Esercizi prob 1

December 24, 2024

1 Esercizio 1.1

1.1 (1)

$F : \mathbb{R} \to [0,1]$ Ovvio

Non decrescenza: assumendo $x \leq y$:

$$F(y) = \mathbb{P}\left(X \leq y\right) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right) + \mathbb{P}\left(x < X \leq y\right) \geq \mathbb{P}\left(X \leq x\right) = F(x)$$

1.2 (2)

Per convergenza monotona di Beppo Levi:

$$0 = \mathbb{P}\left(\bigcap_x \{X \leq x\}\right) = \lim_{y \to -\infty} F(x)$$

Analogamente anche con $F(+\infty)$.

1.3 (3)

Sempre per convergenza monotona:

$$\lim_{y \to x^+} F(y) = \lim_{y \to x^+} \mathbb{P}\left(X \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{y > x} \{X \leq y\}\right)$$

$$F(x) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right)$$

1.4 Bonus

$$\mathbb{P}\left(X = x\right) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right) - \mathbb{P}\left(X < x\right) = F(x) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{y < x} \{X \leq y\}\right) = F(x) - \lim_{y \nearrow x} F(y)$$

2 Esercizio 1.2

2.1 (1)

2.1.1 $X^+ \geq X^-$

$$\{z|F(z) > \omega\} \subset \{z|F(z) \geq \omega\} \longrightarrow \inf\{z|F(z) > \omega\} \geq \inf\{z|F(z) \geq \omega\}$$

2.1.2 $X^+(\omega) \in \mathbb{R}\ \forall\omega \in (0,1)$

Supponiamo per assurdo che $X^+(\omega) = +\infty$:

$$\forall z_0,\ \exists z > z_0,\ F(z) \leq \omega < 1$$

$$\lim_{z\to+\infty} F(z) \leq \omega < 1$$

Che è in contraddizione con ipotesi (2).

2.1.3 $X^-(\omega) \in \mathbb{R}\ \forall\omega \in (0,1)$

Analogo a precedente.

2.2 (2)

$$X^-(\omega) \leq y \Leftrightarrow \inf\{z|F(z) \geq \omega\} \leq y \Leftrightarrow F(y) \geq \omega$$

Ultimo passaggio vale perché $F(\cdot)$ è debolmente crescente.

2.3 (3)

Diamo per buoni tutti i suggerimenti.

Tesi: $\exists!\omega\ t.c.\ X^-(\omega) < q < X^+(\omega)$

Abbiamo che, $\forall\varepsilon > 0$:

$$X^-(\omega+\varepsilon) = \inf\{z|F(z) \geq \omega+\varepsilon\} \geq \inf\{z|F(z) > \omega\} > q$$

Quindi, dato un ω che soddisfa la tesi, nessun ω strettamente maggiore di esso la soddisfa. Analogamente, nessun ω inferiore di esso la soddisfa.