

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФГБОУ ВО («ВГУ»)

Математический факультет  
Кафедра математического моделирования

Математическая модель импульсного погружателя, оптимального по  
коэффициенту асимметрии

Бакалаврская работа  
Направление 01.03.04 Прикладная математика  
Профиль Применение математических методов к решению инженерных и  
экономических задач

Зав. кафедрой	_____	д.ф.-м.н., проф.	В.А. Костин	__.__.2019 г.
	<i>подпись</i>			
Обучающийся	_____		А.А. Уткин	
	<i>подпись</i>			
Руководитель	_____	д.ф.-м.н.	Д.В. Костин	
	<i>подпись</i>			

Воронеж 2019

# Содержание

Введение	3
1 Описание вибрационного погружателя	4
2 Построение модели работы импульсного погружателя	7
3 Задача оптимизации	11
4 Программная реализация	13
5 Заключение	15
Список литературы	16

# Введение

На сегодняшний день в строительной сфере довольно часто возникает потребность в использовании вибропогружателя для погружения свайных элементов в землю. Такая востребованность порождает задачу оптимизации характеристик погружателей для получения наилучшего результата их работы. Решение задачи оптимизации характеристик погружателя прикладными методами несомненно актуально и соответствует профилю.

Целью работы была поставлена задача разработать программное обеспечение для автоматизированного расчета характеристик погружателя на основе теории вибрационных машин и теоремы об оптимальности импульса Максвелла-Фейера.

# 1 Описание вибрационного погружателя

Вибрационный погружатель предназначен для погружения или извлечения свай в песчаных или глинистых грунтах. Работа такого погружателя (рис. 1) основана на двух основных принципах:

1. На эффекте резкого снижения сопротивления погружения свайного элемента при сообщении последнему вибрации;
2. На действии полигармонического импульса, создаваемого центробежными силами системы дебалансов.

Такую процедуру называют вибрационным погружением.

**Определение 1.** *Вибрационным погружением называют внедрение твердого тела в сопротивляющуюся среду под действием постоянной и знакопеременной сил.*

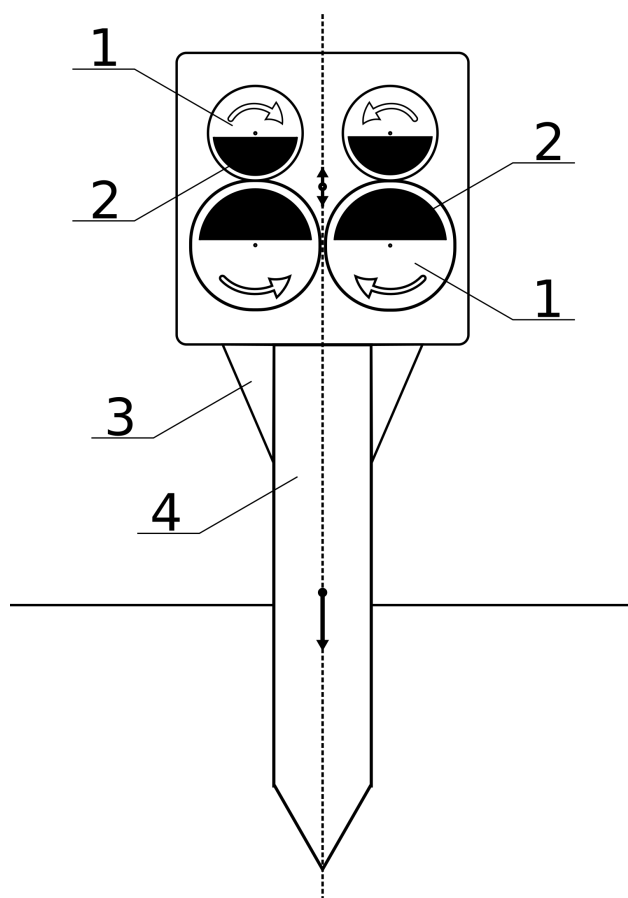


Рис. 1: Схема вибрационного погружателя.

При вращении валов (1) с дебалансами (2) на их ось крепления действует центробежная сила и вибрационный погружатель получает вибрирующее движение, которое сообщается через наголовник (3) свайному элементу (4).

**Определение 2.** *Дебалансом называют неуравновешенность вращающихся частей машин (роторов, коленчатых валов, шкивов и т. п.).*

**Определение 3.** *Сила, препятствующая материальной точке, движущейся по окружности, удалиться от центра этой окружности, называется центростремительной силой. Она направлена по радиусу от окружности к центру. По третьему закону Ньютона имеется равная ей и противоположно направленная сила противодействия (сила, с которой движущаяся точка стремится удалиться от центра). Эта сила называется центробежной.*

При этом, предполагается, что погружаемый элемент жестко присоединен к возбудителю вибраций.

В случае с вибрационным погружателем в его конструкции участвует лишь одна пара<sup>1</sup> дебалансов. В таком случае графиком его гармоническим колебания будет косинусоида (рис. 2).

**Определение 4.** *Гармоническим колебанием называют колебание, в процессе которого величины, характеризующие движение (смещение, скорость, ускорение и др.), изменяются по закону синуса или косинуса (гармоническому закону).*

При использовании в конструкции погружателя двух и более пар дебалансов разных характеристик, погружатель можно назвать импульсным. В графике гармоническим колебания такого погружателя будет замечен характерный импульс (рис. 5 и рис. 6), направлена на погружение твердого тела в сопротивляющуюся среду.

**Определение 5.** *Импульсом силы называют векторную физическую величину, которая является мерой действия силы за некоторый промежуток времени.  $\vec{I}$  — импульс силы  $\vec{F}$  за малый промежуток времени  $t$ .*

---

<sup>1</sup>Причины использования дебалансов парами более подробно будет рассказано в главе 2.

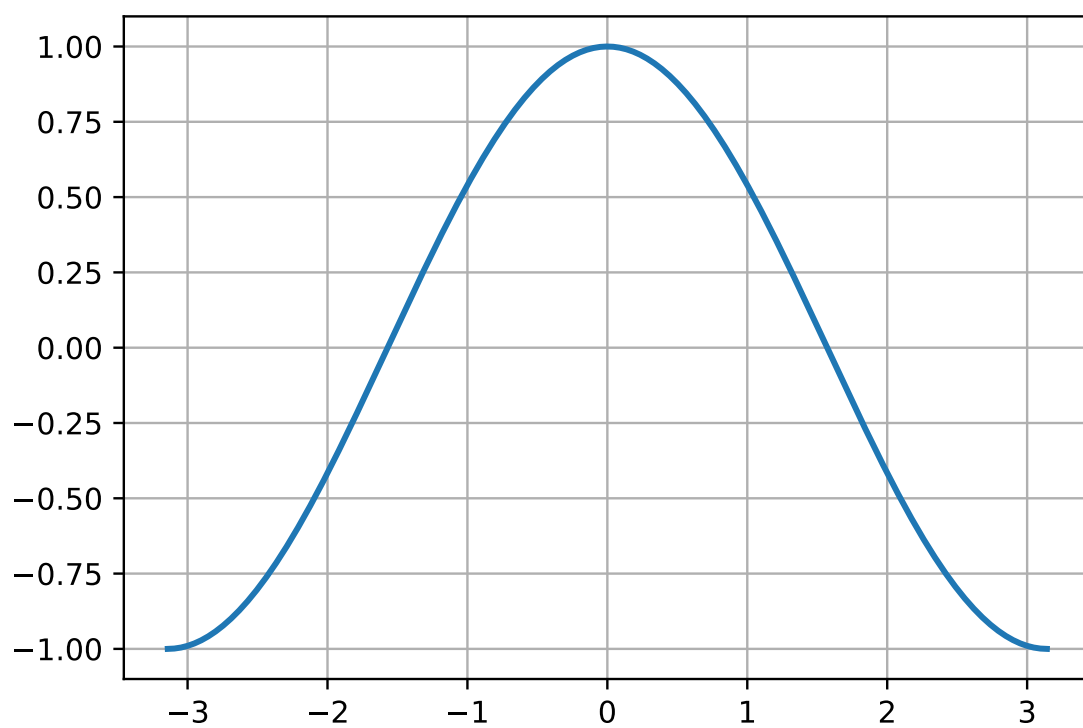


Рис. 2: Импульс силы для одной пары дебалансов.

## 2 Построение модели работы импульсного погрузателя

Пусть дан некий дебаланс с радиусом  $r$ , радиус вала которого равен  $R$ ,  $\omega$  — угловая скорость и  $l$  — расстояние от центра масс до оси вращения дебаланса, а его масса будет равна  $m$  (рис. 3).

**Определение 6.** *Центром масс называют точку, через которую должна проходить линия действия силы, чтобы под действием этой силы тело двигалось поступательно (не вращалось).*

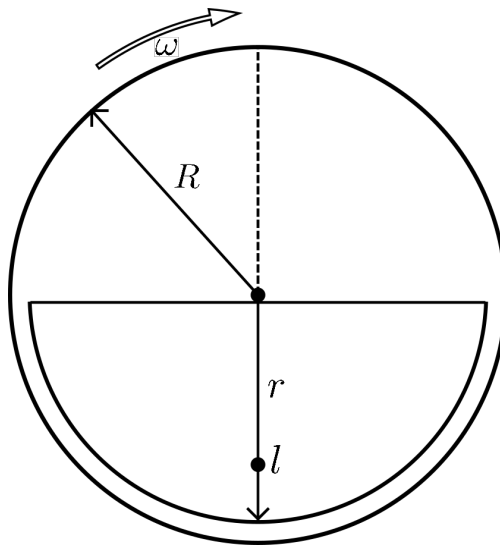


Рис. 3: Схема дебаланса.

Тогда, при вращении данного дебаланса возникнет центробежная сила, которая имеет вид:

$$F_{\text{центр.}} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{R}_0 \quad (1)$$

В нашем случае  $\vec{R}_0$  будет равен расстоянию от центра масс  $l$ , которое, в случае дебаланса, имеет вид:

$$l = \frac{4r}{3\pi} \quad (2)$$

Вращение такого дебаланса вокруг собственной оси будет иметь вид гармонического колебания, которое будет иметь вид:

$$x(t) = \lambda \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

где  $\lambda = m \cdot \omega^2 \cdot l$

где  $x(t)$  — значение изменяющейся величины в момент времени  $t$ ,  $\lambda$  — амплитуда колебаний,  $\omega$  — циклическая (круговая) частота колебаний,  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний.

Гармонические колебания являются периодическими. Период  $T$  этих колебаний равен периоду функции  $\cos(\omega t + \varphi_0)$ , то есть:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Начальная фаза колебаний в работе импульсного погружателя не является важной, из чего следует, что ее можно игнорировать:

$$x(t) = \lambda \cos(\omega t) \quad (4)$$

В работе импульсного погружателя полезной силой считается та, которая направлена на погружение твердого тела в сопротивляющуюся среду. Для компенсации горизонтальных сил, возникающих при вращении одного дебаланса, в конструкции погружателя дебалансы используются парами (рис 4). Их вращение происходит в противоположные стороны, по отношению друг к другу (рис. 1). В таком случае, уравнение гармонического колебания пары дебалансов будет иметь вид:

$$x(t) = 2m\omega^2 l \cos(\omega t) \quad (5)$$

Сила, направленная вверх может привести к разрушению погружаемого твердого тела. Для компенсации этой силы в импульсном погружателе используется несколько пар дебалансов с разными характеристиками.

Уравнение гармонического колебания для второй пары дебалансов будет иметь вид:

$$x(t) = 2m_2 \cdot 4\omega^2 \cdot l(r_2) \cdot \cos(2\omega t)$$

Уравнение гармонического колебания для пары дебалансов в общем виде:



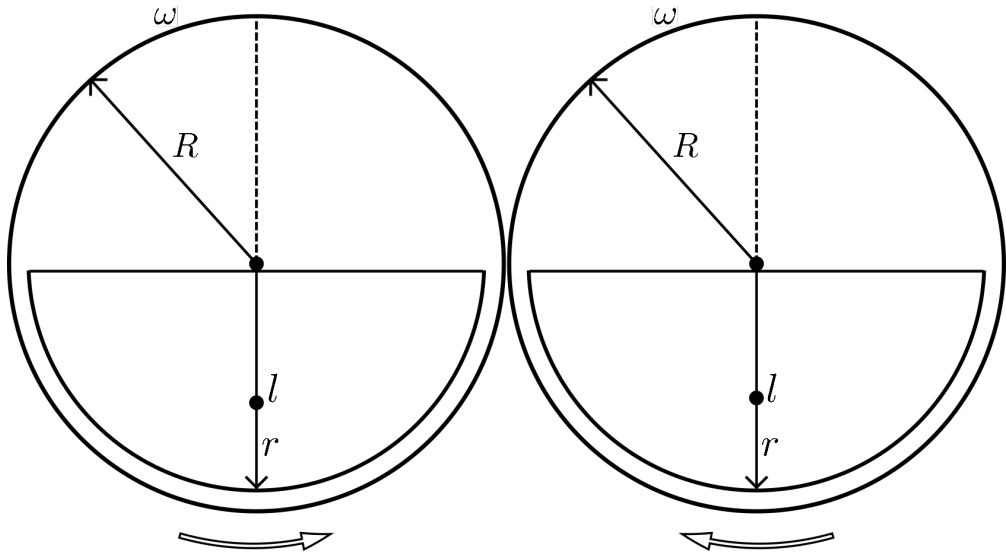


Рис. 4: Схема пары дебалансов.

$$x(t) = 2m_k \cdot (k\omega)^2 \cdot l(r_k) \cdot \cos(k\omega t) \quad (6)$$

Для всех пар дебалансов сумма гармонических колебаний будет иметь вид:

$$F = \sum_{k=1}^n 2m_k \cdot (k\omega)^2 \cdot l(r_k) \cdot \cos(k\omega t) \quad (7)$$

где  $n$  — количество пар дебалансов,  $k$  — порядковый номер пары дебалансов.

Из (7) следует, что угловая скорость каждого вышестоящего уровня пар дебалансов будет в два раза больше, по сравнению с предыдущим. Если же представить (7) в сокращенном виде, то:

$$F = \sum_{k=1}^n 2\lambda_k \cdot \cos(k\omega t) \quad (8)$$

$$\lambda = m \cdot \omega^2 \cdot l$$

где  $n$  — количество пар дебалансов,  $k$  — порядковый номер пары дебалансов.

График импульса силы для трех пар дебалансов за время  $t$  представлен на графике (5).

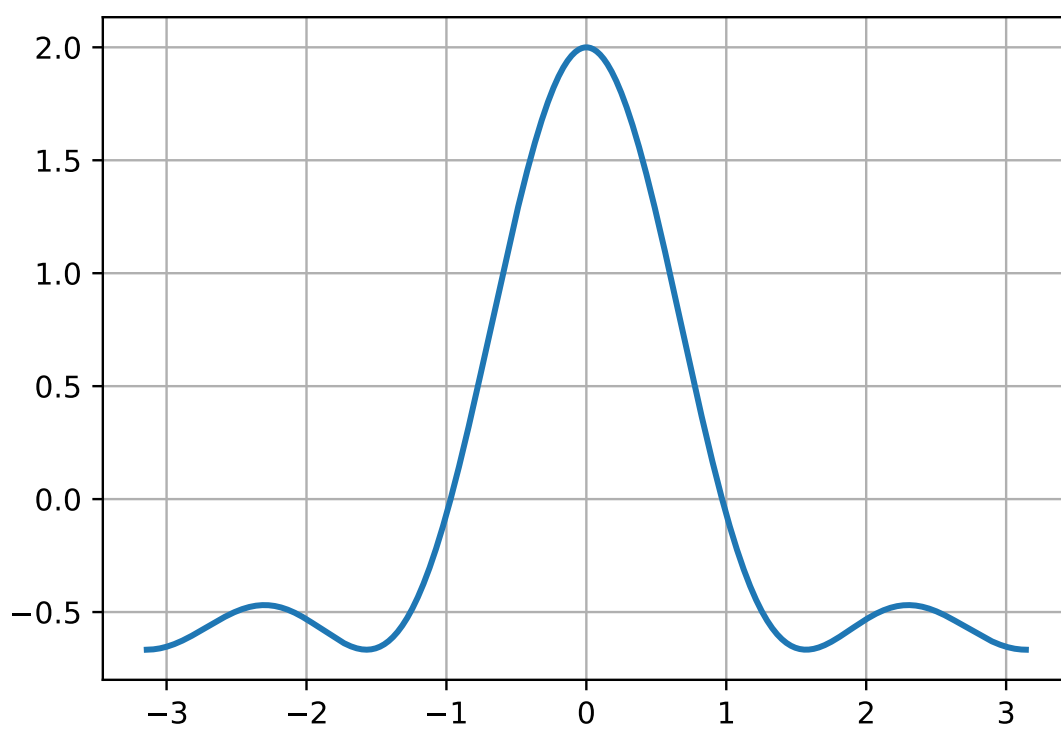


Рис. 5: Импульс силы для трех пар дебалансов.

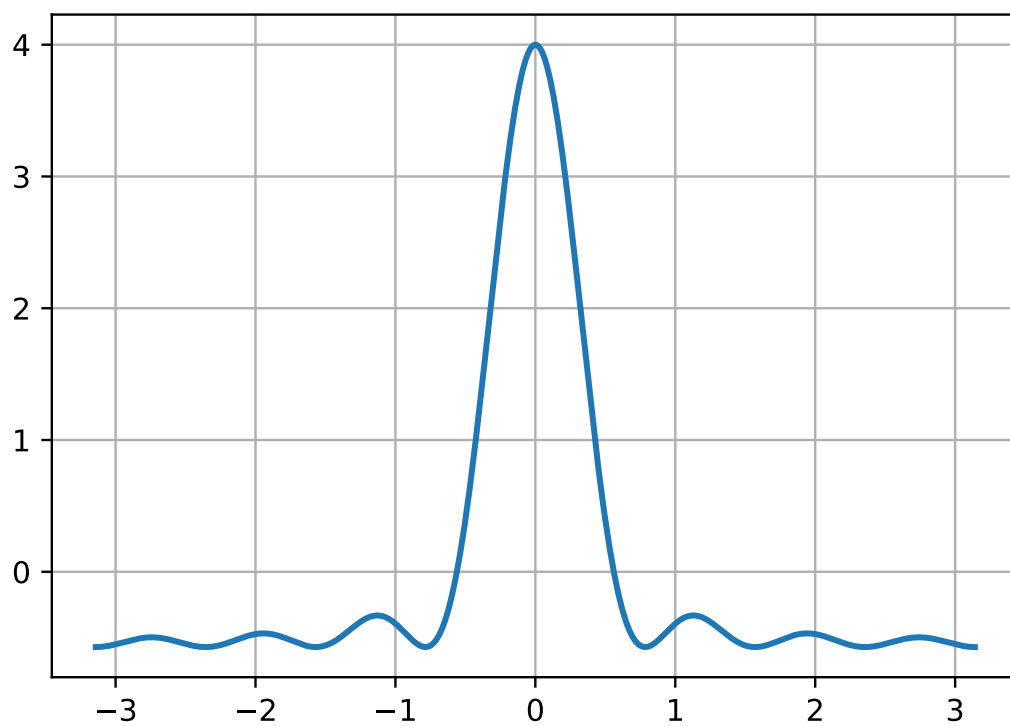


Рис. 6: Импульс силы для семи пар дебалансов.

### 3 Задача оптимизации

При использовании импульсного погружателя важно, чтобы импульс, направленный на погружение сваи был как можно больше, а импульс, направленный в противоположную сторону как можно меньше. На основе этих рассуждений сформулируем задачу оптимизации: необходимо, чтобы соотношение максимального значения гармонического колебания к минимальному значению стремилось к максимуму.

Пусть  $f_{\max}(t)$  — максимальное значение импульса силы за время  $t$ ,  $f_{\min}(t)$  — минимальное значение импульса за время  $t$ . Тогда:

$$\begin{aligned} K &= \left| \frac{f_{\max}(t)}{f_{\min}(t)} \right| \rightarrow \max \\ f_{\max} &= \max_t f(t, \lambda), \\ f_{\min} &= \min_t f(t, \lambda) \end{aligned} \tag{9}$$

Число  $K$  будем называть коэффициентом асимметрии полинома (7).

Для достижения коэффициентом асимметрии максимального значения необходимо решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \inf_t f(t, \lambda) &\rightarrow \sup_{\lambda}, \text{ где } t \in [0, \pi] \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k &= c, \text{ где } c = \text{const} > 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Исходя из теоремы об оптимальности модели полигармонического импульса [3] многочлен (7) является оптимальным тогда и только тогда, когда он с точностью до постоянного множителя имеет вид суммы Фейера:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n (n+1-k) \cos(kt) \tag{11}$$

При этом имеет место равенство:

$$\max_{\lambda} K_n(\lambda) = n \tag{12}$$

Из этого следует, что:

$$\lambda_k = \frac{n - k + 1}{n} \cdot \lambda_1, \quad (13)$$

где  $\lambda_1 = m_1 \cdot \omega_1^2 \cdot l_1$

где  $n$  — количество пар дебалансов,  $k$  — порядковый номер пары дебалансов.

Равенство (13) дает возможность найти значение коэффициента  $\lambda$  для каждой пары дебалансов. Это даст возможность оптимизировать характеристик каждой пары дебалансов в импульсном погружателе отталкиваясь от нужных характеристик первой пары, что позволяет получить наибольший импульс, направленный на погружение твердого тела, и компенсацию силы, которая направлена в противоположную сторону.

## 4 Программная реализация

Для автоматизированного расчета оптимальных характеристик для пар дебалансов импульсного погружателя была создана программа на языке программирования Python (рис. 7).

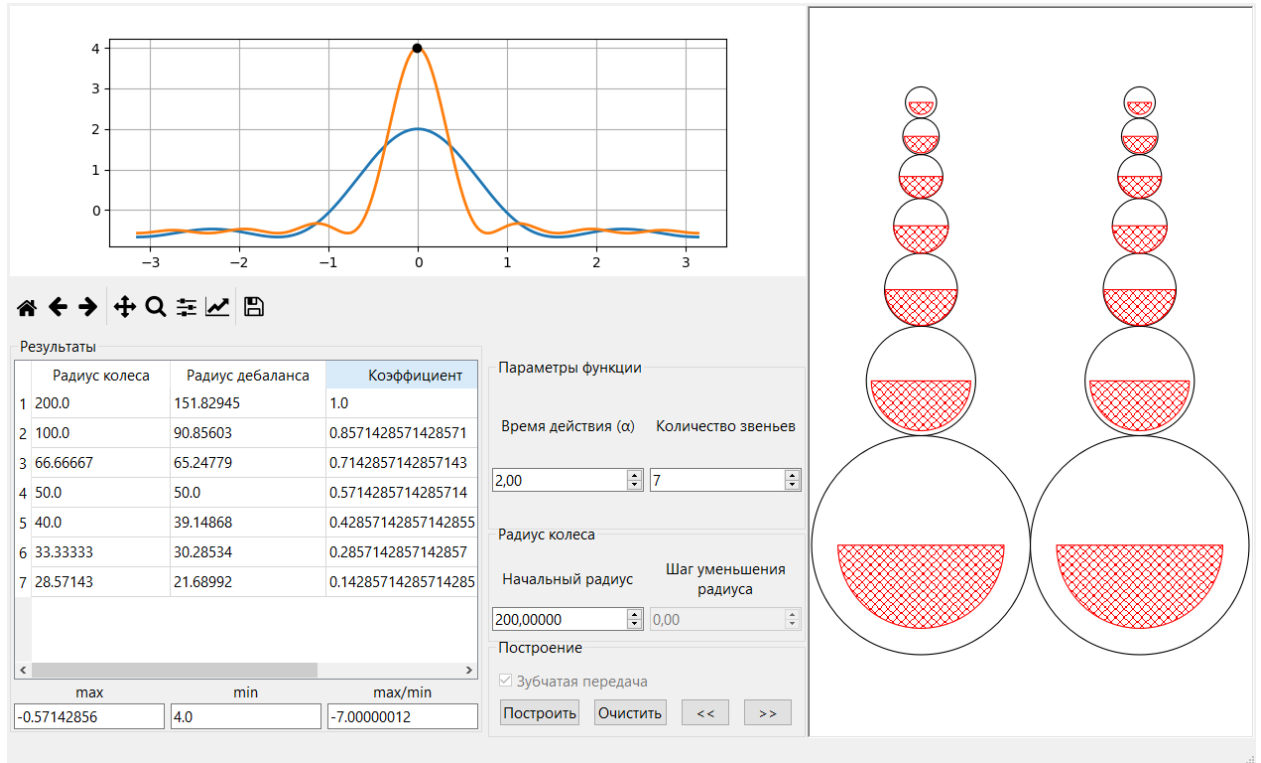


Рис. 7: Интерфейс программы.

Функционал данной программы позволяет указать радиус вала первой пары дкбалансов и количество пар дебалансов, присутствует возможность вывода графика гармонического колебания и определение его значения в определенный момент времени.

После ввода радиуса вала первой пары, радиусы остальных валов будут рассчитаны по формуле:

$$R_k = \frac{R_0}{k} \quad (14)$$

где  $R_k$  — радиус нужного вала,  $R_0$  — радиус вала первой пары,  $k$  — порядковый номер пары.

Для расчета радиуса дебаланса для всех пар используется формула:

$$r_n = R_0 \cdot \left( \frac{k - (n - 1)}{n^2 \cdot (k + 1)^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (15)$$

где  $r_k$  — радиус нужного дебаланса,  $R_0$  — радиус вала первой пары,  $n$  — количество пар дебалансов,  $k$  — порядковый номер пары.

При этом нахождение оптимальных характеристик всех пар дебалансов происходит в реальном времени без необходимости какого либо ожидания выполнения расчетов, даже для максимального допустимого количества пар дебалансов, которое ограничено в программе значением в 99 пар.

## 5 Заключение

Целью работы была поставлена задача разработки программного обеспечения для автоматизированного расчета характеристик погружателя используя прикладные методы математики. С помощью применения теоремы об оптимальности модели полигармонического импульса в отношении коэффициента асимметрии и на основе теории вибрационных машин эта цель была достигнута с применением языка программирования Python.

## Список литературы

1. *Блехман И. И.* Вибрационная механика. — М. : Физико-математическая литература, 1994.
2. *Костин В. А., Костин Д. В., Сапронов Ю. И.* Многочлены Максвелла-Фейера и оптимизация полигармонических импульсов // ДАН. — М., 2012.
3. *Костин Д. В.* Бифуркация резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии // Математический сборник. — М., 2016. — С. 90—109.
4. *Лавендела Э. Э.* Вибрации в технике, Т. 4. Вибрационные процессы и машины. — М., 1981.
5. *Савинов О. А., Лускин А. Я.* Вибрационный метод погружения свай и его применение в строительстве. — М. : Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960.
6. *Саммерфилд М.* Программирование на Python 3. Подробное руководство. — Символ-Плюс, 2009.
7. *Шлее М.* Qt 5.10. Профессиональное программирование на C++. — Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2018.