Esercizi prob 4

Davide Caucchiolo

December 29, 2024

1 Esercizio 4.1

Sia $\widetilde{K}$ tale che $\mathbb{P}\left(X \in \widetilde{K}\right) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ (esiste perché... credo sia una proprietà degli integrali o roba simile...).

La convergenza in legge implica che:

$$\mathbb{P}\left(X_n \in \widetilde{K}\right) \xrightarrow{n} \mathbb{P}\left(X \in \widetilde{K}\right)$$

Quindi

$$\exists N_0, \quad \forall n \geq N_0, \quad \mathbb{P}\left(X_n \in \widetilde{K}\right) \geq 1 - \varepsilon$$

Per $n < N_0$ definiamo K_n tale che:

$$\mathbb{P}\left(X \in K_n\right) \geq 1 - \varepsilon$$

Quindi in $K := \bigcup_{n<N_0} K_n \cup \widetilde{K}$ (che è compatto perché unione finita di compatti):

$$\mathbb{P}\left(X \in K\right) \geq 1 - \varepsilon \qquad \forall n$$

Ovvero $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è tight.

2 Esercizio 4.2

$$y := \sup_n \mathbb{E}\left[h\left(|X_n|\right)\right] < \infty$$

$$\mathbb{E}\left[h\left(|X_n|\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[y\right] = y \qquad \forall n$$

Applichiamo ora la disuguaglianza di Markov:

$$\mathbb{P}\left(h\left(|X_n|\right) \geq k\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[h\left(|X_n|\right)\right]}{k} \leq \frac{y}{k} \qquad \forall n$$

$$\mathbb{P}\left(h\left(|X_n|\right) < k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(h\left(|X_n|\right) \geq k\right) \geq 1 - \frac{y}{k} \qquad \forall n$$

Quindi per la tightness basta predere l'insieme compatto $\overline{\{h\left(|X_n|\right) < k\}}$ (la linea sopra indica la chiusura dell'insieme, che è già limitato siccome h è crescente e tendente all'infinito).