«Об одной задаче оптимизации для математической модели дохода фирмы»

Рогулькина Елена Александровна

Научный руководитель: Каменский Михаил Игоревич

25.06.2021

Магистерская работа
Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки
Профиль «Математическое и компьютерное моделирование»

Введение

Анализ истории экономики показывает, что в спокойные периоды состояния общества преобладают методы, носящие равномерный характер, тогда как в более беспокойные периоды предпочтение отдается динамическим подходам, требующим новых математических методов и понятий.
Например, при оценке стоимости нематериальных активов (НМА) интеллектуальной собственности (ИС) мы имеем дело с фундаментальным противоречием между принципом бухгалтерского учета и свойствами экономики знаний

Настоящая квалификационная работа посвящена применению нелинейного осреднения В.П. Маслова и решению некоторых задач оптимизации в экономических процессах.

Производственная функция

Производственная функция одной независимой переменной x

$$y = f(x) \tag{1}$$

— это функция, у которой x принимает значения объемов *затрагиваемого* или *используемого ресурса* (фактора производства), а y — значения объемов *выпускаемой продукции*

Производственная функция

Типичным представлением широкого класса однофакторных ПФ является степенная функция

$$y = f(x) = ax^{\beta}, \tag{2}$$

где $a > 0$, $x \geq 0, 0 < \beta < 1$.
Очевидно. что эта функция обладает следующими свойствами

$$f(x) \geq 0, \qquad \frac{df}{dx} > 0, \qquad \frac{d^2}{dx^2} < 0,$$

из которых следует, что с ростом величины затраченного ресурса x растет и объем выпуска y, однако, при этом, каждая дополнительная единица ресурса дает все меньший прирост объема y выпускаемой продукции.
Это обстоятельство отражает фундаментальное положение *экономической теории*, называемое *законом убывающей эффективности*.

Производственная функция

Формально ПФ записывается следующим образом:

$$F = (x_1, \dots, x_n), \tag{3}$$

где F – объем выпуска, x_i – объем i – го ресурса. Обычно требуется, чтобы она обладала всеми или хотя бы некоторыми из следующих свойств:
1) $F(0, \dots, 0) = 0$, т.е. выпуск невозможен при отсутствии ресурсов;
2) Если $x_i' > x_i$, $i = 1, \dots, n$, то $F(x_1, \dots, x_n') > F(x_1, \dots, x_n)$, т.е. при увеличении затрат всех ресурсов выпуск растет;
3) $\frac{\partial F}{\partial x_i} \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, т.е. с увеличением затрат любого из ресурсов, при неизменном количестве остальных, выпуск не уменьшается.
4) $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \leq 0$, $i = 1, \dots, n$, т.е. с увеличением затрат любого из ресурсов, при неизменном количестве остальных, эффективность вовлечения в производство дополнительной его единицы не возрастает (принцип убывающей отдачи последовательных вложений);
5) $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, т.е. эффективность затрат любого из ресурсов, при увеличении затрат какого-либо другого ресурса и неизменном количестве остальных, не снижается;

Производственная функция

В литературе предложено множество конкретных ПФ. Чаще всего среди них используются следующие:
1) **линейная** $Y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$;
2) **леонтьевская** $Y = \min\left(\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n}\right)$;
3) **Кобба–Дугласа** $Y = Ax_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$;
4) с постоянной эластичностью замещения, часто называется **ПЭЗ–**, или **CES– функцией** (от англ. constant elasticity of substitution). В простейшем варианте эта функция имеет вид:

$$Y = A[a_1x_1^{-\rho} + \dots + a_nx_n^{-\rho}]^{-\lambda/\rho}.$$

Наиболее популярной и в теоретических и в прикладных исследованиях является функция Кобба-Дугласа.

Цель работы

В связи с этим, в данной работе, рассматриваются новые семейства производственный функций, которые здесь называются производственными функциями академика В.П. Маслова и которые, сохраняя многие достоинства выше приведенных производственных функций, обладают своими уникальными свойствами.

Производственная функция

Академик В.П. Маслов, при создании «квантовой экономики», получил нелинейное среднее, которое в случае двух величин a и b, имеет вид

$$M_\beta(a,b) = \frac{1}{\chi\beta}\ln\frac{(e^{\chi\beta a}+e^{\chi\beta b})}{2}, \tag{4}$$

где $\chi = \pm 1$, $\beta > 0$.
Основной особенностью среднего (4) является его «наибольшая близость» к линейному, в том смысле, что оно удовлетворяет условию

$$M_\beta(a+\alpha, b+\alpha) = M(a,b)+\alpha. \tag{5}$$

Это условие обеспечивает однозначный выбор функции в семействе колмогоровских средних

$$Q(a,b) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right), \tag{6}$$

где $\varphi(s)$— непрерывная, строго монотонная функция, φ^{-1}— обратная к ней. Функция же вида (6), являются основными инструментами в исследованиях в микро – и макроэкономике.

Производственная функция

В случае степенной функции $\varphi(a) = a^\beta$, $\varphi(b) = b^\beta$ и $\chi = -1$ семейство (6) относится к классу CES-функций, имеющих вид

$$F_\delta(a, b) = A(c_1 K^{-\delta} + c_2 L^{-\delta})^{-\frac{1}{\delta}}, \tag{7}$$

где $A > 0$, $c_1 + c_2 = 1$, K— фонды, L— трудовые ресурсы, $delta > 0$, c_1— фондоемкость продукции, c_2–трудоемкость продукции.
Частными случаями CES являются наиболее используемые типа ПФ: производственная функция В. Леонтьева:

$$F_\infty = \min\left(\frac{K}{c_1}, \frac{K}{c_2}\right), \quad \beta = \infty; \tag{8}$$

функция Кобба-Дугласа:

$$F_0(K, L) = AK^{c_1} L^{c_2}, \qquad \beta = 0; \tag{9}$$

линейная функция:

$$F_1(K, L) = c_1 K + c_2 L + \delta, \qquad \beta = -1. \tag{10}$$

Обобщенная функция нелинейного осреднения Маслихова

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $x_i > 0, \quad n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим функцию

$$M_\beta = \frac{1}{\chi\beta} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\chi\beta x_i}\right), \tag{11}$$

где $\chi = \pm 1, \quad \beta > 0, \quad c_i > 0, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 1.$

Функция M_β удовлетворяет аксиоме аддитивности Маслова

$$M_\beta(x_1 + c,\ x_2 + c,\ \ldots,\ x_n + c) = c + M_\beta(x_1, \ldots, x_n), \tag{12}$$

Обобщенная функция нелинейного осреднения Маслихова

Очевидны следующие свойства:

$$1.\ M_\beta(\theta) = 0,\ \ M_\beta(x) \geq 0; \tag{13}$$

$$2.\ \frac{\partial M_\beta(x)}{\partial x_i} = \frac{c_i e^{\chi\beta x_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i e^{\chi\beta x_i}} > 0; \tag{14}$$

$$3.\ \frac{\partial^2 M_\beta(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\chi\beta c_i e^{\chi\beta(x_i - \sum\limits_{j=1, j\neq i} c_j e^{\chi\beta x_j})}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i e^{\chi\beta x_i}\right)^2}. \tag{15}$$

Обобщенная функция нелинейного осреднения Маслихова

Как отмечено, свойство аддитивности (12) наиболее близко приближает функции $M_\beta(x)$ к линейной. Следующее её свойство так же подтверждает этот факт.

Лемма

Для функции $M_\beta(x)$ справедливы следующие оценки

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq M_\beta(x) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{16}$$

Производственная функция Маслихова

Свойства (11)–(15) осредняющей функции M_β позволяют применить её в качестве макроэкономической многофакторной производственной функции, положив

$$F_\beta(x_1, \ \ldots, x_n) = AM_\beta(x_1, \ldots, x_n), \tag{17}$$

где $A > 0$, x_i — производственные факторы.

Но, с точки зрения выполнения классических условий функция $F_\beta(x)$ подходит лишь при $\beta < 0$, что соответствует отрицательности вторых производных по x_i. В классическом случае положительность вторых производных не рассматривается по причине исследования экономических процессов, развивающихся не быстрее линейных. Линейным же процессам (предельный случай) соответствует линейная производственная функция $F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$.

В случае же функции Маслова, учитывая её близость к линейной при любом знаке параметра β, можно показать, что и при $\beta > 0$ $(\chi = 1)$ $F_\beta(x)$ является производственной функцией. Эти функции будем называть производственными функциями Маслова (ПФМ).

Решение задачи оптимизации производства с ПФМ

В качестве одного из приложений ПФМ рассмотрим стандартную задачу оптимизации производства и аналогичную ей задачу потребительского выбора с бюджетными ограничениями.
Математическая модель для этих задач сводится к оптимизации функции $F(x_1, \ldots, x_n)$ (в одном случае это производственная функция, в другом функция потребительского выбора) при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = c, \tag{18}$$

где $p_i > 0, \quad x_i > 0$.
В нашем случае эта задача имеет вид

$$F_\beta(x) = AM_\beta(x) \to extr \tag{19}$$

при условии (18).
И здесь важно то, что она решается в явном виде.

Решение задачи оптимизации производства с ПФМ

Действительно, условия необходимости экстремума функции Лагранжа

$$L_\beta(x_1, \ldots, x_n) = AM_\beta(x) - \lambda(c - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i)$$

дают систему уравнений

$$\frac{\partial M_\beta}{\partial x_i} = \lambda p_i, \; i = 1, \ldots, n. \; \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = c. \tag{20}$$

Отсюда, после очевидных операций, получаем соотношения

$$e^{\chi\beta(x_i - x_{i+1})} = \frac{c_{i+1} p_i}{p_{i+1} c_i}, \tag{21}$$

Задача оптимизации (18)—(19) с производственной функцией Маслова решается в явном виде. В силу близости функций ПФМ к линейным, её можно назвать задачей «почти-линейного» программирования, которая решается методом Лагранжа.

Решение задачи оптимизации производства с ПФМ

Решение системы имеет вид

$$x_m = \frac{1}{n}\left[\gamma_n + \sum_{m=1}^{n}(n-m)\gamma_m\right] - \sum_{i=1}^{m-1}\gamma_i =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\gamma_n + \gamma_i - m\sum_{i=1}^{m-1}\gamma_i\right]. \tag{22}$$

Кроме того, можно получить решение задачи с помощью рекуррентного соотношения

$$x_i = \gamma_i + x_{i+1}. \tag{23}$$

Задача оптимизации труда и капитала

Обозначим: Y – объем продукции выпущенного фирмой, K – затраты капитала, L — затраты труда. В качестве производственной функции фирмы будем рассматривать производственную функцию Маслова

$$M_\beta(K, L) = \frac{1}{\beta} \ln \left(C_1 e^{\beta L} + C_2 e^{\beta L} \right), \tag{24}$$

p_1— цена единицы капитала, p_2— цена единицы труда.
Рассматривается задача оптимизации производства. Математическая модель этой задачи сводится к оптимизации функции Маслова

$$F_\beta(K, L) = AM_\beta(K, L) \to \max, \tag{25}$$

при условии ограниченности потребительского вывода

$$p_1 K + p_2 L = \delta. \tag{26}$$

С нахождением K_0 и L_0— точек оптимальности.

Задача оптимизации труда и капитала

При $n = 2$, $x_1 = K$, $x_2 = L$ решение задачи (25)—(26)

$$K_0 = \frac{\gamma p_2 + \delta}{p_1 + p_2}, \quad L_0 = \frac{\delta - \gamma p_2}{p_1 + p_2}, \tag{27}$$

$\gamma = \frac{1}{\beta} \ln \frac{C_2 p_1}{C_1 p_2}$.

Двойственная задача

Задача двойственной задачи (18)—(19) заключается в минимизации функции

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min, \tag{28}$$

при условии ограничений на ресурсы

$$M_\rho(p_1, ..., p_n) = D. \tag{29}$$

Решая эту задачу методом Лагранжа, получаем

$$p_m = p_1 - \frac{1}{\rho} c_n \frac{c_m x_1}{c_1 x_m}. \tag{30}$$

В случае $x_1 = K$ и $x_2 = L$

$$p_1 = D + \frac{1}{\beta} c_n \frac{K}{c_1(K+L)}$$

$$p_2 = D + \frac{1}{\beta} c_n \frac{L}{c_2(K+L)}$$

Спасибо за внимание!