

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ФГБОУ ВО («ВГУ»)

Математический факультет  
Кафедра математического моделирования

Математическая модель импульсного погружателя, оптимального по  
коэффициенту асимметрии

Бакалаврская работа  
Направление 01.03.04 Прикладная математика  
Профиль Применение математических методов к решению инженерных и  
экономических задач

Зав. кафедрой	_____	д.ф.-м.н., проф.	В.А. Костин	__.__.2019 г.
	<i>подпись</i>			
Обучающийся	_____		А.А. Уткин	
	<i>подпись</i>			
Руководитель	_____	д.ф.-м.н.	Д.В. Костин	
	<i>подпись</i>			

Воронеж 2019

# Содержание

Введение	3
1 Описание вибрационного погружателя	4
2 Построение модели работы импульсного погружателя	7
3 Задача оптимизации	11
4 Заключение	12
Список литературы	13

# Введение

...

Целью работы является построение математической модели импульсного погружателя, исследование метода оптимизации характеристик его дебалансов и создание программы, базирующейся на этом методе, для расчета этих характеристик.

# 1 Описание вибрационного погружателя

Вибрационный погружатель предназначен для погружения или извлечения свай в песчаных или глинистых грунтах. Принцип действия такого погружателя (рис. 1) основан на эффекте резкого снижения сопротивлению погружения свайного элемента при сообщении последнему вибрации. Такую процедуру называют вибрационным погружением.

**Определение 1.** *Вибрационным погружением называют внедрение твердого тела в сопротивляющуюся среду под действием постоянной и знакопеременной сил.*

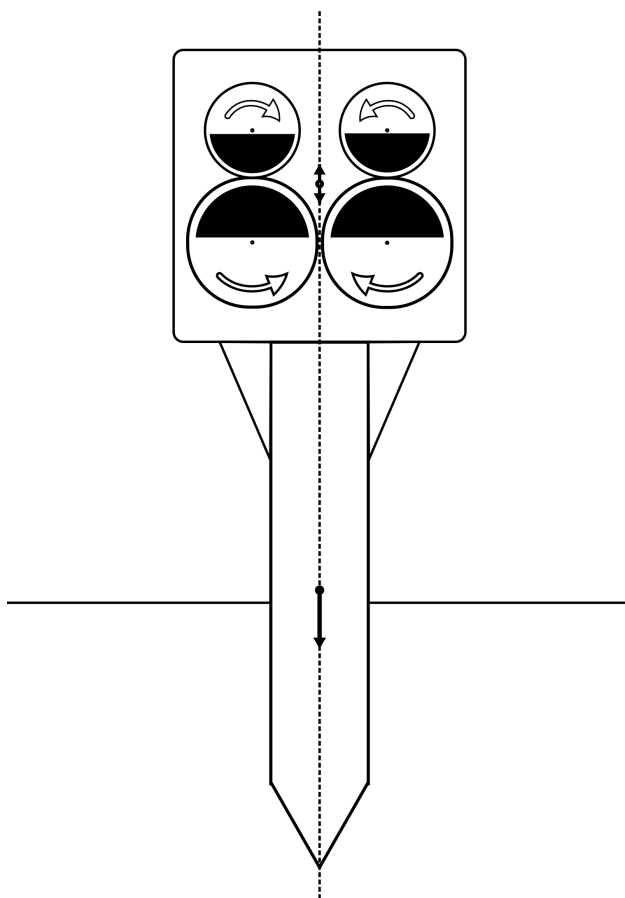


Рис. 1: Схема вибрационного погружателя.

При вращении дебалансов на их ось крепления действует центробежная сила и вибрационный погружатель получает вибрирующее движение, которое сообщается свайному элементу через наголовник.

**Определение 2.** *Дебалансом называют неуравновешенность вращающихся частей машин (роторов, коленчатых валов, шкивов и т. п.).*

**Определение 3.** *Сила, препятствующая материальной точке, движущейся по окружности, удалиться от центра этой окружности, называется центростремительной силой. Она направлена по радиусу от*

окружности к центру. По третьему закону Ньютона имеется равная ей и противоположно направленная сила противодействия (сила, с которой движущаяся точка стремится удалиться от центра). Эта сила называется центробежной.

При этом, предполагается, что погружаемый элемент жестко присоединен к возбудителю вибраций.

В случае с вибрационным погружателем в его конструкции участвует лишь одна пара<sup>1</sup> дебалансов. В таком случае графиком его гармоническим колебания будет косинусоида (рис. 2).

**Определение 4.** Гармоническим колебанием называют колебание, в процессе которого величины, характеризующие движение (смещение, скорость, ускорение и др.), изменяются по закону синуса или косинуса (гармоническому закону).

При использовании в конструкции погружателя двух и более пар дебалансов разных характеристик, погружатель можно назвать импульсным. В графике гармоническим колебания такого погружателя будет замечен характерный импульс (рис. 5 и рис. 6), направлена на погружение твердого тела в сопротивляющуюся среду.

**Определение 5.** Импульсом силы называют векторную физическую величину, которая является мерой действия силы за некоторый промежуток времени.  $\vec{I}$  — импульс силы  $\vec{F}$  за малый промежуток времени  $t$ .

---

<sup>1</sup>Причины использования дебалансов парами более подробно будет рассказано в главе 2.

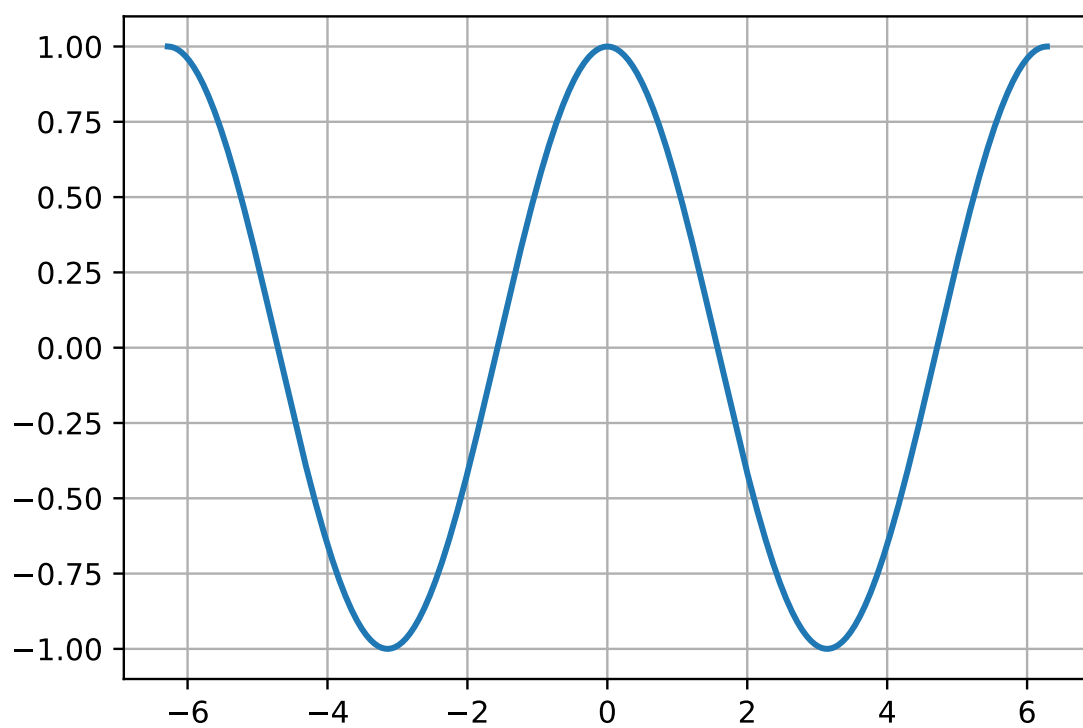


Рис. 2: Импульс силы для одной пары дебалансов.

## 2 Построение модели работы импульсного погрузателя

Пусть дан некий дебаланс с радиусом  $r$ , радиус вала которого равен  $R$ ,  $\omega$  — угловая скорость и  $l$  — расстояние от центра масс до оси вращения дебаланса, а его масса будет равна  $m$  (рис. 3).

**Определение 6.** *Центром масс называют точку, через которую должна проходить линия действия силы, чтобы под действием этой силы тело двигалось поступательно (не вращалось).*

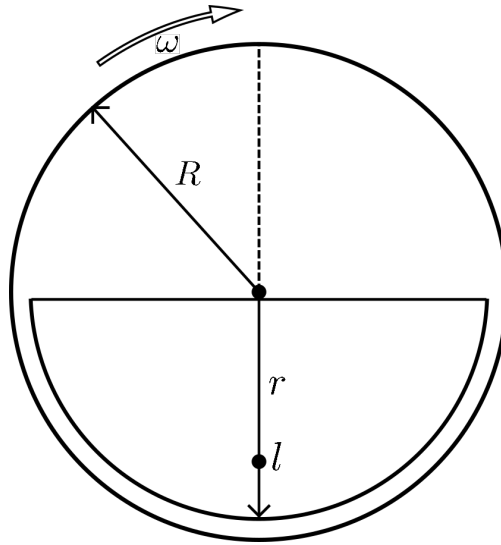


Рис. 3: Схема дебаланса.

Тогда, при вращении данного дебаланса возникнет центробежная сила, которая имеет вид:

$$F_{\text{центр.}} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{R}_0 \quad (1)$$

В нашем случае  $\vec{R}_0$  будет равен расстоянию от центра масс  $l$ , которое, в случае дебаланса, имеет вид:

$$l = \frac{4r}{3\pi} \quad (2)$$

Вращение такого дебаланса вокруг собственной оси будет иметь вид гармонического колебания, которое будет иметь вид:

$$x(t) = \lambda \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

где  $\lambda = m \cdot \omega^2 \cdot l$

где  $x(t)$  — значение изменяющейся величины в момент времени  $t$ ,  $\lambda$  — амплитуда колебаний,  $\omega$  — циклическая (круговая) частота колебаний,  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний.

Гармонические колебания являются периодическими. Период  $T$  этих колебаний равен периоду функции  $\cos(\omega t + \varphi_0)$ , то есть:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Начальная фаза колебаний в работе импульсного погружателя не является важной, из чего следует, что ее можно игнорировать:

$$x(t) = \lambda \cos(\omega t) \quad (4)$$

В работе импульсного погружателя полезной силой считается та, которая направлена на погружение твердого тела в сопротивляющуюся среду. Для компенсации сил, направленных перпендикулярно полезной силе, используются парные дебалансы (рис 4), вращения которых происходит в противоположные стороны, по отношению друг к другу (рис. 1). В таком случае, уравнение гармонического колебания пары дебалансов будет иметь вид:

$$x(t) = 2m\omega^2 l \cos(\omega t) \quad (5)$$

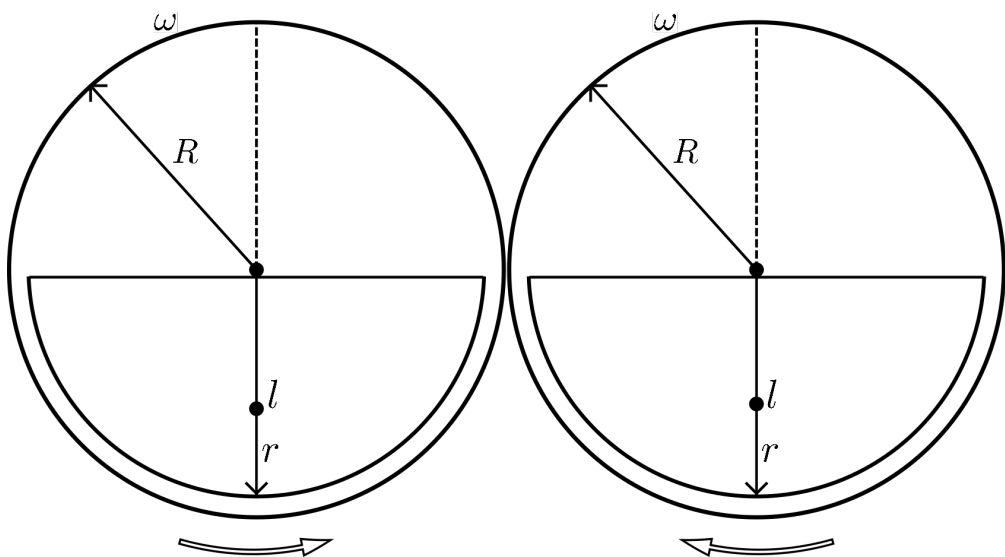


Рис. 4: Схема пары дебалансов.

Сила, направленная вверх может привести к разрушению погружаемого твердого тела. Для компенсации этой силы в импульсном погружателе используется несколько пар дебалансов с разными характеристиками.

Уравнение гармонического колебания для второй пары дебалансов будет иметь вид:

$$x(t) = 2m_2 \cdot 4\omega^2 \cdot l(r_2) \cdot \cos(2\omega t)$$

---

<sup>1</sup> Пруфы на причину игнорирования начальная фаза колебаний...



Уравнение гармонического колебания для пары дебалансов в общем виде:

$$x(t) = 2m_k \cdot (k\omega)^2 \cdot l(r_k) \cdot \cos(k\omega t) \quad (6)$$

Для всех пар дебалансов сумма гармонических колебаний будет иметь вид:

$$F = \sum_{k=1}^n 2m_k \cdot (k\omega)^2 \cdot l(r_k) \cdot \cos(k\omega t) \quad (7)$$

где  $n$  — количество пар дебалансов,  
 $k$  - порядковый номер пары дебалансов

Если же представить (7) в сокращенном виде, то:

$$F = \sum_{k=1}^n 2\lambda_k \cdot \cos(k\omega t) \quad (8)$$

$$\lambda = m \cdot \omega^2 \cdot l$$

где  $n$  — количество пар дебалансов,  
 $k$  - порядковый номер пары дебалансов

График импульса силы для трех пар дебалансов за время  $t$  представлен на графике (5).

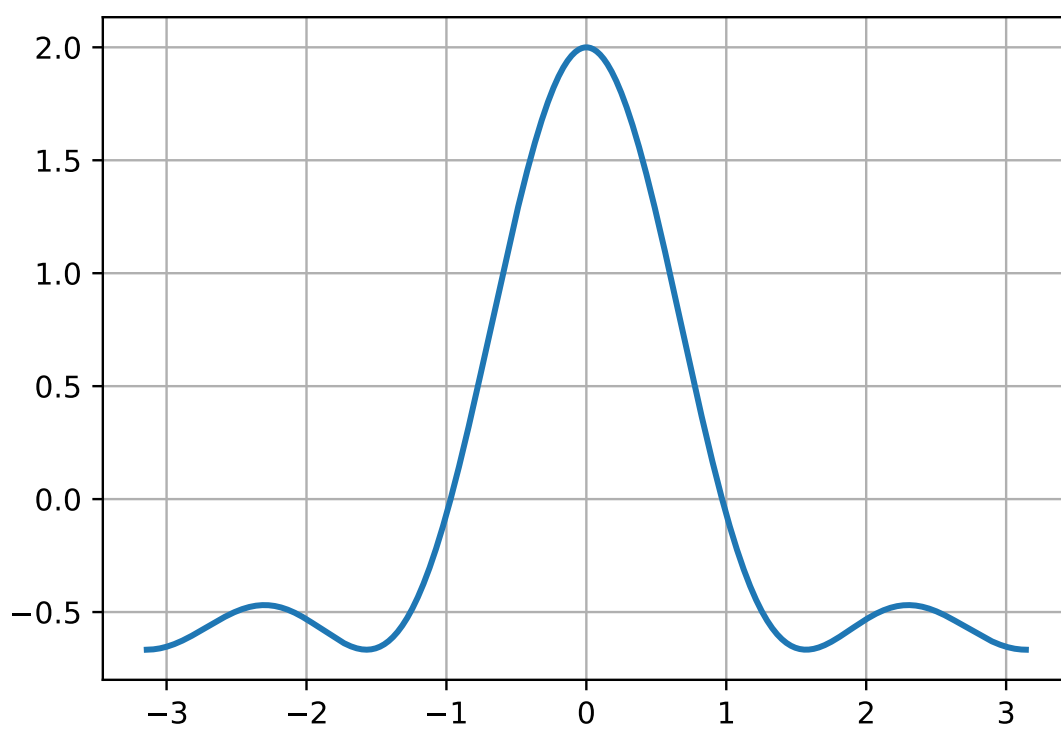


Рис. 5: Импульс силы для трех пар дебалансов.

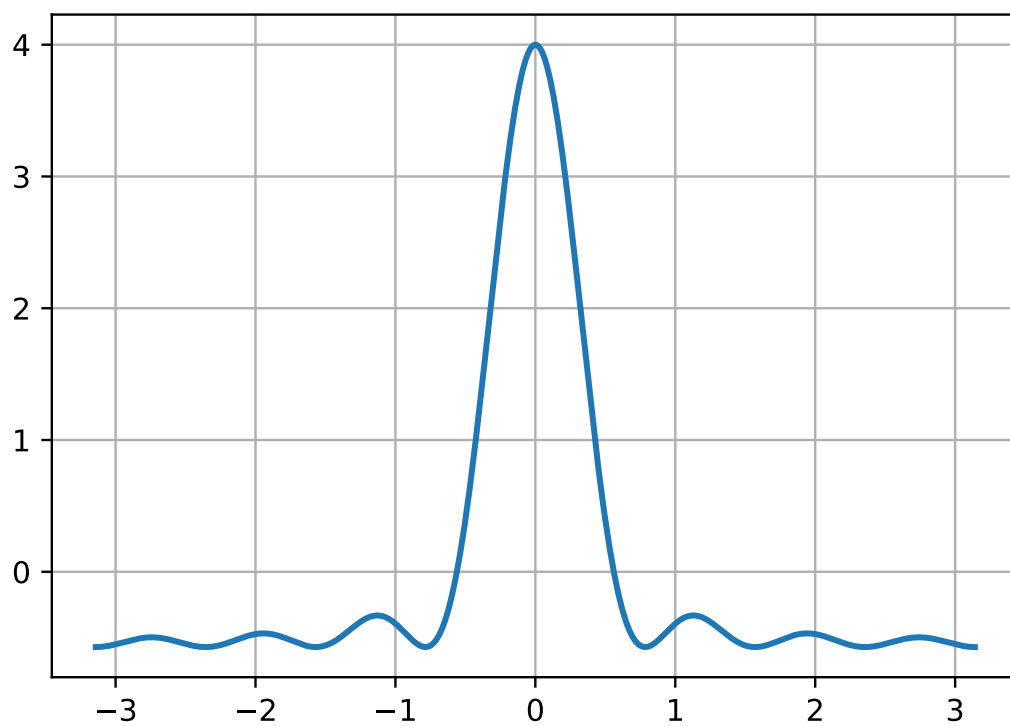


Рис. 6: Импульс силы для семи пар дебалансов.

### 3 Задача оптимизации

Для получения наибольшего импульса силы для погружения твердого тела в сопротивляющуюся среду и компенсации силы, которая направлена в противоположную сторону, необходимо подобрать оптимальное соотношение характеристик пар дебалансов.

Сформулируем задачу оптимальности. Пусть  $f_{\max}(t)$  — максимальное значение импульса силы за время  $t$ ,  $f_{\min}(t)$  — минимальное значение импульса за время  $t$ . Тогда:

$$\begin{aligned} K &= \left| \frac{f_{\max}(t)}{f_{\min}(t)} \right| \rightarrow \max \\ f_{\max} &= \max_t f(t, \lambda), \\ f_{\min} &= \min_t f(t, \lambda) \end{aligned} \quad (9)$$

Число  $K$  будем называть коэффициентом асимметрии полинома (7).

Для достижения коэффициентом асимметрии максимального значения необходимо решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \inf_t f(t, \lambda) &\rightarrow \sup_{\lambda}, \text{ где } t \in [0, \pi] \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k &= c, \text{ где } c = \text{const} > 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Исходя из теоремы оптимальности модели полигармонического импульса [1] многочлен (7) является оптимальным тогда и только тогда, когда он с точностью до постоянного множителя имеет вид суммы Фейера:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n (n+1-k) \cos(kt) \quad (11)$$

При этом имеет место равенство:

$$\max_{\lambda} K_n(\lambda) = n \quad (12)$$

Из этого следует, что:

$$\lambda_k = \frac{n-k+1}{n} \quad (13)$$

где  $n$  - количество пар дебалансов,  $k$  - порядковый номер пары дебалансов.

Выражение (13) дает возможность оптимизации характеристик каждой пары дебалансов в импульсном погружателе для получения наибольшего импульса, направленного на погружение твердого тела, и компенсации силы, которая направлена в противоположную сторону.

## 4 Заключение

## Список литературы

- [1] Костин Д.В. Многопараметрические вариационные модели, вычисление и оптимизация посткритических состояний. — Воронеж, 2017. — 236 с.