1 Esercizio 5.1

$$\int_{\{|X|>1\}} |X| \, d\omega \le \int_{|X|>1} |X|^p \, d\omega \le c$$

Quindi, definendo $Y := X \mathbb{1}_{|X|>1}$, si ha che $Y \in \mathbb{L}^1$, quindi tesi (basta imporre che $L > 1$).

2 Esercizio 5.2

2.1 $\Rightarrow$

Prima tesi:

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} \|X\|_1 = \sup_{X \in \mathcal{C}} \left(\mathbb{E}\left[|X|\,; |X| > L\right] + \mathbb{E}\left[|X|\,; |X| \le L\right] \right) \le \varepsilon + L < \infty$$

Per la seconda tesi, sia $G = G_L \cup G_b$, con $G_L := G \cap \{|X| > L\}$ (tale che $\mathbb{E}\left[|X|\,; |X| > L\right] < \frac{\varepsilon}{2}$) e $G_b := G \setminus G_L$. Scegliendo $\delta < \frac{\varepsilon}{2L}$ si ha:

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} \left(\mathbb{E}\left[|X|; G_L\right] + \mathbb{E}\left[|X|; G_b\right] \right) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2.2 $\Leftarrow$

$$c := \sup_{X \in \mathcal{C}} \|X\|_1$$

Dobbiamo dimostrare che $\forall \delta > 0,\ \exists L,\ \forall X,\ \mathbb{P}\left(|X| > L\right) < \delta$:

$$\|X\|_1 \ge L \mathbb{P}\left(|X| > L\right)$$

$$\mathbb{P}\left(|X| > L\right) \le \frac{\|X\|_1}{L} \le \frac{c}{L} < \delta$$

(con L sufficientemente grande).

3 Esercizio 5.3

$X_n \in \mathbb{L}^1$: già dimostrato nell'esercizio precedente (prima tesi di parte "$\Rightarrow$").

Tesi $\lim_n \mathbb{E}\left[X_n\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$: Sappiamo già che, data la convergenza in legge, $\lim_n \mathbb{E}\left[h(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[h\left(X\right)\right] \quad \forall h \in \mathcal{C}_b^0$.

Questo vale anche per $h = \mathbb{1}_{\{|X|>L\}}$ (ovviamente questo h non è continuo, ma può essere approssimato da funzioni continue): X è UI (quindi è anche $\mathbb{L}^1$).

Inoltre questo vale anche con $h\left(x\right) = x$ (anche questo non bounded ma approssimabile da bounded).

(Sinceramente a me questo esercizio sussa perché sembra già tutto fatto)

4 Esercizio 5.4

Usiamo l'esercizio precedente:

$$Y_n := f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$Y := f(Z)$$

4.1 Tesi 1: $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$

Tesi: $\mathbb{E}\left[h\left(Y_n\right)\right] \to \mathbb{E}\left[h\left(Y\right)\right] \quad \forall h \in \mathcal{C}_b^0$:

Osserviamo che $h \circ f \in \mathcal{C}_b^0$:

siccome per TLC: $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, si ha la Tesi 1.

4.2 Tesi 2: $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ UI

$$\sup_n \|Y_n\| < \infty$$

In quanto sono tutte funzioni $\mathbb{L}^1$ (infatti asintoticamente f cresce al massimo come x^4, e $X_n \in \mathbb{L}^4$) e tendono in legge ad una funzione $\mathbb{L}^1$ (sempre per lo stesso motivo).

Inoltre $\mathbb{E}\left[|Y_n|; |Y_n| > L\right] \to \mathbb{E}\left[|Y|; |Y| > L\right] < \varepsilon$ (sempre per convergenza in legge).

5 Esercizio 5.5

Sappiamo che $\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mu$ q.c. (per LGN; $\mu := \mathbb{E}[X_n]$).

Usiamo l'esercizio 5.2:

L'ipotesi $\sup_n \|\frac{S_n}{n}\|_1 < \infty$ è vera per ipotesi.

L'ipotesi $\sup_n \mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|; G\right] < \varepsilon \quad \forall \mathbb{P}(G) < \delta$ è invece vera perché

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{n}\right|; G\right] < \varepsilon \quad \forall \mathbb{P}(G) < \delta$$

è vera per ogni $\frac{S_n}{n}$ preso singolarmente (essendo $\mathbb{L}^1$), e anche il sup rimane limitato a causa della convergenza q.c.