Esercizi prob 4

Davide Caucchiolo

January 13, 2025

1 Esercizio 4.1

Sia $\widetilde{K}$ tale che $\mathbb{P}\left(X \in \widetilde{K}\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ (esiste perché... credo sia una proprietà degli integrali o roba simile...).

La convergenza in legge implica che:

$$\mathbb{P}\left(X_n \in \widetilde{K}\right) \xrightarrow{n} \mathbb{P}\left(X \in \widetilde{K}\right)$$

Quindi

$$\exists N_0, \quad \forall n \geq N_0, \quad \mathbb{P}\left(X_n \in \widetilde{K}\right) \geq 1 - \varepsilon$$

Per $n < N_0$ definiamo K_n tale che:

$$\mathbb{P}\left(X \in K_n\right) \geq 1 - \varepsilon$$

Quindi in $K := \bigcup_{n<N_0} K_n \cup \widetilde{K}$ (che è compatto perché unione finita di compatti):

$$\mathbb{P}\left(X \in K\right) \geq 1 - \varepsilon \qquad \forall n$$

Ovvero $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è tight.

2 Esercizio 4.2

$$y := \sup_n \mathbb{E}\left[h\left(|X_n|\right)\right] < \infty$$

$$\mathbb{E}\left[h\left(|X_n|\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[y\right] = y \qquad \forall n$$

Applichiamo ora la disuguaglianza di Markov:

$$\mathbb{P}\left(h\left(|X_n|\right) \geq k\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[h\left(|X_n|\right)\right]}{k} \leq \frac{y}{k} \qquad \forall n$$

$$\mathbb{P}\left(h\left(|X_n|\right) < k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(h\left(|X_n|\right) \geq k\right) \geq 1 - \frac{y}{k} \qquad \forall n$$

Quindi per la tightness basta predere l'insieme compatto $\overline{\{h\left(|X_n|\right) < k\}}$ (la linea sopra indica la chiusura dell'insieme, che è già limitato siccome h è crescente e tendente all'infinito).

3 Esercizio 4.3

3.1 (1): $\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}\,dt\right) P_X(dx)$

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\left(\int_{\Omega} e^{itX(\omega)}\mathbb{P}(\omega)\right)dt = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx}P_X(dx)\right)dt$$

Nota: questo passaggio non so come giustificarlo bene. Per favore qualche matematico spieghi meglio cosa sta succedendo.

Ora vogliamo controllare se i due integrali sono (assolutamente) integrabili:

$$\int_{\mathbb{R}} \left|e^{itx}P_X(dx)\right| = \int_{\mathbb{R}} \left|P_X\left(dx\right)\right| < +\infty$$

$$\int_{-T}^{T} \left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\right| dt =$$

$$\int_{-T}^{T}\left|\frac{1-ita-1+itb+O(t^2)}{t}\right|dt=$$

$$\int_{-T}^{T}\left|\frac{it\,(b-a)+O(t^2)}{t}\right|dt=$$

$$\int_{-T}^{T}|i(b-a)+O(t)|\;dt<+\infty$$

Quindi applicando Fubini+Tonelli e distribuendo si ottiene la tesi.

3.2 (2): $\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}\,dt=\frac{1}{\pi}\left[sgn(x-a)S\left(|x-a|\,T\right)-sgn(x-b)S\left(|x-b|\,T\right)\right]$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^it(x-a)}{it}\,dt=$$

$$\frac{1}{\pi}sgn(x-a)\int_{0}^{T}\left[\frac{e^{it|x-a|}-e^{-it|x-a|}}{2it}\right]dt=$$

$$\frac{1}{\pi}sgn(x-a)\int_{0}^{T}\frac{\sin\left(|x-a|\,t\right)}{t}\,dt$$

3.3 (3): $\lim_{T\nearrow\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt=P_X((a,b))+\frac{1}{2}P_X\left(\{a\}\right)+\frac{1}{2}P_X(\{b\})$

$$\lim_{T\nearrow\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi(t)\,dt=$$

$$\lim_{T\nearrow\infty}\frac{1}{\pi}\left[sgn(x-a)S\left(|x-a|\,T\right)-sgn(x-b)S\left(|x-b|\,T\right)\right]P_X(dx)=$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{x<a}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)P_X(dx)+\frac{\pi}{2}P_X\left(\{a\}\right)+\int_{a<x<b}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)P_X(dx)+\frac{\pi}{2}P_X\left(\{b\}\right)+\int_{x>b}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)P_X(dx)\right]$$

3.4 (4): Come ricavare F_X

Sappiamo che $P_X((a,b))+P_X(\{b\})=F_X(b)-F_X(a)$. Quindi, usando la formula di prima, possiamo ricavarci tutte le differenze fra valori di F_X. Imponendo alla fine che $F_X(-\infty)=0$ (da cui dovrebbe seguire che $F_X(+\infty)=1$), si può ricavare $F_X\left(x\right)\quad\forall\,x$

3.5 (5): $F_X(b)-F_X(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)\,dt$

Come dice l'hint, dobbiamo solamente dimostrare che F_X è continua:

Facciamo convergenza dominata dell'integrale:

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)\,dt\right|\leq\int_{\mathbb{R}}\frac{\left|e^{-ita}-e^{-itb}\right|}{|t|}\,|\phi(t)|\;dt$$

Sappiamo già che $\int|\phi(t)|\,dt$ è finito, quindi basta controllare con $t\to0$:

$$\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{t}=\frac{-it(a-b)+o(t)}{t}=-i(a-b)+o(1)$$

che è integrabile attorno a 0.

Quindi possiamo portare il limite dentro l'integrale, ed è quindi ovvio dimostrare che F_X è continua.

3.6 (6): $F_X'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-itx}\varphi(t)\,dt$

$$\frac{F_X(x+h)-F_X(x)}{h}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-itx}\frac{ith+o(h)}{ith}\phi(t)\,dt\;\xrightarrow{h\to0}\;\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-itx}\varphi(t)\,dt$$

(Non sono un matematico quindi non so se prima bisogna fare altri argomenti strani per giustificare questo)

4 Esercizio 4.4

4.1 (1): $\sin(t)$

No: $\sin(0) = 0 \neq 1$

4.2 (2): $\cos(t)$

Sì: con tentativi ed errori si scopre che funziona:

$$X(\omega) = \begin{cases} -1 \quad se\ \omega < \dfrac{1}{2} \\ 1 \quad se\ \omega \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < -1 \\ \dfrac{1}{2} & se\ -1 \leq x < 1 \\ 1 & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

4.3 (3): $\cos(t^2)$