

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФГБОУ ВО («ВГУ»)

Математический факультет  
Кафедра математического моделирования

Математическая модель импульсного погружателя, оптимального по  
коэффициенту асимметрии

Бакалаврская работа  
Направление 01.03.04 Прикладная математика  
Профиль Применение математических методов к решению инженерных и  
экономических задач

Зав. кафедрой	_____	д.ф.-м.н., проф.	В.А. Костин	__.__.2019 г.
	<i>подпись</i>			
Обучающийся	_____		А.А. Уткин	
	<i>подпись</i>			
Руководитель	_____	д.ф.-м.н.	Д.В. Костин	
	<i>подпись</i>			

Воронеж 2019

# Содержание

Введение	3
1 Постановка задачи	4
2 Модель	6
3 Задача оптимизации	10
4 Заключение	11
Список литературы	12

# Введение

# 1 Постановка задачи

Принцип действия импульсного погружателя (рис. 1) основан на эффекте резкого снижения сопротивления погружения свайного элемента при сообщении последнему вибрации. При вращении дисбалансов на их ось крепления действует центробежная сила и импульсный погружатель получает вибрирующее движение, которое сообщается свайному элементу через наголовник.

**Определение 1.** *Сила, препятствующая материальной точке, движущейся по окружности, удалиться от центра этой окружности, называется центростремительной силой. Она направлена по радиусу от окружности к центру. По третьему закону Ньютона имеется равная ей и противоположно направленная сила противодействия (сила, с которой движущаяся точка стремится удалиться от центра). Эта сила называется центробежной.*

**Определение 2.** *Импульсным погружением называют внедрение твердого тела в сопротивляющуюся среду под действием постоянной и знакопеременной сил.*

**Определение 3.** *Дебалансом называют неуравновешенность вращающихся частей машин (роторов, коленчатых валов, шкивов и т. п.).*

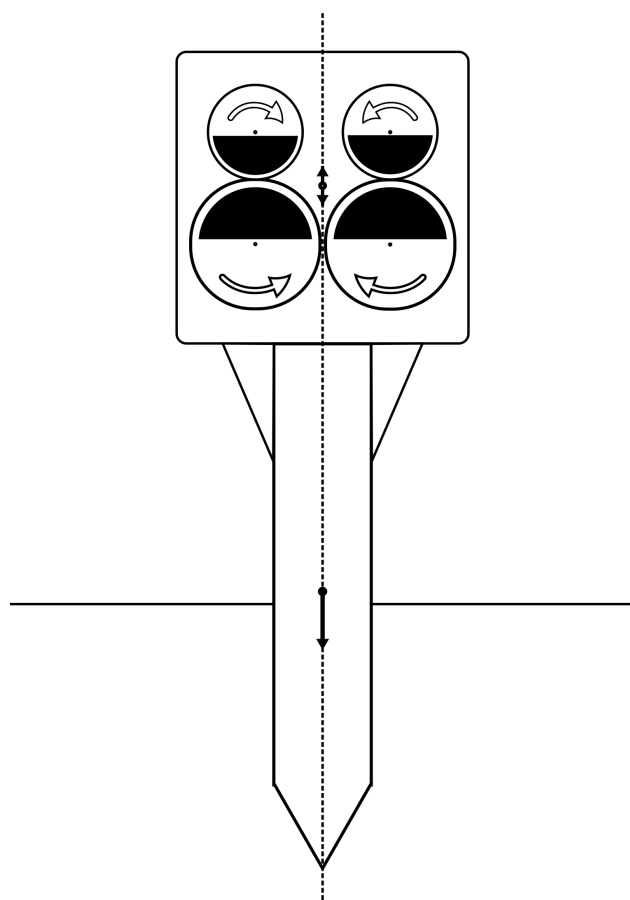


Рис. 1: Схема импульсного погружателя.

## 2 Модель

Пусть дан некий дебаланс с радиусом  $r$ , радиус вала которого равен  $R$ ,  $\omega$  — угловая скорость и  $l$  — расстояние от центра масс до оси вращения дебаланса, а его масса будет равна  $m$  (рис. 2).

**Определение 4.** *Центром масс называют точку, через которую должна проходить линия действия силы, чтобы под действием этой силы тело двигалось поступательно (не вращалось).*

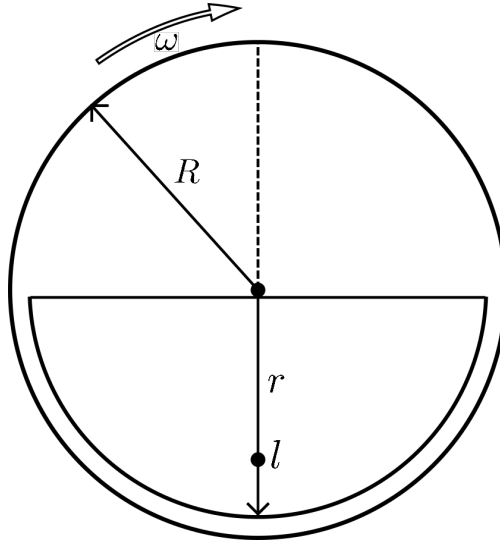


Рис. 2: Схема дебаланса.

Тогда, при вращении данного дебаланса возникнет центробежная сила, которая имеет вид:

$$F_{\text{центр.}} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{R}_0 \quad (1)$$

В нашем случае  $\vec{R}_0$  будет равен расстоянию от центра масс  $l$ , которое имеет вид:

$$l = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (2)$$

$\vec{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -й точки системы материальных точек,  $m_i$  — масса  $i$ -й точки системы материальных точек.

В случае непрерывного распределения масс системы  $l$  имеет вид:

$$l = \frac{1}{M} \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV \quad (3)$$

$M$  — суммарная масса системы,  $V$  — объём,  $\rho$  — плотность. Центр масс характеризует распределение массы по системе частиц или телу.

Вращение такого дебаланса вокруг собственной оси будет иметь вид гармонического колебания.

**Определение 5.** *Гармоническим колебанием называют колебание, в процессе которого величины, характеризующие движение (смещение, скорость, ускорение и др.), изменяются по закону синуса или косинуса (гармоническому закону).*

Уравнение гармонического колебания дебаланса будет иметь вид:

$$x(t) = \lambda \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (4)$$

где  $\lambda = m \cdot \omega \cdot l$

где  $x(t)$  — значение изменяющейся величины в момент времени  $t$ ,  $\lambda$  — амплитуда колебаний,  $\omega$  — циклическая (круговая) частота колебаний,  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний.

Гармонические колебания являются периодическими. Период  $T$  этих колебаний равен периоду функции  $\cos(\omega t + \varphi_0)$ , то есть:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Начальная фаза колебаний в работе импульсного погружателя не является важной, из чего следует, что ее можно игнорировать [2]:

$$x(t) = \lambda \cos(\omega t) \quad (5)$$

В работе вибропогружателя полезной силой считается та, которая направлена на погружение твердого тела в сопротивляющуюся среду. Для компенсации сил, направленных перпендикулярно полезной силе, используются парные дебалансы, направление вращения которых в разные стороны, по отношению друг к другу (рис. 1). В таком случае, уравнение гармонического колебания будет иметь вид:

$$x(t) = 2m\omega^2 l \cos(\omega t) \quad (6)$$

Соответственно, при вращении пары дебалансов точка центра масс будет отличной от системы, где дебаланс вращался лишь один дебаланс (рис 3).

Сила, направленная вверх может привести к разрушению твердого тела. Для компенсации этой силы в импульсного погружателя используется несколько пар дебалансов разного радиуса.

Уравнение гармонического колебания для второй пары дебалансов будет иметь вид:

---

<sup>1</sup> Пруфы на причину игнорирования начальная фаза колебаний...

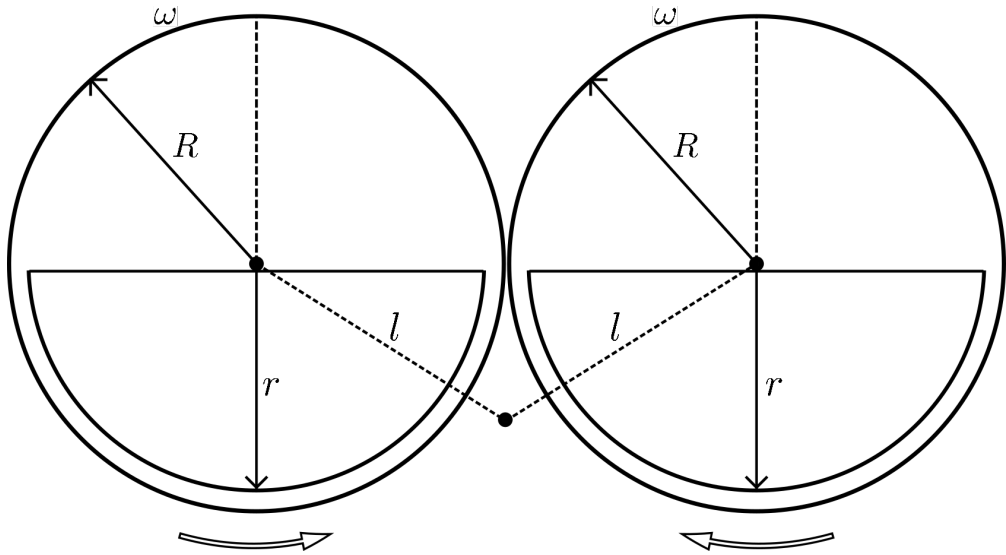


Рис. 3: Схема пары дебалансов.

$$x(t) = 2m_2 \cdot 4\omega^2 \cdot l(r_2) \cdot \cos(2\omega t)$$

Уравнение гармонического колебания для пары дебалансов в общем виде:

$$x(t) = 2m_k \cdot (k\omega)^2 \cdot l(r_k) \cdot \cos(k\omega t) \quad (7)$$

Для всех пар дебалансов сумма гармонических колебаний будет иметь вид:

$$F = \sum_{k=1}^n 2m_k \cdot (k\omega)^2 \cdot l(r_k) \cdot \cos(k\omega t) \quad (8)$$

где  $n$  — количество пар дебалансов

График импульса силы для двух пар дебалансов за время  $t$  представлен на графике (4).

**Определение 6.** Импульсом силы называют векторную физическую величину, которая является мерой действия силы за некоторый промежуток времени.  $\vec{I}$  — импульс силы  $\vec{F}$  за малый промежуток времени  $t$ .



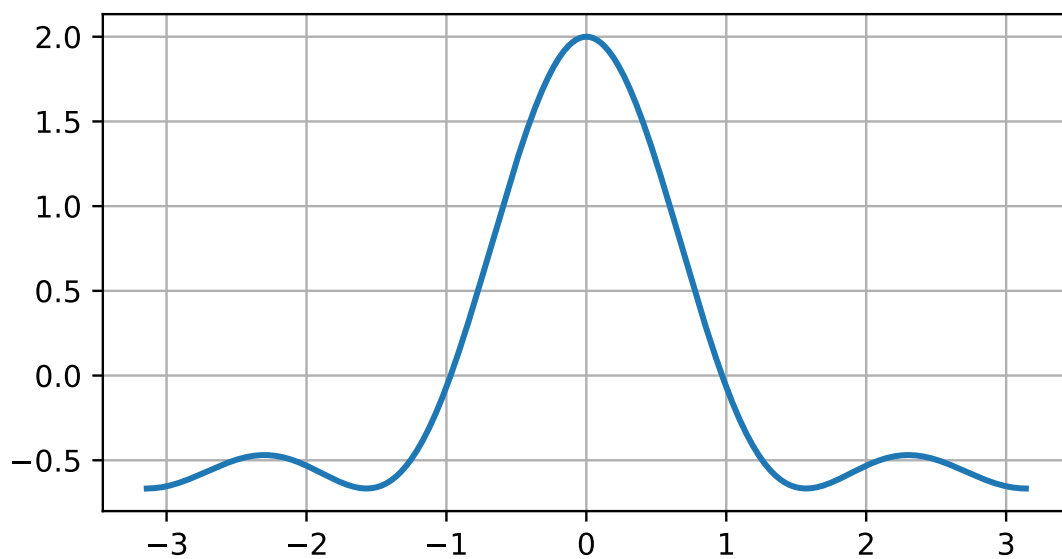


Рис. 4: Импульс силы для трех пар дебалансов.

### 3 Задача оптимизации

Для получения наибольшего импульса силы для погружения твердого тела в сопротивляющуюся среду и компенсации силы, которая направлена в противоположную сторону, необходимо подобрать оптимальное соотношение характеристик пар дебалансов между собой.

Сформулируем задачу оптимальности. Пусть  $f_{\max}(t)$  — максимальное значение импульса силы за время  $t$ ,  $f_{\min}(t)$  — минимальное значение импульса за время  $t$ . Тогда:

$$K = \left| \frac{f_{\max}(t)}{f_{\min}(t)} \right| \rightarrow \max \quad (9)$$

Исходя из теоремы оптимальности модели полигармонического импульса [2] многочлен (8) является оптимальным тогда и только тогда, когда он с точностью до постоянного множителя имеет вид суммы Фейера

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \sum_{k=1}^n (n+1-k) \cos(kt) \\ \max_{\lambda} K_n(\lambda) &= n \end{aligned} \quad (10)$$

При этом имеет место равенство:

$$\max_{\lambda} K_n(\lambda) = n \quad (11)$$

Из этого следует, что:

$$\lambda_k = \frac{n-k+1}{n} \quad (12)$$

где  $n$  - количество пар дебалансов,  $k$  - порядковый номер пары дебалансов.

Выражение (12) дает возможность оптимизации характеристик каждой пары дебалансов в импульсном погружателе для получения наибольшего импульса, направленного на погружение твердого тела, и компенсации силы, которая направлена в противоположную сторону.

---

<sup>2</sup> Д. В. Костин: Бифуркации резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии.

## 4 Заключение

## Список литературы

[1]