# Esercizi prob 4

Davide Caucchiolo

December 31, 2024

## 1 Esercizio 4.1

Sia $\widetilde{K}$ tale che $\mathbb{P}\left(X \in \widetilde{K}\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ (esiste perché... credo sia una proprietà degli integrali o roba simile...).

La convergenza in legge implica che:

$$\mathbb{P}\left(X_n \in \widetilde{K}\right) \xrightarrow{n} \mathbb{P}\left(X \in \widetilde{K}\right)$$

Quindi

$$\exists N_0, \quad \forall n \geq N_0, \quad \mathbb{P}\left(X_n \in \widetilde{K}\right) \geq 1 - \varepsilon$$

Per $n < N_0$ definiamo $K_n$ tale che:

$$\mathbb{P}\left(X \in K_n\right) \geq 1 - \varepsilon$$

Quindi in $K := \bigcup_{n<N_0} K_n \cup \widetilde{K}$ (che è compatto perché unione finita di compatti):

$$\mathbb{P}\left(X \in K\right) \geq 1 - \varepsilon \qquad \forall n$$

Ovvero $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è tight.

## 2 Esercizio 4.2

$$y := \sup_n \mathbb{E}\left[h\left(|X_n|\right)\right] < \infty$$

$$\mathbb{E}\left[h\left(|X_n|\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[y\right] = y \quad \forall n$$

Applichiamo ora la disuguaglianza di Markov:

$$\mathbb{P}\left(h\left(|X_n|\right) \geq k\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[h\left(|X_n|\right)\right]}{k} \leq \frac{y}{k} \qquad \forall n$$

$$\mathbb{P}\left(h\left(|X_n|\right) < k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(h\left(|X_n|\right) \geq k\right) \geq 1 - \frac{y}{k} \qquad \forall n$$

Quindi per la tightness basta predere l'insieme compatto $\overline{\{h\left(|X_n|\right) < k\}}$ (la linea sopra indica la chiusura dell'insieme, che è già limitato siccome $h$ è crescente e tendente all'infinito).

## 3 Esercizio 4.3

### 3.1 (1): $\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}\,dt\right)P_X(dx)$

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\left(\int_{\Omega} e^{itX(\omega)}\mathbb{P}(\omega)\right)dt = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx}P_X(dx)\right)dt$$

Nota: questo passaggio non so come giustificarlo bene. Per favore qualche matematico spieghi meglio cosa sta succedendo.

Ora vogliamo controllare se i due integrali sono (assolutamente) integrabili:

$$\int_{\mathbb{R}} \left|e^{itx}P_X(dx)\right| = \int_{\mathbb{R}} \left|P_X\,(dx)\right| < +\infty$$

$$\int_{-T}^{T}\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\right|dt =$$

$$\int_{-T}^{T}\left|\frac{1-ita-1+itb+O(t^2)}{t}\right|dt =$$

$$\int_{-T}^{T}\left|\frac{it\,(b-a)+O(t^2)}{t}\right|dt =$$

$$\int_{-T}^{T}|i(b-a)+O(t)|\;dt < +\infty$$

Quindi applicando Fubini+Tonelli e distribuendo si ottiene la tesi.

### 3.2 (2): $\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[sgn(x-a)S\left(|x-a|\,T\right) - sgn(x-b)S\left(|x-b|\,T\right)\right]$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{i}t(x-a)}{it}\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}sgn(x-a)\int_{0}^{T}\left[\frac{e^{it|x-a|}-e^{-it|x-a|}}{2it}\right]dt =$$

$$\frac{1}{\pi}sgn(x-a)\int_{0}^{T}\frac{\sin\left(|x-a|\,t\right)}{t}\,dt$$

### 3.3 (3): $\lim_{T\nearrow\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt = P_X((a,b)) + \frac{1}{2}P_X\left(\{a\}\right) + \frac{1}{2}P_X(\{b\})$

$$\lim_{T\nearrow\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt =$$

$$\lim_{T\nearrow\infty}\frac{1}{\pi}\left[sgn(x-a)S\left(|x-a|\,T\right) - sgn(x-b)S\left(|x-b|\,T\right)\right]P_X(dx) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{x<a}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)P_X(dx) + \frac{\pi}{2}P_X\left(\{a\}\right) + \int_{a<x<b}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)P_X(dx) + \frac{\pi}{2}P_X\left(\{b\}\right) + \int_{x>b}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)P_X(dx)\right]$$