

# Esercizi prob 2

February 20, 2025

## 1 Esercizio 2.1

Definiamo le misure finite<sup>(\*)</sup> di  $\mathcal{G}_1$ , con  $A_2 \in \Pi_2$  fissato:

$$\nu_1(A) := \mathbb{P}(A \cap A_2)$$

$$\nu_2(A) := \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_2)$$

Siccome dall'ipotesi si sa che  $\nu_1(A) = \nu_2(A) \quad \forall A \in \Pi_1$ , per il lemma di Williams si ha che  $\nu_1(A) = \nu_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{G}_1$   
Analogamente, fissato  $A_1 \in \Pi_1$ :

$$\tilde{\nu}_1(B) := \mathbb{P}(B \cap A_1)$$

$$\tilde{\nu}_2(B) := \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_1)$$

Siccome dall'ipotesi si sa che  $\tilde{\nu}_1(B) = \tilde{\nu}_2(B) \quad \forall B \in \Pi_2$ , per il lemma di Williams si ha che  $\tilde{\nu}_1(B) = \tilde{\nu}_2(B) \quad \forall B \in \mathcal{G}_2$   
(\*) Bisogna dimostrare che  $\nu_1$  e  $\nu_2$  sono misure finite:

Per  $\nu_1$ :

$$0 \leq \nu_1(A) = \mathbb{P}(A \cap A_2) \leq \mathbb{P}(A) < +\infty$$

$$\nu_1(\sqcup_k A_k) = \mathbb{P}((\sqcup_k A_k) \cap A_2) = \mathbb{P}(\sqcup_k A_k \cap A_2) = \sum_k \mathbb{P}(A_k \cap A_2) = \sum_k \nu_1(A_k)$$

Per  $\nu_2$ :

$$0 \leq \nu_2(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_2) \leq \mathbb{P}(A_2) \leq 1$$

$$\nu_2(\sqcup_k A_k) = \mathbb{P}(\sqcup_k A_k)\mathbb{P}(A_2) = \left(\sum_k \mathbb{P}(A_k)\right)\mathbb{P}(A_2) = \sum_k \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_2) = \sum_k \nu_2(A_k)$$

## 2 Esercizio 2.2

2.1  $\Rightarrow$

Sia  $A_j := \{\omega | X_j(\omega) \leq x_j\}$

Abbiamo che  $A_j \in \sigma(X_j)$  (infatti:  $X_j(A_j) = (-\infty, x_j] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ )

Quindi  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$

2.2  $\Leftarrow$

Osserviamo che, fissato  $j$ , si ha che  $\Pi_j := \{\{X_j \leq x_j\}, x_j \in \mathbb{R}\}$  è un  $\pi$ -sistema (infatti  $\{X_j \leq x_j\} \cap \{X_j \leq y_j\} = \{X_j \leq \min\{x_j, y_j\}\}$ ).

Per l'esercizio 2.1 si ha la tesi.

### 3 Esercizio 2.3

Prendiamo  $\{A_1, \dots, A_N\}$  indipendenti:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_N) = \prod_{n=1}^N \mathbb{P}(A_n) = \prod_{n=1}^k \mathbb{P}(A_n) \prod_{n=k+1}^N \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^k A_n\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k+1}^N A_n\right)$$

Sia:

$$\Pi_{-,k} := \left\{ \bigcap_{n=1}^k A_n, A_n \in \sigma(X_n) \right\}$$

Si ha che  $\sigma(X_i) \subset \Pi_{-,k}, \quad \forall i \leq k$ .

Inoltre  $\Pi_{-,k}$  è un sistema  $\pi$ ;  $\sigma(\Pi_{-,k}) = \sigma(X_1, \dots, X_k)$

$$\Pi_{+,k} := \left\{ \bigcap_{n=k+1}^{\infty} A_n, A_n \in \sigma(X_n) \right\}$$

$\sigma(\Pi_{+,k}) = \sigma(X_{k+1}, \dots)$

Per convergenza monotona (usata 2 volte):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_N (A_1 \cap \dots \cap A_N)\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) \mathbb{P}(A_{k+1} \cap \dots \cap A_N) = \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) \mathbb{P}(A_{k+1} \cap \dots) \end{aligned}$$

Ma  $A_1 \cap \dots \cap A_k$  è un generico elemento di  $\Pi_{-,k}$ , e  $A_{k+1} \cap \dots$  è un generico elemento di  $\Pi_{+,k}$

Vale cioè che  $\mathbb{P}(A_+ \cap A_-) = \mathbb{P}(A_+) \mathbb{P}(A_-) \quad \forall A_+ \in \Pi_{+,k}, A_- \in \Pi_{-,k}$

L'esercizio 2.1 chiude la dimostrazione.

### 4 Esercizio 2.4

#### 4.1 (1)

Definiamo  $I_j^n := \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)$

$$\mathbb{P}(I_j^n) = \frac{1}{2^n}$$

Riscriviamo  $A_{n+1}$  e  $B$  in funzione degli  $I_j^n$ :

$$B = \bigsqcup_{k \in K} I_k^n$$

(per qualche insieme  $K$ )

$$A_n = \bigsqcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{2j}^n$$

Quindi:

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|K|}{2^n}$$

$$\mathbb{P}(B \cap A_{n+1}) = \frac{|K|}{2^{n+1}}$$

(Quest'ultima identità la si ottiene facendo un paio di conti. Ma basta fare un disegnetto ed è ovviamente vera)

## 4.2 (2)

Che  $(\mathbb{1}_{A_n})_n$  siano identicamente distribuite lo abbiamo già visto (hanno tutte  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ ).

Inoltre  $\mathbb{P}(I_j^n \cap A_m) = \frac{1}{2^{n+1}}$  con  $n < m$ .

Quindi (assumendo che  $n < m$ ):

$$\mathbb{P}(A_n \cap A_m) = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \mathbb{P}(I_{2j}^n \cap A_m) = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}$$

## 5 Esercizio 2.5

### 5.1 (1)

$X$  è variabile aleatoria perché è misurabile (è limite di funzioni semplici misurabili) ed è sempre finita ( $\left| \frac{X_n(\omega)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ , che converge in somma).

$$\mathbb{P}(X \in \{0, 1\}) \leq \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0, \forall n) + \mathbb{P}(X_n = 1, \forall n) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \quad \forall n$$

Siccome  $0 \leq X \leq 1$ :

$$\mathbb{P}(X \in (0, 1)) = 1 - \mathbb{P}(X \in \{0, 1\}) = 1$$

### 5.2 (2)

$$2F_X(x) = 2\mathbb{P}\left(\sum_n \frac{X_n}{2^n} \in [0, X]\right) = 2\mathbb{P}\left\{\omega \mid 2 \sum_x \frac{X_n(\omega)}{2^n} \in [0, 2x]\right\} = 2\mathbb{P}\left\{\omega \mid X'_0 + \sum_n \frac{X'_n(\omega)}{2^n} \in [0, 2x]\right\} =$$

Con  $X'_j := X_{j+1}$

$$2[\mathbb{P}(X'_0 = 0) \mathbb{P}(X \in [0, 2x]) + \mathbb{P}(X'_0 = 1) \mathbb{P}(X \in [0, 2x - 1])]$$

Se  $x \leq \frac{1}{2}$ :

$$2F_X(x) = 2\left[\frac{1}{2} \cdot F_X(2x) + \frac{1}{2} \cdot 0\right] = F_X(2x)$$

Se  $x \geq \frac{1}{2}$ :

$$2F_X(x) = 2\left[\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot F_X(2x - 1)\right] = 1 + F_X(2x - 1)$$

### 5.3 (3)

Sappiamo dalla formula che  $F_X(0) = 0$  e che  $F_X(1) = 1$ .

Quindi, imponendo  $x = \frac{m}{2^n}$ , si ha che con la formula si può ricavare il valore di  $F_X(x)$  in funzione dei valori  $\{F_X(\frac{m}{2^{n-1}})\}_{m \in \mathbb{N}}$ , quindi tutti i valori diadici sono fissati.

In particolare, si può dimostrare per induzione che  $F_X(x) = x$ .

### 5.4 (4)

$$X_1 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{X_{2n}}{2^n}$$

$$X_2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{X_{2n+1}}{2^n}$$

Con i termini nella sommatoria IID  $B(1/2)$ .

### 5.5 (5)

Analogamente a prima ma spartisci i vari  $X_j$  in infinite classi.