Титульный лист

Введение

В области математики и информатики вычисление тригонометрических функций играет первостепенную роль. Одна из таких функций, а именно sin (синус), повсеместно используется в различных областях, начиная с обработки графики и заканчивая научными моделями. Однако, встаёт вопрос: "Какой метод вычисления синуса является наилучшим?" — вопрос, который далеко не так прост, как может показаться на первый взгляд.

Актуальность темы заключается в том, что такая важная тригонометрическая функция как синус имеет большое количество методов вычисления. К разным целям и оборудованию подходят разные способы реализации функции. Зная оптимальный путь к нахождению значения синуса,можно добиться лучших результатов.

Цель: изучить множество методов вычисления синуса

Задачи:

-дать определение синусу угла и синусу числа.

-описать необходимые свойства синуса.

-изучить основные методы реализации синуса.

-применить теорию на практике.

Объект изучения: синус

Предмет изучения: способы вычисления синуса

Содержание

Глава I
Основные понятия

1.1 Определение синуса острого угла

Тригонометрические функции могут быть определены как отношение сторон прямоугольного треугольника. В частности, синус острого угла равен отношению катета, лежащего напротив данного угла, к гипотенузе.

На рисунке 1 синус угла A — это отношение отрезка BC к отрезку AB.

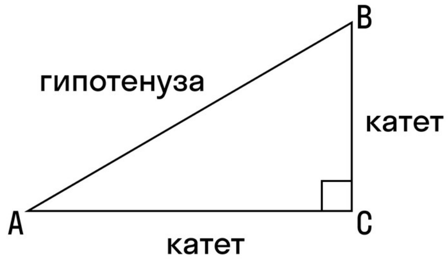

Рисунок 1

1.2 Единичная и числовая окружности, радиан

Единичная окружность — это окружность с радиусом равным 1 и центром в начале координат.

Благодаря единичной окружности, можно избавиться от лишних коэффициентов при расчётах.

Радиан — это градусная мера угла. Один радиан соответствует углу в окружности, длина дуги которого равна радиусу этой окружности.

Числовая окружность — это единичная окружность, на которой каждому действительному числу соответствует точка на ней. Для положительного числа отсчёт происходит против часовой стрелки, а для отрицательного по часовой стрелке. Например, т. к. длина окружности равна 2πR, то точке (0, 1) будет соответствовать $\frac{\pi}{2}$ радиан, $5\frac{\pi}{2}$, $\frac{-3\pi}{2}$ и т. д.

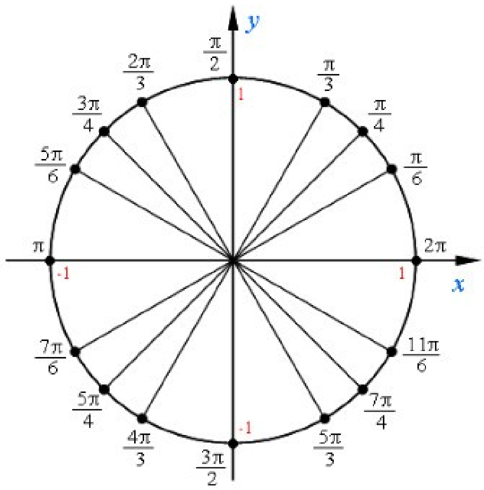

Рисунок 2

1.3 Определение синуса числа

Проведём вектор из начала координат в точку на единичной окружности. Его длина равна радиусу. Теперь синус может быть определён как вертикальная составляющая этого вектора. Это объясняется тем, что если мы построим прямоугольный треугольник с гипотенузой совпадающей с данным вектором так, что противолежащий катет вертикален, то синус будет равен отношению противолежащего катета на единичный радиус, что дало бы нам сам противолежащий катет или вертикальную составляющую вектора.

Синус числа равен ординате соответствующей точки на единичной окружности. Как правило, синус числа принимает радианы, но их всегда можно перевести в градусы, если так удобнее.

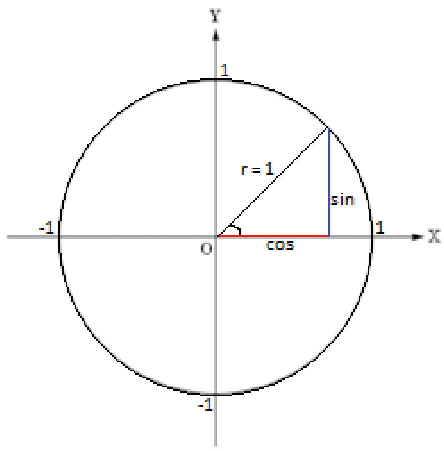

Рисунок 3

1.4 Синусоида

Синусоида — это кривая (график), задаваемая уравнением $y=a+b+\sin(cx+d)$, где a,b,c и d являются постоянными.
Правильной синусоидой называется частный случай синусоиды, в котором a,b,d равны 0, а c = 1. То есть кривая, задаваемая уравнением $y=\sin(x)$

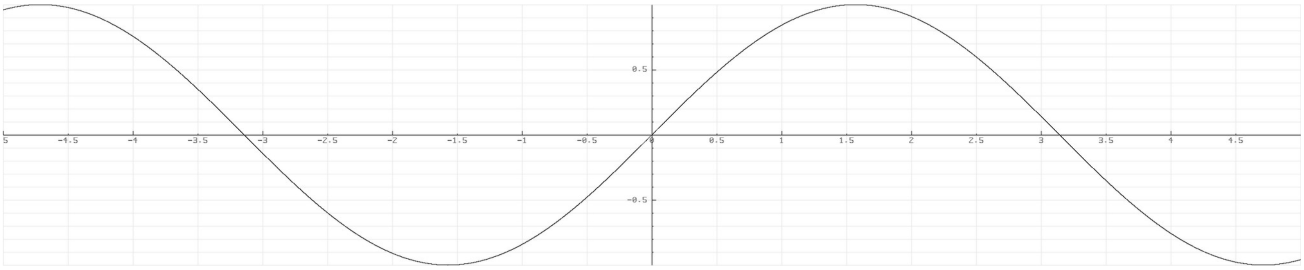

Рисунок 4

Глава II

Свойства синуса

В этой главе мы рассмотрим некоторые свойства синуса и правильной синусоиды, которые пригодятся в дальнейшем.

2.1 Область определения и область значения синуса

Мы уже определили синус для любого числа, следовательно, область определения — все действительные числа.

Если рассматривать синус острого угла, то т. к. гипотенуза всегда больше катета, синус принимает значения (0; 1).

Но при рассмотрении синуса числа, заметим, что на единичной окружности максимальная ордината равна 1, а минимальная -1. Следовательно, синус числа принимает значения [-1; 1].

Можно сразу сделать вывод о размахе правильной синусоиды. Напомню, что размах — это разность максимального и минимального значений. Итак, размах равен 2.

2.2 Периодичность синуса

Для начала определим периодическую функцию. Функция f(x) называется периодической с периодом T, если $T\,!=0$ и $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$. Стоит заметить, что для периодической функции также справедливо $f(x-T*n)=f(x)=f(x+T*n)$ для натуральных n. Поэтому надо различать основной период с остальными. Основной период — это наименьший период.

Как мы уже видели, одной точке на числовой окружности соответствует бесконечное множество точек. Так для точки (1, 0) соответствуют 0, 2π, 4π, -6π и т.д.

Заметим, что если к углу прибавить целый оборот (2π или 360 градусов), то итоговое значение останется прежним. Таким образом, синус — периодическая функция.

Основной период синуса равен 2π.

$\sin(x-2\pi)=\sin(x)=\sin(x+2\pi)$

На самом деле периодичность синусоиды не заканчивается на этом. Рассмотрим график синусоиды в значениях [0; π] (полупериод).

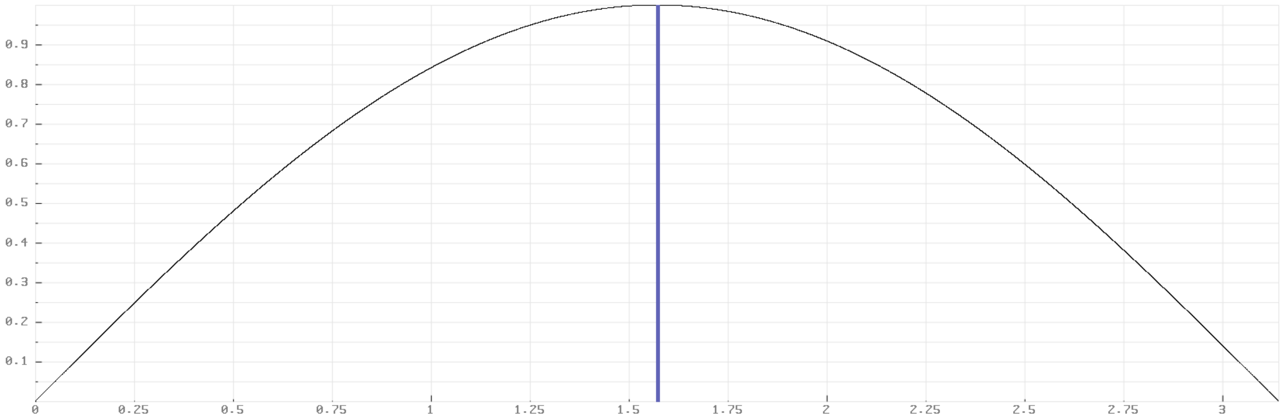

Рисунок 5

На графике видно, что левая половина полупериода симметрична правой. Это объясняется тем, что после пересечения отметки $\frac{\pi}{2}$, синус, достигнув максимального значения, начинает уменьшаться, принимая те же значения, что и до. Теперь рассмотрим график одного полного периода синусоиды.

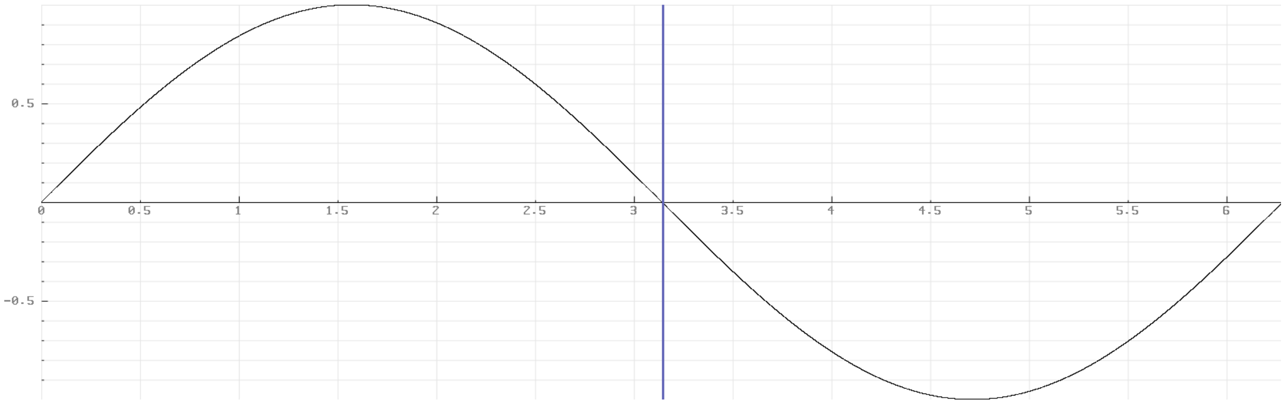

Рисунок 6

Заметим, что левый полупериод симметричен правому. Фактически, если угол больше нуля, то нечётные полупериоды принимают положительные значения, а чётные — отрицательные. Если угол меньше нуля — наоборот.

Эти свойства позволят нам в дальнейшем упростить нахождение синуса больших углов, сводя все вычисления в промежуток [0; $\frac{\pi}{2}$].

2.3 Производная синуса

Производная функции — это отношение изменения значения функции к изменению её аргумента с условием, что изменение аргумента стремится к нулю. Первая производная функции характеризует как быстро функция растёт в данной точке. Вторя производная функции — это производная первой производной, то есть она характеризует как быстро растёт скорость изменения изначальной функции. Третья производная — это производная второй производной и т. д.

Например, пусть f(t) — зависимость координаты тела от времени. Первая производная данной функции есть скорость тела, а вторая — ускорение.

Существуют разные способы записи производной функции.

Пусть f(x) — изначальная функция, тогда её производную можно записать как:

$f^{(1)}(x_0)\, или\, f'(x_0)$ общий вид записи: $f^{(n)}(x)$ — нотация Лагранжа.

x_0 — точка, в окрестности которой мы ищем производную.

$\frac{d}{dx}(x_0)$ или $\frac{df}{dx}(x_0)$ общий вид записи: $\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$ — нотация Лейбница.

Несмотря на то, что запись в виде деления, на самом деле имеется ввиду производная функции f(x) в точке x_0.

Есть и другие способы записи производной. Мы же будем использовать обе нотации там, где они более уместны.

Запишем определение производной с помощью предела $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$

Итак, первая производная синуса — это косинус.

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

В свою очередь производная косинуса есть синус со знаком минус, следовательно, вторая производная синуса — это отрицательный синус.

$g(x) = \cos(x)$

$g'(x) = -\sin(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

Производная отрицательного синуса — это косинус со знаком минус, а его производная — это синус. Выходит, что четвёртая производная синуса есть сам синус.

$\frac{d^4 f}{dx^4} = \sin(x)$ (в любой точке).

Глава III

Методы вычисления синуса

3.1 Табличные значения

Табличный метод — это эффективный и, пожалуй, самый простой способ получения приближенных значений синуса и других функций. Он основан на хранении предварительно вычисленных значений для некоторых аргументов.

Здесь очень помогает то, что все вычисления можно свести в промежуток от 0 до 90 градусов, ведь благодаря этому таблица получается относительно небольшой. После того, как таблица составлена, мы можем для любого заданного угла использовать интерполяцию между ближайшими значениями из таблицы.

Интерполяция — это нахождение неизвестных промежуточных значений функции, по набору известных значений. Существуют разные методы интерполяции, например, простейший из них — это линейная интерполяция. Она соединяет соседние точки прямолинейными отрезками.

На рисунке 7 изображён график функции, использующей табличный метод вычисления синуса с новым значением для каждого целого градуса. Так, для угла 80.4° значение то же, что и для 80°. На рисунке 8 изображён график той же функции, но для нахождения промежуточных значений используется линейная интерполяция.

Так как данный метод не требует сложных операций, то вычисления происходят весьма быстро. Очевидно, что точность таких вычислений напрямую зависит от количества элементов в таблице. Поэтому его можно использовать в тех ситуациях, где вычислительные ресурсы ограничены, но есть достаточно памяти для хранения значений.

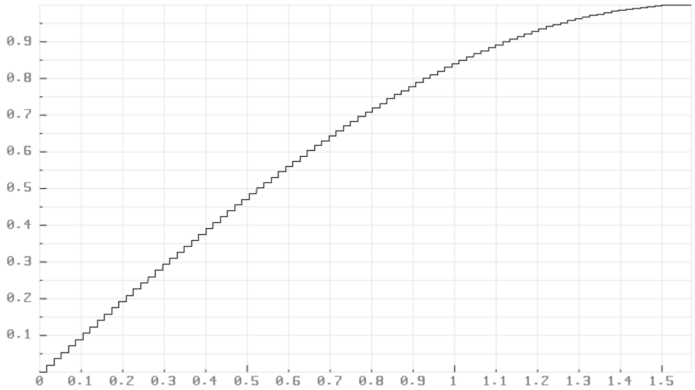

Рисунок 7

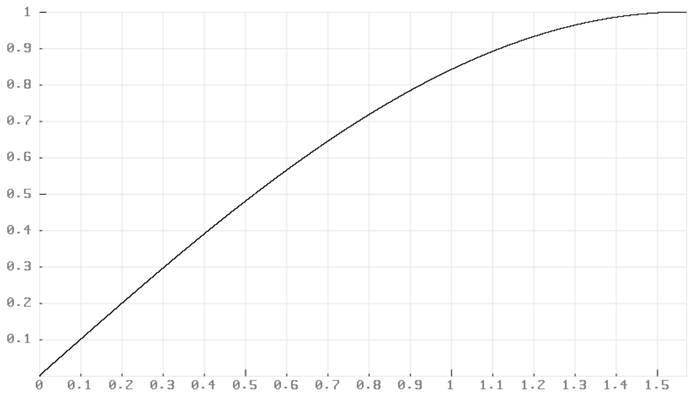

Рисунок 8

3.2 Ряд Тейлора

Ряд Тейлора — это разложение функции на сумму степенных функций. То есть ряд Тейлора — это многочлен. С прибавлением каждого слагаемого, сумма приближается к функции, которую мы хотим получить.

Если функцию можно дифференцировать в точке а (найти производную) конечное количество раз k, то сумма конечна. Если же функция бесконечно дифференцируемая, то и сумма бесконечна.

$f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n}$, или $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n}$, где $f^{n}(x)$ - производная степени n от функции f(x).

В зависимости от искомой функции и её аргумента, существует так называемая область схождения, то есть область, в пределах которой ряд действительно приближается к правильному значению. Эта область — круг, центр которого — точка а.

Например, ряд Тейлора для натурального логарифма $f(x)=\ln(x+1)$ при а = 0, сходится при $-1<x\leq 1$. Аргумент (x+1) составлен так, чтобы f(0) = 0. Если же $x>1$ или $x\leq -1$, то ряд расходится с реальными значениями функции. На рисунке 9 видно, как в области схождения функция и ряд Тейлора сходятся, а вне — расходятся. А также, что чем больше n (количество слагаемых), тем ближе приблизительные значения к реальным.

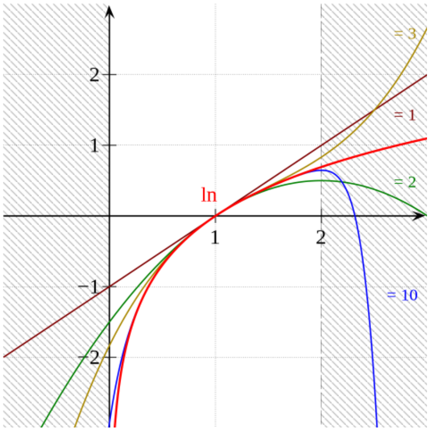

Рисунок 9

Синус можно дифференцировать бесконечное количество раз в любой точке. Следовательно, ряд Тейлора для этой функции — это бесконечная сумма. Ряд сходится при любых x. Формула выглядит так:

$$\sin(x)=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Теоретически чем больше слагаемых, тем точнее результат. На практике у этого есть придел. Т. к. в формуле есть факториал $(2n+1)!$, то при относительно небольших n оперировать такими большими числами становится как минимум долго, а зачастую — невозможно, из-за технических ограничений.

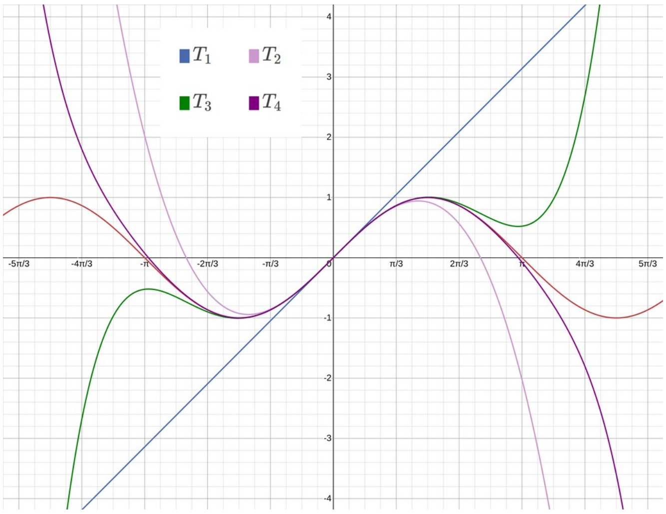

Рисунок 10

3.3 CORDIC алгоритм

CORDIC (**CO**ordinate **R**otation **DI**gital **C**omputer — цифровой вычислитель координат вращения) итеративный метод, широко используемый при вычислениях тригонометрических, гиперболических, логарифмических и других сложных функций. Сводит вычисления к простым операциям сложения и сдвига. Это особенно полезно в случаях, когда аппаратные ресурсы ограничены, например, в микроконтроллерах, не обладающих операцией умножения.

CORDIC алгоритм вращает вектор (1, 0) на заданный угол φ. Ордината данного вектора и есть синус угла φ. Поэтому важно понимать как координаты нового вектора связаны с изначальными.

Пусть угол между осью x и вектором до вращения равен θ. Тогда ордината нового вектора равна $\sin(\theta+\varphi)$, а абсцисса $\cos(\theta+\varphi)$. Используя формулы $\sin(\theta+\varphi)=\sin(\theta)\cos(\varphi)+\sin(\varphi)\cos(\theta)$ и $\cos(\theta+\varphi)=\cos(\theta)\cos(\varphi)-\sin(\theta)\sin(\varphi)$ получаем, что

$x_n=x_{n-1}\cos(\varphi)-y_{n-1}\sin(\varphi)$ и $y_n=x_{n-1}\sin(\varphi)+y_{n-1}\cos(\varphi)$, где x_n и y_n — координаты вектора (x_{n-1}, y_{n-1}) после вращения. Вынесем $\cos(\varphi)$ как общий множитель:

$x_n=\cos(\varphi)(x_{n-1}-y_{n-1}\tan(\varphi))$ и $y_n=\cos(\varphi)(y_{n-1}+x_{n-1}\tan(\varphi))$. Идея данного метода в том, чтобы вращать вектор на углы, тангенсы которых кратны половине, то есть $\tan(\varphi)=\frac{1}{2^i}$ для натуральных i. Таким образом умножение на тангенс сводится к делению на степени двойки, что в двоичной системе счисления заменяется битовым сдвигом вправо на i бит. Таким образом: $\varphi_i=\arctan\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right)$, $\varphi_1=\arctan\left(\frac{1}{2^0}\right)=45°=\frac{\pi}{4}$. Если суммарный угол вращения больше заданного угла, то вращение происходит по часовой стрелке, если меньше — против.

Установив фиксированное количество итераций, можно заранее посчитать углы вращения. Поскольку косинус является чётной функцией, то есть $\cos(x)=\cos(-x)$, то умножение на $\cos(\varphi)$ стоит вынести в конец вычислений как заранее вычисленную константу.

Tan(φ)	φ
1	45°
1/2	26.565°
1/4	14.036°
1/8	7.125 °