Esercizi prob 1

December 27, 2024

1 Esercizio 1.1

1.1 (1)

$F : \mathbb{R} \to [0,1]$ Ovvio

Non decrescenza: assumendo $x \leq y$:

$$F(y) = \mathbb{P}\left(X \leq y\right) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right) + \mathbb{P}\left(x < X \leq y\right) \geq \mathbb{P}\left(X \leq x\right) = F(x)$$

1.2 (2)

Per convergenza monotona di Beppo Levi:

$$0 = \mathbb{P}\left(\bigcap_x \{X \leq x\}\right) = \lim_{y \to -\infty} F(x)$$

Analogamente anche con $F(+\infty)$.

1.3 (3)

Sempre per convergenza monotona:

$$\lim_{y \to x^+} F(y) = \lim_{y \to x^+} \mathbb{P}\left(X \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{y > x} \{X \leq y\}\right)$$

$$F(x) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right)$$

1.4 Bonus

$$\mathbb{P}\left(X = x\right) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right) - \mathbb{P}\left(X < x\right) = F(x) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{y < x} \{X \leq y\}\right) = F(x) - \lim_{y \nearrow x} F(y)$$

2 Esercizio 1.2

2.1 (1)

2.1.1 $X^+ \geq X^-$

$$\{z|F(z) > \omega\} \subset \{z|F(z) \geq \omega\} \longrightarrow \inf\{z|F(z) > \omega\} \geq \inf\{z|F(z) \geq \omega\}$$

2.1.2 $X^+(\omega) \in \mathbb{R}\ \forall\omega \in (0,1)$

Supponiamo per assurdo che $X^+(\omega) = +\infty$:

$$\forall z_0,\ \exists z > z_0,\ F(z) \leq \omega < 1$$

$$\lim_{z\to+\infty} F(z) \leq \omega < 1$$

Che è in contraddizione con ipotesi (2).

2.1.3 $X^-(\omega) \in \mathbb{R}\ \forall\omega \in (0,1)$

Analogo a precedente.

2.2 (2)

$$X^-(\omega) \leq y \iff \inf\{z|F(z) \geq \omega\} \leq y \iff F(y) \geq \omega$$

Ultimo passaggio vale perché $F(\cdot)$ è debolmente crescente.

2.3 (3)

Diamo per buoni tutti i suggerimenti.

Tesi: $\exists!\omega\ t.c.\ X^-(\omega) < q < X^+(\omega)$

Abbiamo che, $\forall\varepsilon > 0$:

$$X^-(\omega+\varepsilon) = \inf\{z|F(z) \geq \omega+\varepsilon\} \geq \inf\{z|F(z) > \omega\} > q$$

Quindi, dato un ω che soddisfa la tesi, nessun ω strettamente maggiore di esso la soddisfa. Analogamente, nessun ω inferiore di esso la soddisfa.

3 Esercizio 1.3

3.1 (1): Exp(λ)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$X^+(\omega) = \inf\{x|F_X(x) > \omega\} = \inf\left\{x|1-e^{-\lambda x} > \omega\right\} =$$

$$= \inf\left\{x > 0|x > -\frac{\ln(1-\omega)}{\lambda}\right\} = -\frac{\ln(1-\omega)}{\lambda}$$

3.2 (2): Cauchy(γ)

$$F_X(x) = \frac{\arctan \frac{x}{\gamma}}{\pi} + \frac{1}{2}$$
$$X^{\pm}(\omega) = \gamma \tan\left[\pi\left(\omega - \frac{1}{2}\right)\right]$$

3.3 (3): $P_X = pP_Y + (1-p)P_0$

$$P_X(x) = p\left(e^{-x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\right) + (1-p)\delta(x)$$
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} P_X(\xi)\, d\xi = \left[p\left(1-e^{-x}\right) + (1-p)\right]\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$
$$X^{\pm}(\omega) = -\ln\left(1 - \frac{\omega-(1-p)}{p}\right)\mathbb{1}_{[1-p,p]}(\omega)$$

3.4 (4): Valori $a_1, \ldots, a_m$ con probabilità $p_1, \ldots, p_m$

$$f_X(x) = p_1\delta(a_1) + \cdots + p_m\delta(a_n)$$
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\, d\xi = s_{j(x)}$$

Con $j(x) := \max\{j | a_j \leq x\}$

$$X^{\pm}(\omega) = \inf\left\{\omega | s_{j(x)} > \omega\right\}$$

(Non sono riuscito a trovare una espressione migliore)

3.5 (5): $F(x) = (1 - pe^{-x})\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

$$X^{\pm}(\omega) = -\ln\left(\frac{1-\omega}{p}\right)\mathbb{1}_{[1-p,\infty)}(\omega)$$

3.6 (6): $f(x) = \frac{1}{2x^2}\mathbb{1}_{(-1,1)^c}(x)$