Cuadrice Dublu Riglate: Analiză Aprofundată a Fundamentelor Matematice și a Impactului Arhitectural Transformațional

Barbu David Florian, Chiper Ștefan, Porumboiu Matei
Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică

28 mai 2025

Rezumat

Abstract: Această lucrare realizează o investigație exhaustivă a cuadricelor dublu riglate – hiperboloidul cu o pânză și paraboloidul hiperbolic – analizând interdependența complexă dintre proprietățile lor matematice intrinseci, fundamentele din geometria diferențială și manifestările lor inovatoare în arhitectura modernă și contemporană. Referatul detaliază clasificarea algebrică a cuadricelor, ecuațiile canonice și parametrizările suprafețelor dublu riglate, sistemele de generatoare rectilinii, ecuația planului tangent și semnificația curburii Gaussiene negative. Aceste aspecte teoretice sunt corelate cu eficiența structurală, metodele de construcție (precum structurile gridshell și cochiliile subțiri de beton) și expresivitatea formală a operelor arhitecturale. Prin studiul aprofundat al lucrărilor unor arhitecți și ingineri vizionari precum Vladimir Shukhov, Antoni Gaudí, Félix Candela, Oscar Niemeyer, Kenzō Tange, Eero Saarinen și Le Corbusier (cu Iannis Xenakis), se explorează modul în care aceștia au exploatat particularitățile geometrice ale H1P și PH pentru a depăși constrângerile materialelor și a crea spații arhitecturale emblematice. Se abordează, de asemenea, contextul istoric, tehnologic (rolul oțelului și al betonului armat) și estetic care a favorizat emergența acestor forme, precum și provocările constructive și perspectivele lor în era designului parametric avansat și a cerințelor de sustenabilitate.

Cuprins

1 Introducere: Convergența dintre Geometrie și Creația Arhitecturală **1**

2 Fundamente Matematice ale Cuadricelor **1**

2.1 Hiperboloidul cu o Pânză (H1P) . . . 2

2.1.1 Ecuația Canonică și Proprietăți Fundamentale . . . 2

2.1.2 Parametrizări și Familiile de Generatoare . . . 3

2.2 Paraboloidul Hiperbolic (PH) . . . 4

2.2.1 Ecuația Canonică și Proprietăți Fundamentale . . . 4

2.2.2 Parametrizări și Familiile de Generatoare . . . 5

2.3 Proprietăți Geometrice Comune și Importanța Lor Structurală . . . 6

2.3.1 Planul Tangent . . . 6

2.3.2 Curbura Gaussiană și Stabilitatea Structurală . . . 6

3 Impactul Transformațional în Arhitectură și Inginerie Structurală **6**

3.1 Vladimir Shukhov: Pionierul Structurilor Gridshell Hiperboloidale . . . 6

3.2 Antoni Gaudí: Intuiția Geometrică și Formele Riglate în Modernismul Catalan . 8

3.3 Félix Candela: Virtuozitatea "Cascarones" din Paraboloizi Hiperbolici . . . 9

3.4 Oscar Niemeyer și Formele Sculpturale din Beton . . . 11

3.5 Eero Saarinen: Expresionism Structural și Forme Zvelte . . . 11

3.6 Kenzō Tange și Le Corbusier/Xenakis: Monumentalitate și Experiment Radical 12

3.7 Provocări Constructive și Considerații Critice . . . 12

4 Perspective Contemporane: Design Parametric și Sustenabilitate **13**

5 Concluzii: Sinergia Durabilă dintre Matematică și Arta de a Construi **13**

1 Introducere: Convergența dintre Geometrie și Creația Arhitecturală

Dialogul perpetuu dintre abstracțiunea matematică și concretul actului constructiv a generat, de-a lungul istoriei, unele dintre cele mai remarcabile și durabile forme arhitecturale. În acest context, suprafețele cuadratice, și în particular cele dublu riglate, reprezintă un capitol fascinant. Hiperboloidul cu o pânză (H1P) și paraboloidul hiperbolic (PH), singurele cuadrice nedegenerate ce admit două familii distincte de generatoare rectilinii prin fiecare punct al lor, au oferit arhitecților și inginerilor un instrumentar geometric de o rară potență. Această proprietate, aparent paradoxală – generarea unor suprafețe curbe complexe prin mișcarea unor drepte – nu doar că a simplificat procese constructive, dar a și deschis calea către o nouă estetică structurală, în care forma este intrinsec legată de logica sa generativă și de comportamentul său mecanic.

Prezentul studiu își propune o analiză aprofundată a acestor două cuadrice, depășind o simplă descriere morfologică. Vom explora fundamentele lor matematice, incluzând parametrizări, proprietăți diferențiale precum planul tangent și curbura Gaussiană, și, crucial, modul în care aceste caracteristici se traduc în avantaje structurale și expresive. Ulterior, vom examina, prin studii de caz detaliate, cum viziunea unor creatori de excepție a transformat aceste entități geometrice în opere arhitecturale care au marcat secolul XX și continuă să inspire practica contemporană. Se va acorda atenție și contextului tehnologic – în special dezvoltării oțelului și betonului armat – și celui cultural, care au condiționat și potențat adoptarea acestor forme.

2 Fundamente Matematice ale Cuadricelor

În geometria analitică tridimensională, o **suprafață cuadrică** (sau simplu, cuadrică) este locul geometric al punctelor $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ale căror coordonate satisfac o ecuație algebrică generală de gradul al doilea:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0 \tag{1}$$

unde cel puțin unul dintre coeficienții termenilor de grad doi (A, B, C, D, E, F) este nenul. Natura geometrică a cuadricei este determinată de invarianții săi algebrici, care permit reducerea ecuației (1) la o **formă canonică** printr-o transformare ortogonală de coordonate (rotație și translație). Această formă canonică revelează simetriile și proprietățile intrinseci ale suprafeței.

Cuadricele se clasifică în:

- **Cuadrice nedegenerate:** Acestea au un centru de simetrie unic (elipsoid, hiperboloid cu o pânză, hiperboloid cu două pânze) sau nu au centru de simetrie (paraboloid eliptic, paraboloid hiperbolic).
  - *Cuadrice cu centru (centrale):* Elipsoidul, hiperboloidul cu o pânză, hiperboloidul cu două pânze.
  - *Cuadrice fără centru (necentrale):* Paraboloidul eliptic, paraboloidul hiperbolic.
- **Cuadrice degenerate:** Locul geometric se reduce la forme mai simple, precum conuri, cilindri (eliptici, hiperbolici, parabolici), perechi de plane (secante, paralele, confundate) sau chiar o dreaptă sau un punct.

Dintre cuadricele nedegenerate, interesul nostru se concentrează asupra celor care prezintă proprietatea de a fi **dublu riglate**.

Definiție 2.1 (Suprafață Riglată și Dublu Riglată)**.** O suprafață $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ se numește *riglată* dacă prin fiecare punct $P \in \Sigma$ trece cel puțin o dreaptă $d \subset \Sigma$. O astfel de dreaptă d se numește *generatoare* (sau directoare rectilinie) a suprafeței. O suprafață se numește *dublu riglată* dacă prin fiecare punct $P \in \Sigma$ trec exact două generatoare distincte, $d_1, d_2 \subset \Sigma$, aceste generatoare aparținând unor familii distincte (nereale sau reale) de drepte conținute în suprafață.

Observație 2.1. Singurele cuadrice nedegenerate care sunt dublu riglate (cu familii reale de generatoare) sunt hiperboloidul cu o pânză și paraboloidul hiperbolic. Elipsoidul, hiperboloidul cu două pânze și paraboloidul eliptic nu sunt suprafețe riglate. Conurile și cilindrii sunt suprafețe riglate (simplu riglate, cu o singură familie de generatoare), dar nu sunt dublu riglate în sensul definiției de mai sus (excepție făcând punctele speciale precum vârful conului).

2.1 Hiperboloidul cu o Pânză (H1P)

2.1.1 Ecuația Canonică și Proprietăți Fundamentale

Hiperboloidul cu o pânză (H1P) este o cuadrică centrală nedegenerată. Forma sa canonică, obținută prin alegerea unui sistem de axe de coordonate convenabil (axele principale ale cuadricei), este:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{unde } a, b, c > 0 \tag{2}$$

Constantele a, b, c reprezintă lungimile semiaxelor hiperboloidului.

- **Simetrii:** H1P este simetric față de planele de coordonate, axele de coordonate și față de origine (centrul său).
- **Intersecții cu axele:** Axele Ox și Oy intersectează H1P în punctele $(\pm a, 0, 0)$ și respectiv $(0, \pm b, 0)$. Axa Oz nu intersectează H1P.
- **Secțiuni planare:**
  - Plane paralele cu xy (de ecuație $z = k$): Secțiunile sunt elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$. Cea mai mică dintre aceste elipse, numită *elipsa de stricțiune* sau *elipsa de gât*, se obține pentru $z = 0$ și are semiaxele a și b. Dacă $a = b$, H1P este un *hiperboloid de rotație*, iar secțiunile $z = k$ sunt cercuri.
  - Plane paralele cu xz (de ecuație $y = k$): Secțiunile sunt hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$ (dacă $1 - k^2/b^2 \neq 0$). Dacă $|k| = b$, secțiunea este o pereche de drepte secante (generatoare).
  - Plane paralele cu yz (de ecuație $x = k$): Similar, se obțin hiperbole sau perechi de generatoare.
- **Conul Asimptotic:** Este conul de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

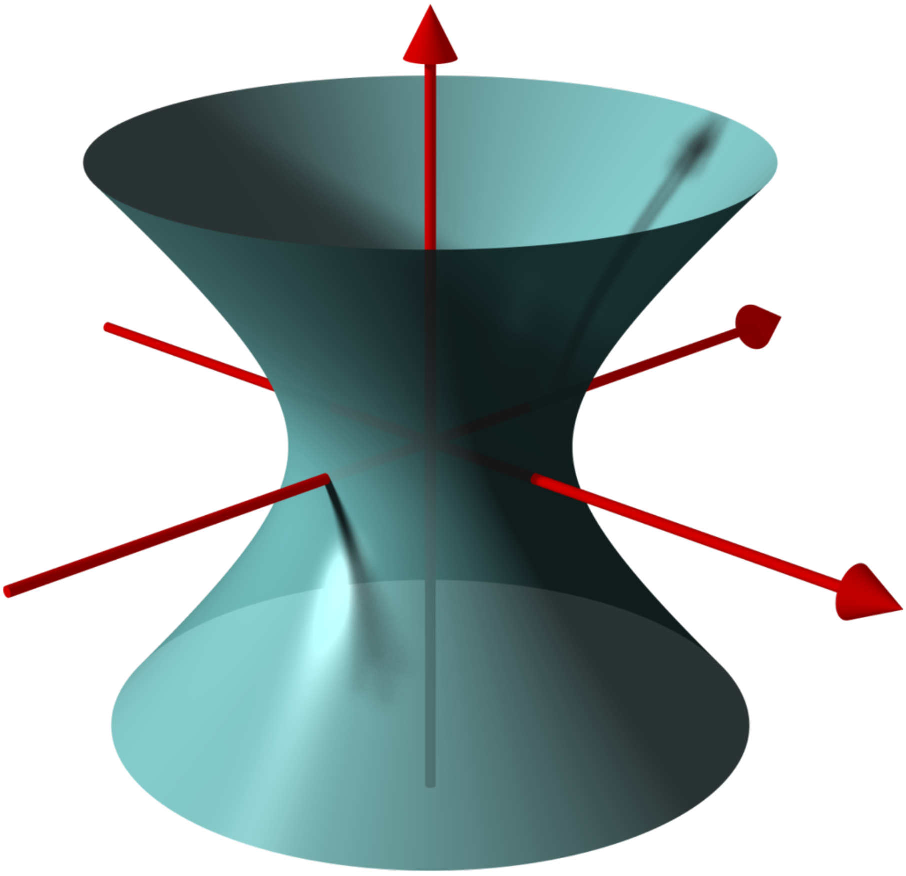

Figura 1: Hiperboloid cu o pânză și cele două familii de generatoare rectilinii.

2.1.2 Parametrizări și Familiile de Generatoare

O parametrizare vectorială standard pentru H1P, care acoperă întreaga suprafață, este:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (a\cosh v\cos u, b\cosh v\sin u, c\sinh v), \quad u \in [0,2\pi), v \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Cele două familii de generatoare rectilinii, G_λ și G_μ, sunt definite prin sistemele (derivate din rescrierea ecuației (2) ca produs de factori):

$$G_\lambda : \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b} \end{cases} \tag{4}$$

$$G_\mu : \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b} \end{cases} \tag{5}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Proprietate 2.1. Prin fiecare punct al H1P trece exact o generatoare din familia G_λ și exact una din familia G_μ. Două generatoare distincte din aceeași familie sunt necoplanare. Orice generatoare dintr-o familie intersectează toate generatoarele din cealaltă familie.

2.2 Paraboloidul Hiperbolic (PH)

2.2.1 Ecuația Canonică și Proprietăți Fundamentale

Paraboloidul hiperbolic (PH) este o cuadrică necentrală, nedegenerată. Forma sa canonică este:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad \text{unde } a, b > 0 \tag{6}$$

Originea $(0, 0, 0)$ este vârful paraboloidului.

- **Secțiuni planare:**
  - Plane paralele cu xy ($z = k$): Dacă $k \neq 0$, secțiunile sunt hiperbole. Dacă $k = 0$, secțiunea este o pereche de drepte concurente în origine (generatoare).
  - Plane paralele cu xz ($y = k$): Secțiunile sunt parabole deschise în sensul pozitiv al axei Oz.
  - Plane paralele cu yz ($x = k$): Secțiunile sunt parabole deschise în sensul negativ al axei Oz.

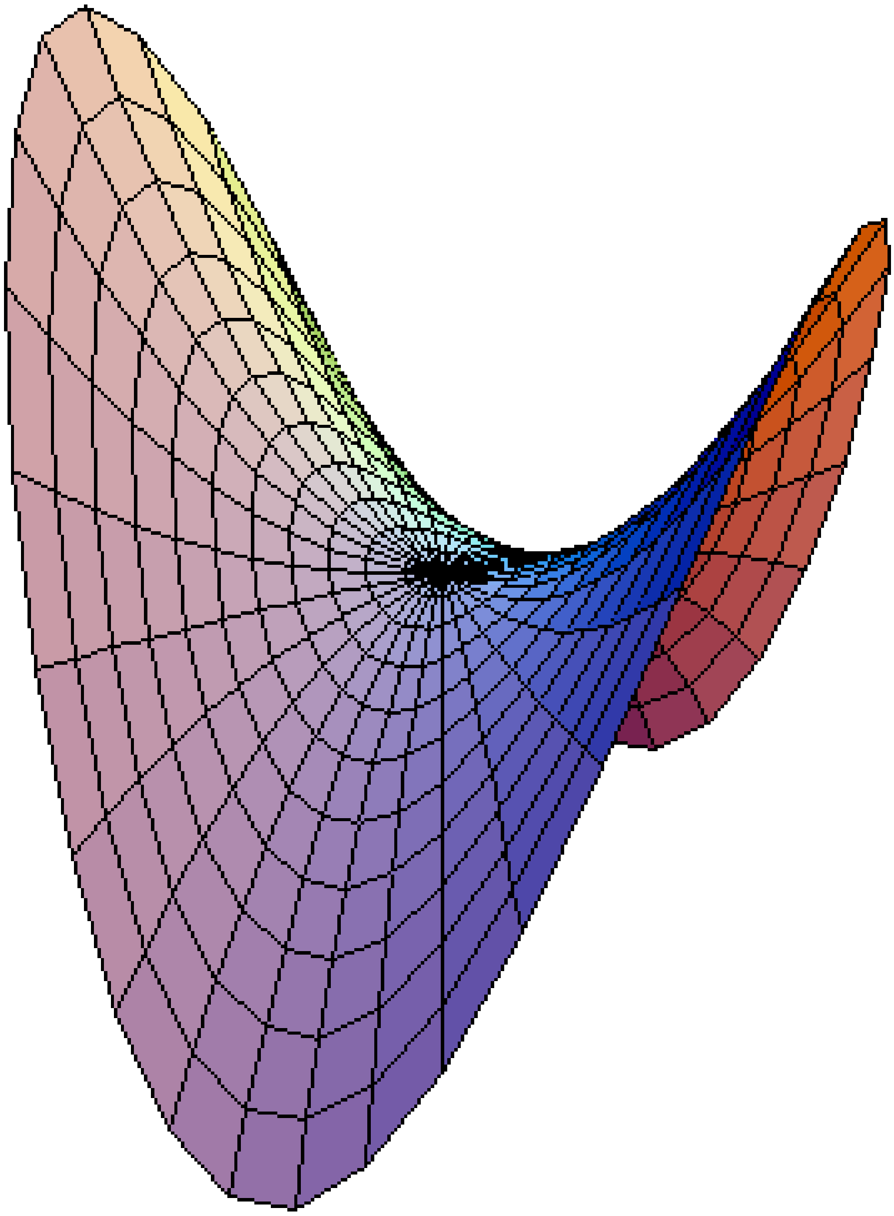

Figura 2: Paraboloid hiperbolic și cele două familii de generatoare rectilinii.

2.2.2 Parametrizări și Familiile de Generatoare

O parametrizare vectorială standard pentru PH este:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \left(au, bv, \frac{1}{2}(u^2 - v^2)\right), \quad u, v \in \mathbb{R} \tag{7}$$

O altă parametrizare, bazată direct pe generatoare, este:

$$\boldsymbol{r}(\lambda,\mu) = \left(a(\lambda+\mu), b(\mu-\lambda), \lambda\mu\frac{2a^2b^2}{ab}\right) \tag{8}$$

Simplificând, dacă considerăm ecuația $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c'}$ atunci $\boldsymbol{r}(\lambda,\mu) = (a(\lambda+\mu), b(\mu-\lambda), 2ab\lambda\mu c')$. Pentru $2z$, atunci $c' = 1/2$, deci $\boldsymbol{r}(\lambda,\mu) = (a(\lambda+\mu), b(\mu-\lambda), ab\lambda\mu)$.

Cele două familii de generatoare rectilinii, G'_λ și G'_μ, rezultă din rescrierea ecuației (6):

$$G'_\lambda : \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\lambda \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{\lambda} \end{cases} \tag{9}$$

$$G'_\mu : \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\mu \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{z}{\mu} \end{cases} \tag{10}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proprietate 2.2. Prin fiecare punct al PH trece exact o generatoare din familia G'_λ și una din familia G'_μ. Generatoarele din aceeași familie sunt necoplanare. Orice generatoare dintr-o familie intersectează toate generatoarele din cealaltă. Toate generatoarele familiei G'_λ sunt paralele cu planul director $x/a + y/b = 0$, iar cele ale familiei G'_μ cu $x/a - y/b = 0$.

2.3 Proprietăți Geometrice Comune și Importanța Lor Structurală

2.3.1 Planul Tangent

Planul tangent într-un punct $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al unei cuadrice $F(x, y, z) = 0$ are ecuația:

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(P_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(P_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) = 0 \tag{11}$$

Pentru H1P (din (2)): $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1$. Pentru PH (din (6)): $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = z + z_0$. Fundamental, planul tangent este planul determinat de cele două generatoare care trec prin punctul de tangență.

2.3.2 Curbura Gaussiană și Stabilitatea Structurală

Curbura Gaussiană $K = k_1 k_2$. H1P și PH au $K < 0$ (sunt suprafețe anticlastică). Această proprietate le conferă rigiditate structurală și rezistență la flambaj.

- Suprafețele riglate au $K \leq 0$. Dacă $K < 0$ peste tot, suprafața este riglată (Carmo, 1976).
- Pentru H1P dat de (2), o expresie a curburii este $K = -c^2/(a^2 b^2 (1 + z_0^2/c^2)^2)$.

3 Impactul Transformațional în Arhitectură și Inginerie Structurală

Emergența oțelului ca material de construcție la sfârșitul secolului al XIX-lea și dezvoltarea betonului armat la începutul secolului XX au creat premisele tehnologice pentru materializarea unor forme arhitecturale noi și îndrăznețe. Alegerea specifică a parametrilor a, b, c din ecuațiile (2) și a, b (plus factorul lui z) din ecuația (6) are un impact direct asupra morfologiei și, implicit, asupra expresiei arhitecturale.

3.1 Vladimir Shukhov: Pionierul Structurilor Gridshell Hiperboloidale

Inginerul rus **Vladimir Grigorievici Shukhov (1853-1939)** a fost un vizionar care a transpus eleganța matematică a hiperboloidului cu o pânză în structuri reale, ușoare și remarcabil de rezistente. El a patentat structura hiperboloidală din bare de oțel (gridshell) în 1896.

- **Turnul de apă de la Expoziția All-Russia, Nijni Novgorod (1896):** Primul turn hiperboloidal din lume, o structură de 25.6 metri înălțime.

Figura 3: Turnul de apă proiectat de Shukhov pentru Expoziția din Nijni Novgorod (1896).

- **Turnul Shukhov (Shabolovka), Moscova (1920-1922):** Capodopera sa, un turn de transmisie radio de 160 m. (Graefe et al., 1990).

Figura 4: Turnul Shukhov (Shabolovka) din Moscova.

- **Alte aplicații:** Shukhov a proiectat și acoperișuri pentru hale industriale și gări.

3.2 Antoni Gaudí: Intuiția Geometrică și Formele Riglate în Modernismul Catalan

Arhitectul catalan **Antoni Gaudí (1852-1926)** a fost un maestru al suprafețelor riglate.

- **Sagrada Família, Barcelona (începută în 1882):** Utilizează hiperboloizi de rotație și paraboloizi hiperbolici.

Figura 5: Utilizarea H1P și PH în structura Sagradei Família.

- **Colònia Güell Crypt, Santa Coloma de Cervelló (1898-1914):** Experimente cu paraboloizi hiperbolici.
- **Școlile Provizorii de la Sagrada Família (1909):** Acoperiș ondulat din conoide și PH.

3.3 Félix Candela: Virtuozitatea "Cascarones" din Paraboloizi Hiperbolici

Félix Candela Outeriño (1910-1997) este sinonim cu utilizarea PH pentru cochilii subțiri de beton ("cascarones").

- **Restaurantul Los Manantiales, Xochimilco, Mexico City (1958):** Acoperiș din opt segmente de PH.

Figura 6: Restaurantul Los Manantiales, Xochimilco, proiectat de Félix Candela.

- **Iglesia de la Medalla Milagrosa, Mexico City (1953-1955):** Forme ascuțite din PH.

Figura 7: Iglesia de la Medalla Milagrosa, Mexico City, proiectată de Félix Candela.

- **Fabrica Bacardi, Cuautitlán, Mexic (1960):** Acoperișuri din PH.
- **Filozofia lui Candela:** "Forma trebuie să urmeze funcția... economică" (Faber, 1963).

3.4 Oscar Niemeyer și Formele Sculpturale din Beton

Oscar Niemeyer (1907-2012) a fost un maestru al formelor curbe.

- **Catedrala din Brasília (1970):** 16 stâlpi cu structură hiperboloidală.

Figura 8: Catedrala Metropolitană din Brasília, proiectată de Oscar Niemeyer.

- **Palatul Congresului Național, Brasília (1960):** Cupole și turnuri iconice.

3.5 Eero Saarinen: Expresionism Structural și Forme Zvelte

Eero Saarinen (1910-1961) a fost cunoscut pentru forme sculpturale.

- **Terminalul TWA, Aeroportul JFK, New York (1962):** Acoperiș complex, evocând zborul.

Figura 9: Terminalul TWA de la Aeroportul JFK, New York, proiectat de Eero Saarinen.

3.6 Kenzō Tange și Le Corbusier/Xenakis: Monumentalitate și Experiment Radical

- **Kenzō Tange (1913-2005) – Catedrala Sf. Maria din Tokyo (1964):** Acoperiș din opt PH-uri.

Figura 10: Catedrala Sf. Maria din Tokyo, proiectată de Kenzō Tange.

- **Le Corbusier (1887-1965) și Iannis Xenakis (1922-2001) – Philips Pavilion, Expo '58, Bruxelles (1958):** Ansamblu de nouă PH-uri (Sterken, 2007).

Figura 11: Philips Pavilion, Expo '58, Bruxelles, proiectat de Le Corbusier și Iannis Xenakis.

3.7 Provocări Constructive și Considerații Critice

Construcția structurilor bazate pe H1P și PH implică provocări:

- **Precizia execuției:** Necesită o mare precizie, mai ales la intersecții și îmbinări.
- **Cofrajele complexe (uneori):** Pot fi elaborate, necesitând manoperă calificată.
- **Integrarea funcțională:** Formele definite pot constrânge organizarea interioară.
- **Costuri:** Pot fi mai ridicate, deși eficiența materialului poate compensa.
- **Izolarea termică și hidroizolația:** Pot fi dificile pe suprafețe cu dublă curbură.

Criticii au menționat uneori formalismul excesiv.

4 Perspective Contemporane: Design Parametric și Sustenabilitate

Moștenirea acestor forme continuă, potențată de instrumente moderne:

- **Design Parametric și Generativ:** Software-ul (Rhino, Grasshopper) permite explorarea variațiilor și optimizarea formei.
- **Fabricație Digitală:** Tehnologii (CNC, imprimare 3D) facilitează realizarea geometriilor complexe.
- **Sustenabilitate și Eficiență Materială:** Structurile gridshell și cochiliile subțiri sunt eficiente material.
- **Noi Materiale:** Compozite avansate (CFRP, GFRP), lemn lamelat, textile tehnice.
- **Reinterpretări și Hibridizări:** Arhitecții contemporani reinterpretează și combină aceste principii.

Cuadricele dublu riglate rămân o sursă vibrantă de inspirație.

5 Concluzii: Sinergia Durabilă dintre Matematică și Arta de a Construi

Analiza H1P și PH relevă o sinergie extraordinară între rigoarea matematică și expresivitatea arhitecturală. Dubla riglare, cu implicațiile sale asupra curburii Gaussiene negative și construcției din elemente liniare, a permis opere ce sfidează convenționalul.

De la Shukhov, Gaudí, Candela, Niemeyer, la Le Corbusier și Xenakis, aceste cuadrice au oferit un limbaj geometric versatil. Ele au modelat spații memorabile și au stimulat inovația tehnologică. În era contemporană, își reafirmă relevanța prin design parametric și sustenabilitate.

Studiul cuadricelor dublu riglate subliniază fuziunea dintre artă și știință, demonstrând că frumusețea structurală poate izvorî din principii geometrice fundamentale.

Referințe Bibliografice

Carmo, Manfredo P. do (1976), *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, ISBN: 978-0132125895.

Faber, Colin (1963), *Candela: The Shell Builder*, New York: Reinhold Publishing Corporation.

Graefe, Rainer et al., ed. (1990), *Vladimir G. Shukhov 1853-1939: The Art of the Structure - Die Kunst der sparsamen Konstruktion*, Stuttgart: Edition Axel Menges, ISBN: 978-3930698638.

Sterken, Sven (2007), „Music as an Art of Space: Interactions between Music and Architecture in the Work of Iannis Xenakis", în *Revue Belge de Musicologie / Belgisch Tijdschrift voor Muziekwetenschap* 61, pp. 185–202, URL: https://www.jstor.org/stable/20141711.