bài toán điển hình của cơ học là nếu biết trạng thái của một hệ tại thời điểm ban đầu t_0 nào đó, và cả những định luật chi phối sự chuyển động thì xác định được trạng thái của hệ tại mọi thời điểm t tiếp theo.
Ta hãy chú ý rằng không có một bài toán vật lý nào có thể được giải một cách chính xác tuyệt đối. Người ta luôn luôn thu được lời giải gần đúng. Mức độ gần đúng được xác định bằng tính chất của bài toán một cách gần đúng, người ta bỏ qua một số sự kiện mà trong trường hợp đã cho là không quan trọng. Chẳng hạn như, thường có thể bỏ qua các kích thước của vật mà ta nghiên cứu chuyển động của nó. Chẳng hạn, khi nghiên cứu chuyển động của Trái đất xung quanh Mặt trời thì hoàn toàn có thể bỏ qua các kích thước của Trái đất. Do đó sự mô tả chuyển động được đơn giản hóa một cách đáng kể, nghĩa là có thể xác định được vị trí của Trái đất trong không gian bằng một điểm.
Một vật mà trong những điều kiện của bài toán đã cho có thể bỏ qua các kích thước của nó được gọi là một **chất điểm**. Vấn đề là ở chỗ có thể coi một vật cụ thể đã cho như một chất điểm hay không, sẽ tùy thuộc không phải vào các kích thước của vật này mà vào các điều kiện của bài toán. Cùng một vật, trong những trường hợp này có thể coi là một chất điểm còn trong những trường hợp khác phải được coi như một vật lớn.
Khi nói về một vật nào đó như về một chất điểm, ta trừu tượng hóa các kích thước của nó. Một sự trừu tượng hóa thứ hai ta đã từng gặp trong cơ học - đó là vật rắn tuyệt đối. Trong thiên nhiên không có các vật hoàn toàn không biến dạng. Mỗi vật dưới tác dụng của các lực

đặt lên nó, sẽ bị biến dạng hoặc nhiều hoặc ít, tức là biến đổi hình dạng và các kích thước của mình. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp có thể bỏ qua các sự biến dạng của các vật khi nghiên cứu chuyển động của chúng. Nếu điều này xảy ra thì người ta gọi vật là vật rắn tuyển đối. Như vậy, một vật mà trong những điều kiện đã cho của bài toán có thể bỏ qua các biến dạng được gọi là **vật rắn tuyệt đối**.
Có thể phân tích mỗi chuyển động của vật rắn thành hai dạng chuyển động cơ bản là **chuyển động tịnh tiến** và **chuyển động quay**.
Chuyển động tịnh tiến - đó là chuyển động mà một đường thẳng bất kỳ gắn với vật chuyển động sẽ vẫn song song với chính nó (hình. 1.1).
Trong chuyển động quay, mọi điểm của vật được chuyển động theo các đường tròn có tâm nằm trên cùng một đường thẳng gọi là **trục quay** (hình. 1.2). Trục quay có thể nằm ở ngoài vật (xem hình. 1.2b).

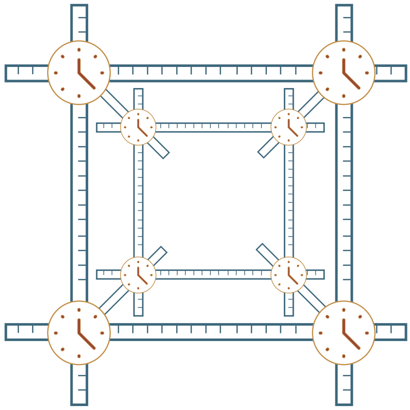


Hình 1.1



Hình 1.2

Vì khi nói về một vật nào đó như về một chất điểm ta lãng quên quảng tính của nó nên khái niệm chuyển động quay quanh một trục xuyên qua nó là không áp dụng được cho vật đó.
Để có được khả năng mô tả chuyển động một cách định lượng, cần phải gắn với các vật tạo thành hệ quy chiếu một hệ tọa độ nào đó, chẳng hạn hệ tọa độ Descartes. Khi đó có thể sách định vị trí của chất điểm nếu cho ba số x, y, z là các tọa độ Descartes của điểm này.
Có thể thực hiện một hệ tọa độ, bằng việc chọn một mạng vuông góc gồm những thanh hoặc những thước tỷ lệ như nhau (hình. 1.3).
Tại các nút mạng này cần phải đặt các đồng hồ đồng bộ với nhau và giống hệt nhau. Vị trí của chất điểm và thời điểm ứng với nó được ghi theo các thang tỷ lệ và đồng hồ ở gần chất điểm nhất.



Hình 1.3

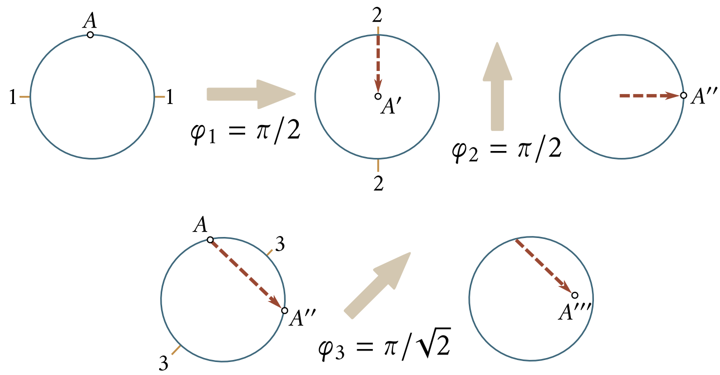
Đề cập tới một chất điểm, sẽ đơn giản hơn là đề cập tới một vật có kích thước dài. Do đó bước đầu chúng ta sẽ nghiên cứu cơ học của chất điểm, và sau đó ta sẽ chuyển qua cơ học của vật rắn. Ta bắt đầu trình bày từ động học, sau đó ta sẽ đi vào động lực học. Ta nhớ rằng **động học** nghiên cứu sự chuyển động của các vật mà không chú ý tới các nguyên nhân gây ra chuyển động này. **Động lực học** nghiên cứu chuyển động của các vật liên hệ với các nguyên nhân (với các tương tác giữa các vật) gây ra một tính chất nào đó của chuyển động.

1.2 Một số kiến thức về vector

Định nghĩa vector. Người ta gọi vector là một đại lượng được đặc trưng bằng trị số và hướng và ngoài ra có thể cộng theo quy tắc hình bình hành[1]. Yêu cầu sau cùng này là rất quan trọng. Có thể nêu ra các đại lượng mà chúng được đặc trưng bằng trị số và hướng, tuy nhiên được cộng khắc hẳn với các vector. Để làm ví dụ, ta hãy đưa ra sự quay của một vật quanh một trục nào đó một góc hữu hạn φ. Có thể biểu diễn sự quay như thế dưới dạng một đoạn thẳng có độ dài là φ, hướng theo trục mà phép quay được thực hiện xung quanh nó,

[1]Theo một định nghĩa chặt chẽ hơn, người ta gọi vector là một tập hợp ba đại lượng biến đổi theo một quy luật xác định khi quay các trục tọa độ.

về phía liên kết với chiều quay bằng quy tắc cái đinh ốc thuận. Trên hình. 1.4 ở dãy trên người ta đưa ra hai phép quay liên tiếp nhau của một quả cầu theo những góc $\pi/2$ được biểu diễn bằng các đoạn thẳng φ_1 và φ_2. Phép quay thứ nhất được thực hiện xung quanh trục 1—1, dịch chuyển điểm A của quả cầu sang vị trí A', được thực hiện xung quanh trục 2—2, sang vị trí A''. Có thể đạt được cùng một kết quả như thế (tức là dịch chuyển điểm A sang vị trí A'') bằng cách quay quả cầu xung quanh trục 3—3 (xem dãy dưới ở hình. 1.4) một góc π. Do đó cần phải coi phép quay đó như tổng của các phép quay φ_1 và φ_2. Tuy nhiên không thể có được nó từ những đoạn thẳng φ_1 và φ_2, bằng cách cộng chúng theo qui tắc hình bình hành. Một phép cộng như thế cho một đoạn thẳng có độ dài $\pi/\sqrt{2}$ thay cho độ dài π cần phải có. Phép quay một góc $\pi/\sqrt{2}$ dịch chuyển điểm A tới điểm A'''. Từ đó suy ra rằng các phép quay những góc hữu hạn được biểu diễn bằng những đoạn thẳng có hướng đều không có các tính chất của các vector.



Hình 1.4

Trị số của vector được gọi là **module** của nó. Nói cách khác, module cho độ dài của vector. Module của vector là một vô hướng, do đó luôn luôn dương.

Trên các hình vẽ, các vector được biểu diễn dưới dạng các đoạn thẳng với mũi tên ở đầu. Độ dài của đoạn thẳng xác định module của vector trong tỷ lệ xích được thiết lập, còn mũi tên chỉ chiều của vector.

Người ta thường ký hiệu các vector bằng các chữ in đậm, chẳng hạn như $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{v}$ và $\boldsymbol{F}$. Cũng như thế nhưng in thường được dùng để ký hiệu module của vector $\boldsymbol{a}$[2]. Đôi khi để ký hiệu module, đành phải dùng ký hiệu của vector đặt giữa hai vạch thẳng đứng: $|a|$ = module của vector $\boldsymbol{a}$. Cách ký hiệu như thế được sử dụng chẳng hạn cho module của tổng các vector $\boldsymbol{a}_1$ và $\boldsymbol{a}_2$:

$$|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2| = \text{module của vector } (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2). \tag{1.2.1}$$

Trong trường hợp này ký hiệu $a_1 + a_2$ có nghĩa là tổng các module của các vector số hạng, nói chung, không bằng module của tổng các vector (đẳng thức chỉ xảy ra trong trường hợp các vector có cùng hướng).

Các vector hướng dọc theo các đường thẳng song song cùng chiều hoặc ngược chiều nhau được gọi là các **vector đồng phương**. Các vector nằm trong các mặt phẳng song song được gọi là các **vector đồng phẳng**. Bằng sự dịch chuyển song song, các vector đồng phương có thể được đặt dọc theo cùng một đường thẳng, còn các vector đồng phẳng có thể được quy về một mặt phẳng.

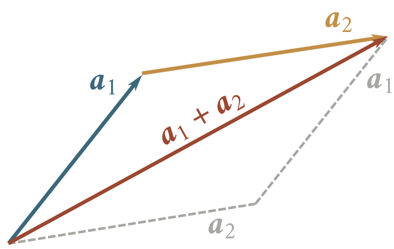
Những vector đồng phương trùng nhau về module có cùng hướng được xem là bằng nhau[3]

Phép cộng và trừ các vector. Để thuận tiện hơn, trong thực tế, khi cộng các vector người ta không vẽ hình bình hành. Như đã thấy trong hình. 1.5 người ta sẽ đạt được cùng một kết quả nếu đặt gốc của vector thứ hai trùng với ngọn của vector thứ nhất và sau đó vẽ vector tổng từ gốc của vector thứ nhất tới ngọn của vector thứ hai. Phương pháp như thế đặc biệt có lợi trong trường hợp khi phải cộng một số lượng vector lớn hơn hai (hình. 1.6).

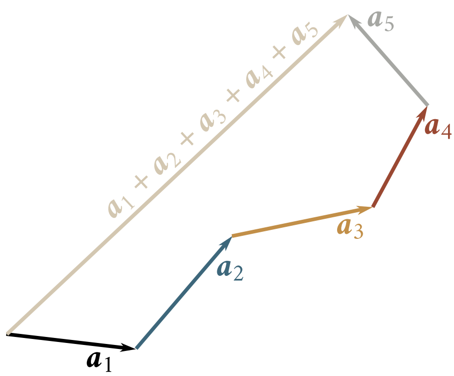
Người ta gọi hiệu của hai vector $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$ là một vector $\boldsymbol{c}$ mà khi cộng nó với $\boldsymbol{b}$ lại được vector $\boldsymbol{a}$ (hình. 1.7—về vector $\boldsymbol{b}$ được biểu diễn bằng đường chấm chấm sẽ nói ở dưới). Chỉ có thể viết module của hai

[2] Trong khi viết, các vector được ký hiệu bằng các chữ với mũi tên ở trên chúng (chẳng hạn như $\vec{a}$). Trong trường hợp này, chính chữ đó mà không có mũi tên sẽ là module của vector.

[3] Lưu ý đến các **vector tự do**, nghĩa là các vector mà chúng có thể được đặt tại bất kỳ điểm nào trong không gian. Người ta cũng coi các **vector trượt** là các vector có gốc có thể được đặt tại bất kỳ điểm nào trên đường thẳng mà các vector được hướng dọc theo đó và các **vector buộc** nghĩa là các vector được đặt tại một điểm xác định. Hai dạng vector sau cùng này có thể được biểu thị qua các vector tự do: vì lý do này mà khái niệm vector tự do, thường được gọi đơn giản là vector, đã được đặt làm cơ sở cho phép tính vector.



Hình 1.5



Hình 1.6

vector giống như module của tổng [xem phương trình. (1.2.1)] bằng các vạch thẳng đứng:

$$|\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2| = \text{module của vector } (\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2), \tag{1.2.2}$$

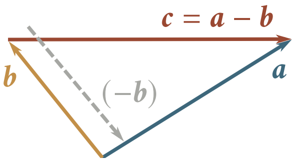
vì ký hiệu $a_1 - a_2$ là hiệu các module của các vector $\boldsymbol{a_1}$ và $\boldsymbol{a_2}$ mà nói chung không bằng không bằng module của hiệu.
Phép nhân một vector với một vô hướng. Kết quả nhân vector $\boldsymbol{a}$ với vô hướng α ta được vector mới $\boldsymbol{b} = \alpha$ có module lớn gấp $|\alpha|$ lần module của vector $\boldsymbol{a}$ ($b = |\alpha|a$). Chiều của vector $\boldsymbol{b}$ hoặc trùng với chiều của vector $\boldsymbol{a}$ (nếu $\alpha > 0$), hoặc ngược với chiều của vector $\boldsymbol{a}$ (nếu $\alpha < 0$). Từ điều đã nói trên suy ra rằng, phép nhân với -1 sẽ đổi ngược chiều của vector. Do đó các vector $\boldsymbol{a}$ và $-\boldsymbol{a}$ có các module như nhau nhưng ngược về chiều. Theo hình. 1.7 dễ dàng khẳng định rằng phép trừ vector $\boldsymbol{a}$ với vector $\boldsymbol{b}$ tương đương với việc thêm vector $-\boldsymbol{b}$ và vector $\boldsymbol{a}$.
Từ định nghĩa về phép toán nhân một vector với một vô hướng suy ra rằng mọi vector $\boldsymbol{a}$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\boldsymbol{a} = a\,\hat{\boldsymbol{e}}_a, \tag{1.2.3}$$

trong đó a là module của vector $\boldsymbol{a}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_a$là vector có module bằng đơn vị và cùng chiều với vector $\boldsymbol{a}$ (hình. 1.8).
Vector $\hat{\boldsymbol{e}}_a$ được gọi là **vector đơn vị** hoặc là **chuẩn** của vector $\boldsymbol{a}$. Có thể biểu diễn chuẩn dưới dạng

$$\hat{\boldsymbol{e}}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{a}, \tag{1.2.4}$$

từ đó suy ra rằng chuẩn là một đại lượng không có thứ nguyên.



Hình 1.7

Hình 1.8

Có thể đưa ra các chuẩn không chỉ cho các vector mà cả cho các hướng bất kỳ trong không gian. Chẳng hạn như $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ là chuẩn của trục tọa độ x, $\hat{\boldsymbol{e}}_n$ là chuẩn của pháp tuyến của đường hoặc mặt cong, and $\hat{\boldsymbol{e}}_\tau$ là chuẩn của tiếp tuyến của đường cong.

Sự phụ thuộc tuyến tính giữa các vector. Ta hãy xét ba vector không đồng phương $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ và $\boldsymbol{c}$ nằm trên một mặt phẳng. Từ hình. 1.9 rõ ràng là một vector bất kỳ trong chúng ($\boldsymbol{c}$ chẳng hạn) có thể được biểu diễn qua hai vector kia nhờ hệ thức

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \tag{1.2.5}$$

trong đó α và β là các số nào đó (đối với trường hợp trình bày trên hình: $\alpha > 1$, $-1 < \beta < 0$). Từ đó ta kết luận rằng vector $\boldsymbol{c}$ bất kỳ nằm trong một mặt phẳng với các vector không đồng phương, $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$ có thể được biểu diễn qua các vector này nhờ hệ thức tuyến tính(1.2.5). Với các vector cố định $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$ một vector thứ ba bất kỳ được xác định đơn trị bằng hai đại lượng α và β.

Giả sử cho ba vector $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ mà từng vector trong chúng không đồng phẳng với hai vector còn lại[4] Tương tự như phương trình. (1.2.5) dễ dàng đoán ra rằng vector $\boldsymbol{d}$ bất kỳ có thể biểu diễn như một tổ hợp tuyến tính của các vector đã cho:

$$\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}, \tag{1.2.6}$$

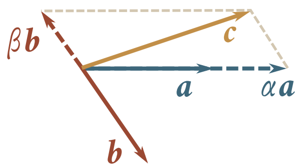
Với các vector cố định $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ và $\boldsymbol{c}$ vector $\boldsymbol{d}$ bất kỳ được xác định đơn trị bằng ba đại lượng α, β và γ, mà từng đại lượng có thể hoặc dương hoặc âm.

[4]Hai vector là luôn luôn đồng phẳng. Điều này suy ra từ chỗ là có thể làm trùng gốc của chúng bằng một sự dịch chuyển song song. Khi đó chúng được đặt trong một mặt phẳng.

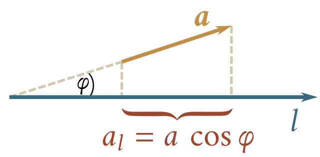
Hình chiếu của một vector. Ta xét một hướng nào đó trong không gian mà ta quy định là trục l (hình. 1.10). Giả thử vector $\boldsymbol{a}$ tạo với trục l một góc φ l[5]. Đại lượng

$$a_l = a \cos\varphi \tag{1.2.7}$$

(a là module của vector) được gọi là hình chiếu của vector $\boldsymbol{a}$ trên trục l.Hình chiếu được ký hiệu cùng một chữ như vector có thêm một chỉ số chỉ hướng mà vector được chiếu lên đó.



Hình 1.9



Hình 1.10

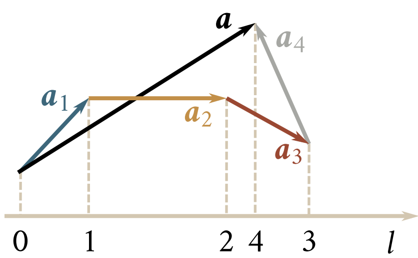
Hình chiếu của vector là một đại lượng đại số. Nếu vector tạo với chiều đã cho một góc nhọn thì $\cos\varphi > 0$, cho nên hình chiếu là dương. Nếu góc φ là góc tù thì $\cos\varphi < 0$ và do đó hình chiếu là âm. Khi vector vuông góc với trục đã cho thì hình chiếu bằng không.
Hình chiếu của vector có một ý nghĩa hình học đơn giản. Nó bằng khoảng cách giữa các hình chiếu lên trục của gốc và ngọn của đoạn thẳng biểu diễn vector đã cho. Trong trường hợp $\varphi < \pi/2$ thì khoảng cách này lấy dâu cộng, trong trường hợp $\varphi > \pi/2$, nó lấy dấu trừ.
Giả thử $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$ (hình. 1.11). Từ hình vẽ dễ dàng kết luận rằng hình chiếu của vector tổng a lên một hướng nào đó bằng tổng hình chiếu của các vector số hạng:

$$a_l = a_{1l} + a_{2l} + a_{3l} + a_{4l}. \tag{1.2.8}$$

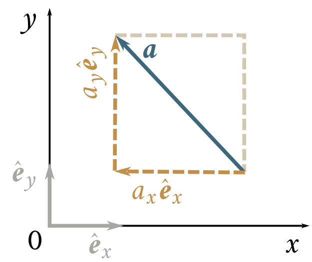
Ta hãy nhớ rằng, khi lấy tổng các hình chiếu của các vector biểu diễn trên hình. 1.11, cần phải lấy các khoảng cách 0—1, 1—2, và 2—3 với dấu cộng còn khoảng cách 3—4 lấy dấu trừ. Công thức (1.2.8) vẫn đúng với một số bất kỳ các số hạng.
Biểu diễn vector qua các hình chiều của nó lên các trục tọa độ. Ta hãy lấy các trục tọa độ Descartes và xét một vector $\boldsymbol{a}$ nằm

[5]Nếu một đường thẳng mà vector $\boldsymbol{a}$ luôn hướng dọc theo đó và trục l không cắt nhau thì để xác định góc φ cần phải lấy một đường thẳng song song với vector $\boldsymbol{a}$ và cắt trục l. Góc giữa đường thẳng này và trục l sẽ là góc φ mà ta cần đến.

trong mặt phẳng vuông góc với trục z (hình. 1.12). Ta hãy đưa vào các chuẩn của các trục tọa độ, tức là các vector đơn vị $\hat{\boldsymbol{e}}_x$, $\hat{\boldsymbol{e}}_y$, $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ ($\hat{\boldsymbol{e}}_z$ không được vẽ trên hình, nó vuông góc với mặt phẳng của hình vẽ và hướng về phía chúng ta). Ta hãy chú ý rằng bộ ba chuẩn này hoàn toàn xác định hệ tọa độ và do đó được gọi là **cơ sở của hệ tọa độ**.



Hình 1.11



Hình 1.12

Từ hình. 1.12 rõ ràng có thể biểu diễn vector $\boldsymbol{a}$ dưới dạng một tổ hợp tuyến tính chuẩn $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ và $\hat{\boldsymbol{e}}_y$ [xem phương trình. (1.2.5)]:

$$\boldsymbol{a} = a_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_y\hat{\boldsymbol{e}}_y.$$

Các hình chiếu của vector lên các trục tọa độ đóng vai trò các hệ số α và β. Trong ví dụ được xét, hình chiếu a_x là âm, do đó vector $a_x\hat{\boldsymbol{e}}_x$ có chiều ngược lại với chiều của chuẩn $\hat{\boldsymbol{e}}_x$.

Ta đã lấy vector $\boldsymbol{a}$ vuông góc với trục z, do đó vector $a_z = 0$. Trong trường hợp tổng quát khi tất cả ba hình chiếu của vector đều khác không:

$$\boldsymbol{a} = a_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + a_z\hat{\boldsymbol{e}}_z, \tag{1.2.9}$$

Như vậy, có thể biểu diễn một vector bất kỳ quá các hình chiếu của nó lên các trục tọa độ được gọi là **các thhành phần** của vector.

Các đại lượng a_x, a_y, a_z bằng (chính xác đến dấu) các cạnh của một hình hộp chữ nhật mà đường chéo lơn của nó là vector $\boldsymbol{a}$ (hình. 1.13). Do đó có hệ thức

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{1.2.10}$$

Giả thử $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Biểu diễn từng vector theo đúng công thức phương trình. (1.2.9), ta có

$$c_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + c_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + a_z\hat{\boldsymbol{e}}_z = (a_x + b_x)\hat{\boldsymbol{e}}_x + (a_y + b_y)\hat{\boldsymbol{e}}_y + (a_z + b_z)\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

(ta đưa ra ngoài các dấu ngoặc các thừa số chung $\hat{\boldsymbol{e}}_x$, $\hat{\boldsymbol{e}}_y$ và $\hat{\boldsymbol{e}}_z$)· Các vector bằng nhau đều có các hình chiếu bằng nhau trên các trục tọa độ. Trên cơ sở này có thể viết là

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad a_z = a_z + b_z \tag{1.2.11}$$

[so sánh với phương trình. (1.2.8)]. Các công thức (1.2.11) là biểu thúc giải tích của qui tắc cộng các vector. Chúng đúng với một số bất kỳ các số hạng

Bán kính vector. Người ta gọi bán kính vector $\boldsymbol{r}$ của một điểm nào đó là một vector vẽ từ gốc tọa độ tới điểm đã cho (hình. 1.14). Các hình chiếu của nó lên các trục tọa độ đều bằng các tọa độ Descartes của điểm đã cho:

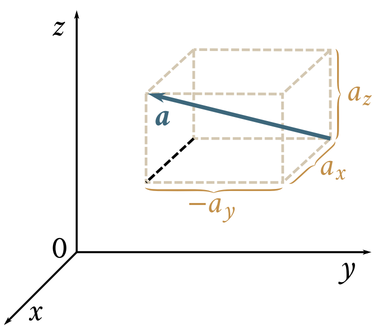
$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z. \tag{1.2.12}$$

Do đó, ứng với phương trình. (1.2.9) có thể biểu diễn bán kính vector dưới dạng

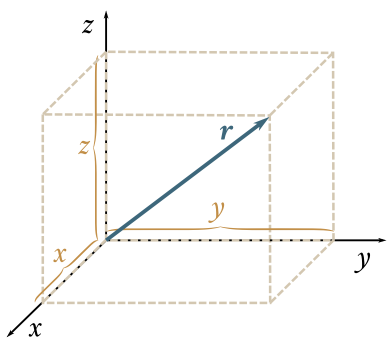
$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\hat{\boldsymbol{e}}_y + z\hat{\boldsymbol{e}}_z. \tag{1.2.13}$$

Theo phương trình. (1.2.10)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{1.2.14}$$



Hình 1.13



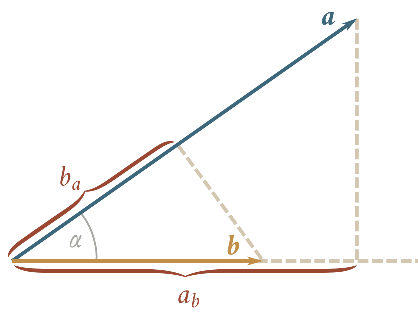
Hình 1.14

Tích vô hướng của các vector. Có thể nhân hai vector $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$ với nhau theo hai cách, một cách dẫn tới đại lượng vô hướng, cách kia cho kết quả là một vector mới nào đó. Ứng với điều này có hai tích của các vector—tích vô hướng và tích vector. Ta hãy chú ý rằng *không có phép tính chia một vector cho một vector.*

Người ta gọi tích vô hướng của các vector $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$ là một vô hướng bằng tích các module của các vector này với cos của góc α giữa chúng:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\alpha \tag{1.2.15}$$

(hình. 1.15). When writing a scalar product, the symbols of the vectors being multiplied are usually written next to each other with dot between them (this is why a scalar product is also called a dot product; sometimes nothing is used between the symbols)[6]. Equation (1.2.15) expresses an algebraic quantity: when α is acute, we have $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} > 0$, and when it is obtuse, we have $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} < 0$. The scalar product of mutually perpendicular vectors ($\alpha = \pi/2$) equals zero.



Hình 1.15

Ta hãy chú ý rằng bình phương của một vector luôn luôn được hiểu ngầm là tích vô hướng của vector với chính nó:

$$\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = aa\cos\alpha = a^2. \tag{1.2.16}$$

Như vậy bình phương của một vector bằng bình phương module của nó. Đặc biệt là bình phương của một chuẩn bất kỳ bằng đơn vị:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_x^2 = \hat{\boldsymbol{e}}_y^2 = \hat{\boldsymbol{e}}_z^2 = 1. \tag{1.2.17}$$

[6]The dot symbol between vectors is preferred in the LaTeXversion to adopt a more modern approach.

Đồng thời ta hãy chú ý rằng do các chuẩn vuông góc với nhau nên các tích vô hướng có dạng $\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k$ đều bằng không, nếu $i \neq k$.
Dùng ký hiệu Kronecker δ_{ik} được định nghĩa như sau:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = k, \\ 0, & \text{if } i \neq k. \end{cases} \tag{1.2.18}$$

là rất tiện lợi.
Nếu sử dụng ký hiệu này thì có thể biểu thị các tính chất đã thiết lập ở trên của các tích vô hướng các chuẩn của các trục tọa độ bằng một công thức:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k = \delta_{ik} \quad (i, k = x, y, z) \tag{1.2.19}$$

(các chỉ số i và k có thể lấy các giá trị x, y và z độc lập với nhau).
Từ định nghĩa (1.2.15) suy ra rằng, tích vô hướng có tính giao hoán, nghĩa là không phụ thuộc vào thứ tự các nhân tử:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}. \tag{1.2.20}$$

Có thể viết biểu thức (1.2.15) theo một số cách:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos \alpha = (a \cos \alpha)\, b = a\, (b \cos \alpha).$$

Từ hình. 1.15 rõ ràng là $a \cos \alpha$ bằng a_b là hình chiếu của vector $\boldsymbol{a}$ lên hướng của vector $\boldsymbol{b}$. Một cách tương tự, $b \cos \alpha = b_a$ là hình chiếu của vector $\boldsymbol{b}$ lên hướng của vector $\boldsymbol{a}$. Do đó có thể nói rằng, người ta gọi tích vô hướng của hai vector là một vô hướng bằng tích module của một vector nhân tử với hình chiếu của vector kia lên hướng của vector này:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_b b = a b_a. \tag{1.2.21}$$

Nếu để ý rằng hình chiếu của tổng các vector bằng tổng các hình chiếu của các vector số hạng thì ta có thể viết:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \ldots) = a(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \ldots)_a = a(b_a + c_a + \ldots) = ab_a + ac_a + \ldots = ab + ac + \ldots. \tag{1.2.22}$$

Từ đó suy ra rằng tích vô hướng của các vector có tính phân phối, nghĩa là tích của vector $\boldsymbol{a}$ với tổng một số vector bằng tổng các tích của vector $\boldsymbol{a}$ với mỗi vector số hạng được lấy tách biệt.

Biểu diễn các vector nhân tử dưới dạng phương trình. (1.2.9) và sử dụng tính phân phối của tích vô hướng, ta có:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + a_z\hat{\boldsymbol{e}}_z)(b_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + b_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + b_z\hat{\boldsymbol{e}}_z)\\ &= a_xb_x\hat{\boldsymbol{e}}_x\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_xb_y\hat{\boldsymbol{e}}_x\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y + a_xb_z\hat{\boldsymbol{e}}_x\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z + a_yb_x\hat{\boldsymbol{e}}_y\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_yb_y\hat{\boldsymbol{e}}_y\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y\\ &\quad + a_yb_z\hat{\boldsymbol{e}}_y\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z + a_zb_x\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_zb_y\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y + a_zb_z\hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z.\end{aligned}$$

Bây giờ hãy chú ý đến phương trình. (1.2.19). Kết quả là ta được biểu thức của tích vô hướng qua các hình chiếu của các vector nhân tử:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_x + a_zb_z. \tag{1.2.23}$$

Ta chú ý rằng khi quay các trục tọa độ thì các hình chiếu của các vector trên các trục này sẽ bị biến đổi. Tuy nhiên đại lượng $ab\cos\alpha$ không phụ thuộc vào việc chọn trục. Từ đó ta kết luận rằng các biến đổi hình chiếu của các vector $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$ khi quay các trục mang một đặc tính là tổ hợp của chúng có dạng phương trình. (1.2.23) vẫn bất biến (không biến đổi):

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_x + a_zb_z = \text{inv}. \tag{1.2.24}$$

Dễ dàng hiểu được rằng có thể biểu diễn hình chiếu của vector $\boldsymbol{a}$ lên hướng l [xem phương trình. (1.2.7)] dưới dạng

$$a_l = \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_l, \tag{1.2.25}$$

trong đó $\hat{\boldsymbol{e}}_l$ là chuẩn của hướng l. Một cách tương tự,

$$a_x = \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x,\quad a_y = \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y,\quad a_z = \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_z. \tag{1.2.26}$$

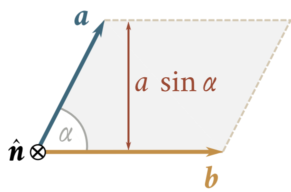
Tích vector. Người ta gọi vector $\boldsymbol{c}$ được xác định bằng công thức

$$\boldsymbol{c} = ab\sin(\alpha)\hat{\boldsymbol{n}}, \tag{1.2.27}$$

là tích vector của các vector $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$.
Trong đó a và b là các module của các vector nhân tử, α là góc ở giữa các vector, $\hat{\boldsymbol{n}}$ là vector đơn vị của pháp tuyến[7] với mặt phẳng chứa các vector $\boldsymbol{a}$ và $\boldsymbol{b}$ (hình. 1.16).

[7]Ký hiệu $\hat{\boldsymbol{n}}$ đơn giản hơn và trực quan hơn là $\hat{\boldsymbol{e}}_n$.

Chiều của $\hat{\boldsymbol{n}}$ được chọn sao cho dãy các vector $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$ tạo thành một hệ đinh ốc thuận. Điều này có nghĩa là nếu nhìn theo vector $\hat{\boldsymbol{n}}$ thì phép quay theo con đường ngắn nhất từ nhân tử thứ nhất tới nhân tử thứ hai được thực hiện theo chiều quay của kim đồng hồ. Trên hình. 1.16, vector $\hat{\boldsymbol{n}}$ hướng ra sau hình vẽ và do đó được biểu diễn bằng một vòng tròn nhỏ có dấu chữ thập[8]. Hướng của vector $\boldsymbol{c}$ trùng với hướng của $\hat{\boldsymbol{n}}$.



Hình 1.16

Có thể viết một cách tượng trưng tích vector theo hai cách:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \quad \text{hoặc} \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

the latter notation resulting in the term cross product sometimes being used to signify a vector product. We shall use the latter notation[9]. Thus, according to phương trình. (1.2.27), we have

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (ab \sin \alpha)\hat{\boldsymbol{n}}. \tag{1.2.28}$$

Từ hình. 1.16 rõ ràng là module của vector tích có ý nghĩa hình học đơn giản—biểu thức $ab \sin \alpha$ về trị số bằng điện tích hình bình hành tạo bởi các vector nhân tử.

[8]Chúng ta sẽ biểu diễn các vector vuông góc với mặt phẳng hình vẽ bằng một vòng tròn nhỏ có dấu chữ thập nếu vector hướng ra xa ta, và bằng một vòng tròn nhỏ có điểm chấm ở tâm nếu vector hướng về ta. Để dễ thấy, có thể hình dung một vector dưới dạng một mũi tên với phần đầu có dạng hình nón và phần đuôi có dạng hình chữ thập. Khi đó nếu vector hướng về phía chúng ta (mũi tên bay tới chúng ta), ta sẽ nhìn thấy một vòng tròn nhỏ với điểm chấm, nếu cũng vector đó hướng ra xa chúng ta (mũi tên bay ra xa ta), ta sẽ nhìn thấy một vòng tròn với dấu chữ thập.

[9]To avoid confusion, in the LaTeXversion, we shall use the cross product symbol.

Chúng ta đã xác định hướng của vector $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ bằng cách liên kết nó với chiều quay từ nhân tử thứ nhất tới nhân tử thứ hai. Khi khảo sát các vector như bán kính vector $\boldsymbol{r}$, vận tốc $\boldsymbol{v}$, lực $\boldsymbol{F}$,...vấn đề chọn hướng của chúng không đặt ra vì nó suy ra một cách tự nhiên từ bản chất của chính các đại lượng. Các vector như thế được gọi là các **vector thực** (hoặc các vector cực). Các vector loại $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ có chiều liên kết với chiều quay được gọi là **giả vector** (hoặc các vector trục). Khi thay đổi điều kiện, chẳng hạn khi chuyển từ hệ tọa độ thuận sang hệ tọa độ nghịch, chiều của các giả vector biến đổi ngược lại, trong lúc đó các vector thực vẫn không biến đổi.
Cần chú ý rằng tích vector sẽ là một giả vector chỉ trong trường hợp khi cả hai vector nhân tử đều là các vector thực (hoặc cả hai đều là các giả vector). Tích vector của một vector thực với một giả vector sẽ là một vector thực. Sự thay đổi ngược lại điều kiện xác định chiều của các giả vector trong trường hợp này dẫn tới sự đổi dấu đứng trước tích vector và đồng thời dẫn tới sự đổi dấu đứng trước một trong các nhân tử. Rốt cuộc là đại lượng được biểu thị bằng tích vector vẫn không đổi.
Vì chiều của tích vector được xác định bằng chiều quay từ nhân tử thú nhất tới nhân tử thứ hai nên kết quả của phép nhân vector phụ thuộc vào thứ tự của các nhân tử. Sự hoán vị các nhân tử gây ra sự đổi ngược lại chiều của vector kết quả. Như vậy, tích vector không có tính chất giao hoán:

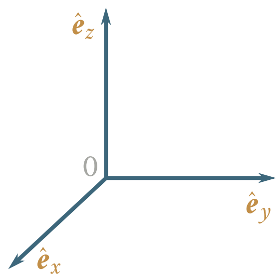
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}. \tag{1.2.29}$$

Có thể chứng minh rằng tích vector có tính phân phối, nghĩa là

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\ldots)] = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2+\ldots. \tag{1.2.30}$$

Ta hãy xét các tích vector của các chuẩn của các trục tọa độ (hình. 1.17). Theo định nghĩa (1.2.28)

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{e}}_x\times\hat{\boldsymbol{e}}_x = \hat{\boldsymbol{e}}_y\times\hat{\boldsymbol{e}}_y = \hat{\boldsymbol{e}}_z\times\hat{\boldsymbol{e}}_z = 0,\\
&\hat{\boldsymbol{e}}_x\times\hat{\boldsymbol{e}}_y = -\hat{\boldsymbol{e}}_y\times\hat{\boldsymbol{e}}_x = \hat{\boldsymbol{e}}_z,\\
&\hat{\boldsymbol{e}}_y\times\hat{\boldsymbol{e}}_z = -\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\hat{\boldsymbol{e}}_y = \hat{\boldsymbol{e}}_x,\\
&\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\hat{\boldsymbol{e}}_x = -\hat{\boldsymbol{e}}_x\times\hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_y.
\end{aligned} \tag{1.2.31}$$



Hình 1.17

Biểu diễn các vector dưới dạng phương trình. (1.2.9) và sử dụng tính phân phối của tích vector ta có:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (a_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + a_z\hat{\boldsymbol{e}}_z)\times(b_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + b_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + b_z\hat{\boldsymbol{e}}_z)\\ &= a_xb_x\hat{\boldsymbol{e}}_x\times\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_xb_y\hat{\boldsymbol{e}}_x\times\hat{\boldsymbol{e}}_y + a_xb_z\hat{\boldsymbol{e}}_x\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\\ &+ a_yb_x\hat{\boldsymbol{e}}_y\times\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_yb_y\hat{\boldsymbol{e}}_y\times\hat{\boldsymbol{e}}_y + a_yb_z\hat{\boldsymbol{e}}_y\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\\ &+ a_zb_x\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\hat{\boldsymbol{e}}_x + a_zb_y\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\hat{\boldsymbol{e}}_y + a_zb_z\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned}$$

Nếu chú ý đến hệ thức (1.2.31), ta đi tới biểu thức sau:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \hat{\boldsymbol{e}}_x(a_yb_z - a_zb_y) + \hat{\boldsymbol{e}}_y(a_zb_x - a_xb_z) + \hat{\boldsymbol{e}}_z(a_xb_y - a_yb_x). \quad (1.2.32)$$

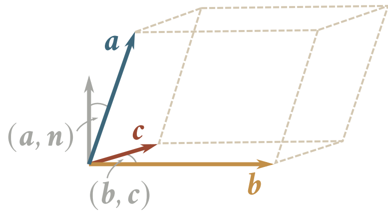
Có thể biểu diễn biểu thức thu được dưới dạng định thức:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{e}}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \quad (1.2.33)$$

Tích hỗn hợp. Biểu thức $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ được gọi là tích hỗn hợp (hoặc tích vô hướng-vector) của ba vector, nghĩa là tích vô hướng của vector $\boldsymbol{a}$ với tích vector của các vector $\boldsymbol{b}$ và $\boldsymbol{c}$. Theo các định nghĩa (1.2.15) và (1.2.28)

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = a\{bc\sin(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\}\cos(\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{n}}).$$

Ở đây $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ là góc giữa $\boldsymbol{b}$ và $\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{n}})$ là góc giữa vector $\boldsymbol{a}$ và chuẩn $\hat{\boldsymbol{n}}$ xác định $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$. Từ hình. 1.18 rõ ràng là biểu thức $bc\sin(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ về trị số bằng diện tích đáy của hình hộp được tạo bởi các vector nhân tử còn biểu thức $a\cos(\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{n}})$ về trị số bằng chiều cao của hình hộp này



Hình 1.18

lấy với dấu cộng nếu góc $(\boldsymbol{a}, \hat{\boldsymbol{n}})$ là nhọn và với dấu trừ nếu góc này là tù. Do đó biểu thức $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ có ý nghĩa hình học đơn giản—về trị số nó bằng thể tích của hình hộp được tạo bởi các vector nhân tử [lấy dấu cộng hay trừ tùy theo độ lớn của góc $(\boldsymbol{a}, \hat{\boldsymbol{n}})$]. Khi tính thể tích của hình hộp, kết quả không thể phụ thuộc vào điều là mặt nào trong các mặt của nó được lấy làm đáy. Từ đó suy ra rằng

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{1.2.34}$$

Như vậy, tích hỗn hợp cho phép hoán vị vòng quanh các nhân tử, nghĩa là cho phép thay thế mỗi nhân tử tiếp sau đó theo chu trình:

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{a} \arrow[dr] & \\ \boldsymbol{c} \arrow[ur] & & \boldsymbol{b} \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

Tích vector kép. Ta hãy nghiên cứu tích vector kép của vector $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ và $\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

Mỗi tích vector là vuông góc với cả hai nhân tử. Do đó vector $\boldsymbol{d}$ vuông góc với chuẩn $\hat{\boldsymbol{n}}$ xác định hướng của vector $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$. Từ đó suy ra rằng vector $\boldsymbol{d}$ nằm trong mặt phẳng tạo bởi các vector $\boldsymbol{b}$ và $\boldsymbol{c}$, và do đó có thể được biểu diễn như một tổ hợp tuyến tính của các vector này:

$$\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{c}$$

[xem phương trình. (1.2.5)]. Phép tính toán tương ứng cho $\alpha = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, $\beta = -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. Như vậy

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}). \tag{1.2.35}$$

Đạo hàm của vector. Ta hãy nghiên cứu một vector biến đổi theo thời gian theo một quy luật đã biết $\boldsymbol{a}(t)$. Hình chiếu của vector này trên các trục tọa độ là các hàm độ cho của thời gian. Do đó

$$\boldsymbol{a}(t) = \hat{\boldsymbol{e}}_x a_x(t) + \hat{\boldsymbol{e}}_y a_y(t) + \hat{\boldsymbol{e}}_z a_z(t) \tag{1.2.36}$$

(ta giả thiết rằng các thục tọa độ không quay trong không gian, cho nên các chuẩn của các trục không biến đổi theo thời gian).
Giả thử trong khoảng thời gian Δt, các hình chiếu của vector nhận các số gia Δa_x, Δa_y, Δa_z. Khi đó vector nhận số gia $\Delta \boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \Delta a_x + \hat{\boldsymbol{e}}_y \Delta a_y + \hat{\boldsymbol{e}}_z \Delta a_z$. Có thể đặc trưng vận tốc biển đổi của vector $\boldsymbol{a}$ theo giời gian bằng tỷ số giữa $\Delta \boldsymbol{a}$ và Δt:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \frac{\Delta a_x}{\Delta t} + \hat{\boldsymbol{e}}_y \frac{\Delta a_y}{\Delta t} + \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\Delta a_z}{\Delta t}. \tag{1.2.37}$$

Tỷ số này cho vận tốc biển đổi trung bình của $\boldsymbol{a}$ trong khoảng thời gian Δt. Ta hãy giả thử rằng $\boldsymbol{a}$ biến đổi theo thời gian một cách liên tục mà không có các đột biến. Khi đó khoảng thời gian Δt càng nhỏ thì đại lượng phương trình. (1.2.37) càng đặc trưng chính xác hơn cho vận tốc biến đổi của $\boldsymbol{a}$ tại thời điểm t xảy ra trước khoảng Δt. Do đó vận tốc biến đổi của vector $\boldsymbol{a}$ tại thời điểm t bằng giới hạn của tỷ số phương trình. (1.2.37) có được khi giảm vô hạn Δt:

$$\begin{aligned}\text{vận tốc biến đổi của } \boldsymbol{a} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t} \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_x \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a_x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \hat{\boldsymbol{e}}_y \frac{\Delta a_y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\Delta a_z}{\Delta t}.\end{aligned} \tag{1.2.38}$$

Nếu có một hàm $f(t)$ nào đó của đối số t, thì giới hạn của tỷ số giữa số gia của hàm Δf với số gia của đối số Δt có được khi Δt dần tới không được gọi là đạo hàm của hàm f theo t và được ký hiệu bằng ký hiệu $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$. Do đó có thể viết biểu thức (1.2.38) như sau:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t} + \hat{\boldsymbol{e}}_y \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t} + \hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}. \tag{1.2.39}$$

Kết quả thu được có nghĩa là các hình chiếu của vector $\mathrm{d}\boldsymbol{a}/\mathrm{d}t$ lên các trục tọa độ bằng đạo hàm theo thời gian của các vector $\boldsymbol{a}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{pr. } x} = \frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{pr. } y} = \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{pr. } z} = \frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}, \quad . \tag{1.2.40}$$

Trong vật lý người ta thường ký hiệu các đạo hàm theo thời gian bằng ký hiệu của đại lượng tương ứng với một dấu chấm ở trên nó, chẳng hạn

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\varphi}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{a}}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\boldsymbol{a}}. \tag{1.2.41}$$

Nếu sử dụng ký hiệu đó thì công thức (1.2.39) có thể nhận dạng

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \dot{a}_x + \hat{\boldsymbol{e}}_y \dot{a}_y + \hat{\boldsymbol{e}}_z \dot{a}_z. \tag{1.2.42}$$

Nếu lấy bán kính vector $\boldsymbol{r}(t)$ của điểm chuyển động để làm $\boldsymbol{a}(t)$ thì theo phương trình. (1.2.42)

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \dot{r}_x + \hat{\boldsymbol{e}}_y \dot{r}_y + \hat{\boldsymbol{e}}_z \dot{r}_z, \tag{1.2.43}$$

trong đó x, y, z là các hàm của $x = x(t)$, $y = t(t)$, $z = z(t)$.
Biểu thức

$$\mathrm{d}f = f'\,\mathrm{d}t, \tag{1.2.44}$$

được gọi là vi phân ("số gia") của hàm $f(t)$.
Trong đó f' là đạo hàm của f theo t. Theo phương trình. (1.2.39) vi phân ("số gia") của vector $\boldsymbol{a}$ được xác định bằng công thức

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \mathrm{d}a_x + \hat{\boldsymbol{e}}_y \mathrm{d}a_y + \hat{\boldsymbol{e}}_z \mathrm{d}a_z. \tag{1.2.45}$$

Đặc biệt là

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{e}}_x \mathrm{d}x + \hat{\boldsymbol{e}}_y \mathrm{d}y + \hat{\boldsymbol{e}}_z \mathrm{d}z. \tag{1.2.46}$$

Ta hãy chú ý rằng trong một khoảng thời gian Δt rất nhỏ nhưng hữu hạn, số gia của hàm xấp xỉ bằng

$$\Delta f \approx f'\Delta t = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\Delta t. \tag{1.2.47}$$

Tại giới hạn khi $\Delta t \to 0$, đẳng thức gần đúng (1.2.47) chuyển thành đẳng thức đúng (1.2.44).
Có thể viết công thức tương tự (1.2.47) cả đối với hàm vector

$$\Delta\boldsymbol{a} \approx \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\Delta t. \tag{1.2.48}$$

Đạo hàm của tích các hàm. Ta hãy nghiên cứu hàm $\boldsymbol{b}(t)$, nó bằng tích của hàm vô hướng $\varphi(t)$ và hàm vector $\boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{b}(t) = \varphi(t)\boldsymbol{a}(t)$, hoặc một cách ngắn gọn $\boldsymbol{b} = \varphi\boldsymbol{a}$. Ta hãy tìm số gia của hàm $\boldsymbol{b}$:

$$\Delta\boldsymbol{b} = \Delta(\varphi\boldsymbol{a}) = (\varphi + \Delta\varphi)(\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{a}) - \varphi\boldsymbol{a} = \varphi\Delta\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\Delta\varphi + \Delta\varphi\Delta\boldsymbol{a}.$$

Nếu biêu diễn số gia của hàm dưới dạng (1.2.47) và (1.2.48), ta có:

$$\Delta\boldsymbol{b} \approx \varphi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\Delta t + \boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\Delta t + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)^2$$

từ đó

$$\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta t} \approx \varphi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\Delta t.$$

Tại giới hạn khi dt tiến tới không, đẳng thức gần đúng này trở thành đẳng thức chính xác. Như vậy

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\varphi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\Delta t\right).$$

Hai số hạng đầu không phụ thuộc vào Δt và do đó khi chuyển tới giới hạn sẽ không bị biến đổi. Giới hạn của số hạng thứ ba bằng không. Do đó, sau khi thay $\boldsymbol{b}$ bằng $\varphi\boldsymbol{a}$, ta có:

$$\frac{\mathrm{d}(\varphi\boldsymbol{a})}{\mathrm{d}t} = \varphi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \varphi\dot{\boldsymbol{a}} + \dot{\varphi}\boldsymbol{a}. \tag{1.2.49}$$

Bây giờ ta hãy nghiên cứu đạo hàm của tích vô hướng của hai hàm vector $\boldsymbol{a}(t)$ và $\boldsymbol{b}(t)$. Số gia của tích này bằng:

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{ab}) &= (\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{ab}\\ &= \boldsymbol{a}\Delta\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\Delta\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{a}\Delta\boldsymbol{b}\\ &\approx \boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{b}}\Delta t + \boldsymbol{b}\dot{\boldsymbol{a}}\Delta t + \dot{\boldsymbol{a}}\dot{\boldsymbol{b}}(\Delta t)^2\end{aligned}$$

Từ đó

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{ab})}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta(\boldsymbol{ab})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}(\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{b}\dot{\boldsymbol{a}} + \dot{\boldsymbol{a}}\dot{\boldsymbol{b}}\Delta t)$$

hoặc cuối cùng

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{ab})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{b}\dot{\boldsymbol{a}}. \tag{1.2.50}$$

Nhân phương trình. (1.2.50) với dt ta có vi phân:

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{ab})}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{b}\dot{\boldsymbol{a}}. \tag{1.2.51}$$

Ta hãy tính đạo hàm và vi phân của bình phương hàm vector. Theo (1.2.50) và (1.2.51)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}^2}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{a}}, \tag{1.2.52}$$

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{a}^2) = 2\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}, \tag{1.2.53}$$

Nếu để ý rằng $\boldsymbol{a}^2 = a^2$ [xem phương trình. (1.2.16)] thì có thể viết:

$$2\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}(a^2) \quad \text{or} \quad \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\left(\frac{a^2}{2}\right). \tag{1.2.54}$$

Cuối cùng, ta hãy khảo sát đạo hàm của tích vector của các hàm $\boldsymbol{a}(t)$ và $\boldsymbol{b}(t)$. Số gia của hàm được khảo sát bằng

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= [(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\\ &= [\boldsymbol{a},\Delta\boldsymbol{b}] + [\Delta\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] + [\Delta\boldsymbol{a},\Delta\boldsymbol{b}]\\ &\approx [\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{b}}\Delta t] + [\dot{\boldsymbol{a}}\Delta t,\boldsymbol{b}] + [\dot{\boldsymbol{a}}\Delta t,\dot{\boldsymbol{b}}\Delta t].\end{aligned}$$

Một cách tương tự

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \lim_{\Delta t\to 0}\{[\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{b}}] + [\dot{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{b}] + [\dot{\boldsymbol{a}},\dot{\boldsymbol{b}}]\Delta t\}.$$

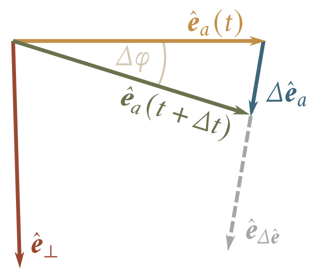
Thực hiện việc chuyển qua giới hạn, ta đi tới công thức

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = [\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{b}}] + [\dot{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{b}]. \tag{1.2.55}$$

Đạo hàm của vector đơn vị. Ta hãy khảo sát chuẩn $\hat{\boldsymbol{e}}_a$ của vector $\boldsymbol{a}$. Rõ ràng rằng vector $\hat{\boldsymbol{e}}_a$ chỉ có thể biến đổi về hướng. Giả sử trong một khoảng thời gian Δt rất nhỏ, vector $\boldsymbol{a}$ và cùng với nó, chuẩn $\hat{\boldsymbol{e}}_a$ quay một góc $\Delta\varphi$ (hình. 1.19). Với $\Delta\varphi$ nhỏ, module của vector $\Delta\hat{\boldsymbol{e}}_a$ xấp xỉ bằng góc $\Delta\varphi$: $|\Delta\hat{\boldsymbol{e}}_a| \approx \Delta\varphi$ (đoạn thẳng biểu diễn $\Delta\hat{\boldsymbol{e}}_a$ là cạnh đáy của một tam giác cân với các cạnh bằng đơn vị). Ta hãy chú ý rằng, $\Delta\varphi$ càng nhỏ thì đẳng thức gần đúng do ta viết càng chính xác. Có thể biểu diễn chính vector $\Delta\varphi$ dưới dạng

$$\Delta\hat{\boldsymbol{e}}_a = |\Delta\hat{\boldsymbol{e}}_a| \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\Delta\boldsymbol{e}} \approx \Delta\varphi \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{\Delta\boldsymbol{e}}$$

trong đó $\hat{\boldsymbol{e}}_{\Delta\boldsymbol{e}}$ là chuẩn của $\Delta\hat{\boldsymbol{e}}_a$. Khi $\Delta\varphi$ dần tới không thì chuẩn $\hat{\boldsymbol{e}}_{\Delta\boldsymbol{e}}$ sẽ bị quay đi và qua giới hạn nó sẽ trùng với vector đơn vị $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$ vuông góc với $\hat{\boldsymbol{e}}_a$ (xem hình. 1.19).



Hình 1.19

Đạo hàm của $\hat{\boldsymbol{e}}_a$ theo t, theo định nghĩa, bằng

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{e}}_a}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\hat{\boldsymbol{e}}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{e}}_{\Delta\boldsymbol{e}} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_\perp.$$

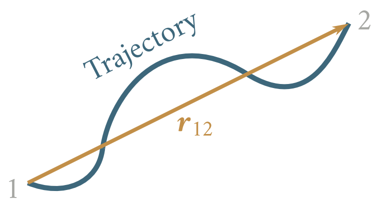
Như vậy,

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_a = \dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{e}}_\perp. \tag{1.2.56}$$

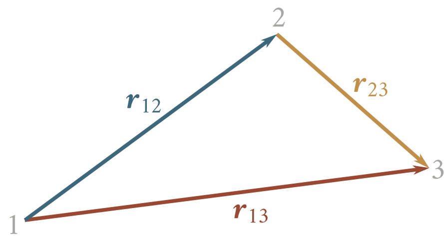
Đại lượng $\dot{\varphi} = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ là vận tốc góc quay của vector $\boldsymbol{a}$ (xem Sec. 1.5). Chuẩn $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$ nằm trong mặt phẳng mà tại đó vector $\boldsymbol{a}$ bị quay tại thời điểm đã cho, hơn nữa hướng về phía mà sự quay xảy ra.

1.3 Vận tốc

Khi chuyển động, chất điểm vẽ một đường nào đó. Đường này được gọi là **quỹ đạo**[10].Tùy theo dạng của quỹ đạo người ta phân biệt chuyển động thẳng, chuyển động tròn, chuyển động cong, v.v...



Hình 1.20



Hình 1.21

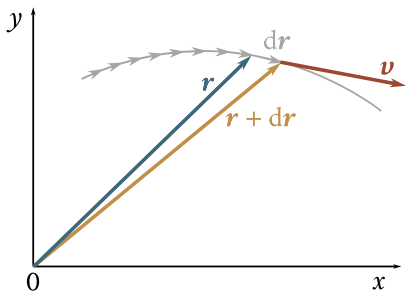
Giả thử một chất điểm (Sau này để cho gọn ta sẽ gọi nó là một hạt) dịch chuyển dọc theo một quỹ đạo nào đó từ điểm 1 đến điểm 2 (hình. 1.20). Khoảng cách giữa điểm 1 và 2 tính dọc theo quỹ đạo được gọi là quãng đường mà hạt đi qua. Ta ký hiệu nó bằng chữ s.
Đoạn thẳng vẽ từ điểm 1 và 2 được gọi là độ dời của hạt. Ta hãy ký hiệu nó bằng $\boldsymbol{r}_{12}$. Ta hãy giả sử rằng hạt thực hiện hai sự dịch chuyển

[10]Ta hãy chú ý rằng khái niệm quỹ đạo chỉ được áp dụng cho hạt "cổ điển" mà tại mỗi thời điểm có thể gán cho nó các giá trị chính xác của tọa độ và xung lượng (tức là vận tốc). Theo cơ học lượng tử các hạt có thực có thể được đặc trưng bằng tọa độ và xung lượng chỉ với một độ chính xác nào đó. Giới hạn của độ chính xác này được xác định bằng hệ thức bất định Heisenberg: $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$. Ở đây Δx là độ bất định của tọa độ, Δp là độ bất định của xung lượng của hạt, $\hbar$ là hằng số Planck có giá trị bằng $\hbar = h/2\pi = 1.05 \times 10^{-34}$ J s. Dấu $\gtrsim$ nghĩa là "lớn hơn đại lượng vào cỡ". Nếu thay xung lượng bằng tích khối lượng với vận tốc, thì có thể viết $\Delta x \Delta v \gtrsim \hbar/m$. Từ hệ thức này rõ ràng là khối lượng của hạt càng nhỏ thì tọa độ và vận tốc của nó càng kém được xác định và do đó khái niệm quỹ đạo càng ít được áp dụng. Đối với các vật vĩ mô (tức là các vật được tạo bởi một số rất lớn các phân tử) các độ bất định của tọa độ và vận tốc không vượt quá độ chính xác có thể đạt được trong thực tế khi đo các đại lượng này, do đó khái niệm quỹ đạo có thể áp dụng được cho các vật như thế một cách vô điều kiện. Đối với các hạt vi mô (các electron, proton, neutron, các nguyên tử và phân tử riêng lẻ) tùy thuộc vào các điều kiện trong đó chuyển động xảy ra, khái niệm quỹ đạo hoặc hoàn toàn không áp dụng được hoặc có thể áp dụng được với độ chính xác hạn chế. Chẳng hạn, sự chuyển động của các electron trong ống tia điện tử có thể được coi một cách gần đúng như chuyển động xảy ra theo các quỹ đạo nào đó.

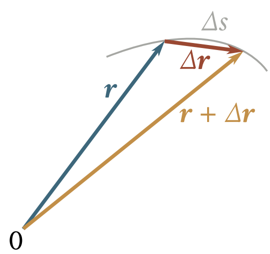
nối tiếp nhau: $\boldsymbol{r}_{12}$ và $\boldsymbol{r}_{23}$ (hình. 1.21). Gọi một cách tự nhiên độ dời $\boldsymbol{r}_{13}$ mà nó dẫn tới kết quả như hai sự dịch chuyển đầu tiên xảy ra cùng với nhau, là tổng của các độ dời này. Như vậy, các độ dời đều được đặc trưng bằng trị số và hướng và ngoài ra, đều cộng được theo quy tắc hình bình hành. Từ đó suy ra rằng độ dời là một vector.
Trong đời sống hàng ngày người ta hiểu vận tốc là quãng đường vật đi được trong một đơn vị thời gian. Nếu trong những khoảng thời gian bằng nhau và nhỏ tùy ý hạt đi qua những quãng đường như nhau, thì người ta gọi chuyển động của hạt là **chuyển động đều** . Trong trường hợp này, vận tốc của hạt tại mỗi thời điểm có thể tính bằng cách hcia quãng đường s cho thời gian t.
Trong vật lý, người ta hiểu vận tốc là một đại lượng vector đặc trưng không chỉ cho độ nhanh của sự chuyển dời của hạt theo quỹ đạo mà cả cho hướng trong đó hạt chuyển động tại mỗi thời điểm. Ta hãy chia quỹ đạo thành các phần vô cùng nhỏ có độ dài ds. Ta so sánh độ dời vô cùng nhỏ d$\boldsymbol{r}$ với mỗi phần đó (hình. 1.22). Chia độ dời này cho khoảng thời gian tương ứng dt, ta được vận tốc tức thời tại điểm đã cho của quỹ đạo:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}. \tag{1.3.1}$$

Như vậy vận tốc là đạo hàm của bán kính vector của hạt theo thời gian. Độ dời d$\boldsymbol{r}$ trùng với yếu tố quỹ đạo vô cùng nhỏ. Do đó vector $\boldsymbol{v}$ hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo (xem hình. 1.22).



Hình 1.22



Hình 1.23

Nếu lý luận một cách chặt chẽ hơn để có được công thức (1.3.1) thì cần phải làm như sau. Bằng cách cố định một thời điểm t nào đó, ta hãy nghiên cứu số gia $\Delta\boldsymbol{r}$ của bán kính vector trong khoảng thời gian nhỏ Δt[11] tiếp sau t (hình. 1.23). Tỷ số $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ cho giá trị trung bình của vận tốc trong khoảng thời gian Δt. Nếu lấy tất cả các khoảng Δt nhỏ thì tỷ số $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ tại giới hạn cho ta giá trị của vận tốc $\boldsymbol{v}$ tại thời điểm t:

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.3.2}$$

Ta đi tới công thức(1.3.1).
Ta hãy tìm module của biểu thức (1.3.2), tức là module của vận tốc $\boldsymbol{v}$:

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}. \tag{1.3.3}$$

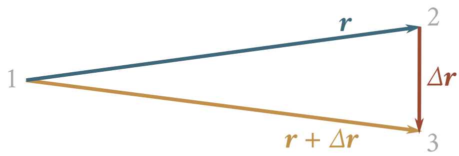
Trong công thức này không được viết Δr thay cho $|\Delta\boldsymbol{r}|$. Vector $\Delta\boldsymbol{r}$ thực chất là hiệu của hai vector ($\boldsymbol{r}$ tại thời điểm $t+\Delta t$ trừ $\boldsymbol{r}$ tại thời điểm t). Do đó có thể viết module của nó bằng các vạch thẳng đứng [xem phương trình. (1.2.2)]. Ký hiệu $|\Delta\boldsymbol{r}|$ có nghĩa là module của số gia của vector $\boldsymbol{r}$, trong khi mà Δr là số gia của module của vector $\boldsymbol{r}$: $\Delta|\boldsymbol{r}|$. Cả hai đại lượng này nói chung không bằng nhau:

$$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta|\boldsymbol{r}| = \Delta r.$$

Có thể thấy rõ điều này ở ví dụ sau. Giả sử vector $\boldsymbol{r}$ nhận số gia $\Delta\boldsymbol{r}$ sao cho module của nó không thay đổi: $|\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}|$ (hình. 1.24). Khi đó số gia của module của vector bằng không ($\Delta|\boldsymbol{r}| = \Delta r = 0$). Đồng thời module của số gia của vector $\boldsymbol{r}$, tức là $\Delta|\boldsymbol{r}|$, là khác không (nó bằng độ dài của đoạn $2-3$). Thật là đối với một vector $\boldsymbol{a}$ bất kỳ: trong trường hợp tổng quát $\Delta|\boldsymbol{a}| \neq \Delta|a|$.
Từ hình. 1.23 rõ ràng là nói chung quãng đường Δs về độ lớn khác với module của độ dời $|\Delta\boldsymbol{r}|$. Tuy nhiên nếu lấy đoạn đường Δs là độ dời $\Delta\boldsymbol{r}$, tương ứng với tất cả khoảng thời gian Δt nhỏ thì sự khác nhau giữa Δs và $|\Delta\boldsymbol{r}|$ sẽ giảm và tỉ số của chúng tại giới hạn trở nên bằng đơn vị:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{|\Delta\boldsymbol{r}|} = 1.$$

[11] Ký hiệu Δ (delta) được dùng trong hai trường hợp: (a) để ký hiệu cho số gia của một đại lượng nào đó. Trong trường hợp đang xét, $\Delta\boldsymbol{r}$ là số gia của bán kính vector $\boldsymbol{r}$ trong thời gian Δt; (b) để ký hiệu cho một phần của một đại lượng nào đó. Chẳng hạn, Δt là một phần của toàn bộ thời gian t trong đó chuyển động xảy ra, Δs là một phần của toàn bộ quãng đường s mà hạt đi qua.



Hình 1.24

Trên cơ sở này, có thể thay thế $|\Delta \boldsymbol{r}|$ bằng Δs trong công thức (1.3.3), kết quả là ta được biểu thức

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{1.3.4}$$

Như vậy, module của vận tốc bằng đạo hàm của quãng đường theo thời gian.
Rõ ràng rằng, trong đời sống hàng ngày, đại lượng được gọi là vận tốc thật ralaf module của vận tốc $\boldsymbol{v}$. Trong chuyển động đều, module của vận tốc sẽ không đổi (v = constant), trong khi hướng của vector $\boldsymbol{v}$ biến đổi một cách tùy ý (trong trường hợp riêng có thể không đổi). Theo công thức phương trình. (1.3.1) độ dời nguyên tố của hạt bằng

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t. \tag{1.3.5}$$

Đôi khi để trực quan, ta ký hiệu độ dời nguyên tố bằng ký hiệu d$\boldsymbol{s}$, nghĩa là viết phương trình. (1.3.5) dưới dạng

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t. \tag{1.3.6}$$

Có thể biểu diễn vector vận tốc cũng như mọi vector khác dưới dạng

$$\boldsymbol{v} = v_x\hat{\boldsymbol{e}}_x + v_y\hat{\boldsymbol{e}}_y + v_z\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{1.3.7}$$

trong đó v_x, v_y, v_z là các hình chiếu của vector $\boldsymbol{v}$ lên các trục tọa độ. Ngoài ra, the vector $\dot{\boldsymbol{r}}$ bằng $\boldsymbol{v}$ theo phương trình. (1.2.43) có dạng như sau:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \dot{y}\hat{\boldsymbol{e}}_y + \dot{z}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{1.3.8}$$

So sánh các biểu thức (1.3.7) và (1.3.8) suy ra rằng

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}. \tag{1.3.9}$$

Do đó, hình chiếu của vector vận tốc lên trục tọa độ bằng đạo hàm theo thời gian của tọa độ tương ứng của hạt chuyển động. Nếu chú ý tới (1.2.10) ta có công thức:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{1.3.10}$$

Có thể biểu diễn vector vận tốc dưới dạng $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{e}}_v$, trong đó v là module của vận tốc, còn $\hat{\boldsymbol{e}}_v$ là chuẩn của vector $\boldsymbol{v}$. Ta hãy đưa vào chuẩn của tiếp tuyến với quỹ đạo là $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, quy ước hướng nó theo cùng một phía với $\boldsymbol{v}$. Khi đó, rõ ràng rằng các chuẩn $\hat{\boldsymbol{e}}_v$ và $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ trùng nhau, cho nên có thể viết được biểu thức sau:

$$\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{e}}_v = v\hat{\boldsymbol{\tau}}. \tag{1.3.11}$$

Ta còn có một biểu thúc nữa đối với $\boldsymbol{v}$. Với mục đích này ta hãy đặt vào phương trình. (1.3.1) bán kính vector dưới dạng $\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r$. Theo phương trình. (1.2.49)

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r. \tag{1.3.12}$$

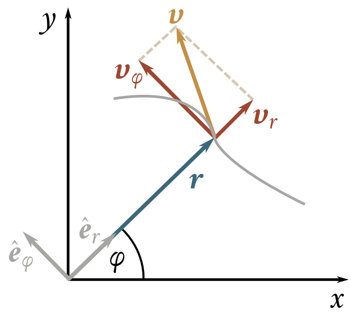
Để đơn giản hãy giới hạn ở trường hợp khi quỹ đạo là một đường cong phẳng, nghĩa là một đường cong mà mọi điểm của nó nằm trên một mặt phẳng. Ta hãy dùng mặt phẳng này làm mặt phẳng x, y. Trong phương trình. (1.3.12), vector $\boldsymbol{v}$ được biểu diễn dưới dạng tổng của hai thành phần (hình. 1.25). Thành phần thứ nhất mà ta ký hiệu là $\boldsymbol{v}_r$ bằng

$$\boldsymbol{v}_r = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r. \tag{1.3.13}$$

Nó hướng dọc theo bán kính vector $\boldsymbol{r}$ và đặc trưng cho độ nhanh của sự biến đổi module của $\boldsymbol{r}$. Thành phần thú hai mà ta ký hiệu là $\boldsymbol{v}_\varphi$ bằng

$$\boldsymbol{v}_\varphi = r\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r. \tag{1.3.14}$$

Nó đặc trưng cho độ nhanh của sự biến đổi về hướng của bán kính vector.



Hình 1.25

Dùng phương trình. (1.2.56) có thể viết là

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi = \dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$$

trong đó φ là góc giữa bán kính vector và trục $\boldsymbol{x}$, $\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ là chuẩn vuông góc với bán kính vector hướng về phía tăng của góc φ [trong phương trình. (1.2.56) chuẩn được ký hiệu là $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$]. Thế giá gị này vào phương trình. (1.3.14) ta có:

$$\boldsymbol{v}_\varphi = r\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi. \tag{1.3.15}$$

Ta đưa vào các ký hiệu $\boldsymbol{v}_\varphi$ và $\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ để nhấn mạnh rằng thành phần $\boldsymbol{v}_\varphi$ và chuẩn tương ứng liên hệ với sự biến đổi của góc φ.
Rõ ràng rằng, các vector $\boldsymbol{v}_r$ và $\boldsymbol{v}_\varphi$ vuông góc với nhau. Do đó

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}. \tag{1.3.16}$$

Ta hãy xét bài toán là khi biết độ lớn của vận tốc tại mỗi thời điểm, hãy tính quãng đường mà hạt đi qua từ thời điể t_1 đến thời điểm t_2. Ta chia khoảng thời gian $t_2 - t_1$ thành N khoảng nhỏ, không nhất thiết phải bằng nhau: Δt_1, Δt_2, ..., Δt_N. Có thể biểu diễn toàn bộ quãng đường s mà hạt đi được như là tổng các quãng đường Δs_1, Δs_2, ..., Δs_N mà hạt đi được trong những khoảng thời gian Δt tương ứng:

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i.$$

Theo phương trình. (1.3.4), mỗi số hạng có thể biểu diễn gần đúng dưới dạng

$$\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i$$

trong đó Δt_i là khoảng thời gian mà hạt đi được một quãng đường Δs_i, còn v_i là giá trị của vạn tốc trong khoảng thời gian Δt_i. Do đó

$$s \approx \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i. \tag{1.3.17}$$

Đằng thức trên càng chính xác nếu khoảng thời gian Δt_i càng nhỏ. Tại giới hạn khi tất cả các khoảng Δt_i tiến tới không (số lượng các khoảng Δt_i khi đó tăng vô hạn) thì đẳng thức gần đúng trở thành đẳng thức đúng:

$$s = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i.$$

Biểu thức thu được là một tích phân xác định của hàm $v(t)$ lấy trong phạm vi từ t_1 đến t_2. Như vậy, quãng đường mà hạt đi được trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 bằng

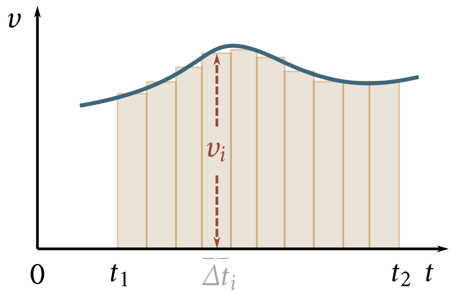
$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.3.18}$$

Ta hãy nhấn mạnh rằng ở đây nói về module của vận tốc. Nếu lấy tích phân của chính vận tốc $\boldsymbol{v}(t)$ thì người ta thu được vector độ dời của hạt tứ điểm mà hạt nằm ở thời điểm t_1 tới điểm mà hạt nằm ở thời điểm t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{12} \tag{1.3.19}$$

[xem phương trình. (1.3.5)].
Nếu vẽ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của v theo t (hình. 1.26) thì có thể biểu diễn quãng đường đi được như diện tích của hình được giwois hạn bởi đường cong $v(t)$ và các đường thẳng $t = t_1$ và $t = t_2$. Thật vậy, tích $v_i \Delta t_i$ nvề trị số bằng diện tích của dải thứ i. Tổng

phương trình. (1.3.17) bằng diện tích được giới hạn về phía trên bởi đường gấp khúc tạo bởi các mép trên của tất cả các dải tương tự. Khi tất cả Δt_i tiến tới không độ rộng của các dải giảm (đồng thời số các dải tăng) và đường gấp khúc tại giới hạn trùng với đường cong $v = v(t)$. Như vậy quãng đường đi được trong thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 về trị số bằng diện tích giới hạn bởi đồ thị của hàm $v = v(t)$, trục thời gian t và các đường thẳng $t = t_1$ và $t = t_2$.



Hình 1.26

Ta hãy chú ý rằng giá trị trung bình của module của vận tốc trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 theo định nghĩa bằng

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t_2 - t_1}.$$

(The symbol $\langle\rangle$ embracing the v indicates an average.) Thay thế biểu thức (1.3.18) đối với s vào đây ta có:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, \mathrm{d}t. \tag{1.3.20}$$

Người ta tính các giá trị trung bình của các hàm vô hướng hay các hàm vector bất kỳ cũng tương tự như vật. Chẳng hạn, giá trị trung bình của vận tốc bằng

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{v}(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{t_2 - t_1}. \tag{1.3.21}$$

[xem phương trình. (1.3.19)]. Các giá trị trung bình của hàm $y(x)$ trong khoảng từ x_1 đến x_2 được xác định bằng biểu thức

$$\langle y \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{x_1}^{x_2} y(t)\, \mathrm{d}x. \tag{1.3.22}$$

1.4 Gia tốc

Vận tốc $\boldsymbol{v}$ của hạt có thể biến đổi theo thời gian cả về độ lớn lẫn hướng. Độ nhanh của sự thay đổi của vector $\boldsymbol{v}$ cũng như độ nhanh của sự thay đổi của một hàm bất kỳ của thời gian được định nghĩa bằng đạo hàm của vector $\boldsymbol{v}$ theo t. Nếu ký hiệu đạo hàm này bằng chữ $\boldsymbol{a}$ thì ta có:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}}. \tag{1.4.1}$$

Đại lượng xác định bằng công thức (1.4.1) được gọi là **gia tốc** của hạt.
Ta chú ý rằng vector $\boldsymbol{v}$ có vai tròn như thế nào đối với bán kính vector $\boldsymbol{r}$ thì gia tốc $\boldsymbol{a}$ có vai trò như thế đối với $\boldsymbol{v}$.
Các vector bằng nhau có hình chiếu lên các trục tọa độ như nhau. Do đó, chẳng hạn

$$a_x = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{pr. } \boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_x$$

[xem Eqs. (1.2.40)]. Đồng thời, theo Eqs. (1.3.9), we have $v_x = \dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Do đó

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}.$$

Ta đã có hình chiếu của vector gia tốc lên trục x bằng đạo hàm bậc hai của tọa độ x theo thời gian: $a_x = \ddot{x}$. Một cách tương tự, người ta cũng có được các biểu thức đối với hình chiếu của gia tốc lên các trục y và z. Như vậy,

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}. \tag{1.4.2}$$

Ta hãy thay thế phương trình. (1.3.11) đối với $\boldsymbol{v}$ vào công thức (1.4.1):

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}(v\hat{\boldsymbol{\tau}})}{\mathrm{d}t}. \tag{1.4.3}$$

Ta nhớ rằng $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ là chuẩn của tiếp tuyến với quỹ đạo, hướng về cùng phía với $\boldsymbol{v}$. Theo phương trình. (1.2.49),

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\hat{\boldsymbol{\tau}} + v\dot{\hat{\boldsymbol{\tau}}}. \tag{1.4.4}$$

Do đó có thể biểu diễn vector $\boldsymbol{a}$ dưới dạng tổng của hai thành phần. Một thành phần cùng phương với $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, tức là hướng theo tiếp tuyến với quỹ đạo, và do đó được ký hiệu là $\boldsymbol{a}_{\hat{\tau}}$ và được gọi là **gia tốc tiếp tuyến**. Nó bằng

$$\boldsymbol{a}_{\hat{\tau}} = \dot{v}\hat{\boldsymbol{\tau}}. \tag{1.4.5}$$

Thành phần thứ hai bằng $v\dot{\hat{\boldsymbol{\tau}}}$, như ta sẽ chứng tỏ ở dưới đây, hướng theo pháp tuyến với quỹ đạo và do đó được ký hiệu là $\boldsymbol{a}_{\hat{n}}$ và được gọi là **gia tốc pháp tuyến**. Như vậy,

$$\boldsymbol{a}_{\hat{n}} = v\dot{\hat{\boldsymbol{\tau}}}. \tag{1.4.6}$$

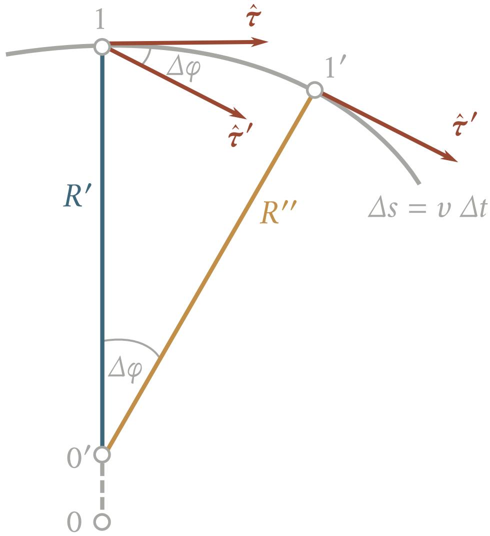
Ta hãy nghiên cứu các tính chất của cả hai thành phần, để đơn giản chỉ bó hẹp ở trường hợp khi quỹ đạo là một đường cong phẳng.
Module của gia tốc tiếp tuyến (1.4.5) bằng

$$a_{\hat{\tau}} = |\dot{v}|. \tag{1.4.7}$$

Nếu $\dot{v} > 0$ (vận tốc tăng về độ lớn), thì vector $\boldsymbol{a}_{\hat{\tau}}$ có cùng hướng với $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ (tức là có cùng hướng với $\boldsymbol{v}$). Nếu $\dot{v} < 0$ (vận tốc giảm theo thời gian), thì các vector $\boldsymbol{v}$ và $\boldsymbol{a}_{\hat{\tau}}$ hướng theo các chiều ngược nhau. Trong chuyển đông đều $\dot{v} = 0$, và do đó không có gia tốc tiếp tuyến.
Để làm rõ các tính chất của gia tốc pháp tuyển [phương trình. (1.4.6)] cần phải xác minh xem $\dot{\hat{\boldsymbol{\tau}}}$, tức là độ nhanh của sự thay đổi theo thời gian của hướng tiếp tuyến với quỹ đạo, sẽ được xác định bằng cái gì. Dễ dàng hiểu được rằng độ nhanh này sẽ càng lớn khi độ cong của quỹ đạo càng lớn và khi hạt dịch chuyển càng nhanh theo quỹ đạo.
Mức độ cong của đường cong phẳng được đặc trưng bằng độ cong C, mà nó được định nghĩa bằng biểu thức

$$C = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \tag{1.4.8}$$

trong đó $\Delta\varphi$ là góc giữa các tiếp tuyến với đường cong tại các điểm cách nhau một khoảng Δs (hình. 1.27). Như vậy độ cong xác định vận tốc quay của tiếp tuyến khi dịch chuyển dọc theo đường cong.



Hình 1.27

Đại lượng nghịch đảo của độ cong C được gọi là **bán kính cong** của đường cong tại điểm đã cho và được ký hiệu bằng chữ R: The degree of bending of a plane curve is characterized by its curvature C determined by the expression

$$R = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}. \tag{1.4.9}$$

Bán kính cong là bán kính của một đường tròn mà nó nhập vào đường cong tại một phần vô cùng nhỏ của nó ở điểm đã cho. Tâm của đường tròn này được gọi là tâm cong đối với điểm đã cho của đường cong. Bán kính cong và tâm cong tại điểm 1 (xem hình. 1.27) Có thể được xác định bằng cách sau. Ta hãy lấy điểm $1'$ không xa 1. Vẽ các tiếp tuyến $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ và $\hat{\boldsymbol{\tau}}'$ tại các điểm này. Các đường thẳng vuông góc với các tiếp tuyến cắt nhau tại một điểm $0'$. Ta chú ý rằng đối với một đường cong không phải là đường tròn, các khoảng cách R' và R'' sẽ khác nhau rất ít. Nếu dịch điểm $1'$ lại gần điểm 1, thì giao điểm $0'$ của các đường vuông góc sẽ dịch chuyển dọc theo đường thẳng R' và tại giới hạn nó nằm tại một điểm 0 nào đó. Chính điểm này là tâm cong đối với điểm 1. Các khoảng cách R' và R" sẽ tiến đến một giới hạn chung R bằng bán kính cong. Thực vậy, nếu các điểm 1 và $1'$ ở

gần nhau thì có thể viết là $\Delta\varphi \approx \Delta s/R'$ or $R' \approx \Delta s/\Delta\varphi$. Tại giới hạn khi $\Delta\varphi \longrightarrow 0$ thì đẳng thức gần đúng này chuyển về đẳng thức thực sự $R = \mathrm{d}s/\mathrm{d}\varphi$, trùng với định nghĩa của bán kính cong [xem phương trình. (1.4.9)].
Ta hãy trở lại cách tính $\boldsymbol{a}_{\hat{\boldsymbol{n}}}$ [xem phương trình. (1.4.6)]. Theo phương trình. (1.2.56),

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\tau}}} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{n}} \tag{1.4.10}$$

trong đó $\hat{\boldsymbol{n}}$ là chuẩn của pháp tuyến với quỹ đạo, hướng về phía mà khi hạt chuyển động theo quỹ đạo thì vector $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ quay về phía đó [trong phương trình. (1.2.56) chuẩn tương tự đã được ký hiệu bằng $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$]. Có thể liên kết đại lượng $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ với bán kính cong của quỹ đạo và vận tốc $\boldsymbol{v}$ của hạt. Từ hình. 1.27 suy ra rằng

$$\Delta\varphi \approx \frac{\Delta s}{R'} = \frac{v'\,\Delta t}{R'}$$

trong đó $\Delta\varphi$ là góc quay của vector $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ trong khoảng thời gian Δt (trùng với góc giữa các đường vuông góc R' và R''), v' là vận tốc trung bình trên quãng đường Δs. Từ đây

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \approx \frac{v'}{R'}.$$

Tại giới hạn khi $\Delta t \longrightarrow 0$ không đẳng thức gần đúng trở thành đẳng thức thực sự, vạn tốc trung bình v' trở thành vận tốc tức thời v tại thời điểm 1, R' trở thành bán kính cong R. Kết quả là ta có đẳng thức

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R} = vC \tag{1.4.11}$$

(C là độ cong).Do đó độ nhanh của sự quay vector vận tốc, như ta đã giả thử, sẽ tỷ lệ với độ cong của quỹ đạo và vận tốc chuyển dời của hạt theo quỹ đạo.
Thay phương trình. (1.4.11) vào (1.4.10) ta được $\dot{\hat{\boldsymbol{\tau}}} = (v/R)\hat{\boldsymbol{n}}$. Sau cùng, introducing thay biểu thức này vào phương trình. (1.4.6), ta đi tới công thức cuối cùng đối vwois gia tốc pháp tuyến:

$$\boldsymbol{a}_{\hat{\boldsymbol{n}}} = \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}R}\hat{\boldsymbol{n}}. \tag{1.4.12}$$

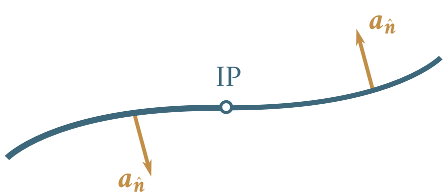
Vậy vector gia tốc khi hạt chuyển động theo đường cong phẳng được xác định bởi biểu thức sau:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\hat{\tau}} + \boldsymbol{a}_{\hat{n}} = \dot{v}\hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{v^2}{R}\hat{\boldsymbol{n}}. \tag{1.4.13}$$

Module của vector $\boldsymbol{a}$ bằng

$$a = \sqrt{a_{\hat{\tau}}^2 + a_{\hat{n}}^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \tag{1.4.14}$$

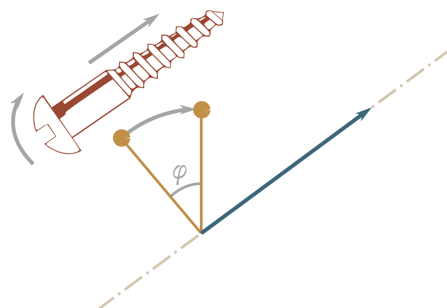
Trong chuyển động thẳng gia tốc pháp tuyến không có mặt. Ta hãy chú ý rằng $\boldsymbol{a}_{\hat{n}}$ triệt tiêu tại điểm uốn của quỹ đạo cong (tại điểm IP trên hình. 1.28). Về cả hai bên của điểm này các vector $\boldsymbol{a}_{\hat{n}}$ hướng về các phía khác nhau. Vector $\boldsymbol{a}_{\hat{n}}$ không thể biến đổi nhảy vọt; sự thay đổi hướng ngược lại xảy ra một cách đều đặn với sự triệt tiêu của $\boldsymbol{a}_{\hat{n}}$ tại điểm uốn. Giả sử hạt chuyển động đều với gia tốc không thay đổi về độ lớn nên $\boldsymbol{a}_{\hat{\tau}} = 0$, cho nên $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\hat{n}}$. Sự không thay đổi về độ lớn của $\boldsymbol{a}_{\hat{n}}$ có nghĩa là $v^2/R = \text{constant}$. Từ đó ta kết luận rằng $R = \text{constant}$ ($v = \text{constant}$ do chuyển động đều). Như thế là, hạt chuyển động theo đường cong có độ cong không đổi, tức là theo đường tròn. Vì vậy trong trường hợp mà gia tốc của hạt không đổi về độ lớn và tại mỗi thời điểm được hướng vuông góc với vector vận tốc, thì đường tròn là quỹ đạo của hạt.



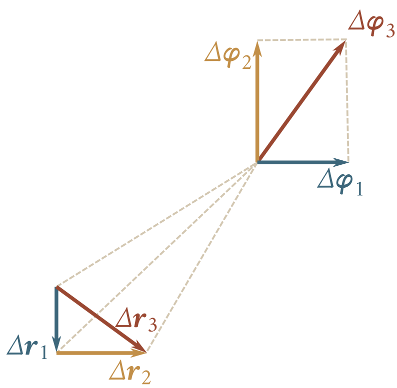
Hình 1.28

1.5 Động học của chuyển động quay

Có thể biểu diễn sự quay một vật một góc φ nào đó dưới dạng một đoạn thẳng có độ dài bằng φ, còn hướng trùng với trục quay. Để chỉ ra phép quay xung quanh trục đã cho được thực hiện theo chiều nào, người ta gắn chiều quay và đoạn thẳng biểu diễn nó bằng **quy tắc cái đinh ốc thuận**: chiều của đoạn thẳng phải như thế nào để khi nhìn dọc theo nó (hình. 1.29) ta thấy sự quay được thực hiện theo chiều kim đồng hồ (khi quay đầu đinh ốc thuận theo chiều kim đồng hồ ta làm cho nó dịch chuyển theo chính nó). Trong 1.2 đã chứng tỏ (xem hình. 1.4) rằng các sự quay những góc hữu hạn được cộng không theo quy tắc hình bình hành và do đó không là những vector. Đối với các sự quay các góc rất nhỏ $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ thì lại khác. Quãng đường mà một điểm bất kỳ của vật đi được trong sự quay rất nhỏ có thể được coi là quãng đường thẳng (hình. 1.30). Do đó hai sự quay nhỏ $\Delta\boldsymbol{\varphi}_1$ và $\Delta\boldsymbol{\varphi}_2$ được thực hiện liên tiếp, như đã thấy trên hình vẽ, gây ra cùng một sự dịch chuyển $\Delta\boldsymbol{r}_3 = \Delta\boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r}_2$ của một điểm bất kỳ của vật như sự quay $\Delta\boldsymbol{\varphi}_3$ thu được từ $\Delta\boldsymbol{\varphi}_1$ và $\Delta\boldsymbol{\varphi}_2$ bằng cách cộng theo quy tắc hình bình hành. Từ đó suy ra rằng có thể coi các sự quay rất nhỏ như các vector (ta ký hiệu các vector này bằng ký hiệu $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ hoặc $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$). Hướng của vector quay gắn liền với hướng quay của vật. Do đó $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ không là một vector thực mà là một giả vector.



Hình 1.29



Hình 1.30

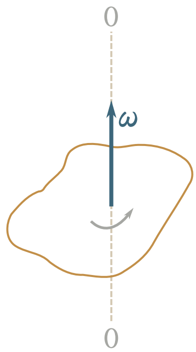
Đại lượng vector

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \tag{1.5.1}$$

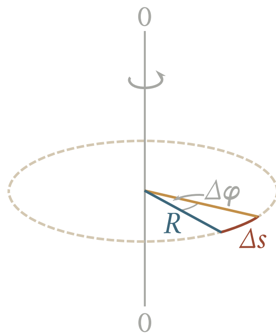
(trong đó Δt là thời gian mà sự quay $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ được thực hiện) được gọi là vận tốc góc của vật[12]. Vận tốc góc $\boldsymbol{\omega}$ hướng dọc theo trục quay của vật

[12] Vận tốc $\boldsymbol{v}$ được khảo sát trong 1.3 đôi khi được gọi là vận tốc dài.

theo chiều được xác định bằng quy tắc cái đinh ốc thuận (hình. 1.31) và là một giả vector. Module của vận tốc góc bằng $d\varphi/dt$. Sự quay với vận tốc góc không đổi được gọi là sự quay đều. Nếu sự quay là đều thì $\omega = \varphi t$, trong đó φ là góc quay hữu hạn trong thời gian t (so sánh với $v = s/t$). Như vậy trong sự quay đều, ω chỉ rõ vật quay được góc nào trong một đơn vị thời gian.



Hình 1.31



Hình 1.32

Có thể đặc trưng sự quay đều bằng chu kỳ quay T, được hiểu là thời gian trong đó vật quay một vòng, nghĩa là quay một góc 2π. Vì khoảng thời gian $\Delta t = T$ ứng với góc quay $\Delta\varphi = 2\pi$, nên

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.5.2}$$

từ đó

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.5.3}$$

Số vòng ν trong một đơn vị thời gian rõ ràng bằng

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{1.5.4}$$

Từ phương trình. (1.5.4) suy ra rằng vận tốc góc sẽ bằng 2π nhân với số vòng trong một đơn vị thời gian:

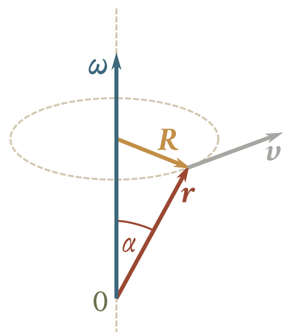
$$\omega = 2\pi\nu. \tag{1.5.5}$$

Có thể giữ nguyên khái niệm chu kỳ quay và số vòng trong một đơn vị thời gian cho cả sự quay không đều bằng cách hiểu giá trị tức thời

T là thời gian mà vật có thể thực hiện một vòng nếu nó quay đều với giá trị tức thời đã cho của vận tốc góc, còn ν được hiểu là số vòng mà vật thực hiện trong một đơn vị thời gian trong những điều kiện tương tự.
Vector $\boldsymbol{\omega}$ có thể biến đổi do sự biến đổi của vận tốc quay của vật xung quanh một trục (trong tường hợp này nó biến đổi về độ lớn) cũng như do sự quay của trục quay trong không gian (trong trường hợp này $\boldsymbol{\omega}$ biến đổi về hướng). Giả sử trong thời gian Δt, vector $\boldsymbol{\omega}$ nhận số gia $\Delta\boldsymbol{\omega}$. Sự biến đổi của vector vận tốc góc theo thời gian được đặc trưng bằng đại lượng

$$\boldsymbol{\alpha} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{1.5.6}$$

được gọi là **gia tốc góc**. Gia tốc góc cũng như vận tốc góc là một giả vector.



Hình 1.33

Các điểm riêng biệt của một vật quay sẽ có các vận tốc dài $\boldsymbol{v}$ khác nhau. Vận tốc của từng điểm biến đổi phương liên tục. Độ lớn v của vận tốc được xác định bằng vận tốc quay ω của vật và khoảng cách R từ điểm được xét đến trục quay. Giả sử trong khoảng thời gian nhỏ vật quay được một góc $\Delta\varphi$ (hình. 1.32). Đồng thời điểm ằm cách trục một khoảng R sẽ đi được một quãng đường $\Delta s = R\Delta\varphi$. Vận tốc dài của điểm sẽ bằng

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = R\omega.$$

Như vậy

$$v = \omega R. \tag{1.5.7}$$

Công thức (1.5.7) liên hệ các module của vận tốc dài và vận tốc góc. Ta hãy tìm biểu thức liên hệ các vector $\boldsymbol{v}$ và $\boldsymbol{\omega}$. Vị trí của điểm đang xét của vật sẽ được xác định bằng bán kính vector $\boldsymbol{r}$ vẽ từ gốc tọa độ O nằm trên trục quay (hình. 1.33). Từ hình vẽ ta thấy rằng tích vector $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ trùng về hướng tới vector $\boldsymbol{v}$ và có module bằng $\omega r \sin\alpha = \omega R$. Do đó,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{1.5.8}$$

Module của gia tốc pháp tuyến của các điểm của vật quay bằng $\boldsymbol{a}_{\hat{\boldsymbol{n}}} = v^2/R$. Thế giá trị v từ phương trình. (1.5.7) vào đây ta có

$$a_{\hat{\boldsymbol{n}}} = \omega^2 R. \tag{1.5.9}$$

Nếu đưa vào vector $\boldsymbol{R}$ vuông góc với trục quay, vẽ từ điểm đã cho của vật (xem hình. 1.33), thì có thể viết phương trình. (1.5.9) dưới dạng vector:

$$\boldsymbol{a}_{\hat{\boldsymbol{n}}} = -\omega^2 \boldsymbol{R}. \tag{1.5.10}$$

Trong công thức này có dấu trừ bởi vì các vector $\boldsymbol{a}_{\hat{\boldsymbol{n}}}$ và $\boldsymbol{R}$ có các chiều ngược nhau.

Ta hãy giả thử rằng trục quay của vật không quay trong không gian. Theo phương trình. (1.4.7) module của gia tốc tiếp tuyến bằng $|\mathrm{d}v/\mathrm{d}t|$. Sử dụng hệ thức (1.5.7) và chú ý đến khoảng cách R = constant từ điểm đang xét của vật đến trục quay, có thể viết

$$a_{\hat{\tau}} = \left|\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t}\right| = R\left|\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta(\omega)}{\Delta t}\right| = R\alpha$$

trong α là module của gia tốc góc. Do đó module của gia tốc tiếp tuyến liên hệ với module của gia tốc góc bằng hệ thức:

$$a_{\hat{\tau}} = \alpha R. \tag{1.5.11}$$

Như vậy gia tốc pháp tuyến và tiếp tuyến tăng tuyến tính với sự tăng của khoảng cách từ điểm tới trục quay.

APPENDICES

A.1 List of Symbols

A	amplitude; atomic mass; work
a	distance
$\boldsymbol{a}$	acceleration†; vector
B	amplitude
b	distance; thickness
$\boldsymbol{b}$	vector
C	curvature; molar heat capacity
c	distance; relative concentration; specific heat capacity; speed of light
$\boldsymbol{c}$	vector
D	diffusion coefficient
d	collision diameter; diameter
$\boldsymbol{d}$	vector
E	energy; mechanical equivalent of heat; Young's modulus
e	base of natural logarithms
$\hat{\boldsymbol{e}}$	unit vector
F	free (Helmholtz) energy
$\boldsymbol{F}$	force
$\boldsymbol{F}^*$	non-conservative force
f	coefficient of friction; relative fluctuation
$\boldsymbol{f}$	force

† The magnitude of a vector is denoted by the same symbol as the vector itself, but in ordinary italic (sloping) type.

G	Gibbs thermodynamic potential (Gibbs energy); gravitational constant; shear modulus
$\boldsymbol{g}$	acceleration of free fall
$\boldsymbol{g}'$	gravitational field vector, gravitational intensity
H	curvature; enthalpy
h	height; Planck's constant
$\hbar$	Planck's constant divided by 2π $(h/2\pi)$
I	moment of inertia
$\Im$	imaginary
i	imaginary unity ($i = \sqrt{-1}$)
K	momentum (also p); momentum flux
k	Boltzmann constant; constant of proportionality; quasi-elastic force coefficient; spring constant
L	heat of transition
$\boldsymbol{L}$	angular momentum
L	dimension of length
l	length; mean free path of molecule
M	mass
$\boldsymbol{M}$	moment of force (torque)
M	dimension of mass
m	mass
N	number of molecules, particles, etc.
N_{A}	Avogadro constant
n	number of molecules or particles per unit volume; polytropic exponent
p	power; probability
$\boldsymbol{P}$	force of gravity
p	pressure
$\boldsymbol{p}$	momentum (also $\boldsymbol{K}$)
Q	amount of heat; quality; rate of flow
q	heat flux
R	molar gas constant; radius of curvature
Re	Reynolds number
$\Re$	real
r	radius; resistance coefficient
$\boldsymbol{r}$	displacement; position (radius) vector
S	area; entropy
s	distance; "interval"

T	absolute temperature; period of revolution
T	dimension of time
t	temperature, Celsius scale; time
U	internal energy
u	velocity
V	potential function; volume
$\boldsymbol{v}$	velocity
$\boldsymbol{W}$	weight
w	energy density
x	coordinate
y	coordinate
z	complex number; coordinate
α	angle; coefficient of elastic compliance; constant; initial phase of oscillations
$\boldsymbol{\alpha}$	angular acceleration
β	angle; damping factor; refrigerating factor (coefficient of performance)
γ	angle; ratio of heat capacities C_p/C_V; relative shear
Δ	increment
Δ'	elementary amount
ε	energy; strain
η	efficiency; viscosity (dynamic)
Θ	thermodynamic temperature
θ	angle; temperature
$\varkappa$	thermal conductivity coefficient
Λ	volume of cell in $\boldsymbol{v}$-space
λ	logarithmic decrement
μ	reduced mass
ν	frequency; kinematic viscosity; number of revolutions per unit time
π	ratio of circumference to diameter, $\pi = 3.14+$
ρ	density; polar coordinate
σ	effective section of molecule; stress; surface tension
τ	proper time; tangential or shear stress
$\hat{\boldsymbol{\tau}}$	unit vector of tangent to trajectory
φ	angle; polar coordinate
Ω	solid angle; statistical weight
ω	cyclic frequency
$\boldsymbol{\omega}$	angular velocity

A.2 Calculation of Selected Integrals

1. The improper integral

$$I(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\beta x^2\right) \mathrm{d}x \tag{A.1}$$

is called the *Poisson integral*. Denoting the integration variable by the letter y, we can write this integral in the form

$$I(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\beta y^2\right) \mathrm{d}y.$$

Multiplying the two expressions, we arrive at the double integral

$$\begin{aligned}[I(\beta)]^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\beta x^2\right) \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\beta y^2\right) \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\beta\left(x^2 + y^2\right)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{A.2}$$

It is easy to calculate this integral by considering the variables x and y as Cartesian coordinates in a plane and passing over from these coordinates to the polar ones r and φ. When x and y vary from $-\infty$ to $+\infty$, the coordinate r varies within the limits from 0 to ∞, and φ within the limits from 0 to 2π. The sum $x^2 + y^2$ equals r^2, while the surface element $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ in polar coordinates has the form $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$. Performing this substitution in phương trình. (A.2), we arrive at the expression

$$[I(\beta)]^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\beta r^2\right) r\,\mathrm{d}r = 2\pi \frac{1}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta}.$$

Hence, for the integral (A.1), we get the value $I(\beta) = \sqrt{\pi/\beta}$. Thus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\beta x^2\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2}. \tag{A.3}$$

2. Both sides of phương trình. (A.3) can be considered as a function of the parameter β. Differentiating with respect to this parameter (at the left we differentiate the integrand function), we find that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\beta x^2\right) x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\beta^3}\right)^{1/2}. \tag{A.4}$$

Repeated differentiation with respect to β yields

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\beta x^2\right) x^4 \, dx = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{\beta^5}\right)^{1/2}. \tag{A.5}$$

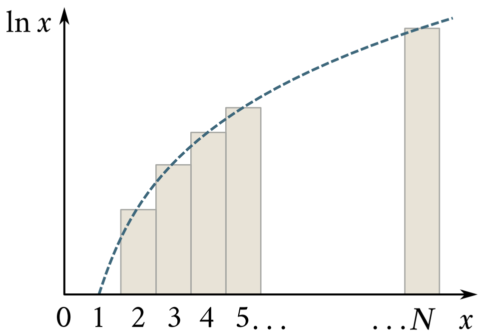
The integrand functions in the integrals (A.3), (A.4), and (A.5) are even ones. Therefore, the contributions to these integrals of the intervals $[-\infty, 0]$ and $[0, +\infty]$ are the same. Hence it follows that, for example,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\beta x^2\right) x^4 \, dx = \frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{\beta^5}\right)^{1/2}. \tag{A.6}$$

A.3 The Stirling Formula

With great values of N, we can obtain a simple approximate formula for $N!$. In accordance with the definition of $N!$, we have

$$\ln N! = \ln(1 \times 2 \times \ldots \times N) = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln N = \sum_{m=1}^{N} \ln m.$$



Hình A.1

The sum we have written equals the sum of the areas of the columns depicted in hình. A.1. At great values of N, the sum of the areas of these columns differs very slightly from the area confined by the dash curve, which is a graph of the function $\ln x$. Hence,

$$\ln N! \approx \int_1^N \ln x \,\mathrm{d}x = [x \ln x - x]_1^N = N \ln N - N + 1.$$

With great values of N, we may disregard unity, and we arrive at the formula

$$\ln N! \approx N \ln N - N \tag{A.1}$$

which is called the **Stirling formula**.
We must note that, strictly speaking, the Stirling formula has another addend equal to $\ln(2\pi N)/2$. With great values of N, however, this addend may be disregarded in comparison with the other two addends.