

Esercizi prob 3

December 27, 2024

1 Esercizio 3.1

Per BC1, $\forall \varepsilon$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon, i.o.) = 0$$

Ovvero:

$$\forall \varepsilon, \text{ per q.o. } \omega, \exists N : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon$$

Che è quasi la tesi (basta prendere solo una quantità numerabile di ε che però tendano a 0). Ω_0 sarà l'intersezione (numerabile) di tutti gli insiemi per cui vale la formula scritta sopra.

2 Esercizio 3.2

2.1 (1)

$$\mathbb{P}(\{X_n \neq 0\}) = \frac{1}{k(n)} \rightarrow 0$$

2.2 (2)

Dato ω , per ogni valore distinto di k esiste un valore di n tale che $X_n(\omega) = 1$, quindi $X_n(\omega) = 1$ infinite volte.

Quindi

$$\nexists \omega : X_n(\omega) \rightarrow \omega$$

(tranne forse $\omega = 0$ o $\omega = 1$ ma non ho voglia di controllare).

3 Esercizio 3.3

3.1 $Y_n \rightarrow 0$

3.2 (Y_n) non converge q.c.

4 Esercizio 3.4

$$\mathbb{P}(|X_1| > x) = \left(\mathbb{P} \left(\bigcap_n \{|X_n| > x\} \right) \right)^{\frac{1}{n}} = \exp \left[\frac{1}{n} \ln \mathbb{P} \left(\bigcap_n \{|X_n| > x\} \right) \right]$$