

Esercizi prob 1

February 20, 2025

1 Esercizio 1.1

1.1 (1): F non decrescente

$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ Ovvio

Non decrescenza: assumendo $x \leq y$:

$$F(y) = \mathbb{P}(X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(x < X \leq y) \geq \mathbb{P}(X \leq x) = F(x)$$

1.2 (2): $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$

Per convergenza monotona di Beppo Levi:

$$0 = \mathbb{P}\left(\bigcap_x \{X \leq x\}\right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(y)$$

Analogamente anche con $F(+\infty)$.

1.3 (3): F è CAD

Sempre per convergenza monotona:

$$\lim_{y \searrow x} F(y) = \lim_{y \searrow x} \mathbb{P}(X \leq y) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{y > x} \{X \leq y\}\right) = \mathbb{P}(X \leq x) = F(x)$$

1.4 Bonus

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = F(x) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{y < x} \{X \leq y\}\right) = F(x) - \lim_{y \nearrow x} F(y)$$

2 Esercizio 1.2

2.1 (1)

2.1.1 $X^+ \geq X^-$

$$\{z | F(z) > \omega\} \subset \{z | F(z) \geq \omega\} \longrightarrow \inf \{z | F(z) > \omega\} \geq \inf \{z | F(z) \geq \omega\}$$

2.1.2 $X^+(\omega) \in \mathbb{R} \quad \forall \omega \in (0, 1)$

Supponiamo per assurdo che $X^+(\omega) = +\infty$:

$$\forall z_0, \exists z > z_0, F(z) \leq \omega < 1$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} F(z) \leq \omega < 1$$

Che è in contraddizione con ipotesi (2).

2.1.3 $X^-(\omega) \in \mathbb{R} \quad \forall \omega \in (0, 1)$

Analogo a precedente.

2.2 (2): $\{\omega \in \Omega \mid \omega \leq F(y)\} = \{\omega \in \Omega \mid X^-(\omega) \leq y\}$

$$X^-(\omega) \leq y \iff \inf \{z \mid F(z) \geq \omega\} \leq y \iff F(y) \geq \omega$$

Ultimo passaggio vale perché $F(\cdot)$ è debolmente crescente.

2.3 (3): $\mathbb{P}(X^+ = X^-) = 1$

Diamo per buoni tutti i suggerimenti, ovvero che $\{X^- \neq X^+\} = \{X^- < X^+\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{X^- < q < X^+\}$

Tesi: $\exists! \omega \text{ t.c. } X^-(\omega) < q < X^+(\omega)$

Abbiamo che, $\forall \varepsilon > 0$:

$$X^-(\omega + \varepsilon) = \inf \{z \mid F(z) \geq \omega + \varepsilon\} \geq \inf \{z \mid F(z) > \omega\} > q$$

Quindi, dato un ω che soddisfa la tesi, nessun ω strettamente maggiore di esso la soddisfa. Analogamente, nessun ω inferiore di esso la soddisfa.

3 Esercizio 1.3

3.1 (1): $\text{Exp}(\lambda)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x) dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$X^+(\omega) = \inf \{x \mid F_X(x) > \omega\} = \inf \{x \mid 1 - e^{-\lambda x} > \omega\} =$$

$$= \inf \left\{ x > 0 \mid x > -\frac{\ln(1 - \omega)}{\lambda} \right\} = -\frac{\ln(1 - \omega)}{\lambda} = X^-(\omega)$$

3.2 (2): $\text{Cauchy}(\gamma)$

$$F_X(x) = \frac{\arctan \frac{x}{\gamma}}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$X^\pm(\omega) = \gamma \tan \left[\pi \left(\omega - \frac{1}{2} \right) \right]$$

3.3 (3): $P_X = pP_Y + (1-p)P_0$

$$P_X(x) = p(e^{-x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)) + (1-p)\delta(x)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x P_X(\xi) d\xi = [p(1-e^{-x}) + (1-p)]\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

$$X^+(\omega) = -\ln\left(1 - \frac{\omega - (1-p)}{p}\right)\mathbb{1}_{[1-p,p]}(\omega)$$

Soluzione di Emanuele (lui ragiona sempre in termini di X^-):

$$X^-(\omega) = \begin{cases} -\infty & \omega = 0 \\ 0 & 0 < \omega \leq 1-p \\ \ln\left(\frac{p}{1-\omega}\right) & 1-p < \omega < 1 \end{cases}$$

3.4 (4): Valori a_1, \dots, a_m con probabilità p_1, \dots, p_m

$$f_X(x) = p_1\delta(a_1) + \dots + p_m\delta(a_m)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi = s_{j(x)}$$

Con $j(x) := \max\{j | a_j \leq x\}$

$$X^+(\omega) = \inf\{\omega | s_{j(x)} > \omega\}$$

Soluzione di Emanuele (lui ragiona sempre in termini di X^-):

$$X^-(\omega) = \begin{cases} -\infty & \omega = 0 \\ a_i & \omega \in (s_{i-1}, s_i] \end{cases}$$

3.5 (5): $F(x) = (1-pe^{-x})\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

$$X^\pm(\omega) = -\ln\left(\frac{1-\omega}{p}\right)\mathbb{1}_{[1-p,\infty)}(\omega)$$

3.6 (6): $f(x) = \frac{1}{2x^2}\mathbb{1}_{(-1,1)^c}(x)$

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x} & x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & -1 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x} & x \geq 1 \end{cases}$$

$$X^+(\omega) = \begin{cases} -\frac{1}{2\omega} & \omega < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2(1-\omega)} & \omega \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione di Emanuele (lui ragiona sempre in termini di X^-):

$$X^-(\omega) = \begin{cases} -\frac{1}{2\omega} & \omega \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2(1-\omega)} & \omega > \frac{1}{2} \end{cases}$$