Esercizi prob 2

February 23, 2025

1 Esercizio 2.1

Definiamo le misure finite(*) di $\mathcal{G}_1$, con $A_2 \in \Pi_2$ fissato:

$$\nu_1(A) := \mathbb{P}(A \cap A_2)$$

$$\nu_2(A) := \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_2)$$

Siccome dall'ipotesi si sa che $\nu_1(A) = \nu_2(A) \quad \forall A \in \Pi_1$, per il lemma di Williams si ha che $\nu_1(A) = \nu_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{G}_1$

Analogamente, fissato $A_1 \in \Pi_1$:

$$\tilde{\nu}_1(B) := \mathbb{P}(B \cap A_1)$$

$$\tilde{\nu}_2(B) := \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_1)$$

Siccome dall'ipotesi si sa che $\tilde{\nu}_1(B) = \tilde{\nu}_2(B) \quad \forall B \in \Pi_2$, per il lemma di Williams si ha che $\tilde{\nu}_1(B) = \tilde{\nu}_2(B) \quad \forall B \in \mathcal{G}_2$

(*) Bisogna dimostrare che ν_1 e ν_2 sono misure finite:

Per ν_1:

$$0 \leq \nu_1(A) = \mathbb{P}(A \cap A_2) \leq \mathbb{P}(A) < +\infty$$

$$\nu_1\left(\sqcup_k A_k\right) = \mathbb{P}\left(\left(\sqcup_k A_k\right) \cap A_2\right) = \mathbb{P}\left(\sqcup_k A_k \cap A_2\right) = \sum_k \mathbb{P}\left(A_k \cap A_2\right) = \sum_k \nu_1(A_k)$$

Per ν_2:

$$0 \leq \nu_2(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_2) \leq \mathbb{P}(A_2) \leq 1$$

$$\nu_2\left(\sqcup_k A_k\right) = \mathbb{P}\left(\sqcup_k A_k\right)\mathbb{P}(A_2) = \left(\sum_k \mathbb{P}(A_k)\right)\mathbb{P}(A_2) = \sum_k \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_2) = \sum_k \nu_2(A_k)$$

2 Esercizio 2.2

2.1 $\Rightarrow$

Sia $A_j := \{\omega | X_j(\omega) \leq x_j\}$

Abbiamo che $A_j \in \sigma(X_j)$ (infatti: $X_j(A_j) = (-\infty, x_j] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$)

Quindi $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$

2.2 $\Leftarrow$

Osserviamo che, fissato j, si ha che $\Pi_j := \{\{X_j \leq x_j\}, x_j \in \mathbb{R}\}$ è un π-sistema (infatti $\{X_j \leq x_j\} \cap \{X_j \leq y_j\} = \{X_j \leq \min\{x_j, y_j\}\}$).

Per l'esercizio 2.1 si ha la tesi.

3 Esercizio 2.3

Prendiamo $\{A_1, \dots A_N\}$ indipendenti:

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap \dots \cap A_N\right) = \prod_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n) = \prod_{n=1}^{k} \mathbb{P}(A_n) \prod_{n=k+1}^{N} \mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{k} A_n\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=k+1}^{N} A_m\right)$$

Sia:

$$\Pi_{-,k} := \left\{\bigcap_{n=1}^{k} A_n,\ A_n \in \sigma(X_n)\right\}$$

Si ha che $\sigma(X_i) \subset \Pi_{-,k}, \quad \forall i \leq k$.
Inoltre $\Pi_{-,k}$ è un sistema π; $\sigma(\Pi_{-,k}) = \sigma(X_1, \dots, X_k)$

$$\Pi_{+,k} := \left\{\bigcap_{n=k+1}^{\infty} A_n,\ A_n \in \sigma(X_n)\right\}$$

$\sigma(\Pi_{+,k}) = \sigma(X_{k+1}, \dots)$
Per convergenza monotona (usata 2 volte):

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N}(A_1 \cap \dots \cap A_N)\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(A_1 \cap \dots \cap A_N\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(A_1 \cap \dots \cap A_k\right) \mathbb{P}\left(A_{k+1} \cap \dots \cap A_N\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(A_1 \cap \dots \cap A_k\right) \mathbb{P}\left(A_{k+1} \cap \dots\right)$$

Ma $A_1 \cap \dots \cap A_k$ è un generico elemento di $\Pi_{-,k}$, e $A_{k+1} \cap \dots$ è un generico elemento di $\Pi_{+,k}$
Vale cioè che $\mathbb{P}\left(A_+ \cap A_-\right) = \mathbb{P}\left(A_+\right) \mathbb{P}\left(A_-\right) \quad \forall A_+ \in \Pi_{+,k},\ A_- \in \Pi_{-,k}$
L'esercizio 2.1 chiude la dimostrazione.

4 Esercizio 2.4

4.1 (1)

Definiamo $I_j^n := \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)$

$$\mathbb{P}\left(I_j^n\right) = \frac{1}{2^n}$$

Riscriviamo A_{n+1} e B in funzione degli I_j^n:

$$B = \bigsqcup_{k \in K} I_k^n$$

(per qualche insieme K)

$$A_n = \bigsqcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{2j}^n$$

Quindi:

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|K|}{2^n}$$

$$\mathbb{P}\left(B \cap A_{n+1}\right) = \frac{|K|}{2^{n+1}}$$

(Quest'ultima identità la si ottiene facendo un paio di conti. Ma basta fare un disegnetto ed è ovviamente vera)

4.2 (2)

Che $(\mathbb{1}_{A_n})_n$ siano identicamente distribuite lo abbiamo già visto (hanno tutte $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2}$).

Inoltre $\mathbb{P}\left(I_j^n \cap A_m\right)=\frac{1}{2^{n+1}}$ con $n<m$.

Quindi (assumendo che $n<m$):

$$\mathbb{P}\left(A_n \cap A_m\right)=\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \mathbb{P}\left(I_{2j}^n \cap A_m\right)=\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{4}$$

5 Esercizio 2.5

5.1 (1)

X è variabile aleatoria perché è misurabile (è limite di funzioni semplici misurabili) ed è sempre finita ($\left|\frac{X_n(\omega)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$, che converge in somma a 1).

$$\mathbb{P}\left(X \in\{0,1\}\right) \leq \mathbb{P}\left(X=0\right)+\mathbb{P}\left(X=1\right)=\mathbb{P}\left(X_n=0, \forall n\right)+\mathbb{P}\left(X_n=1, \forall n\right) \leq \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n} \qquad \forall n$$

Siccome $0 \leq X \leq 1$:

$$\mathbb{P}\left(X \in(0,1)\right)=1-\mathbb{P}\left(X \in\{0,1\}\right)=1$$

5.2 (2)

$$2F_X(x)=2\mathbb{P}\left(\sum_n \frac{X_n}{2^n} \in[0, x]\right)=2\mathbb{P}\left\{\omega \,\middle|\, 2\sum_x \frac{X_n(\omega)}{2^n} \in[0,2x]\right\}=2\mathbb{P}\left\{\omega \,\middle|\, X_0'+\sum_n \frac{X_n'(\omega)}{2^n} \in[0,2x]\right\}=$$

Con $X_j':=X_{j+1}$

$$\begin{aligned}2F_X(x)&=2\left[\mathbb{P}\left(X_0'=0\right)\mathbb{P}\left(X \in[0,2x]\right)+\mathbb{P}\left(X_0'=1\right)\mathbb{P}\left(X \in[0,2x-1]\right)\right]= \\ &=2\left[\mathbb{P}\left(X_0'=0\right)F_X(2x)+\mathbb{P}\left(X_0'=1\right)F_X(2x-1)\right]\end{aligned}$$

Sappiamo che $F_X(\xi)=0$ con $\xi \leq 0$ e che $F_X(\xi)=1$ con $\xi \geq 1$.

Se $x \leq \frac{1}{2}$:

$$2F_X(x)=2\left[\frac{1}{2}\cdot F_X(2x)+\frac{1}{2}\cdot 0\right]=F_X(2x)$$

Se $x \geq \frac{1}{2}$:

$$2F_X(x)=2\left[\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot F_X(2x-1)\right]=1+F_X(2x-1)$$

5.3 (3)

Sappiamo che $F_X(0)=0$ e che $F_X(1)=1$.

Quindi, imponendo $x=\frac{m}{2^n}$, si ha che con la formula si può ricavare il valore di $F_X(x)$ in funzione dei valori $\left\{F_X(\frac{m}{2^{n-1}})\right\}_{m\in\mathbb{N}}$, quindi tutti i valori diadici sono fissati.

Infatti:

$$2F_X\left(\frac{1}{2^N}\right)=F_X\left(\frac{1}{2^{N-1}}\right)$$

$$F_X\left(\frac{1}{2^N}\right)=\frac{1}{2}F_X\left(\frac{1}{2^{N-1}}\right)=\frac{1}{2^N}F(1)=\frac{1}{2^N}$$

$$F\left(\frac{m}{2^N}\right)=F\left(\frac{2^l+s}{2^N}\right)$$

(con $m=2^l+s$, $s<2^l$)

In particolare, si può dimostrare che $F_X(x)=x$:

Se $l+1=N$:

$$F\left(\frac{2^l+s}{2^N}\right)=F\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2^N}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2^{N-1}}\right)$$

Se $l+1 < N$:

$$F\left(\frac{2^l+s}{2^N}\right) = \frac{1}{2}F\left(\frac{2^l+s}{2^{N-1}}\right)$$

Quindi:

$$F\left(\frac{m}{2^N}\right) = \frac{m}{2^N}$$

Siccome $F(x) = x$ nell'insieme dei numeri diadici, che è denso in $[0,1]$, e siccome F è CAD, si ha che $F(x) = x$.

5.4 (4)

$$X_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{X_{2n}}{2^n}$$

$$X_2 := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{X_{2n+1}}{2^n}$$

Con i termini nella sommatoria IID B(1/2).

5.5 (5)

Analogamente a prima ma spartisci i vari X_j in infinite classi.

Ad esempio:

$$\widetilde{X}_k := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_{\pi(k)^n}(\omega)$$

con $\pi(k)$ il k-esimo numero primo.