

# Esercizi prob 1

December 26, 2024

## 1 Esercizio 1.1

### 1.1 (1)

$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  Ovvio

Non decrescenza: assumendo  $x \leq y$ :

$$F(y) = \mathbb{P}(X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(x < X \leq y) \geq \mathbb{P}(X \leq x) = F(x)$$

### 1.2 (2)

Per convergenza monotona di Beppo Levi:

$$0 = \mathbb{P}\left(\bigcap_x \{X \leq x\}\right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(y)$$

Analogamente anche con  $F(+\infty)$ .

### 1.3 (3)

Sempre per convergenza monotona:

$$\lim_{y \rightarrow x^+} F(y) = \lim_{y \rightarrow x^+} \mathbb{P}(X \leq y) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{y > x} \{X \leq y\}\right)$$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

### 1.4 Bonus

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = F(x) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{y < x} \{X \leq y\}\right) = F(x) - \lim_{y \nearrow x} F(y)$$

## 2 Esercizio 1.2

### 2.1 (1)

#### 2.1.1 $X^+ \geq X^-$

$$\{z|F(z) > \omega\} \subset \{z|F(z) \geq \omega\} \longrightarrow \inf \{z|F(z) > \omega\} \geq \inf \{z|F(z) \geq \omega\}$$

#### 2.1.2 $X^+(\omega) \in \mathbb{R} \ \forall \omega \in (0, 1)$

Supponiamo per assurdo che  $X^+(\omega) = +\infty$ :

$$\forall z_0, \exists z > z_0, F(z) \leq \omega < 1$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} F(z) \leq \omega < 1$$

Che è in contraddizione con ipotesi (2).

#### 2.1.3 $X^-(\omega) \in \mathbb{R} \ \forall \omega \in (0, 1)$

Analogo a precedente.

### 2.2 (2)

$$X^-(\omega) \leq y \iff \inf \{z|F(z) \geq \omega\} \leq y \iff F(y) \geq \omega$$

Ultimo passaggio vale perché  $F(\cdot)$  è debolmente crescente.

### 2.3 (3)

Diamo per buoni tutti i suggerimenti.

Tesi:  $\exists! \omega$  t.c.  $X^-(\omega) < q < X^+(\omega)$

Abbiamo che,  $\forall \varepsilon > 0$ :

$$X^-(\omega + \varepsilon) = \inf \{z|F(z) \geq \omega + \varepsilon\} \geq \inf \{z|F(z) > \omega\} > q$$

Quindi, dato un  $\omega$  che soddisfa la tesi, nessun  $\omega$  strettamente maggiore di esso la soddisfa. Analogamente, nessun  $\omega$  inferiore di esso la soddisfa.

## 3 Esercizio 1.3

### 3.1 (1): $\text{Exp}(\lambda)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x) dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\begin{aligned} X^+(\omega) &= \inf \{x|F_X(x) > \omega\} = \inf \{x|1 - e^{-\lambda x} > \omega\} = \\ &= \inf \left\{ x > 0 \mid x > -\frac{\ln(1 - \omega)}{\lambda} \right\} = -\frac{\ln(1 - \omega)}{\lambda} \end{aligned}$$

### 3.2 (2): Cauchy( $\gamma$ )

$$F_X(x) = \frac{\arctan \frac{x}{\gamma}}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$X^\pm(x) = \gamma \tan \left[ \pi \left( \omega - \frac{1}{2} \right) \right]$$