- **Equazione di Schrödinger**

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

- **Operatore P**

$$P = -i\hbar\frac{d}{dx}$$

$$D_P = \{\psi \in L_2(a,b)\ ass.\ cont.\ \wedge \\ \psi' \in L_2(a,b)\}$$

$$[X,P] = i\hbar\mathbb{1}$$

$$[Q,P] = i\hbar \ \Rightarrow\ [Q,g(P)] = i\hbar g'(P)$$

- **Relazioni di indeterminazione**

$$(\Delta A)_{a,\psi}\,(\Delta B)_{b,\psi} \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle_\psi\right|$$

$$(\Delta X_i)_\psi\,(\Delta P_i)_\psi \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$(\Delta t)_\psi\,(\Delta H)_\psi \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$(\Delta t)_\psi := \inf_A \frac{(\Delta A)_\psi}{\left|\frac{d}{dt}\langle A\rangle_\psi\right|}$$

- **Base generalizzata del momento**

$$\langle\vec{x}\,|\,\vec{p}\rangle = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}$$

- **Equazione di continuità**

$$\vec{j} := \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{x},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x},t) = 0$$

- **Operatore di evoluzione temporale**

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

- **Teo. di Wigner (trasformazione di simmetria)**

$$\begin{cases}\psi' = U\psi\\ A' = UAU^\dagger\end{cases}$$

- **Visuale di Heisenberg**

$$\begin{cases}|\psi_h(t)\rangle = U^\dagger|\psi_s(t)\rangle\\ A_h(t) = U^\dagger A_s(t)U\end{cases}$$

Nota: U è l'operatore di evoluzione temporale.

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}|\psi_h(t)\rangle = 0\\ \dfrac{dA_h(t)}{dt} = -\dfrac{i}{\hbar}[A_h,H_h] + \left(\dfrac{\partial A}{\partial t}\right)_h\end{cases}$$

- **Teo. di Ehrenfest**

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\langle Q\rangle_\psi = \dfrac{1}{m}\langle P\rangle_\psi\\ \dfrac{d}{dt}\langle P\rangle_\psi = -\left\langle V'(Q)\right\rangle_\psi\end{cases}$$

- **Matrici densità**

$$\rho_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$\langle A\rangle_\psi = tr(\rho A)$$

Definizione di operatore densità: ρ tale che:

$$\begin{cases}\rho \quad a.a.\\ \rho \geq 0\\ tr(\rho) = 1\end{cases}$$

$$tr(\rho^2) \leq 1$$

- **Oscillatore armonico 1D**

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2X^2$$

$$\widehat{X} := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}X \qquad \widehat{P} := \frac{P}{\sqrt{m\omega\hbar}}$$

$$\left[\widehat{X},\widehat{P}\right] = i$$

$$a := \frac{\widehat{X}+i\widehat{P}}{\sqrt{2}} \qquad a^\dagger = \frac{\widehat{X}-i\widehat{P}}{\sqrt{2}}$$

$$H = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$$

$$N := a^\dagger a \qquad aa^\dagger - a^\dagger a = 1$$

$$aa^\dagger = N + 1$$

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2}}$$

$$|\nu\rangle = \frac{\left(a^\dagger\right)^\nu|0\rangle}{\sqrt{\nu!}}$$

$$\begin{cases}a|\nu\rangle = \sqrt{\nu}\,|\,\nu-1\rangle\\ a^\dagger|\nu\rangle = \sqrt{\nu+1}\,|\nu+1\rangle\end{cases}$$

- **Generatore infinitesimo della simmetria**

$$Q := i\hbar\frac{d}{ds}U(s)\bigg|_{s=0}$$

$$U(s) = e^{-\frac{i}{\hbar}sQ}$$

- **Generatori delle rotazioni**

$$[J_i,J_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}J_k$$