

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Костин Дмитрий Владимирович

**Многопараметрические вариационные модели,
вычисление и оптимизация посткритических
состояний**

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

Диссертация

на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Научный консультант
д.ф.-м.н., профессор Сапронов Ю.И.

В О Р О Н Е Ж – 2017

Оглавление

Введение	7
1 Параметрические фредгольмовы модели	34
1.1 Фредгольмовы задачи	34
1.1.1 Вариационные фредгольмовы модели	36
1.1.2 Фредгольмовы функционалы и групповая симметрия	37
1.1.3 Параметрические фредгольмовы модели	38
1.2 Редуцирующая схема Пуанкаре–Ляпунова–Шмидта	40
1.3 Гладкие функции и локальный анализ	41
1.3.1 Декомпозиция особенности	43
1.3.2 Локальный анализ гладких функций	47
1.3.3 Некоторые типы особенностей	53
1.4 О ветвлении экстремалей вблизи особой точки	57
1.4.1 Особенности типа многомерной сборки	57
1.4.2 Деформации особенности типа сборки	60
1.4.3 Общие утверждения о бифуркации экстремалей из точки минимума с особенностью сборки	68
1.4.4 Анализ ключевой функции в случае особенности типа двумерной сборки	73
1.5 Вариационная схема Пуанкаре – Ляпунова – Шмидта	80
1.6 Ключевая функция в случае редуцирующей схемы Морса – Ботта	82
1.7 Общая редуцирующая схема	84
1.8 Вычислительный алгоритм для построения ключевой функции .	86

1.8.1	Алгоритм вычисления ключевой функции, асимптотическое представление решений	89
1.8.2	Каустика в случае бесконечномерного параметра	90
1.8.3	Топологическая эквивалентность ключевых функций	91
2	Ветвление многомодовых экстремалей в моделях упругих систем	93
2.1	Нормализованные главные части ключевых уравнений	93
2.1.1	Алгоритм вычисления ключевой функции в случае аппроксимации на базе собственных функций	95
2.1.2	Алгоритм вычисления ключевой функции в случае аппроксимации на базе корневых функций	98
2.1.3	Ритцевская аппроксимация на базе корневых функций . .	101
2.2	Модельные краевые задачи	103
2.2.1	Анализ модели кирхгофова стержня	103
2.3	Модель упругой балки на упругом основании	116
2.3.1	Модель в случае однородного материала	117
2.3.2	Модель в случай неоднородного материала	123
2.3.3	Формулы интегральных коэффициентов	125
2.3.4	Анализ каустики ключевой функции	128
2.4	Двухмодовые прогибы слабо неоднородной упругой пластины Kárмана	132
2.4.1	Однородная упругая пластина	132
2.4.2	Неоднородная упругая пластина	133
2.4.3	Вычисление интегральных коэффициентов	136
3	Корректные математические модели и теория полугрупп	140
3.1	Необходимые сведения по теории однопараметрических полугрупп	140
3.1.1	Функции со значениями в векторном пространстве	140
3.1.2	Функции с операторными значениями. Полугруппы	146

3.1.3	Сильно непрерывные полугруппы линейных операторов	150
3.1.4	Модели корректные по Адамару	151
3.1.5	Приложение полугрупп к нелинейным уравнениям	155
3.1.6	Выбор функциональных пространств	156
3.1.7	Итерационные пространства локально интегрируемых функций	158
3.2	Элементарные полугруппы и производящие уравнения	166
3.2.1	Канонические полугруппы	166
3.2.2	(ρ, h) —элементарные полугруппы	167
3.2.3	Нелинейная арифметика и полугруппы В.П. Маслова	170
3.2.4	Функция нелинейного осреднения В.П. Маслова и математические модели в экономике	171
3.2.5	Обобщенная функция нелинейного осреднения Маслова	172
3.2.6	Производственная функция Маслова	175
3.2.7	Решение задачи оптимизации производства с ПФМ	176
3.2.8	Элементарные полугруппы класса C_0	177
3.2.9	(ρ, h) -группы и косинус-функции	180
3.3	Полугруппы сдвигов и деформаций в анизотропных пространствах функций с равномерной метрикой	181
3.3.1	Полугруппы сдвигов с деформациями	183
3.3.2	Производящий оператор полугруппы $V_{r,h}(t)$	184
3.4	Пространства функций инвариантных относительно операции дробного интегрирования	188
3.4.1	Надэкспоненциальные и подэкспоненциальные весовые функции	188
3.4.2	Дробные степени оператора дифференцирования в надэкспоненциальных и подэкспоненциальных пространствах	189
3.4.3	О необходимых и достаточных условиях для весовых функций	193

3.4.4	Корректная разрешимость математических моделей, описываемых уравнениями с дробными степенями операторов	198
3.4.5	Корректная разрешимость сигнальной задачи	203
3.5	Операторно-полиномиальное уравнение	205
3.5.1	Операторный метод Маслова–Хевисайда и C_0 –операторный интеграл Дюамеля	205
3.5.2	Примеры операторных экспонент и косинусных функций с сингулярными генераторами	211
3.6	О точных решениях задачи Коши для некоторых моделей, описываемых уравнениями параболического и гиперболического типов	212
3.7	Корректные краевые задачи для операторных уравнений с вырождением	217
3.7.1	Постановка задачи	217
3.7.2	Доказательство корректности операторной разностной схемы	218
4	Оптимизация полигармонического импульса вибропогружателя	224
4.1	Бифуркация резонансных колебаний	224
4.1.1	О вычисление экстремалей посредством нелинейной ритцевской аппроксимации функционала	226
4.1.2	Двухмодовая ключевая функция в случае простого резонанса	231
4.1.3	Трехмодовые ключевые функции	234
4.2	Коэффициент несимметрии полигармонического импульса	235
4.3	Теорема об оптимальном многочлене. Импульс Максвелла–Фейера	236
4.4	Пример практической реализации вибропогружателя при $n=7$	242
4.5	Симметрия множества точек минимума оптимального многочлена	247

4.5.1	Случай $n = 2m$	247
4.5.2	Случай $n = 2m + 1$	249
5	Приложения к оптимизации турбинной лопатки и сигнальной задачи	251
5.1	Оптимизация изгиба упругой лопатки турбины	251
5.1.1	Двухмодовые закритические изгибы упругой лопатки	252
5.1.2	Оптимизация изгибов	256
5.2	Амплитудно-фазовый синтез в математической теории антенн	258
5.2.1	Постановка задачи П.К. Сутина для диаграммы направленности в математической теории антенн	258
5.2.2	Импульс М-Ф и решение задачи об оптимальном выборе диаграммы направленности	259
Заключение		263
Литература		264
Приложение А		289
A.1		289
A.2		291
Приложение Б		296

Введение

Работа выполнена в Воронежском государственном университете на кафедре математического моделирования. Тема диссертации находится на стыке первых трех направлений из списка «Основные научные направления ВГУ» (раздел «Наука» на портале ВГУ): 1. Аналитические, геометрические и численные методы исследования дифференциальных уравнений; 2. Теория функций и функциональный анализ и 3. Математическое моделирование, программное и информационное обеспечение, методы вычислительной и прикладной математики и их применение к фундаментальным исследованиям в естественных науках.

Актуальность темы.

Из разнообразных проблем математического моделирования структурных перестроек в диссертации рассмотрена такая важная, но мало исследованная задача, как **«проблема выбора оптимальной ветви¹ посткритических состояний (решений модельного уравнения)»**. Данная проблема решена в диссертационной работе для случая вариационных математических моделей, в которых критерием качества является коэффициент несимметрии (асимметрии), применяемый в инженерно-технических расчётах.

Предложенное решение переносится на другие типы функционалов качества.

Исследования, которым посвящена диссертация, относятся к решению ключевых вопросов математического моделирования, соответствующих трем этапам, сформулированным в монографии А.А. Самарского и А.П. Михайлова [166]. На первом этапе происходит выбор «эквивалента объекта», который отображает в математической форме важнейшие его свойства – законы и связи, которым объект или его составляющие подчиняется. Эта математическая модель исследуется теоретическими методами. Второй этап – это выбор алгоритмов для реализации модели на компьютере. Третий этап заключается в создании и отладки программы.

¹Под ветвью подразумевается гладкое параметрическое семейство невырожденных состояний $w(\lambda)$, $\lambda \in K$, где K – замкнутое связанное подмножество пространства значений (векторного) параметра модели.

Известно, что изменение параметров внешнего воздействия (температуры, электромагнитного поля, механического сжатия и пр.) на сложную физическую систему (раствор, смесь, сплав и т.п.) в некоторых случаях приводит к потере устойчивости исходной фазы и, как следствие как отклик системы, к ее переходу в новое состояние с новыми структурными свойствами. Такой переход сопровождается спинодальным расслоением (распадом), выраженным в изменении локальных концентраций компонентов, в образовании сначала зернистой структуры, а затем кластеров и доменов новой фазы. Структурную перестройку физической среды часто изучают на основе нелинейных модельных уравнений типа «реакция-диффузия», Кана-Хилларда и др.

Исследования современных технических систем часто опираются и на более сложные нелинейные математические модели Свифта-Хойенберга, Фусса-Винклера-Циммермана [75] и др., при использовании которых применяются численные методы, интегрированные в мощные программные комплексы автоматизированного проектирования, системы конечно-элементного анализа и другие программные продукты для инженерных расчетов. Численные исследования модельных уравнений опираются на такие фундаментальные свойства, как корректность (вычислительная устойчивость) и, в нелинейном случае, возможность проведения достаточно полного бифуркационного анализа.

Анализом бифуркационных эффектов в математических моделях начали заниматься еще в XIX веке, и к настоящему времени накопилось большое количество методик по их прогнозированию и «полезному использованию», появились многочисленные публикации и монографии. Однако потребность в развитии новых методов бифуркационного анализа, соответствующих новым запросам практики и современным достижениям вычислительных технологий, сохраняется до сих пор. Задача исследования посткритических структурных перестроек весьма актуальна и требует привлечения разнообразных методов современного математического моделирования и новых вычислительных средств.

Следует подчеркнуть, что представленное в диссертационной работе решение

проблемы оптимального выбора посткритических состояний связано с преодолением следующих трех промежуточных и взаимосвязанных задач, каждая из которых имеет самостоятельное значение:

1. решение так называемой «проблемы многих мод» или, по-другому, проблемы описания посткритической перестройки состояния в условиях вырождения по нескольким (более одной) модам (в порождающем состоянии);

2. проблема «аналитического описания» посткритических перестроек в условиях разрушения «симметрии параллелепипеда» (при которой, вообще говоря, отсутствует непрерывно зависящее от параметра семейство базисных мод);

3. проблема создания эффективного алгоритма вычисления оптимальных значений параметров ветви нелокальных бифурцирующих экстремалей.

Актуальность исследования этих проблем подкреплена появлением новых мощностей компьютеров, достаточных для реализации и выполнения разработанных сложные алгоритмов.

Степень разработанности темы. Бифуркационный анализ краевых и начально-краевых задач развивался в Воронежской математической школе, начиная с трудов М.А. Красносельского и его учеников — В.В. Стригина, Ю.Г. Борисовича, Ю.С. Колесова, Э.М. Мухамадиева, Н.А. Бобылева и др.

В настоящее время значительные результаты были достигнуты школой Ю.И. Сапронова, усилиями которой построены теоретические и конструктивные схемы анализа многомодовых и нелокальных бифуркаций. Были рассмотрены также важные примеры использования новых исследовательских схем в теории упругости, теории фазовых переходов и гидродинамике. На основе результатов этих исследований были построены конструктивные схемы анализа и внедрены вплоть до алгоритмов в системах символьной математики. Изучены также важные примеры модельных краевых задач [98].

В диссертации использован подход, основанный на том, что рассмотренные математические модели являются градиентными. Это обстоятельство позволяет использовать прямой подход к построению траекторий спуска в точки мини-

мума функционала энергии. Однако, такой переход требует предварительного изучения бифуркации стационарных точек многопараметрического функционала энергии в условиях многомодового вырождения в порождающей точке минимума. При использовании прямого подхода в конкретных моделях непременно возникает вопрос обоснования возможности применения «фредгольмова анализа» вместе с задачами описания каустик и классификации раскладов бифурцирующих экстремалей.

Основы локального анализа в такой ситуации были заложены в работах М.А. Красносельского, Н.А. Бобылева, Э.М. Мухамадиева [123] Многомодовые локальные и нелокальные бифуркационные задачи изучались позже Ю.И. Сапроновым [172]. Б.М. Даринским, С.Л. Царевым [47], А.В. Гнездиловым [36], Д.В. Костиным [96], [97] и др.

Задача оптимизации полигармонического импульса была перенесена на модель лопатки турбонасоса (как частный случай упругой балки на упругом основании). Математическая модель упругой балки на упругом основании изучалась в работах Ю.А. Митропольского и Б.И. Мосеенкова [148], J.M.T. Thompson, G.W. Hunt [207], [209], Б.С. Бардина и С.Д. Фурты [12] и Г.С. Писаренко [157].

Результаты исчерпывающего локального бифуркационного анализа равновесных конфигураций упругой балки на упругом основании в условиях двухмодового вырождения в случае однородного материала упругой системы ранее были получены Б.М. Даринским и Ю.И. Сапроновым на основе фредгольмова анализа. Но при появлении параметра неоднородности материала в математических моделях упругой балки или пластины алгоритм Даринского-Сапронова теряет силу. Потребовалась его модификация и, в частности, разработка принципиально новой методики построения нормализованной главной части ключевой функции.

Как известно, первичную основу анализа нелинейных задач составляют задачи линейного анализа и такие две ее важнейшие составляющие, как корректная разрешимость линеаризованных модельных уравнений и спектральный анализ

«ведущих» линейных операторов в модельных уравнениях [68].

Бесконечномерные динамические системы (системы с распределенными параметрами) часто исследуются на основе теории линейных полугрупп, развитой в работах Э.Хилле, Р.Филлипса, С.Г. Крейна и др. В теории уравнений параболического типа важное место занимают однопараметрические полугруппы линейных преобразований $U(t)$, $t \geq 0$, в числе которых занимают и воронежские математики. Линейные методы, используемые для решения нелинейных уравнений, применялись в трудах М.А. Красносельского, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльника, П.Е. Соболевского[122], Дж. Голдстейн [39], Д. Хенри [189], Ф. Клемент, Х. Хейманс, С.Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер [72] и др. Этой тематике посвящены также работы и других математиков С.И. Пискарёв, Г.А. Свиридука, В.Е. Фёдорова [206]. Один из базовых исследовательских принципов основан на следующем замечании: уравнение

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t, v) \quad (0 < t \leq t_0), \quad v(0) = v_0,$$

где $f(t, x)$ при каждом $t \in [0, t_0]$ — нелинейный оператор, при условии, что оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$, сводится к интегральному уравнению

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)f[s, v(s)]ds.$$

(метод Дюамеля).

В теории и практике создания ряда технических устройств имеется необходимость отыскания решений, связанных с использованием оптимизированных импульсов. Например, повышение эффективности зубчатых инерционных механизмов за счет придания им движения с увеличенным коэффициентом асимметрии силового импульса является весьма актуальной задачей. Попытки создания односторонне направленных инерционных сил были предприняты еще в 40-х годах прошлого столетия немецкими инженерами, изготовленными инерционный самобалансный механизм, создающий возмущающую направленную инерционную силу, периодически изменяющуюся по величине по закону, на-

званному «бигармоническим». Величина асимметрии (отношение наибольшего значения суммарной направленной инерционной силы к абсолютной величине наименьшего) для бигармонического механизма равна двум, и она оказалась недостаточной для практического использования. В настоящее время применяются полигармонические силовые импульсы (универсальное вдавливающее устройство по патенту РФ 2388868 (МПК E02D7/00, опубл. 10.05.2010), способ направленного инерционного вибровозбуждения по патенту РФ 2528715 (МПК E02D7/18, B06B1/16, опубл. 20.09.2014)), но оптимальная в смысле коэффициента асимметрии конструкция в этих работах не была предложена.

Кроме того, в исследованиях использовались теоретические и практические идеи, изложенные в широко известных монографиях по математическому моделированию В.И. Арнольда [5], А.П. Михайлова, А.А. Самарского и А.П. Михайлова [166].

Цели и задачи диссертационной работы. Развитие и применение новых методов бифуркационного анализа актуальных нелинейных краевых и начально-краевых задач, соответствующих новым запросам практики математического моделирования и современным достижениям вычислительных технологий. В частности, развитие новых и эффективных методов анализа многомодовых и нелокальных бифуркаций.

Нахождение по заданным начальным условиям оптимальных значений управляющих параметров и, следовательно, наилучших конструктивных решений технических устройств, работа которых описывается рассматриваемыми в диссертации математическими моделями.

Рассмотренные в диссертации задачи.

1. Анализ многомодовых бифуркаций стационарных состояний упругих слабо неоднородных балок и пластин в виде:

- 1.1. построения ветвей приближенных решений модельных уравнений в аналитической форме;
- 1.2. классификация бифуркационных раскладов ветвей решений;

- 1.3 описание каустик.
2. Обоснование применения «фредгольмова анализа» для однородных и неоднородных моделей упругого равновесия.
3. Разработка и реализация алгоритмов построения собственных и корневых векторов главных линейных частей модельных уравнений.
4. Разработка и реализация алгоритма построения нормализованных главных частей ключевых функций Ляпунова–Шмидта.
5. Разработка методов исследования корректной разрешимости начально-краевых задач для дифференциальных уравнений, возникающих при анализе математических моделей из таких областей как механика, гидродинамика, теория тепломассопереноса, радиофизика и т.д., на основе теории сильно непрерывных полугрупп преобразований. Получение представления решения таких задач и построения устойчивых алгоритмов для компьютерной реализации.
6. Построение оптимальных параметрических ветвей бифурсирующих устойчивых состояний, рассмотренных упругих систем.
7. Оптимизация параметров полигармонического импульса вибропогружателя.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые изложен анализ многомодовых бифуркаций состояний упругих систем с условием неоднородности. Для чего была разработана новая модификация вариационной редуцирующей схемы Пуанкаре–Ляпунова–Шмидта, расширенная на случай отсутствия постоянных мод бифуркаций. В случае неоднородных упругих материалов преодолен феномен отсутствия гладкой (и даже непрерывной) зависимости мод от «управляющих» параметров. Основу решения составило введение и использование гладких семейств квазимод. В результате для балок и пластин разработан и апробирован алгоритм построения квазимод. Разработан алгоритм построения нормализованных главных частей ключевых функций в случае понижения симметрии параллелепипеда, что является необходимым при анализе математических моделей, учитывающих важные параметры систем, например, нерав-

номерного распределения энергии в материале. Полученный новый алгоритм был апробирован на основе компьютерной реализации, позволяющей численно получать значения коэффициентов ключевых функций.

В диссертации впервые предложены полные решения ряда задач оптимизации по критерию «коэффициент несимметрии». Применение подхода, разработанного в диссертации, дало возможность определять и доказывать оптимальность технически значимых физических характеристик для ряда устройств и процессов. Так, указанные методы были применены к исследованию оптимальности математических моделей для виброустройств, которые конструируются из наборов сцепленных между собой шестерёнчатых звеньев. Такие устройства актуальны, например, при установки строительных свай. В диссертации для произвольного числа звеньев впервые найден и сформулирован математический закон (критерий), названный здесь «полигармоническим импульсом Максвелла-Фейера» (М-Ф импульс), которому должна удовлетворять модель оптимальная в смысле коэффициента асимметрии.

Отметим, что все ранее запатентованные и сконструированные вибропогружатели как в нашей стране, так и за рубежом не удовлетворяют этому критерию. Наиболее близко к нему приближается лишь конструкция В.Н. Ермоленко с количеством звеньев равном 7.

Импульс М-Ф оказался естественным инструментом при исследовании амплитудно-фазового синтеза в математической теории антенн. Его использование позволило решить в диссертации одну из задач П.К. Сутина [181] об оптимальном выборе диаграмм направленности.

Кроме того, предложенный подход был применен и к задаче об импульсе изгиба турбинной лопатки, где также получены оригинальные результаты [100]–[102].

Результаты, связанные с оптимизацией параметров бифурсирующих решений нелинейных модельных уравнений, впервые были получены в работах автора диссертации.

Теоретическая и практическая значимость. Предложенная модифицированная схема вариационной редукции Пуанкаре–Ляпунова–Шмидта дает возможность существенно расширить класс решаемых задач по качественному анализу нелинейных математических моделей. Полученный теоретический результат позволил провести прикладной анализ на основе разработанных комплексов программ [120], [121]. Значимость этого анализа определяется возможностью проведения оптимизации управляющих параметров математических моделей и, как следствие, определения их наилучших значений, что на практике является одной из важнейших задач.

Представленные в диссертации результаты могут послужить базой для исследования математических моделей теории упругих систем, прикладной механики и теории фазовых переходов. В работе рассмотрены фундаментальные примеры моделирования многомодовых закритических прогибов упругих балок и пластин с упором на случай неоднородных материалов, а также оптимизация технических устройств на основе этих математических моделей.

Применение на практике представленных в диссертации методик даёт эффект при определении и оптимизации основных рабочих характеристик устройств, таких, как КПД, статический момент и усилие, развиваемое вибропогружателем.

Кроме того, предложенные методы и алгоритмы лежат в основе решаемой задачи из теории антенн, поставленной П.К. Сутиным, что также позволяет на практике определять оптимальные параметры антенн.

Методология и методы исследования.

В диссертации использованы методы функционального анализа, теории нелинейных фредгольмовых операторов, вариационного исчисления, теории особенностей гладких функций и фредгольмовых функционалов, а также методов теории приближенных вычислений.

В математических конструкциях диссертации использованы методы теории

биfurкаций решений нелинейных краевых задач, вариационного исчисления, численных методов, теории катастроф и общей теории математического моделирования. Базу развитой в диссертации аналитической схемы составляет модифицированный вариационный метод Пуанкаре–Ляпунова–Шмидта, оснащенный конструкциями теории особенностей гладких функций и теории катастроф.

При рассмотрении краевых задач теории упругих систем естественным образом использована операторная трактовка уравнений и эквивалентная постановка в виде вариационной задачи $V_\lambda(x) \rightarrow \inf$, в которой $V_\lambda(x)$ — гладкое семейство гладких фредгольмовых функционалов, заданное на банаховом пространстве E , λ — параметр со значениями в некотором банаховом пространстве L (конечномерном или бесконечномерном).

В работе использовались следующие численные методы:

1. метод Галёркина–Ритца;
2. нелинейная модификация метода Галёркина–Ритца;
3. метод наискорейшего спуска;
4. формула Тейлора;
5. ряд Неймана;
6. вычисление квазимод;
7. метод конечных разностей.

Для построения компьютерных реализаций разработанных алгоритмов был выбран программный пакет Maple, который представляет собой систему компьютерной математики. Данный программный продукт ориентирован на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Система Maple предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений и нахождения интегралов. Обладает развитыми графическими средствами, а также имеет собственный язык программирования.

Положения, выносимые на защиту.

Поиск и качественный анализ многомодовых бифуркаций экстремалей осуществляется поэтапно через решение следующих составляющих задач:

- 1) построение системы мод и квазимод модельного уравнения в порождающей критической точке с многомерным вырождением;
- 2) построение главной части ключевого уравнения и анализ его основных свойств – симметрии, версальности развертки по параметрам и пр.;
- 3) анализ и построение каустики (дискриминантного множества) в рассмотренных задачах;
- 4) классификация bif-раскладов ветвей решений, соответствующих отдельным ячейкам регулярности в пространстве R^m значений параметров;
- 5) построение первых асимптотик ветвей решений (по вектору закритических приращений параметров);
- 6) компьютерное изображение двумерных сечений каустик и закритических прогибов в выбранных задачах;
- 7) алгоритм оптимизации закритических прогибов для рассмотренной функции качества «*Коэффициент несимметрии*».

В диссертации изложены результаты решения перечисленных задач для потенциальных уравнений в условиях нарушения и понижения симметрий.

Получены приложения к следующим конкретным задачам:

- описание многомодовых прогибов упругих балок и пластин в случае нарушения их однородности,
- описание многомодовых прогибов турбинных лопастей и их оптимизация,
- оптимизация полигармонического импульса по коэффициенту несимметрии,
- оптимизация приема радиосигнала.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на конференции «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения» (г. Санкт-Петербург, 2006, 2008 гг.) [105], [110], на международной конференции «Дифференциальные

уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И.Г. Петровского (г. Москва, 2007 г.) [108], на Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна» (г. Воронеж, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014, 2016 гг.) [103], [106], [109], [111], [113], [115], [118], [95], на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (г.Воронеж, 2011, 2013, 2015 гг.) [93], [119], [83], [76] на Воронежской весенней математической школе «Понтрягинские чтения - XXIII» (Современные методы теории краевых задач) (г.Воронеж, 2012) [92], [116], на Молодежной международной конференции «Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения» (г. Воронеж, 2016), на международном молодежном симпозиуме «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения» (г. Воронеж, 2014), на VII Международной научно-технической конференции «СИНТ'13», «СИНТ'15» «Разработка, производство и эксплуатация турбо-, электронасосных агрегатов и систем на их основе» [117], на Международной молодежной научной школе «Теория и численные решения обратных и некорректных задач» (г. Воронеж, 2012) [11] на семинаре Воронежского государственного университета по бифуркационному анализу нелинейных задач (руководитель — проф., д.ф-м.н. Сапронов Ю.И.) и кафедральном семинаре академика А.Т. Фоменко (г. Москва, 2015).

Кроме того, результаты по данной тематике ежегодно докладывались на Научной сессии Воронежского государственного университета в период с 2006 г. по 2016 г.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, разбитых на параграфы, заключения, списка цитируемой литературы из 209 наименования и 2-х приложений, в которых приводятся тексты зарегистрированных программ, написанных на Maple. Общий объем диссертации — 297 страниц. Изложение проиллюстрировано графикой (37 рисунков).

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, степень её

разработанности. Определяются цели и задачи диссертационной работы, её научная новизна, а также теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования. Приводится краткое содержание работы.

В первой главе изложены основы теории фредгольмовых функционалов, которые применяются для проведения исследований нелинейных математических моделей методами функционального анализа [98]. Даны необходимые определения и описание методов классической вариационной редукции Ляпунова–Шмидта, которая в дальнейшем впервые была обобщена автором. Введенное в этой главе понятие ключевой функции дает возможность перехода от изучения нелинейных дифференциальных уравнений, которые являются математическими моделями различных физических систем, например колебания упругих систем, к изучению нормальных форм, имеющих вид многочленов с параметрами. Изучение таких нормальных форм проводится методами теории особенностей, для чего приведены основные понятия, такие как критическая точка, дискриминантное множество, каустика. В диссертационной работе приводятся сведения, касающиеся особенности типа многомерной сборки. Это вызвано тем, что в рассматриваемых задачах о прогибах упругих балок и пластин ключевые функции представляют собой функции типа версальной развертки особенности двумерной сборки. Приведены сведения о редукции деформации сборки и общие утверждения о бифуркации экстремалей из точки минимума.

Вариационную версию схемы Пуанкаре – Ляпунова – Шмидта можно представить в виде нелинейного аналога ритцевской аппроксимации. Ритцевской аппроксимацией функционала V на банаховом пространстве E называется функция

$$W(\xi) := V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top,$$

где e_1, \dots, e_n есть некоторый линейно независимый набор векторов в E (базис ритцевской аппроксимации). Экстремалям $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)^\top$ функции W

соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j e_j$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V . Точность ритцевских аппроксимаций можно повысить за счет увеличения количества базисных элементов. Но если рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi) \right),$$

где Φ будет гладким отображением из $N := \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ в N^\perp (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то можно добиваться любой аппроксимативной точности при заданном наборе базисных функций, а значит априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы.

В данном разделе изложен алгоритм вычисления ключевой функции и асимптотического представления решения для дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемые в работе математические модели.

Во второй главе идет речь о новых методах построения таких ключевых функций в выбранных модельных примерах упругих систем. Решаются две проблемы: построение базиса ритцевской аппроксимации состоящего из корневых функций и вычисления главной части ключевой функции на его основе.

Впервые рассматривается случай неоднородного материала в нелинейных математических моделях. Новые методы исследования обобщают и, следовательно, усложняют схемы рассмотренные в первой главе. Главным отличием является отсутствие условия постоянства собственных функций и переход к так называемым *корневым функциям*. Для лучшего представления результатов производится классическая схема вычисления главной части ключевой функции с использованием базиса ритцевской аппроксимации, состоящей из собственных функций, а также новая обобщенная схема, основанная на базисе ритцевской аппроксимации из корневых функций.

Впервые указан способ построения такого базиса ритцевской аппроксимации. При этом используется формула ортогонального проектора в форме, предло-

женной академиком В.П. Масловым.

В §2.1 приведено описание процедуры вычисления главной части ключевой функции W в случае базиса ритцевской аппроксимации, на основе собственных функций, и впервые предложена модификация этой процедуры для случая произвольного базиса. В пункте 2.1.3 приводятся теоремы 2.1, 2.2, доказывающие, что на основе формулы ортогонального проектора на корневое подпространство возмущенного симметричного оператора, приведенной в монографии В.П. Маслова [142], можно построить базис ритцевской аппроксимации (после понижения симметрии) и на его основе построить главную часть ключевой функции.

Доказательство того, что отбрасывание «тейлоровского хвоста» и «лишних» мономов в ключевой функции не изменяет топологию изучаемых сечений каустик и структуру *bif*-раскладов, проведено на основе теорем о конечной определенности ростков функций и их деформаций [6].

В §2.3 изложена схема анализа бифуркаций равновесных конфигураций слабо неоднородной упругой балки на упругом основании в условиях двухмодового вырождения (на базе общих утверждений первой и начала второй главы).

Нелинейная математическая модель движений балки с неоднородным материалом задается следующим уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(q \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

где w есть прогиб балки, то есть смещений точек средней линии, расположенной вдоль оси x), параметры κ , α отвечают за упругость и внешние воздействия, а параметр $q(x) = 1 + \varepsilon\gamma(x)$ – за неоднородности материала балки, представленного скалярным коэффициентом ε и функцией неоднородности материала балки $\gamma(x)$.

Первым шагом в исследовании такой задачи является отыскание стационарных состояний, заданных уравнением

$$\frac{d^2 w}{dx^2} \left(q(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0. \quad (0.0.1)$$

Если рассмотреть краевые условия

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0, \quad (0.0.2)$$

отвечающие случаю свободной опёртости на границе (шарнирное закрепление), то полученная граничная задача может допускать 2-мерные вырождения, порождающие 2-модовые бифуркции.

Замечание 2.2. Случай жесткого закрепления на границе исследуется аналогично. При анализе используются только соответствующие конкретному случаю краевые условия и моды прогибов.

Уравнение (0.0.1) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(q(x) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \quad (0.0.3)$$

Двумерное вырождение нулевой экстремали происходит при

$$\kappa = \kappa_1 := (p^2 + r^2)\pi^2, \quad \alpha = \alpha_1 := p^2 r^2 \pi^4, \quad p, r \in \mathbb{N},$$

со стандартными модами бифуркции

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(p \pi x), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(r \pi x).$$

В работе предполагается, что $p = 1$, $r = 2$ и, соответственно, $\kappa_1 = 5\pi^2$, $\alpha_1 = 4\pi^4$ (эти значения являются наименьшими из тех, при которых происходит 2-мерное вырождение; в остальных случаях анализ аналогичен), $\delta_1 := \kappa - \kappa_1$, $\delta_2 := \alpha - \alpha_1$ – критические приращения, $\lambda_1 = \delta_1 - \pi^2 \delta_2$, $\lambda_2 = \delta_1 - \pi^2 \delta_2$.

Наличие «весового» множителя $q(x) \neq const$ устраняет возможность применения схемы Даринского – Сапронова [41], так как из-за него не выполняется условие постоянства мод бифуркции, на котором основан вычислительный алгоритм. В диссертационной работе впервые был осуществлен бифуркационный анализ решений краевой задачи (0.0.1), (0.0.2) на основе редукции Ляпунова – Шмидта к ключевой функции более общего вида

$$\widetilde{W}(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, \tilde{e}_1 \rangle = \xi_1, \langle w, \tilde{e}_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (0.0.4)$$

где $\{\tilde{e}_k\}$ — «возмущенные» моды бифуркации.

$\tilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon)$, образующие базис в двумерном корневом подпространстве оператора Гессе $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B}$ в нуле, где

$$\mathcal{A}u := \frac{d^4w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2w}{dx^2} + \alpha I, \quad \mathcal{B}w := \frac{d^2}{dx^2} \left(\gamma \frac{d^2w}{dx^2} \right),$$

$$e_k = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$$

(элементы \tilde{e}_k не являются, вообще говоря, собственными функциями оператора \mathcal{H}).

Главная техническая трудность в построении ключевой функции состоит в вычислении коэффициентов h_k . В диссертации они вычисляются на основе формулы ортогонального проектора на корневое подпространство возмущенного симметричного оператора. То есть, вместо собственных функций рассмотрены такие элементы $\tilde{e}_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, для которых

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda) \tilde{e}_j(\lambda) = \sum_k \alpha_{jk}(\lambda) \tilde{e}_k(\lambda).$$

Функции $\tilde{e}_j(\lambda)$ называются корневыми. Входящие в эти соотношения функции $\alpha_{jk}(\lambda)$, $\tilde{e}_j(\lambda)$ гладко зависят от λ . В качестве искомых базисных элементов можно взять

$$\tilde{e}_k(\lambda) := \mathbf{P}(\lambda)(e_k),$$

где

$$\mathbf{P}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \mathcal{R}(\lambda, z) dz$$

— ортопроектор на двумерное корневое подпространство, ℓ — окружность достаточно малого радиуса с центром в нуле (на комплексной плоскости), $\mathcal{R}(\lambda, z)$

— резольвента: $\mathcal{R}(\lambda, z) = ((\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B} - zI)^{-1}$. И таким образом,

$$\tilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon),$$

где

$$h_k = \mathcal{M}e_k, \quad \mathcal{M} := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz.$$

Соотношения для возмущенных корневых функций представлены в

Теорема 2.4 *Возмущенные корневые векторы \tilde{e}_k , $k = 1, 2$ можно представить в виде $\tilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon)$, где h_k определяются соотношениями*

$$h_k = \mathcal{M}e_k,$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}e_1 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\sqrt{2} n^2}{(n^2-4)(n^2-1)} \left(\int_0^1 \gamma(s) \sin(n\pi s) \sin(\pi s) ds \right) \sin(n\pi x), \\ \mathcal{M}e_2 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{8\sqrt{2} n^2}{(n^2-4)(n^2-1)} \left(\int_0^1 \gamma(s) \sin(n\pi s) \sin(2\pi s) ds \right) \sin(n\pi x). \end{aligned} \right\}. \quad (0.0.5)$$

На основе полученных соотношений выведены формулы для коэффициентов главной части ключевой функции (теорема 2.5). После представления ключевой функции в нормальной форме

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_q(\xi, \nu) &= \frac{1}{2} (\tilde{\nu}_1 \xi_1^2 + \tilde{\nu}_2 \xi_2^2 + 2 \tilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2) + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4) + \\ &\quad o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\tilde{\nu}) + o(\tilde{\nu}), \end{aligned}$$

дано описание каустики и *bif*-раскладов по методике, изложенной в предыдущих разделах.

Описание ветвления критических точек и первые асимптотики бифурсирующих точек по закритическим приращениям управляющих параметров для функции \widetilde{W} полностью задаются ее главной частью, которая представляет собой «возмущенную двумерную сборку» (с коэффициентом двойного отношения $a = 2$), четную по каждой переменной.

Параметры ν_1, ν_2 вместе с параметром ε (при заданной функции неоднородности $\gamma(x)$) образуют трехмерное пространство параметров \mathbb{R}^3 .

Теорема 2.3 *В краевой задаче (0.0.1), (0.0.2) дополнение к дискриминантному множеству (подмножество $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma(f)$), рассмотренное в достаточно малой окрестности нуля, состоит из четырех связных открытых подмножеств $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5$ и Ω_9 (ячеек регулярности), которым соответствуют следующие *bif*-расклады: (1,0,0), (2,1,0), (2,2,1), (4,4,1).*

Каустика (бифуркационная диаграмма функций) $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции \tilde{U} разбивает плоскость управляющих параметров на шесть ячеек регулярности. Каждой ячейке соответствует один из следующих раскладов бифурцирующих критических точек: $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$ (компоненты l_k строки (l_0, l_1, l_2) равна количеству критических точек с индексом Морса k в рассматриваемом раскладе бифурцирующих критических точек).

В результате осуществлен полный бифуркационный анализ геометрической структуры дискриминантного множества и его дополнения, а также найдены все расклады бифурцирующих решений, соответствующих ячейкам регулярности. В диссертации приведены трехмерные изображения каустики (полученные с использованием оригинальных программных комплексов в компьютерной среде Maple [121]) и метаморфоз линий уровней ключевой функции.

Данный алгоритм был адаптирован и для исследования математической модели Кáрмана прогиба упругой пластины на упругом основании. Проведенные исследования и результаты изложены в §2.4. Аналогично со случаем изучения балки, первоначально был изучен случай однородной пластины, а затем впервые был рассмотрен случай неоднородного материала. Получена теорема о представлении ключевой функции, на основе которой были получены численные приближенные устойчивые многомодовые решения. Алгоритм был реализован в программном комплексе [121] и получены соответствующие решения и их графики.

Замечание *Полученные результаты впервые показывают существование устойчивых многомодовых решений (прогибов рассмотренных упругих систем).*

Третья глава посвящена установлению корректной разрешимости задач для линейных и нелинейных математических моделей с применением методов теории сильно непрерывных полугрупп преобразований. С этой целью впервые вводится и применяется понятие C_0 -операторного интеграла Лапласа, обобщающее классические преобразования Лапласа когда экспонента заменяется

C_0 полугруппой. Такой подход совместно с операторным методом Маслова-Хевисайда позволил значительно расширить классы равномерно корректных задач, указать методы их точных и приближенных решений с их точными оценками и получить следующий результат.

Пусть A – генератор полугруппы преобразований $U(t)$, $t \geq 0$ класса C_0 в E . Это значит, что область определения $D(A)$ оператора A плотна в E . Область его значений совпадает со всем E , а резольвентное множество содержит комплексную полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Семейство $U(t)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} 1) \ U(0) = I, \quad 2) \ U(t+s) = U(t)U(s), \quad 3) \ \lim_{t \rightarrow 0} \|U(t)x - x\| = 0, x \in E, \\ 4) \ \|U(t)\| \leq M \exp(\omega t). \end{aligned} \tag{0.0.6}$$

Для $f \in E$ исследуется корректная разрешимость задачи нахождения элемента $u \in D(A^n)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющего равенству

$$\mathbb{A}u = P_n(A)u = \sum_{m=0}^n a_m A^m u = f, \quad a_m \in \mathbb{C}. \tag{0.0.7}$$

В соответствии с Ж.Адамаром, это означает, что уравнение (0.0.7) должно быть однозначно разрешимо при любых $f \in E$, оператор \mathbb{A}^{-1} определен на всех f из E и непрерывен, то есть справедливо неравенство $\|\mathbb{A}^{-1}f\|_E \leq M\|f\|_E$, где константа M не зависит от f .

Справедлива следующая

Теорема 3.9 *Если корни многочлена $P_n(x)$ принадлежат резольвентному множеству оператора A , то задача (0.0.7) равномерно корректна и для ее решения справедливо представление*

$$u = \int_0^\infty G(t)U(t)f dt, \tag{0.0.8}$$

где $G(x)$ решение задачи Коши

$$P_n \left(-\frac{d}{dx} \right) G(x) = \delta(x), \tag{0.0.9}$$

$$G(0) = \frac{d}{dx} G(x)|_{x=0} = \dots = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} G(x)|_{x=0}, \quad (0.0.10)$$

$\delta(x)$ — дельта функция.

Следующий результат, полученный для операторных краевых задач с вырождающимися коэффициентами, даёт представление решения через полугруппы.

Пусть B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B = \|\cdot\|$, A — линейный оператор с областью определения $\overline{D(A)} = B$, $t \in (0, 1)$, $\mathfrak{C}^{(k)}(B)$ — пространство вектор-функций со значениями в B , k раз непрерывно дифференцируемых на $(0, 1)$; $\mathfrak{B}^{(k)}(B)$ — банахово пространство функций $x(t) \in \mathfrak{C}^{(k)}(B)$ с нормой $\|x\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{t \in (0, 1)} \|x^{(j)}(t)\|$, $\|x\|_0 = \|x\|$.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$Q(t)u(t) = Au(t) + f(t), \quad (0.0.11)$$

$Q(t)u(t) = a(t)u''(t) + b(t)u'(t)$, $a(t) \geq 0$, $a \in \mathfrak{B}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$, $b \in \mathfrak{B}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$, $f \in \mathfrak{B}(B)$, A — позитивный оператор, такой, что $-A$ является генератором полугруппы $V(-A, t)$ класса C_0 .

Особенностью уравнения (0.0.11) является возможность обращаться в нуль (вырождение) коэффициента $a(t)$, при $t = 0$. В зависимости от порядка вырождения коэффициента $a(t)$ в нуле, для определения ограниченного решения уравнения (0.0.11), краевое условие при $t = 0$ может ставиться, а может и отсутствовать.

В связи с этим, М.В. Келдыш вводит следующие условия, характеризующие дифференциальное выражение $Q(t)$:

Условие $D^{(m)}$. Выражение $Q(t)$ удовлетворяет условию $D^{(m)}$, если при некотором натуральном m выполняется неравенство $b(0) + ma'(0) < 0$.

$$Qu(t) = Au(t) + f(t), \quad (0.0.12)$$

$$\begin{aligned} \delta_0 u(0) - \Theta_0 u'(0) &= \varphi, \quad \delta u(1) + \Theta u'(1) = \psi, \\ \varphi, \psi &\in B, \quad \Theta_i \cdot \delta_i > 0, \quad i = 0, 2. \end{aligned} \tag{0.0.13}$$

В диссертации, с применением конечно-разностного метода, устанавливается равномерно-корректная разрешимость неоднородной задачи (0.0.12)-(0.0.13).

Определение 3.34 *C₀-интегралом Лапласа функции $\varphi \in \Omega$ будем называть оператор*

$$\varphi^*(A) = \mathfrak{L}(A)[\varphi(t)] = \int_0^\infty V(-A, t)\varphi(t)dt. \tag{0.0.14}$$

Определение 3.35 *Функция $u(t)$ называется обобщенным решением уравнения (0.0.11), если 1) $u(t) \in \mathfrak{B}(B)$; 2) $Qu(t) \in \mathfrak{B}(B)$; 3) $u(t) \in D(A)$ для $t \in (0, 1)$; 4) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (0.0.11) в интервале $(0, 1)$ при $f \in \mathfrak{B}(B)$.*

Определение 3.36 *Краевая задача (0.0.12)–(0.0.13) называется равномерно корректной, если для любых $\varphi, \psi \in B$, $f \in \mathfrak{B}(B)$ существует единственное обобщенное решение этой задачи, непрерывно зависящее от φ и ψ в норме B , и от f в норме $\mathfrak{B}(B)$.*

Теорема 3.14 *Пусть q_i – тип полугруппы $U(Q_i, t)$, $-\omega$ – тип полугруппы $V(-A, t)$, тогда при $\omega > q_i$ задача (0.0.12)–(0.0.13) равномерно корректна и её решение представимо в виде:*

$$u(t, A) = \mathfrak{L}(A) \left[\mathfrak{L}^{-1}(\lambda) (S_2(t, \lambda)\varphi + S_3(t, \lambda)\psi + \int_0^1 \Gamma_2(t, \xi, \lambda)f(\xi)d\xi) d\lambda \right] (s) ds, \tag{0.0.15}$$

где функции $S_2(t, \lambda)$, $S_3(t, \lambda)$, $\Gamma_2(t, \xi, \lambda)$ аналогичны функциям $S_1(t, \lambda)$, $\Gamma_1(t, \xi, \lambda)$.

Аппроксимация $u'(t_i) \approx \frac{1}{h}[u_{i+1} - u_i]$, $u''(t_i) \approx \frac{1}{h^2}[u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}]$, $t_i = ih$, $h = \frac{1}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$ приводит задачи к разностным схемам вида

$$\mathfrak{M}_n(A)u^{(h)} = Q^{(h)}u^{(h)} + Au^{(h)} = f^{(h)} \tag{0.0.16}$$

с трехдиагональной операторной матрицей.

Указывается явный вид операторной матрицы $\mathfrak{M}_n^{-1}(A)$. При этом имеет место оценка устойчивости разностной схемы

$$\|\mathfrak{M}_n^{-1}(A)\|_{\mathfrak{B}(B)} \leq M \|\mathfrak{M}_n^{-1}(\omega)\|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)}. \quad (0.0.17)$$

В §3.1 приведены примеры генераторов с особенностью.

Пусть функция $h(x)$ определена на интервале $x \in (a, b) \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям: $h'(x) > 0$, $h(\infty) = -\infty$, $h(b) = \infty$.

Через $L_{p,\omega,h}$ будем обозначать банахово пространство функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{p,\omega,h} = \left[\int_a^b e^{p\omega h(x)} |\varphi(x)|^p dh \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1. \quad (0.0.18)$$

Введем операторы $\mathbb{D}_{\alpha,h} = \alpha \frac{d}{dh}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ с областью определения $D(\mathbb{D}_{\alpha,h}) = \{\varphi : \varphi \in L_{p,\omega,h}, \frac{d\varphi}{dh} \in L_{p,\omega,h}\}$.

Нетрудно проверить, что такие операторы являются генераторами сильно непрерывных групп линейных преобразований, действующих по правилу

$$U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) + \alpha t)], \quad t \in \mathbb{R}, \quad (0.0.19)$$

причем для них справедливо равенство

$$\|U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi\|_{p,\omega,h} = e^{-\alpha^2 \omega t}, \quad (0.0.20)$$

которое следует из соотношений

$$\begin{aligned} \int_a^b |U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x)|^p dh &= \int_a^b e^{\alpha \omega p h(s)} |\varphi[h^{-1}(h(s) + \alpha t)]|^p dh = \\ &= e^{-\alpha^2 p \omega t} \int_a^b e^{\alpha \omega p h(s)} |\varphi(s)|^p dh = e^{-\alpha^2 \omega p t} \|\varphi\|_{p,\omega,h}. \end{aligned}$$

В случае $t \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ семейства (0.0.19) являются сжимающими полугруппами класса C_0 . В частности, для некоторых классических случаев имеем

1. $\mathbb{D}_{\alpha,h}\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$, $h(x) = x$, $x \in (-\infty, \infty)$, $U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x) = \varphi(x + \alpha t)$, $u(x) = \int_0^\infty U(t, A)\varphi(x - \alpha t) dt$, $\|u\| = \left[\int_a^b e^{\alpha p \omega x} |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$.
2. $\mathbb{D}_{\alpha,h}\varphi(x) = x \frac{d\varphi(x)}{dx}$, $h(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$, $U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x) = \varphi(x e^{\alpha t})$, $u(x) = \int_0^\infty U(t, A)\varphi(x e^{-\alpha t}) dt$, $\|u\| = \left[\int_a^b x^{\alpha p \omega - 1} |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$.

$$3. \mathbb{D}_{\alpha,h}\varphi(x) = (1-x^2)\frac{d\varphi}{dx}, h(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), x \in (-1,1), U(t, \mathbb{D}_{\alpha,h})\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1+\operatorname{th} t}{1-x \operatorname{th} t}\right), u(x) = \int_0^\infty U(t, A)\varphi\left(\frac{1+\operatorname{th} t}{1-x \operatorname{th} t}\right) dt, \|\varphi\| = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\alpha p \omega}{2}} \cdot \frac{dx}{(1-x^2)}.$$

В четвертой главе рассмотрен новый функционал, называемый коэффициентом несимметрии (асимметрии) [56], [91], [99].

Этот функционал возникает в экстремальных задачах с полигармонической функцией. Например, задача поиска оптимальных конструкций вибрационных устройств связана с эффективным использованием направленного импульса, итоговой математической моделью которого является тригонометрический полином

$$f_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \cos(kt), \quad t \in [0, \pi], \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (0.0.21)$$

и связанный с ним функционал качества

$$K_n(\lambda) = \frac{\max_t f_n(t, \lambda)}{\left| \min_t f_n(t, \lambda) \right|}, \quad (0.0.22)$$

называемый *коэффициентом несимметрии*. При этом возникает задача максимизации функционала $K_n(\lambda)$ по вариациям λ

$$K_n(\lambda) \rightarrow \sup_{\lambda}$$

при условиях

$$\int_0^\pi f_n(t, \lambda) dt = 0, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = c > 0.$$

В параграфе 4.2 впервые решается задача об однозначном определении структуры многочлена, оптимизирующего коэффициент несимметрии и доказывается теорема 4.3 [99].

Теорема 4.3 *Многочлен (0.0.21) является оптимальным тогда и только тогда, когда он с точностью до постоянного множителя имеет вид суммы Фейера*

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n (n+1-k) \cos(kt).$$

При этом имеет место равенство

$$\max_{\lambda} K_n(\lambda) = n.$$

Кроме того, сформулированы и доказаны теоремы о свойствах оптимальных многочленов Максвелла-Фейера, задающих оптимальный (в смысле коэффициента несимметрии) импульс — импульс Максвелла-Фейера (М-Ф импульс). График важного для инженерно-технических задач М-Ф импульса представлен на рисунке 0.1.

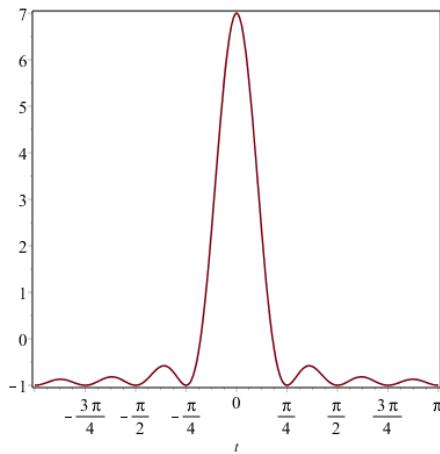


Рисунок 0.1

Отметим, что характерным свойством М-Ф импульса является расположение минимумов на одном уровне.

В пятой главе в §5.1 рассмотрена математическая модель изгиба упругой лопатки турбины и предложена методика оптимизации закритического изгиба, необходимая при расчетах конкретных турбонасосных конструкций. Важно, что математический аппарат, развитый в главе 2, позволил провести анализ соответствующей нелинейной модели неоднородной упругой лопатки, а затем на основе результатов, полученных в главе 4, осуществить оптимизацию устройства по критерию коэффициента несимметрии с построением соответствующего М-Ф импульса.

Эти результаты изложены в цикле статей, опубликованных в журнале «Насосы. Турбины. Системы», посвященном разработке, производству и эксплуа-

тации энергетических систем [100], [101], [102].

А также докладывались на Международной научно-технической конференции «СИНТ» (Системы. Насосы. Турбины) в 2013 и 2015 годах [117].

В §5.2 рассматриваются приложения фундаментальных методов, описанных в предыдущих главах, к теории антенных устройств. Так в §5.2.1 изучается математическая модель прямоугольной антенны. При этом важным параметром является диаграмма направленности (ДН). Существуют многочисленные способы построения ДН, среди которых одним из наиболее важных является метод алгебраических многочленов.

Параметр $\Theta = \min_k \frac{M_p}{M_k}$ назовём коэффициентом доминирования главного направления излучения. Ясно, что чем больше Θ , тем больше степень влияния главного направления излучения по сравнению с излучением боковых лепестков. В диссертационной работе был решен вопрос о существовании многочлена $q_n(t) = \sum_{m=0}^n a_m t^m$ с максимальным коэффициентом доминирования $\Theta(q_n)$. Решение представлено в виде теоремы

Теорема 5.2 Пусть Q – множество многочленов $q_n(t) = \sum_{m=0}^n a_m t^m$, $t \in [-1; 1]$, таких что

$$\int_{-1}^1 q_n(t) dt = 0; \quad \sum_{m=0}^n a_m = n.$$

и $T_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ многочлены Чебышева 1-го рода. Тогда многочлен от $|t|$

$$\tilde{q}_n(t) = \frac{1 - T_{n+1}(1 - |t|)}{(n + 1)|t|}$$

максимизирует функционал $\Theta(q_n)$ при $q_n \in Q$ и справедливо равенство

$$\max_{q_n \in Q} \Theta(q_n) = \Theta(\tilde{q}_n) = n.$$

Во второй части §5.2 приведено решение задачи из математической теории антенн (поставленной П.К. Сутиным) по составлению примеров теоретически допустимых ДН.

В приложении А даны сведения о комплексах программ [120], [121]: описание, системные требования и текст программ.

В приложении Б приведены свидетельства о регистрации разработанных программ для ЭВМ.

Глава 1

Параметрические фредгольмовы модели

В данной главе приведены формулировки основных необходимых определений и утверждений из бесконечномерной топологии и теории фредгольмовых уравнений, используемых при формулировке результатов, полученных в диссертационной работе (более подробные сведения можно найти в [20], [47], [62], [124], [130], [132], [153], [154]).

1.1 Фредгольмовы задачи

В практике встречаются нелинейные краевые задачи математической физики, допускающие трактовку в виде фредгольмова операторного уравнения:

$$f(x) = b, \quad x \in E, \quad b \in F,$$

где f — гладкое фредгольмово отображение банахова пространства E в банахово пространство F [17], [20], [124]. Исследование такого уравнения можно осуществить редукцией к конечномерному уравнению

$$\theta(\xi) = \beta, \quad \xi, \beta \in \mathbb{R}^n.$$

Определение 1.1 Пусть E, F банаховы пространства и $A : E \rightarrow F$ — линейный непрерывный оператор, который будет фредгольмовым, если

$$\dim(Ker A) < \infty, \quad \dim(Coker A) (= \dim(F/Im A)) < \infty.$$

Тогда разность $\dim(\text{Ker} A) - \dim(\text{Coker} A)$ будет аналитическим индексом фредгольмова оператора A и обозначается $\text{ind } A$.

Следствием определения будет то, что образ $A(E)$ замкнут в F , и оператор A будет изоморфно отображает любое подпространство, дополняющее $\text{Ker } A$ (в E), на $\text{Im } A$.

Если $L_1 : E_1 \rightarrow E_2$, $L_2 : E_2 \rightarrow E_3$ будут фредгольмовы операторы, тогда и оператор L_2L_1 будет фредгольмов. При этом

$$\text{ind}(L_2L_1) = \text{ind}(L_1) + \text{ind}(L_2).$$

Определение 1.2 Нелинейное отображение $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, где \mathcal{U} есть открытое подмножество в E , называется фредгольмовым, если его производная Φ реше $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ будет фредгольмовым оператором в каждой точке $x \in \mathcal{U}$.

Индексом нелинейного фредгольмова отображения f , определенного на связной области, называется индекс линейного оператора $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$:

$$\text{ind } f := \text{ind } \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

(если область связная, то индекс $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ не зависит от x).

В дальнейшем будем предполагать, что $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, где \mathcal{U} — область банаухова пространства E (E , F — банауховы пространства), есть нелинейное фредгольмово отображение нулевого индекса, при чём выполнены условия:

- a) $E \subset F \subset H$ есть тройка непрерывно вложенных пространств, где H будет гильбертово пространство.
- б) E плотно в H . Что означает: любой элемент из H может быть представлен как предел последовательности из E . Из плотности E в H , следует, что F также плотно в H .

В соответствии с вышесказанным, уравнение

$$f(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathcal{U}, \tag{1.1.1}$$

называется нелинейным фредгольмовым уравнением.

1.1.1 Вариационные фредгольмовы модели

Определение 1.3 Если для гладкого отображения $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ существует такой гладкий функционал $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f = \text{grad}_H V$ или (что эквивалентно)

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \left\langle f(x), h \right\rangle_H , \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad h \in E,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H , тогда отображение f называется потенциальным, при этом предполагается, что E будет непрерывно вложено в F , F непрерывно вложено в H и E также плотно в H . Функционал V называется потенциалом отображения f , а уравнение (1.1.1) — потенциальным.

Если функционал V будет потенциалом f , тогда уравнение (1.1.1) можно записать в виде

$$\text{grad}_H V(x) = 0, \quad x \in \mathcal{U}. \quad (1.1.2)$$

Данное уравнение называется уравнением Эйлера экстремалей (или критических точек) функционала V .

Определение 1.4 Пусть $V(x)$ есть гладкий функционал, заданный на базовом пространстве E . Точка a будет критической точкой функционала V , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a)h = \left\langle f(a), h \right\rangle_H = 0 \quad \forall h \in E \setminus \{0\}.$$

Равносильность последнего равенства уравнению (1.1.2) обеспечивается плотностью E в H .

В связи с этим, множество решений уравнения (1.1.1) и множество критических точек функционала V будут совпадать. Таким образом, построение и исследование решений уравнения (1.1.1) можно заменить построением критических точек функционала V , что будет вариационным методом. Если градиент функционала V есть фредгольмово отображение, функционал называется фредгольмовым, .

Критическая точка a функции $W : \mathcal{U} \subset R^n \rightarrow R$ будет *невырожденной* или *морсовской*, если

$$\det \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(a) \right) \neq 0.$$

Определение 1.5 Пусть $V : E \rightarrow R$ — гладкий Fredholm функционал, где E — банахово пространство. Тогда критическая точка a функционала V будет *невырожденной* или *морсовской*, если

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)h \neq 0 \quad \forall h \in E \setminus \{0\}.$$

1.1.2 Фредгольмовы функционалы и групповая симметрия

В исследованиях параметрических задач с групповой симметрией на основе бифуркационного анализа, хорошо показал себя метод конечномерной редукции [17], [18], [47], [123]. В условиях симметрии решение многих из таких задач может быть сведено к анализу миниверсальных разверток краевых или угловых особенностей гладких функций, которые изучались в работах В.И. Арнольда, С.Т.С. Уолла, Д. Сирсмы, Д. Пита, Т. Постона, Ю.И. Сапронова, А.В. Гнездилова. [6], [36], [161], [170]. Дополнительные сведения по симметрийному анализу имеются в [60], [155], а по теории G -эквивариантных вариационных задач — в [17], [47], [132], [161], [184].

Пусть G есть некоторая группа, а H будет вещественное гильбертово пространство. Через $O(H)$ обозначается группа ортогональных преобразований H . Ортогональным представлением G на H будем называть гомоморфизм из G в группу $O(H)$. Пусть X — линейное подпространство в H , обладающее тем свойством, что $R_g x \in X$ для $\forall x \in X$ и $\forall g \in G$. Определено ортогональное представление \bar{R} группы G на X , которое называется подпредставлением (индуцированным представлением) R . Подпространство X называют устойчивым относительно группы G . Если размерность $\dim X < \infty$, тогда подпредставление называют конечномерным.

Определение 1.6 *Функционал V называется инвариантным относительно действия группы G , то есть обладающим G -групповой симметрией, если выполнено*

$$V(R_g x) = V(x) , \quad \forall x \in E , \quad g \in G.$$

Определение 1.7 *Отображение f называется эквивариантным относительно действия группы G , если выполнено*

$$f(R_g x) = R_g f(x) \quad \forall x \in E \subset H, \quad g \in G.$$

Определение 1.8 *Орбитой группы G , проходящей через данную точку $x_0 \in E$, называется множество всех точек $x \in E$, для которых существует такое $g_0 \in G$, что $x = R_{g_0} x_0$.*

Точка $x_0 \in E$ называется неподвижной точкой относительно действия группы G , если справедливо $g(x_0) = x_0 \quad \forall g \in G$.

Если некоторая точка x_0 является критической для функционала V , тогда и вся орбита $G(x_0)$ будет состоять из критических точек. Критической орбитой функционала V называется орбита, состоящая из его критических точек.

Утверждение 1.1 *Пусть гладкий фредгольмов функционал V инвариантен относительно ортогонального действия группы \mathbb{Z}_2^n и допускает \mathbb{Z}_2^n -эквивариантную n -мерную редукцию (Ляпунова – Шмидта). Пусть при этом группа \mathbb{Z}_2^n полусвободно действует на пространстве ключевых параметров. Тогда для соответствующей ключевой функции W (автоматически инвариантной относительно группы \mathbb{Z}_2^n) в некоторой системе координат (карте) на пространстве ключевых параметров выполнено следующее равенство:*

$$W(\xi_1, \dots, -\xi_k, \dots, \xi_n) = W(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n) \quad \forall \xi, k.$$

1.1.3 Параметрические фредгольмовы модели

В нелинейных математических моделях часто принципиальным обстоятельством является зависимость уравнений от параметров, т.е. параметрическое

уравнение

$$f(x, \lambda) = b, \quad x \in E, \quad b \in F, \quad \lambda \in \mathbb{R}^k.$$

При некоторых значениях λ решение $x(\lambda)$ образуют «устойчивое» семейство, но с изменением значения параметра при некоторых, так называемых, критических значениях λ это семейство может разбиться на несколько ветвей или исчезнуть вовсе.

Пусть f включено в $f(x, \lambda) : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow F$, $f(x, 0) = f(x)$ есть семейство гладких фредгольмовых отображений, гладко зависящее от параметра λ . Если отображение $f(\cdot, \lambda)$ потенциально с потенциалом $V(\cdot, \lambda)$, то потенциал также гладко зависит от данного параметра. В такой ситуации естественным образом возникает понятие ветвление (биfurкации) экстремалей и, бифуркационного значения параметра.

Определение 1.9 Пусть $\lambda = \lambda_0$ будет значение параметра λ , при котором a является изолированной критической точкой функционала $V(x, \lambda)$. Значение $\lambda = \lambda_0$ называется бифуркационным, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое λ_1 , $\|\lambda_1 - \lambda_0\| < \varepsilon$, при котором V имеет не менее двух критических точек a_1, a_2 таких, что $\|a_1 - a\| < \varepsilon$ и $\|a_2 - a\| < \varepsilon$.

При переходе λ через бифуркационное значение λ_0 происходит рождение критических точек из точки a . Часто в прикладных задачах полагают $a = 0$, тогда говорят, что рассматривают рождение критических точек из нуля.

Определение 1.10 Пусть задана гладкая фредгольмова параметрическая развертка

$$f(\cdot, \lambda) : E \rightarrow F, \quad \lambda \in \Lambda^m \subset \mathbb{R}^m.$$

Пусть Ω есть открытое подмножество в E . Бифуркационным (или дискриминантным) множеством $\Sigma(\Omega)$ уравнения

$$f(x, \lambda) = b, \quad x \in \Omega, \tag{1.1.3}$$

называется совокупность тех значений $\lambda = \tilde{\lambda}$, для которых данное уравнение имеет в Ω вырожденное решение \tilde{x} :

$$f(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = b, \quad \text{codim} \left(\text{Im} \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) \right) > 0.$$

Определение 1.11 Пусть $\tilde{\Sigma}(\Omega)_{\tilde{\lambda}}$ — росток множества $\Sigma(\Omega)$ в точке $\tilde{\lambda}$.

Тогда пересечение

$$\Sigma(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bigcap_{\Omega: \bar{x} \in \Omega} \tilde{\Sigma}(\Omega)_{\bar{\lambda}}$$

называется бифуркационной диаграммой уравнения (1.1.3) в точке $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

1.2 Редуцирующая схема Пуанкаре–Ляпунова–Шмидта

Пусть E, F будут вещественные банаховы пространства, $f : E \rightarrow F$ есть нелинейное фредгольмово отображение нулевого индекса. Пусть зафиксированы прямые разложения

$$E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = F^n \dot{+} F^{\infty-n},$$

где E^n и F^n будут n -мерные подпространства в E и F соответственно, а $E^{\infty-n}$ и $F^{\infty-n}$ — произвольные прямые дополнения к E^n и F^n в E и F .

Если e_1, e_2, \dots, e_n — базис E^n , то для каждого вектора $x \in E$ имеет место разложение

$$x = u + v, \quad u = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad v \in E^{\infty-n}.$$

Если g_1, g_2, \dots, g_n — базис F^n , то

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= f^n(x, \lambda) + f^{\infty-n}(x, \lambda), \\ f^n(x, \lambda) &= \sum_{i=1}^n v_i(x, \lambda) g_i, \quad f^{\infty-n}(x, \lambda) \in F^{\infty-n}. \end{aligned}$$

Если предположить, что производная

$$\frac{\partial f^{\infty-n}}{\partial v}(a, \lambda) : E^{\infty-n} \rightarrow F^{\infty-n}$$

является изоморфизмом в некоторой точке $a \in E$, $f(a, \lambda) = 0$, тогда, в силу теоремы о неявной функции, зависимость $v = \Phi(u, \lambda)$ (для u из достаточно малой окрестности $\mathcal{O} \subset E^n$ точки \bar{u}), такую, что $\Phi(\bar{u}, \lambda) = \bar{v}$ (\bar{u}, \bar{v} — компоненты a) и

$$f^{\infty-n}(u + \Phi(u, \lambda), \lambda) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{O}$$

(отображение $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow E^{\infty-n}$ при этом является гладким). Для отыскания решений уравнения $f(x, \lambda) = 0$ в окрестности точки $x = a$ достаточно найти решения уравнения

$$f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda) = 0. \quad (1.2.4)$$

Определение 1.12 *Отображение $\tau : E^n \rightarrow F^n$, где*

$$\tau(u, \lambda) = f^n(u + \Phi(u, \lambda), \lambda),$$

называется ключевым.

Очевидно, что уравнение (1.1.3) эквивалентно уравнению

$$\theta(\xi, \lambda) = 0, \quad (1.2.5)$$

где θ будет координатной формой отображения τ .

1.3 Гладкие функции и локальный анализ

Исследование многих задач математического анализа сложных систем можно свести к изучению поведения гладких функций многих переменных. Общая, так называемая, «качественная картина» строения «достаточно регулярной» гладкой функции тесно связана с составом ее особых точек. Например, если функция V является коэрцитивной, что значит растущей на бесконечности и при этом строго выпуклой, то V обладает лишь единственной особой точкой, которой функция принимает строго минимальное значение. График такой функции (в трехмерном пространстве, например) имеет вид чаши с закругленным

дном. При отсутствии условия выпуклости функция может иметь несколько точек локального минимума, что значительно затрудняет ее анализ. При наличии дополнительных параметров, ситуация становится ещё более сложной. Изменение параметров приводит к бифуркационным перестройкам функции. А. Пуанкаре была предложена процедура [163], которая позволяет во многих случаях значительно упростить изучение ветвления экстремалей за счет исключения «несущественных» переменных. Конструкция Пуанкаре будет приведена ниже. Стоит заметить, что она является предтечей широко известной схемы конечномерной редукции — схемы Ляпунова – Шмидта, которая служит фундаментом для многочисленных исследований по проблемам посткритического анализа.

В дальнейшем, под «достаточной регулярностью» гладкой функции будет подразумеваться конечнократность всех особых точек. Описание локально-го строения функций вблизи конечнократных особых точек и описание соот-ветствующих морсовизаций включаются в более общую теорию *деформаций особенностей*. Под гладкой деформацией особенности подразумевается вклю-чение функции V в гладкое λ -параметрическое семейство гладких функций $U(x, \lambda)$, $U(x, 0) = V(x)$, определенных на некоторой окрестности нуля в \mathbb{R}^n , $\lambda \in \Lambda$, Λ — некоторая окрестность нуля в \mathbb{R}^l . Среди всевозможных гладких деформаций выделяются так называемые *версальные* и *миниверсальные* дефор-мации, играющие важную роль в общей теории. Это связано с тем, что версаль-ные деформации содержат в себе все метаморфозы (перестройки поверхностей уровня, распадения особых точек, различные бифуркационные эффекты и т.д.), которые могут произойти при произвольном гладком деформировании функ-ции. Ниже приведены основные сведения по теории конечнократных особых точек гладких функций и их параметрических возмущений (деформаций).

1.3.1 Декомпозиция особенности

Для дальнейшего объяснения приведем следующее основное утверждение теории гладких отображений конечномерных пространств:

Утверждение 1.2 (Теорема о неявной функции) *Пусть левая часть уравнения*

$$f(\xi, \lambda) = 0 \quad (1.3.6)$$

задана таким гладким (здесь и далее это слово означает бесконечную дифференцируемость) отображением $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu \rightarrow \mathbb{R}^n$, что

$$f(0, 0) = 0$$

и

$$\det \partial f / \partial \xi(0, 0) \neq 0.$$

Тогда найдется такая окрестность $\mathcal{U} = \Xi \times \Lambda$ точки $(0, 0)$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu$, что множество решений в \mathcal{U} уравнения (1.3.6) совпадает с графиком некоторого гладкого (единственного) отображения $\Psi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$, такого, что $\Psi(0) = 0$. Иными словами, для (ξ, λ) , близких к решению $(0, 0)$,

$$f(\xi, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \xi = \Psi(\lambda).$$

Доказательство этого утверждения имеется в [130], [151] и многих учебниках по математическому анализу.

Левую часть уравнения (1.3.6) будем рассматривать как зависящее от параметра λ гладкое семейство отображений $f(\cdot, \lambda) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Если $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $f(a) = 0$, то точка a называется *особой точкой* отображения f ; если $\det \partial f / \partial x(a) \neq 0$, тогда особая точка называется *регулярной*. Теорема о неявной функции выявляет *однократность* регулярной особой точки: при произвольных малых возмущениях отображения $f(\cdot, 0)$ (при достаточно малых λ) вблизи регулярного решения $\xi = 0$ уравнения $f(\xi, 0) = 0$ имеется ровно одно решение возмущенного уравнения $f(\xi, \lambda) = 0$.

Пусть $f(\xi, \lambda) = \nabla V(\xi, \lambda)$, где ∇ означает *градиент*. Под *градиентом* функции $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ понимается отображение $\nabla V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое условием $\langle \nabla V(\xi), h \rangle = V'(\xi)h \quad \forall \xi, h \in \mathbb{R}^n$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение на \mathbb{R}^n . В евклидовом пространстве производная $V'(\xi)$ и градиент $\nabla V(\xi)$ отождествляются канонически, однако в банаевых пространствах эта конструкция не столь тривиальна и сыграет в наших построениях существенную роль. Другое обозначение градиента: *grad* V .

Особая точка отображения ∇V называется также *особой* или *критической* для функции V . Если выполнено

$$\nabla V(a, \lambda) = 0 \quad \text{и} \quad \det \partial^2 V / \partial \xi^2(a, \lambda) \neq 0,$$

тогда критическая точка a функции $V(\cdot, \lambda)$ называется *невырожденной* (или *морсовской*).

Утверждение 1.3 (Лемма Морса) *Если a есть невырожденная критическая точка функции V , тогда вблизи точки a определены гладкие координаты $x_1(\xi), \dots, x_n(\xi)$, такие, что $x_1(a) = \dots = x_n(a) = 0$ и*

$$V(\xi) = \text{const} - x_1^2 - \dots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \dots + x_n^2 \quad (1.3.7)$$

на всей совместной области определения координат x_1, \dots, x_n .

Замечание 1.1 *В формуле (1.3.7) константа равна, очевидно, $V(a)$, а число r — отрицательный индекс инерции квадратичной формы $\partial^2 V / \partial \xi^2(a)$ будет называться индексом Морса критической точки a .*

Замечание 1.2 *Выражение «гладкие координаты» значит, что отображения $\xi \mapsto x$ и $x \mapsto \xi$ определены и гладки на некоторых окрестностях точек a и 0 соответственно, т. е. отображение $\xi \mapsto x$ является диффеоморфизмом (локальным, поскольку он определен лишь на некоторой окрестности, заранее не известной).*

Функции V_1 и V_2 называются *правоэквивалентными* (в дальнейшем просто: *эквивалентными*), если $V_1 \equiv V_2 \circ \varphi$ на некотором подмножестве области определения V_1 , где φ — диффеоморфизм. На языке теории особенностей гладких функций [6], [23], лемма Морса есть утверждение о том, что функция, имеющая невырожденную критическую точку, локально эквивалентна вблизи этой точки некоторой стандартной (нормальной) форме. Список нормальных форм в морсовском случае конечен: индекс Морса может принимать значения от 0 (точка минимума) до n (точка максимума).

Доказательство леммы Морса приведено, например, [146], [160]).

Лемму Морса можно обобщать на случай семейств функций: если задано зависящее от параметра $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ гладкое семейство функций, $V(\cdot, \lambda) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, и функция $V(\cdot, \lambda_0)$ имеет при $\xi = a$ невырожденную критическую точку, то существует гладкое семейство локальных диффеоморфизмов φ_λ , такое, что $\varphi_{\lambda_0}(a) = 0$ и

$$V(\varphi_\lambda^{-1}(x), \lambda) \equiv c(\lambda) - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_n^2. \quad (1.3.8)$$

Отсюда следует структурная *устойчивость* морсовской критической точки. То есть при малом возмущении функции вблизи ее критической точки имеется критическая точка (также невырожденная и того же индекса Морса) возмущенной функции.

Если a — *вырожденная* критическая точка функции V , то сколь угодно мало возмущенная функция вообще говоря может не быть эквивалентной исходной. Поведение функции на окрестности вырожденной критической точки может быть весьма сложным. Изучением таких критических точек занимается *теория особенностей гладких функций*. Особенностью называется класс локальной правой эквивалентности функций в критической точке.

При имеющихся в настоящий момент больших научных достижениях в решении проблемы описания строений функций вблизи вырожденных критических точек, на сегодняшний день эта проблема еще весьма далека от своего окончательного решения [6].

Приведенная ниже теорема позволяет, за счет «избавления» от «несущественных» переменных, свести изучение функции в вырожденной критической точке к исследованию функции, определенной на пространстве, размерность которого равна размерности ядра второго дифференциала.

Утверждение 1.4 (Лемма о расщеплении особенности) *Пусть $a \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ — вырожденная критическая точка функции $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, то есть*

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}(a) = 0, \quad rk \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}(a) = s < n.$$

Тогда существует локальный диффеоморфизм $\varphi : \xi \mapsto (x, u)$, $x \in \mathbb{R}^s$, $u \in \mathbb{R}^{n-s}$, такой, что $\varphi(a) = 0$ и

$$V(\varphi^{-1}(x, u)) = -x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_s^2 + W(u_1, \dots, u_{n-s}), \quad (1.3.9)$$

$$\text{где } \partial^2 W / \partial u^2(0) = 0.$$

Доказательство. Пусть f_1, \dots, f_n — такой базис в пространстве \mathbb{R}^n , что f_{s+1}, \dots, f_n — базис $\text{Ker } \partial^2 V / \partial \xi^2(a)$, $y_1, \dots, y_s, u_1, \dots, u_{n-s}$ — координаты в этом базисе, φ_1 — отображение замены координат: $\xi = \varphi_1(y, u)$. Функция $\tilde{V}(y, u) := V \circ \varphi_1(y, u)$ удовлетворяет условиям параметрической леммы Морса (переменные u выступают в роли параметров); следовательно, гладкая замена переменной вида $(x, u) = (\varphi_2(y, u), u)$ приводит ее к форме

$$\tilde{V}(\varphi_2^{-1}(x, u), u) = -x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_s^2 + W(u_1, \dots, u_{n-s}),$$

(φ_2^{-1} означает обращение по первой переменной при каждом значении u). Таким образом, диффеоморфизм φ в формуле (1.3.9) получается как композиция φ_1 и φ_2 . По построению, $\partial^2 W / \partial u^2(0) = 0$.

Число $\dim \text{Ker } \partial^2 V / \partial \xi^2(a)$, для a — критической точки функции V , называется *размерностью особенности* функции V . Естественно, лучше всего изучены «маломерные» особенности.

1.3.2 Локальный анализ гладких функций

В настоящем разделе приведено важное понятие в теории особенностей гладких функций. Это *кратность* критической точки. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — критическая точка функции V . Тогда функции $\partial V / \partial x_1, \dots, \partial V / \partial x_n$ порождают так называемый *якобиев идеал* $\langle \partial V / \partial x_1, \dots, \partial V / \partial x_n \rangle$ функции V в *кольце* $\mathbb{R}[[x - a]] = \mathbb{R}[[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n]]$ формальных степенных рядов¹ вида

$$\sum_{p_1, \dots, p_n} \beta_{p_1, \dots, p_n} (x_1 - a_1)^{p_1} \dots (x_n - a_n)^{p_n}$$

с вещественными коэффициентами β_{p_1, \dots, p_n} .

Факторкольцо

$$Q = \mathbb{R}[[x - a]] / \langle \partial V / \partial x_1, \dots, \partial V / \partial x_n \rangle$$

называется *локальным кольцом особенности* функции V в точке a (это определение корректно, поскольку заданные таким образом локальные кольца оказываются попарно изоморфными для всех функций из любого класса (попарно) эквивалентных функций [6]).

Число

$$\mu(V, a) = \dim Q(V, a)$$

(имеется в виду размерность $Q(V, a)$ как вещественного линейного пространства) называется *кратностью* особенности (или критической точки a). Локальное кольцо может оказаться и бесконечномерным: такая особенность считается очень сложной и к изучению непригодной. Далее мы будем рассматривать только конечнократные особенности.

Кратность особенности тесно связана с ее *коразмерностью*, которая, как мы впоследствии увидим, не имеет никакого отношения к размерности особенности.

¹ Формальные степенные ряды образуют *коммутативное кольцо с единицей*, т. е. множество с операциями сложения и умножения, свойства которых во всем подобны свойствам аналогичных операций над вещественными числами, за исключением одного: не всякий ненулевой элемент имеет обратный по умножению. *Идеал* J в кольце A — это подкольцо, обладающее «идеальным свойством»: $u \cdot x \in J \quad \forall u \in J, x \in A$.

Гладкие диффеоморфизмы $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ образуют группу (обозначим ее $Diff$), которую можно рассматривать как бесконечномерный аналог группы Ли [155]. Для каждой гладкой функции $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ множество функций, эквивалентных ей, является *орбитой* функции V относительно действия группы $Diff$:

$$Orb(V) = \{V \circ \varphi\}_{\varphi \in Diff}.$$

Известно, что в случае гладкого действия конечномерной группы Ли на гладком конечномерном многообразии все орбиты являются гладкими подмногообразиями [155], поэтому в каждой точке многообразия определено касательное к орбите подпространство. Его коразмерность (определенная как разность между размерностью объемлющего пространства и размерностью касательного подпространства) называется коразмерностью орбиты. Коразмерность равна минимальному количеству «управляющих параметров» для точки в объемлющем пространстве, необходимому для устойчивого (не устранимого малым шевелением) пересечения орбиты «управляемой точкой».

В классической механике коразмерность многообразия состояний механической системы совпадает с количеством независимых связей, наложенных на нее и выделяющих «реальное» многообразие ее состояний. Наложение независимых связей уменьшает размерность многообразия состояний на число, равное количеству связей.

Аналоги подобных понятий и конструкций имеются и в бесконечномерном случае (в функциональных пространствах). К сожалению, мы не имеем здесь возможности более точного описания соответствующей теории.

Заметим лишь, что подмножество $\tilde{O}(V) \subset \mathbb{R}[[x]]$, состоящее из тейлоровских разложений в нуле для функций из $V_\varphi(x) = V(\varphi(x))$, также называется орбитой, и оно обладает многими свойствами обычных (конечномерных) орбит. В частности, для него определено касательное пространство, как множество T_V формальных степенных рядов вида

$$h(x) = \frac{d}{d\varepsilon} v(x + \varepsilon \mathcal{H}(x))|_{\varepsilon=0} = (grad V(z), \mathcal{H}(z))$$

(здесь \mathcal{H} — произвольный степенной ряд с векторными (в \mathbb{R}^n) коэффициентами). Коразмерность T_V , определяемая как минимальная размерность подпространства в $\mathbb{R}[[x]]$, прямо дополняющего T_V до $\mathbb{R}[[x]]$, называется большой коразмерностью особенности V в нуле. Если к совокупности всех преобразований аргумента функции добавить преобразования сдвига значений функции, то орбита расширится на одно измерение, а коразмерность (расширенной) орбиты уменьшится на единицу. Эта величина (коразмерность расширенной орбиты) называется малой коразмерностью особенности или просто коразмерностью особенности V в нуле. Из описанных построений вытекает, что T_V совпадает с якобиевым идеалом в $\mathbb{R}[[x]]$, порожденным функцией V . Отсюда вытекает совпадение кратности с большой коразмерностью или, соответственно, с коразмерностью, увеличенной на единицу.

Вопросы строения конечнократных особенностей функций и их морсовизаций естественно включаются в более общую теорию *деформаций особенностей*. Пусть функция V имеет в нуле конечнократную особенность. Под гладкой деформацией данной особенности подразумевается любое включение функции V в гладкое λ -параметрическое семейство гладких функций $U(x, \lambda)$, $U(x, 0) = V(x)$, определенных на некоторой окрестности нуля в \mathbb{R}^n , $\lambda \in \Lambda$, Λ — некоторая окрестность нуля в \mathbb{R}^l . Среди всевозможных гладких деформаций выделяются так называемые *версальные* и *миниверсальные* деформации, играющие важную роль в общей теории деформаций. Это связано с тем, что версальные деформации содержат в себе все метаморфозы функции (перестройки поверхностей уровня, распадения особых точек, различные бифуркационные эффекты и т.д.), которые могут произойти при произвольном гладком деформировании функции.

Определение 1.13 Гладкая деформация $U(z, \lambda)$ функции $V(x)$ называется *версальной в нулевой точке*, если для любой другой деформации $\tilde{U}(x, \nu)$ функции $V(x)$, $\nu \in \mathbb{R}^k$, найдется такое отображение из $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ вида

$$(x, \nu) \rightarrow (\varphi(x, \nu), \psi(\nu)), \quad \varphi(x) = x, \quad (1.3.10)$$

определенное в некоторой сколь угодно малой окрестности нуля в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, что для всех (x, ν) из этой окрестности выполнено равенство

$$\tilde{U}(x, \nu) = U(\varphi(x, \nu), \psi(\nu)).$$

Версальная деформация с минимальным числом параметров m называется *миниверсальной*. Оказывается, что минимальное число параметров равно кратности μ деформируемой особенности [6]. Более того, гладкая деформация $U(z, \lambda)$ функции $V(x)$ является версальной в нулевой точке тогда и только тогда, когда факторклассы функций $\frac{\partial U}{\partial \lambda_j}(x, 0)$ (λ_j – координата λ , $j = 1, 2, \dots, m$) дают систему линейных образующих в локальном кольце особенности V в нуле (рассматриваемом как линейное пространство) [6], [23].

Систему функций $\left\{ \frac{\partial U}{\partial \lambda_j}(x, 0), j = 1, 2, \dots, \mu \right\}$ иногда называют начальными скоростями деформации.

Гладкая деформация $U(x, \lambda)$ миниверсальна в нулевой точке, если факторклассы ее начальных скоростей деформации образуют базис в локальном кольце особенности V в нуле. В частности, деформация

$$V(x) + \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j \omega_j(x), \quad (1.3.11)$$

где $\{\omega_j(x)\}$ – произвольный базис локального кольца особенности V в нуле, является миниверсальной.

Формула (1.3.11) дает наиболее простой и наиболее распространенный способ построения версальных деформаций. Обычно в качестве базисных функций $\{\omega_j(x)\}$ выбирают мономы (мономиальный базис локального кольца).

Отметим еще одно важное для приложений утверждение [6]: *если $\tilde{U}(x, \nu)$ и $U(x, \lambda)$ – миниверсальные деформации, то отображение (1.3.10) является (локальным) диффеоморфизмом.*

Слово «версальный» является общей частью слов «трансверсальный» и «универсальный» [6], выраждающих формально другие понятия, но имеющих прямое отношение к версальным деформациям. Первое из них означает, что

отображение из $Diff \times \mathbb{R}^\mu$ в $\mathbb{R}[[x]]$, заданное соотвествием

$$(\varphi, \lambda) \longmapsto \hat{V}_\varphi(x) + \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k \omega_k(x), \quad (1.3.12)$$

где $\hat{V}_\varphi(x)$ — ряд Тейлора функции $V_\varphi(x) := V(\varphi(x))$ в нуле, является субмерсией в нуле (образ производной Гато совпадает с $\mathbb{R}[[x]]$). Второе понятие означает, что *любая гладкая деформация $\tilde{U}(x, \nu)$ функции V может быть получена из версальной деформации (1.3.11) посредством замены параметра и замены основного аргумента (зависящей от параметра)* (см. (1.3.10)).

Посредством миниверсальных деформаций вводятся различные *бифуркационные диаграммы*, важнейшими среди которых являются *каустики, дискриминантные множества и множества Максвелла*. Как правило, функция V предварительно приводится (посредством подходящей замены координат) к полиномиальной нормальной форме (нормализация не является обязательной процедурой, но после ее осуществления многие вычисления проводятся проще). В рамках алгебраического формализма теории особенностей накоплен определенный опыт построения полиномов, выраждающих своей алгебраической формой типы (*архетипы*) особенностей гладких функций [6], [161].

Пусть λ принадлежит заданной области $\Lambda \subset \mathbb{R}^\mu$. Через $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим «наблюдаемую» область (в ней и только в ней находятся изучаемые критические точки).

Каустика Σ — это совокупность тех значений λ , при которых $V(\cdot, \lambda)$ имеет в \mathcal{U} вырожденную критическую точку.

Дискриминантное множество \mathcal{D} — совокупность значений λ , при которых $V(\cdot, \lambda)$ имеет в \mathcal{U} критическую точку на нулевой линии уровня.

Множество Максвелла Δ — совокупность значений λ , при которых $V(\cdot, \lambda)$ принимает равные значения на паре различных критических точек.

При изучении критических точек и их локальных морсовизаций можно сократить на единицу количество параметров версальной деформации за счет рассмотрения лишь мономиальных образующих (в локальном кольце особенностей).

ности) положительной степени (моном нулевой степени отбрасывается). Допустимость такой «экономии» связана, во-первых, с тем, что при дифференцировании постоянные слагаемые функции исчезают и поэтому они не играют никакой роли при определении критических точек и вычислении их кратности. Во-вторых, происходящую при таком отбрасывании параметра потерю информации в вопросах, связанных с метаморфозами поверхностей уровней, можно компенсировать расширением группы диффеоморфных преобразований аргумента функций посредством добавления преобразований постоянного сдвига значений функций [23].

Сокращенная на один параметр миниверсальная деформация называется ограниченной миниверсальной деформацией. Число входящих в неё «управляющих» параметров совпадает с коразмерностью особенности.

При исследовании ключевых функций фредгольмовых функционалов важную роль играют условия локальной конечной определенности гладких функций в особых точках. Приведем наиболее часто употребляемое условие, найденное Дж. Мазером (см. [6], [23]).

Предварительно напомним, что гладкая функция V называется *сильно r -определенной в точке a* , если каждая функция U с тем же отрезком ряда Тейлора (порядка r) в точке a , который имеется у V , сильно локально гладко эквивалентна функции V , то есть найдется такое гладкое отображение $\varphi : (\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, a)$ с единичной матрицей Якоби в точке a , что в некоторой окрестности этой точки a выполнено равенство $V(\varphi(x)) = U(x)$.

Согласно Дж. Мазеру, функция V является сильно r -определенной в нуле, если выполняется следующее *условие Мазера*:

$$\mathfrak{M}^{r+1} \subset \mathfrak{M}^2 \cdot J(V). \quad (1.3.13)$$

Здесь \mathfrak{M}^k — k -я степень максимального идеала \mathfrak{M} в $\mathbb{R}[[x]]$, а $J(V)$ — якобиев идеал функции V в нуле. Это условие допускает естественное обобщение

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}^2 \cdot J(W), \quad (1.3.14)$$

где \mathfrak{U} — произвольный конечнодефектный идеал (в кольце ростков гладких функций). При условии (1.3.14) допускается «уничтожение» (диффеоморфной заменой координат) «хвоста» тейлоровского разложения, включенного в \mathfrak{U} .

1.3.3 Некоторые типы особенностей

Строение конечнократных одномерных особенностей полностью описывается следующим утверждением.

Утверждение 1.5 *Функция V имеет в точке a μ -кратную одномерную особенность тогда и только тогда, когда после некоторой локальной диффеоморфной замены координат (в окрестности этой точки) функция приводится к виду*

$$\text{const} - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \pm x_n^{\mu+1}.$$

Известно [6], [161], что:

единственной двукратной особенностью (единственной особенностью коразмерности 1) является особенность функции

$$\text{const} - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^3$$

— *особенность складки*;

единственная особенность кратности 3 (коразмерности 2) — *особенность сбоку*:

$$\text{const} - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \pm x_n^4;$$

особенности кратности 4 (коразмерности 3) встречаются трех типов — *ласточкин хвост*

$$\text{const} - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^5,$$

гиперболическая омбилика (этую особенность часто записывают в двух эквивалентных формах)

$$\text{const} - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + x_{n-1}^3 + x_n^3$$

или

$$const - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + x_{n-1}^3 + x_{n-1}x_n^2$$

и эллиптическая омбилика

$$const - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + x_{n-1}^3 - x_{n-1}x_n^2.$$

Появление особенностей более высокой кратности может быть связано не только с наличием большого числа параметров, но и с возникновением и нарушением симметрии функции при изменении параметров.

Одномерные особенности $x_n^{\mu+1}$ при $\mu \geq 5$ называются иногда высшими ласточкиными хвостами [6].

При $n = 2$ графики и линии уровней функций в окрестностях особых точек типа складки и сборки и их локальных морсовизаций показаны на рисунках 1.1, 1.2.

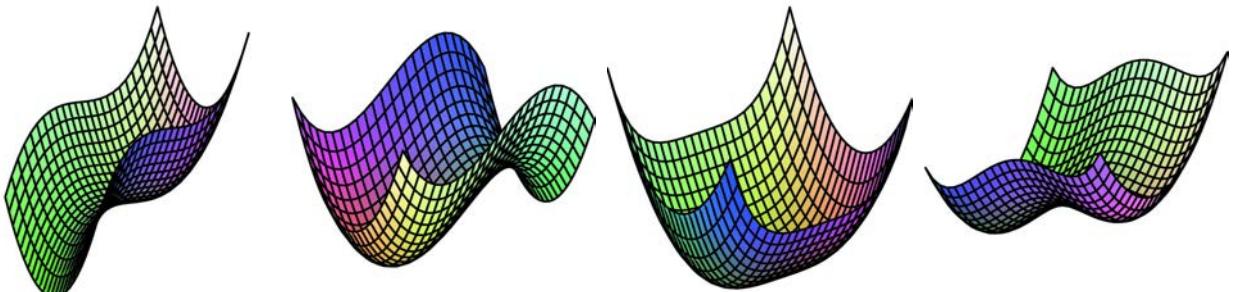


Рисунок 1.1

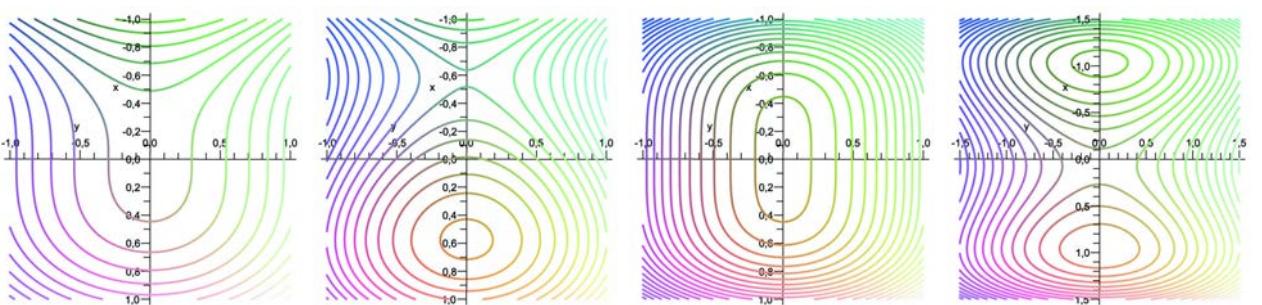


Рисунок 1.2

Миниверсальными деформациями для рассмотренных нами особенностей являются, соответственно, следующие семейства:

$$\begin{aligned} V_1(x) &+ x_n^3 + \lambda_1 x + \lambda_0, \\ V_1(x) &+ x_n^4 + \lambda_2 x_n^2 + \lambda_1 x_n + \lambda_0, \\ V_1(x) &+ x_n^5 + \lambda_3 x_n^3 + \lambda_2 x_n^2 + \lambda_1 x_n + \lambda_0, \\ V_2(x) &+ x_{n-1}^3 \pm x_{n-1} x_n^2 + \lambda_3 x_n^2 + \lambda_2 x_{n-1} + \lambda_1 x_n + \lambda_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \text{const} - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_{n-1}^2, \\ V_2(x) &= \text{const} - x_1^2 - \cdots - x_r^2 + x_{r+1}^2 + \cdots + x_{n-2}^2. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Если убрать в каждой формуле константу λ_0 , то получим *ограниченные миниверсальные деформации*.

Названия некоторых особенностей (ласточкин хвост, вигвам, бабочка, кошечек и т.п.) связаны с геометрической структурой каустик и дискриминантных множеств, которые могут служить идентификаторами особенностей [6], [23], [161] (при их классификации).

При изучении прогибов упругих систем появляются ключевые функции следующего вида (после нормализации):

$$x^4 + 2a x^2 y^2 + y^4 + q_1 x^2 y + q_2 x y^2 + \delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + 2\delta_3 x y + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y,$$

q_i , δ_j , ε_k — малые вещественные параметры, $a > -1$. Далее особенность $x^4 + 2a x^2 y^2 + y^4$ будем называть *двумерной сборкой*.

Ниже на рисунках 1.3 – 1.4 приведены некоторые из графиков и линий уровней возмущенной двумерной сборки.

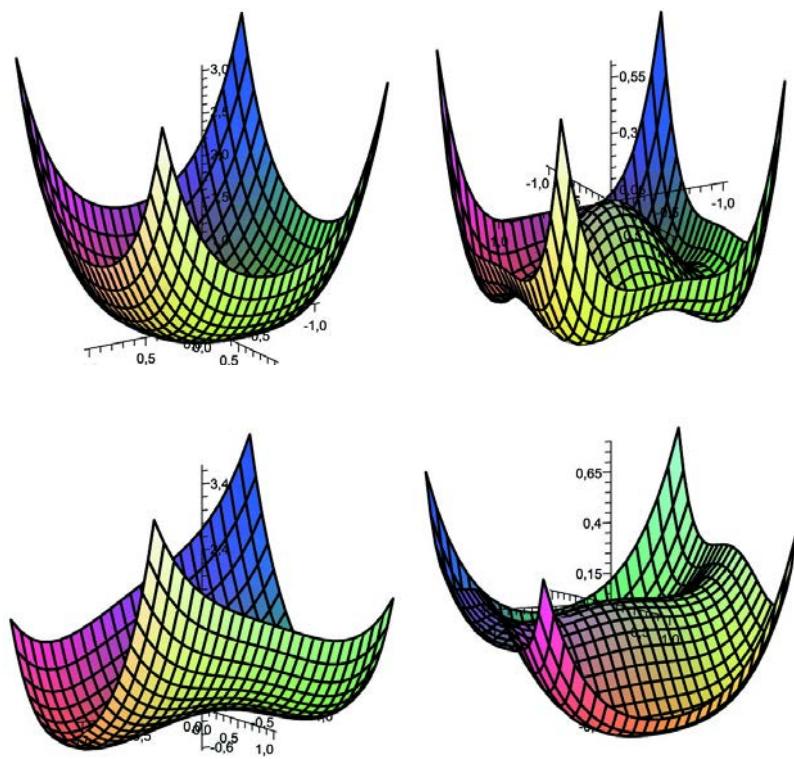


Рисунок 1.3

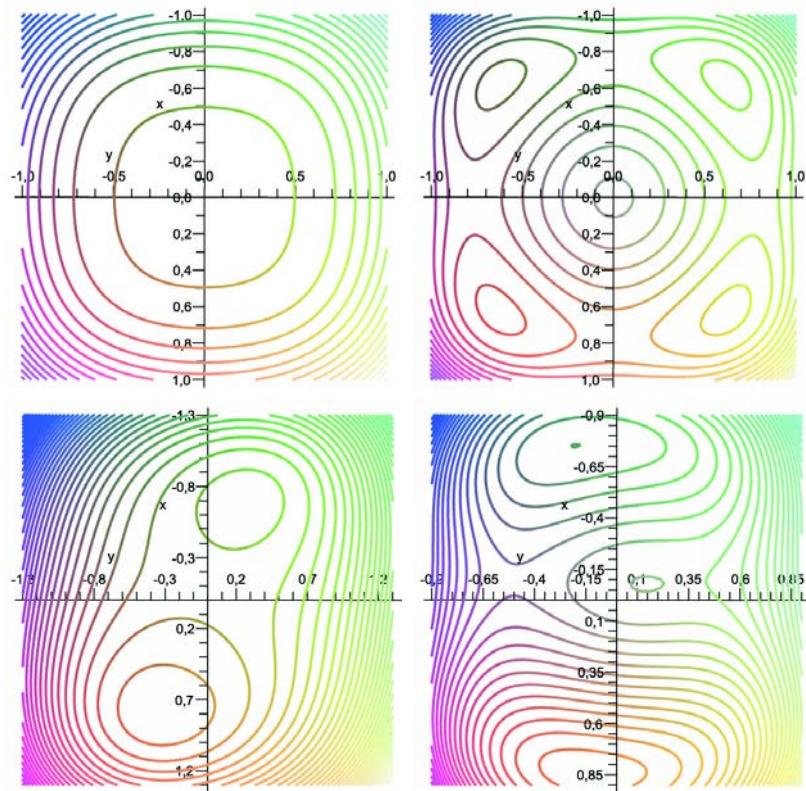


Рисунок 1.4

Более подробные сведения о двумерных вырождениях будут приведены в следующем разделе.

1.4 О ветвлении экстремалей вблизи особой точки

1.4.1 Особенности типа многомерной сборки

Говорят, что гладкая функция W на гладком конечномерном многообразии M имеет в критической точке $a \in M$ *особенность m -мерной сборки* [168], [172], если в некоторой локальной системе координат с центром в точке a функция W допускает представление в виде

$$\sum_{i,j,k,l} \alpha_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + o(\|x\|^4) + \sum_r \sigma_r y_r^2, \quad (1.4.16)$$

$$x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = (y_1, \dots, y_{n-m}), \quad |\sigma_r| = 1,$$

с условием, что начало координат в \mathbb{C}^m является изолированной стационарной точкой для комплексного продолжения квадратичной части $W^{(4)}$ этой функции. На квадратичную часть обычно накладывается условие «выживаемости» (условие Ландау – Хиггса), состоящее в требовании строгой минимальности нулевого значения полинома $W^{(4)}$. Если $M = \mathbb{R}^n$, $a = 0$, и функция W четная, то полином $W^{(4)}$ является дифференциалом Портеуса функции W (при критических значениях параметров):

$$W^{(4)}(\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-4} W(t \sum_{j=1}^m \xi_j e_j),$$

e_1, \dots, e_m — базис ядра второго дифференциала W . Особенности такого типа встречаются в задачах описания устойчивых состояний упругих материалов [32] и стабильных фаз сегнетоэлектрических кристаллов [65].

Далее будем предполагать, что $M = \mathbb{R}^n$ и $a = 0$.

Если квадратичная форма $W^{(4)}$ находится в общем положении, то число бифурсирующих из нуля стационарных точек функции W нечетно и не превосходит 3^m (этому числу равна кратность нулевой стационарной точки квадратичной

формы общего положения). Из положительной определенности $W^{(4)}$ следует, что при возмущениях W близи нуля появляется не более одной точки локального максимума [41] (см. ниже теорему 1.8).

Одной из важнейшей характеристик морсовской стационарной точки в теории гладких функций на гладких многообразиях является ее топологический индекс I , определяемый как знак гессиана h (произведение знаков всех собственных значений матрицы Гессе H — матрицы из вторых частных производных). Важность понятия топологического индекса в прикладных задачах объясняется наличием соотношения:

$$\sum_j I_j = \deg(\operatorname{grad} W) \quad (1.4.17)$$

(сумма берется по всем бифурцирующим из нуля особым точкам). Символом $\deg(\operatorname{grad} W)$ обозначается степень отображения на окрестности нуля, содержащей все ответвленные от нуля критические точки.

Из теории Морса [160] известно, что каждую гладкую функцию W на конечномерном многообразии M , имеющую лишь морсовые критические точки, можно изобразить клеточным комплексом, каждая клетка которого взаимно однозначно соответствует критической точке функции W . Размерность клетки равна индексу Морса соответствующей критической точки, а примыкания клеток в комплексе соответствуют взаимным примыканиям критических точек (как особых точек динамической системы $\dot{\xi} = -\operatorname{grad} W(\xi)$). Причем гомотопический тип изображающего комплекса совпадает с гомотопическим типом многообразия M . Из этого факта вытекает, в частности, что наборы стационарных точек функций на плоскости и в трехмерном пространстве можно изображать графиками (одномерными оставами клеточных комплексов). Если функция W , заданная на \mathbb{R}^n , коэрцитивна, то изображающий ее комплекс гомотопически тривиален (гомотопен точке). Следовательно, в случае коэрцитивной функции изображающий график связен.

Пусть $m = 3$. Обозначив через l_0 , l_1 и l_2 количества минимумов, седел ин-

декса (Морса) 1 и седел индекса 2, получим, в силу (1.4.17), следующие соотношения:

$$l_0 - l_1 + l_2 = 2, \quad (1.4.18)$$

если существует точка максимума,

$$l_0 - l_1 + l_2 = 1 \quad (1.4.19)$$

— в случае отсутствия точки максимума (см. ниже теорему 1.8).

Изображающий клеточный комплекс состоит из l_0 вершин, l_1 ребер и l_2 двумерных клеток. Он полностью определяется своим одномерным оством (изображающим графом). Вершины графа взаимно однозначно соответствуют точкам минимумов, а ребра — седлам индекса 1. При этом две вершины соединяются ребром, если существует кривая, соединяющая соответствующую им пару точек минимумов, составленная из пары линий кратчайшего спуска (интегральных кривых поля градиентов), связывающих пары «седло — минимум» (малым шевелением функции или метрики можно добиться того, чтобы любая интегральная кривая, вытекающая из седла, втекала в точку локального минимума). За счет изменения метрики в областях вида $\{c_1 < W < c_2\}$, не содержащих критических точек, можно переносить финальные точки сепаратрис из одних локальных минимумов на другие (то есть сепаратрисы будут втекать в другие точки локальных минимумов). За счет таких переключений можно получать разнообразные соединения ребрами вершин в пределах одного расклада стационарных точек. Переключениям сепаратрис соответствуют гомологические преобразования графа.

Определение 1.14 Пусть график $\hat{\Gamma}$ получен из графа Γ через последовательность следующих трех операций: 1) удаление любого ребра, соединяющего пару внутренних (некраевых) вершин A, B , 2) склеивание оставшихся (после удаления ребра) частей графа по вершинам A, B (за точкойстыка сохраним обозначение A) и 3) приклеивание к точкестыка A нового «висячего» ребра (вторая вершина приклеенного ребра — краевая точка).

Тогда будем говорить, что граф $\hat{\Gamma}$ получен из графа Γ прямым гомологическим преобразованием, а граф $\tilde{\Gamma}$ получен из $\hat{\Gamma}$ обратным гомологическим преобразованием.

Определение 1.15 Если граф $\tilde{\Gamma}$ получен из графа Γ через конечную последовательность прямых и обратных гомологических преобразований, то графы Γ и $\tilde{\Gamma}$ называются гомологичными.

Очевидно, что гомологические преобразования сохраняют количества вершин и ребер графа.

1.4.2 Деформации особенности типа сборки

Помимо соотношений (1.4.18), (1.4.19), при описании раскладов стационарных точек бывают весьма полезными редукции к функции меньшего количества переменных (в случаях, например, четности по одной из переменных) или к функциям на сфере.

Ограничимся рассмотрением 3-мерных сборок.

Редукция на сферу представляет собой введение сферических координат $\xi = r \cdot s$, $r \geq 0$, $\|s\| = 1$ и представление W в форме

$$W_s(r) = \gamma_0(s)r^4 + \gamma_1(s)r^3 + \gamma_2(s)r^2 + \gamma_3(s)r + \text{const}, \quad (1.4.20)$$

в которой $\gamma_0(s) > 0 \ \forall s$. Такая функция имеет не более одной точки локального максимума по радиальной переменной и, следовательно, по всему пространству (так как любая точка локального максимума обязана быть точкой локального максимума и по радиальной переменной). Представлением (1.4.20) особенно удобно пользоваться в случае четности W .

Если W четно зависит от третьей переменной, то

$$W = \xi_3^4 + W_2(\xi_1, \xi_2)\xi_3^2 + W_0(\xi_1, \xi_2).$$

Пусть второй коэффициент последнего разложения положителен:

$$\inf W_2 > 0. \quad (1.4.21)$$

Тогда исследование критических точек W сводится к исследованию критических точек функции

$$W_0(\xi_1, \xi_2) = \inf_{\xi_3} W(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (1.4.22)$$

После локальной нормализующей замены переменных (см. в [6] нормальную форму особенности X_9) получим функцию W_0 в виде

$$\xi_1^4 + \xi_2^4 + a\xi_1^2\xi_2^2 + \sum_{i,j \leq 2} \lambda_{ij}\xi_1^i\xi_2^j, \quad a > -2, \quad a \neq 2$$

(нормальная форма возмущенной двумерной сборки).

Гладкое параметрическое возмущение R_δ , $R_0 = 0$, гладкой функции W будем называть регулярным, если возмущенная функция $W + R_\delta$ имеет в наблюдаемой области изменения переменных лишь морсовские критические точки.

Теорема 1.1 *При регулярных возмущениях гладкой функции вблизи точки минимума с особенностью двумерной сборки появляются те и только те bif-расклады критических точек, которые приведены в следующем списке:*

$$\{2, 1, 0\}, \{3, 2, 0\}, \{4, 3, 0\}, \{5, 4, 0\}, \{1, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}, \{3, 3, 1\}, \{4, 4, 1\}.$$

Этим раскладам соответствуют следующие изображающие на рисунке 1.5 графы, собранные в классы гомологичных (стрелками указаны переходы, соответствующие гомологическим преобразованиям):

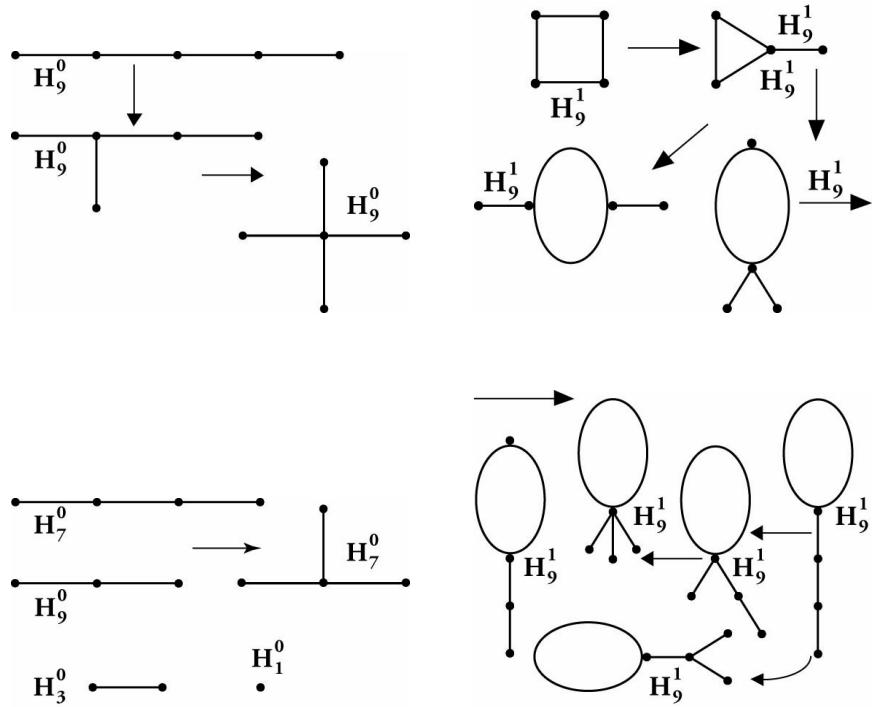


Рисунок 1.5

В этих раскладах заметно влияние примыкающей к двумерной сборке одномерной *min*-особенности A_7 [6], которую можно получить в нуле с парой ненулевых морсовских стационарных точек на оси $0\xi_2$ или без неё, рассмотрев следующую деформацию двумерной сборки:

$$(\xi_1^2 + \varepsilon\xi_2)^2 + \xi_2^4 + a(\xi_1^2 + \varepsilon\xi_2)\xi_2^2 = \xi_1^4 + \xi_2^4 + a\xi_1^2\xi_2^2 + 2\varepsilon\xi_1^2\xi_2 + a\varepsilon\xi_2^3 + \varepsilon^2\xi_2^2. \quad (1.4.23)$$

Наличие или отсутствие пары дополнительных стационарных точек зависит от выбора значения параметра a . При одних значениях получается пара «седло – минимум», а при других — «седло – максимум». Посредством деформации (1.4.23) легко установить существование всех указанных в теореме раскладов. Отсутствие других раскладов вытекает из того, что сумма $l_0 + l_1 + l_2$ нечетна и ограничена числом 9, а также из того, что выполняется соотношение $l_0 - l_1 + l_2 = 1$. Эти соотношения вытекают из равенства кратности особенности двумерной сборки девяти и равенства единице топологического индекса нуля градиента функции $x^4 + y^4 + ax^2y^2$ при $a > -2$.

Замечание 1.3 В случае четных возмущений двумерных сборок появляются лишь следующие расклады: $\{2, 1, 0\}$, $\{4, 3, 0\}$, $\{2, 2, 1\}$, $\{4, 4, 1\}$.

Все рассмотренные случаи удобно иллюстрировать сепаратрисными линиями уровня при условии, что управляющие параметры принадлежат минимальному страту множества Максвелла (все седла на одном уровне) [6], [34] (рисунок 1.6). Отметим, что вторичная, третичная и последующие бифуркции связаны со следующей диаграммой перестроек раскладов стационарных точек:

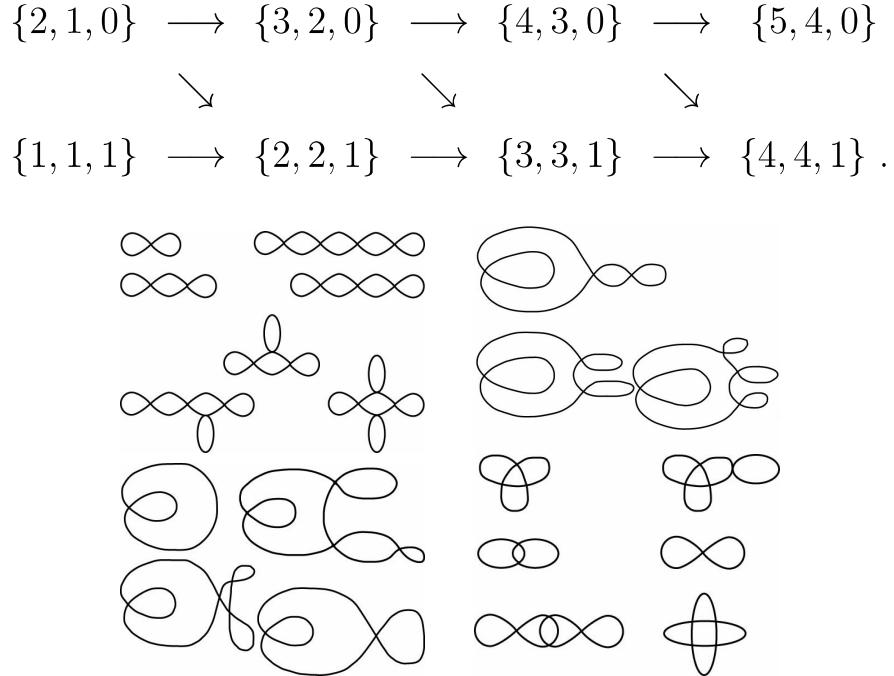


Рисунок 1.6

Если условие (1.4.21) не выполнено, то пространство переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 разбивается на две области $O_1 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : W_2(\xi_1, \xi_2) > 0\}$ и $O_2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : W_2(\xi_1, \xi_2) < 0\}$. В первой из них исследование W сводится к исследованию функции W_0 (см. 1.4.22), а во второй — к исследованию следующей пары функций:

$$U_1(\xi_1, \xi_2) := \sup_{\xi_3} W(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = W_0(\xi_1, \xi_2), \quad (1.4.24)$$

$$U_2(\xi_1, \xi_2) := \inf_{\xi_3} W(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = W_0(\xi_1, \xi_2) - \frac{1}{2} W_2(\xi_1, \xi_2)^2. \quad (1.4.25)$$

Редукция к U_2 сохраняет индексы Морса критических точек, а редукция к U_1 уменьшает все значения индекса Морса на единицу.

В дополнение к формулам (1.4.18), (1.4.19) запишем следующие разложения для общего количества l критических точек:

$$l_0 + l_1 + l_2 + 1 = l \quad (1.4.26)$$

— при наличии локального максимума,

$$l_0 + l_1 + l_2 = l \quad (1.4.27)$$

— при отсутствии локального максимума.

В первом случае изображающий клеточный комплекс содержит трехмерную клетку (соответствующую точке максимума).

Из формул (1.4.18),(1.4.19),(1.4.26) и (1.4.27) следует, что число ребер комплекса (число седловых точек индекса единица) однозначно определяется полным количеством всех стационарных точек: $l_1 = \frac{l-3}{2}$ или $l_1 = \frac{l-1}{2}$.

Всевозможным раскладам бифурцирующих критических точек, полученным возмущениями 3-мерных сборок, соответствует несколько сотен изображающих комплексов. Если ограничиться рассмотрением сборок и их возмущений с симметрией параллелепипеда (то есть четных по каждой переменной), то получится не более пятидесяти изображающих комплексов [36]. Полного списка изображающих комплексов для 3-мерных сборок в настоящее время нет. Однако, созданные в последнее время новые геометрические подходы к исследованию *bif*-раскладов (см. [41]–[47], [175], [176]) вполне обнадеживают и создают впечатление реальности создания эффективных алгоритмов перечисления всех *bif*-раскладов.

При построении конкретных реализаций допустимых *bif*-раскладов весьма полезную роль выполняют так называемые квазинвариантные подмногообразия, которые во многих случаях можно задавать как образы нелокально определенных маргинальных отображений.

Дадим точное определение [175]. Пусть W — гладкая функция на гладком многообразии (без края) N . Гладкое подмногообразие K (без края) в N называется квазинвариантным для W , если существует такая гладкая ретракция

$p : O(K) \rightarrow K$, где $O(K)$ — окрестность K в N , что каждая точка $a \in K$ является морсовской критической точкой для сужения $W|_{p^{-1}(a)}$.

Если K — квазиинвариантное подмногообразие в N , то, очевидно, найдется такая окрестность $O(K)$ подмногообразия K в N , что четверка $(\tilde{O}(K), K, \mathbb{R}^q, p)$ является гладким локально тривиальным расслоением с базой K , стандартным слоем \mathbb{R}^q и проекцией $p : O(K) \rightarrow K$, $q = \dim N - \dim K$.

Таким образом, подмногообразие K является квазиинвариантным, если некоторая его окрестность в N гладко расслаивается над K и каждая точка $a \in K$ является морсовской критической точкой для сужения $W|_{p^{-1}(a)}$, где p — проекция расслоения.

Для всех точек связного морсовского квазиинвариантного подмногообразия K индекс Морса $W|_{p^{-1}(a)}$ будет постоянным (в силу локальной устойчивости индекса Морса), и это постоянное значение называется *индексом Морса* квазиинвариантного подмногообразия K .

В [175] получено следующее утверждение о критических точках возмущенной G -инвариантной функции (G — компактная группа Ли): *если L — морсовская критическая орбита функции W_λ при $\lambda = 0$, то при достаточно малых λ вблизи L существует квазиинвариантное подмногообразие L_λ функции W_λ , диффеоморфное L .*

Пусть $\tilde{W}_\lambda = W_\lambda|_{L_\lambda}$ и $\varphi_\lambda : L \rightarrow L_\lambda$ — диффеоморфизм. Тогда $\hat{W}_\lambda(\xi) = \tilde{W}_\lambda(\varphi_\lambda(\xi))$ — ключевая функция ($\xi \in L$). Если $\xi_0 \in L$ — критическая точка \hat{W}_λ , то $\varphi_\lambda(\xi_0) \in L_\lambda$ — критическая точка W_λ , поэтому поиск экстремалей W_ε вблизи L сводится к исследованию $\hat{W}_\lambda(\xi)$.

Для функции $\hat{W}_\lambda(\xi)$ имеет место следующее представление:

$$\hat{W}_\lambda(\xi) = \hat{W}_0 + \sum_{i=1}^q \lambda_i \tilde{W}_i(\xi) + o(|\lambda|),$$

где $\hat{W}_0 = W_0|_L = \text{const}$, $\tilde{W}_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}(\cdot, 0)|_L$, $\xi \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}^q$.

Справедливо также следующее утверждение [175]: *если $a_0 \in L$ — морсовская критическая точка индекса l функции $\tilde{W}(\xi, \sigma^0) = \sum_{i=1}^q \sigma^0_i \tilde{W}_i(\xi)$, $\sigma^0 \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$,*

$\xi \in L$, то при всех достаточно малых $\delta \in \mathbb{R}$ функция $W_{\delta\sigma^0}$ имеет морсовскую критическую индекса l точку $a(\delta) = a_0 + O(\delta) \in L_{\delta\sigma^0}$.

Большинство из ранее перечисленных раскладов можно трактовать как результат ответвления от критических орбит после разрушения непрерывных симметрий. Соответствующая ключевая функция наследует эту симметрию. Во многих случаях ее анализ сводится к анализу функции W двух ключевых параметров, представимой в виде $W_*(\xi) + \lambda_3 \xi_2^3$ где $W_*(\xi) = W^{(4)}(\xi) + \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2$, $W^{(4)}(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^4 + 2a\xi_1^2\xi_2^2$, $a^2 \neq 0$. При $a = 1$ полином $W^{(4)}$ приобретает круговую симметрию — инвариантность относительно стандартного действия на плоскости $SO(2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ группы вращений плоскости, а при $a = -1$ полином $W^{(4)}$ приобретает гиперболическую симметрию — инвариантность относительно действия на плоскости группы гиперболических вращений плоскости, задаваемых матрицами $\begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$. Полиному W отвечают *bif*-расклады, изображенные графами показанные на рисунке 1.7

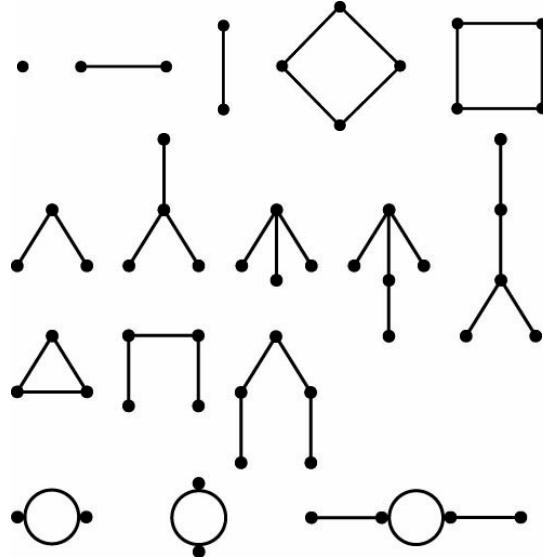


Рисунок 1.7

Расклады, изображенные на всех этих рисунках, легко получить через разрушение критических орбит посредством следующих деформаций:

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \lambda(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \delta_1\xi_1^2 + \delta_2\xi_2^2 + \delta_3\xi_2^3 + \varepsilon\xi_1^2\xi_2^2$$

(разрушение круговой симметрии) и

$$(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2 + \lambda(\xi_1^2 - \xi_2^2) + \delta_1\xi_1^2 + \delta_2\xi_2^2 + \delta_3\xi_2^3 + \varepsilon\xi_1^2\xi_2^2$$

(разрушение гиперболической симметрии).

Аналогичные деформации непрерывно симметричных трехмерных квадратичных полиномов дают обширный набор изображающих клеточных комплексов. Например, деформация

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^2 + \lambda(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + \varepsilon(\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3^2 + \xi_2^2\xi_3^2)$$

дает максимальные *bif*-расклады с графами, изображенными на рисунке 1.8

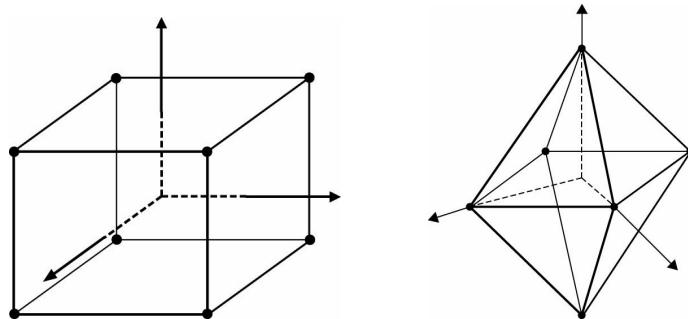


Рисунок 1.8

а деформация

$$(\xi_1^2 \pm \xi_2^2)^2 + \xi_3^4 + \lambda_1(\xi_1^2 \pm \xi_2^2) + \delta_1\xi_1^2 + \delta_2\xi_2^2 + \delta_3\xi_3^3 + \\ + \lambda_2(\xi_1^2 \pm \xi_2^2)\xi_3^2 + \varepsilon_1\xi_1^2\xi_2^2 + \varepsilon_2\xi_1^2\xi_3^2 + \varepsilon_3\xi_2^2\xi_3^2$$

приводит к паре комплексов, изображенными на рисунке 1.9,

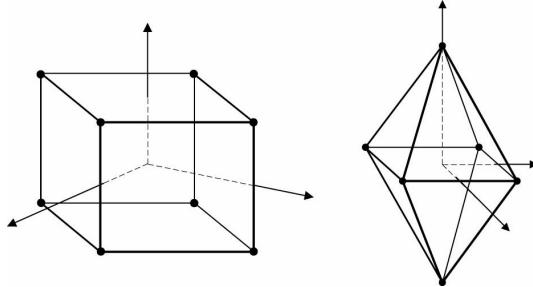


Рисунок 1.9

отличающихся от предыдущих лишь расположением вершин (точек минимума) относительно координатных осей и плоскостей (что важно для определения тех мод бифуркаций, которые «формируют» изучаемую экстремаль), а также следующую тройку графов на рисунке 1.10.

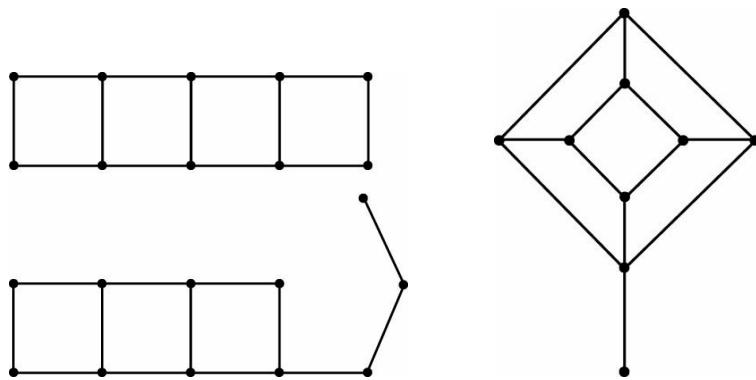


Рисунок 1.10

1.4.3 Общие утверждения о бифуркации экстремалей из точки минимума с особенностью сборки

Прикладной интерес представляют вопросы, связанные с раскладами бифурцирующих морсовских критических точек при возмущениях квадратичной формы кубическими и квадратичными мономами.

Пусть гладкая функция W на \mathbb{R}^n принимает локально минимальное значение в точке a и имеет в этой точке особенность m -мерной сборки, то есть в некоторой локальной системе координат с центром в точке a функция W представима в виде (1.4.16).

Можно предположить без ограничения общности рассуждения, что $m = n$.

Пусть $x = rs$, $s \in S^{m-1}$ (единичной сфере), $r \in \mathbb{R}_+$. Тогда получаем

$$W^{(4)}(x) = f_s(r) = \gamma_0 r^4 + \gamma_1 r^3 + \gamma_2 r^2, \quad (1.4.28)$$

$$\gamma_0 = W^{(4)}(s), \quad \gamma_1 = W^{(3)}(s), \quad \gamma_2 = W^{(2)}(s).$$

Ненулевые точки, стационарные по радиальной переменной для функции (1.4.28), задаются квадратичным уравнением

$$r^2 + \frac{3\gamma_1}{4\gamma_0}r + \frac{\gamma_2}{2\gamma_0} = 0$$

и, следовательно, представляются в виде

$$-\frac{3\gamma_1}{8\gamma_0} \pm \sqrt{\left(\frac{3\gamma_1}{8\gamma_0}\right)^2 - \frac{\gamma_2}{2\gamma_0}}.$$

Таким образом, при $\gamma_2 < 0$ имеется единственная ненулевая точка, стационарная по радиальной переменной, а при

$$0 < \frac{\gamma_2}{2\gamma_0} < \left(\frac{3\gamma_1}{8\gamma_0}\right)^2, \quad \gamma_1 < 0$$

существует пара ненулевых точек, стационарных по r .

При

$$\frac{\gamma_2}{2\gamma_0} > \left(\frac{3\gamma_1}{8\gamma_0}\right)^2$$

и при

$$0 < \frac{\gamma_2}{2\gamma_0} < \left(\frac{3\gamma_1}{8\gamma_0}\right)^2, \quad \gamma_1 > 0$$

ненулевые точки, стационарные по r , отсутствуют.

Из полученных соотношений вытекает, в частности, что возмущения положительной квадратичной формы $W^{(4)}(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$), кубическими и квадратичными

полиномами приводят к рождению не более одной точки локального максимума.

Если квадратичная часть возмущения отрицательно определена (начало координат — точка локального максимума), то найдется гладкое подмногообразие M , диффеоморфное $(n - 1)$ -мерной сфере, на котором находятся все ненулевые критические точки возмущенной квадратичной формы. Причем эти точки и только они являются экстремалями сужения возмущенной квадратичной формы на M . Значения индекса Морса во всех критических точках после сужения сохраняются. Подмногообразие M является образом маргинального отображения φ при редукции на сферу:

$$\tilde{W}(s) := \inf_r \tilde{W}(r \cdot s), \quad s \in S^{n-1}, \quad (1.4.29)$$

т.е. является квазиинвариантным.

В случае отсутствия кубической части (четного возмущения) подмногообразие M центрально симметрично, а отображение φ эквивариантно относительно антиподального преобразования (преобразования центральной симметрии). Следовательно, ключевая функция (1.4.29) четна (инвариантна относительно антиподального преобразования). Если l — количество критических точек на сфере для функции (1.4.29), полученной возмущением положительной квадратичной формы отрицательной квадратичной формой, и если все критические точки являются при этом морсовскими, то

$$l = 3^n - 1 \quad (\text{mod } 4). \quad (1.4.30)$$

Доказательство этой формулы проводится с использованием схемы, описанной выше.

Критические точки функции (1.4.29) отождествляются с ненулевыми критическими точками в \mathbb{R}^n для функции $W^{(4)}(x) - (Ax, x)$, где A — положительная симметричная матрица, $W^{(4)}(x)$ — положительная квадратичная форма. Заметим сначала, что для каждой комплексной критической точки a функции $W^{(4)}(x) - (Ax, x)$ (с любой матрицей A) комплексно сопряженная точка

\bar{a} также стационарна, а точка ia (i — мнимая единица) является критической для функции $W^{(4)}(x) + (Ax, x)$. Рассмотрим в комплексном пространстве \mathbb{C}^n подмножество K , состоящее из ненулевых критических точек (комплексных и вещественных) функции $W^{(4)}(z) - (Az, z)$ (все экстремали предполагаются невырожденными). В него входит $(3^n - 1)$ точек [6], оно инвариантно относительно антиподального преобразования и преобразования комплексного сопряжения. Легко увидеть, что в случае положительной матрицы A множество K не содержит мнимых точек (полученных умножением вещественных векторов на мнимую единицу). В случае же произвольной невырожденной симметричной матрицы A множество K содержит мнимые точки, полученные умножением на i вещественных стационарных точек функции $W^{(4)}(x) + (Ax, x)$. Если точка $a \in K$ не является вещественной или мнимой, то вместе с ней в K входят точки $-a$, \bar{a} , $-\bar{a}$. Следовательно, количество точек K , не являющихся вещественными или мнимыми, кратно четырем. Отсюда вытекает (1.4.30).

Фактически доказано более общее утверждение [41]:

Утверждение 1.6 *Если l и l^* — количества критических точек положительной квадратичной формы $W^{(4)}(x)$ на вещественных невырожденных поверхностях второго порядка $(Ax, x) = 1$ и $(Ax, x) = -1$ в \mathbb{R}^n и если все они являются морсовскими, то*

$$l + l^* = 3^n - 1 \quad (\text{mod } 4). \quad (1.4.31)$$

В случае положительной матрицы A имеем $l^* = 0$ и формула (1.4.31) в этом случае превращается в формулу (1.4.30).

В многомерном случае также можно рассматривать *bif*-расклады $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$, отвечающие малым возмущениям, вызывающим распадение особых экстремалей на $l = \sum l_j$ морсовских стационарных точек, l_j — количество стационарных точек с индексом Морса, равным j .

Утверждение 1.7 *Пусть форма $W^{(4)}$ на \mathbb{R}^n положительна: $W^{(4)}(x) > 0 \forall x \neq 0$, и пусть $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ — *bif*-расклад, реализованный*

возмущением $W^{(4)}$ некоторыми кубическими и квадратичными формами. Тогда этот же набор $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ реализуется как *bif*-расклад особенностей любой функции W , квартичная часть тейлоровского разложения в нуле которой равна $W^{(4)}$.

Доказательство. Если заданный расклад бифурцирующих точек для $W^{(4)}$ реализован возмущением $W^{(4)} + W^{(3)} + W^{(2)}$, то при достаточно малом ε функция $W + \varepsilon W^{(3)} + \varepsilon^2 W^{(2)}$ реализует тот же расклад. Для доказательства данного утверждения достаточно рассмотреть функцию

$$\begin{aligned} U(x, \varepsilon) &:= \varepsilon^{-4}(W(\varepsilon y) + \varepsilon W^{(3)}(\varepsilon y) + \varepsilon^2 W^{(2)}(\varepsilon y)) = \\ &= W^{(4)}(y) + W^{(3)}(y) + W^{(2)}(y) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Функция $U(y, 0)$ совпадает с рассмотренной ранее возмущенной квартичной формой и, следовательно, имеет l стационарных точек заданного расклада. Поскольку все стационарные точки являются морсовскими, то их количество и распределение по (морсовским) типам сохранится при малых ε . После перехода к старым переменным $x = \varepsilon y$ эти точки перейдут, с сохранением индексов Морса, в стационарные точки функции $W + \varepsilon W^{(3)} + \varepsilon^2 W^{(2)}$.

Утверждение 1.8 Для любого *bif*-расклада $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ в точке минимума с особенностью сборки выполняется соотношение $l_n \leq 1$ (то есть при распадении *tip*-особенности сборки появляется не более одной точки локального максимума).

Доказательство. Предположим, что имеется расклад, для которого $l_n \geq 2$. Из теории нормальных форм ростков гладких функций [6] вытекает, что существует гладкая однопараметрическая деформация рассматриваемой функции в виде полинома (в некоторой системе координат), гладко зависящего от параметра,

$$\sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1, \dots, k_n}(\varepsilon) x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}, \quad k_j \leq 2$$

(ε — скалярный параметр), у которого при всех ε в фиксированной окрестности нуля существует ровно $l = \sum l_j$ стационарных точек с раскладом $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$, и эти точки стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Без ущерба для общности рассуждения можно предполагать, что начало координат при всех ε является точкой локального максимума. Выразим переменную x в рассмотренном полиноме через радиальную и сферическую переменные (1.4.28): $x = r \cdot s$, $r \geq 0$, $\|s\| = 1$. Получим функцию

$$f_{s,\varepsilon}(r) = \gamma_0(s, \varepsilon)r^4 + \gamma_1(s, \varepsilon)r^3 + \gamma_2(s, \varepsilon)r^2 + O(r^5), \quad (1.4.32)$$

для которой $\gamma_0, \gamma_2 > 0 \forall s, \varepsilon > 0$, и $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ при $\varepsilon = 0$. Такая функция имеет при малых ε только одну точку локального максимума и эта точка находится в начале координат. Так как точка локального максимума обязана быть точкой локального максимума и по радиальной переменной, то получаем противоречие с предположением о существовании второй точки локального максимума.

1.4.4 Анализ ключевой функции в случае особенности типа двумерной сборки

Уже в случае $n = 2$ описанный выше метод построения главной части ключевой функции дает принципиально новое развитие схемы, изложенной в [41], и значительно расширяет класс задач, которые можно решать таким методом. Коротко остановимся на примере дифференциального уравнения, описывающего движение слабо неоднородной упругой балки на упругом основании (более подробно эта задача будет описана в четвертой главе). Решение аналогичной задачи в случае однородной балки ранее было дано Б.М. Даринским и Ю.И. Сапроновым. Переход к случаю неоднородной балки потребовал перестройки в исследовательской схеме Даринского – Сапронова, в основе которой лежало условие постоянства пары собственных функций e_1, e_2 второго дифференциала (в нуле) функционала энергии. В случае неоднородной балки это условие нарушается и, более того, оно не допускает прямого обобщения, например, в виде

условия существования непрерывного семейства собственных функций. Условие постоянных собственных функций можно заменить условием существования пары гладких векторных полей \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 , линейная оболочка которых инвариантна относительно второго дифференциала в нуле. Этой пары достаточно для построения главной части ключевой функции и, как следствие, для проведения анализа ветвления равновесных конфигураций балки (в ситуации особой точки типа 2-мерной сборки) [96], [97].

В случае двумерного вырождения с однородной особенностью типа 2-мерной сборки, нормальная форма ключевой функции в классе функций на координатной плоскости, четных по каждой переменной, имеет следующий вид:

$$W_0 = x^4 + 2a x^2 y^2 + y^4 + \delta_1 x^2 + \delta_2 y^2.$$

В случае понижения симметрии до симметрии «обычной» четности нормальная форма ключевой функции имеет следующий вид:

$$W = x^4 + 2a x^2 y^2 + y^4 + \delta_1 x^2 + \delta_2 y^2 + 2\delta_3 x y,$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — малые вещественные параметры, $a > -1$.

Полный бифуркационный анализ этого семейства означает решение следующих (основных) вопросов:

- 1) описание (при каждом a) геометрического строения каустики Σ , представляющей собой поверхность в \mathbb{R}^3 , состоящей из таких точек $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, для которых существуют вырожденные экстремали функции W ;
- 2) описание всевозможных раскладов бифурцирующих экстремалей (*bif*-раскладов), отвечающих ячейкам регулярности (компонентам связности множества $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$);
- 3) описание примыканий *bif*-раскладов (переходов от расклада к раскладу при пересечении параметром каутической поверхности);
- 4) описание строения линий уровня функции W .

Для проведения такого анализа необходимо привести исходную функцию к

более удобному для исследования виду. Один из способов исследования основан на вторичной редукции.

В полярной системе координат $x = r \cos(\psi)$, $y = r \sin(\psi)$ получаем функцию

$$\begin{aligned} U(r, \psi) &= W(r \cos(\psi), r \sin(\psi)) = \\ &= (r^2 \cos^2(\psi) + r^2 \sin^2(\psi))^2 + 2(a - 1)r^4 \cos^2(\psi) \sin^2(\psi) + \\ &\quad + \delta_1 r^2 \cos^2(\psi) + 2\delta_2 r^2 \cos(\psi) \sin(\psi) + \delta_3 r^2 \sin^2(\psi) = \\ &= \left(1 + b \sin^2(\varphi)\right) \rho^2 + (b_1 \cos(\varphi) + b_2 \sin(\varphi) + b_3) \rho, \end{aligned}$$

где

$$\varphi = 2\psi, \quad b = \frac{(a - 1)}{2}, \quad r^2 = \rho, \quad b_1 = \frac{\delta_1 - \delta_3}{2}, \quad b_2 = \delta_2, \quad b_3 = \frac{\delta_1 + \delta_3}{2}.$$

Редуцируя (вторично) эту функцию по ρ , получим

$$\frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho, \varphi) = 2\rho \alpha(\varphi) + \beta(\varphi) = 0,$$

где

$$\alpha(\varphi) = 1 + b \sin^2(\varphi), \quad \beta(\varphi) = b_1 \cos(\varphi) + b_2 \sin(\varphi) + b_3.$$

Следовательно,

$$\rho = -\frac{\beta}{2\alpha} \tag{1.4.33}$$

и для редуцированной функции получаем представление

$$w(\varphi) = \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{(b_1 \cos(\varphi) + b_2 \sin(\varphi) + b_3)^2}{1 + b \sin^2(\varphi)}. \tag{1.4.34}$$

Из полученных соотношений следует, что справедлива следующая:

Теорема 1.2 *Каустика функции W совпадает с каустикой функции w .*

Второй способ связан непосредственно с системой уравнений, определяющей критические точки. Для этого перепишем уравнение без потери общности с дополнительными коэффициентами, удобными при дальнейшем дифференцировании

$$W = \frac{x^4 + 2ax^2y^2 + y^4}{4} + \frac{\tilde{\delta}_1x^2 + \tilde{\delta}_2y^2 + 2\tilde{\delta}_3xy}{2}.$$

Критические значения функции W являются решением следующей системы

$$\left. \begin{array}{lcl} \frac{\partial W}{\partial x} & = & \tilde{\delta}_1 x + x^3 + 2axy^2 + \tilde{\delta}_3 y = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial y} & = & \tilde{\delta}_2 y + 2ax^2y + y^3 + \tilde{\delta}_3 x = 0, \\ \det H & = & \left| \begin{array}{cc} \tilde{\delta}_1 + 3x^2 + 2ay^2 & 4axy + \tilde{\delta}_3 \\ 4axy + \tilde{\delta}_3 & \tilde{\delta}_2 + 2ax^2 + 3y^2 \end{array} \right| = 0 \end{array} \right\}$$

(здесь H — матрица Гессе).

Замечание 1.4 Как дополнительный бифуркационный эффект можно отметить, что при $\tilde{\delta}_3 \neq 0$ все возможные решения (кроме тривиальных) становятся двухмодовыми (т.е. $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$).

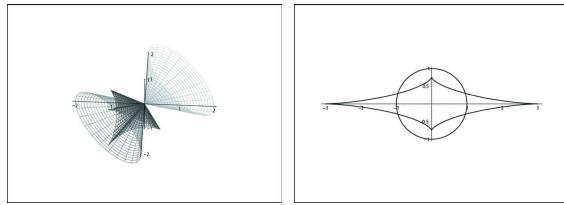
После разрешения данной системы относительно $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3$ и перехода к полярным координатам $x = \rho \sin \varphi, y = \rho \cos \varphi$ получим

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\delta}_1 = -\rho^2 \frac{(a+1+(a-1)\cos^3(2\varphi))}{2+(a-1)\sin^2(2\varphi)}, \\ \tilde{\delta}_2 = -\rho^2 \frac{(a+1-(a-1)\cos^3(2\varphi))}{2+(a-1)\sin^2(2\varphi)}, \\ \tilde{\delta}_3 = -\rho^2 \frac{(a^2-1)\sin^3(2\varphi)}{4+2(a-1)\sin^2(2\varphi)}. \end{array} \right\}$$

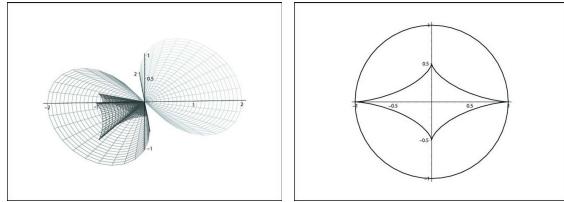
На основе этой системы можно провести бифуркационный анализ исходной функции. На рисунке 1.11 дано описание каустик для $a > -1$.

Замечание 1.5 При $-1 < a < 1$ каустика совпадает, с точностью до поворота на угол $\pi/4$, с каустикой при $1 < a < +\infty$. Поэтому достаточно рассмотреть строение ключевой функции для a на одном из этих интервалов.

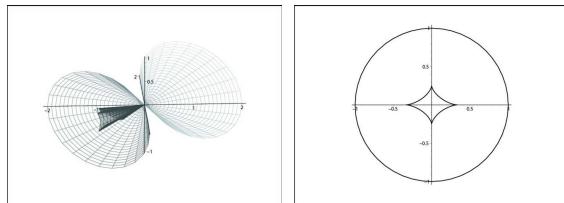
1) $-1 < a < 0$



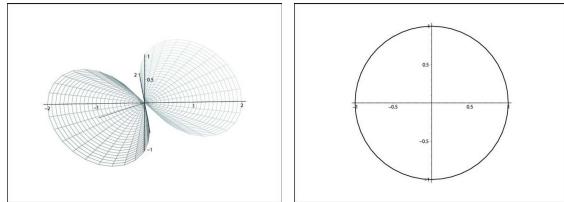
2) $a = 0$



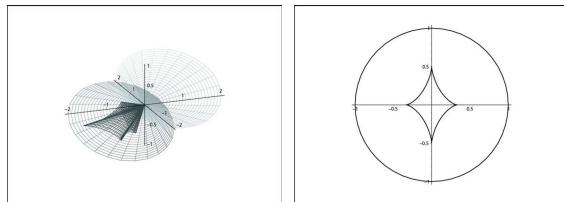
3) $0 < a < 1$



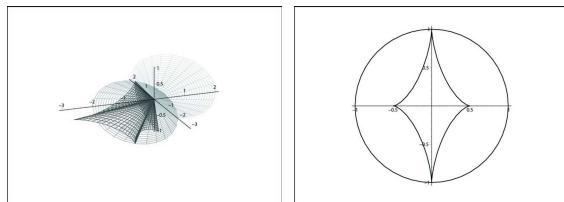
4) $a = 1$ вырожденный случай



5) $1 < a < 3$



6) $a = 3$



7) $a > 3$

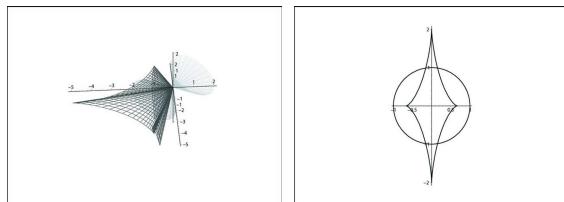


Рисунок 1.11

Рассмотрим подробно случай: $a \in (-1; 0)$ (рисунок 1.12). Горизонтальные оси координат соответствуют δ_1, δ_2 , а вертикальная — δ_3 .

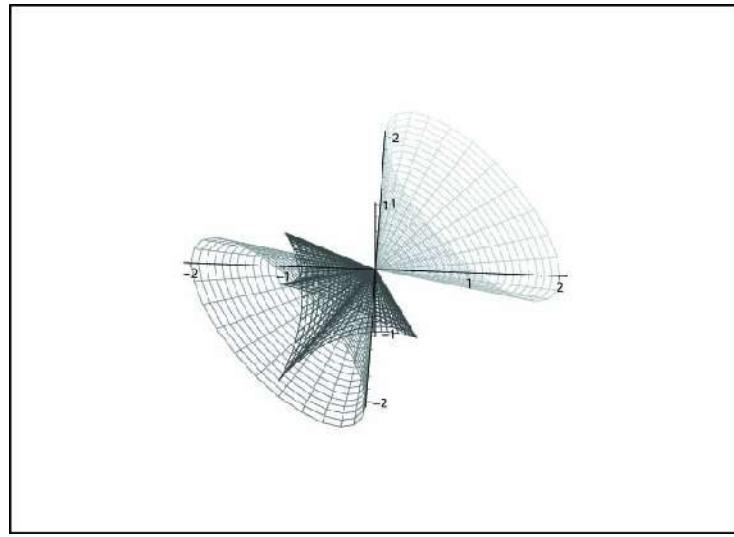


Рисунок 1.12

На следующем рисунке представлены сечения каустики при $-1 < a < 0$ и метаморфозы линий уровня ключевой функции.

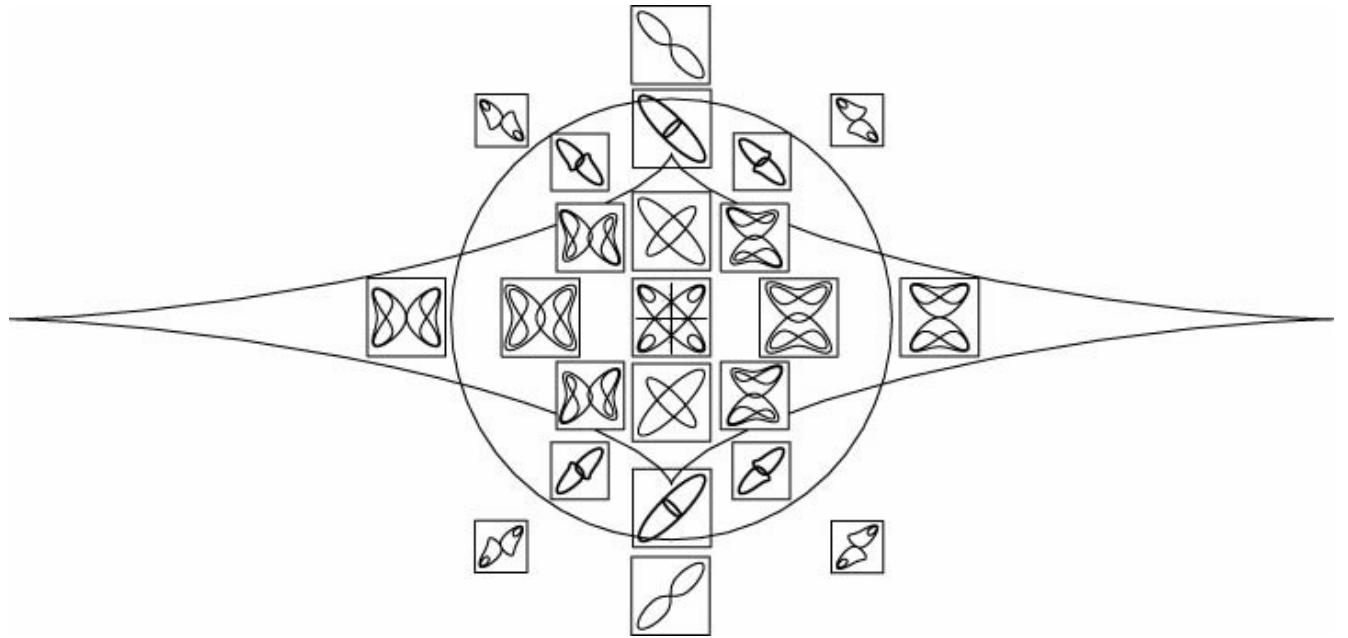


Рисунок 1.13

Как видно из рисунка 1.13, пространство параметров $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ разбито на ячейки регулярности, каждой из которых соответствует свой *bif*-расклад. Так, например, в ячейку под номером 1 входят те значения параметров, при которых исходная функция имеет лишь одну критическую точку (минимум). То есть данной ячейке соответствует расклад $(1,0,0)$, и линии уровня представляют

собой овалы с центрами в нуле.

Для остальных ячеек получены следующие соответствия:

$$\begin{aligned} \text{ячейка 1} &\Leftrightarrow (1,0,0), \quad \text{ячейка 2} \Leftrightarrow (2,1,0), \quad \text{ячейка 3} \Leftrightarrow (2,2,1), \\ \text{ячейка 4} &\Leftrightarrow (4,3,0), \quad \text{ячейка 5} \Leftrightarrow (4,4,1). \end{aligned}$$

Каждой ячейке регулярности соответствует определенный тип линий уровней ключевой функции. Точка минимума в нуле при переходе значений параметров через характеристическую поверхность, разделяющую 1-ую и 2-ую зоны, будет переходить в седло, при этом из неё рождаются еще два минимума.

На рисунке 1.14 представлены типовые образцы линий уровней.

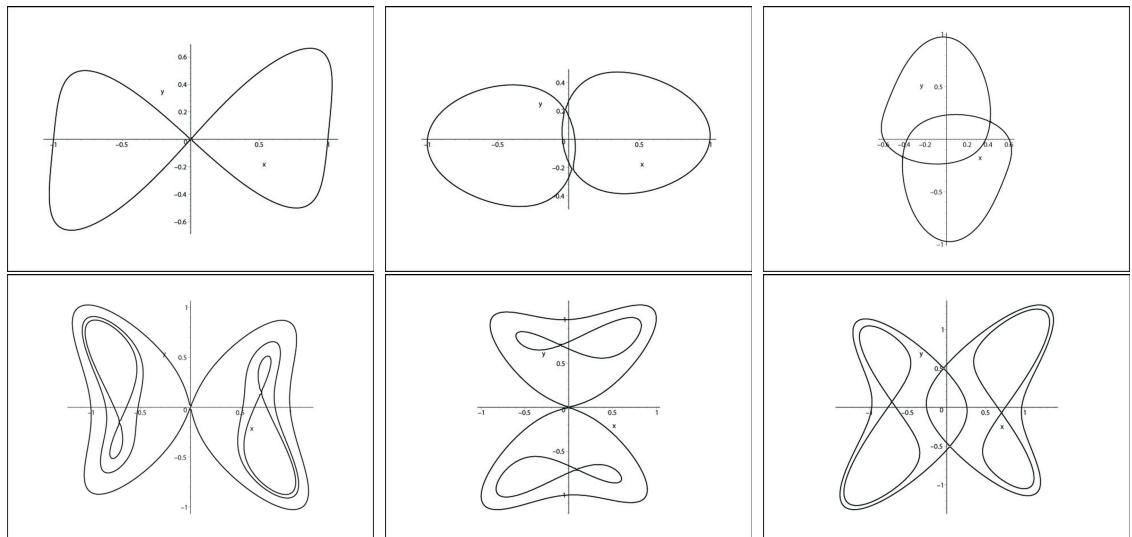


Рисунок 1.14

При произвольных (без условия симметрии) регулярных возмущениях гладкой функции в окрестности особой точки типа двумерной сборки появляется те и только те *bif*-расклады критических точек, которые приведены в следующей таблице (см. [47]):

$$\{2, 1, 0\}, \{3, 2, 0\}, \{4, 3, 0\}, \{5, 4, 0\},$$

$$\{1, 1, 1\}, \{2, 2, 1\}, \{3, 3, 1\}, \{4, 4, 1\}.$$

В случае $-1 < a < 0$: при $\varepsilon < 0$ минимумы будут во второй и четвертой четверти, а при $\varepsilon > 0$ в первой и третьей. И симметрично при $1 < a < +\infty$.

Максимальным раскладам соответствуют следующие изображающие графы (собранные в классы гомологичных) (рис. 1.15):

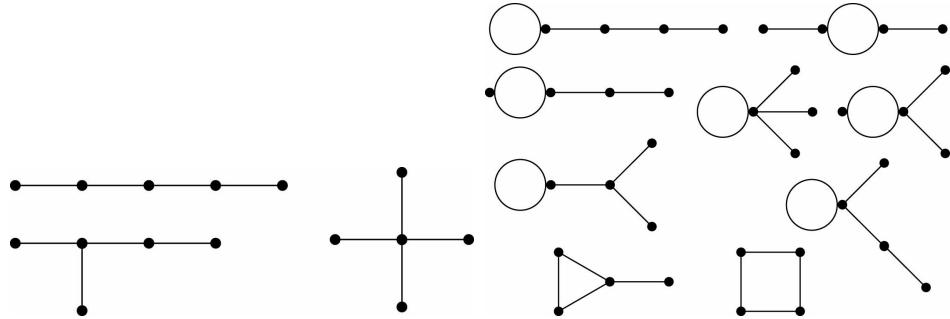


Рисунок 1.15

Таким образом, ответы на основные качественные вопросы бифуркационного анализа, как видно из рисунков, здесь получены.

1.5 Вариационная схема Пуанкаре – Ляпунова – Шмидта

Пусть $f : E \rightarrow F$ — гладкое фредгольмово нулевого индекса отображение банаховых пространств, обладающее свойствами собственности (прообраз любого компакта является компактом) и потенциальности:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h \equiv \langle f(x), h \rangle,$$

где V — гладкий функционал на E (потенциал отображения f), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в некотором гильбертовом пространстве H ($E \subset F \subset H$ — непрерывно вложенные пространства, E плотно в H). Если выполнено условие положительности (монотонности)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (E \setminus \{0\}), \quad (1.5.35)$$

то уравнение

$$f(x) = 0$$

однозначно разрешимо. Это верно в силу теоремы Банаха – Каччиополи – Мазура. Решение этого уравнения является точкой глобального минимума функционала V на E .

Если (1.5.35) заменяется более слабым условием

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (L \setminus \{0\}), \quad (1.5.36)$$

где $L = E \cap N^\perp$, $N = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, N^\perp — ортогональное дополнение к N в H , $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторая ортонормированная в H система векторов из E , то можно определить ключевую функцию W следующим образом:

$$W(\xi) = \inf_{x: \langle x, e_i \rangle = \xi_i, \forall i} V(x) , \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top . \quad (1.5.37)$$

Данная функция W полностью отвечает за поведение функционала V . Условие собственности f можно ослабить, заменив его условием собственности при каждом ξ отображения

$$f_*(\cdot, \xi) : L \rightarrow L_*, \quad \text{где } L_* = F \bigcap N^\perp, \quad (1.5.38)$$

$$f_*(v, \xi) := f \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i + v \right) - \sum_{i=1}^n \left\langle e_i, f \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i + v \right) \right\rangle e_i.$$

При выполнении этих условий уравнение

$$f_*(v, \xi) = 0 \quad (1.5.39)$$

однозначно разрешимо при всех ξ и его решение $v = h(\xi)$ гладко зависит от ξ , по теореме о неявной функции. Из (1.5.38) получаем

$$W(\xi) = V \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i + h(\xi) \right). \quad (1.5.40)$$

Переход от V к W называется редукцией Ляпунова – Шмидта. Первые реализации идеи конечномерной редукции были сделаны А.М. Ляпуновым и Э. Шмидтом [134], [204]. Вместо функции (1.5.40) они рассматривали так называемое уравнение разветвления

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in R^n, \quad (1.5.41)$$

где

$$\theta(\xi) = (\theta_1(\xi), \theta_2(\xi), \dots, \theta_n(\xi)),$$

$$\theta_i(\xi) = \left\langle f \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i + h(\xi) \right), e_i \right\rangle.$$

Легко заметить, что

$$\theta(\xi) = \text{grad}W(\xi).$$

Утверждение 1.9 (см. [47], [171]) Пусть отображение (1.5.38) является собственным и пусть для него выполняется условие положительности (1.5.35). Тогда маргинальное отображение

$$\varphi : \xi \mapsto \sum_{i=1}^n \xi_i e_i + h(\xi),$$

где $h(\xi)$ определено уравнением (1.5.39), устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками ключевой функции W и заданного функционала V . При этом локальные кольца особенностей соответствующих функций в точках ξ и $\varphi(\xi)$ изоморфны. В соответствующих друг другу однократных критических точках имеет место совпадение индексов Морса.

В некоторых случаях переход к функции многих переменных по схеме Ляпунова – Шмидта не согласован с ограничениями на область определения функционала, поэтому иногда удобнее воспользоваться редукцией Морса – Ботта [172].

1.6 Ключевая функция в случае редуцирующей схемы Морса – Ботта

Пусть M — конечномерное компактное связное риманово C^∞ -многообразие без края и a, b — фиксированная пара точек на M . Через χ обозначим множество H^1 — кривых $x : [0, 1] \rightarrow M$, соединяющих a и b ($x(0) = a, x(1) = b$). Принадлежность кривой $x = x(t)$ классу H^1 означает её абсолютную непрерывность и суммируемость скалярного квадрата скорости

$$|\dot{x}(t)|^2 = (\dot{x}(t), \dot{x}(t))_{x(t)}.$$

Через $(\cdot, \cdot)_a$ обозначается скалярное произведение в касательном пространстве $T_a(M)$, $a \in M$. В χ естественно вводится бесконечномерная риманова структура с модельным гильбертовым пространством.

$$X = \{u(t) \in H^1([0, 1], R^m) : u(0) = u(1) = 0\}, \quad m = \dim M.$$

Функционал действия

$$V(x) = \int_0^1 \frac{|\dot{x}|^2}{2} dt$$

на χ является гладким и достигает своего минимального значения на кратчайшей кривой γ , соединяющей a и b [160]. Пусть c — регулярное значение V , $V(\gamma) > c$. Нетрудно установить существование такой величины $\varepsilon > 0$, что для любой кривой $x = x(t)$ в $\{V \leq c\}$ и любой пары точек $t, s \in [0, 1]$, для которой $|t - s| < \varepsilon$, точки $x(t)$ и $x(s)$ принадлежат геодезически выпуклому открытому подмножеству в M . Пусть целое положительное число n такое, что $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Рассмотрим $M^n = \underbrace{M \times \dots \times M}_n$ и подмножество $N_c \subset M^n$, состоящее из таких точек (q_1, q_2, \dots, q_n) , для которых

$$\sum_{i=0}^n \int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} |\dot{\gamma}_{i,q}|^2 dt \leq 2c,$$

$\gamma_{i,q}$ — кратчайшая параметрическая кривая с параметром $t \in [\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1}]$, соединяющая q_i и q_{i+1} ($q_0 = a, q_{n+1} = b$). Легко увидеть, что отображения

$$P : \{V \leq c\} \rightarrow N_c, \quad \varphi : N_c \rightarrow \{V \leq c\},$$

$$P(x) = \left(x \left(\frac{1}{n+1} \right), \dots, x \left(\frac{n}{n+1} \right) \right)^\top,$$

$$\varphi(q)(t) := \gamma_{i,q}(t) \quad \forall t \in \left[\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1} \right],$$

являются гладкими. При этом

$$P(\varphi(q)) \equiv q, \quad V(\varphi(q)) = \inf_{x:P(x)=q} V(x).$$

Нетрудно проверить, что $\varphi(q)$ — невырожденная точка минимума для V . Отображения P и φ гомотопически обратны друг другу. Процедура стягивания слоев $P^{-1}(q)$ в точки $\varphi(q)$ детально описана в [160].

Замечание 1.6 *Если на M задано действие группы G с условиями $g(a) = a$, $g(b) = b \quad \forall g \in G$ и инвариантностью функционала действия относительно преобразований*

$$x(t) \mapsto g(x(t)) \quad \forall g \in G,$$

то ключевая функция $W, W(q) := V(\varphi(q))$, будет инвариантной относительно преобразований

$$(q_1, \dots, q_n) \rightarrow (g(q_1), \dots, g(q_n)).$$

1.7 Общая редуцирующая схема

Общеизвестным примером схемы конечномерной редукции является локальный метод Ляпунова – Шмидта, который служит одним из основных инструментов теории бифуркаций. Вариационная версия метода конечномерных редукций, опирающаяся на теорию нелинейных фредгольмовых отображений, изложена в [172]. Как в локальном, так и в глобальном случаях в одной и той же задаче могут применяться различные схемы редукции.

Рассмотренная ниже редукция применялась в работах [172], [173].

Определение 1.16 *Пусть V — гладкий функционал, заданный на области Ω банахова пространства E . Конечномерной редукцией V на открытом подмножестве $\Psi \subset \Omega$ называется тройка $\{p, \varphi, N\}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- (1) *Гладкое отображение $p : \Psi \rightarrow N$ (N — конечномерное многообразие) является субмерсией (то есть каждый дифференциал касательных пространств $\frac{\partial p}{\partial x}(a) : T_a(\Psi) \rightarrow T_{\xi}(N)$ является отображением «на»).*
- (2) *$\forall \xi \in \mathcal{U} = p(\Psi)$ функционал $V_{\xi} = V|_{p^{-1}(\xi)}$ имеет единственную, причем*

невырожденную, критическую точку $\varphi(\xi)$ (что означает невырожденность второго дифференциала

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(V|_{p^{-1}(\xi)})(\varphi(\xi))(h, h),$$

$h \in T_{\varphi(\xi)}(p^{-1}(\xi))$, как квадратичной формы на линейном пространстве).

(3) Отображение $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \Psi$ является гладким.

Отображение p называется редуцирующей субмерсией. Размерностью редукции называется размерность образа редуцирующей субмерсии.

Определение 1.17 Функция $W : \mathcal{U} \rightarrow R$, определенная равенством

$$W(\xi) = V(\varphi(\xi)), \quad \xi \in \mathcal{U}, \quad (1.7.42)$$

также называется ключевой, а отображение φ — маргинальным.

Определение 1.18 Если $\forall \xi \in N$ точка $\varphi(\xi)$ является точкой минимума функционала $V_{p^{-1}(\xi)}$, то редукция называется эллиптической.

В случае эллиптической редукции ключевая функция определяется равенством

$$W(\xi) = \inf_{x:p(x)=\xi} V(x) = V(\varphi(\xi)). \quad (1.7.43)$$

Утверждение 1.10 Пусть $\{p, \varphi, N\}$ — эллиптическая конечномерная редукция гладкого функционала V на область Ω гладкого банахова многообразия M . Тогда маргинальное отображение φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек ключевой функции W и функционала V . При этом соответствующие друг другу критические точки одновременно являются либо вырожденными, либо нет. В случае невырожденности соответствующие критические точки имеют одинаковые значения индексов Морса.

1.8 Вычислительный алгоритм для построения ключевой функции

Из утверждения 1.10 следует, что исследование экстремалей (редуцируемого) функционала сводится к анализу критических точек ключевой функции. Кроме того, все топологические и аналитические понятия, характеризующие тип стационарной точки (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.д. [6]) для таких функционалов вводятся через ключевые функции и их нормальные формы. Исследование нормальной формы ключевой функции позволяет детально описать качественную картину поведения ветвей критических точек, в частности, находить точное их количество и первые асимптотики.

Опишем одну практическую схему локальной редукции [47].

Рассмотрим потенциальное уравнение $f(x, \lambda) = 0$ с потенциалом

$$V(x, \lambda) = 0, \quad x \in E, \quad \lambda \in R^m.$$

Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, H — гильбертово пространство, E непрерывно вложено в F , E плотно в H . Пусть $\Omega(0)$ — некоторая открытая окрестность нуля в E , $\mathcal{U}(0)$ — окрестность нуля в R^m и $f(0, \lambda) = 0 \forall \lambda$. Пусть выполнены следующие два условия:

- (1) На $\mathcal{U}(0)$ определен набор гладких нормированных в H функций из E (ведущих мод бифуркации) $\{e_i(\lambda)\}_{i=1}^n$, $\lambda \in \mathcal{U}(0)$, таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda) e_i(\lambda) = \alpha_i(\lambda) e_i(\lambda), \quad (1.8.44)$$

где $\{\alpha_i(\lambda)\}_{i=1}^n$ — гладкие спектральные функции;

- (2) если $N_\lambda = \text{span}\{e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_n(\lambda)\}$, N_λ^\perp — ортогональное дополнение к N_λ в метрике H , $L_\lambda = E \cap N_\lambda^\perp$, то ноль является невырожденной критической точкой для сужения $V(x, \lambda)|_{x \in L_\lambda}$.

Для любого $x \in \Omega(0)$ положим $\xi_i(\lambda) = \langle x, e_i(\lambda) \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное про-

изведение в Н. Тогда

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i(\lambda) e_i(\lambda) + v(\lambda) \quad v(\lambda) \perp e_i(\lambda) \quad \forall i.$$

Аналогично

$$f(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n f_i(x, \lambda) e_i(\lambda) + f_*(x, \lambda) \quad f_*(x, \lambda) \perp e_i(\lambda) \quad \forall i.$$

Пусть $L_\lambda^* = F \cap N_\lambda^\perp$. Тогда из условия (2) следует, что

$f_*(\cdot, 0) : L_0 \rightarrow L_0^*$ — локальный диффеоморфизм (в некоторой окрестности $\Omega(0)$ точки $0 \in L_0$). Следовательно, по теореме о неявной функции, найдется такая гладкая функция $u = \Phi(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in \Omega^n(0) \times \mathcal{U}(0)$, $\Phi(\xi, \lambda) \in L_\lambda$, где $\Omega^n(0)$ — некоторая окрестность нуля в R^n , что

$$f_* \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) = 0, \quad \forall (\xi, \lambda) \in \Omega^n(0) \times \mathcal{U}(0).$$

Функция

$$W(\xi, \lambda) = V \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) \tag{1.8.45}$$

является ключевой для функционала $V(x, \lambda)$. Уравнение

$$f^n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) = 0$$

является ключевым (уравнением разветвления). Достаточно близкая к нулю точка $a \in E$ является решением уравнения $f(x, \lambda) = 0$ при $\lambda = \bar{\lambda}$ тогда и только тогда, когда

$$a = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i + \Phi(\bar{\xi}, \bar{\lambda}), \tag{1.8.46}$$

где $\bar{\xi}$ — близкая к нулю критическая точка ключевой функции. При этом a — невырожденное решение уравнения $f(x, \lambda) = 0$ (невырожденная экстремаль функционала V) лишь одновременно с невырожденностью $\bar{\xi}$, как критической точки для функции $W(\cdot, \bar{\lambda})$. Таким образом, изучение решения уравнения $f(x, \lambda) = 0$ или экстремалей функционала V вблизи нуля также сводится к анализу ветвления критических точек функции $W(\cdot, \lambda)$.

Формула (1.8.46) является основой для получения асимптотических приближений к ветвям бифурсирующих решений.

В приложениях возникает проблема вычисления тейлоровских разложений ключевой функции W . Во многих случаях достаточно ограничиться несколькими первыми членами разложения W в ряд Тейлора. В локальных задачах это производится при помощи специальным образом подобранный ритцевской аппроксимации.

Определение 1.19 Ритцевской аппроксимацией [172] функционала V , заданного на банаховом пространстве E , называется функция

$$W_R(\xi) = V \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top,$$

где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Экстремалям $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ функции W соответствуют точки

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i,$$

называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V .

Точность ритцевских аппроксимаций повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi) \right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ в N^\perp (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих задачах можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы. Таким образом, схему Ляпунова – Шмидта можно рассматривать как разновидность нелинейной ритцевской аппроксимации.

Формула (1.8.46) дает асимптотическое представление бифурцирующих экстремалей.

1.8.1 Алгоритм вычисления ключевой функции, асимптотическое представление решений

Итак, если представить семейство фредгольмовых отображений $f : E \times \mathbb{R}^m \rightarrow F$ в виде

$$\mathcal{A}(\varepsilon)x + \mathcal{B}(x, x, \varepsilon) + \mathcal{C}(x, x, x, \varepsilon) + o(\|x\|_E^3),$$

$\mathcal{A}(\varepsilon)$ — гладкое семейство линейных фредгольмовых операторов нулевого индекса, \mathcal{B}, \mathcal{C} — квадратичный и кубический операторы соответственно, то задав ортопроекторы $\mathcal{P} : E \rightarrow N$, $\mathcal{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}x := \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$, e_1, e_2, \dots, e_n — моды бифуркации, можно представить *общий алгоритм вычисления ключевого уравнения* в виде последовательности следующих действий:

1) запись исходного уравнения $f(x, \varepsilon) = 0$ в виде системы уравнений

$$\begin{cases} f_{(n)}(u + v, \varepsilon) = 0, \\ f_{(\infty-n)}(u + v, \varepsilon) = 0, \end{cases}$$

$$u = \mathcal{P}x, \quad v = \mathcal{Q}x, \quad f_{(n)}(x, \varepsilon) := \mathcal{P}f(x, \varepsilon), \quad f_{(\infty-n)}(x, \varepsilon) := \mathcal{Q}f(x, \varepsilon);$$

2) вывод зависимости

$$v = \Phi(\xi, \varepsilon), \quad \xi = \hat{u}, \quad \Phi(\xi, \varepsilon) = \Phi^{(2)}(\xi, \varepsilon) + o(|\xi|^3), \quad (1.8.47)$$

$$\Phi^{(2)}(\xi, \varepsilon) = \sum_{|k|=2} \Phi_k \xi^k, \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_n),$$

$$\Phi_k \xi^k := \Phi_{k_1, k_2, \dots, k_n} \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n}, \quad |k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n, \quad k_j \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\Phi^{(2)}(\xi, \varepsilon) = -\bar{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{B}_{(\infty-n)}(u, u, \varepsilon), \quad u := \sum_{j=1}^n \xi_j e_j,$$

$$\bar{\mathcal{A}} := \mathcal{A}|_{N^\perp}, \quad \mathcal{B}_{(\infty-n)} := \mathcal{Q}\mathcal{B};$$

3) переход к ключевому уравнению:

$$\Theta(\xi, \varepsilon) := \Theta^{(1)}(\xi, \varepsilon) + \Theta^{(3)}(\xi, \varepsilon) + o(|\xi|^3) = 0;$$

$$f_{(n)}(x, \varepsilon) = \mathcal{A}_{(n)}(\varepsilon)x + \mathcal{C}_{(n)}(x, x, x, \varepsilon) + \dots,$$

$$\mathcal{C}_{(n)} := \mathcal{P}\mathcal{C},$$

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \varepsilon) &= f_{(n)} \left(u + \Phi^{(3)}(\xi, \varepsilon) + \dots, \varepsilon \right) = \\ &= \mathcal{A}_{(n)}u + \mathcal{C}_{(n)}(u, u, u, \varepsilon) + \dots; \end{aligned}$$

4) вычисление главной части ключевой функции по основной формуле:

$$W(\xi, \varepsilon) = V \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\varepsilon) + \Phi(\xi, \varepsilon), \varepsilon \right). \quad (1.8.48)$$

Для главной части ключевой функции получаем представление

$$\widetilde{W}(\xi, \varepsilon) = \widetilde{V} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i(\varepsilon) + \widetilde{\Phi}(\xi, \varepsilon), \varepsilon \right), \quad (1.8.49)$$

где $\widetilde{W}, \widetilde{V}, \widetilde{\Phi}$ — соответствующие аппроксимирующие полиномы (отрезки тейлоровских разложений) степеней для отображений W, V, Φ .

Формулы (1.8.47)–(1.8.49) дают конструктивную основу для разработки вычислительных алгоритмов в конкретных задачах. В частности, формула (1.8.47) дает асимптотическое представление решения основного (исходного) уравнения.

1.8.2 Каустика в случае бесконечномерного параметра

Определения дискриминантного множества и каустики для фредгольмова функционала такие же, как и в случае гладкой функции на конечномерном пространстве.

Рассмотрим гладкое фредгольмово уравнение $f(x, \lambda) = 0$ с потенциалом

$$V(x, \lambda), \quad x \in E, \lambda \in R^m.$$

Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, H — гильбертово пространство, E непрерывно вложено в F , E плотно в H (в данной тройке пространств определен градиент f функционала V). Пусть Ω — некоторая открытая окрестность нуля в E , \mathcal{U} — окрестность нуля в R^m и $f(0, \lambda) = 0 \forall \lambda$.

Определение 1.20 Дискриминантное множество $\Delta(\Omega)$ — это совокупность тех значений параметра $\lambda \in \mathcal{U}$, при которых $V(\cdot, \lambda)$ имеет в Ω критическую точку на нулевой поверхности уровня, то есть

$$\Delta(\Omega) = \{\lambda : \exists x, V(x, \lambda) = 0, \frac{\partial V}{\partial x}(x, \lambda) = 0\}.$$

Определение 1.21 Каустика $\Sigma(\Omega)$ — это совокупность тех значений параметра $\lambda \in \mathcal{U}$, при которых $V(\cdot, \lambda)$ имеет в Ω вырожденную критическую точку.

Асимптотические формулы предыдущего раздела дают основу для приближенного построения дискриминантных множеств и каустик.

1.8.3 Топологическая эквивалентность ключевых функций

Подробное исследование по проблеме топологического сравнения ключевых функций, полученных в разных редуцирующих схемах для одной задачи, проведено в работах [173], [194].

Приведем формулировки некоторых утверждений из этих работ.

Утверждение 1.11 Пусть $W_0 = V \cdot \varphi_0$, $W_1 = V \cdot \varphi_1$ — ключевые функции в двух редукциях, φ_0, φ_1 — соответствующие маргинальные отображения, и пусть $\dim \text{Ker } \nabla^2 V(x_0) = n$. Тогда функции W_0 и W_1 локально эквивалентны в нуле: существует локальный диффеоморфизм $\psi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ такой, что на некоторой окрестности нуля $W_0(\xi) \equiv W_1(\psi(\xi))$.

Утверждение 1.12 Все ключевые функции редуцируемого функционала, полученные в эллиптических редуцирующих системах фиксированной размерности, локально эквивалентны (в соответствующих критических точках).

Утверждение 1.13 Пусть $W(x) = W_0(x) + h(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $h(x) \in \mathcal{M}^2 \cdot \mathcal{J}$, \mathcal{M} — максимальный идеал в кольце ростков гладких функций в нуле, \mathcal{J} — якобиев идеал (порожденный ростками первых производных). Тогда W

сильно эквивалентна W_0 , и любые миниверсальные деформации этих функций также сильно эквивалентны.

Утверждение 1.14 Пусть для функционала V задано гладкое семейство эквивариантных конечномерных редукций p_t , $t \in [0, 1]$, определяющих ключевые функции $W_t : \mathbb{R}^m \rightarrow R$. Тогда $\forall s, t \in [0, 1]$ существует эквивариантный диффеоморфизм $\psi_s^t : R^m \rightarrow R^m$ такой, что $W_s(\xi) = W_t(\psi_s^t(\xi))$.

Из теорем, установленных в [173], [194], вытекает, в частности, что две нелокально построенные ключевые функции гладкого функционала, построенные в гомотопных (непрерывно деформируемых одна в другую) редуцирующих системах, глобально право эквивалентны. Если исходный функционал обладает некоторой симметрией, то, естественно, стремление получать ключевые функции, наследующие эту симметрию. Эквивалентность ключевых функций также имеет место (с учетом симметрии).

Глава 2

Ветвление многомодовых экстремалей в моделях упругих систем

2.1 Нормализованные главные части ключевых уравнений

При рассмотрении дифференциальных уравнений с большим числом параметров, зачастую, получить явный вид решения не является достаточным для исследователя. Картина предстает намного более полной и ясной, когда результат анализа этого уравнения дополнен соотношениями, напрямую показывающими множество значений параметров, при которых существуют вырожденные решения. График этих соотношений (дискриминантное множество) делит пространство управляющих параметров на ячейки, каждой из которых соответствует постоянный состав решений (т.е. неизменный по количеству и качеству при вариациях параметра внутри ячейки).

Дальнейшее изложение опирается на схемы конечномерных редукций, представляющие собой аппарат исследования потенциальных физических систем с не единственностью состояний, к каковым относятся упругие конструкции в критических равновесных состояниях, сегнетоэлектрические фазы кристаллов и т.п. [47], [123].

Вариационную версию редуцирующей схемы Ляпунова – Шмидта можно

представить как нелинейный аналог ритцевской аппроксимации. Напомним, что классической ритцевской аппроксимацией функционала V на банаховом пространстве E называется функция

$$W(\xi) := V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top,$$

где e_1, \dots, e_n — некоторый линейно независимый набор векторов в E (базис ритцевской аппроксимации). Экстремалам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)^\top$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j e_j$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V . Точность ритцевских аппроксимаций повышается за счет увеличения количества базисных элементов. Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi) \right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ в N^\perp (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих прикладных задачах можно достигать любой аппроксимативной точности при фиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы.

Особую актуальность схемам конечномерных редукций придает в текущий момент то, что они позволяют разрабатывать *алгоритмы компьютерного сопровождения* решений вариационных задач, посредством которых можно получать наглядную информацию о существовании и бифуркациях экстремалей, об индексах Морса бифурцирующих экстремалей и о метаморфозах поверхностей уровней функционалов энергии.

2.1.1 Алгоритм вычисления ключевой функции в случае аппроксимации на базе собственных функций

Пусть $f : E \rightarrow F$ есть гладкое фредгольмово отображение нулевого индекса банаховых пространств, такое что

$$\langle f(x), h \rangle \equiv \frac{\partial V}{\partial x}(x)h, \quad (2.1.1)$$

где V будет гладкий функционал на E (потенциал отображения f), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в некотором гильбертовом пространстве H , содержащем E и F как непрерывно и плотно вложенные подпространства. Предполагается также, что E непрерывно вложено в F . В этом случае будем говорить, что функционал V обладает градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$ и обозначать $f = \text{grad } V = \nabla V$.

В приведенных условиях множество решений уравнения

$$f(x) = 0 \quad (2.1.2)$$

совпадает с множеством критических точек функционала V . Действительно, из условия $\partial V / \partial x(x) = 0$ вытекает условие $f(x) \in E^\perp$, а $E^\perp = \{0\}$ ввиду плотности E в H .

Точка a называется критической точкой (экстремалью) данного функционала $V(x)$, если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a)h = \langle f(a), h \rangle_H = 0, \quad \forall h \in E \setminus 0.$$

Имеется гладкое потенциальное фредгольмово уравнение с параметром

$$f(x, \lambda) = 0. \quad (2.1.3)$$

Пусть его потенциалом является функционал $V(x, \lambda)$, $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\mathcal{O}(0)$ — некоторая открытая окрестность нуля в E , $\mathcal{U}(0)$ — окрестность нуля в \mathbb{R}^m и $f(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda$. Пусть, наконец, выполнены следующие два условия (см. [47]): 1) на $\mathcal{U}(0)$ определен набор гладких нормированных в \mathcal{H} функций $\{e_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, $\lambda \in \mathcal{U}(0)$, из E (постоянных мод бифуркации) таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)e_j(\lambda) = \alpha_j(\lambda)e_j(\lambda), \quad (2.1.4)$$

где $\{\alpha_j(\lambda)\}_{j=1}^n$ — гладкие спектральные функции; 2) 0 — невырожденная критическая точка сужения $V(x, 0)|_{L_0}$, где $L_\lambda := E \cap N_\lambda^\perp$, N_λ^\perp — ортогональное дополнение в \mathcal{H} к $N_\lambda = \text{Span}\{e_1(\lambda), \dots, e_n(\lambda)\}$.

Для любого $x \in \mathcal{O}(0)$ положим $\xi_j(\lambda) = \langle x, e_j(\lambda) \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathcal{H} . Тогда

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j(\lambda) e_j(\lambda) + v(\lambda), \quad v(\lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Аналогично

$$f(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n f_j(x, \lambda) e_j(\lambda) + f_*(x, \lambda), \quad f_*(x, \lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Пусть $L_\lambda^* = F \cap N_\lambda^\perp$. Тогда из условия 2) следует, что $f_*(\cdot, 0) : L_0 \rightarrow L_0^*$ — локальный диффеоморфизм (в некоторой окрестности $\mathcal{O}(0)$ точки $0 \in L_0$). Следовательно, найдется, по теореме о неявной функции, гладкая функция $u = \Phi(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0)$, $\Phi(\xi, \lambda) \in L_\lambda$, где $\mathcal{O}^n(0)$ — некоторая окрестность нуля в \mathbb{R}^n , такая что

$$f_* \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) = 0, \quad \forall (\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0).$$

Функция $W(\xi, \lambda) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right)$ является ключевой для функционала $V(x, \lambda)$, а ее градиент является ключевым отображением для уравнения $f(x, \lambda) = 0$.

Для исследования ключевой функции W часто достаточно ограничиться несколькими членами разложения W в ряд Тейлора. В локальных вариационных задачах это производится при помощи специальным образом подобранный ритцевской аппроксимации функционала $V(x)$, заданной выражением

$$W_R(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top,$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Обоснование того, что отбрасывание «тейлоровского хвоста» не изменяет топологию бифуркационных диаграмм и структуру *bif*-раскладов, проводится на основе теорем о конечной определенности ростков отображений и их деформаций [6].

Рассмотрим тейлоровское разложение потенциала V до четвертого порядка:

$$V(x, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \langle A(\lambda)x, x \rangle_{\mathcal{H}} + V_{\lambda}^{(3)}(x) + V_{\lambda}^{(4)}(x) + o(\|x\|^4),$$

где $A(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$, $V_{\lambda}^{(3)}$ и $V_{\lambda}^{(4)}$ — однородные формы третьего и четвертого порядков на E . Пусть на \mathcal{H} задан набор инволюций $\{J_k\}_{k=1}^n$ таких, что

- 1) $J_k(E) \subset E$, $J_k(F) \subset F$, $k = 1, \dots, n$,
- 2) $J_k(e_k(\lambda)) = -e_k(\lambda)$, $J_k(e_j(\lambda)) = e_j(\lambda)$, $k \neq j$.

Пусть потенциал $V(\cdot, \lambda)$ инвариантен относительно J_k :

$$V(J_k(x), \lambda) = V(x, \lambda), \quad k = 1, \dots, n, \quad \forall x, \lambda. \quad (2.1.5)$$

Тогда ключевая функция $W(\xi, \lambda)$ четна по каждой переменной ξ_j и, следовательно, её тейлоровское разложение имеет следующий вид [168], [172]:

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + W_{\lambda}^{(2)}(\xi) + W_{\lambda}^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),$$

где $W_{\lambda}^{(2)}$ и $W_{\lambda}^{(4)}$ — формы второго и четвертого порядков, четные по ξ_j . Из (2.1.5) следует, что

$$W(\xi, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5) + O(|\lambda|)o(|\xi|^3).$$

Так как $\alpha_j(0) = 0$, то

$$W(\xi, 0) = \text{const} + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$(W_0^{(4)}(\xi) — форма четвертого порядка). Нетрудно проверить [168], [172], что$

$$W_0^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2} \langle AB(u), B(u) \rangle_{\mathcal{H}} + 3\mathcal{V}_0^{(3)}(u, u, B(u)) + V_0^{(4)}(u),$$

где $u = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, $e_j = e_j(0)$, $A = A(0)$, $\mathcal{V}_0^{(3)}$ — симметричная 3-линейная форма, отвечающая $V_0^{(3)}$ ($V_0^{(3)}(u) = \mathcal{V}_0^{(3)}(u, u, u)$), B — квадратичное отображение $N_0 \rightarrow L_0^*$, полученное выделением квадратичной части отображения $u \rightarrow$

$\Phi(\xi, 0)$. Так же заметим, что $B(u) = -A_*^{-1} \text{grad}_{\mathcal{H}} V_0^{(3)}(u)$ ($A_* = A|_{L_0}$). Для четного потенциала V имеем $V_0^{(3)} = 0$, $B(u) = 0$, и, следовательно, $W_0^{(4)}(\xi) = V_0^{(4)}(u)$. Таким образом, для W получаем следующее представление [168], [172]:

$$\text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_R^{(4)}(\xi, 0) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + o(|\xi|^5), \quad (2.1.6)$$

где $W_R^{(4)}(\xi, 0) = V_0^{(4)}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right)$. Пусть

$$V_0^{(4)}(x) = \mathcal{V}_0^{(4)}(x, x, x, x)$$

($\mathcal{V}_0^{(4)}(x, y, z, t)$ — симметричная 4-линейная форма). Тогда, с учетом симметрии, получаем соотношение

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^n V_0^{(4)}(e_k) \xi_k^4 + 6 \sum_{i < j}^n \mathcal{V}_0^{(4)}(e_i, e_i, e_j, e_j) \xi_i^2 \xi_j^2. \quad (2.1.7)$$

2.1.2 Алгоритм вычисления ключевой функции в случае аппроксимации на базе корневых функций

В некоторых задачах нет возможности построения базиса аппроксимации, состоящего из собственных элементов $e_j(\lambda)$ (соответствующие примеры приведены в разделе 2.2). Вместо них можно использовать наборы корневых векторов, которые можно строить в виде возмущений собственных векторов, заданных при фиксированном значении $\lambda = 0$.

Предположим, что набор корневых векторов известен.

Итак, пусть выполнены следующие два условия: 1) на $\mathcal{U}(0)$ определен набор гладких попарно ортогональных и нормированных в \mathcal{H} функций $\{e_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, $\lambda \in \mathcal{U}(0)$, из E (постоянных мод бифуркации) таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda) e_j(\lambda) = \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k}(\lambda) e_k(\lambda), \quad (2.1.8)$$

где $\{\alpha_{j,k}(\lambda)\}_{j=1}^n$ — гладкие функции; 2) 0 — невырожденная критическая точка сужения $V(x, 0)|_{L_0}$, где $L_\lambda := E \cap N_\lambda^\perp$, N_λ^\perp — ортогональное дополнение в \mathcal{H} к $N_\lambda = \text{Span}\{e_1(\lambda), \dots, e_n(\lambda)\}$.

Для любого $x \in \mathcal{O}(0)$ положим $\xi_j(\lambda) = \langle x, e_j(\lambda) \rangle$, то есть

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j(\lambda) e_j(\lambda) + v(\lambda), \quad v(\lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Аналогично

$$f(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n f_j(x, \lambda) e_j(\lambda) + f_*(x, \lambda), \quad f_*(x, \lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Пусть $L_\lambda^* = F \cap N_\lambda^\perp$. Тогда из условия 2) следует, что отображение $f_*(\cdot, 0) : L_0 \rightarrow L_0^*$ — локальный диффеоморфизм (в некоторой окрестности $\mathcal{O}(0)$ точки $0 \in L_0$). Следовательно, по теореме о неявной функции найдется такая гладкая функция $u = \Phi(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0)$, $\Phi(\xi, \lambda) \in L_\lambda$, где $\mathcal{O}^n(0)$ — некоторая окрестность нуля в \mathbb{R}^n , что

$$f_* \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) = 0 \quad \forall (\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0).$$

Функция $W(\xi, \lambda) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right)$ является ключевой для функционала $V(x, \lambda)$, а ее градиент является ключевым отображением для уравнения $f(x, \lambda) = 0$.

Главная часть ключевой функции W определяется ритцевской аппроксимацией функционала $V(x)$

$$W_R(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top.$$

Пусть функционал V четный. Вновь рассмотрим тейлоровское разложение потенциала V до четвертого порядка:

$$V(x, \lambda) = \text{const} + \frac{1}{2} \langle A(\lambda)x, x \rangle_{\mathcal{H}} + V_\lambda^{(4)}(x) + o(\|x\|^4),$$

где $A(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$, $V_\lambda^{(4)}$ — однородная форма четвертого порядка на E .

Тогда ключевая функция $W(\xi, \lambda)$ четна, и её тейлоровское разложение имеет следующий вид:

$$W(\xi, \lambda) = const + W_\lambda^{(2)}(\xi) + W_\lambda^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),$$

где $W_\lambda^{(2)}$ и $W_\lambda^{(4)}$ — формы второго и четвертого порядков, четные по ξ . Следовательно,

$$\begin{aligned} W(\xi, \lambda) &= const + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + \sum_{j,k=1}^n \beta_{j,k}(\lambda) \xi_j \xi_k + \\ &\quad + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5) + O(|\lambda|)o(|\xi|^3). \end{aligned}$$

Так как $\alpha_j(0) = \beta_{j,k}(0) = 0$, то

$$W(\xi, 0) = const + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

($W_0^{(4)}(\xi)$ — форма четвертого порядка). Нетрудно проверить, что

$$W_0^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2} \langle AB(u), B(u) \rangle_{\mathcal{H}} + V_0^{(4)}(u),$$

где $u = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, $e_j = e_j(0)$, $A = A(0)$. То есть, для четного потенциала V имеем $W_0^{(4)}(\xi) = V_0^{(4)}(u)$. Таким образом, для W получаем следующее представление [168], [172]:

$$\begin{aligned} &const + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + \sum_{j,k=1}^n \beta_{j,k}(\lambda) \xi_j \xi_k + \\ &\quad + W_R^{(4)}(\xi, 0) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + o(|\xi|^5), \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

где $W_R^{(4)}(\xi, 0) = V_0^{(4)}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right)$. Пусть

$$V_0^{(4)}(x) = \mathcal{V}_0^{(4)}(x, x, x, x)$$

($\mathcal{V}_0^{(4)}(x, y, z, t)$ — симметричная 4-линейная форма).

В итоге получаем соотношение [172]

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^n V_0^{(4)}(e_k) \xi_k^4 + 6 \sum_{i < j} \mathcal{V}_0^{(4)}(e_i, e_i, e_j, e_j) \xi_i^2 \xi_j^2. \tag{2.1.10}$$

Несмотря на очевидную теоретическую значимость полученных выше формул для коэффициентов главной части ключевой функции, у них имеется один

существенный недостаток. Он заключен в том, что поиск функций $e_j(\varepsilon)$ в прикладных задачах связан с преодолением существенных трудностей.

Замечание 2.1 Условие ортонормированности системы корневых функций можно снять, так как ортогонализация корневых функций в конкретных примерах иногда приводит к лишиным громоздким формулам.

2.1.3 Ритцевская аппроксимация на базе корневых функций

Пусть λ — набор параметров, не влияющих на базис аппроксимации. При $\varepsilon = 0$ ведущие моды бифуркации определены и представляют собой набор $\{e_j\}_{j=1}^n$. Будем разыскивать набор $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n$, где \tilde{e}_j — «возмущенная» мода бифуркации:

$$\tilde{e}_k = e_k + \sum_j h_{k,j} \varepsilon_j + o(\varepsilon), \quad (2.1.11)$$

образующая базис в n -мерном корневом подпространстве оператора Гессе $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{B}(\varepsilon)$ в нуле, где e_k — невозмущенные моды бифуркации (элементы \tilde{e}_k не являются, вообще говоря, собственными функциями оператора \mathcal{H}).

Основная техническая трудность в построении главной части ключевой функции состоит в вычислении коэффициентов $h_{k,j}$. Их можно определить на основе формулы ортогонального проектора на корневое подпространство возмущенного симметричного оператора, приведенной в монографии В.П. Маслова [142].

Итак, вместо собственных функций рассмотрим такие элементы $\tilde{e}_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2, \dots, n$ для которых

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \varepsilon) \tilde{e}_j(\varepsilon) = \sum_k \alpha_{jk}(\varepsilon) \tilde{e}_k(\varepsilon).$$

Функции $\tilde{e}_j(\varepsilon)$ будем называть корневыми.

Важным сопутствующим обстоятельством в предложенном здесь подходе является то, что входящие в эти соотношения функции $\alpha_{jk}(\varepsilon)$, $\tilde{e}_j(\varepsilon)$ будут гладко зависеть от ε .

В качестве искомых базисных элементов можно взять

$$\tilde{e}_k(\varepsilon) := \mathbf{P}(\varepsilon)(e_k),$$

где

$$\mathbf{P}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \mathcal{R}(\varepsilon, z) dz$$

— ортопроектор на n -мерное корневое подпространство, ℓ — окружность достаточно малого радиуса с центром в нуле (на комплексной плоскости), $\mathcal{R}(\lambda, z)$ — резольвента:

$$\mathcal{R}(\varepsilon, z) = (\mathcal{A} + \mathcal{B}(\varepsilon) - zI)^{-1}.$$

Под ε понимается вектор-функция, зависящая от тех параметров, которые влияют на базис аппроксимации. Воспользовавшись разложением в ряд Неймана оператора $I + \mathcal{B}(\varepsilon) (\mathcal{A} - zI)^{-1}$, данную резольвенту можно привести к виду:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} + \mathcal{B}(\varepsilon) - zI)^{-1} &= (\mathcal{A} - zI)^{-1} [I + \mathcal{B}(\varepsilon) (\mathcal{A} - zI)^{-1}]^{-1} = \\ &= (\mathcal{A} - zI)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\mathcal{B}(\varepsilon) (\mathcal{A} - zI)^{-1}]^k. \end{aligned}$$

В нашем случае достаточно обойтись лишь линейными по ε слагаемыми этого ряда. Таким образом,

$$\mathbf{P}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B}(\varepsilon) (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz.$$

Так как оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$ является гладким, то $\mathcal{B}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^n B_j \varepsilon_j + o(\varepsilon)$. Обозначив первое слагаемое правой части последнего уравнения через P_0 , получим:

$$\mathbf{P} = P_0 - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \sum_{j=1}^n B_j \varepsilon_j (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz + o(\varepsilon).$$

Сумму можно вынести за знак интеграла, и, обозначив

$$P_j := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} B_j (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz, \quad (2.1.12)$$

получим конечный вид формулы для вычисления переменных мод бифуркаций:

$$\tilde{e}_k = \mathbf{P} e_k = e_k - \sum_j \varepsilon_j h_{k,j} + o(\varepsilon), \quad (2.1.13)$$

$$\mathbf{P} = P_0 - \sum_{j=1}^n P_j \varepsilon_j + o(\varepsilon),$$

где

$$h_{k,j} = P_j e_k. \quad (2.1.14)$$

Итак, справедливы следующие теоремы, являющиеся основным результатом раздела.

Теорема 2.1 *Возмущенные корневые векторы \tilde{e}_k , можно представить в виде (2.1.13), где $h_{k,j}$ определяются соотношениями (2.1.12)–(2.1.14).*

Теорема 2.2 *Пусть при $\varepsilon = 0$ ключевая функция представима в форме (2.1.9) и пусть корневые базисные векторы представимы в форме (2.1.11). Тогда главная часть ключевой функции имеет следующий вид*

$$W(\xi, \lambda, \varepsilon) = W_R^{(4)}(\xi) + \sum_{j,k} \nu_{jk}(\varepsilon) \xi_j \xi_k, \quad (2.1.15)$$

где $W_R^{(4)}(\xi)$ определено соотношением (2.1.10), $\nu_{jk}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^m \langle \mathcal{A}(\lambda) h_{jk}, e_k \rangle \varepsilon_i$.

2.2 Модельные краевые задачи

2.2.1 Анализ модели кирхгофова стержня

В настоящем разделе представлен подход к изучению форм упругого равновесия плоского стержня, который основан на рассмотрении уравнения равновесия пространственного (кирхгофова) стержня и на его редукции к плоскому (эйлерову) стержню с последующей редукцией Морса – Ботта (при нагрузках продольного сжатия, не превышающих второго критического значения) или редукцией Ляпунова – Шмидта (при нагрузках не выше третьего критического значения) [54].

Математическая модель пространственного стержня

Равновесные конфигурации прямолинейного и продольно сжатого кирхгофова стержня длины единица с жестким закреплением концов описываются краевой задачей (см. [47], [58], [152], [159])

$$\begin{cases} A\dot{\omega} + [\omega, A\omega] + \lambda[f^{-1}r_3, r_3] = 0, \\ f(0) = f(1) = I. \end{cases} \quad (2.2.16)$$

Здесь λ — параметр сжимающей нагрузки, $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ — тензор упругости в поперечном сечении ($A_k > 0 \ \forall k$), $\omega(s)$ — угловая скорость движения нормального сечения стержня в зависимости от параметра длины s средней линии стержня, записанная в координатах тройки ортов $f_1(s), f_2(s), f_3(s)$, направленных по осям инерции нормального сечения, $r_3 = f_3(0)$. Орт $f_3(s)$ является касательным вектором к средней линии стержня, $f(s)$ — матричная функция, столбцами которой являются векторы $f_1(s), f_2(s)$ и $f_3(s)$, ($f_k(s) = f(s)r_k$).

Уравнение (2.2.16) является уравнением Эйлера – Лагранжа экстремалей функционала полной энергии

$$V(f, \lambda) = \frac{1}{2} \langle A\omega, \omega \rangle + \lambda \langle r_3, fr_3 \rangle \quad (2.2.17)$$

(здесь $\langle \phi, \psi \rangle = \int_0^1 (\phi(s), \psi(s)) ds$).

Уравнение (2.2.16) описывает также и движение в поле тяготения твердого тела вокруг неподвижной точки (после замены параметра длины s на параметр времени t) и называется уравнением Эйлера – Пуассона динамики твердого тела. Этому уравнению также соответствует потенциал в виде функционала действия (2.2.17), который называется функционалом Эйлера – Пуассона.

Точную информацию о функционале (2.2.17) на энергетическом многообразии

$$\Lambda := \{f(t) \in C^2([0, 1], SO(3)) : f(0) = f(1) = I\}$$

можно получить, рассмотрев редукцию Морса – Ботта со значениями в двумерной сфере. Этую редукцию можно разложить в композицию двух редукций:

бесконечномерной — в многообразие петель на двумерной сфере, и конечномерной — из многообразия петель на сфере к функции на двумерной сфере.

Итак, задача (2.2.16) является уравнением Эйлера — Лагранжа экстремалей функционала полной энергии (2.2.17).

Вектор $\omega = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3$ канонически отождествляется [3] с матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.18)$$

для которой имеет место представление $\Omega = f^{-1}(s) \frac{df}{ds}(s)$.

Нам понадобится понятие КИ-подмногообразие [174]. Напомним его определение: *гладкое с пустым краем подмногообразие $K \subset E$ называется квазинвариантным относительно функционала V , если существует такая гладкая ретракция $p : O(K) \rightarrow K$, где $O(K)$ — окрестность K в E , что каждая точка $a \in K$ является критической точкой для сужения $V|_{p^{-1}(a)}$.* Если K — конечномерное КИ-подмногообразие, то найдется такая окрестность $\tilde{O}(K)$, что тройка $\{\tilde{O}, K, p\}$ является гладким локально тривиальным расслоением с базой K и проекцией p . Таким образом, подмногообразие K является квазинвариантным, если некоторая окрестность $O(K)$ гладко расслаивается над K и каждая точка $a \in K$ является критической точкой для сужения $V|_{p^{-1}(a)}$, где p — проекция расслоения. Если каждая точка $a \in K$ является морсовской критической точкой для сужения $V|_{p^{-1}(a)}$, то K называется регулярным (морсовским) квазинвариантным подмногообразием. Для всех точек связного морсовского квазинвариантного подмногообразия K индекс Морса $V|_{p^{-1}(a)}$ будет постоянным, и это постоянное значение называется индексом Морса квазинвариантного подмногообразия K (обозначаемым $Ind(V, K)$). Заметим, что каждое инвариантное относительно V подмногообразие $K \subset E$ является квазинвариантным (подмногообразие K называется инвариантным, если $grad V(a) \in T_a(K)$ для $\forall a \in K$).

При условии фредгольмовости индекса ноль функционала V каждое его компактное морсовское КИ-подмногообразие является структурно устойчивым: при гладком параметрическом возмущении функционала вблизи невозмущенного квазиинвариантного подмногообразия имеется диффеоморфное ему морсовское квазиинвариантное подмногообразие для возмущенного функционала V_λ (при всех достаточно малых λ). Значение индекса Морса при этом также сохраняется.

Редукция к эйлерову стержню

Пусть \mathcal{M} — банахова группа Ли C^2 -петель на $SO(3)$ в единице:

$$\mathcal{M} = \{f \in C^2([0, 1], SO(3)) : f(0) = f(1) = I\}.$$

Отображение $p : f(s) \mapsto \tau(s) := f(s)r_3$ задает гладкую субмерсию из \mathcal{M} на гладкое банахово многообразие $\tilde{\mathcal{M}}$ петель класса C^2 на двумерной сфере S^2 :

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{\tau \in C^2([0, 1], S^2) : \tau(0) = \tau(1) = r_3\}.$$

Прообраз $p^{-1}(\tau)$ любой петли $\tau \in \tilde{\mathcal{M}}$ является орбитой правого действия

$$G \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (g(s), f(s)) \mapsto f(s)g(s)$$

банаховой группы Ли $G = \{g : g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)\}$. Через R_3 обозначается представление вида (2.2.18) для вектора r_3 . Функция $\varphi(s)$ принадлежит классу C^2 , и для нее выполняется условие

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (2.2.19)$$

Следовательно, $p^{-1}(\tau)$ состоит из счетного набора компонент связности $\mathcal{N}_k(\tau)$, определяемых выбором k в (2.2.19).

В случае $A_1 = A_2$ (симметричного стержня) на компоненте $\mathcal{N}_0(\tau)$ имеет место представление

$$V(fg, \lambda) = \int_0^1 \left(A_1 \frac{|\dot{\tau}|^2}{2} + A_3 \frac{(\omega_3 + \dot{\varphi})^2}{2} \right) ds + \lambda \langle \tau, r_3 \rangle, \quad (2.2.20)$$

где $g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)$, ω_3 – третья компонента угловой скорости, $|\dot{\tau}(s)|$ – кривизна средней линии стержня. Доказательство того факта следует из соотношения

$$|\dot{\tau}(s)|^2 = \omega_1^2(s) + \omega_2^2(s),$$

вытекающего из равенств

$$\tau(s) = f(s)r_3, \quad |\dot{f}(s)r_3| = |f^{-1}(s)\dot{f}(s)r_3| = |\Omega r_3| = |[\omega, r_3]|,$$

и соотношения

$$(fg)^{-1} \frac{d}{ds}(fg) = g^{-1}f^{-1}(\dot{f}g + f\dot{g}) = g^{-1}(\Omega + \dot{\varphi}R_3)g.$$

Из представления (2.2.20) получаем, что $V|_{p^{-1}(\tau)}$ имеет ровно по одной точке минимума на каждой компоненте $\mathcal{N}_k(\tau)$. Причем $f \in \mathcal{N}_k(\tau)$ является точкой минимума $V|_{p^{-1}(\tau)}$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\int_0^1 \omega_3^2 ds = c_k^2, \tag{2.2.21}$$

где

$$c_k = 2\pi k + \int_0^1 \omega_3 ds.$$

Интеграл $\int_0^1 \omega_3 ds$ является инвариантом правого действия G на \mathcal{M} .

Нетрудно установить, что ограничение $V|_{p^{-1}(\tau)}$ является геодезически выпуклым в бесконечномерной римановой метрике, в которой расстояние между $f(s)$ и $f(s)g(s)$, $g(s) = \exp(\varphi(s)R_3)$, измеряется интегралом $\int_0^1 \varphi^2(s)ds$. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2.1 (см. [47]) Пусть

$$\mathcal{O} = \left\{ f \in \mathcal{M} : \left| \int_0^1 \omega_3 ds \right| < \pi \right\}.$$

Тогда функционал

$$\tilde{V}(\tau, \lambda) := \inf_{f: f \in \mathcal{O} \cap \pi^{-1}(\tau)} V(f, \lambda), \quad \tau \in p(\mathcal{O}),$$

является гладким, и для него имеет место представление

$$\int_0^1 \left(A_1 \frac{|\dot{\tau}|^2}{2} + \lambda(\tau, r_3) \right) ds + \frac{A_3}{2} \left(\int_0^1 \omega_3 ds + 2\pi k \right)^2. \quad (2.2.22)$$

Данное утверждение означает возможность редукции (бесконечномерной), позволяющей сводить изучение поведения V на области \mathcal{O} к изучению \tilde{V} на области $p(\mathcal{O}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$. Из геодезической выпуклости V на $p^{-1}(\tau)$ следует, что критические точки V на \mathcal{O} взаимно однозначно соответствуют критическим точкам \tilde{V} на $p(\mathcal{O})$. При этом невырожденные критические точки переходят в невырожденные и только невырожденные с сохранением значений индекса Морса, а соответствующие друг другу вырожденные критические точки имеют изоморфные локальные кольца особенностей.

Применение редуцирующей схемы Морса – Ботта

В общем случае переход к конечномерной задаче выглядит (для абстрактной вариационной задачи $V(x) \rightarrow \text{extr}$) следующим образом: рассматривается система редуцирующих функционалов $p_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ (с линейно независимыми градиентами в каждой точке), посредством которой совершается переход к ключевой функции

$$W(\xi_1, \dots, \xi_n) = \inf_{x: p_i(x) = \xi_i} V(x) \quad (2.2.23)$$

(при некоторых условиях технического характера [47]). Система \mathfrak{P} называется также *системой ключевых параметров* для функционала V .

Все топологические и аналитические понятия, так или иначе характеризующие тип стационарной точки (индекс Морса, кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.п.) для исходного функционала, наследуются ключевой функцией.

Анализ функционала энергии в случае $\lambda < 4\pi^2$ можно осуществить (при нагрузке продольного сжатия, не превышающей второго критического значения)

через конечномерную редукцию Морса – Ботта к ключевой функции W

$$W(\xi, \lambda) := \inf_{\tau: \tau(1/2) = \xi} \tilde{V}(\tau, \lambda), \quad \xi \in S^2. \quad (2.2.24)$$

Функция (2.2.24) является гладкой на $S^2 \setminus \{-r_3\}$. Её критические точки взаимно однозначно соответствуют критическим точкам \tilde{V} на $p(\mathcal{O})$, с сохранением значений индексов Морса и типов локальных колец особенностей.

Функция (2.2.24) допускает представление в явном виде. Действительно, маргинальное отображение $\xi \mapsto \tau_\xi$ допускает представление в виде

$$\tau_\xi(s) = e^{\psi(s)R} = (\cos \psi(s))r_3 + (\sin \psi(s))r, \quad r \perp r_3,$$

где $\psi(s)$ получено склейкой решений $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ уравнения

$$\ddot{\psi} + \lambda \sin \psi = 0, \quad (2.2.25)$$

отвечающих краевым условиям

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(1/2) = \eta, \quad \psi_2(1/2) = \eta, \quad \psi_2(1) = 0, \quad \eta = \arccos \langle \xi, r_3 \rangle.$$

Произведя в уравнении равновесия стандартную подстановку [159]

$$\psi = 2 \arcsin(k \sin u), \quad (2.2.26)$$

где k — константа, $0 < k < 1$, получим, что u является решением уравнения

$$\dot{u} = \lambda^{1/2} (1 - k^2 \sin^2 u)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$u(s) = am(\sqrt{\lambda}s; k), \quad (2.2.27)$$

где $am(\sqrt{\lambda}s; k)$ — так называемая амплитуда, полученная обращением эллиптического интеграла первого рода (в нормальной тригонометрической форме Лежандра)

$$\sqrt{\lambda}s = F(u; k) := \int_0^u \frac{dy}{(1 - k^2 \sin^2 y)^{1/2}}.$$

Из (2.2.26) и (2.2.27) получаем явную формулу решения

$$\psi_1(s) = 2 \arcsin \left(k \operatorname{sn}(\sqrt{\lambda}s; k) \right),$$

где

$$\operatorname{sn}(\tau; k) := \sin am(\tau; k)$$

— эллиптический синус. Для производной функции ψ_1 получаем представление

$$\dot{\psi}_1(s) = 2\sqrt{\lambda} \operatorname{cn}(\sqrt{\lambda}s; k),$$

где $\operatorname{cn}(\tau; k) := \cos am(\tau; k)$ — эллиптический косинус.

Соответственно, для лагранжиана

$$L = \frac{\dot{\psi}^2}{2} - \lambda(\cos \psi - 1)$$

на решении $\psi_1(s)$ имеем представление

$$L = 2\lambda k^2 (\operatorname{cn}^2(\sqrt{\lambda}s; k) - \operatorname{sn}^2(\sqrt{\lambda}s; k)) = 2\lambda k^2 (2\operatorname{cn}^2(\sqrt{\lambda}s; k) - 1).$$

Решение ψ_2 уравнения (2.2.26) получается продолжением $\psi_1(s)$ с интервала $[0, 1/2]$ на интервал $[1/2, 1]$ по симметрии: $\psi_2(s) = \psi_1(1 - s)$. Следовательно,

$$\int_0^1 L \, ds = 2 \int_0^{1/2} L \, ds,$$

и для ключевой функции (2.2.24) получаем глобальное представление

$$\widetilde{W}(k, \lambda) = 4\lambda k^2 \left(2 \int_0^{1/2} \operatorname{cn}^2(\sqrt{\lambda}s; k) \, ds - \frac{1}{2} \right)$$

(ключевым параметром здесь служит эллиптический параметр k).

На рисунках 2.1, 2.2 приведены приближенные изображения (в среде Maple) графиков ключевой функции $\widetilde{W}(k, \lambda)$, решений уравнения и прогибов — при докритическом и закритическом ($\lambda = 4$) значениях параметра.

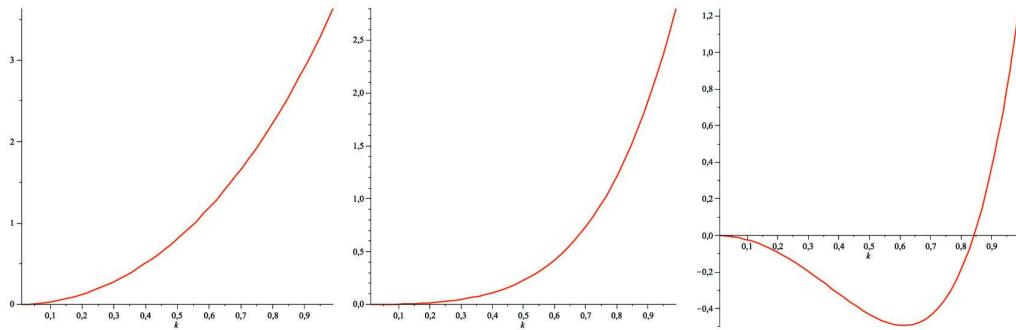


Рисунок 2.1

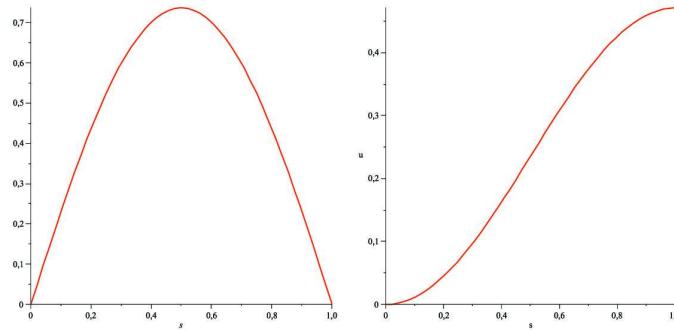


Рисунок 2.2

При наличии деформаций стержня в не нагруженном состоянии уравнение равновесия перестает, вообще говоря, быть интегрируемым (даже для симметричного стержня). Это приводит к необходимости использования метода Ляпунова – Шмидта, при построении приближенных изображений конфигураций стержня. Этот метод требует меньше вычислительных затрат.

Случай искривленного стержня

Случай задачи о конфигурациях искривленного стержня описывается уравнением

$$-A\dot{\omega} + [A\omega, \omega] + \lambda[r_3, f^{-1}r_3] + q[r_3, f^{-1}r_2] = 0, \quad (2.2.28)$$

при краевых условиях

$$f(0) = f(1) = I,$$

где $q = q(s)$ — непрерывная скалярная функция, присутствие которой в уравнении означает наличие начального (до воздействия нагрузки) искривления

стержня в плоскости векторов r_2, r_3 .

Уравнение (2.2.28) определяет экстремали функционала (полной энергии)

$$V(f, \lambda) := \frac{1}{2} (\langle A\omega, \omega \rangle + \lambda \langle r_3, f r_3 \rangle + \langle q r_2, f r_3 \rangle). \quad (2.2.29)$$

Повторяя, с некоторыми изменениями, ранее приведенное рассуждение (для случая $q = 0$) на основе замены $f(s) = e^{\psi(s)R_1}$ (R_1 — матрица, соответствующая вектору r_1), можно установить, что анализ функционала (2.2.29) сводится (не локально) к анализу функционала

$$V := \int_0^1 \left(\frac{\dot{\psi}^2}{2} + \lambda(\cos \psi - 1) + q \sin \psi \right) ds, \quad (2.2.30)$$

экстремали которого определяются краевой задачей

$$f(\psi) = \frac{d^2\psi}{ds^2} + \lambda \sin \psi = q \cos \psi, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0. \quad (2.2.31)$$

Организация вычислений. С целью упрощения вычислений, заменим уравнение (2.2.31) на уравнение

$$f(\psi) = \frac{d^2\psi}{ds^2} + \lambda \sin \psi = q, \quad q = q_1 e_1 + q_2 e_2, \quad (2.2.32)$$

где

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(\pi s), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(2\pi s)$$

— первая и вторая моды прогиба, отвечающие первым двум критическим нагрузкам π^2 и $4\pi^2$. Далее будем использовать тройку $E \subset F \subset H$ непрерывно вложенных пространств, в которой

$$\begin{aligned} E &= \{x \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) : x(0) = x(1) = 0\}, \\ F &= C^2([0, 1], \mathbb{R}), \quad H = L_2([0, 1], \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Первым естественным шагом в нелокальном анализе прогибов, отвечающим, в частности, на вопрос о зависимости количества и характера решений от значений параметров, будет исследование каустики функционала V (множества

значений параметров, при которых существуют вырожденные критические точки функционала). Ниже дано описание методики приближенного изображения плоских сечений каустики и примеры вычислений.

При $\lambda < (n + 1)^2\pi^2$ примером глобально редуцирующей системы функционалов (ключевых параметров) может быть совокупность коэффициентов Фурье $p_j(x) = \langle e_j, x \rangle$, $j = 1, \dots, n$ (схема Ляпунова – Шмидта) [47]. В операторном виде схема Ляпунова – Шмидта, если представить левую часть исходного уравнения как

$$f(x) = q,$$

сводится (при $n = 2$) к системе

$$\left. \begin{array}{l} A_1(u) + \lambda P^2(\sin(u + v)) = q_1 e_1 + q_2 e_2, \\ A_2(v) + \lambda P^{\infty-2}(\sin(u + v)) = 0, \end{array} \right\} \quad (2.2.33)$$

где P^2 , $P^{\infty-2}$ — пара ортопроекторов (в метрике H) на E^2 и $E^{\infty-2}$, соответственно, а $A_1 = A|_{E^2}$, $A_2 = A|_{E^{\infty-2}}$ — соответствующие сужения оператора A . Для второго уравнения последней системы имеет место однозначная разрешимость по v при каждом $u \in E^2$. После построения представления (приближенного) для решения этого уравнения (решения второго уравнения системы (2.2.33)) в форме отображения $v = \Phi(u)$ получаем ключевую функцию в виде $W(u) = V(u + \Phi(u))$.

Вычисление приближенного аналитического представления для отображения $v = \Phi(u)$ возможно на основе принципа сжимающих отображений.

Запишем вместо второго уравнения системы (2.2.33) эквивалентное ему уравнение

$$g(y, v, \lambda) := y + \lambda P^{\infty-2}(\sin(\mathfrak{G}(y) + v)) = 0, \quad (2.2.34)$$

которое будем рассматривать в подпространстве $\mathfrak{L} := N^\perp$ пространства H . Здесь $\mathfrak{G} := (A_2)^{-1}$ — оператор Грина для краевой задачи $\ddot{x} = q$, $x(0) = x(1) = 0$, суженный на подпространство \mathfrak{L} .

Утверждение 2.2 При $\lambda < 9\pi^2$ отображение $g(\cdot, v, \lambda) : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$ является сжимающим (с константой сжатия, не зависящей от ξ, u).

Как и в случае ритцевской аппроксимации ключевая функция и ее приближения линейно зависят от параметров q_1, q_2 . Следовательно, эти параметры не входят в уравнение параболического множества \mathfrak{P} — множества точек, в которых вырождается второй дифференциал.

Построенное таким образом параболическое множество для приближенной ключевой функции (при некотором m) преобразуется затем в плоскость параметров q_1, q_2 градиентным отображением, что в итоге и дает приближенное изображение каустики.

Сходимость итерационного процесса, основанного на формуле (2.2.34), является C^r -равномерной по параметрам для любого заранее заданного $r > 0$ (то есть сходимость осуществляется вместе с производными до порядка r). Если выбрать область определения, на которой функционал V трансверсален всем своим особенностям, то C^r -равномерная сходимость обеспечит «топологическую стабилизацию» приближенных изображений каустики.

Примеры приближенного построения каустик и решений

Ниже на рисунке 2.3 приведены приближенные изображения каустик и решений, полученные посредством применения итерационного процесса ко второму уравнению системы (2.2.33) (на основе метода сжимающих отображений).

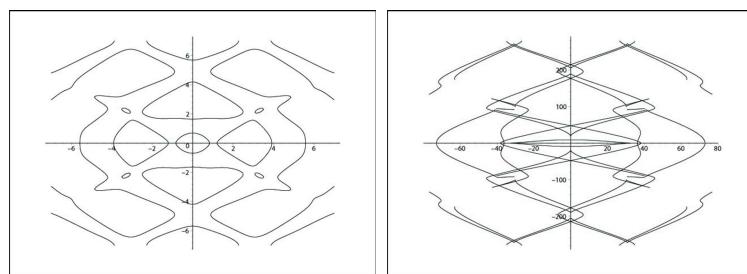


Рисунок 2.3

Фрагменты параболического множества и каустики $\tilde{W}_2(\xi_1, \xi_2)$ при

$$\lambda = 4\pi^2 + 20$$

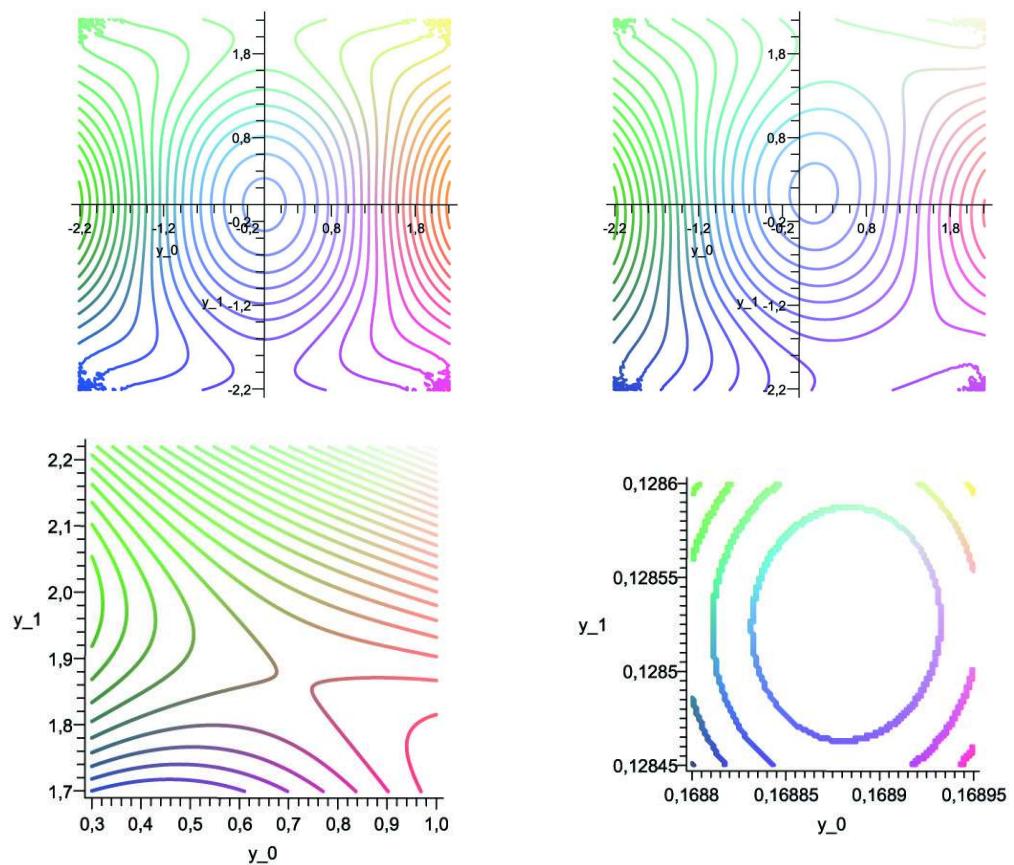


Рисунок 2.4

Линии уровня (в разных масштабах) ключевой функции для соответствующих ячеек регулярности (компонент связности дополнения к каустике)

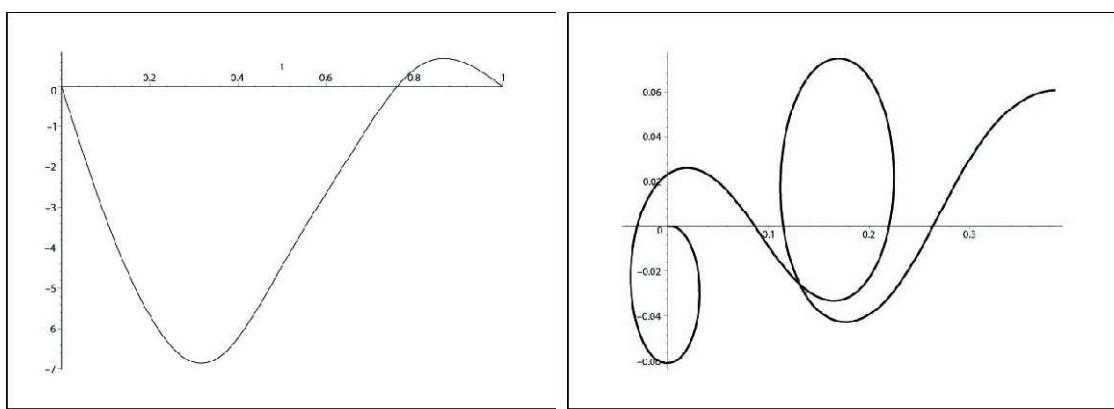


Рисунок 2.5

Изложенная здесь исследовательская схема допускает применение в аналогичной задаче для несимметричного стержня.

2.3 Модель упругой балки на упругом основании

В данном параграфе приведены результаты анализа равновесных конфигураций упругой балки на упругом основании в условиях двухмодового вырождения. Решение этой задачи в случае однородной балки ранее было дано Б.М. Даринским и Ю.И. Сапроновым [41], [47].

Уравнение упругого равновесия ниже записано через функцию прогиба средней линии балки. Это уравнение (и краевые условия) можно без особого труда вывести из уравнения Эйлера, если заметить, что координаты x, y произвольной точки средней линии балки связаны с углом φ (между касательным вектором и осью балки следующими соотношениями):

$$\dot{x}(s) = \cos(\varphi(s)), \quad \dot{y}(s) = \sin(\varphi(s)).$$

Переход к случаю неоднородной балки потребовал перестройки в исследовательской схеме Б.М. Даринского и Ю.И. Сапронова, в основе которой лежало условие постоянства пары собственных функций e_1, e_2 второго дифференциала (в нуле) функционала энергии. В случае неоднородной балки это условие нарушается и, более того, оно не допускает прямого обобщения, например, в виде условия существования непрерывного семейства собственных функций. В предлагаемой схеме условие постоянных собственных функций заменено условием существования пары гладких векторных полей \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 , линейная оболочка которых инвариантна относительно второго дифференциала в нуле. Наличие такой пары достаточно для построения главной части ключевой функции и, как следствие, для проведения анализа ветвления равновесных конфигураций балки.

В построении требуемой пары векторных полей ведущую роль сыграла взятая из монографии В.П. Маслова [142] формула ортогонального проектора (на линейную оболочку \tilde{e}_1, \tilde{e}_2).

Рассмотрение случая слабо неоднородной балки приводит к «понижению» симметрии ключевой функции и увеличению на единицу размерности ее базы

деформации (появляется дополнительное квадратичное слагаемое в главной части ключевой функции). Анализ бифуркационных диаграмм и бифурцирующих критических точек в этой ситуации несколько усложняется, но выявляет новые бифуркационные эффекты.

2.3.1 Модель в случае однородного материала

Колебания и волновые движения упругой балки на упругом основании изучали Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков [148], J.M.T. Thompson, H.B. Stewart [208], Б.С. Бардин, С.Д. Фурта [12] и др. Простейшая нелинейная (промасштабированная) модель движений однородной балки описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

где w — прогиб балки (поле смещений точек средней линии упругой балки, расположенной вдоль оси x).

Итак, известно, что первый шаг в изучении такой задачи — отыскание равновесных (стационарных) состояний, определяемых уравнением

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0. \quad (2.3.35)$$

Если рассмотреть краевые условия, отвечающие случаю свободной опёртости на границе (шарнирное закрепление)

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0, \quad (2.3.36)$$

то полученная граничная задача может допускать 2-мерные вырождения, порождающие 2-модовые бифуркции с интересными геометрическими и физическими эффектами. Решение этой задачи проводится на основе конечно-мерной редукции [123] к описанию экстремалей 2-параметрического семейства полиномов от двух переменных. В случае слабо неоднородной балки также допускается аналогичное сведение, но при этом в полиноме появляется дополнительное слагаемое, создающее более сложную картину бифуркационного поведения решений.

Замечание 2.2 Случай жесткого закрепления на границе исследуется аналогично. При анализе используются только соответствующие конкретному случаю моды [32].

Уравнение (2.3.35) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \quad (2.3.37)$$

Двумерное вырождение нулевой экстремали происходит при

$$\kappa = \kappa_1 := (p^2 + q^2)\pi^2, \quad \alpha = \alpha_1 := p^2 q^2 \pi^4, \quad p, q \in \mathbb{N},$$

со стандартным базисом (модами бифуркации) ядра второго дифференциала

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(p \pi x), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(q \pi x).$$

Ниже предполагается, что $p = 1, q = 2$ и, соответственно, $\kappa_1 = 5\pi^2, \alpha_1 = 4\pi^4$ (эти значения являются наименьшими из тех, при которых происходит 2-мерное вырождение; в остальных случаях анализ аналогичен). Ниже $\delta_1 := \kappa - \kappa_1, \delta_2 := \alpha - \alpha_1$ — критические приращения.

При сделанных предположениях анализ возможных бифуркационных эффектов осуществляется посредством редукции Ляпунова — Шмидта [47] к (ключевой) функции (двух переменных)

$$W(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, e_1 \rangle = \xi_1, \langle w, e_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (2.3.38)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2).$$

Функционал (2.3.37) инвариантен относительно инволюций J_1, J_2 :

$$J_2(p)(x) := p(1-x), \quad J_1 := -J_2.$$

Следовательно, функция (2.3.38) обладает симметрией прямоугольного параллелограмма:

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2),$$

из которой вытекает [47] справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — линейная ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . Таким образом, для ключевой функции имеет место асимптотическое представление

$$\begin{aligned} W_0(\xi, \delta) &= \frac{\lambda_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{4}(A\xi_1^4 + 2B\xi_1^2\xi_2^2 + C\xi_2^4) + \\ &\quad + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

$$\lambda_1 = \delta_1 - \pi^2\delta_2, \quad \lambda_2 = \delta_1 - 4\pi^2\delta_2,$$

$$A = \int_0^1 e_1^4 dx = \frac{3}{2}, \quad B = \int_0^1 e_1^2 e_2^2 dx = 3, \quad C = \int_0^1 e_2^4 dx = \frac{3}{2}.$$

Сократив на множитель $3/2$, получим функцию (2.3.39) с нормализованной главной частью:

$$\widetilde{W}_0(\xi, \delta) = \widetilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\widetilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{4}(\xi_1^4 + 4\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4).$$

«Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $\widetilde{W}_0(\xi, \delta)$ полностью определяются ее главной частью $\widetilde{U}(\xi, \delta)$, которая представляет собой «возмущенную двумерную сборку» (с коэффициентом двойного отношения $a = 2$), четную по каждой переменной.

Критические точки определяются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \xi_1} &= \tilde{\lambda}_1\xi_1 + \xi_1^3 + 2\xi_1\xi_2^2 = 0, \\ \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \xi_2} &= \tilde{\lambda}_2\xi_2 + 2\xi_1^2\xi_2 + \xi_2^3 = 0, \end{aligned} \right\}$$

все решения которой делятся на три типа:

1) нулевое решение $\xi_1 = \xi_2 = 0$,

- 2) 1-модовые решения $\xi_1 = \pm\sqrt{-\tilde{\lambda}_1}$ ($\lambda_1 < 0$), $\xi_2 = 0$ и $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \pm\sqrt{-\tilde{\lambda}_2}$ ($\lambda_2 < 0$),
 3) 2-модовые решения $\xi_1 = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2}{3}}$, $\xi_2 = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1}{3}}$, ($\tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2 > 0$, $\tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1 > 0$).

Пусть $\theta_1 = \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2$, $\theta_2 = \tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1$. Так как матрица Гессе функции \tilde{U} представима в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1\xi_2 \\ 4\xi_1\xi_2 & \tilde{\lambda}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

то, как нетрудно проверить, при $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$ существуют четыре 2-модовые критические точки индекса 1. Все 1-модовые точки при этом являются точками локальных минимумов, а нуль — критической точкой индекса 2. Рождение 1-модовых критических точек происходит при переходах параметров $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ в области отрицательных значений.

Каустика (бифуркационная диаграмма функций [6]) $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции \tilde{U} разбивает плоскость управляющих параметров на шесть зон

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_1 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}, \\ \omega_2 &= \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 < 0\}, \\ \omega_3 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 < 0, \theta_2 > 0\}, \\ \omega_4 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 < 0\}, \\ \omega_5 &= \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}. \end{aligned}$$

Каждой зоне соответствует свой расклад (*bif*-расклад) бифурсирующих критических точек: параметрам из зоны ω_0 отвечает случай единственной критической точки (точка минимума в нуле), для ω_1, ω_2 — пара симметрично расположенных (относительно нуля) 1-модовых точек минимума и седло в нуле, для ω_3, ω_4 — пара симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, пара 1-модовых седел и точка локального максимума в нуле, для ω_5 — четверка симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, четверка

2-модовых седел и точка локального максимума в нуле.

При обходе плоскости управляемых параметров против часовой стрелки вокруг нуля, начиная с зоны ω_0 , соответствующие метаморфозы линий уровней и распределений критических точек изображены на следующей диаграмме:

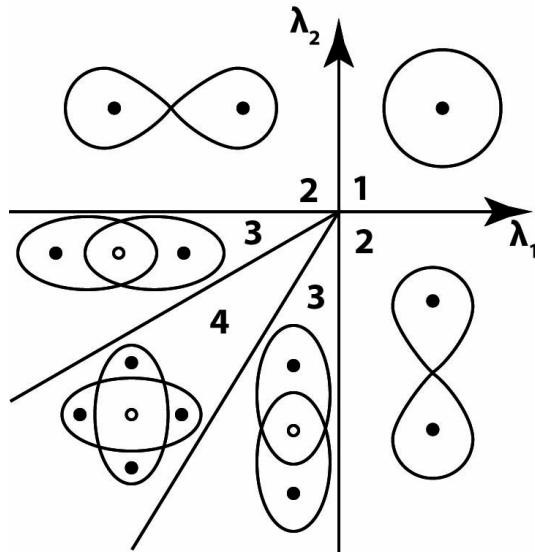


Рисунок 2.6

В этом случае появляются те и только те расклады бифурцирующих критических точек (*bif*-расклады), которым соответствуют следующие целочисленные векторы: $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(4, 4, 1)$.

Случай пары упруго связанных балок

Простейшая нелинейная (промасштабированная) модель равновесных состояний пары упруго связанных балок определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_1}{dx^4} + \kappa_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} + \alpha_1 w_1 + w_1^3 + a w_1 w_2^2 &= 0, \\ \frac{d^4 w_2}{dx^4} + \kappa_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} + a w_1^2 w_2 + \alpha_2 w_2 + w_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

Если рассмотреть (стандартные) краевые условия

$$w_1(0) = w_1(1) = w_1''(0) = w_1''(1) = 0,$$

$$w_2(0) = w_2(1) = w_2''(0) = w_2''(1) = 0, \quad (2.3.41)$$

то полученная граничная задача допускает 3-мерные и 4-мерные вырождения, порождающие 3-модовые и 4-модовые бифуркации.

Уравнение (2.3.40) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 w_2}{dx^2} \right)^2 - \kappa_1 \left(\frac{dw_1}{dx} \right)^2 - \kappa_2 \left(\frac{dw_2}{dx} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} (\alpha_1 w_1^2 + \alpha_2 w_2^2) + \frac{w_1^4 + a w_1^2 w_2^2 + w_2^4}{4} \right) dx. \quad (2.3.42)$$

Четырехмерное вырождение нулевой экстремали происходит при

$$\kappa_1 := (p_1^2 + q_1^2) \pi^2, \quad \alpha_1 := p_1^2 q_1^2 \pi^4, \quad p_1, q_1 \in \mathbb{N},$$

$$\kappa_2 := (p_2^2 + q_2^2) \pi^2, \quad \alpha_2 := p_2^2 q_2^2 \pi^4, \quad p_2, q_2 \in \mathbb{N},$$

со стандартным базисом (модами бифуркации) ядра второго дифференциала

$$e_1 = \left(\sqrt{2} \sin(p_1 \pi x), 0 \right), \quad e_2 = \left(\sqrt{2} \sin(q_1 \pi x), 0 \right),$$

$$e_3 = \left(0, \sqrt{2} \sin(p_2 \pi x) \right), \quad e_4 = \left(0, \sqrt{2} \sin(q_2 \pi x) \right).$$

При сделанных предположениях анализ возможных бифуркационных эффектов осуществляется посредством редукции Ляпунова – Шмидта к (ключевой) функции (четырех переменных), обладающей симметрией прямоугольного параллелепипеда.

«Геометрический сюжет» бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по закритическим приращениям управляющих параметров) для функции $\widetilde{W}_0(\xi, \delta)$ определяются ее главной частью $\widetilde{U}(\xi, \delta)$, которая представляет собой возмущенную четырехмерную сборку.

Таким образом, решение этой задачи можно осуществить на основе конечномерной редукции к задаче об экстремалах параметрического семейства полиномов от трех и четырех переменных. В случае слабой неоднородности балок главная часть ключевой функции содержит дополнительные слагаемые, создающие более сложную картину бифуркационного поведения критических точек.

2.3.2 Модель в случай неоднородного материала

Упругие равновесия слабо неоднородной балки описываются уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(q(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0, \quad q(x) = 1 + \varepsilon \gamma(x), \quad (2.3.43)$$

где ε — малый параметр, γ — гладкая функция. Уравнение (2.3.43) (также рассматриваемое на отрезке $[0, 1]$ числовой оси при краевых условиях (2.3.36)) определяет экстремали функционала

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(q(x) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \quad (2.3.44)$$

Так как в «неоднородном случае» появляется третий управляющий параметр, то дискриминантное множество будет двумерной поверхностью в трехмерном пространстве (параметры δ_1, δ_2 (закритические приращения к параметрам κ и α) вместе с параметром ε образуют трехмерное пространство параметров \mathbb{R}^3).

Теорема 2.3 В краевой задаче (2.3.43), (2.3.36) дополнение к дискриминантному множеству (подмножество $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma(f)$), рассмотренное в достаточно малой окрестности нуля, состоит из четырех связных открытых подмножеств $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5$ и Ω_9 (ячеек регулярности), которым соответствуют следующие bif-расклады: $(1, 0, 0), (2, 1, 0), (2, 2, 1), (4, 4, 1)$.

Доказательство этой теоремы, основанное на применении модифицированной схемы Ляпунова – Шмидта, будет дано в следующих разделах.

Наличие «весового» множителя $q(x)$ не позволяет применять исследовательскую схему работы [41], так как из-за него не выполняется условие постоянства мод бифуркации. На нем основан вычислительный алгоритм [41]. Тем не менее, бифуркационный анализ решений краевой задачи (2.3.43), (2.3.36) также можно осуществить посредством редукции Ляпунова – Шмидта к ключевой функции более общего вида

$$\widetilde{W}(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, \tilde{e}_1 \rangle = \xi_1, \langle w, \tilde{e}_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (2.3.45)$$

где $\{\tilde{e}_k\}$ — «возмущенные» моды бифуркации:

$$\tilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon),$$

образующие базис в 2-мерном корневом подпространстве оператора Гессе $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B}$ в нуле (соответствующего функционалу (2.3.44)), где

$$\mathcal{A}w := \frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w, \quad \mathcal{B}w := \frac{d^2}{dx^2} \left(\gamma \frac{d^2 w}{dx^2} \right),$$

$$e_k = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$$

(элементы \tilde{e}_k не являются, вообще говоря, собственными функциями оператора \mathcal{H}).

Основная техническая трудность в построении главной части ключевой функции (2.3.45) состоит в вычислении коэффициентов h_k . Их можно определить на основе теоремы 2.1

Вместо собственных функций рассматриваются корневые функции $\tilde{e}_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, для которых

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda) \tilde{e}_j(\lambda) = \sum_k \alpha_{jk}(\lambda) \tilde{e}_k(\lambda).$$

Входящие в эти соотношения функции $\alpha_{jk}(\lambda)$, $\tilde{e}_j(\lambda)$ будут гладко зависеть от λ . В качестве искомых базисных элементов можно взять

$$\tilde{e}_k(\lambda) := \mathbf{P}(\lambda)(e_k),$$

где

$$\mathbf{P}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} \mathcal{R}(\lambda, z) dz$$

ортопроектор на двумерное корневое подпространство, ℓ — окружность достаточно малого радиуса с центром в нуле (на комплексной плоскости), $\mathcal{R}(\lambda, z)$ — резольвента:

$$\mathcal{R}(\lambda, z) = (\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B} - zI)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\tilde{e}_k = e_k + \varepsilon h_k + o(\varepsilon), \quad (2.3.46)$$

где

$$h_k = \mathcal{M}e_k, \quad (2.3.47)$$

$$\mathcal{M} := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz. \quad (2.3.48)$$

2.3.3 Формулы интегральных коэффициентов

Из предыдущих рассуждений следует, что для получения корневых векторов \tilde{e}_k необходимо вычислить интеграл

$$\mathcal{M} e_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} e_k dz, \quad (2.3.49)$$

с учетом краевых условий (2.3.36) (здесь ℓ контур $|z| = 1$).

Собственное число $z = 0$ двукратно. Ему отвечают собственные элементы $e_k = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$, $k = 1, 2$.

Заметим, что если e_k — собственный вектор, отвечающий собственному числу z_k : $\mathcal{A}e_k = z_k e_k$, то

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1}(\mathcal{A} - z_k I)e_k = 0,$$

или

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1}(\mathcal{A} - zI + zI - z_k I)e_k = e_k - (z_k - z)(\mathcal{A} - zI)^{-1}e_k = 0.$$

Отсюда получаем

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1}e_k = \frac{e_k}{z_k - z}.$$

Таким образом, формулу (2.3.49) можно записать в виде:

$$\mathcal{M}e_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} e_k}{z_k - z} dz. \quad (2.3.50)$$

Очевидно, что оператор \mathcal{A} с заданной областью определения и краевыми условиями является симметричным, а собственные функции, в силу следствия из ([150], с. 91, теорема 1), образуют полную систему в $L^2[0, 1]$.

Рассмотрим функцию $g(x) = \mathcal{B}e_k$, $g(x) \in L^2[0, 1]$, и разложим ее в ряд по собственным функциям оператора \mathcal{A} :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x), \quad (2.3.51)$$

где

$$c_n = \int_0^1 g(s) e_n(s) ds = \int_0^1 e_n(s) (\gamma(s) e_k''(s))'' ds. \quad (2.3.52)$$

Интегрируя по частям, преобразуем интеграл (2.3.52) к виду

$$c_n = -(n\pi)^2 \int_0^1 e_n(s) \gamma(s) e_k''(s) ds = (nk\pi^2)^2 \int_0^1 \gamma(s) e_n(s) e_k(s) ds.$$

Пользуясь формулой (2.3.51) в интеграле (2.3.50), при $\kappa = 5\pi^2$, $\alpha = 4\pi^4$ получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}e_k(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(\mathcal{A} - zI)^{-1}}{z} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x) dz = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e_n(x) dz}{z(z_n - z)} = \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} c_n e_n(x) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z_n} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z_n - z} \right) dz = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{c_n e_n(x)}{z_n}. \end{aligned}$$

Здесь были учтено, что $z_1 = z_2 = 0$ и

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} = 0.$$

Таким образом, на основе (2.3.49) получаем для возмущенных собственных функций (в случае слабой неоднородности):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}e_1 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\sqrt{2} n^2}{(n^2-4)(n^2-1)} \left(\int_0^1 \gamma(s) \sin(n\pi s) \sin(\pi s) ds \right) \sin(n\pi x), \\ \mathcal{M}e_2 &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{8\sqrt{2} n^2}{(n^2-4)(n^2-1)} \left(\int_0^1 \gamma(s) \sin(n\pi s) \sin(2\pi s) ds \right) \sin(n\pi x). \end{aligned} \right\} \quad (2.3.53)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.4 *Возмущенные корневые векторы \tilde{e}_k , $k = 1, 2$ можно представить в виде (2.3.46), где h_k определяются соотношениями (2.3.47), (2.3.53).*

Замечание 2.3 Последняя теорема дает возможность компьютерного анализа влияния характера неоднородности балки на формы ее закритического прогиба. Результаты компьютерного эксперимента, проведенного на основе этой теоремы, представлены на рисунках в заключительной части главы.

Теперь, когда известны первые асимптотики корневых векторов \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 , можно построить главную часть ключевой функции (с точностью до линейной замены координат).

$$W_q(\xi, \nu) = \frac{1}{2} (\nu_1 \xi_1^2 + \nu_2 \xi_2^2 + 2 \nu_3 \xi_1 \xi_2) + \frac{1}{4} (A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4) + \\ + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\nu, \varepsilon) + o(\nu, \varepsilon),$$

где

$$\nu_1 = \int_0^1 \left(q \left(\frac{d^2 \tilde{e}_1}{dx^2} \right)^2 - (\kappa_1 + \delta_1) \left(\frac{d \tilde{e}_1}{dx} \right)^2 + (\alpha_1 + \delta_2) \tilde{e}_1^2 \right) dx, \quad (2.3.54)$$

$$\nu_2 = \int_0^1 \left(q \left(\frac{d^2 \tilde{e}_2}{dx^2} \right)^2 - (\kappa_1 + \delta_1) \left(\frac{d \tilde{e}_2}{dx} \right)^2 + (\alpha_1 + \delta_2) \tilde{e}_2^2 \right) dx, \quad (2.3.55)$$

$$\nu_3 = \varepsilon \int_0^1 \left(\gamma \frac{d^2 \tilde{e}_1}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \tilde{e}_2}{dx^2} \right) dx, \quad (2.3.56)$$

$$A = C = \int_0^1 e_1^4 dx = \frac{3}{2}, \quad B = \int_0^1 e_1^2 e_2^2 dx = 3.$$

После сокращения на множитель $\frac{3}{2}$ получаем искомое представление ключевой функции. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2.5 Существует система ключевых координат, в которой для ключевой функции имеет место представление

$$\widetilde{W}_q(\xi, \nu) = \frac{1}{2} (\widetilde{\nu}_1 \xi_1^2 + \widetilde{\nu}_2 \xi_2^2 + 2 \widetilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2) + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 4\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4) +$$

$$+ o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\tilde{\nu}, \varepsilon) + o(\tilde{\nu}, \varepsilon).$$

При этом $\tilde{\nu}_j$ определены соотношениями (2.3.47), (2.3.48), (2.3.53), (2.3.54)–(2.3.56).

По сравнению с функцией W_0 , определенной равенством (2.3.39), здесь появилось дополнительное слагаемое $\tilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2$, разрушающее симметрию прямоугольного параллелограмма.

Замечание 2.4 Гладкий локальный топологический тип каустики (в нуле) и расклады бифурцирующих экстремалей функционала энергии V совпадают с гладким локальным топологическим типом каустики и раскладами бифурцирующих экстремалей ключевой функции W (см. главу 2). Из теорем Дж. Мазера о конечной определенности ростков гладкой функции следует, что локальный топологический тип каустики и набор *bif*-раскладов ключевой функции W полностью определяется ее главной частью U . Поэтому, для завершения доказательства теоремы 4.3 осталось изучить каустику и расклады критических точек функции U .

Замечание 2.5 Бифуркационный анализ дифференциальных уравнений четвертого порядка при периодических краевых условиях был осуществлен В.Г. Задорожным и его учениками на основе методов теории усреднений [59].

2.3.4 Анализ каустики ключевой функции

В данном разделе рассмотрим следующую систему уравнений, которая определяет критические точки:

$$\left. \begin{array}{lcl} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_1} & = & \tilde{\nu}_1 \xi_1 + \xi_1^3 + 2\xi_1 \xi_2^2 + \tilde{\nu}_3 \xi_2 \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \xi_2} & = & \tilde{\nu}_2 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^3 + \tilde{\nu}_3 \xi_1 \\ \det H & = & \left| \begin{array}{cc} \tilde{\nu}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1 \xi_2 + \tilde{\nu}_3 \\ 4\xi_1 \xi_2 + \tilde{\nu}_3 & \tilde{\nu}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{array} \right| \end{array} \right\} = 0.$$

(здесь H — матрица Гессе).

Решая данную систему относительно $\tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \tilde{\nu}_3$ и перейдя к полярным координатам $\xi_1 = \rho \sin \varphi, \xi_2 = \rho \cos \varphi$, получим

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\nu}_1 = -\rho^2 \frac{(3+\cos^3(2\varphi))}{2+\sin^2(2\varphi)}, \\ \tilde{\nu}_2 = -\rho^2 \frac{(3-\cos^3(2\varphi))}{2+\sin^2(2\varphi)}, \\ \tilde{\nu}_3 = -3\rho^2 \frac{\sin^3(2\varphi)}{4+2\sin^2(2\varphi)}. \end{array} \right\}$$

На основе этой системы соотношений получено (в компьютерной среде Maple) следующее изображение каустики, изображенное на Рисунке 2.7.

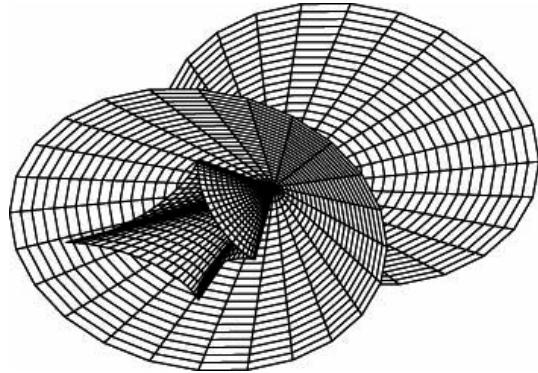
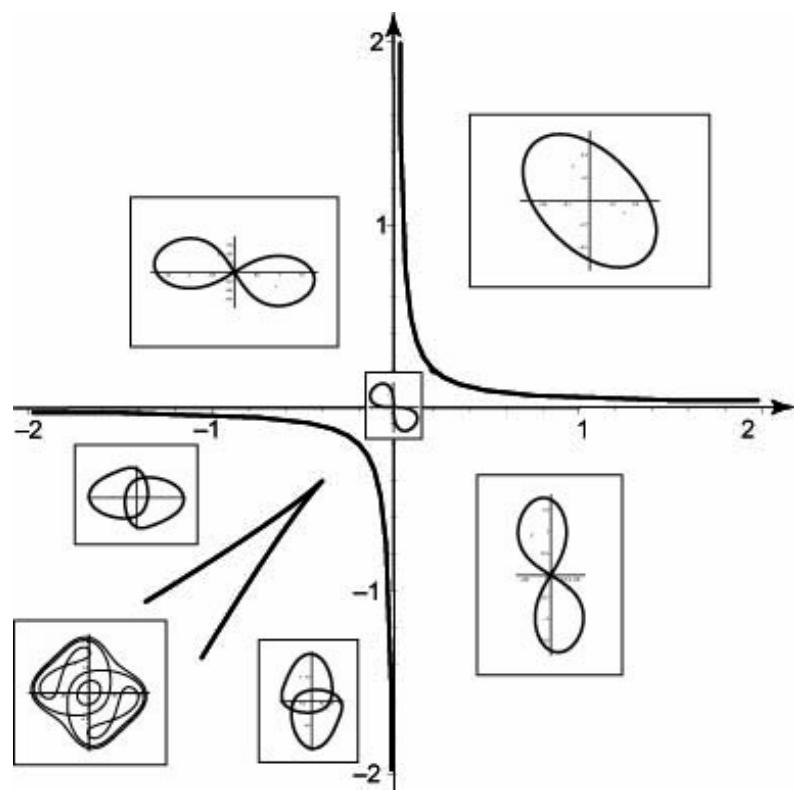
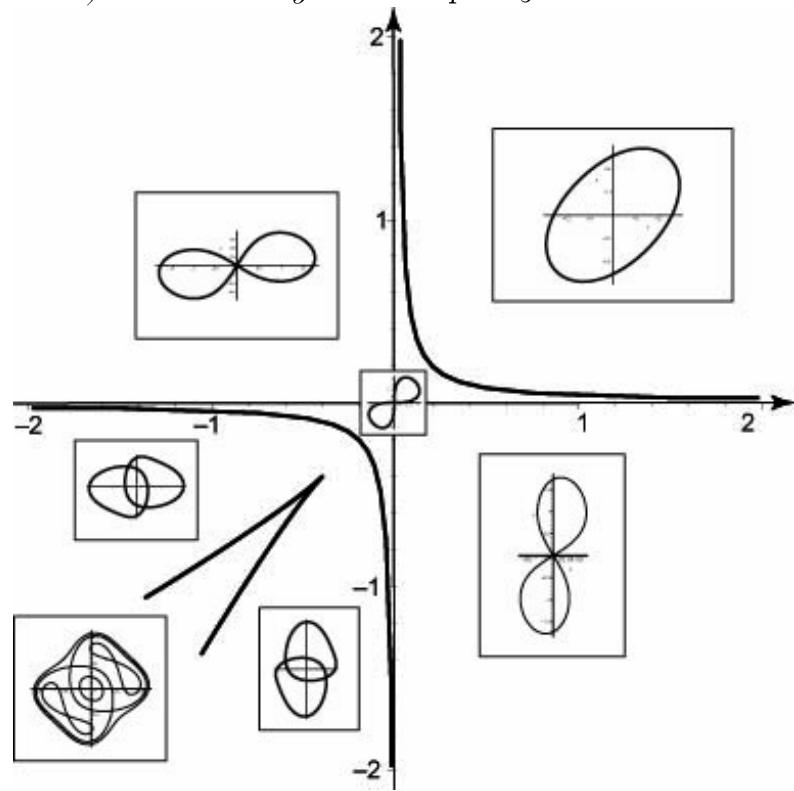


Рисунок 2.7

Если зафиксировать $\tilde{\nu}_3 = \text{const} \neq 0$, то получим двумерное сечение каустики, приведенное на рисунке 2.8, посредством которого удобно иллюстрировать появление метаморфоз линий уровней (в зависимости от изменения управляемых параметров).



a) сечение каустики при $\tilde{\nu}_3 = \text{const} > 0$



б) сечение каустики при $\tilde{\nu}_3 = \text{const} < 0$

Рисунок 2.8

На рисунке 2.9 изображены линии уровня главной части ключевой функции

ции (при «типовых» значениях параметров $\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$, $\tilde{\nu}_3$ и функции $\gamma = 0,01 \cdot \sin(2\pi x)$): сепаратрисные линии уровня ключевой функции и прогибы на рисунке 2.10, соответствующие точкам минимума.

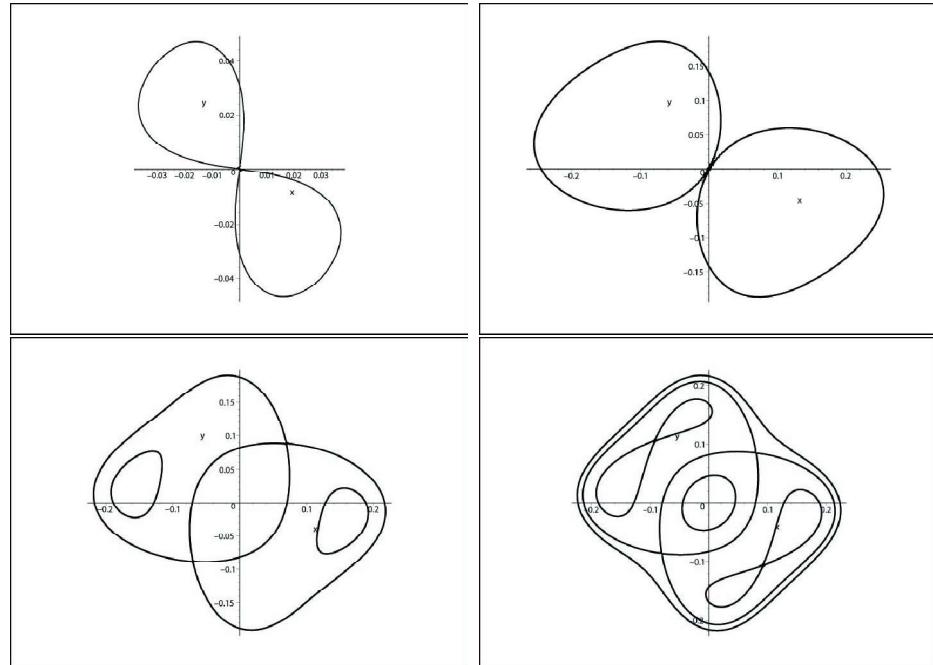


Рисунок 2.9

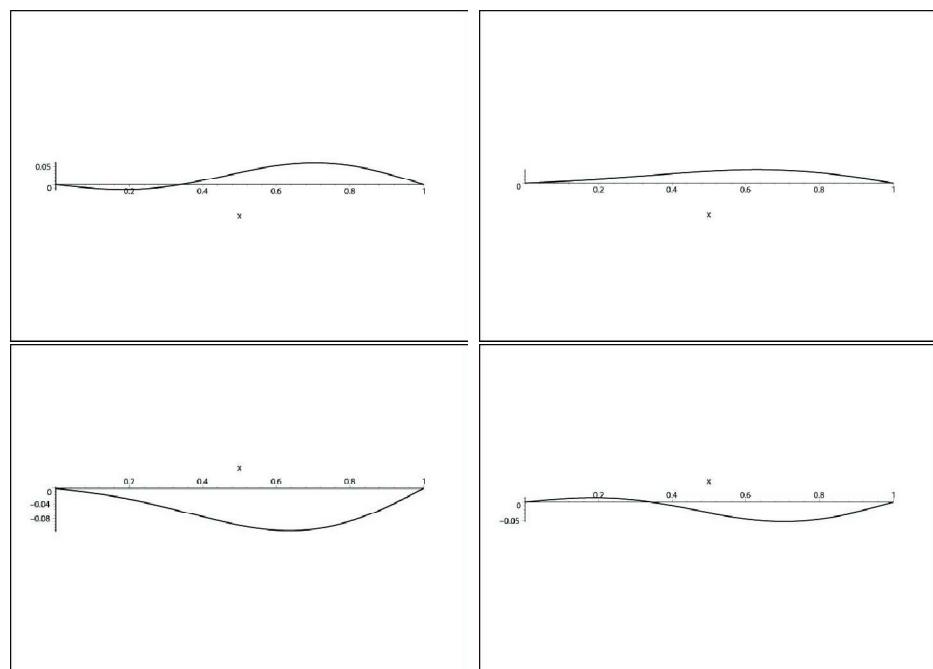


Рисунок 2.10

2.4 Двухмодовые прогибы слабо неоднородной упругой пластины Кárмана

В данном разделе представлен бифуркационный анализ слабо неоднородной упругой пластины. Основная трудность при появлении слабой неоднородности заключена в потере симметрии прямоугольного параллелограмма, что требует вычисления возмущенных мод бифуркаций и построении дискриминантного множества ключевой функции.

2.4.1 Однородная упругая пластина

Равновесное состояние упругой прямоугольной пластины, продольно сжатой и шарнирно закрепленной на крае, описывается уравнениями Кárмана (промасштабированными) [32]

$$\Delta^2 w - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta^2 \varphi + \frac{1}{2}[w, w] = 0, \quad x, y \in \Omega_a, \quad (2.4.57)$$

при краевых условиях

$$w = \Delta w = \varphi = \Delta \varphi = 0|_{\Omega_a}, \quad \Omega_a = [0, a] \times [0, 1]. \quad (2.4.58)$$

Через w и φ в этих уравнениях обозначены функции прогиба и натяжения пластины длины a и ширины единица, Δ – гармонический оператор Лапласа, $[w, \varphi] := w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy}$, λ – параметр нагрузки.

Локальный бифуркационный анализ равновесий пластины Кárмана успешно осуществляется благодаря тому, что имеет место представление

$$W(\xi, \lambda, a) = \frac{1}{2} (\alpha_1(\lambda, a)\xi_1^2 + \alpha_2(\lambda, a)\xi_2^2) + \sum_{i,j=1}^2 h_{i,j}\xi_i^2\xi_j^2 + \dots,$$

где α_1, α_2 – собственные значения оператора $\Delta^2 + \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, отвечающие собственным векторам $e_k = 2 \sin(\frac{k\pi x}{a}) \sin(\pi y)$, $k = 1, 2$. (см. [172]),

$$h_{j,j} = \frac{1}{8} |\Delta^{-1}[e_j, e_j]|^2,$$

$$h_{1,2} = h_{2,1} = \frac{1}{8} (\langle \Delta^{-1}[e_1, e_1], \Delta^{-1}[e_2, e_2] \rangle + 2|\Delta^{-1}[e_1, e_2]|^2).$$

Из результатов вычислений, опубликованных в [199], следует, что для нескольких начальных мод прогиба выполняется неравенство

$$\sqrt{h_{1,1}h_{2,2}} < h_{1,2} < 3\sqrt{h_{1,1}h_{2,2}}, \quad (2.4.59)$$

благодаря которому можно осуществить полный локальный анализ бифуркации равновесий (в случае однородности).

Замечание 2.6 Неравенство (2.4.59) означает, в частности, положительную определенность формы

$$\sum_{i,j=1}^2 h_{i,j} \xi_i \xi_j$$

в положительной четверти плоскости \mathbb{R}^2 . Вопрос о знакопределенности этой формы для произвольной пары мод до сих пор открыт.

2.4.2 Неоднородная упругая пластина

Для описания равновесных состояний упругой прямоугольной слабо неоднородной пластины q при старшей производной появляется дополнительный параметр неоднородности, и уравнение принимает вид

$$\Delta(q\Delta w) - [w, \varphi] + \lambda w_{xx} = \Delta^2 \varphi + \frac{1}{2}[w, w] = 0, \quad x, y \in \Omega_a, \quad (2.4.60)$$

при краевых условиях (2.4.58).

q — коэффициент, отвечающий за неоднородность материала, из которого сделана пластина, $q = 1 + \varepsilon\gamma$, ε — малый параметр, $\gamma(x, y)$ — достаточно гладкая функция неоднородности, $[w, \varphi] := w_{xx}\varphi_{yy} + w_{yy}\varphi_{xx} - 2w_{xy}\varphi_{xy}$.

При этом краевая задача (2.4.60), (2.4.58) по-прежнему имеет вариационный характер и соответствующим функционалом действия будет

$$V(w, \varphi, \lambda) = \frac{1}{2}(q|\Delta|^2 - \lambda|w_x|^2 - |\Delta\varphi|^2 - \langle [w, w], \varphi \rangle)$$

на пространстве $H^4 \times H^4$. Здесь

$$|\varphi|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle := \int_{\Omega_a} \varphi^2(x, y) dx dy.$$

Исследование функционала V можно провести через редукцию к функционалу \tilde{V} :

$$\tilde{V} = \sup_{\varphi: \varphi \in H^4} V(w, \varphi, \lambda).$$

Маргинальное отображение $H^4 \rightarrow H^4 \times H^4$, отвечающее данной редукции, задается соотношением $w \mapsto (w, -\frac{1}{2}\Delta^{-1}[w, w])$. Следовательно, имеет место представление

$$\tilde{V}(w, \lambda, q) = \frac{1}{2}(q|\Delta w|^2 - \lambda|w_{xx}|^2) + \frac{1}{8}|\Delta^{-1}[w, w]|^2.$$

Через Δ^{-1} обозначен оператор Грина $\psi \rightarrow \varphi$, где φ — решение задачи Пуасона:

$$\Delta\varphi = \psi, \quad \varphi|_{\partial\Omega_a} = 0.$$

В [31] установлено, что оператор Δ действует как изоморфизм из пространства функций гёльдеровского класса $C^{2+\alpha}(\Omega_a)$, удовлетворяющих нулевому условию Дирихле на пространство функций гёльдеровского класса $C^{0+\alpha}(\Omega_a)$, удовлетворяющих условию согласования $\psi(0, 0) = \psi(a, 0) = \psi(0, 1) = \psi(a, 1) = 0$.

Обозначим теперь через E банаово пространство $\{w \in H^4 : \Delta^2 w \in F\}$ с нормой $\|w\|_E = \|\Delta^2 w\|_{C^{0+\alpha}(\Omega_a)}$ (см. [47], [172]).

Это влечет фредгольмовость уравнения Кармана нулевого индекса.

Теорема 2.6 Для обобщенных уравнений Кармана (2.4.60) при краевых условиях (2.4.58) подмножество $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma(f)$ ($\Sigma(f)$ — дискриминантное множество) в достаточно малой окрестности нуля состоит из четырех связных открытых подмножеств $\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_9$ (ячеек регулярности), которым соответствуют следующие *bif*-расклады: $(1, 0, 0), (2, 1, 0), (2, 2, 1), (4, 4, 1)$.

Доказательство этой теоремы также проводится на основе модифицированной схемы Ляпунова – Шмидта. Рассуждения полностью аналогичны тем, которые проведены в случае балки.

Посредством модифицированного алгоритма редукции Ляпунова – Шмидта, решение данной задачи сводится к анализу ключевой функции

$$W(\xi, \lambda, a, q) := \inf_{v: v \in O_*} V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + v, \lambda, q), \quad \xi \in O^2$$

при закритических значениях параметров. Здесь O^2 и O_* — достаточно малые окрестности нулей соответственно в \mathbb{R}^2 и

$$E_* = \{v \in E : \langle v, e_1 \rangle = \langle v, e_2 \rangle = 0\}.$$

При этом W допускает представление

$$W = \frac{1}{2}(\alpha_1(\lambda, \varepsilon, a)\xi_1^2 + \alpha_2(\lambda, \varepsilon, a)\xi_2^2 + \alpha_3(\varepsilon, a)\xi_1\xi_2) + \sum_{i,j=1,2}^2 \delta_{ij}\xi_i^2\xi_j^2 + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{j,j} &= |\Delta^{-1}[\tilde{e}_j, \tilde{e}_j]|^2, \\ \delta_{1,2} = \delta_{2,1} &= \frac{1}{8}(\langle \Delta^{-1}[\tilde{e}_1, \tilde{e}_1], \Delta^{-1}[\tilde{e}_2, \tilde{e}_2] \rangle + 2|\Delta^{-1}[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2]|^2), \\ \alpha_1(\lambda, a, \varepsilon) &= \int_0^a q(\Delta\tilde{e}_1)^2 - \lambda(\tilde{e}'_1)^2 dx, \\ \alpha_2(\lambda, a, \varepsilon) &= \int_0^a q(\Delta\tilde{e}_2)^2 - \lambda(\tilde{e}'_2)^2 dx, \\ \alpha_3(a, \varepsilon) &= 2 \int_0^a q\Delta\tilde{e}_1\Delta\tilde{e}_2 dx. \end{aligned}$$

Здесь в качестве \tilde{e}_1 , \tilde{e}_2 , берутся возмущенные моды бифуркации.

Теорема 2.7 *Возмущенные корневые векторы \tilde{e}_k можно представить в виде*

$$\tilde{e}_k = e_k - \varepsilon h_k + o(\varepsilon),$$

где h_k определяются соотношениями

$$\begin{aligned} h_k &= Pe_k, \\ P &:= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} dz, \\ \mathcal{A}u &= \Delta^2 u + \lambda u_{xx}, \quad \mathcal{B}u = \Delta(\gamma \Delta u). \end{aligned}$$

2.4.3 Вычисление интегральных коэффициентов

Из предыдущих рассуждений следует, что для получения корневых векторов \tilde{e}_k необходимо вычислить интеграл

$$\mathcal{M} e_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} (\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} (\mathcal{A} - zI)^{-1} e_k dz, \quad (2.4.61)$$

с учетом краевых условий (2.3.36) (здесь ℓ контур $|z| = 1$).

Собственное число $z = 0$ двукратно. Ему отвечают собственные элементы $e_k = 2 \sin(\frac{k\pi x}{a}) \sin(\pi y)$, $k = 1, 2$.

Заметим, что если e_k — собственный вектор, отвечающий собственному числу z_k : $\mathcal{A}e_k = z_k e_k$, то

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1} (\mathcal{A} - z_k I) e_k = 0,$$

или

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1} (\mathcal{A} - zI + zI - z_k I) e_k = e_k - (z_k - z) (\mathcal{A} - zI)^{-1} e_k = 0.$$

Отсюда получаем

$$(\mathcal{A} - zI)^{-1} e_k = \frac{e_k}{z_k - z}.$$

Таким образом, формулу (2.4.61) можно записать в виде:

$$\mathcal{M} e_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(\mathcal{A} - zI)^{-1} \mathcal{B} e_k}{z_k - z} dz. \quad (2.4.62)$$

Очевидно, что оператор \mathcal{A} с заданной областью определения и краевыми условиями является симметричным, а собственные функции образуют полную систему в $L^2[0, 1]$.

Рассмотрим функцию $g(x, y) = \mathcal{B}e_k(x, y)$, $g(x, y) \in L^2[0, 1]$ и разложим ее в ряд по собственным функциям оператора \mathcal{A} :

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x, y), \quad (2.4.63)$$

где

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_0^a \int_0^1 2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) (\Delta(\gamma \Delta e_1)) dy dx = \\
&= \int_0^a \int_0^1 2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) (\Delta(\gamma \Delta 2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\pi y))) dy dx = \\
&= \int_0^a \int_0^1 2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) \Delta\left(\left(-\pi^2 \left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\right) \gamma 2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\pi y)\right) dy dx.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, преобразуем интеграл к виду

$$\begin{aligned}
c_n &= -4\pi^2 \left(\frac{a^2+1}{a^2}\right) \int_0^a \int_0^1 \gamma \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) \Delta\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\pi y)\right) dy dx = \\
&= 4\frac{\pi^4}{a^4} (a^2+1)(a^2+n^2) \int_0^a \int_0^1 \gamma \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\pi y) dy dx.
\end{aligned}$$

Пользуясь формулой (2.4.63) в интеграле (2.3.50), при $m = 1$, получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}e_k(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(\mathcal{A} - zI)^{-1}}{z} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x) dz = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e_n(x) dz}{z(z_n - z)} = \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} c_n e_n(x) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z_n} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z_n - z} \right) dz = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{c_n e_n(x)}{z_n}.
\end{aligned}$$

Здесь были учтено, что $z_1 = z_2 = 0$ и

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} = 0.$$

Таким образом, на основе (2.3.49) получаем для возмущенных собственных функций (в случае слабой неоднородности):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}e_1 &= \\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4\pi^4(a^2+1)(a^2+n^2)}{a^4(n^2-1)(n^2-4)} \left(\int_0^a \int_0^1 \gamma \sin\left(\frac{n\pi s}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi s}{a}\right) \sin^2(\pi r) dr ds \right) e_n, \\ \mathcal{M}e_2 &= \\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4\pi^4(a^2+1)(a^2+n^2)}{a^4(n^2-1)(n^2-4)} \left(\int_0^a \int_0^1 \gamma \sin\left(\frac{\pi s}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi s}{a}\right) \sin^2(2\pi r) dr ds \right) e_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.64)$$

После масштабирующих преобразований и сокращения на общий множитель получим представление ключевой функции в нормальной форме. Таким образом, справедливо следующее утверждение

Теорема 2.8 *Существует система ключевых координат, в которой для ключевой функции имеет место представление*

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_q(\xi, \nu) &= \frac{1}{2} (\widetilde{\nu}_1 \xi_1^2 + \widetilde{\nu}_2 \xi_2^2 + 2 \widetilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2) + \frac{1}{4} (\xi_1^4 + 2b\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4) + \\ &+ o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\widetilde{\nu}, \varepsilon) + o(\widetilde{\nu}, \varepsilon), \quad 1 < b < 3. \end{aligned}$$

При этом $\widetilde{\nu}_j$ допускают явные выражения через исходные параметры.

Соотношение $1 < b < 3$ следует из результатов вычислений, опубликованных в [199].

Здесь также появилось дополнительное слагаемое $\widetilde{\nu}_3 \xi_1 \xi_2$ (как и в случае балки), понижающее симметрию прямоугольного параллелограмма до симметрии четности.

Замечание 2.7 *В рассмотренной краевой задаче гладкий локальный топологический тип дискриминантного множества (в нуле) и расклады бифурцирующих экстремалей функционала энергии V совпадают с гладким локальным топологическим типом каустики и раскладами бифурцирующих экстремалей ключевой функции W (см. главу 1). Из теорем Дж. Мазера о конечной определенности ростков гладкой функции следует, что локальный топологический тип каустики и набор *bif*-раскладов ключевой функции W полностью определяется ее главной частью U .*

Алгебраическое строение главной части ключевой функции для пластины Кáрмана идентично главной части ключевой функции упругой балки. Поэтому каустики этих функций имеют аналогичное геометрическое строение. Списки раскладов бифурцирующих экстремалей также аналогичны.

На рисунке 2.11 изображены прогибы пластины при выбранных значениях управляемых параметров.

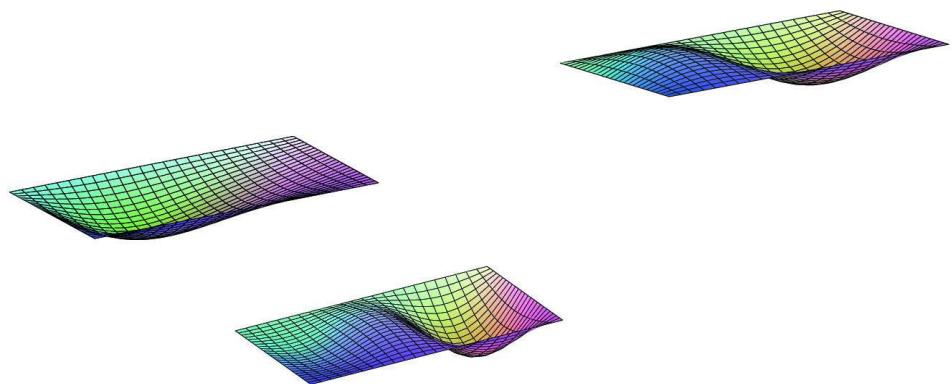


Рисунок 2.11

Глава 3

Корректные математические модели и теория полугрупп

3.1 Необходимые сведения по теории однопараметрических полугрупп

3.1.1 Функции со значениями в векторном пространстве

Содержание данного раздела представляет собой необходимые сведения из теории вектор-функций и соответствует монографиям [39], [67], [126], [125]. Через E здесь обозначается вещественное или комплексное банахово пространство. В E норму будем обозначать $\|\cdot\|$ (или $\|\cdot\|_E$).

\mathbb{R} – вещественные числа, \mathbb{C} – комплексные числа.

$\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ – неотрицательные вещественные числа,

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – положительные целые числа.

$\mathcal{B}(E_1, E_2)$ – пространство всех ограниченных линейных операторов из E_1 в E_2 ;

$\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}(E, E)$

« A – оператор из E_1 в E_2 » означает, что A – оператор из E в E .

Далее, оператор A из E_1 в E_2 будет замкнутым, если его график $\mathcal{I}(A) = \{(f, Af) : f \in \mathcal{D}(A)\}$ является замкнутым подпространством в $E_1 \times E_2$ или, эквивалентно, если из условий $f_n \subset \mathcal{D}(A), f_n \rightarrow f$, и $Af_n \rightarrow g$ следует, что $f \in \mathcal{D}(A)$ и $Af = g$.

Приведем следующие сведения о замкнутых операторах.

Если A из E_1 в E_2 замкнут, то:

- a) $A + B$ (с областью определения $\mathcal{D}(A)$) замкнут, для каждого $B \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$.
- б) обратный оператор A^{-1} замкнут, если A^{-1} определён на всём E и ограничен.

Если при любом значении $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $A - \lambda I$ имеет ограниченный обратный, тогда A будет замкнут. Здесь I – тождественный оператор.

Рассмотрим *векторнозначные функции* $f(t)$ вещественного аргумента t . Это функции, значения которых при каждом $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ будут элементами некоторого линейного банахова пространства E .

Определение 3.1 *Функция $f(t)$ называется непрерывной в точке t_0 , если $\|f(t) - f(t_0)\|_E \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$, и непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.*

Заметим, что $\|f(t)\|_E$ – есть скалярная непрерывная функция.

Замечание 3.1 *Множество всех функций непрерывных на отрезке $[a, b]$ со значениями в банаховом пространстве E образуют линейную систему $\mathfrak{C}(E; [a, b])$, в которой можно задать норму*

$$\|f\|_{\mathfrak{C}[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_E. \quad (3.1.1)$$

Задав норму мы получим, что $\mathfrak{C}(E; [a, b])$ линейное нормированное пространство.

Кроме того, если E будет банахово пространство, то $\mathfrak{C}(E; [a, b])$ также банахово пространство [126].

Далее вводится понятие слабой непрерывности.

Определение 3.2 *Функция $f(t)$ называется слабо непрерывной в точке или на отрезке если для любого непрерывного линейного функционала $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ непрерывна в точке или на отрезке, соответственно.*

Заметим, что слабая непрерывность следует из сильной. Обратное неверно.

Приведем следующее утверждение [126]:

Если функция $f(t)$ слабо непрерывная на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на нем, т.е.

$$\|f(t)\| \leq M \quad (a \leq t \leq b).$$

Определение 3.3 Функция $f(t)$ называется дифференцируемой в точке t_0 , если существует такой элемент $f' \in E$, что

$$\left\| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - f' \right\|_E \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$. Элемент f' будет называться производной функции $f(t)$ в точке t_0 и обозначается $f' = f'(t_0)$.

Если функция $f(t)$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a, b]$, тогда $f(t)$ называется дифференцируемой на отрезке.

К тому же, если производная $f'(t)$ непрерывна, то функция $f(t)$ называется *непрерывно дифференцируемой*.

Следующее утверждение справедливо для непрерывно дифференцируемых функций [126]:

Утверждение 3.1 Пусть функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, тогда справедливо неравенство

$$\|f(b) - f(a)\|_E \leq (b - a) \sup_{a \leq t \leq b} \|f'(t)\|_E. \quad (3.1.2)$$

Неравенство будет справедливым, если производная существует на $[a, b]$ всюду, за исключением счетного множества точек.

Определение 3.4 Функция $f(t)$ будет иметь в точке t_0 слабую производную $f'(t_0)$, если при $h \rightarrow 0$

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

слабо сходится при всяком $l \in E'$ к $f'(t_0)$.

То есть, это значит, что при любом $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ дифференцируема в точке t_0 и

$$[l(f(t_0))]' = l(f'(t_0)).$$

Если функция $f(t)$ будет иметь в каждой точке $[a, b]$ слабую производную, тогда сохраняется оценка (3.1.2).

Например, если слабая производная равна нулю во всех точках $[a, b]$, то функция $f(x)$ постоянна.

Таким же образом определяются производные от вектор-функций любого порядка.

Теперь, если функция $f(t)$ со значениями в E будет непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел интегральных сумм:

$$\lim \sum_{k=1}^N f(t_k) \Delta t_k = \int_a^b f(t) dt.$$

В данном случае, предел понимается в смысле сходимости по норме пространства E , когда диаметр разбиения $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ стремится к нулю.

Заметим, что предел существует и не будет зависеть от способа разбиения отрезка на части.

Рассмотрим следующую оценку

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt \quad (3.1.3)$$

и теорему о среднем

$$\int_a^b f(t) dt = (b - a) \bar{f},$$

где \bar{f} есть элемент замкнутой выпуклой оболочки множества значений функции $f(t)$ на $[a, b]$.

Функция

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds$$

является непрерывно дифференцируемой и при этом $F'(t) = f(t)$.

Известно, что формула Ньютона–Лейбница, справедлива для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(t)$

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Понятие несобственного интеграла вводится как и в классическом анализе. Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ при любых $b > a$, то под ее интегралом на $[a, \infty]$ понимают

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)dt.$$

Говорят что интеграл сходится, если предел по норме пространства E существует.

Интеграл абсолютно сходится, если

$$\int_a^\infty \|f(t)\|dt < \infty.$$

Обычная сходимость следует из абсолютной сходимости интеграла.

Кроме того, при рассмотрении интегралов, зависящих от параметра, можно переносить классические теоремы о непрерывной зависимости от параметра, а также об интегрировании и дифференцировании по параметру.

Чаще всего употребляемым обобщением интеграла Римана для функций со значениями в банаховом пространстве является *интеграл Бехнера*.

Определение 3.5 Функция $f(t)$, которая задана на $[a, b]$, и имеющая значения в банаховом пространстве E , называется простой, если она принимает лишь конечное заданное число значений f_j на измеримых множествах Δ_j .

$$f(t) = f_j \quad (t \in \Delta_i), \quad \bigcup \Delta_j = [a, b].$$

При определении простой функции на множестве бесконечной меры требуется, чтобы $\text{mes}(\Delta_j) < \infty$ и чтобы $f(t) = 0$ на дополнении к $\bigcup \Delta_j$.

Определение 3.6 Функция $f(t)$ называется сильно измеримой, если существует последовательность простых функций $f_n(t)$, которая сильно сходится почти всюду к функции $f(t)$, то есть

$$\|f_n(t) - f(t)\|_E \rightarrow 0,$$

при $n \rightarrow \infty$ для всех $t \in [a, b]$, за исключением множества меры нуль.

Определение 3.7 Функция $f(t)$ называется слабо измеримой, если для любого $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ измерима на $[a, b]$.

Для любого банахова пространства E , содержащего счетное всюду плотное множество, понятия слабой и сильной измеримости совпадают [126].

Если $f(t)$ сильно измерима, тогда её норма $\|f(t)\|_E$ будет являться измеримой скалярной функцией.

Справедливо утверждение, что для простых функций $f(t)$ интеграл определяется единственным образом:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum f_j mes\Delta_j.$$

Определение 3.8 Функция $f(t)$ называется суммируемой или интегрируемой по Бехнеру на $[a, b]$, если существует сходящаяся к этой функции почти всюду последовательность простых функций $f_n(t)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \|f(t) - f_n(t)\|_E dt = 0.$$

К тому же, предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

будет называться интегралом суммируемой функции $f(t)$.

Предел в данном случае понимается в смысле сходимости по норме, т.е.

$$\left\| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \right\|_E \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Далее приводится ещё одно необходимое утверждение из [126], стр. 101.

Утверждение 3.2 *Функция $f(t)$ суммируема по Бохнеру, тогда и только тогда, когда она будет сильно измеримой и ее норма $\|f(t)\|$ была суммируемой.*

Справедлива следующая оценка для интеграла Бохнера (3.1.3).

Функция $F(t)$, которая может быть представлена неопределенным интегралом $F(t) = \int_a^t f(s)ds$ от суммируемой функции $f(t)$, почти во всех точках $[a, b]$ будет иметь сильную производную, при этом в точках отрезка $F'(t) = f(t)$.

Пусть A есть ограниченный линейный оператор, который отображает E в банахово пространство F , и функция $f(t)$ будет суммируема со значениями в E , тогда

$$\int_a^b Af(t)dt = A \int_a^b f(t)dt.$$

Совокупность всех суммируемых на $[a, b]$ функций со значениями в E образуют линейную систему $L_1(E; [a, b])$, в которой можно ввести следующую норму

$$\|f\|_{L_1(E; [a, b])} = \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Пространство $L_1(E; [a, b])$ в этой норме будет банаховым.

Аналогично скалярному случаю вводятся банаховы пространства $L_p(E; [a, b])$ ($1 \leq p < \infty$) с нормой

$$\|f\|_{L_p(E; [a, b])} = \left[\int_a^b \|f(t)\|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\|f\|_{L_\infty(E; [a, b])} = vrai \sup_{t \in [a, b]} \|f(t)\|, \quad p = \infty.$$

3.1.2 Функции с операторными значениями. Полугруппы

Здесь и далее, E_1 и E_2 банаховы пространства. Функции $A(t)$, значениями которых являются ограниченные операторы являются частными примерами

функций со значениями в банаховом пространстве ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2 .

Такие функции для краткости называются оператор-функции.

Для оператор-функций определяются три вида непрерывности: а) непрерывность по норме, б) сильная непрерывность, в) слабая непрерывность.

Определение 3.9 *Оператор-функция $A(t)$ непрерывна по норме в точке $t_0 \in [a, b]$, если*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|A(t) - A(t_0)\| = 0.$$

Определение 3.10 *Оператор-функция $A(t)$ сильно непрерывна в точке $t_0 \in [a, b]$, если при любом фиксированном $x \in E_1$*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|A(t)x - A(t_0)x\|_{E_2} = 0.$$

Определение 3.11 *Оператор-функция $A(t)$ слабо непрерывна в точке $t_0 \in [a, b]$, если при любых фиксированных $x \in E_1$, $l \in E_2^*$*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |l(A(t)x) - l(A(t_0)x)| = 0.$$

Понятия дифференцируемости (дифференцируемости по норме операторов), сильной дифференцируемости (дифференцируемости всех функций $A(t)x$, $x \in E_1$) и слабой дифференцируемости (дифференцируемости скалярной функции $l(A(t)x, x \in E_1, l \in E_2^*)$ определяются аналогично.

Приведём следующее утверждение

Утверждение 3.3 (Теорема Банах–Штейгауз). *Оператор-функция $A(t)$ сильно непрерывна при $t_0 \in [a, b]$ на всем E_1 , если нормы её равномерно ограничены, т.е.*

$$\|A(t)\| \leq M,$$

и оператор-функции $A(t)x$ непрерывны для x из некоторого плотного в E_1 множества.

Неограниченные операторы. Пусть E – банахово пространство и A – линейный оператор, определенный на некотором линейном множестве $D(A) \subset E$ и принимающий значения в E .

Определение 3.12 Оператор A замкнут, если из того что $x_n \in D(A)$ и $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ и норма $\|Ax_n - y_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ следует, что $x_0 \in D(A)$, и $Ax_0 = y_0$.

Приведём утверждения из (см. [126], §13.2).

Оператор A замкнут, если при некотором $\lambda \in C$ оператор $\lambda I + A$ будет иметь обратный.

Если значение функции $x(t)$ при каждом $t \in [a, b]$ принадлежат $D(A)$ и функция $Ax(t)$ интегрируема на $[a, b]$, тогда выполняется равенство

$$A \int_a^b x(t) dt = \int_a^b Ax(t) dt.$$

Важными характеристиками линейных операторов, определенных на линейном многообразии $D(A)$ комплексного банахова пространства E и действующих в это же пространство E является спектр и резольвента оператора.

Понятие спектра оператора связано с рассмотрением уравнения

$$Ax - \lambda x = y \quad x \in D(A), y \in E, \quad (3.1.4)$$

где λ – комплексное число.

Определение 3.13 Число λ называется регулярной точкой оператора A , если уравнение (3.1.4) корректно и плотно разрешимо. То есть однородное уравнение

$$Ax - \lambda x = 0$$

имеет только нулевое решение, для любого $x \in D(A)$ справедливо неравенство

$$\|x\|_E \leq k \|(A - \lambda I)x\|_E,$$

и замыкание области значений оператора $A - \lambda I$ совпадает с E .

Определение 3.14 Собокупность всех регулярных точек называется резольвентным множеством оператора A .

Определение 3.15 Дополнение на комплексной плоскости к резольвентному множеству называется спектром оператора A .

Если оператор A замкнут, тогда его резольвентное множество состоит из тех и только тех точек λ , для которых существует ограниченный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, заданный на всем пространстве E .

Определение 3.16 Резольвентой оператора A , определенный при регулярных λ , называется оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, который обозначается $R(\lambda, A)$.

Резольвентное множество является открытым подмножеством комплексной плоскости для замкнутого оператора. Спектр будет замкнутое множество.

На резольвентном множестве резольвента $R(\lambda, A)$ будет аналитической функцией со значениями в пространстве $L(E, E)$ линейных ограниченных операторов.

Для произвольных двух регулярных точек λ и μ справедливо *резольвентное тождество Гильберта*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Исходя из этого тождества выводится формула для производных

$$\frac{d^k R(\lambda, A)}{d\lambda^k} = k! R^{k+1}(\lambda, A).$$

Классификация точек спектра. Приведем ряд необходимых в дальнейшем определений.

1. Если оператор $A - \lambda I$ не имеет обратного, тогда λ принадлежит *точечному спектру*.
2. Если оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен на не плотном множестве, тогда λ принадлежит *остаточному спектру*.

3. Если оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен на плотном множестве, но неограничен, тогда λ принадлежит *непрерывному спектру*.

Итак, вся комплексная плоскость разлагается в сумму четырех взаимно непересекающихся множеств: резольвентное множество, точечный, остаточный и непрерывный спектры.

Если оператор задан каким–либо аналитическим выражением, то структура его спектра существенно зависит от того пространства в котором он исследуется.

3.1.3 Сильно непрерывные полугруппы линейных операторов

Определение 3.17 Семейство ограниченных операторов $U(t)$ ($t > 0$), действующих в банаевом пространстве E , называется сильно непрерывной однопараметрической полугруппой операторов, если $U(t)$ сильно непрерывно зависит от t и удовлетворяет условию $U(t)U(s) = U(t + s)$ ($t, s > 0$).

Определение 3.18 Полугруппа $U(t)$ называется класса C_0 , если она сильно непрерывна и

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|U(t)x - x\|_E = 0 \quad (3.1.5)$$

при любом $x \in E$.

Для полугрупп класса C_0 понятие производящего оператора вводится как производной справа от полугруппы в нуле.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{U(t)f - f}{t} = \frac{d}{dt} U(t)f|_{t=0} = Af \quad (3.1.6)$$

Имеется классический критерий определения производящего оператора C_0 –полугруппы, принадлежащий пяти авторам: Э. Хилле, Р. Филлипс, К.Иосида, В. Феллер, И. Миадера, который содержится в следующей теореме, приведенной в работе [126].

Утверждение 3.4 Для того чтобы линейный оператор A был производящим оператором (генератором) полугруппы $U(t)$ класса C_0 , необходимо и

достаточно, чтобы он был замкнутым с плотной в E областью определения, имел спектр лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq \omega$ и резольвенту, удовлетворяющую условиям

$$\|R^m(\lambda, A)\| \leq \frac{K}{(\lambda - \omega)^m}, \quad \lambda > \omega \quad (3.1.7)$$

и $m = 1, 2, \dots$, где K не зависит от λ и m .

Отметим, что условия на все степени резольвенты трудно проверямы. В связи с этим крайне важным является достаточное условие на резольвенту

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \lambda > \omega. \quad (3.1.8)$$

из которого легко следует (3.1.7).

Для полугруппы $U(t)$ класса C_0 справедлива оценка

$$\|U(t)\| \leq K e^{\omega t} \quad (3.1.9)$$

и если $\omega \leq 0$, то полугруппа удовлетворяет оценке

$$\|U(t)\| \leq K \quad (3.1.10)$$

и называется равномерно ограниченной C_0 -полугруппой.

Если $K = 1$, то полугруппа называется сжимающей C_0 -полугруппой. Умножив C_0 -полугруппу на $e^{-\omega t}$, очевидно получим новую полугруппу класса C_0 с условием равномерной ограниченности.

Замечание 3.2 ([39], с.39) Полугруппа однозначно определяется своим генератором.

3.1.4 Модели корректные по Адамару

Как известно, согласно Ж.Адамару, задача определения решения $u \in U$ уравнения $Au = f$, ($f \in F$) корректно поставлена на паре (U, F) метрических пространств U и F с метриками ρ_U и ρ_F соответственно, если выполнены условия:

а) для всякого $f \in F$ существует $u \in U$ — решение уравнения, б) решение определяется однозначно, в) задача устойчива на пространствах (F, U) , то есть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое что из неравенства $\rho_F(f_1, f_2) < \delta$, следует $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Однако устойчивость задачи зависит от выбранных топологий в F и U и, вообще говоря, подходящим выбором топологий формально можно добиться непрерывности оператора A^{-1} , существование которого обеспечивают условия а) и б). Так, в случае линейного взаимнооднозначного соответствия оператора A и нормированных пространств U и F , устойчивость будет иметь место, если пространство F наделить нормой $\|f\|_F = \|A^{-1}f\| = \|u\|_U$, и тогда $\|A^{-1}f\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|A^{-1}f\|}{\|f\|} = 1$ (см. [127], с.12).

В связи с этим возникает следующая проблема выбора топологий в U и F .

1. С одной стороны важно, чтобы эти топологии не зависели от оператора A . Например, в случае когда $A = A(\lambda)$ — оператор зависящий от некоторого параметра λ , важно чтобы область определения обратного оператора $A^{-1}(\lambda)$ (например резольвенты $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ была не зависящей от λ).

2. С другой стороны желательно иметь наиболее широкий класс начальных данных F при которых решение задачи $u \in U$ сохраняло хорошие свойства.

Таким образом, установление устойчивости существенно зависит от выбора функциональных пространств, в которых ищется решение и в которых соответствующие обратные операторы ограничены.

В связи с этим, в классе корректных по Адамару задач важное место занимают задачи в которых U и F плотно вложены в некоторое банахово пространство E и сходимость понимается в смысле $\|\cdot\|_E$. Такие задачи мы называем равномерно корректными.

К исследованию корректной разрешимости начально–краевых задач для уравнений в частных производных, моделирующих различные процессы в естественных, технических и других науках, удобно исследовать в рамках начальных задач для эволюционных уравнений в банаховых пространствах.

Выяснилось, что исследование корректной разрешимости начально–краевых задач для уравнений в частных производных, моделирующих различные процессы в естественных, технических и других науках (в частности, в теории тепломассопереноса, в экономике, гидродинамике, радиофизике и т.д.) удобно проводить в рамках задач для эволюционных уравнений в банаховом пространстве. И здесь важными инструментами исследования являются методы теории однопараметрических полугрупп и групп преобразований.

В частности методы сильно непрерывных полугрупп, косинус–функций, заложенные в работах Э. Хилле, Р. Филлипса, Т. Като и др.

В последствии эта область исследований привлекает внимание многих авторов, как зарубежных, так и отечественных, в числе которых важное место занимают и воронежские математики С.Г. Крейн, М.А. Красносельский, П.Е. Соболев и др. Этой тематике посвящены также работы и других отечественных математиков: С.И. Пискарева, Г.А. Свиридюка, В.Е. Федорова и др.

Основополагающие результаты по корректной разрешимости начально–краевых задач для эволюционных уравнений в банаховом пространстве, с применением теории сильно непрерывных однопараметрических полугрупп приводятся в монографиях М.А. Красносельского [122] и С.Г. Крейна [125].

Прежде всего это относится к критериям равномерной корректности следующих задач для уравнений в банаховом пространстве E .

I. Задача Коши для уравнений 1–го и 2–го порядков

$$a) \quad \frac{du(t)}{dt} = A_1 u(t), \quad u(0) = u_0, \quad t > 0, \quad (3.1.11)$$

$$b) \quad \frac{d^2v(t)}{dt^2} = A_2 v(t), \quad v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1. \quad (3.1.12)$$

II. Краевые задачи для уравнений 2–го порядка

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} = A_3 \omega(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.1.13)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u_0 + \alpha_{12}u'_0 + \beta_{11}u_T + \beta_{12}u'_T &= f_1, \\ \alpha_{21}u_0 + \alpha_{22}u'_0 + \beta_{21}u_T + \beta_{22}u'_T &= f_2, \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

где α_{ij}, β_{ij} ($i, j = 1, 2$)— комплексные числа, $f_1, f_2 \in E$, $u_0 = u(0)$, $u'_0 = u'(0)$, $u_T = u(T)$, $u'_T = u'(T)$.

Классические критерии корректности этих задач формулируются в терминах понятий сильно непрерывных однопараметрических полугрупп линейных преобразований $U(t)$, $t > 0$, полугрупп класса C_0 и сильно непрерывных операторных косинус–функций (КОФ).

Определение 3.19 Семейство $U(t) = \{U(t) : 0 \leq t < \infty\}$ линейных операторов из E в E называется C_0 –полугруппой если

- 1) $U(t+s)f = U(t)U(s)f$, для всех $f \in E$, $t, s \geq 0$;
- 2) $U(0)f = f$, для всех $f \in E$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow 0+} \|U(t)f - f\|_E = 0$, при всех $f \in E$.

Для всякой сильно непрерывной полугруппы $U(t)$ существуют такие $\omega \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и $M > 0$, что выполняется оценка

$$\|U(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad (t \geq 0).$$

Для полугруппы класса C_0 определен генератор (или инфинитизимальный производящий оператор) A равенством

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{U(t)f - f}{t} = \frac{d}{dt} U(t)f \Big|_{t=0} \quad (3.1.15)$$

с областью определения $D(A)$ на тех элементах f для которых этот предел существует.

Теорема 3.1 (теорема корректности). Начальная задача (3.1.11) корректна тогда и только тогда, когда A является генератором C_0 –полугруппы $U(t, A)$. В этом случае единственным решением задачи (3.1.11) является $u(t) = U(t, A)u_0$ для $u_0 \in D(A)$.

Критерий корректности для задачи (3.1.4) связан с понятием сильно непрерывной косинус–функции (КОФ) (см. [39], с. 175).

Операторные косинус–функции находятся в таком же отношении к задаче Коши (3.1.12) как C_0 –полугруппы к задаче Коши (3.1.11).

Определение 3.20 Сильно непрерывной операторной косинус–функцией называется семейство операторов $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$ со значениями в E , удовлетворяющими условиям:

1. $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$;
2. $C(0)=I$;
3. $\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{C(t)f-f}{2t} \right\| = 0$ для каждого $f \in E$.

Генератором A операторной КОФ называется $A = C''(0)$, $D(A) = \{f \in E : C(t)f \in C^2(\mathbb{R}, E)\}$.

Задача Коши (3.1.12) называется равномерно корректной, если для последовательности решений выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = 0$ при $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0) = 0$ равномерно по t в ограниченном подмножестве \mathbb{R}^+ или \mathbb{R} .

Теорема 3.2 Задача Коши (3.1.12) равномерно корректна тогда и только тогда, когда оператор A является генератором сильно непрерывной КОФ.

Замечание 3.3 Пусть B порождает C_0 –группу T . Тогда B^2 порождает операторную косинус–функцию C_a . Справедлива формула Д'Аламбера

$$C_0(t) = \frac{1}{2}[T(t) + T(-t)].$$

3.1.5 Приложение полугрупп к нелинейным уравнениям

Рассмотрим нелинейную задачу

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t, v) \quad (0 < t \leq t_0), \quad (3.1.16)$$

$$v(0) = v_0. \quad (3.1.17)$$

Здесь $f(t, v)$ при каждом $t \in [0, t_0]$ – действующий в E нелинейный оператор.

Функция $v(t)$ называется решением задачи (3.1.16–3.1.17), если функция $f[t, v(t)]$ непрерывна на $[0, t_0]$ и если функция $v(t)$ есть решение линейной задачи

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t) \quad (0 < t \leq t_0), \quad (3.1.18)$$

при условии (3.1.17).

Если оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$, то из леммы вытекает, что любое решение $v(t)$ задачи (3.1.16)–(3.1.17) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)f[s, v(s)]ds \quad (3.1.19)$$

Поэтому решение $v(t)$ интегрального уравнения (3.1.16), обладает тем свойством, что функция $f[t, v(t)]$ непрерывна на $[0, t_0]$, естественно называется обобщенным решением задачи (3.1.16)–(3.1.17). Справедливо утверждение 3.5 [122].

Утверждение 3.5 Пусть $T(t)$ сильно непрерывная полугруппа. Пусть при любом $v \in E$ функция $f(t, v)$ непрерывна по t на $[0, t_0]$ и пусть

$$\|f(t, v_1) - f(t, v_2)\| \leq c(R)\|v_1 - v_2\| \quad (\|v_1\|, \|v_2\| \leq R). \quad (3.1.20)$$

Тогда существует единственное непрерывное решение $v(t)$ уравнения (3.1.16), определенное на некотором отрезке $[0, t^*] \subset [0, t_0]$. Функция $v(t)$ будет единственным обобщенным решением задачи (3.1.16)–(3.1.17) на этом отрезке.

3.1.6 Выбор функциональных пространств

Рассмотрим задачу Коши для простейшего дифференциального уравнения

$$u'(x) = f(x), \quad (3.1.21)$$

$$(x \in [0, T], f(x) \in \mathfrak{C}[0, T]) \quad \|f\|_{\mathfrak{C}} = \sup_{x \geq 0} |f(x)| \quad u(0) = 0. \quad (3.1.22)$$

Требуется найти функцию $u(x) \in \mathfrak{C}^{(1)}[0, T]$, удовлетворяющую (3.1.21)–(3.1.22). В этом случае $F = \mathfrak{C}[0, T]$, $U = \mathfrak{C}^{(1)}[0, T]$, $\|u\|_{\mathfrak{C}^{(1)}} = \|u'\|_{\mathfrak{C}} + \|u\|_{\mathfrak{C}}$.

Очевидно, что решение этой задачи единственное и имеет вид

$$u(x) = \int_0^x f(s)ds, \quad (3.1.23)$$

и если $0 < T < \infty$, то из (3.1.21) и (3.1.23) следует

$$\|u\|_U = \|u'\|_{\mathfrak{C}} + \|u\|_{\mathfrak{C}} \leq (1+T)\|f\|_{\mathfrak{C}} = (1+T)\|f\|_F.$$

Таким образом, задача (3.1.21)–(3.1.22) корректна в пространствах $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^{(1)})$, если $T < \infty$.

Однако, при $T = \infty$ это не так. Поэтому возникает вопрос о пространствах, в которых задача (3.1.21)–(3.1.22) корректна. В связи с этим рассмотрим, например, задачи (3.1.21)–(3.1.22) в весовых пространствах $\mathfrak{C}_\rho[0, \infty)$ с нормой

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \geq 0} e^{-\alpha x} |f(x)| dx, \quad (\alpha > 0).$$

Из оценки

$$|u(x)| \leq \int_0^x e^{\alpha x} e^{-\alpha x} |f(x)| dx \leq \|f\|_\rho \cdot \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

очевидно следует неравенство $\|u\|_\rho \leq \frac{\|f\|_\rho}{\alpha}$. То есть, в пространстве $\mathfrak{C}_{\rho[0, \infty)}$ задачи (3.1.21)–(3.1.22) равномерно корректны.

Разумеется, что к аналогичной проблеме выбора пространств мы приходим и в общем случае при исследовании корректной разрешимости начально-краевых задач как для обыкновенных, так и уравнений с частными производными, даже когда записывается явный вид их точных решений.

Например, в случае уравнений с дробными производными это приводит к задаче выбора функциональных пространств, инвариантных относительно операции дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувиля, когда, как замечено в [167] классические L_p ($p \geq 1$) и C -пространства со степенными весами таким свойством не обладают. В тоже время, как показывает выше приведенный пример, такие веса существуют.

В связи с этим, здесь решена проблема описания всех L_p -весовых пространств инвариантных относительно операции интегро-дифференцирования Римана–Лиувиля.

3.1.7 Итерационные пространства локально интегрируемых функций

Пространства $L_p^{(2)}(a)$

Для $\alpha \in (0, 1)$ на интервале $(0, a) \subset R$, $a > 0$, рассматривается множество $L_1^{(2)}(a)$ локально интегрируемых, вообще говоря, комплекснозначных функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\alpha a} \int_0^{(1-\alpha)a} |f(x_1 + x_2)| dx_1 dx_2 < \infty. \quad (3.1.24)$$

Нетрудно видеть, что множество $L_1^{(2)}(a)$ является линейным и нормированным пространством, если в нём ввести норму

$$\|f\|_{L_{1,\alpha}^{(2)}(a)} = \int_0^{\alpha a} \int_0^{(1-\alpha)a} |f(x_1 + x_2)| dx_1 dx_2. \quad (3.1.25)$$

Сравнивая пространство $L_1^{(2)}(a)$ с классическим пространством $L_1(a)$, где $\|f\|_{L_1(a)} = \int_0^a |f(x)| dx$, легко заметить справедливость вложения $L_1(a) \subset L_1^{(2)}(a)$.

Действительно, если $f \in L_1(a)$, то

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{1,\alpha}^{(2)}(a)} &= \int_0^{\alpha a} \int_0^{(1-\alpha)a} |f(x_1 + x_2)| dx_1 dx_2 = \int_0^{\alpha a} \int_{x_2}^{x_2 + (1-\alpha)a} |f(s)| ds dx_2 \leq \\ &\leq \int_0^{\alpha a} \int_0^a |f(s)| ds dx_2 = \alpha a \|f\|_{L_1(a)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|f\|_{L_{1,\alpha}^{(2)}(a)} \leq \alpha a \|f\|_{L_1(a)}. \quad (3.1.26)$$

В тоже время, пример функции $f(x) = \frac{1}{x}$ показывает, что пространства $L_1^{(2)}(a)$ шире пространств $L_1(a)$.

Помимо класса $L_1^{(2)}(a)$, с помощью норм

$$\|f\|_{L_p^{(2)}(a)} = \left[\int_0^{\alpha a} \int_0^{(1-\alpha)a} |f(x_1 + x_2)|^p dx_1 dx_2 \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty), \quad (3.1.27)$$

вводятся пространства $L_{p,\alpha}^{(2)}(a)$.

Для этих пространств также справедливо вложение $L_p(a) \subset L_p^{(2)}(a)$ по параметру p , так как при $p < r$ справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_{p,\alpha}^{(2)}(a)} \leq (\alpha a)^{\frac{2(r-p)}{rp}} \|f\|_{L_r(a)} \quad (3.1.28)$$

и следовательно $L_{r,\alpha}(a) \subset L_{p,\alpha}^{(2)}(a)$.

Справедлива следующая

Лемма 3.1 *Вложение $L_1(a) \subset L_{1,\alpha}^{(2)}(a)$ всюду плотно.*

Доказательство. Пусть $f \in L_{1,2}^{(2)}(a)$. При произвольно малых $\varepsilon > 0$ рассмотрим семейство функций

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (0, \varepsilon) \cup (a - \varepsilon); \\ f(x), & \text{если } x \in [\varepsilon, a - \varepsilon]. \end{cases}$$

Так как $f_\varepsilon(x)$ локально интегрируема на $(0, a)$, то $f(\varepsilon) \in L_1(a)$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \|f - f_\varepsilon\|_{L_{1,\alpha}^{(2)}} &= \int_0^{\alpha a} \int_{x_2}^{x_2 + (1-\alpha)a} |f(s) - f_\varepsilon(s)| ds dx_2 = \\ &\quad \int_0^\varepsilon \int_{x_2}^{x_2 + (1-\alpha)a} |f(s) - f_\varepsilon(s)| ds dx_2 + \\ &\quad + \int_\varepsilon^{\alpha a} \int_{x_2}^{x_2 + (1-\alpha)a} |f(s) - f_\varepsilon(s)| ds dx_2 = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Оценивая поведение интеграла $I_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \int_0^\varepsilon \int_{x_2}^{x_2 + (1-\alpha)a} |f(s) - f_\varepsilon(s)| ds dx_2 = \\ &\quad \int_0^\varepsilon \int_{x_2}^\varepsilon |f(s) - f_\varepsilon(s)| ds dx_2 + \int_0^\varepsilon \int_\varepsilon^{x_2 + (1-\alpha)a} |f(s) - f_\varepsilon(s)| ds dx_2 = \\ &\quad \int_0^\varepsilon \int_{x_2}^\varepsilon |f(s)| ds dx_2 \leq \int_0^\varepsilon \int_{x_2}^{x_2 + (1-\alpha)a} |f(s)| ds dx_2. \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

Далее, в силу того, что

$$\|f\|_{L_{1,\alpha}^{(2)}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\alpha a} \int_{x_2}^{x_2 + (1-\alpha)a} |f(s)| ds dx_2 < \infty$$

заключаем, что правая часть в неравенстве (3.1.30) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это даёт соотношение $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\varepsilon) = 0$. Соотношение $I_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ доказывается аналогично.

Отсюда и из (3.1.30) получаем доказательство леммы для $p = 1$. Случай $p > 1$ очевиден.

Лемма 3.2 Для $f \in L_p(a)$ нормы (3.1.27) при различных $\alpha \in (0, 1)$ эквивалентны.

Доказательство. Для $f \in L_1(a)$ рассмотрим функцию

$$\Phi(\alpha) = \int_0^{\alpha a} \int_{x_2}^{x_2 + (1-\alpha)a} |f(x_1 + x_2)| dx_1 dx_2.$$

Эта функция обладает следующими свойствами: $\Phi(\alpha) \geq 0$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 0$, $\Phi(\alpha) = \Phi(1 - \alpha)$. Кроме того, непосредственной проверкой можно убедиться, что $\Phi''(\alpha) < 0$, $\Phi'(\frac{1}{2}) = 0$. Отсюда следует её выпуклость вверх и достижение в точке $\alpha = \frac{1}{2}$ единственного максимума.

Таким образом, справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_{1,\alpha}^{(2)}(a)} \leq \|f\|_{L_{1,\frac{1}{2}}^{(2)}(a)}. \quad (3.1.31)$$

Из свойства выпуклости вытекает оценка в другую сторону при $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2\alpha} \Phi(\alpha). \quad (3.1.32)$$

Аналогично для $\alpha > \frac{1}{2}$ имеем неравенство

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2(1-\alpha)} \Phi(1 - \alpha) = \frac{1}{2(1-\alpha)} \Phi(\alpha). \quad (3.1.33)$$

Таким образом, из (3.1.32) и (3.1.33) для $\alpha \in (0, 1)$ получаем оценку

$$\Phi\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \min\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}\right) \Phi(\alpha), \quad (3.1.34)$$

которая в терминах норм $L_{1,\frac{1}{2}}^{(2)}(a)$ и $L_{1,\alpha}^{(2)}(a)$ имеет вид

$$\|f\|_{L_{1,\frac{1}{2}}^{(2)}(a)} \leq \frac{1}{2} \min\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}\right) \|f\|_{L_{1,\alpha}^{(2)}(a)}. \quad (3.1.35)$$

Из (3.1.31) и (3.1.35) следует двустороннее неравенство

$$\|f\|_{L_{1,\alpha}^{(2)}(a)} \leq \|f\|_{L_{1,\frac{1}{2}}^{(2)}(a)} \leq \frac{1}{2} \min\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}\right) \|f\|_{L_{1,\alpha}^{(2)}(a)}, \quad (3.1.36)$$

доказывающее лемму при $p = 1$. Доказательство общего случая $1 < p < \infty$ очевидно.

В силу леммы 3.2 и плотности вложения $L_p(a) \subset L_{p,\alpha}^{(2)}(a)$ заключаем, что все нормы (3.1.27) эквивалентны при различных $\alpha \in (0, 1)$ и характеризуют те же классы, что и пространства $L_{p,\frac{1}{2}}^{(2)}(a)$, которые в дальнейшем будем использовать и обозначать $L_p^{(2)}(a)$.

Ниже показано, что пространства $L_p^{(2)}(a)$ — банаховы.

Пространства $L_p^{(k)}(a)$

Обобщая подход, примененный в предыдущем разделе, вводятся классы $L_p^{(k)}(a)$ ($k = 1, 2, \dots$) локально интегрируемых на $(0, a)$ функций, удовлетворяющих условию

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k, f) = \int_0^{\alpha_k a} \dots \int_0^{\alpha_1 a} |f(x_1 + \dots + x_k)|^p dx_1 \dots dx_k < \infty,$$

при некоторых $\alpha_i \geq 0$ и таких, что $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$.

Аналогично случаю $k = 2$ доказывается вложение $L_p(a) \subset L_p^{(k)}(a)$, следующее из оценки

$$\begin{aligned} & \int_0^{\alpha_k a} \dots \int_0^{\alpha_1 a} |f(x_1 + \dots + x_k)|^p dx_1 \dots dx_k = \\ & = \int_0^{\alpha_k a} \dots \int_{x_2 + \dots + x_k}^{\alpha_1 a + x_2 + \dots + x_k} |f(s)|^p ds dx_2 \dots dx_k \leq \\ & \int_0^{\alpha_k a} \dots \int_0^{(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)a} |f(s)|^p ds dx_2 \dots dx_k = \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i a^{k-1} \|f\|_{L_p(a)}^p. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если в классе $L_p^{(k)}(a)$ ввести норму равенством

$$\|f\|_{L_p^{(k)}(a)}^p = \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k, f), \quad (3.1.37)$$

то получим оценку

$$\|f\|_{L_p^{(k)}(a)} \leq \left(\alpha_k \prod_{i=1}^k a_i \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(a)}. \quad (3.1.38)$$

Или, учитывая, что при перестановке параметров α_i значение функционала Φ в (3.1.37) не меняется, можно написать и уточненное неравенство

$$\|f\|_{L_p^{(k)}(a)} \leq C_k \|f\|_{L_p(a)}, \quad (3.1.39)$$

где

$$C_k = \min_{\alpha_k} \left(\alpha_k \prod_{i=1}^k a_i \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.1.40)$$

Кроме того, в силу неотрицательности функции Φ , её обращение в ноль при любом $\alpha_i = 0$ и равноправности всех параметров α_i ($i = 1, \dots, k$) как и в случае $k = 2$ заключаем, что функция $\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k, f)$ имеет единственную точку максимума $\alpha_i = \frac{a}{k}$, $i = 1, \dots, k$. То есть при любом $f \in L_p(a)$ справедлива оценка

$$\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k, f) \leq \Phi\left(\frac{a}{k}, \dots, \frac{a}{k}, f\right). \quad (3.1.41)$$

Используя схему исследования, приведённую при $k = 2$, доказывается, что все нормы (3.1.29) эквивалентны при различных $\alpha \in (0, 1)$ и характеризуют классы функций, соответствующие $\alpha_i = \frac{1}{k}$ ($i = 1, \dots, k$)

В связи с этим, в дальнейшем будем изучать классы функций $L_p^{(k)}(a)$ с нормами

$$\|f\|_{L_p^{(k)}(a)}^p = \left[\int_0^{a/k} \dots \int_0^{a/k} |f(x_1 + \dots + x_k)|^p dx_1 \dots dx_k \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (3.1.42)$$

Лемма 3.3 Справедливо вложение $L_p^{(k)}(a) \subset L_p^{(k+1)}(a)$.

Доказательство. При $p = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^{a/(k+1)} \dots \int_0^{a/(k+1)} \int_0^{a/(k+1)} |f(x_1 + \dots + x_{k+1})| dx_1 \dots dx_{k+1} = \\
&= \int_0^{a/(k+1)} \dots \int_0^{a/(k+1)} \int_{x_2}^{x_2+a/(k+1)} |f(s + x_3 + \dots + x_{k+1})| ds dx_2 \dots dx_{k+1} \leq \\
&\leq \int_0^{a/(k+1)} \dots \int_0^{a/(k+1)} \int_0^{2a/(k+1)} |f(s + x_3 + \dots + x_{k+1})| ds dx_2 \dots dx_{k+1} = \\
&= \frac{a}{k+1} \Phi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}, \beta_k, f),
\end{aligned}$$

где $\beta_k = \frac{2a}{k+1}$, $\beta_i = \frac{a}{k+1}$, $i = 1, \dots, k-1$, $\sum_{i=1}^k \beta_i = 1$.

Отсюда, в силу неравенства (3.1.41), получаем оценку

$$\|f\|_{L_1^{(k+1)}(a)}^p \leq \frac{a}{k+1} \|f\|_{L_1^{(k)}(a)}^p,$$

которая доказывает лемму при $p = 1$.

Случай $p > 1$ очевиден.

Замечание 3.4 Пример функции $f(x) = x^{\frac{k}{p}}$ показывает, что пространства $L_p^{(k+1)}(a)$ шире $L_p^{(k)}(a)$.

Замечание 3.5 Как и в случае $k = 2$, доказывается плотность вложения $L_p^{(k)} \subset L_p^{(k+1)}$.

Лемма 3.4 Пространства $L_1^{(k)}(a)$ - банаховы.

Для доказательства воспользуемся частным случаем утверждений, приведённых в [190].

Пусть Ω область в R^n и $L_p(\Omega, E)$ - класс векторнозначных функций, определенных на Ω со значениями в некотором банаховом пространстве E , тогда, если $\int_{\Omega} \|f(\xi)\|_E d\xi < \infty$ ($1 \leq p < \infty$), то эти классы являются банаховыми пространствами с нормой

$$\|f(\cdot)\|_{L_p(\Omega, E)} = \left[\int_{\Omega} \|f(\xi)\|^p d\xi \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Пользуясь этим утверждением, полагая в качестве области Ω куб $K_{\frac{a}{k}} : 0 < x_i < \frac{a}{k}$, $i = 2, \dots, k$, а в качестве E - банахово пространство $L_p(0, a)$ и, записав

$$\|f(\cdot)\|_{L_p^{(k)}(a)} = \int_{K_{\frac{a}{k-1}}} \left\{ \left[\int_0^{\frac{a}{k}} |f(x_1 + \sum_{i=2}^k x_i)|^p dx_1 \right]^{\frac{1}{p}} \right\}^p dx_2 \dots dx_k,$$

в силу утверждения Хилле–Филлипса, получаем доказательство леммы.

Таким образом, классы $L_p^{(k)}(a)$ являются банаховыми пространствами функций, расширяющимися при возрастании параметра k .

Кроме того, из утверждения Р.Филлипса ([190], с.103) следует, что для $1 < p < \infty$ сопряженным пространством по отношению к $L_p^{(k)}(a)$ является пространство $L_{p'}^{(k)}(a)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

В случае $p = 2$ мы имеем гильбертово пространство $L_2^{(k)}(a)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^{\frac{a}{k}} \dots \int_0^{\frac{a}{k}} u \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) \bar{v} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) dx_1 \dots dx_k.$$

Заметим также, что изложенная схема исследования очевидным образом переносится и на классы векторнозначных функций $f(x)$, $x \in (0, a)$ со значениями в некотором банаховом пространстве.

Лемма 3.5 *Если $\int_0^\infty s^n f(s) ds < \infty$, то справедливо равенство*

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(x_1 + \dots + x_n) dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{n!} \int_0^\infty s^n f(s) ds \quad (3.1.43)$$

Доказательство проводится по индукции

При $n = 2$, меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x_1 + x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^\infty \int_{x_1}^\infty f(s) ds dx_1 = \int_0^\infty f(s) \int_0^s dx_1 ds = \int_0^\infty s f(s) ds.$$

Далее, если (3.1.43) верно при $n = k$, то для $n = k + 1$ имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}) dx_1 \dots dx_{k+1} = \\
&= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f((x_1 + \dots + x_k) + x_{k+1}) dx_1 \dots dx_k dx_{k+1} = \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty s^k f(s + x_{k+1}) ds dx_{k+1} = \int_0^\infty f(\tau) \int_0^{x_k} (\tau - x_k)^k dx_k d\tau = \\
&= \frac{1}{k!} \int_0^\infty \int_{x_{k+1}}^\infty (\tau - x_{k+1})^k f(\tau) dx_{k+1} = \frac{1}{k!} \int_0^\infty f(\tau) \int_0^\infty (\tau - x_{k+1})^k dx_{k+1} d\tau = \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \int_0^\infty \tau^{k+1} f(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{3.1.44}$$

Пространства $L_p(\infty)$

Как показывают выше приведённые примеры, пространства $L_p(a)$ содержат функции, заданные на $(0, a)$ и суммируемые с полиномиальными весами. Отметим, что этот факт более определенно следует из равенства Литлвуда

$$I_n = \int_{x_1+\dots+x_n \leq a, x_i \geq 0} \dots \int_{i=1}^n \varphi(\sum_{i=1}^n x_i) dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^a s^{n-1} \varphi(s) ds \tag{3.1.45}$$

и очевидного неравенства

$$\int_0^{\frac{a}{n}} \dots \int_0^{\frac{a}{n}} \varphi(\sum_{i=1}^n x_i) dx_1 \dots dx_n \leq I_n \tag{3.1.46}$$

Более того, распространение итерационного подхода на случай полуоси $[0, \infty)$ с помощью соотношения

$$\|f\|_{L_p(\infty)} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty |f(x_1 + \dots + x_n)|^p dx_1 \dots dx_n \tag{3.1.47}$$

в силу легко проверяемого методом математической индукции равенства

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi(x_1 + \dots + x_n) dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\infty s^{n+1} \varphi(s) ds \tag{3.1.48}$$

приводит к классическим пространствам функций интегрируемыми со степенными весами, и которые, как уже указывалось выше, не являются инвариантами относительно операции дробного интегрирования Римана–Лиувилля.

Классы весовых пространств инвариантных относительно операции дробного интегрирования описываются в следующем разделе.

3.2 Элементарные полугруппы и производящие уравнения

Приложения теории групп к дифференциальным уравнениям, как известно, имели начало с работ Ш. Пикара [190] для ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений) (1895). Работы Ж. Адамара, Ф. Бернштейна, В. Вольтерра, Леру (1903). использовали теорию полугрупп в связи с задачей Коши для систем линейных уравнений с частными производными. Задача Коши для волнового уравнения порождает некоторые группы преобразований, приводящие к определённым теоремам сложения, которым подчиняются элементарные решения, необходимые для построения задачи Коши. С другой стороны, эти теоремы сложения обуславливают групповые свойства.

Поскольку, уравнения гиперболического типа описывают обратимые процессы, то там возникают именно группы преобразований. А когда рассматривают уравнения параболического типа, соответствующие необратимым явлениям, вместо групп появляются полугруппы.

3.2.1 Канонические полугруппы

Начиная с фундаментальных работ Э.Хилле, Р.Филлипса и др. в теории уравнений параболического типа важное место занимают однопараметрические полугруппы линейных преобразований $U(t)$, $t \geq 0$, называемые каноническими и определяемые соотношением $U(\alpha \oplus \beta) \doteq U(\alpha)U(\beta)$, где α, β – действительные или комплексные числа [190], с.275. При этом в системе рассматриваемых чисел можно выделить множество полугрупп, соответствующих разнообразным операциям сложения.

Так в [190], с.275 показано, что если $F(x, y)$ функция $x, y \in \mathbb{R}$, такая, что

$F(x, y) \in \mathbb{R}^+$ и

$$F(x, (F(y, z)) = F(F(x, y), z), \quad (3.2.49)$$

то формула $\alpha \oplus \beta = F(\alpha, \beta)$ может служить определением полугрупповой операции в \mathbb{R}^+ . При этом введение таких операций связывается с теоремами сложения для некоторых элементарных функций.

К таким сложениям, например, относятся [190], с.275:

$$1) \alpha + \beta, \quad 2) \alpha \cdot \beta, \quad 3) \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta}, \quad 4) \alpha(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} + \beta(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2.50)$$

соответствующие функциям: 1) x , 2) $\ln x$, 3) $\operatorname{th} x$, 4) $\operatorname{sh} x$.

В настоящей диссертации используется другой подход и вводятся широкие классы канонических полугрупп, как решений простейших уравнений с частными производными первого порядка.

3.2.2 (ρ, h) — элементарные полугруппы

Пусть $t \in (t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$, $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$; $\rho(t)$ и $h(t)$ — действительнозначные функции с областями определения $D(\rho) = (t_1, t_2)$, $D(h) = (a, b)$, непрерывно дифференцируемые и строго монотонные. Кроме того, $h(x) + \rho(t) \in D(h^{-1}) \cap D(\rho^{-1})$, где ρ^{-1} и h^{-1} — соответствующие обратные функции.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\rho'(t)} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{h'(x)} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}. \quad (3.2.51)$$

Нетрудно видеть, что общее решение этого уравнения имеет вид:

$$u(t, x) = \psi[h(x) + \rho(t)], \quad (3.2.52)$$

где ψ — произвольная дифференцируемая функция.

Используя функции h^{-1} и ρ^{-1} , выражение (3.2.52) можно записать как

$$u(t, x) = \psi_1[h^{-1}(h(x) + \rho(t))], \text{ или } u(t, x) = \psi_2[\rho^{-1}(h(x) + \rho(t))], \quad (3.2.53)$$

где $\psi_1 = \psi h$, $\psi_2 = \psi \rho$ — также произвольные функции.

Имея в дальнейшем в виду t и x как временную и пространственную переменные, поставим в соответствие уравнению (3.2.51) однопараметрическое семейство операторов

$$U_{\rho,h}(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) + \rho(t))], \quad (3.2.54)$$

в предположении, что φ принадлежит пространству непрерывных и ограниченных функций $\mathfrak{C}(a, b)$ с нормой $\|\varphi\| = \sup_{x \in (a,b)} |\varphi(x)|$.

Далее рассмотрим функцию

$$F(\alpha, \beta) = \rho^{-1}[\rho(\alpha) + \rho(\beta)]. \quad (3.2.55)$$

Нетрудно проверить, что она удовлетворяет условиям (3.2.51) и, таким образом, определяет сложение по правилу

$$x \oplus^\rho t = \rho^{-1}[\rho(x) + \rho(t)]. \quad (3.2.56)$$

Лемма 3.6 *Операторное семейство $U_{\rho,h}(t)$, определенное (3.2.54), является полугруппой линейных и ограниченных в $\mathfrak{C}(a, b)$ операторов со сложением (3.2.56).*

Доказательство. Ограничность следует из оценки

$$\|U_{\rho,h}(t)\varphi\| = \|\varphi[h^{-1}(x) + h(t)]\| \leq \|\varphi\|. \quad (3.2.57)$$

Кроме того, легко видеть, что $\|\varphi\| = 1$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} U_{\rho,h}(t)U_{\rho,h}(s)\varphi(x) &= U_{\rho,h}(t)\varphi[h^{-1}(h(x) + \rho(s))] = \\ \varphi[h^{-1}[h(x) + \rho(t) + \rho(s)]] &= \varphi[h^{-1}[h(x) + \rho[\rho^{-1}(\rho(t) + \rho(s))]]] = \\ \varphi[h^{-1}(h(x) + \rho(t \oplus^\rho s))] &= U_{\rho,h}(t \oplus^\rho s)\varphi(x). \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

Что и дает полугрупповое свойство.

Замечание 3.6 *Нетрудно проверить, что при заданной $\rho(t)$ полугруппы $U_{\rho,h}(t)$ инвариантна относительно замены $h(x)$ на $h(x)+c$, где c – константа.*

Определение 3.21 Полугруппу $U_{\rho,h}(t)$ будем называть (ρ, h) -полугруппой, а уравнение (3.2.51) ее производящим уравнением.

Заметим, что так как функцию $\rho(t)$ можно выбирать с точностью до постоянного слагаемого, то уравнение (3.2.51) порождает однопараметрическое семейство (ρ, h) -полугрупп.

В связи с этим справедлива

Лемма 1.2. (ρ, h) -полугруппа порожденная уравнением (3.2.51) однозначно определяется некоторой точкой $t_0 \in (t_1, t_2)$, в которой $U_{\rho,h}(t_0)\varphi(x) = \varphi(x)$.

Доказательство следует из непрерывности и монотонности функции $\rho_c(t) = \rho(t) + c$, которая, при соответствующем выборе константы c , обращается в ноль в единственной точке $t_0 \in (t_1, t_2)$. При этом, в силу замечания 3.6, добавление произвольной константы к $h(x)$ полугруппу не меняет.

Отсюда следует, что задача Коши для уравнения (3.2.51) с начальным условием $u(t_0, x) = \varphi(x)$ при каждом $\varphi \in \mathfrak{C}(a, b)$ имеет единственное решение и оно представимо в виде:

$$u(t, x) = U_{\rho,h}(t)\varphi(x). \quad (3.2.59)$$

В связи с этим, точку t_0 будем называть *точкой Коши*.

Далее заметим, что если законы задания функций ρ и h одинаковые, то соответствующие (ρ, h) -полугруппы можно записать в виде

$$U_{h,h}(t)\varphi(x) = \varphi(x \oplus^h t). \quad (1.12)$$

Такие полугруппы будем называть h -симметричными, а соответствующие уравнения (3.2.51) — *симметричными производящими уравнениями*.

Лемма 3.7 В семействе полугрупп производимых симметричным дифференциальным уравнением, содержится лишь одна симметричная полугруппа.

Доказательство. Пусть $U_h(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}[h(x) + h(t)]]$. Тогда для любых $c \neq 0$ и $h_c = h(t) + c$ имеем $U_{h+c}(t)\varphi(x) = \varphi[h_c^{-1}[h_c(t) + h_c(x)]] = \varphi[h^{-1}[h(x) + h(t) + c]]$.

То есть U_{h+c} не является симметричной при $c \neq 0$.

Примеры

Среди разнообразных (ρ, h) -полугрупп отметим следующие:

Все полугруппы со сложением (3.2.50) являются h -симметричными с точкой

Коши $t_0 = 0$ и производящими уравнениями:

- 1) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $h(x) = x$, $x \geq 0$, $t \geq 0$;
- 2) $t \frac{\partial u}{\partial t} = x \frac{\partial u}{\partial x}$, $h(x) = \ln x$, $x > 0$, $t \geq 0$;
- 3) $(1 - t^2) \frac{\partial u}{\partial t} = (1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x}$, $h(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $0 \leq x < 1$, $0 \leq t < 1$;
- 4) $(1 + t^2) \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + x^2) \frac{\partial u}{\partial x}$, $h(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$, $x \geq 0$, $t \geq 0$;
- 5) Среди несимметричных (ρ, h) -полугрупп отметим $U_{\rho, h}\varphi(x) = \varphi[xe^{\rho(t)}]$, $h(x) = \ln x$, с уравнением $\frac{1}{\rho'(t)} \frac{\partial u}{\partial t} = x \frac{\partial u}{\partial x}$.

3.2.3 Нелинейная арифметика и полугруппы В.П. Маслова

Интересные классы полугрупп связаны с исследованиями академика В.П. Маслова по идемпотентному анализу [141], [143] со сложениями $t \oplus^\delta x = -\delta \ln(e^{-\frac{t}{\delta}} + e^{-\frac{x}{\delta}})$, которые порождают симметричные полугруппы вида:

$$M_\delta(t)\varphi(x) = \varphi[-\delta \ln(e^{-\frac{t}{\delta}} + e^{-\frac{x}{\delta}})] = \varphi(t \oplus^\delta x), \quad (t \geq 0, x \geq 0) \quad (3.2.60)$$

Будем рассматривать классы $M_\delta^+(t)$ при $\delta > 0$ и $M_\delta^-(t)$, $\delta < 0$. Нетрудно видеть, что полугруппы $M_\delta^+(t)$ имеют точку Коши $t_0 = \infty$, а полугруппы $M_\delta^-(t)$ такой точки не имеют.

В то же время, несимметричные полугруппы $M_{\delta,c}(t)\varphi = \varphi[-\delta \ln(e^{-\frac{x}{\delta}} + e^{-\frac{t}{\delta}} - c)]$, порожденные уравнением (3.2.60), всегда имеют точку Коши $t_0 = -\delta \ln c$.

Наконец, следующие интересные примеры дают нам предельные сложения Маслова

$$t \oplus x = \lim_{\delta \rightarrow 0} (t \oplus^\delta x) = \begin{cases} \min(t, x), & \delta > 0; \\ \max(t, x), & \delta < 0, \end{cases} \quad (3.2.61)$$

которым соответствуют полугруппы

$$M_0^+(t)\varphi(x) = \varphi(\min(x, t)), \quad M_0^-(t)\varphi(x) = \varphi(\max(x, t)) \quad (3.2.62)$$

с производящими уравнениями

$$\chi(t-x)\frac{\partial u}{\partial t} = \chi(x-t)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.2.63)$$

в случае M_0^+ ,

$$\chi(x-t)\frac{\partial u}{\partial t} = \chi(t-x)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.2.64)$$

в случае M_0^- .

Здесь χ — функция Хевисайда.

Отсюда следует, что для уравнений (3.2.63) и (3.2.64) задача с условием $u(t_0, x) = \varphi(t)$ имеет единственное решение.

3.2.4 Функция нелинейного осреднения В.П. Маслова и математические модели в экономике

Создавая «квантовую экономику», академик В.П. Маслов [143], ввел дополнительную аксиому в систему аксиом Колмогорова в теории нелинейного осреднения, и получил среднее, которое в случае двух величин a и b , имеет вид

$$M_\beta(a, b) = \frac{1}{\chi^\beta} \ln \frac{(e^{\chi^\beta a} + e^{\chi^\beta b})}{2}, \quad (3.2.65)$$

где $\chi = \pm 1$, $\beta > 0$.

С помощью среднего (3.2.65) В.П. Масловым построена «нелинейная арифметика» со сложением $a \oplus b = \ln(e^a + e^b)$ и умножением $a \otimes b = a + b$, используемая в его исследованиях, как в финансовой математике, так и в квантовой физике [141], [143], [144], [145].

Основной особенностью среднего $M_\beta(a, b)$ является его «наибольшая близость» к линейному, в том смысле, что оно удовлетворяет *аксиоме В.П. Маслова*

$$M_\beta(a + \alpha, b + \alpha) = M_\beta(a, b) + \alpha. \quad (3.2.66)$$

Это обеспечивает однозначный выбор функции φ в семействе колмогоровских средних

$$Q(a, b) = \varphi^{-1} \left(\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} \right), \quad (3.2.67)$$

где $\varphi(s)$ — непрерывная, строго монотонная функция, φ^{-1} — обратная к ней.

Функции же вида (3.2.67), как известно [27], [61], [74], [131], являются основным инструментом в исследованиях микро- и макроэкономики. Так, в случае степенной функции $\varphi(a) = a^\delta$, $\varphi(b) = b^\delta$ семейство (3.2.67) относится к классу, так называемых CES-функций [27], [61], [74], [131] с постоянной эластичностью замещения $\sigma = \frac{1}{1+\delta}$, имеющих вид

$$F_\delta(K, L) = A(\gamma_1 K^{-\delta} + \gamma_2 L^{-\delta})^{-\frac{1}{\delta}}, \quad (3.2.68)$$

где $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, K — фонды, L — трудовые ресурсы, γ_1 — фондоемкость продукции, γ_2 — трудоемкость продукции.

В [131], В.В. Леонтьев констатирует предпочтение функции CES перед классической функцией Кобба-Дугласа, в силу большей гибкости первой, частными случаями которой являются наиболее используемые типы функций: производственная функция Леонтьева

$$F_\infty(K, L) = \min\left(\frac{K}{\gamma_1}, \frac{L}{\gamma_2}\right), \quad \beta = \infty.$$

Функция Кобба-Дугласа

$$F_0(K, L) = AK^{\gamma_1}L^{\gamma_2}, \quad \beta = 0.$$

Линейная функция

$$F_1(K, L) = \gamma_1 K + \gamma_2 L + c, \quad \beta = -1.$$

В нашей заметке исследуются свойства функции осреднения Маслова, с точки зрения ее применения к экономическим задачам как производственной функции, которая не включена в семейство CES функций.

3.2.5 Обобщенная функция нелинейного осреднения Маслова

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $x_i > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим функцию

$$M_\beta = \frac{1}{\chi^\beta} \ln \left(\sum_{i=1}^n c_i e^{\chi \beta x_i} \right), \quad (3.2.69)$$

где $\chi = \pm 1$, $\beta > 0$, $c_i > 0$, $\sum_{i=1}^n c_i = 1$.

Нетрудно видеть, что функция M_β удовлетворяет аксиоме аддитивности Маслова

$$M_\beta(x_1 + c, x_2 + c, \dots, x_n + c) = c + M_\beta(x_1, \dots, x_n), \quad (3.2.70)$$

но может не удовлетворять аксиоме симметрии, с точки зрения инвариантности при перестановке переменных x_i . Кроме того, очевидны следующие свойства:

$$1. M_\beta(\theta) = 0, M_\beta(x) \geq 0; \quad (3.2.71)$$

$$2. \frac{\partial M_\beta(x)}{\partial x_i} = \frac{c_i e^{\chi \beta x_i}}{\sum_{i=1}^n c_i e^{\chi \beta x_i}} > 0; \quad (3.2.72)$$

$$3. \frac{\partial^2 M_\beta(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\chi \beta c_i e^{\chi \beta (x_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n c_j e^{\chi \beta x_j})}}{\left(\sum_{i=1}^n c_i e^{\chi \beta x_i} \right)^2}. \quad (3.2.73)$$

Из (3.2.73) следует, что при $\chi = 1$ функция M_β выпукла вниз, а при $\chi = -1$ выпукла вверх.

Следующее свойство, которое назовем *квазиоднородностью* функции M_β , характеризуется утверждением:

а) при $\chi = 1$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} M_\beta(qx) &\leq qM_\beta(x), \text{ если } 0 \leq q \leq 1, \\ M_\beta(qx) &\geq qM_\beta(x), \text{ если } q > 1, \end{aligned} \quad (3.2.74)$$

б) при $\chi = -1$ неравенства (3.2.74) меняются на противоположные.

Действительно. Пусть $q \in (0, 1)$, тогда в случае а) в силу монотонности логарифмической функции и выпуклости вверх функции $\varphi(a) = a^q$, имеем

$$M_\beta(qx) = \frac{1}{\beta} \ln \left(\sum_{i=1}^n c_i e^{\beta qx_i} \right) \leq \frac{1}{\beta} \ln \left(\sum_{i=1}^n c_i e^{\beta x_i} \right)^q = qM_\beta(x).$$

Случай $q > 1$ доказывается аналогично, с учетом выпуклости функции $\varphi(a) = a^q$ вниз.

Случай $\chi = -1$ доказывается по той же схеме.

Как отмечено, свойство аддитивности (3.2.70) наиболее близко приближает функции $M_\beta(x)$ к линейной. Следующее её свойство так же подтверждает этот факт.

Лемма 3.8 Для функции $M_\beta(x)$ справедливы следующие оценки

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \leq M_\beta(x) \leq \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.2.75)$$

Доказательство. Левое неравенство в (3.2.75) следует из неравенства, связывающее среднее арифметическое и обобщенное среднее геометрическое ([13], с.26).

$$\prod_{i=1}^n y_i^{c_i} \leq \sum_{i=1}^n c_i y_i \quad (3.2.76)$$

Применяя (3.2.76) к $y_i = e^{\beta x_i} > 1$ и пользуясь монотонностью логарифмической функции, имеем

$$M_\beta(x) - \sum_{i=1}^n c_i x_i = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n c_i e^{\beta x_i}}{\prod_{i=1}^n e^{\beta c_i x_i}} \right) = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\sum_{i=1}^n c_i y_i}{\prod_{i=1}^n y_i^{c_i}} \geq 0$$

Нетрудно видеть, что смена знака у β этого неравенства не меняет.

Для доказательства правого неравенства в (3.2.75) оценим разность

$$\begin{aligned} M_\beta(x) - \sum_{i=1}^n x_i &= \frac{1}{\beta} \ln \frac{\sum_{i=1}^n c_i e^{\beta x_i}}{\prod_{i=1}^n e^{\beta x_i}} = \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n c_i y_i}{\prod_{i=1}^n y_i} \right)^{\frac{1}{\beta}} = \\ &= \ln \left(\sum_{i=1}^n c_i \frac{y_i}{\prod_{i=1}^n y_i} \right)^{\frac{1}{\beta}} < \ln \left(\sum_{i=1}^n c_i \right)^{\frac{1}{\beta}} = 0. \end{aligned}$$

Что даёт правое неравенство в (3.2.75)

Лемма доказана.

3.2.6 Производственная функция Маслова

Свойства (3.2.71)–(3.2.73) осредняющей функции M_β позволяют применить её в качестве макроэкономической многофакторной производственной функции, положив

$$F_\beta(x_1, \dots, x_n) = AM_\beta(x_1, \dots, x_n), \quad (3.2.77)$$

где $A > 0$, x_i – производственные факторы.

Но, с точки зрения выполнения классических условий функция $F_\beta(x)$ подходит лишь при $\beta < 0$, что соответствует отрицательности вторых производных по x_i . В классическом случае положительность вторых производных не рассматривается по причине исследования экономических процессов, развивающихся не быстрее линейных. Линейным же процессам (предельный случай) соответствует линейная производственная функция $F(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$.

В случае же функции Маслова, учитывая её близость к линейной при любом знаке параметра β , можно показать, что и при $\beta > 0$ ($\chi = 1$) $F_\beta(x)$ является производственной функцией. Эти функции будем называть производственными функциями Маслова (ПФМ).

Таким образом, уникальность ПФМ заключается в том, что они могут быть и строго выпуклыми, и строго вогнутыми с «почти линейными» поведением.

Ещё одна интересная особенность ПФМ заключается в её чувствительности изменению факторов через такую важную характеристику, как эластичность замещения σ . Так в случае $n = 2$ ($x_1 = K$, $x_2 = L$) σ определяется равенством

$$\sigma = d(\ln \frac{K}{L})/d(\ln \frac{F'_K}{F'_L}) \quad (3.2.78)$$

В силу однородности функции CES $F(qK, qL) = qF(K, L)$ для неё $\sigma = \frac{1}{1+\delta}$, то есть σ не зависит от K и L .

В то время как в случае ПФМ

$$\sigma = \frac{Le^{\chi\beta K} - Ke^{\chi\beta L}}{\chi\beta LK(e^{\chi\beta K} - e^{\chi\beta L})}. \quad (3.2.79)$$

Из (3.2.78) и (3.2.79), в частности следует, что при $\delta = -1$ функция CES переходит в линейную, при этом $\sigma = \infty$, что характеризует идеальную замещаемость факторов. ПФМ также переходит в линейную при $\chi = -1$ и $\beta = 0$, в соответствие с «нелинейной арифметикой» Маслова. Кроме того, при других значениях β , варьируя фондами K и L , можно добиться сколь угодно большого значения σ .

3.2.7 Решение задачи оптимизации производства с ПФМ

В качестве одного из приложений ПФМ рассмотрим стандартную задачу оптимизации производства и аналогичную ей задачу потребительского выбора с бюджетными ограничениями.

Как известно [27], [61], [74], [131], математическая модель для этих задач сводится к оптимизации функции $F(x_1, \dots, x_n)$ (в одном случае это производственная функция, в другом функция потребительского выбора) при условиях

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = c, \quad (3.2.80)$$

где $p_i > 0$, $x_i > 0$.

В нашем случае эта задача имеет вид

$$F_\beta(x) = AM_\beta(x) \rightarrow \text{extr} \quad (3.2.81)$$

при условии (3.2.80).

И здесь важно то, что она решается в явном виде.

Действительно, условия необходимости экстремума функции Лагранжа

$$L_\beta(x_1, \dots, x_n) = AM_\beta(x) - \lambda(c - \sum_{i=1}^n p_i x_i)$$

дают систему уравнений

$$\frac{\partial M_\beta}{\partial x_i} = \lambda p_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2.82)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = c.$$

Отсюда, после очевидных операций, получаем соотношения

$$e^{\chi\beta(x_i-x_{i+1})} = \frac{c_{i+1}p_i}{p_{i+1}c_i}, \quad (3.2.83)$$

которые эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений

$$Bx = \gamma, \quad (3.2.84)$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ (T – транспонирование), $\gamma_i = \frac{1}{\chi\beta} \ln \frac{c_{i+1}p_i}{p_{i+1}c_i}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{bmatrix}. \quad (3.2.85)$$

Матрица B невырожденная, так как $\det B = \sum_{i=1}^n p_i > 0$.

Таким образом, задача оптимизации (3.2.80)–(3.2.81) с производственной функцией Маслова решается в явном виде. Причём, в силу близости функций ПФМ к линейным, её можно назвать задачей «почти-линейного» программирования, и которая, в отличии от линейной, решается методом Лагранжа.

В заключении заметим, что если в условии (3.2.80) линейную форму заменить формой с нелинейным сложением Маслова $a \oplus b = \ln(e^a + e^b)$ ([141], с.73), то эта задача также решается в явном виде.

3.2.8 Элементарные полугруппы класса C_0

Для дальнейшего изучения элементарных полугрупп с точки зрения их сильной непрерывности введем следующие понятия.

Определение 3.22 Полугруппу $U_{\rho,h}(t)$ будем называть сильно непрерывной в точке $t_0 \in (t_1, t_2)$, если для любого $\varphi \in E$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \downarrow t_0} \|U_{\rho,h}(t)\varphi - \varphi\|_E = 0. \quad (3.2.86)$$

Используя полугрупповое свойство, нетрудно показать, что для непрерывности полугруппы в любой точке $t \in (t_1, t_2)$ необходима и достаточна ее сильная непрерывность в точке Коши.

Определение 3.23 Пусть $f(t)$ – векторнозначная функция, определённая при $t \in (t_1, t_2)$ со значениями в E . И $\mu(t)$ – скалярная функция, определенная на $D(\mu) \in \mathbb{R}$ и с областью значений $R(\mu) = (t_1, t_2)$ строго монотонная. Суперпозицию $g(t) = f(\mu(t))$ будем называть μ -деформацией функции $f(t)$.

Определение 3.24 Полугруппы $U_h^{(0)}(t)$ со сложением $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta$ будем называть арифметическими.

К таким классам относятся (ρ, h) -полугруппы, когда $\rho(t) = t$. То есть

$$U_h^{(0)}(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}[h(t) + t]]. \quad (3.2.87)$$

В соответствии с этими определениями, всякая (ρ, h) -полугруппа является ρ -деформацией арифметической полугруппы $U_h^{(0)}(t)$.

Кроме того, отсюда следует, что полугруппы $U_{\rho,h}(t)$ сильно непрерывны в точке Коши t_0 тогда и только тогда, когда арифметическая полугруппа $U_{\rho,h}(t)$ сильно непрерывна в точке $t = 0$.

Определение 3.25 Функцию $\varphi \in \mathfrak{C}(a, b)$ будем называть μ -равномерно непрерывной, если ее μ^{-1} -деформация $\psi = \varphi(\mu(x))$ является ограниченной и равномерно непрерывной функцией.

Очевидно, что при этом имеем соотношение

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{C}(a,b)} = \sup_{x \in (a,b)} |\varphi(x)| = \sup_{s \in (\mu^{-1}(a), \mu^{-1}(b))} |\varphi(\mu(s))| = \|\psi\|_{\mathfrak{C}\mu}.$$

То есть, пространства $\mathfrak{C}(a, b)$ и $\mathfrak{C}\mu$ изоморфны. И, следовательно, пространства μ -равномерно непрерывных функций с нормой $\mathfrak{C}\mu$ являются банаевыми.

Лемма 3.9 Всякая $U_h^{(0)}(t)$ -полугруппа сильно непрерывна в пространстве h^{-1} -равномерно непрерывных функций.

Доказательство следует из соотношений

$$\begin{aligned} \|U_h^{(0)}(t)\varphi(x) - \varphi(x)\| &= \sup_{x \in (a,b)} |\varphi[h^{-1}[h(x) + t] - \varphi[h^{-1}(h(x))]]| = \\ &\sup_{\tau \in (h^{-1}(a), h^{-1}(b))} |\psi(\tau + t) - \psi(\tau)| = \|\psi(\tau + t - \psi(\tau))\| \rightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Таким образом, полугруппы $U_h^{(0)}(t)$ имеют производящие операторы $A_h^{(0)}\varphi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{U_t^{(0)}\varphi - \varphi}{t}$ с областью определения $D(A_h^{(0)})$, плотной в $\mathfrak{C}_{h^{-1}}$ (см.[122], с.258).

Теорема 3.3 Производящий оператор полугруппы $U_h^{(0)}(t)$ задается дифференциальным выражением $L\varphi(x) = \frac{1}{h'(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и областью определения $D(A_h^{(0)}) = \{\varphi : \varphi \in \mathfrak{C}_{h^{-1}}, L\varphi \in \mathfrak{C}_{h^{-1}}\}$.

Доказательство. В силу теорем [67], с.327, [122], с.260 производящий оператор имеет резольвенту $Re(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ в некоторой комплексной полуплоскости $Re\lambda > \omega$, как преобразование Лапласа от полугруппы.

В нашем случае

$$R(\lambda, A_h^{(0)})\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_h^{(0)}(t)\varphi(x) dt. \quad (3.2.88)$$

Из (3.2.87) и из (3.2.57) следует оценка

$$\|R(\lambda, A_h^{(0)})\| < \frac{1}{Re \lambda}, (Re \lambda > 0). \quad (3.2.89)$$

Для $n \in \mathbb{N}$ введем оператор Иосиды ([67], с.334) $\mathfrak{I} = nR(n, A_h^{(0)})$, обладающий свойством

$$A_h^{(0)}\mathfrak{I}_h = n(\mathfrak{I}_h - I). \quad (3.2.90)$$

Далее, доказательство проведём для $h'(x) > 0$ (для $h'(x) < 0$ аналогичное).

Положим

$$\begin{aligned} y_n(x) &= (\mathfrak{I}_n^+\varphi)(x) = n \int_0^\infty e^{-nt} U_h^+(t)\varphi(x) dt = \\ &n \int_0^\infty e^{-nt} \varphi[h^{-1}(h(x) + t)] dt = \int_x^b e^{-n[h(\tau) - h(x)]} h'(\tau)\varphi(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.91)$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{1}{h'(x)}y'_n(x) = -ny(x) + ny(x) = n(\mathfrak{J}_n^+ - I)\varphi(x) = A_h^{(0)}y_n(x). \quad (3.2.92)$$

Сравнивая (3.2.90) и (3.2.92), заключаем, что $A_h^{(0)}y_n(x) = \frac{1}{h'(x)}y'_n(x)$.

Поскольку область значений резольвенты совпадает с $D(A_h^{(0)})$, то в области определения оператора $A_h^{(0)}$ справедливо равенство $A_h^{(0)}y(x) = \frac{y'(x)}{h'(x)}$.

Обратно. Пусть $\varphi \in \mathfrak{C}_{h^{-1}}([a, b])$, $\frac{1}{h'(x)}\varphi'(x) \in \mathfrak{C}_{h^{-1}}([a, b])$.

Введём вспомогательную функцию $g(x)$ соотношением

$$-ng(x) = \frac{1}{h'(x)}\varphi'(x) - n\varphi(x). \quad (3.2.93)$$

Полагая $(\mathfrak{J}_n g)(x)$, в соответствии с полученными ранее соотношениями, получаем равенство

$$\frac{1}{h^{-1}}y'_n(x) - n y_n(x) = -n g(x). \quad (3.2.94)$$

Из (3.2.93) и (3.2.94), получаем уравнение $\frac{1}{h'(x)}(\varphi(x) - y_n(x))' = n(\varphi(x) - y_n(x))$.

Таким образом, функция $v(x) = \varphi(x) - y_n(x)$ является решением уравнения $\frac{1}{h'(x)}v'(x) = nv(x)$ и, следовательно, имеет вид $v(x) = c e^{nh(x)}$. Но, так как $h(b) = \infty$, то $v \in \mathfrak{C}_{h^{-1}}[a, b]$ только при $c = 0$. То есть $v \equiv 0$ и, таким образом, $\varphi(x) = y_n(x) \in D(A_h^+)$ и $A_h^{(0)}\varphi(x) = \frac{\varphi'(x)}{h'(x)}$. $D(A_h^{(0)})$ совпадает с множеством всех функций $\varphi \in \mathfrak{C}_{h^{-1}}[a, b]$ и для таких функций $A_h^{(0)}\varphi(x) = \frac{1}{h'(x)}\varphi'(x)$.

Для случая $h'(x) > 0$ лемма доказана. Случай $h'(x) < 0$ доказывается аналогично.

3.2.9 (ρ, h) -группы и косинус-функции

Заметим, что термин «элементарные полугруппы» приведён здесь в связи с возможностью использования таких полугрупп при конструировании более сложных аналогичных объектов— полугрупп, групп, косинус-функций. Например, рассмотрим следующую схему:

а) если A — генератор C_0 — полугруппы $U(t, A)$, $t \geq 0$, а $(-A)$ — генератор C_0 — полугруппы $\tilde{U}(-t, A)$, $t \leq 0$, действующий в E , то семейство $S(t) = U(t, A)$ при $t \geq 0$ и $S(t) = \tilde{U}(-t, A)$, при $t \leq 0$ является группой с генератором A , и $S(t)S(s) = S(t+s)$, $-\infty < t, s < \infty$ (см. [67], с. 347).

б) далее, в соответствии с работой [39], с. 179, оператор $A_a = A^2 + aI$ порождает операторную косинус–функцию $C_a(t)f = C_0(t)f + at \int_0^t (t^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} I_1[a(t^2 - s^2)]^{\frac{1}{2}} C_0(s)ds$, где $C_0(t) = \frac{1}{2}[S(t) + S(-t)]$, I_1 — функция Бесселя, $a = \text{const}$.

в) тогда, в силу результатов [81], операторы A_a^{2n+1} ($n = 0, 1, \dots$) также являются генераторами косинус–функций $C(t, A_a^{2n+1})$, а, следовательно, и генераторами C_0 — полугрупп вида

$$U(t, A_a^{2n+1})f = \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s, A_a^{2n+1})f ds.$$

Следует также указать и на возможности конструирования C_0 — полугрупп в рамках теории дробных степеней операторов развитой в работах [67], [81], [122], [125].

3.3 Полугруппы сдвигов и деформаций в анизотропных пространствах функций с равномерной метрикой

В [89] указан некоторый подход для построения однопараметрических полугрупп линейных преобразований, использующий решение уравнений вида

$$L_h u(x_1, x_2) = a_1 \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial h_1(x_1)} + a_2 \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial h_2(x_2)} = 0, \quad (3.3.95)$$

где функции $h_m(x_m)$, $m = 1, 2$, определены, положительны на интервалах $x_m \in (\alpha_m, \beta_m) \subset \mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$, $\frac{\partial h_m}{\partial x_m} > 0$.

Этот подход принципиально отличается от рассмотренного Э. Хилле метода ([190], с. 275), использующего теоремы сложения для некоторых элементарных функций.

Как показано в [88], [89], применение операторного метода Маслова–Хевисайда ([140], [141]), с использованием таких полугрупп, позволяет зна-

чительно расширить классы равномерно корректных задач в смысле [39], [125] для дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами.

В настоящем параграфе указанный подход распространяется на случай многомерных дифференциальных операторов вида

$$L_{n,h}u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=1}^n a_m \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial h_m(x_m)}, \quad (3.3.96)$$

где $x_m \in (\alpha_m, \beta_m) \subset \mathbb{R}^1$, $h_m > 0$, $h'_m > 0$, область значений $R(h_m) = \mathbb{R}^1$ или $R^+ = (0, \infty)$, $a_m \neq 0$.

Так как замена $v_m(s_m) = u(a_m s_m)$ не меняет порядка сингулярности оператора (3.3.96), то, не нарушая общности, мы будем дальнейшее рассуждения проводить с оператором

$$L_{r,h}u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=1}^r \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial h_m(x_m)} - \sum_{m=r+1}^n \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial h_m(x_m)}. \quad (3.3.97)$$

При этом, при конструировании однопараметрических семейств линейных преобразований используется следующее операторное семейство:

$$\begin{aligned} U_{r,h}(t)\varphi(x) = \varphi\{h_1^{-1}[h_1(x_1) + t], \dots, h_r^{-1}[h_r(x_r) + t], h_{r+1}^{-1}[h_{r+1}(x_{r+1}) - t], \dots \\ \dots, h_n^{-1}[h_n(x_n) - t]\}, \end{aligned} \quad (3.3.98)$$

где функция $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ определена на параллелепипеде $\Pi^n = \{x_m : x_m \in (\alpha_m, \beta_m)\}$, $m = 1, \dots, n$, $t \in [0, \infty)$.

В зависимости от вида областей значений $R(h_m)$ функций h_m разделяются случаи:

I) $R(h_m) = \mathbb{R}^1$,

II) $R(h_m) = \mathbb{R}^+$,

III) одна часть семейства h_m удовлетворяет условию I), а другая условию II).

Здесь рассматривается лишь первый случай. II) и III) требуют отдельного рассмотрения.

3.3.1 Полугруппы сдвигов с деформациями

Пусть $C(\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных на \mathbb{R}^n функций $v(s) = v(s_1, \dots, s_n)$ с нормой $\|v\|_{C(\mathbb{R}^n)} = \sup_{s \in \mathbb{R}^n} |v(s)|$. Замена $s_m = h_m(x)$ задает оператор суперпозиции

$$(\mathbf{h}v)(s) = v(h_1(x_1), \dots, h_n(x_n)) = u(x_1, \dots, x_n) = u(x), \quad (3.3.99)$$

отображающий изоморфно и изометрично $C(\Pi^n)$. При этом, имеем равенства

$$\|u\|_{C(\Pi^n)} = \sup_{x \in \Pi^n} |u(x)| = \sup_{s \in \mathbb{R}^n} |v(s)| = \|v\|_{C(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.3.100)$$

То есть, $C(\Pi^n)$ также является банаховым.

Определение 3.26 Функцию $u \in C(\Pi^n)$ будем называть h -деформацией функции $v \in C(\mathbb{R}^n)$, а пространство $C(\Pi^n)$ — h -деформацией пространства $C(\mathbb{R}^n)$.

Определение 3.27 h -деформацию банахова пространства равномерно непрерывных и ограниченных функций $C(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать через $C(\Pi^n)$, а функции $u \in C(\Pi^n)$ будем называть h -равномерно-непрерывными функциями.

Так как $C(\Pi^n)$ изоморфно и изометрично пространству $C(\mathbb{R}^n)$, то оно также является банаховым пространством с нормой (3.3.100).

Далее, пусть $\varphi \in C(\Pi^n)$. Нетрудно видеть, что семейство операторов $U_{r,h}(t)$, заданное (3.3.98), обладает следующими свойствами:

1. $U_{r,h}(0)\varphi = \varphi;$
2. $\|U_{r,h}(t)\varphi\|_{C(\Pi^n)} \leq \|\varphi\|_{C(\Pi^n)}$, причем $\|U_{r,h}\| = 1$;
3. $U_{r,h}(t+s)\varphi = U_{r,h}(t)U_{r,h}(s)\varphi$, при $t, s \geq 0$.

То есть, операторное семейство $U_{z,h}(t)$ является однопараметрической полугруппой линейных преобразований в пространстве $C(\Pi^n)$.

Покажем, что справедлива следующая

Теорема 3.4 Полугруппа $U_{r,h}(t)$ является сильно непрерывной в пространствах $C(\Pi^n)$. То есть, для всякой $\varphi \in C(\Pi^n)$ выполняется свойство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|U_{r,h}(t)\varphi - \varphi\|_{C(\Pi^n)} = 0. \quad (3.3.101)$$

Доказательство. Выполнение соотношения (3.3.101) следует из представления

$$\begin{aligned} U_{r,h}(t)\varphi(x) - \varphi(x) &= \\ &= \varphi[h_1^{-1}(h_1(x_1) + a_1 t), \dots, h_n^{-1}(h_n(x_n) + a_n t)] - \varphi(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \{\varphi[x_1, \dots, x_{i-1}, h_i^{-1}(h_i(x_i) + a_i t)], \dots, h_n^{-1}(h_n(x_n) + a_n t)] - \end{aligned} \quad (3.3.102)$$

$$-\varphi[x_1, \dots, x_i, h_{i+1}^{-1}(h_{i+1}(x_i) + a_{i+1} t)], \dots, h_n^{-1}(h_n(x_n) + a_n t)]\},$$

здесь $a_i = \pm 1$.

Так как каждое слагаемое в сумме (3.3.102) является приращением $\Delta F_i = F_i(s_i + a_i t) - F_i(s_i)$, ($s_i = h_i(x_i)$) одномерной функции F_i из $C(\mathbb{R})$, то каждое из этих слагаемых стремится к нулю при $t \rightarrow 0$ равномерно по всем $S_i \in \mathbb{R}$.

Отсюда, в силу оценки

$$\|U_{r,h}(t)\varphi - \varphi\|_{C(\Pi^n)} \leq \sum_{i=1}^n \|F_i(s_i + a_i t) - F_i(s_i)\|_{C(\mathbb{R})}$$

следует (3.3.101).

3.3.2 Производящий оператор полугруппы $V_{r,h}(t)$

Покажем, что справедлива следующая

Теорема 3.5 Оператор $A_{r,n}$, заданный дифференциальным выражением $L_{r,h}$ (3.3.97) и областью определения

$$D(A_{r,h}) = \{\varphi \in C(\Pi^n), \quad L_{r,h}\varphi \in C(\Pi^n)\}, \quad (3.3.103)$$

является производящим оператором полугруппы $U_{r,h}(t)$. То есть, справедливо соотношение

$$A_{r,h}\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [U_{r,h}(t)\varphi - \varphi] = U'_{r,h}(0)\varphi, \quad (3.3.104)$$

для каждого $\varphi \in C(\Pi^n)$ и $D(A_{r,n})$ плотно в $C(\Pi^n)$.

Для доказательства теоремы понадобится

Лемма 3.10 *Если в $L_{r,h}$, $r \neq 0$, то в классе дифференцируемых функций $u \in C(\Pi^n)$ уравнение*

$$L_{r,h}u(x) - \lambda u(x) = 0, \quad (3.3.105)$$

рассмотренное при $\lambda = 0, 1, \dots$, имеет ограниченное решение только при $\lambda = 0$.

Доказательство достаточно провести для случая $h_m(x_m) = x_m$, $m = 1, \dots, n$.

Справедливость леммы в общем случае следует из изоморфизма и изометрии $C(\mathbb{R}^n)$ и $C(\Pi^n)$.

В таком случае общее решение уравнение (3.3.105) при $\lambda = 0$ в классе ограниченных функций можно записать в виде

$$u(x) = f[x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{r-1} - x_r, x_r - x_{r+1}, \dots, x_{n-1} + x_n], \quad (3.3.106)$$

где $f(x)$ произвольная ограниченная и дифференцируемая функция в $C(\mathbb{R}^n)$.

Справедливость этого утверждения следует, например, из [21] теорема XVI. 2, с. 526, так как функции $\xi^{(k)}(x) = x_k - x_{k+1}$, при $k = 1, \dots, r-1$, и $\xi^{(k)}(x) = x_k + x_{k+1}$, при $k = r, \dots, n-1$ являются функционально независимыми частными решениями уравнения (3.3.105) при $\lambda = 0$.

Отсюда следует, что общее решение уравнение (3.3.105) при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$u(x) = f(x) \exp \left[\frac{\lambda}{n} \left(\sum_{m=1}^r x_m - \sum_{m=r+1}^n x_m \right) \right], \quad (3.3.107)$$

что легко проверяется подстановкой $u(x)$ в (3.3.105).

Если бы $u(x)$ была ограничена при некотором $\lambda > 0$, то ее значение на направлении $x_1 - x_2 = c$ также должны быть ограничены. Что не возможно, так как при $x_2 \rightarrow \infty$ правая часть в (3.3.107) неограниченно возрастает.

Что и доказывает справедливость леммы.

Для доказательства теоремы 3.5 введем операторы

$$J_\lambda \varphi = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_{r,h}(t) \varphi dt = \lambda R(\lambda, A) \varphi, \quad (3.3.108)$$

$\lambda > 0$, $R(\lambda, A)$ – резольвента оператора $A_{r,h}$, представление которой через полу-группу $U_{r,h}(t)$ обеспечивается сильной непрерывностью полугруппы ([67], с. 334).

Нетрудно видеть, что справедливо соотношение $A_{r,h}J_\lambda = \lambda(J_\lambda - I)$, где I – тождественный оператор, а J_λ определено (3.3.108).

Пусть

$$y_\lambda(s) = J_\lambda\varphi(s) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_{r,h}(t)\varphi(s)dt. \quad (3.3.109)$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_{r,h}y_\lambda(s) &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} U_{r,h}(t)\varphi(s)dt = \\ &= -\varphi(s) + \lambda y_\lambda(s) = A_{r,h}J_\lambda\varphi(s). \end{aligned} \quad (3.3.110)$$

Сравнивая (3.3.109) и (3.3.110), получаем, что $L_{r,h}y_\lambda(s) = A_{r,h}y_\lambda(s)$. А так как область значений оператора J_λ совпадает с областью значений резольвенты оператора $A_{r,h}$, то отсюда следует, что $A_{r,h}y(s) = L_{r,h}y(s)$ при любом $y \in D(A_{r,h})$.

Обратно, пусть теперь $y \in C(\Pi^n)$ и $L_{r,h}y \in C(\Pi^n)$. Покажем, что $y \in D(A_{r,h})$ и $A_{r,h}y = L_{r,h}y$.

Для этого определим функцию $\varphi(s)$ соотношением

$$\lambda\varphi(s) = \lambda y(s) - L_{r,h}y(s). \quad (3.3.111)$$

Полагая $y_\lambda(s) = J_\lambda\varphi(s)$, получаем равенство

$$\lambda\varphi(s) = \lambda y_\lambda(s) - L_{r,h}y_\lambda(s), \quad s \in \Pi^n. \quad (3.3.112)$$

То есть, функция $\omega(s) = y(s) - y_\lambda(s)$ удовлетворяет уравнению $L_{r,h}\omega(s) = \lambda\omega(s)$ при $\lambda > 0$ и $\omega \in C(\Pi^n)$.

Но, по лемме 3.10 это возможно только при $\lambda = 0$. Следовательно, $y(s) = y_\lambda(s) \in D(A_{r,h})$ и $A_{r,h}y = L_{r,h}y$.

Теорема доказана.

Эта теорема позволяет строить новые C_0 -полугруппы, группы и косинус-функции, генерируемые дифференциальными операторами с частными производными, в соответствии со схемой приведенной в [88], [89].

Например, в нашем случае, нетрудно видеть, что если $A_{r,h}$ генератор полугруппы $U_{r,h}(t, A_{r,h})$, то $-A_{r,h}$ является генератором C_0- полугруппы $\tilde{U}_{r,h}(-t, A_{r,h})$, при $t \leq 0$, действующей в $C(\Pi^n)$. Следовательно, семейство

$$S_{r,h}(t) = \begin{cases} U_{r,h}(t, A_{r,h}), & t \geq 0 \\ \tilde{U}_{r,h}(-t, A_{r,h}), & t < 0 \end{cases}$$

является группой с генератором $A_{r,h}$ и свойствами $S_{r,h}(t+s) = S_{r,h}(t) + S_{r,h}(s)$, $-\infty < t, s < \infty$, в соответствии с работами ([39], с. 341), ([67], с. 334).

При этом, оператор $A_{r,h}^2$ порождает C_0- косинус-функцию $C_{r,h}(t) = \frac{1}{2}[S_{r,h}(t) + S_{r,h}(-t)]$, которая, в свою очередь, порождает в $C(\Pi^n)$ C_0- косинус-функцию [39], 129.

$$C_a(t)\varphi = C_{r,h}(t) + at \int_0^t (t^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} I_1(a(t^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}) C_{r,h}(s)\varphi ds,$$

с генератором $A_a = A_{r,h}^2 + aI$.

В заключении заметим, что приведенная схема построения сильно непрерывных полугрупп, групп и косинус-функций с использованием операторного семейства (3.3.98) без принципиальных трудностей распространяется и на случай функциональных пространств с интегральными метриками, типа L_p или S_p- пространств Степанова ($p \geq 1$). И, таким образом, в силу прямой связи таких преобразований с равномерно корректными задачами для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, в соответствии с [39], полученные результаты позволяют значительно расширить классы таких задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

3.4 Пространства функций инвариантных относительно операции дробного интегрирования

3.4.1 Надэкспоненциальные и подэкспоненциальные весовые функции

Обозначим через Φ_m^+ класс монотонно возрастающих при $t > 0$ функций $\rho_+(t) > 0$, и таких, что при некотором $m > 0$ выполняется соотношение

$$\rho'_+(t) - m\rho_+(t) \geq 0. \quad (3.4.113)$$

Так как из (3.4.113) при $t \rightarrow \infty$ следует оценка $\rho_+(t) \geq \rho_0 \exp(mt)$ ($\rho_0 > 0$), то классы таких весовых функций будем называть *надэкспоненциально возрастающими*, а параметр m — *символом веса* $\rho_+(t)$. Например, у весов вида

$$\rho_+(t) = t \exp(\exp t). \quad (3.4.114)$$

Заметим, что веса, как угодно сильно отличающиеся порядком роста при $t \rightarrow \infty$ могут иметь одинаковые символы.

Нетрудно видеть, что символы произведения весов складываются. Так, если m_1 порядок роста веса ρ_1 , а m_2 — веса ρ_2 , то для $\rho_+(t) = \rho_1(t) \cdot \rho_2(t)$ имеем соотношения

$$\rho'_+(t) = \rho'_1(t) \cdot \rho_2(t) + \rho_1(t) \cdot \rho'_2(t) \geq m_1 \rho_1 \cdot \rho_2 + m_2 \rho_1 \rho_2 = (m_1 + m_2) \rho_+.$$

Отсюда при $m + \lambda > 0$ следуют оценки

$$e^{\lambda t} \rho_+(t) \leq \frac{1}{m + \lambda} (e^{\lambda t} \cdot \rho_+(t))', \quad (3.4.115)$$

$$\int_0^t e^{\lambda s} \cdot \rho_+(s) ds \leq \frac{e^{\lambda t}}{m + \lambda} \rho_+(t). \quad (3.4.116)$$

Кроме того, по индукции устанавливается оценка для n -кратного интеграла, $n = 1, 2, \dots$

$$J_+^n \rho_+(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \rho_+(s) ds \leq \frac{\rho_+(t)}{m^n}. \quad (3.4.117)$$

Очевидно, что при соответствующем m классы Φ_m^+ содержат как угодно быстро растущие на бесконечности функции.

Классы Φ_m^- . Наряду с этим введём также сопряженные классы Φ_m^- весовых положительных функций $\rho_-(t)$, монотонно убывающих и таких, что для некоторого $m > 0$ выполняется соотношение

$$\rho'_-(t) + m\rho_-(t) \leq 0. \quad (3.4.118)$$

Нетрудно видеть, что если $\rho_+ \in \Phi_m^+$, то $\frac{1}{\rho_+} = \rho_- \in \Phi_m^-$.

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ функция $\rho_-(t)$ могут убывать как угодно быстро. В связи с этим мы их будем называть *подэкспоненциальными*. Заметим, что при $t \rightarrow 0$ они могут как угодно быстро расти.

Например, веса $\rho_n(t) = t^{-n} \exp(-\exp(t))$ удовлетворяют условию (3.4.118) при $m = \min_{t>0}(e^t + \frac{n}{t})$.

Параметр m будем называть *символом* веса $\rho_-(t)$.

Заметим, что символ возрастания функции $\rho_+(t)$ совпадает с символом убывания функции $\rho_-(t) = \frac{1}{\rho_+(t)}$.

Кроме того, веса $\rho_-(t)$ обладают следующим очевидным свойством: $\rho_-(\infty) = 0$ и для них при $\lambda + m > 0$ выполняются оценки

$$J_- \rho_-(t) = \int_t^\infty e^{-\lambda s} \rho_-(s) ds \leq \frac{\rho_-(t) \exp(\lambda t)}{m + \lambda}, \quad (3.4.119)$$

$$J_-^n \rho_-(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^\infty (s-t)^{n-1} \rho_-(s) ds \leq \frac{\rho_-(t)}{m^n}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (3.4.120)$$

3.4.2 Дробные степени оператора дифференцирования в надэкспоненциальных и подэкспоненциальных пространствах

На полуоси $t \in [0, \infty)$ будем рассматривать надэкспоненциальные пространства $\mathfrak{C}_{\rho_+^{(0)}}$ и \mathfrak{C}_{ρ_-} непрерывных функций $f(t)$, для которых конечны нормы

$$\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} = \sup_{t>0} \left| \frac{f(t)}{\rho_+(t)} \right|, \quad \rho_+ \in \Phi_m^+;$$

$$\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_-}} = \sup_{t>0} \left| \frac{f(t)}{\rho_-(t)} \right|, \quad \rho_- \in \Phi_m^-.$$

Функции $f \in \mathfrak{C}_{\rho_+}(0)$ удовлетворяют условию $f(0) = 0$. Известно, что \mathfrak{C}_{ρ_\pm} – банаховы пространства.

Рассмотрим операторы \mathfrak{D}_+ и \mathfrak{D}_- заданные дифференциальными выражениями

$$l_+\varphi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad l_-\varphi(t) = -\frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (3.4.121)$$

и областями определения:

$D(\mathfrak{D}_+)$ множество значений оператора $J_+\varphi = \int_0^t \varphi(s)ds$ определенного на \mathfrak{C}_{ρ_+} .

$D(\mathfrak{D}_-)$ множество значений оператора $J_-\varphi = \int_t^\infty \varphi(s)ds$ определенного на \mathfrak{C}_{ρ_-} .

Справедлива следующая

Теорема 3.6 *Операторы $-\mathfrak{D}_\pm$ являются генераторами полугрупп $U(x, -\mathfrak{D}_\pm)$ класса C_0 , для которых выполняется оценка*

$$\|U(x, -\mathfrak{D}_\pm)\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}} \leq e^{-mx} \|\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}}, \quad (3.4.122)$$

где m – порядок роста или убывания соответствующего веса.

Доказательство проведём для \mathfrak{D}_+ . Для этого рассмотрим интеграл.

$$J(\lambda)f(t) = \int_0^t e^{\lambda(s-t)} f(s)ds. \quad (3.4.123)$$

В предположении $f \in \mathfrak{C}_{\rho_+}$ и $\lambda + m > 0$ оценим

$$|J(\lambda)f(t)| \leq \int_0^t e^{\lambda(s-t)} |f(s)| ds \leq \|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \cdot e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \rho_+(s) ds.$$

Отсюда, пользуясь оценкой (3.4.116), после очевидных операций, получаем неравенство

$$\|J(\lambda)f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \leq \frac{\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}}}{\lambda + m}. \quad (3.4.124)$$

Таким образом, при $\lambda > -m$ операторы $R(\lambda)$ определены и ограничены на пространстве \mathfrak{C}_{ρ_+} .

Меняя порядок интегрирования, нетрудно установить, что для них выполняется резольвентное тождество

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu). \quad (3.4.125)$$

Следовательно (см.[67], с.299), операторы $J(\lambda)$ являются псевдорезольвентами имеющие общее нуль-подпространство $N(J)$, и общую область значений. Кроме того, нетрудно видеть, что нуль пространство $N(J)$ для $J_+ f(t) = \int_0^t f(s)ds$ состоит из одного нуля, то есть $N(J_+) = 0$.

Отсюда, из ([67], с.300, Теорема 1) получаем, что псевдорезольвента $J(\lambda)$ является резольвентой оператора $-\mathfrak{D}_+$. Это также следует и из теоремы 5.8.3, [14] с.202.

Наконец, оценка (3.4.124), в силу теоремы Хилле–Филлипса–Феллера–Миадеры–Иосиды ([5], с. 343), ([6], с.261), показывает, что оператор $-\mathfrak{D}_+$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(x, -\mathfrak{D}_+)$ класса C_0 с оценкой (3.4.122).

Случай \mathfrak{D}_- рассматривается аналогично. Что и требовалось доказать.

Из теоремы 3.6 следует

Теорема 3.7 Для операторов \mathfrak{D}_\pm определены дробные степени \mathfrak{D}_\pm^α , $0 < \alpha < 1$ равенствами

$$\mathfrak{D}_\pm^\alpha \varphi(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda I + \mathfrak{D}_\pm)^{-1} \mathfrak{D}_\pm \varphi(t) d\lambda \quad (3.4.126)$$

для $\varphi \in D(\mathfrak{D}_\pm)$.

Доказательство можно провести на основе формулы Балакришнана (см. [7, с.358]), записанной для $A = -\mathfrak{D}_\pm$ и оценки (3.4.124). Теорема доказана.

Далее, подставляя в (3.4.126) резольвенты

$$(\lambda I + \mathfrak{D}_+)^{-1} \varphi(t) = R(\lambda, -\mathfrak{D}_+) \varphi = \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \varphi(s) ds$$

и

$$(\lambda I + \mathfrak{D}_-)^{-1}\varphi(t) = R(\lambda, -\mathfrak{D}_-) \varphi = - \int_t^\infty e^{\lambda(t-s)} \varphi(s) ds$$

получаем представление операторов \mathfrak{D}_\pm^α через дробные производные в форме Капуто [30]

$$\mathfrak{D}_+^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \varphi'(s) ds, \quad (3.4.127)$$

$$\mathfrak{D}_-^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^\infty (t-s)^{-\alpha} \varphi'(s) ds, \quad (3.4.128)$$

Их можно записать и в форме Римана – Лиувилля

$$\mathfrak{D}_+^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \varphi(s) ds, \quad (3.4.129)$$

$$\mathfrak{D}_-^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^\infty (t-s)^{-\alpha} \varphi(s) ds, \quad (3.4.130)$$

в случае (3.4.129) в силу равенства $\varphi(0) = 0$, а в случае (3.4.130) – в силу соотношений

$$\begin{aligned} \int_t^\infty (s-t)^{-\alpha} \varphi'(s) ds &= \int_0^\infty \tau^{-\alpha} \varphi'_\tau(\tau+t) d\tau = \\ &= \int_0^\infty \tau^{-\alpha} \varphi'_t(\tau+t) d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^\infty \tau^{-\alpha} \varphi(\tau+t) d\tau = \frac{d}{dt} \int_t^\infty (s-t)^{-\alpha} \varphi(s) ds \end{aligned}$$

Заметим, что отрицательные дробные степени $\mathfrak{D}_+^{-\alpha}$ операторов \mathfrak{D}_\pm в силу [13], с.275 определены соотношением

$$\mathfrak{D}_\pm^{-\alpha} \varphi = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} R(\lambda, -\mathfrak{D}_\pm) \varphi d\lambda, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.4.131)$$

Отсюда, пользуясь неравенством (3.4.124), получаем оценку

$$\|\mathfrak{D}_\pm^{-\alpha} \varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}} \leq \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^\alpha (\lambda + m)} \|\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}} = \frac{1}{m^\alpha} \|\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}}, \quad (3.4.132)$$

показывающую ограниченность операторов $\mathfrak{D}_\pm^{-\alpha}$ в пространствах \mathfrak{C}_{ρ_\pm} соответственно.

Далее, подставляя в (3.4.131) значение резольвент $R(\lambda, -\mathfrak{D}_\pm)$, также как и в случае (3.4.129), (3.4.130), получаем для $\mathfrak{D}_\pm^{-\alpha}$ представления в виде дробных интегралов Римана-Лиувилля

$$\mathfrak{D}_+^{-\alpha} \varphi = I_+^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds, \quad (3.4.133)$$

$$\mathfrak{D}_-^{-\alpha} \varphi = -I_-^\alpha \varphi = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty (s-t)^{\alpha-1} \varphi(s) ds. \quad (3.4.134)$$

Важным фактом, следующим из (3.4.132)–(3.4.134) является

Следствие. *Пространство \mathfrak{C}_{ρ_\pm} является инвариантными относительно операции дробного интегрирования Римана–Лиувилля.*

Как известно см. [12], с. 92 для пространств \mathfrak{C}_{ρ_\pm} со степенными весами $\rho(t) = (1+t)^\gamma$ этот факт не имеет места.

3.4.3 О необходимых и достаточных условиях для весовых функций

Как показано выше, условия (3.4.113) и (3.4.118) являются достаточными для инвариантности пространств \mathfrak{C}_{ρ_\pm} относительно операции дробного интегрирования I_\pm^α , при всех $\alpha > 0$.

Возникает вопрос о близости этих условий к необходимым.

Заметим, что при конкретном значении $\alpha > 0$ имеет место

Теорема 3.8 *Пространства \mathfrak{C}_{ρ_\pm} инвариантны относительно операции дробного интегрирования J_\pm^α тогда и только тогда, когда их веса удовлетворяют соотношениям*

$$J_\pm^\alpha \rho_\pm(t) \leq m_\pm \rho_\pm(t), \quad (3.4.135)$$

где константа m_\pm не зависит от $t \in (0, \infty)$.

Доказательство. Пусть при некотором $\alpha > 0$ выполняется (3.4.135). Тогда, оценивая

$$|J_\pm^\alpha f(t)| \leq \|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}} \cdot J_\pm^\alpha \rho_\pm(t) \leq m_\pm \|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}} \rho_\pm(t), \quad (3.4.136)$$

получаем соотношения

$$\|J_{\pm}^{\alpha}f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}} = \sup_{t \geq 0} \frac{1}{\rho_{\pm}(t)} |J_{\pm}^{\alpha}f(t)| \leq m_{\pm} \|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}}, \quad (3.4.137)$$

доказывающее инвариантность пространства $\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}$ относительно операции J_{\pm}^{α} .

И наоборот, если при некотором $\alpha > 0$ и при всех $f \in \mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}$ выполняется (3.4.137), то, применяя (3.4.137) для $f(t) = \rho_{\pm}(t)$, с учетом равенства $\|\rho_{\pm}\|_{\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}} = 1$, получаем оценку

$$\frac{1}{\rho_{\pm}(t)} J_{\pm}^{\alpha} \rho_{\pm}(t) \leq m_{\pm} \|\rho_{\pm}\|_{\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}} = m_{\pm}, \quad (3.4.138)$$

из которого следует (3.4.135) и доказательство теоремы.

Следствие 3.1 *Если пространство $\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}$ инвариантно относительно J_{\pm}^{α} при некотором $\alpha > 0$, то оно инвариантно и относительно любой n -ой степени $J_{\pm}^{n\alpha}$ ($n = 1, 2, \dots$).*

Доказательство этого следствия будет вытекать из оценок $J_{\pm}^{n\alpha} \rho_{\pm} \leq m_{\pm} J_{\pm}^{(n-1)\alpha} \rho_{\pm}(t) \leq \dots \leq m_{\pm}^n \rho_{\pm}(t)$.

Для установления необходимых и достаточных условий инвариантности пространств $\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}$ относительно операторов J_{\pm}^{α} при всех $\alpha > 0$ рассмотрим случаи $\mathfrak{C}_{\rho_{+}}$ и $\mathfrak{C}_{\rho_{-}}$ в отдельности.

1) В случае $\mathfrak{C}_{\rho_{+}}$ из теоремы 3.8 следует, что для инвариантности этого класса функций относительно J_{+}^{α} при всех $\alpha > 0$ необходимо и его инвариантность при $\alpha = 1$. То есть, необходимо выполнение соотношения

$$\int_0^t \rho_{+}(s) ds \leq m \cdot \rho_{+}(t). \quad (3.4.139)$$

С другой стороны, как показано в разделе 3.4.2, достаточным условием инвариантности является выполнение неравенства

$$\rho_{+}(t) \leq m_{+} \cdot \rho'_{+}(t). \quad (3.4.140)$$

Для сравнения близости условий (3.4.139) и (3.4.140) полезна следующая

Лемма 3.11 Условие (3.4.140) эквивалентно условию

$$I_+\rho_+(t) = \int_0^t \rho_+(s)ds \leq m_1[\rho_+(t) - \rho_+(0)]. \quad (3.4.141)$$

Доказательство. Пусть выполнено (3.4.141), рассмотрим функцию $\varphi(t) = \frac{\rho(t)}{\rho'(t)}$. Очевидно, что φ непрерывная при $t > 0$ функция. Применяя (3.4.141) и правило Лопиталя, получаем оценки

$$\begin{aligned} m_1 &\geq \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{\int_0^t \rho_+(s)ds}{\rho_+(t) - \rho_+(0)} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{\rho_+(t)}{\rho'_+(t)} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \varphi(t), \end{aligned}$$

Отсюда следует ограниченность функции $\varphi(t)$ для $t \in [0, \infty)$, а следовательно и существования $m \leq m_1$, при котором выполняется оценка (3.4.140). То есть, (3.4.140) следует из (3.4.141).

Нетрудно видеть, что и наоборот, из (3.4.141) следует (3.4.140), что доказывается интегрированием (3.4.141) в интервале $(0, t)$.

Следствие 3.2 Если $\rho_+(0) = 0$, то условия (3.4.139) и (3.4.140) эквивалентны.

Таким образом, в случае \mathfrak{C}_{ρ_+} справедлива

Теорема 3.9 Пространства \mathfrak{C}_{ρ_+} с весом $\rho_+(t)$, удовлетворяющим условию $\rho_+(0) = 0$, инвариантны относительно операции дробного интегрирования Римана — Лиувилля J_+^α тогда и только тогда, когда $\rho_+(t) \in \Phi_m^+$.

2) В случае пространств \mathfrak{C}_{ρ_-} для установления необходимого и достаточного условия рассмотрим три ситуации:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_t^\infty \rho_-(s)ds = \infty$;
- б) $\int_0^\infty \rho_-(s)ds < \infty$, $\rho_-(0) < \infty$;
- в) $\int_0^\infty \rho_-(s)ds < \infty$, $\lim_{t \rightarrow 0} \rho_-(t) = \infty$.

Для дальнейшего рассуждения понадобятся следующие леммы:

Лемма 3.12 Если $\rho_- \in \Phi_m^-$ и выполнено условие а), то неравенство

$$\rho'_-(t) + m\rho_+(t) \leq 0 \quad (3.4.142)$$

эквивалентно неравенству

$$\int_t^\infty \rho_-(s)ds = J_-\rho_-(t) \leq m_1\rho_-(t). \quad (3.4.143)$$

Доказательство. Интегрирование (3.4.142) по интервалу (t, ∞) даёт неравенство (3.4.143). И обратно: если выполнено (3.4.143), то также как и в случае леммы 3.11 для функции $\varphi(t) = \frac{-\rho_-(t)}{\rho'_-(t)}$ имеем соотношения

$$m_1 \geq \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{\int_0^t \rho_-(s)ds}{\rho_-(t) - \rho_-(0)} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} -\frac{\rho_-(t)}{\rho'_-(t)} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \varphi(t),$$

из которых следует существование константы $m \geq m_1$, для которой выполняется (3.4.142). Лемма доказана.

Лемма 3.13 При выполнении условия б) неравенство (3.4.142) эквивалентно неравенству

$$J_-\rho_-(t) = \int_0^t \rho_-(s)ds \geq m[\rho_-(0) - \rho_-(t)]. \quad (3.4.144)$$

Доказательство следует после интегрирования (3.4.142) в интервале $(0, t)$.

Для доказательства в другую сторону, введём функцию $\varphi(t) = -\frac{\rho_-(t)}{\rho'_-(t)}$. Далее, рассуждая также как в случае леммы 3.11, получаем неравенство (3.4.142).

Лемма доказана.

Лемма 3.14 При выполнении условия в) неравенство (3.4.142) эквивалентно неравенству (3.4.143).

Доказательство. Рассмотрим положительную функцию и дифференцируемую при $t > 0$ функцию

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\int_t^\infty \rho_-(s)ds}{\rho_-(t)}, & \text{при } t > 0, \\ 0, & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

В силу непрерывности и неотрицательности функции $\varphi(t)$, существует $\varepsilon > 0$, такое, что на интервале $t \in (0, \varepsilon)$ эта функция монотонно возрастает, и, следовательно, в силу её дифференцируемости выполняется условие

$$\varphi'(t) = \frac{-\rho_-^2(t) - \rho'_-(t) \int_t^\infty \rho_-(s)ds}{\rho_-^2(t)} \geq 0,$$

из которого следует неравенство

$$\rho_-^2(t) \leq -\rho'_-(t) \cdot \int_t^\infty \rho_-(s)ds \leq 0. \quad (3.4.145)$$

Применяя к правой части (3.4.145) неравенство (3.4.143), получаем

$$\rho_-^2(t) \leq -\rho'_-(t) \int_t^\infty \rho_-(s)ds \leq -m\rho'_-(t) \cdot \rho_-(t)$$

из которого следует (3.4.142) для $t \in (0, \varepsilon)$.

Далее, учитывая, что

$$m_1 \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_t^\infty \rho_-(s)ds}{\rho_-(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{\rho_-(t)}{\rho'_-(t)},$$

заключаем, что функция $-\frac{\rho_-(t)}{\rho'_-(t)}$ ограничена при всех $t \in [0, \infty)$ и, следовательно, найдётся $m \geq m_1$ такое, что выполняется (3.4.142). Что и требовалось доказать.

Из приведённых лемм следует, что для весовых функций, неограниченных в точке $t = 0$, неравенства (3.4.142) и (3.4.143) эквивалентны.

Далее, рассуждая как и в случае теоремы 3.9, получаем справедливость следующего результата.

Теорема 3.10 Пространства \mathfrak{C}_{ρ_-} с весом $\rho_-(t)$, удовлетворяющим условию $\rho_-(0) = \infty$, инвариантны относительно операции дробного интегрирования Римана – Лиувилля I_-^α тогда и только тогда, когда $\rho_-(t) \in \Phi_m^-$.

3.4.4 Корректная разрешимость математических моделей, описываемых уравнениями с дробными степенями операторов

В настоящем разделе устанавливается равномерно корректная разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений $\frac{d^2u}{dx^2} = Au(x)$, $x \in [0, \infty)$ на базовом пространстве E , когда оператор $-A$ является генератором полугруппы $U(x)$ класса C_0 с оценкой $\|U(x)\| \leq e^{-\omega x}$, $\omega \geq 0$. Результаты применяются к исследованию корректной разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными.

Дифференциальные уравнения с дробными производными становятся всё более актуальными в таких областях, как механика, гидродинамика, теория тепломассопереноса, радиофизика и т.д. (см. [9], [10], [30], [162]). Однако, как правило, проводимые при этом исследования касаются только вопросов существования решений соответствующих задач, и их интегро-дифференциальным представлениям. Вопрос же устойчивости решений по исходным данным, один из основных при установлении корректной разрешимости (см. [67]), в этих работах не обсуждается.

В нашем случае именно в классах \mathfrak{C}_{ρ_\pm} устанавливается корректная разрешимость и получены точные оценки их решений следующих задач

Пусть

$${}_{+}\mathfrak{D}_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \varphi(s) ds, \quad (3.4.146)$$

$${}_{-}\mathfrak{D}_t^\alpha \varphi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^\infty (s-t)^{-\alpha} \varphi(s) ds, \quad (3.4.147)$$

правая и левая дробные производные Римана-Лиувилля порядка $0 < \alpha \leq 1$, $t \geq 0$, функции $\varphi(t)$.

При $x \geq 0$ решаются задачи об отыскании функций $u_{\pm}(t, x)$ удовлетворяющих уравнениям

$$\pm \mathfrak{D}_t^{\alpha} u_{\pm}(t, x) = \frac{\partial^2 u_{\pm}(t, x)}{\partial x^2}, \quad (3.4.148)$$

(знаки \pm определяют нужное соответствие)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |u_{\pm}(t, x)| = 0, \quad (3.4.149)$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \pm \mu u_{\pm}(t, x)|_{x=0} = f_{\pm}(t), \quad (3.4.150)$$

где $\mu = \text{const}$, $f(t)$ – локально интегрируемая функция. При этом $f_+(t)$ может расти при $t \rightarrow \infty$ быстрее экспоненты, а $f_-(t)$ – может в окрестности $t = 0$ иметь несуммируемую особенность.

Отметим, что с такой точки зрения эти задачи ранее не рассматривались.

В нашем случае именно в классах $\mathfrak{C}_{\rho \pm}$ устанавливается корректная разрешимость задач и получены точные оценки (3.4.148)–(3.4.150).

Так как исследования корректной разрешимости задач мы будем проводить, используя общую теорию граничных задач для уравнений эллиптического типа в банаховом пространстве, то нам понадобятся следующие понятия и результаты.

Пусть E – банахово пространство и A – замкнутый оператор с плотной в E областью определения $D(A)$ и такой, что $-A$ является генератором полугруппы операторов $U(x, -A)$ класса C_0 , такой что $U(t + s)\varphi = U(t)U(s)\varphi$, $U(0)\varphi = \varphi$, $\lim_{x \rightarrow 0} \|U(x)\varphi - \varphi\| = 0$, для всех $\varphi \in E$ и удовлетворяющий условию

$$\|U(x, -A)\| \leq M e^{-\omega x}, \quad \omega \geq 0, \quad x \geq 0, \quad (3.4.151)$$

константа M от x не зависит.

Условие (3.4.151), в соответствии с ([67], с.358), позволяет определить дробную степень A^{α} , $\alpha \in (0, 1)$, причём оператор $-A^{\alpha}$ является генератором аналитической полугруппы $U(x, -A^{\alpha})$ класса C_0 с оценкой

$$\|U(x, -A^{\alpha})\| \leq M e^{-\omega^{\alpha} x}, \quad (3.4.152)$$

где M и ω из (3.4.151).

Эта оценка следует из представления

$$U(x, -A^\alpha)\varphi = \begin{cases} \int_0^\infty f_{x,\alpha}(s)U(s, -A)\varphi ds, & x > 0 \\ \varphi, & x = 0. \end{cases} \quad (3.4.153)$$

равенства

$$\int_0^\infty e^{-\omega^\alpha s} f_{x,\alpha}(s)ds = e^{-\omega^\alpha}, \quad (3.4.154)$$

(см. [67], с. 358) и неравенства (3.4.151), применяя которые в оценке

$$\begin{aligned} \|U(x, -A^\alpha)\varphi\| &\leq \int_0^\infty f_{t,\alpha}(s)\|U(s)\|ds\|\varphi\| \leq \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-\omega s} f_{x,\alpha}(s)ds \cdot \|\varphi\| = M e^{-\omega x} \|\varphi\| \end{aligned} \quad (3.4.155)$$

получаем (3.4.152).

Заметим, что неравенство (3.4.152) в [94] было получено другим, более длинным способом.

Справедливо также следующее важное

Замечание 3.7 *Оценка (3.4.151) точная, так как в скалярном случае оператора $A = \omega > 0$ она переходит в равенство.*

Замечание 3.8 *По теореме Хилле–Филлипса–Иосиды–Феллера–Миадеры (3.4.152) влечет оценку на резольвенту*

$$\|R(\lambda, -A^\alpha)\| \leq \frac{M}{\lambda + \omega^\alpha}. \quad (3.4.156)$$

Краевые задачи

При выполнении условия (3.4.151) рассматривается уравнение

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = Au(x), \quad x \geq 0. \quad (3.4.157)$$

Следуя [125], с. 306 приведём:

Определение 3.28 *Функция $u(x)$ называется ослабленным решением уравнения (3.4.157), если*

- 1) она непрерывна, имеет непрерывную первую производную на отрезке $[0, T]$, и имеет вторую производную на $(0, T)$;
- 2) ее значения принадлежат $D(A)$ при $x \in (0, T)$, а функция $A^{\frac{1}{2}}u(x)$ непрерывна на $[0, T]$;
- 3) $u(x)$ удовлетворяет уравнению (3.4.157).

Определение 3.29 Функция $u(x)$ называется обобщенным решением уравнения (3.4.157), если она непрерывна на $[0, \infty)$, имеет непрерывную вторую производную на $(0, \infty)$, $u(x) \in D(A)$ и $A^{\frac{1}{2}}u(x) \in C_{[0, \infty)}$, и удовлетворяет уравнению (3.4.157).

Введём в рассмотрения краевые условия:

$$a_0u(0) - a_1u'(0) = u_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \|u(x)\| = 0, \quad a_0, a_1 \in R. \quad (3.4.158)$$

Определение 3.30 Всякое обобщенное решение уравнения (3.4.157), удовлетворяющее условиям (3.4.158), будем называть обобщенным решением краевой задачи (3.4.157)-(3.4.158).

Определение 3.31 Краевая задача (3.4.157)-(3.4.158) называется равномерно корректной, если для всяких $u_0 \in E$ существует единственное обобщенное решение этой задачи, непрерывно зависящее в норме $\|u\|_{\mathfrak{C}(E)} = \sup_{x \in R^+} \|u(x)\|_E$ от u_0 .

В случае краевых условий (3.4.158) при $a_0 = 1$ и $a_1 = 0$ эта задача рассмотрена С.Г. Крейном, когда A — позитивный оператор. То есть, когда для резольвенты оператора $-A$ выполняются условия $\|R(\lambda, -A)\| \leq \frac{M}{1+\lambda}$, $\lambda, M > 0$ (см. [125], с. 323). Здесь показана ее равномерная корректность и получено представление решения в виде

$$u(x) = U(x, -A^{\frac{1}{2}})u_0 = V(x)u_0, \quad (3.4.159)$$

где $U(x, -A^{\frac{1}{2}})u_0$ — полугруппа класса C_0 с генератором $-A^{\frac{1}{2}}$.

К сожалению, оценка

$$\|U_{\frac{1}{2}}(t)\| \leq Me^{-t}, \quad (3.4.160)$$

используемая в [125], с. 323 при доказательстве (3.4.159) для $\alpha = \frac{1}{2}$, не всегда верна. Что следует например, из оценки (3.4.152). Поэтому, применяется теорема С.Г. Крейна в случае условия (3.4.151), используя результат [94].

Теорема 3.11 *Если оператор $-A$ является генератором полугруппы класса C_0 , удовлетворяющей оценке (3.4.151), то краевая задача (3.4.157)–(3.4.158), при $a_0 = 1$ и $a_1 = 0$ равномерно корректна и ее решение имеет вид (3.4.159).*

Затем распространим эту теорему на случай краевых условий третьего рода

$$\mu u(0) - u'(0) = f, \quad (3.4.161)$$

где $f \in E$, $\mu = \text{const.}$

Используя теорему 3.11, докажем корректную разрешимость задачи (3.4.157)–(3.4.160) в случае краевых условий третьего рода (3.4.161).

Теорема 3.12 *Если оператор $-A$ является генератором полугруппы класса C_0 , удовлетворяющей оценке (3.4.151), то при выполнении условия*

$$\mu + \sqrt{\omega} > 0, \quad (3.4.162)$$

краевая задача (3.4.157)–(3.4.161) равномерно корректна и её решение имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= U(x, -A^{\frac{1}{2}})R(\mu, -A^{\frac{1}{2}})f = e^{\mu x} \int_x^\infty e^{-\mu \tau} U(\tau, -A^{\frac{1}{2}})f d\tau = \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu s} U(x+s, -A^{\frac{1}{2}})f(s) ds, \end{aligned}$$

где $U(x, -A^{\frac{1}{2}})$ – полугруппа с генератором $-A_{\pm}^{\frac{1}{2}}$, $R(\mu, -A_{\pm}^{\frac{1}{2}})$ – резолювента оператора $-A_{\pm}^{\frac{1}{2}}$.

Доказательство. Пусть $f \in E$ и выполнено (3.4.162). Покажем, что решение задачи (3.4.157)–(3.4.161) существует. Для этого положим $u_0 = (\mu I + A^{\frac{1}{2}})^{-1}f$. Тогда из (3.4.156) следует оценка

$$\|u_0\|_E \leq \frac{M}{\mu + \sqrt{\omega}} \|f\|_E. \quad (3.4.163)$$

То есть $u_0 \in E$, и, следовательно, в силу (3.4.159) функция

$$u(x) = U(x, -A^{\frac{1}{2}})u_0 = U(x, -A^{\frac{1}{2}})R(\mu, -A^{\frac{1}{2}})f \quad (3.4.164)$$

является решением уравнения (3.4.157). Далее, учитывая равенства $U(0, -A^{\frac{1}{2}}) = I$ и $\frac{dU}{dx}(x, -A^{\frac{1}{2}}) = -A^{\frac{1}{2}}U(x, -A^{\frac{1}{2}})$, получаем, что $u(x)$ удовлетворяет (3.4.161), так как

$$\mu u(0) - u'(0) = \mu(\mu I + A^{\frac{1}{2}})^{-1}f + A^{\frac{1}{2}}(\mu I + A^{\frac{1}{2}})^{-1}f = f. \quad (3.4.165)$$

Что и показывает существование решения.

Для доказательства единственности заметим, что если $u(x)$ решение уравнения (3.4.157) с условием (3.4.161) при $q = 0$, то и $u(0) = 0$, так как при $u(0) = u_0 \neq 0$ решение было бы представимо в виде (3.4.159). И, следовательно, справедливы равенства $\mu u(0) - u'(0) = \mu u_0 + A^{\frac{1}{2}}u_0 = R(\mu - A^{\frac{1}{2}})u_0 = 0$. Но, так как $Ker R(\mu, -A^{\frac{1}{2}}) = 0$, то $u_0 = 0$.

Отметим, что из (3.4.159) и (3.4.163) следует оценка

$$\|u(x)\|_E \leq \frac{M e^{-\sqrt{\omega}x} \|f\|_E}{\mu + \sqrt{\omega}}. \quad (3.4.166)$$

Теорема доказана.

Далее, применим полученные результаты к исследованию корректной разрешимости задач (3.4.148)–(3.4.150). Оказывается, что здесь естественными являются пространства со специальными весовыми функциями, подклассом которых являются полумультипликативные функции, рассмотренные в [127], [167].

3.4.5 Корректная разрешимость сигнальной задачи

Задачи (3.4.148)–(3.4.150) в радиотехнике по терминологии [9], с. 90 относятся к классу сигнальных задач (задач о распространении сигнала) во фрактальных средах. Отметим, что в этих работах рассматривается лишь прямая задача, соответствующая $+\mathfrak{D}$, причем только с точки зрения представления решений. При этом, в этих исследованиях основным является метод интегрального преобразования Лапласа, накладывающий соответствующие ограничения на исходные данные.

В рассматриваемой здесь постановке эти задачи впервые исследовались в [14], где интегрируемость по Лапласу исходных данных не требуется.

Применяя вышеизложенные результаты к задачам (3.4.148)–(3.4.150), приходим к следующему утверждению

Теорема 3.13 Задачи (3.4.148)–(3.4.150) равномерно корректны в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}$ соответственно для их решений справедливы представления

$$u_{\pm}(t, x) = \int_x^{\infty} e^{\mu(x-\tau)} U(\tau, -\mathfrak{D}_{\pm}^{\frac{\alpha}{2}}) f(t) d\tau, \quad (3.4.167)$$

где $U(\tau, -\mathfrak{D}_{\pm}^{\frac{\alpha}{2}})$ – полугруппа с генератором $-\mathfrak{D}_{\pm}^{\frac{\alpha}{2}}$, соответственно.

При этом справедлива оценка

$$\|u_+(t, x)\|_E \leq \frac{M}{\mu + \omega^{\frac{\alpha}{2}}} e^{\omega^{-\frac{\alpha}{2}}x} \|f\|_E. \quad (3.4.168)$$

Доказательство следует из теоремы 3.12, примененной к операторам $\mathfrak{D}_{\pm}^{\alpha}$, которые, в силу теоремы 3.7 и результатов Боннера, Филлипса, Балакришнана ([67], с.358), являются генераторами сильно непрерывных полугрупп $U(x, -\mathfrak{D}_{\pm}^{\alpha})$ в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}$.

Следствие 3.3 Как известно (см [9], с. 6), в теории тепломассопереноса один из основных вопросов стоит в вычислении значений тепломассопотока $u(t, x)$ и скорости его распространения $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ на границе $x = 0$ непосредственно через исходные данные $f(t)$.

Из (3.4.167) и условия (3.4.162) следуют представления:

$$u_{\pm}(t, 0) = \int_0^{\infty} e^{-\mu\tau} U(\tau, -\mathfrak{D}_{\pm}^{\frac{\alpha}{2}}) f(t) d\tau = R(\mu, -\mathfrak{D}_{\pm}^{\frac{\alpha}{2}}) f = (\mu I + \mathfrak{D}_{\pm}^{\frac{\alpha}{2}})^{-1} f, \quad (3.4.169)$$

$$\left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = (\mu u(0, x) - I) f = [\mu R(\mu, -\mathfrak{D}_{\pm}^{\frac{\alpha}{2}}) - I] f = -\mathfrak{D}_{\pm}^{\frac{\alpha}{2}} (\mu I + \mathfrak{D}_{\pm}^{-\frac{\alpha}{2}}) f. \quad (3.4.170)$$

Замечание 3.9 В случае оператора \mathfrak{D}_+ и $\alpha = 1$ представление (3.4.170) совпадает с (2.14) в [10].

3.5 Операторно-полиномиальное уравнение

3.5.1 Операторный метод Маслова–Хевисайда и C_0 –операторный интеграл Дюамеля

Пусть E – банахово пространство и A – линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с областью определения $D(A) \subset E$. Для $f \in E$ исследуется корректная разрешимость задачи нахождения элемента $u \in D(A^n)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющего равенству

$$\mathbb{A}u = \sum_{m=1}^n a_m A^m u = f, \quad a_m \in \mathbb{C}. \quad (3.5.171)$$

В соответствии с Ж.Адамаром, это означает, что уравнение (3.5.171) должно быть однозначно разрешимо при любых $f \in E$, оператор \mathbb{A}^{-1} , определен на всех f из E и непрерывен, то есть справедливо неравенство $\|\mathbb{A}^{-1}f\|_E \leq M\|f\|_E$, где константа M не зависит от f .

Классические результаты в исследовании таких задач для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах получены С.Г. Крейном в [125], где они называются равномерно корректными. В рамках этих исследований лежит и операторный метод В.П. Маслова [140], обобщающий классический операционный метод Хевисайда на случай дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, и который здесь используется, когда A – генератор полугруппы преобразований $U(t)$, $t \geq 0$ класса C_0 в E . Это позволяет выписать точное решение для широкого класса задач вида (3.5.171), представить их в виде операторного интеграла Дюамеля и установить их равномерно корректную разрешимость для дифференциальных операторов с коэффициентами имеющими особенности (вырождение или обращение в бесконечность).

Полученные результаты применяются к задачам с производящими операторами (генераторами) ранее не рассматриваемых C_0 –полугрупп, групп и сильно непрерывных операторных косинус–функций.

Новые результаты здесь получаются и для ранее изученных классических

случаев. Так для операторов A , задаваемых дифференциальным выражением $l = \pm \frac{d}{dx}$ ($x \in \mathbb{R}^+$ или $x \in \mathbb{R}$), устанавливается равномерно корректная разрешимость задачи (3.5.171) для $f(x)$ не преобразуемых по Лапласу.

C_0 — полиномиальная задача и интеграл Дюамеля

Пусть A — генератор полугруппы преобразований $U(t)$, $t \geq 0$ класса C_0 в E .

Это значит, что область определения $D(A)$ оператора A плотна в E . Область его значений совпадает со всем E , а резольвентное множество содержит комплексную полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Семейство $U(t)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} 1) \ U(0) &= I, \quad 2) \ U(t+s) = U(t)U(s), \quad 3) \ \lim_{t \rightarrow 0} \|U(t)x - x\| = 0, x \in E \\ 4) \ \|U(t)\| &\leq M \exp \omega t. \end{aligned} \tag{3.5.172}$$

Полугруппа $U(t)$ и резольвента $R(\lambda)$ связаны соотношением

$$R^n(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\lambda t^{n-1} e^{-\lambda t} U(t) dt, \tag{3.5.173}$$

$n = 1, 2, \dots$ из которого следует оценка

$$\|R^n(\lambda, A)\| \leq M(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{-n}, \tag{3.5.174}$$

где константа M от n не зависит.

В соответствии с [125] для оператора A определены многочлены $P_n(A)u = \sum_{k=0}^n a_k A^k u$, $u \in D(A^n)$, $a_m \in \mathbb{C}$, \mathbb{C} — комплексная плоскость. При этом, $D(A)$ плотна в E и спектр оператора $P_n(A)$ совпадает с множеством $P_n(\Lambda(A))$, где $\Lambda(A)$ — спектр оператора A [126], с. 125.

Следуя подходу В.П. Маслова, примененного в [140], с.12 к операции $A = \frac{d}{dx}$, обозначим множество операторов вида (3.5.171) через $K[A]$, а через $K[x]$ обозначим множество полиномов над полем комплексных чисел $x \in \mathbb{C}$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_n \neq 0$. Также как и в [140], с. 12, полином $P_n(x)$, отвечающий оператору $P_n(A)$, будем называть *символом оператора* $P_n(A)$.

Из очевидного изоморфизма $K[A]$ и $K[x]$ следует, что каждому разложению $P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)^{k_i}$, $\sum_{i=1}^n k_i = m$ соответствует представление $P_n(A) = a_n \prod_{i=1}^m (A - \alpha_i I)^{k_i}$, где α_i — корни полинома $P_n(x)$, k_i — их кратность, I — тождественный оператор.

Рассмотрим задачу (3.5.171), вводя следующие понятия:

Определение 3.32 *Решение задачи Коши*

$$P_n \left(-\frac{d}{dx} \right) G(x) = \delta(x), \quad (3.5.175)$$

$$G(0) = \frac{d}{dx} G(x)|_{x=0} = \dots = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} G(x)|_{x=0}, \quad (3.5.176)$$

где $\delta(x)$ — дельта функция, будем называть символом фундаментального решения для уравнения (3.5.171).

Применение преобразования Лапласа и формулы (2.37) из [53], с.47 позволяют выписать его в виде

$$G(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{(k_i - 1)!} \lim_{p \rightarrow \alpha} \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}} \left[\frac{(p - \alpha_i)^{k_i}}{P_n(p)} e^{px} \right]. \quad (3.5.177)$$

Справедлива следующая

Теорема 3.14 *Если корни многочлена $P_n(x)$ принадлежат резольвентному множеству оператора A , то задача (3.5.171) равномерно корректна и для ее решения справедливо представление*

$$u = \int_0^\infty G(t) U(t) f dt. \quad (3.5.178)$$

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (3.5.171) следует из применения оператора \mathbb{A} к элементу

$$u = \frac{1}{a_n} \prod_{i=1}^m (A - \alpha_i)^{-k_i} f = \frac{1}{a_n} \prod_{i=1}^m (-1)^{k_i} R^{k_i}(\alpha_i, A) f \quad (3.5.179)$$

и из того, что ядро резольвенты генератора полугруппы класса C_0 состоит из одного нуля.

Таким образом, (3.5.179) дает единственное решение задачи (3.5.171). Далее, пользуясь (3.5.173) и (3.5.179), оценим

$$\begin{aligned}
 \|u\| &\leq \frac{1}{|a_n|} \int_0^\infty \underbrace{\dots}_{m} \int_0^\infty \frac{1}{\prod_{i=1}^m (k_i-1)!} e^{-\sum_{i=1}^m Re\alpha_i t_i} \|U(\sum_{i=1}^m t_i)\| dt_1 \dots dt_m \cdot \|f\| \leq \\
 &\leq \frac{M}{|a_n|} \int_0^\infty \underbrace{\dots}_{m} \int_0^\infty \frac{1}{\prod_{i=1}^m (k_i-1)!} e^{-\sum_{i=1}^m (Re\alpha_i - \omega) t_i} dt_1 \dots dt_m \cdot \|f\| = \\
 &= \frac{M \cdot \|f\|}{|a_n| \prod_{i=1}^m (Re\alpha_i - \omega)^{k_i}}.
 \end{aligned} \tag{3.5.180}$$

Полученная оценка доказывает равномерную корректность задачи (3.5.171).

Для получения представления (3.5.178) воспользуемся известным разложением на простые дроби

$$\frac{1}{P_n(x)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)^{k_i}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x - \alpha_i)^{k_i-j+1}}, \tag{3.5.181}$$

где

$$A_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \cdot \frac{(p - \alpha_i)^{k_i-1}}{P_n(p)} \right]_{p=\alpha_i}.$$

Обобщение (3.5.181) на операторный случай, в [126], с. 126 дает разложение

$$\mathbb{A}^{-1} = P_n^{-1}(A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} (-1)^{k_i-j+1} \cdot A_{ij} \cdot R^{k_i-j+1}(\alpha_i, A). \tag{3.5.182}$$

Далее, пользуясь в (3.5.182) соотношениями (3.5.173), после простых операций получаем представление для решения задачи (3.5.171) в виде (3.5.178).

Представление (3.5.178) будем называть *C₀-операторной формулой Дюамеля.*

Замечание 3.10 Если для уравнения

$$P_n(A)u = Q_r(A)f, \quad r < n \tag{3.5.183}$$

определить символ фундаментального решения $G(t)$ как обратное преобразование Лапласа от рациональной дроби $\frac{Q_r(p)}{P_n(p)}$, то при выполнении условий теоремы 3.14 задача (3.5.183) равномерно корректна и ее решение представимо в виде (3.5.178).

Отметим, что важными примерами операторов, удовлетворяющих теореме 3.14, являются эллиптические операторы в пространство L_p ($1 < p < \infty$) см. [122], стр. 321.

Ниже приводятся примеры C_0 -полугрупп с генераторами, коэффициенты которых вырождаются или обращаются в бесконечность, т.е. не удовлетворяют условиям эллиптичности, но теорема 3.14 для них верна и C_0 -интеграл Дюамеля (3.5.178) записывается явно.

Примеры C_0 -полугрупп и их генераторов

Для $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ введем классы монотонных, дифференцируемых функций $h(x)$ таких, что для всех t , значения $h(x) + t$ принадлежат области определения функции h^{-1} — обратной h .

Далее, на множестве непрерывных на \mathbb{R}^+ функций $\varphi(x)$ определим семейства операторов $U_h^\pm(t)$, $t \geq 0$ соотношениями:

$$U_h^+(t)\varphi(x) = \varphi\{h^{-1}[h(x) + t]\}; \quad (3.5.184)$$

$$U_h^-(t)\varphi(x) = \begin{cases} \varphi\{h^{-1}[h(x) - t]\}, & h(x) \geq t; \\ 0, & h(x) < t. \end{cases} \quad (3.5.185)$$

Простые вычисления устанавливают полугрупповые свойства этих семейств.

$$1. U_h^\pm(0)\varphi(x) = \varphi(x), \quad 2. U_h^\pm(t+s)\varphi(x) = U_h^\pm(t)U_h^\pm(s)\varphi(x). \quad (3.5.186)$$

Например, если $h(x) = x$, то это полугруппа левого и правого сдвигов $U_h^\pm(t)\varphi(x) = \varphi(x \pm \alpha)$, а при $h(x) = \ln(x)$ имеем $U_h^\pm(t)\varphi(x) = \varphi(xe^{\pm t})$.

В качестве банаховых пространств, мы будем использовать пространства весовых непрерывных на \mathbb{R}^+ функций с нормами

$$\|\varphi\|_{C_\rho^+} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |\rho(x)\varphi(x)|, \quad \|\varphi\|_{C_{\rho,0}^-} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left| \frac{\varphi(x)}{\rho(x)} \right|, \quad (3.5.187)$$

где $\rho(x) > 0$ — монотонно возрастающая функция, такая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$.

В этих пространствах будем изучать генераторы полугрупп $U_h^\pm(t)$, которые, пока формально, определим соотношениями

$$\frac{d}{dt}U_h^\pm(0)\varphi(x) = \pm\frac{1}{h'(x)}\frac{d\varphi(x)}{dx} = A_h^\pm\varphi(x). \quad (3.5.188)$$

Далее рассмотрим интегралы

$$I_h^+(\lambda)f(x) = \int_x^\infty e^{\lambda[h(x)-h(s)]}h'(s)f(s)ds; \quad (3.5.189)$$

$$I_h^-(\lambda)f(x) = \int_0^x e^{\lambda[h(s)-h(x)]}h'(s)f(s)ds. \quad (3.5.190)$$

Справедлива следующая

Лемма 3.15 *Если в интеграле (3.5.189) $f \in C_\rho^+$, а в (3.5.190) $f \in C_\rho^-$, и вес $\rho(x)$ представим в виде $\rho(x) = e^{mh(x)}g(x)$, где $g(x)$ — возрастающая функция, то при $\lambda: Re\lambda+m > 0$ операторы $I_h^+(\lambda)$ ($I_h^-(\lambda)$) ограничены в пространствах C_ρ^+ (C_ρ^-) и справедливы неравенства*

$$\|I_h^\pm(\lambda)f\|_{C_\rho^\pm} \leq \frac{\|f\|_{C_\rho^\pm}}{Re\lambda + \omega}. \quad (3.5.191)$$

Доказательство. В случае интеграла $I_h^+(\lambda)$ оценим,

$$\begin{aligned} |I_h^\pm(\lambda)f(x)| &\leq \int_x^\infty e^{Re\lambda[h(x)-h(s)]} \cdot e^{-mh(s)} \cdot \frac{h'(s)}{g(s)} \cdot \rho(s)|f(s)|ds \leq \\ &\leq \|f\|_{C_\rho^\pm} \cdot \frac{e^{Re\lambda h(x)}}{g(x)} \int_x^\infty e^{(Re\lambda+m)h(s)}h'(s)ds = \frac{\|f\|_{C_\rho^\pm}}{Re\lambda + \omega} \cdot \frac{1}{\rho(x)}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства очевидным образом следует (3.5.191) для I_h^+ . Для I_h^- доказательство аналогичное.

Несложные вычисления показывают, что интегралы $I_h^+(\lambda)f$ и $I_h^-(\lambda)f$ можно записать в виде

$$I_h^\pm(x)f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}f[h^{-1}(h(x) \pm t)]dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U_h^\pm(t)f dt, \quad (3.5.192)$$

$$I_h^\pm(x)f(x) = \int_0^{h(x)} e^{-\lambda t}f[h^{-1}(h(x) - t)]dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U_h^\pm(t)f dt, \quad (3.5.193)$$

То есть, они являются резольвентами $R(\lambda, A_h^+)$ и $R(\lambda, A_h^-)$ операторов $A_h^+ = \frac{1}{h'(x)}\frac{d}{dx}$ и $A_h^- = -\frac{1}{h'(x)}\frac{d}{dx}$, которые, в силу (3.5.191) удовлетворяют теореме Хилле–Филлипса–Миадеры–Феллера–Иосиды, и, следовательно являются генераторами C_0 – полугрупп $U_h^+(t)$ и $U_h^-(t)$ — соответственно в пространствах C_ρ^+ и $C_{\rho,0}^-$.

Из (3.5.176) следует оценка $\|U_h^\pm(t)\| \leq M e^{-mt}$. Таким образом, при $m \geq 0$ полугруппы $U_h^\pm(t)$ являются сжимающими в пространствах C_ρ^\pm , если $\frac{h(x)}{\rho^m(x)}$ возрастает.

Из этого свойства также следует, что генераторы A_h^\pm этих полугрупп обладают тем свойством, что для операторов $-A_h^\pm$ определены дробные степени $(-A_h^\pm)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. При этом операторы $-(-A_h^\pm)^\alpha$ являются генераторами C_0- полугрупп $U_{\alpha h}^\pm(t)$ с оценкой $\|U_{\alpha h}^\pm(t)\| \leq M e^{m^\alpha t}$ см. [67].

Таким образом, для операторов A_h^\pm задача (3.5.171) имеет решение

$$u(x) = \int_0^\infty G(t)f\{h^{-1}[h(x) \pm t]\}dt. \quad (3.5.194)$$

3.5.2 Примеры операторных экспонент и косинусных функций с сингулярными генераторами

Пусть $h(x)$ монотонная и дифференцируемая функция, отображающая \mathbb{R} на \mathbb{R} . Нетрудно видеть, что операторные семейства $T_h^\pm(t)\varphi(x) = \varphi\{h^{-1}[h(x) \pm t]\}$ образуют группы линейных преобразований для $t \in \mathbb{R}$. Как и в случае полугрупп $U_h^\pm(t)$ можно показать, что группы $T_h^\pm(t)$ являются C_0- непрерывными в пространствах C_ρ^\pm с нормами $\|\varphi\|_{C_\rho^+} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\rho(x)\varphi(x)|$, $\|\varphi\|_{C_\rho^-} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\varphi(x)}{\rho(x)} \right|$, где $\rho(x) > 0$ весовая функция, причем $\rho'(x) \geq 0$. Их генераторы задаются дифференциальными выражениями $l_\pm = \pm \frac{1}{h'(x)} \frac{d}{dx}$ и областями определения $D(A_h^\pm) = \{\varphi(x) \in C_\rho^\pm, l_\pm \varphi \in C_\rho^\pm\}$.

При этом, справедливы оценки $\|T_h^\pm(t)\| \leq M \exp(-mt)$.

С помощью групп $T_h^\pm(t)$ строится C_0- операторная косинус функция

$$C_h(t) = \frac{1}{2}[T_h^+(t) + T_h^-(t)] = \frac{1}{2}[\varphi[h^{-1}[h(x) + t]] + h^{-1}[h(x) - t]] \quad (3.5.195)$$

определенная на пространстве равномерно непрерывных и ограниченных функций $C_{[-\infty, \infty]} \subset C_\rho^+ \cap C_\rho^-$. Ее генератор $C''(0)\varphi = A_h\varphi$ определяется дифференциальным выражением $l\varphi = \frac{1}{h'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h'(x)} \frac{d}{dx} \right)$ и областью определения $D(A) = \{\varphi \in C_{[-\infty, \infty]}, l\varphi \in C_{[-\infty, \infty]}\}$.

Используя известную [86] связь между КОФ и полугруппой с одинаковым генератором, получаем что оператор A_h является генератором C_0 -полугруппы $U(t)$ имеющей вид

$$U(t, A_h)\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s)\varphi(x)ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{((h(x)-h(s))^2)}{4t}} \varphi(s)dh(s). \quad (3.5.196)$$

В заключении заметим, что связь C_0 -полугруппы $U(t, A)$ с C_0 -полугруппой $U(t, -(-A)^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, указанная К.Иосидой в [67], с.358, а также выражение КОФ $C(t, A^{2m+1})$, ($m = 1, 2, \dots$) через КОФ $C(t, A)$, приведенное в [85], позволяет утверждать, что задача (3.5.171) равномерно корректна и в случае операторов $A = -(\mp A_h)^\alpha$ и $A = A_h^{2m+1}$, а ее решение представимо в виде C_0 -интеграла Хевисайда (3.5.178) с полугруппами $U(t, A^{2m+1})$ и $U(t, -(-A)^\alpha)$ соответственно.

Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к задаче (3.5.183).

Кроме того, заметим что полученные здесь результаты переносятся и на случай L_p ($p \geq 1$)-теории.

3.6 О точных решениях задачи Коши для некоторых моделей, описываемых уравнениями параболического и гиперболического типов

Пусть J одно из множеств: $R = (-\infty, \infty)$, $R_+ = (0, \infty)$, $\overline{R}_+ = [0, \infty)$ и E – банахово пространство.

$\mathfrak{C}^{(n)}(J, E)$ – пространство вектор-функций $u(t)$ со значениями в E , определенных и n раз непрерывно дифференцируемых для $t \in J$. A – линейный оператор с областью определения $\overline{D}(A) = E$, и областью значений $R(A) = E$. Будем предполагать, что резольвентное множество оператора A ненулевое и, следовательно, A – замкнут.

Определение 3.33 Функцию $u(t)$ будем называть решением уравнения

$$u^{(n)}(t) = Au(t) \quad (3.6.197)$$

в J , если $U(t) \in C(J, E)$, $u(t) \in D(A)$ и (3.6.197) выполнено для всех $t \in J$.

Определение 3.34 Задача Коши для (3.6.197) корректно поставлена в J , если: а) существует плотное подпространство $D \subset E$ такое, что $u_0, u_1, \dots, U_{n-1} \in D$, то существует решение $u(t)$ уравнения (3.6.197) такое, что $u_{(0)}^{(k)} = \lim_{h \rightarrow 0} u_{(h)}^{(k)} = u_k$ (в случае $J = \overline{R}_+$ или R_+ имеется в виду правый предел); б) для любой последовательности $u_m(t)$ решение (3.6.197) такое, что $u_m^{(k)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, поточечно в J выполнено $u_m(t) \rightarrow 0$.

Определение 3.35 Задача Коши для (3.6.197) равномерно корректна, если последовательность $u_m(t)$, удовлетворяющая условию б) определения 3.34, сходится равномерно на каждом компакте из J .

При исследовании корректности задачи Коши для уравнения (3.6.197) ранее были получены следующие результаты [39], [78], [79], [80], [81], которые сформулированы в виде следующих утверждений.

Утверждение 3.6 Задача Коши для уравнения (3.6.197) равномерно корректна тогда и только тогда, когда:

1. $n = 1$, A – генератор сильной непрерывной полугруппы $U(t)$, т.е. сильно непрерывного операторного семейства, удовлетворяющего соотношению: $U(t+s) = U(t)U(s)$, $U(0) = I$.
2. $n = 2$. A – генератор сильно непрерывной косинус-функции (КОФ) $C(t, A)$, т.е. сильно непрерывного операторного семейства, обладающего свойствами: $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$, $C(0) = I$.
3. $n \geq 3$. A – ограничен.

Отметим, что если A – генератор КОФ $C(t, A)$, то он является и генератором

C_0 - полугруппы $U(t)$, имеющего вид

$$U(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s) ds \quad (3.6.198)$$

Представление КОФ $C(t, A^{2m+1})$ через $C(t, A)$.

Как показано в [81], если A – генератор КОФ $C(t, A)$ в банаховом пространстве E , то и его нечетная степень A^{2m+1} ($m = 1, 2, \dots$) также является генератором КОФ $C(t, A^{2m+1})$. И если $\|C(t, A)\| \leq M e^{\sigma t}$, то

$$\|C(t, A^{2m+1})\| \leq M e^{\sigma^{2m+1} t}. \quad (3.6.199)$$

Следствием этого результата является

Теорема 3.15 *Если A – генератор КОФ $C(t, A)$, действующей в некотором банаховом пространстве E и имеющей порядок роста σ , то для КОФ $C(t, A^{2m+1})$ справедливо представление*

$$\begin{aligned} C(t, A^{2m+1}) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s\rho \cos \frac{\alpha\pi}{2}} \{ \cos(\frac{\alpha\pi}{2} + t\rho^{2m+1} - s\rho \sin \frac{\alpha\pi}{2}) + \\ &2sh(\sin \frac{\alpha\pi}{2}) \sum_{k=1}^m [\cos \frac{\alpha(2k+1)\pi}{2} + t(\rho^{2m+1} + s \sin(\alpha k\pi) \cos \frac{\alpha\pi}{2}) - \\ &s \rho \sin \frac{\alpha\pi}{2}] \} d\rho C(s, A) ds, \quad \alpha = \frac{1}{2m+1} \end{aligned} \quad (3.6.200)$$

Доказательство. Используя разложение (5) из [81], для резольвенты оператора A^{2m+1} при $\lambda > \sigma^{2m+1} \geq 0$ имеем равенство

$$\lambda R(\lambda^2, A^{2m+1}) = \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{k=-m}^m \lambda_k^2 R(\lambda_k^2, A), \quad (3.6.201)$$

где $\lambda_k = \lambda^\alpha (\cos(\alpha k\pi) + i \sin(\alpha k\pi))$.

Далее, пользуясь в (3.6.201) известной формулой [39], стр.177, связывающей КОФ и резольвенту ее генератора $R(\lambda_k^2, A) = - \int_0^\infty e^{-\lambda_k s} C(s, A) ds$, получаем

$$\begin{aligned} \lambda R(\lambda^2, A^{2m+1}) &= -\frac{\alpha}{\lambda} \int_0^\infty [\lambda^\alpha e^{-\lambda^\alpha s} + \sum_{k=1}^m (\lambda_k e^{-\lambda_k s} + \bar{\lambda}_k e^{-\bar{\lambda}_k s})] C(s, A) ds = \\ &- \frac{\alpha}{\lambda^{1-\alpha}} \int_0^\infty [e^{-\lambda^\alpha s} + 2 \sum_{k=1}^m e^{-\lambda^\alpha s \cos(\alpha k\pi)} \cos(\alpha k\pi + s \lambda^\alpha \sin(\alpha k\pi))] C(s, A) ds \end{aligned} \quad (3.6.202)$$

Нетрудно видеть, что операторную функцию $\lambda R(\lambda^2, A^{2m+1})$ можно продолжить по аналитичности в полуплоскость $Re\lambda > \sigma^{2m+1}$, что позволяет записать КОФ $C(t, A^{2m+1})$ в виде

$$C(t, A^{2m+1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \lambda^{\alpha-1} e^{\lambda t} \int_0^\infty [e^{-\lambda^\alpha s} + \\ + 2 \sum_{k=1}^m e^{-\lambda^\alpha s \cos(\alpha k \pi)} \cos(\alpha k \pi + s \lambda^\alpha \sin(\alpha k \pi))] C(s, A) ds d\lambda \quad (3.6.203)$$

Так как при $Re\lambda > \sigma^{2m+1}$ внутренний интеграл в (3.6.203) абсолютно сходится, тогда меняя порядок интегрирования, получаем равенство

$$C(t, A^{2m+1}) = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \lambda^{\alpha-1} e^{\lambda t} [e^{-\lambda^\alpha s} + \\ + 2 \sum_{k=1}^m e^{-\lambda^\alpha s \cos(\alpha k \pi)} \cos(\alpha k \pi + s \lambda^\alpha \sin(\alpha k \pi))] d\lambda C(s, A) ds \quad (3.6.204)$$

Переходя в формуле (3.6.204) от интегрирования по прямой $\lambda = \omega > \sigma^{2m+1} \geq 0$ к контру, состоящему из двух лучей $\lambda = \rho e^{-i\theta}$ ($0 < \rho < \infty$) и $\lambda = \rho e^{i\theta}$, где $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ (частности для $\theta = \frac{\pi}{2}$), получаем (3.6.200).

Теорема доказана.

Следствие 3.4 Пусть $E = C_{[-\infty, \infty]}$ – пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $R^1 = (-\infty, \infty)$ функций $\varphi(x)$ с нормой $\|\varphi\| = \sup_{x \in R^1} |\varphi(x)|$ и оператор A задан дифференциальным выражением $l\varphi = \varphi''(x)$ и областью определения $D(A) = \{\varphi : \varphi \in C_{[-\infty, \infty]}, \varphi' \in C_{[-\infty, \infty]}\}$.

Как известно, в этом случае A является генератором КОФ, имеющим вид:

$$C(t)\varphi(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x+t) + \varphi(x-t)], \quad t \geq 0. \quad (3.6.205)$$

Тогда и оператор A^{2m+1} , определенный дифференциальным выражением $l_m u = \varphi^{(2(2m+1))}(x)$ и областью определения $D(A^{2m+1}) = \{\varphi : \varphi \in C_{[-\infty, \infty]}, \varphi^{(2(2m+1))} \in C_{[-\infty, \infty]}\}$ является генератором КОФ $C(t, A^{2m+1})$. И, таким образом, из теоремы 3.15 следует, что задача Коши

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^{2(2m+1)} u(t, x)}{\partial x^{2(2m+1)}}, \quad (3.6.206)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u'_t(0, x) = 0, \quad (3.6.207)$$

где $\varphi \in D(A^{2m+1})$, равномерно корректна и ее решение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u(t, x) = C(t, A^{2m+1})\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi(2m+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s\rho \cos \frac{\pi}{2(2m+1)}} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2(2m+1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + t\rho^{2m+1} - s\rho \sin \frac{\pi}{2(2m+1)} \right) + t \left(\rho^{2m+1} + s \sin \frac{\pi}{2(2m+1)} \cos \frac{\pi}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - s\rho \sin \frac{\pi}{2(2m+1)} \right\} [\varphi(x+s) + \varphi(x-s)] d\rho ds, \end{aligned} \quad (3.6.208)$$

Если же данные Коши для уравнения (3.6.206) заданы в общем виде

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u'_t(0, x) = \psi(x), \quad (3.6.209)$$

то в соответствии с теоремой из [1], стр.177, решение задачи (3.6.197)–(3.6.205) дается формулой

$$u(t, x) = C(t, A^{2m+1})\varphi(x) + \int_0^t C(s, A^{2m+1})\psi(s) ds. \quad (3.6.210)$$

Следствие 3.5 Из соотношения (3.6.198) следует равномерно корректная разрешимость задачи Коши

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^{2(2m+1)} u(t, x)}{\partial x^{2(2m+1)}}, \quad (3.6.211)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \varphi \in \mathfrak{C}_{(R^1)}^{2(2m+1)} \quad (3.6.212)$$

и ее решение представимо в виде

$$u(t, x) = U(t)\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4t}} C(s, A^{2m+1})\varphi(x) ds. \quad (3.6.213)$$

Замечание 3.11 Так как представления КОФ (3.6.205) справедливо для оператора $l\varphi = \varphi''$ и в пространствах $L_p(R^1)$, а также в пространствах Степанова $\overline{S}_p(R^1)$. см [6], то равномерно корректная разрешимость задач (3.6.206) – (3.6.207) и (3.6.206) – (3.6.209) и представление решений в виде (3.6.208) или (3.6.210) имеет место и для этих пространств.

3.7 Корректные краевые задачи для операторных уравнений с вырождением

3.7.1 Постановка задачи

Пусть B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B = \|\cdot\|$, A — линейный оператор с областью определения $\overline{D(A)} = B$, $t \in (0, 1)$, $\mathfrak{C}^{(k)}(B)$ — пространство вектор-функций со значениями в B , k раз непрерывно дифференцируемых на $(0, 1)$; $\mathfrak{B}^{(k)}(B)$ — банахово пространство функций $x(t) \in \mathfrak{C}^{(k)}(B)$ с нормой $\|x\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{t \in (0,1)} \|x^{(j)}(t)\|$, $\|x\|_0 = \|x\|$.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$Q(t)u(t) = Au(t) + f(t), \quad (3.7.214)$$

$Q(t)u(t) = a(t)u''(t) + b(t)u'(t)$, $a(t) \geq 0$, $a \in \mathfrak{B}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$, $b \in \mathfrak{B}^{(1)}(\mathbb{R}^1)$, $f \in \mathfrak{B}(B)$, A — позитивный оператор, такой, что $-A$ является генератором полугруппы $V(-A, t)$ класса C_0 .

Особенностью уравнения (3.7.214) является возможность обращаться в нуль (вырождение) коэффициента $a(t)$, при $t = 0$. В зависимости от порядка вырождения коэффициента $a(t)$ в нуле, для определения ограниченного решения уравнения (3.7.214), краевое условие при $t = 0$ может ставиться, а может и отсутствовать.

В связи с этим, М.В. Келдыш вводит следующие условия, характеризующие дифференциальное выражение $Q(t)$ [70]:

Условие $D^{(m)}$. Выражение $Q(t)$ удовлетворяет условию $D^{(m)}$, если при некотором натуральном m выполняется неравенство $b(0) + ma'(0) < 0$.

Условие E . Если $b(0) - a'(0) > 0$, то $Q(t)$ удовлетворяет условию E .

В связи с этим, мы рассматриваем задачи:

a)

$$Q_1 u(t) = Au(t) + f(t), \quad (3.7.215)$$

$$\delta u(1) + \Theta u'(1) = \psi, \quad \Theta \cdot \delta > 0, \quad \psi \in B. \quad (3.7.216)$$

b)

$$Q_2 u(t) = Au(t) + f(t), \quad (3.7.217)$$

$$\begin{aligned} \delta_0 u(0) - \Theta_0 u'(0) &= \varphi, \quad \delta u(1) + \Theta u'(1) = \psi, \\ \varphi, \psi &\in B, \quad \Theta_i \cdot \delta_i > 0, \quad i = 0, 2. \end{aligned} \quad (3.7.218)$$

Отметим, что из результатов В.Феллера [187] следует, что операторы Q_1 и Q_2 с однородными граничными условиями $\varphi = 0, \psi = 0$ являются генераторами C_0- полугруппы $U(Q_i, t)$ в $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$ и, следовательно, для их резольвент выполняются оценки

$$\|R(Q_i, \lambda)\| \leq k(Re \lambda - q_i)^{-1}, \quad (3.7.219)$$

$Re \lambda > q_i, i = 1, 2$, q_i — тип полугруппы $U(Q_i, t)$.

Это означает, что в скалярном случае $A = \lambda$ однородные задачи (3.7.215)–(3.7.216), (3.7.217)–(3.7.218) корректно разрешимы, и их решения имеют вид

$$u_i(t, \lambda) = R(Q_i, \lambda) = \int_0^1 \Gamma_i(t, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi. \quad (3.7.220)$$

Γ_i — функция Грина. В общем случае, если $-A$ — генератор полугруппы класса C_0 , в [82] устанавливается равномерно корректная (в смысле [125], с. 316) разрешимость задач, для однородного уравнения (3.7.214), с помощью конечно-разностного метода, с использованием операторных ортогональных многочленов. При этом соответствующие решения записываются через резольвенты операторов $-A$.

3.7.2 Доказательство корректности операторной разностной схемы

В данном разделе, также с применением конечно-разностного метода, устанавливается равномерно-корректная разрешимость неоднородных задач (3.7.215)–(3.7.216), (3.7.217)–(3.7.218). При этом, в отличии от [82], используется подход В.П. Маслова ([140], гл. III) построения алгебры многочленов от производящего оператора через полугруппу. Это позволяет получить представление решений в виде операторного преобразования (C_0 -операторного интеграла) Лапласа от решения соответствующей скалярной задачи.

C_0 -операторный интеграл Лапласа

Здесь, следуя [125], с. 136, применим интеграл Лапласа – Стильтьеса для построения решений краевых задач (3.7.215)-(3.7.216) и (3.7.217)-(3.7.218).

Пусть оператор $-A$ – генератор полугруппы операторов $V(-A, t)$ в B класса C_0 такой, что $V(0) = I$, $(V(t+s) = V(t)V(s)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|V(t)x - x\|_B = 0$ при любом $x \in B$, $\frac{dV(t)}{dt} = -AV(-A, t)$. Будем также предполагать, что для $\omega > 0$, $t \geq 0$ справедлива оценка

$$\|V(-A, t)\| \leq M e^{-\omega t}. \quad (3.7.221)$$

Обозначим через Ω – класс локально интегрируемых на $(0, \infty)$ комплекснозначных функций $\varphi(t)$, для которых конечен интеграл $\int_0^\infty e^{-\omega t} |\varphi(t)| dt = \mathfrak{L}(\omega)(|\varphi|)$.

Определение 3.36 C_0 -интегралом Лапласа функции $\varphi \in \Omega$ будем называть оператор

$$\varphi^*(A) = \mathfrak{L}(A)[\varphi(t)] = \int_0^\infty V(-A, t)\varphi(t)dt. \quad (3.7.222)$$

Из (3.7.221) следует ограниченность $\varphi^*(A)$, так как

$$\|\varphi^*(A)\| \leq M \int_0^\infty e^{-\omega t} |\varphi(t)| dt = M \mathfrak{L}(\omega)(|\varphi|). \quad (3.7.223)$$

Также легко устанавливаются следующие свойства этого оператора:

- 1) $\mathfrak{L}(A)[a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t)] = a\mathfrak{L}(A)[\varphi_1(t)] + b\mathfrak{L}(A)[\varphi_2(t)]$, a, b – const.
- 2) Если $\Theta(t)$ – функция Хевисайда, то $\mathfrak{L}(A)[\Theta(t)] = A^{-1}$.

Это следует из равенства

$$A \int_0^\infty V(-A, t)dt = - \int_0^\infty V'(-A, t)dt = V(-A, 0) = I.$$

Заметим, что из оценки (3.7.221) следует существование ограниченного обратного оператора A^{-1} .

- 3) $\mathfrak{L}(A) \left[\frac{d\varphi}{dt} \right] = A\mathfrak{L}(A)[\varphi(t)] - \varphi(0)I$;
- 4) Если $\varphi(t) * \psi(t) = \int_0^t \varphi(t-s)\psi(s)ds$, то $\mathfrak{L}(A)[\varphi(t) * \psi(t)] = \mathfrak{L}(A)[\varphi(t)] + \mathfrak{L}(A)[\psi(t)]dt$.

Функцию $\varphi(t)$ будем называть C_0 -оригиналом C_0 -интеграла Лапласа, полагая $\varphi(t) = \mathfrak{L}^{-1}(A)[\varphi^*(A)](t)$.

В то же время, в случае скалярного преобразования Лапласа, справедливо равенство $\varphi(t) = \mathfrak{L}^{-1}(\lambda)[\varphi^*(\lambda)](t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

И таким образом, мы имеем соотношение

$$\mathfrak{L}^{-1}(A)[\varphi^*(A)](t) = \mathfrak{L}^{-1}(\lambda)[\varphi^*(\lambda)](t). \quad (3.7.224)$$

Определение 3.37 Функция $u(t)$ называется обобщенным решением уравнения (3.7.214), если

- 1) $u(t) \in \mathfrak{B}(B)$,
- 2) $Qu(t) \in \mathfrak{B}(B)$,
- 3) $u(t) \in D(A)$ для $t \in (0, 1)$,
- 4) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (3.7.214) в интервале $(0, 1)$ при $f \in \mathfrak{B}(B)$.

Определение 3.38 Краевая задача (3.7.215)-(3.7.216) (соответственно (3.7.217)-(3.7.218)) называется равномерно корректной, если для любых $\varphi, \psi \in B$, $f \in \mathfrak{B}(B)$ существует единственное обобщенное решение этой задачи, непрерывно зависящее от φ и ψ в норме B , и от f в норме $\mathfrak{B}(B)$.

Справедлива следующая

Теорема 3.16 Пусть q_i — тип полугруппы $U(Q_i, t)$, $a - \omega$ — тип полугруппы $V(-A, t)$, тогда при $\omega > q_i$ задачи (3.7.215)-(3.7.216) ((3.7.217)-(3.7.218)) равномерно корректны и их решения представимы в виде:

a) Случай E :

$$u_1(t, A) = \mathfrak{L}(A) \left[\mathfrak{L}^{-1}(\lambda) \left(S_1(t, A)\psi + \int_0^1 \Gamma_1(t, \xi, \lambda)f(\xi)d\xi \right) d\lambda \right] (s)ds, \quad (3.7.225)$$

где $S_1(t, \lambda)$ — решение однородной задачи в скалярном случае $A = \lambda$, $\psi \equiv 1$, $\Gamma_1(t, \xi, \lambda)$ — функция Грина для неоднородной задачи в скалярном случае.

b) Случай $D^{(m)}$:

$$u_2(t, A) = \mathfrak{L}(A) \left[\mathfrak{L}^{-1}(\lambda) (S_2(t, \lambda)\varphi + S_3(t, \lambda)\psi + \int_0^1 \Gamma_2(t, \xi, \lambda)f(\xi)d\xi) d\lambda \right] (s)ds, \quad (3.7.226)$$

где функции $S_2(t, \lambda)$, $S_3(t, \lambda)$, $\Gamma_2(t, \xi, \lambda)$ аналогичны функциям $S_1(t, \lambda)$, $\Gamma_1(t, \xi, \lambda)$.

Доказательство. Аппроксимация $u'(t_i) \approx \frac{1}{h}[u_{i+1} - u_i]$, $u''(t_i) \approx \frac{1}{h^2}[u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}]$, $t_i = ih$, $h = \frac{1}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$ приводит задачи к разностным схемам вида

$$Q^{(h)}u^{(h)} + Au^{(h)} = f^{(h)} \quad (3.7.227)$$

с трехдиагональной операторной матрицей

$$Q^{(n)} + AI^{(n)} = \begin{bmatrix} a_1I + A & -c_1I & 0 & \dots & 0 \\ -b_1 & a_2I + A & -c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_nI + A \end{bmatrix}, \quad (3.7.228)$$

где I — тождественный в B оператор, $I^{(n)}$ — тождественный оператор в B^n .

$$a_i, b_i, c_i > 0, \quad a_i \geq b_i + c_i. \quad (3.7.229)$$

Очевидно, что $\mathfrak{M}_n(A) = (Q^{(n)} + AI^{(n)})$ — линейный оператор в пространстве $B^n = B \times \dots \times B$ с нормой $\|f\|_h = \max_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|$ $f_i \in B$. Покажем, что у него существует ограниченный обратный $\mathfrak{M}_n^{-1}(A)$ с элементами

$$\gamma_{i,k}(-A) = \begin{cases} \sum_{j=k}^n \prod_{m=k}^{j-1} (-b_m) \prod_{m=i}^{j-1} (-c_m) \cdot \frac{P_{i-1}P_{k-1}}{P_{j-1}P_j}, & \text{если } i < k; \\ \sum_{j=i}^n \prod_{m=k}^{j-1} (-c_m) \prod_{m=i}^{j-1} (-b_m) \cdot \frac{P_{i-1}P_{k-1}}{P_{j-1}P_j}, & \text{если } i > k. \end{cases} \quad (3.7.230)$$

$P_k(A)$ — главные операторные миноры матрицы $\mathfrak{M}_n(A)$, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$P_{k+1}(A) = (\alpha_k + A)P_k(A) - b_{k-1}c_{k-1}P_{k-1}(A) \quad (3.7.231)$$

$P_0(A) = I$, $P_1(A) = (\alpha_k + A)$, $k = 2, \dots, n$. $P_k^{-1}(A)$ — оператор обратный оператору $P_k(A)$.

При этом имеет место оценка

$$\|\mathfrak{M}_n^{-1}(A)\|_{\mathfrak{B}(B)} \leq M \|\mathfrak{M}_n^{-1}(\omega)\|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)}. \quad (3.7.232)$$

Для построения операторных дробей $P_{n-1}(A) \cdot P_n^{-1}(A)$ заметим, что в скалярном случае $A = x$ соотношение (3.7.231) определяет систему многочленов $\{P_n(x)\}$ со взаимно разделяющимися нулями у соседних многочленов $P_{n-1}(x)$ и $P_n(x)$. Отсюда следует разложение по корням $\{x_m\}_1^n P_n(x)$, при $x > x_m$.

$$\begin{aligned} \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} &= \sum_{m=1}^n \frac{c_m}{x-x_m} = \sum_{m=1}^n \frac{P_{n-1}(x_m)}{P'_n(x_m)(x-x_m)} = \\ &= \sum_{m=1}^n c_m \int_0^\infty e^{-(x-x_m)t} dt = \int_0^\infty e^{-xt} \sum_{m=1}^n c_m e^{x_m t} dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-xt} G_n(t) dt, \quad (c_m > 0). \end{aligned} \quad (3.7.233)$$

Назовем функцию $G_n(t)$ *корневой характеристикой* дроби $P_{n-1}(x)P_n^{-1}(x)$, которая, в силу (3.7.233) является преобразованием Лапласа функции $G_n(t)$, и следовательно $\mathfrak{L}(x)[G_n(t)] = [P_{n-1}(x)P_n^{-1}(x)]$. Заметим, что $G_n(t) > 0$.

Теперь, используя равенство $R(-A, \lambda) = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} V(-A, t) dt$, по аналогии с соотношением (3.7.233) введем операторные дроби

$$\begin{aligned} P_{n-1}(A)P_n^{-1}(A) &= P_n^{-1}(A)P_{n-1}(A) = -\sum_{m=1}^n c_m R(-A, -x_m) = \\ &= \sum_{m=1}^n c_m \int_0^\infty e^{x_m t} V(-A, t) dt = \int_0^\infty V(-A, t) G_n(t) dt, \end{aligned} \quad (3.7.234)$$

где $\{x_m\}$ — корни многочлена $P_n(x)$, c_m — коэффициенты из (3.7.233).

Таким образом, интеграл (3.7.234) является C_0 -преобразованием Лапласа функции $G_n(t)$. Заметим, что это соответствует подходу В.П. Маслова — построения алгебры функций от генератора не через его резольвенту, а через полугруппу [7], гл. III.

Из (3.7.234) следует оценка

$$\begin{aligned} \|P_{n-1}(A)P_n^{-1}(A)\| &\leq \int_0^\infty \|V(-A, t)\| G_n(t) dt \leq \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-\omega t} G_n(t) dt = M \cdot \frac{P_{n-1}(\omega)}{P_n(\omega)} \end{aligned} \quad (3.7.235)$$

дающая ограниченность операторов $P_n(A)P_n^{-1}(A)$ в B .

Далее, из свойств преобразования Лапласа для свертки, имеем равенство

$$\begin{aligned} P_{n-j}(A)P_n^{-1}(A) &= \prod_{k=0}^{j-1} P_{n-j}(A)P_{n+k-1}^{-1}(A) = \\ &= \int_0^\infty V(-A, t) G_n * \cdots * G_{n-k+1}(t) dt = \mathfrak{L}(A)[\prod_{k=0}^{j-1} G_{n-k}(t)]. \end{aligned} \quad (3.7.236)$$

Используя (3.7.236) в (3.7.230), получаем следующее представление для элементов матрицы $\mathfrak{M}_n^{-1}(A)$

$$\gamma_{i,k} = \mathfrak{L}(A)[\mathfrak{L}^{-1}(x)\gamma_{i,k}(t)]. \quad (3.7.237)$$

Откуда следует оценка

$$\|\gamma_{i,k}(A)\| \leq M\gamma_{i,k}(\omega), \quad (3.7.238)$$

где M и ω из (3.7.221).

Равенство $\mathfrak{M}_n(A)\mathfrak{M}_n^{-1}(A) = I^{(n)}$ показывается непосредственным применением матриц прямого и обратного хода метода прогонки.

Из оценки (3.7.238) следует устойчивость и сходимость разностной схемы, вместе с устойчивостью и сходимостью соответствующей разностной схемы в скалярном случае при $A = \omega$, обеспеченной неравенствами $a_i + \omega > b_i + c_i$. Что по критерию компактности сеточных функций С.К. Годунова ([38], §17, см. также [82]) дает сильную интерполяционную сходимость сеточных функций Грина и, соответственно, сеточных решений к обобщенному решению исходной задачи с предельными функциями Грина.

Теорема доказана.

Таким образом, изучение корректной разрешимости краевых задач для уравнения (3.7.214), постановка которых значительно расширяет классы задач, рассмотренных в работе [125], гл. III, §2, сводится к разрешимости соответствующих скалярных задач, изученных многими авторами [35], [38], [70], причем для широких классов таких задач известны точные решения [138], [158], что с применением (3.7.225) и (3.7.226) позволяет строить точные решения задач и в общем случае.

Глава 4

Оптимизация полигармонического импульса вибропогружателя

4.1 Бифуркация резонансных колебаний

Центральной темой настоящей главы является задача оптимизации ненулевого тригонометрического импульса

$$f_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kt) \quad (4.1.1)$$

по критерию максимальности коэффициента несимметрии:

$$K_n = \frac{\max_t f_n(t)}{|\min_t f_n(t)|}. \quad (4.1.2)$$

Отметим, что критерий такого вида относится к классу «дробных критериев» теории прогнозирования больших систем [177]. Классы таких задач представляют как общематематический, так и прикладной интерес.

В §4.1 представлен метод оптимизации решений общего скалярного обыкновенного дифференциального уравнения порядка $2n$ из точки многомодового вырождения. Полученный результат может применяться к решению конкретных задач прикладного характера. Например, частным случаем такой задачи является оптимизация турбинных лопаток, изученная с помощью представленных здесь методов в работах [100]–[102].

Среди инженерных задач встречаются и такие, в которых модель системы непосредственно описывается тригонометрическим импульсом (антенные устройства и вибропогружатели). Такие задачи тоже были исследованы и соответствующие оптимальные импульсы приведены в заключительной главе 5.

В главе описан метод исследования бифурцирующих из нуля периодических решений скалярного обыкновенного дифференциального уравнения, приводящий к задаче исследования тригонометрического полинома. Такой анализ состоит из 3 шагов. На первом шаге для уравнения выписывается соответствующий функционал действия и задача сводится к поиску экстремалей функционала. На втором шаге вариационная задача переводится в конечномерное пространство, посредством редукции Ляпунова–Шмидта. Строится ключевая функция, главная часть которой — полином, имеющий те же топологические свойства, что и функционал действия.

На третьем шаге проводится анализ особых точек главной части ключевой функции и строится приближенное решение исходного обыкновенного дифференциального уравнения в виде тригонометрического полинома (4.1.1). Пример таких многомодовых ($n = 2$ и 3) решений приведен в разделах 4.1.2, 4.1.3. Таким образом, результатом §4.1 является схема получения асимптотических представлений ветвей бифурцирующих решений исходного уравнения и, как следствие, получение возможности проведения оптимизации ветви.

В параграфе §4.2 даётся определение коэффициента несимметрии K_n , формулируется центральная задача об оптимизации полинома (4.1.1) по коэффициенту несимметрии K_n . Доказываются теоремы о строении оптимального многочлена в §4.3.

В §4.4 приводится случай $n = 7$, который важен для оптимизации конструкции вибропогружающих устройств [56].

В заключении главы в §4.5 приводится ряд теорем, описывающих свойства многочлена Максвелла–Фейера и его представления при различном наборе гармоник (чётном и нечётном).

4.1.1 О вычисление экстремалей посредством нелинейной ритцевской аппроксимации функционала

Постановка

Рассмотрим общее скалярное ОДУ порядка $2n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^{2n}w}{dt^{2n}} + a_n \frac{d^{2(n-1)}w}{dt^{2(n-1)}} + \cdots + a_2 \frac{d^2w}{dt^2} + a_1 w + U\left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}, \dots, \frac{d^{2n-1}w}{dt^{2n-1}}\right) = 0, \quad (4.1.3)$$

$U(w, w_1, w_2, \dots, w_{2n-1}) = O(w^2 + w_1^2 + \dots + w_{2n-1}^2)$, a_k ($k = 0 \dots n$) – не зависят от t . Периодическое решение данного уравнения может быть не единствено и при определённых значениях параметров a_1, \dots, a_n может наблюдаться и появление или вырождение ненулевых периодических решений (бифуркации). Причем главные асимптотические части периодических решений, в силу высших степеней уравнения, будут многомодовыми, то есть представлять собой линейную комбинацию собственных векторов оператора из левой части (4.1.3). Главная периодическая часть ветвей периодического решения представляет собой линейную комбинацию собственных векторов (мод бифуркации) линейного оператора, равного производной Фреше от левой части уравнения (4.1.3). Многомодовая бифуркация периодических решений возникает при наличии n -кратного резонанса в нуле (при критических значениях параметров).

Определение 4.1 Под n -кратным резонансом (типа $p_1 : p_2 : \dots : p_n$) уравнения (4.1.3) подразумевается случай одновременного существования (для соответствующего линеаризованного ОДУ) набора из n периодических решений $\exp(\frac{2\pi i p_k}{T} t)$, $T > 0$, $p_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$, $HOD(p_1, p_2, \dots, p_n) = 1$, или, что эквивалентно, n пар вещественных периодических решений $\cos(\frac{2\pi p_k}{T} t) + i \sin(\frac{2\pi p_k}{T} t)$ – мод бифуркации.

Определение 4.2 Резонанс $p_1 : p_2 : \dots, p_n$ называется сильным, если существует такой ненулевой набор целых чисел m_1, m_2, \dots, m_n , что $m_1 p_1 + m_2 p_2 + \dots + m_n p_n = 0$ и $|m_1| + |m_2| + \dots + |m_n| \leq 4$. Число $|m_1| + |m_2| + \dots + |m_n|$

называется порядком резонансного соотношения. Число, наименьшее из порядков резонансных соотношений, называется порядком данного резонанса.

Определение 4.3 Резонансные соотношения порядка ≥ 5 называются слабыми. Резонанс, для которого существует сильное резонансное соотношение, называется сильным, и слабым — в противном случае.

Определение 4.4 Под градиентом функции $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ понимается отображение $\nabla V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое условием $\langle \nabla V(\xi), h \rangle = V'(\xi)h \quad \forall \xi, h \in \mathbb{R}^n$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение на \mathbb{R}^n .

Определение 4.5 Если $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $g(a) = 0$, то точка a называется особой точкой отображения g . В случае градиентного отображения $g(\xi, \lambda) = \nabla V(\xi, \lambda)$, особая точка отображения ∇V называется также особой или критической для функции V .

Шаг 1. Ниже предполагается, что $T = 2\pi$ и $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Одно из базовых предположений состоит в условии потенциальности, которое означает, что уравнение (4.1.3) служит уравнением Эйлера-Пуассона экстремалей функционала

$$V(w, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \left((-1)^n \left(\frac{d^n w}{dt^n} \right)^2 + (-1)^{n-1} a_n \left(\frac{d^{n-1} w}{dt^{n-1}} \right)^2 + \dots - a_2 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + a_1 w^2 \right) + \mathcal{U} \right) dt, \quad (4.1.4)$$

$\mathcal{U} = \mathcal{U} \left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2 w}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} w}{dt^{n-1}} \right)$, где $\mathcal{U}(w, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = o(w^2 + w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_{n-1}^2)$, $w_m = \frac{d^m w}{dt^m}$, на банаховом пространстве $E = 2\pi$ -периодических вещественнонзначных функций класса C^{2n} .

Предполагается также, что при закритических значениях параметра, нуль является точкой $\min V|_{N^\perp}$ (N^\perp — ортогональное дополнение линейной оболочки мод вырождения). Таким образом, в наших предположениях исходная задача

об оптимизации ветвей бифурцирующих решений уравнения (4.1.3) сводится к задаче нахождения экстремалей функционала (4.1.4).

Шаг 2. Оптимизацию бифурцирующих периодических экстремалей функционала V можно осуществить посредством редукции Ляпунова-Шмидта, в результате которой возникает задача о бифуркации критических точек полинома от $2n$ переменных, обладающего круговой симметрией [47] –[194]. Более подробно об этом переходе будет изложено далее.

Редукция позволяет сводить анализ бифуркации циклов к анализу бифуркации критических точек функции

$$W(\xi, a) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, a) = V \left(\sum_{i=1}^{2n} \xi_i e_i + \Phi(\xi, a), a \right), \quad (4.1.5)$$

зависящей от ключевых переменных $\xi_1, \dots, \xi_{2n} : \xi_j = \langle w, e_j \rangle$, где e_1, e_2, \dots, e_{2n} моды бифуркации, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.

Шаг 3. Вычисление критической точки $\bar{\xi}(\delta) = (\bar{\xi}_1(\delta), \bar{\xi}_2(\delta), \dots, \bar{\xi}_{2n}(\delta))$ ключевой функции (4.1.5) приводит к асимптотической формуле для ветви бифурцирующей экстремали

$$w = f(t, \delta) + o(\delta), \quad f(t, \delta) := \sum_{i=1}^{2n} \bar{\xi}_i(\delta) e_i, \quad (4.1.6)$$

где δ — приращение к критическому значению q параметра $a = q + \delta$.

Как уже было сказано, при изучении бифуркаций, связанных с проектированием и созданием некоторых технических устройств, возникает дополнительная задача оптимизации бифурцирующей ветви — подбора таких значений δ , при которых заданный критерий качества принимает максимальное (минимальное) значение. Например, в задаче отыскания многомодового закритического прогиба упругой системы возникает вопрос о минимальной величине относительного прогиба [100]–[102], а в задаче повышения эффективности зубчатой передачи ставится вопрос максимального увеличения коэффициента несимметрии силового импульса на выходе [91]. Аналогичные вопросы возникают при оптимизации антенных устройств, в некоторых задачах нелинейной оптики и других задачах современной физики [142].

Для решения многих прикладных задач часто используется ритцевская аппроксимация функционала действия (энергии) V по заранее выбранным модам e_1, e_2, \dots, e_{2n} : $W_R(\xi, a) = V\left(\sum_{i=1}^{2n} \xi_i e_i, a\right)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n})$. Критическим точкам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{2n})$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{i=1}^{2n} \bar{\xi}_i e_i$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V . Точность решения задачи обычно повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций.

Если, обобщая, рассмотреть «нелинейные» аппроксимации вида $W(\xi, a) = V\left(\sum_{j=1}^{2n} \xi_j e_j + \Phi(\xi, a), a\right)$, где Φ — гладкое отображение из $N := \text{span}(e_1, \dots, e_{2n})$ в N^\perp (ортогональное дополнение к N в гильбертовом пространстве H), то можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы [47].

Обоснованием последнего тезиса служит ключевая функция (4.1.5). Топологические и аналитические понятия, характеризующие тип стационарной точки функционала (4.1.4) (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.д. [6]) можно вводить через ключевую функцию и ее нормальную форму [47]. Итогом построения нормальной формы ключевой функции является возможность полного и детального описания качественной картины поведения ветвей бифурцирующих критических точек и, в частности, отыскание их точного количества и их асимптотик (по критическим приращениям параметров).

В приложениях для достижения полной точности качественного анализа часто достаточно вычисления лишь нескольких первых членов разложения W в ряд Тейлора.

Рассмотрим типовой пример использования схемы локальной редукции к функции (4.1.5). Как предполагалось выше, будем рассматривать 2π -периодические экстремали.

Пусть $g(x, a)$ — левая часть уравнения (4.1.3), рассмотренная как отображение банаховых пространств $E \rightarrow F$, $E := \Pi_{2\pi}^{2n}$, $F := \Pi_{2\pi}^0$ — пространства 2π -периодических функций классов C^{2n} и, соответственно, C^0 . Пусть $H := L_2[0, 2\pi]$ — (гильбертово) пространство функций на отрезке $[0, 2\pi]$ с суммируемым квадратом (со скалярным произведением $\langle u, v \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} uv dt$). Очевидно, что E непрерывно вложено в F , F непрерывно и плотно вложено в H и E плотно в H (плотность перечисленных вложений пространств необходима для того, чтобы правильно заработала вариационная схема Ляпунова-Шмидта [47]).

В общем случае n пар мод и локализации параметров $a_k = \bar{a}_k + \delta_k$, $k = 1, 2, \dots$, где $\bar{a}_1 = p_1^2 p_2^2 \dots p_n^2$, $\bar{a}_2 = p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2 + \dots + p_{2n-1}^2 p_{2n}^2$, \dots , $\bar{a}_n = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2$, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ — малые параметры, пересечение движущейся точкой $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ характеристической плоскости (в пространстве параметров \mathbb{R}^n) приводит к смене значения индекса Морса в нулевой критической точке.

Характеристические плоскости задаются уравнением

$$\frac{d^{2n}h}{dt^{2n}} + \dots + a_2 \frac{d^2h}{dt^2} + a_1 h = 0 \quad (4.1.7)$$

и состоят из тех и только тех точек $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, для которых уравнение (4.1.7) имеет ненулевое 2π -периодическое решение. Поиск таких случаев приводит к характеристическому уравнению

$$(-1)^n \lambda^{2n} + (-1)^{n-1} a_n \lambda^{2(n-1)} + \dots - a_2 \lambda^2 + a_1 = 0. \quad (4.1.8)$$

При пересечении движущейся точкой $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ характеристической поверхности происходит бифуркация рождения (уничтожения) экстремалей в нуле.

Для иллюстрации рассмотрим один важный для приложений случай.

Пример. Пусть $n = 3$ и $\mathcal{U}\left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}, \frac{d^3w}{dt^3}\right) = \frac{w^4}{4}$, $m = 1$, $n = 2$, $l = 3$.

После подстановки функции $u = \sum_{k=1}^6 \xi_k e_k$ в интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^3w}{dt^3} \right)^2 - a_3 \left(\frac{d^2w}{dt^2} \right)^2 + a_2 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 - a_1 w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dt$$

получим, с точностью до постоянного множителя, следующее выражение для квартичной части ключевой функции:

$$\begin{aligned}\widetilde{W}^{(4)} &= (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + (\xi_3^2 + \xi_4^2)^2 + (\xi_5^2 + \xi_6^2)^2 + \frac{4}{3}(\xi_1^3\xi_5 + \xi_2^3\xi_6) + \\ &+ 4(\xi_1^2\xi_4^2 + \xi_1^2\xi_5^2 + \xi_1^2\xi_6^2 + \xi_2^2\xi_3^2 + \xi_2^2\xi_4^2 + \xi_2^2\xi_5^2 + \xi_2^2\xi_6^2 + \xi_3^2\xi_5^2 + \xi_3^2\xi_6^2 + \xi_4^2\xi_5^2 + \xi_4^2\xi_6^2) + \\ &+ 4(-\xi_1\xi_2^2\xi_5 + \xi_1^2\xi_2\xi_6 - \xi_3^2\xi_5\xi_1 - \xi_2\xi_3^2\xi_6 + \xi_1\xi_4^2\xi_5 + \xi_2\xi_4^2\xi_6) + 8(\xi_1\xi_3\xi_4\xi_6 + \xi_2\xi_3\xi_4\xi_5).\end{aligned}$$

Соответственно, для ключевой функции (4.1.5) имеет место асимптотическое представление

$$W = \widetilde{W}^{(4)} + \frac{1}{2}(\lambda_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \lambda_2(\xi_3^2 + \xi_4^2) + \lambda_3(\xi_5^2 + \xi_6^2)) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где $\lambda_1 = c(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3)$, $\lambda_2 = c(\delta_1 - 16\delta_2 + 4\delta_3)$, $\lambda_3 = c(\delta_1 - 81\delta_2 + 9\delta_3)$, $c = \text{const}$. Проверка основана на прямом вычислении главной части ключевой функции (вычисление многочлена $\widetilde{W}^{(4)}$ проведено в среде Maple). Обоснование последнего утверждения почти дословно повторяет рассуждения, приведенные в [64] в доказательстве теоремы о нормальной форме для уравнения (4.1.3) при краевых условиях Дирихле. Если в трех плоскостях $\{\xi_1, \xi_2\}$, $\{\xi_3, \xi_4\}$, и $\{\xi_5, \xi_6\}$ ввести полярные координаты: $\xi_{2k-1} = r_k \cos(\varphi_k)$, $\xi_{2k} = r_k \sin(\varphi_k)$, $k = 1, 2, 3$, и провести редукцию по угловым переменным φ_k : $\widehat{W}(r) := \underset{\varphi}{\text{extr}} W(\xi)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, то получим редуцированную ключевую функцию: $\widehat{W}(r) = \sum_{j=1}^3 r_j^4 + 4(r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2) - \frac{4}{3} r_1^3 r_3 + 4 r_1 r_2^2 r_3 + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j r_j^2 \right) + o(|r|^4) + O(|r|^4)O(\delta)$.

В итоге, бифурсирующие решения можно записать в виде $\sum_{k=1}^3 f_k(\delta) \cos(\pi k + \omega_k) + o(\delta)$.

4.1.2 Двухмодовая ключевая функция в случае простого резонанса

Случай резонанса 1:2

Подробная информация о двухмодовых бифуркациях в случае круговой симметрии имеется в [69].

Пусть задан гомоморфизм (не гладкий) $T : G \longrightarrow O(H)$ группы $G = SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований гильбертова пространства H , определяемый ортогональным действием (вообще говоря, не непрерывным) $G \times H \longrightarrow H$, $(g, w) \longmapsto y = T_g(w) \quad \forall (g, w) \in G \times H$, где $g = \exp(i\tau)$, $T_g(w)(t) := w(t + \tau)$ ($\exp(i\tau)$ — комплексная форма двумерной ортогональной матрицы положительной ориентации). Будем предполагать, что пространства E , F и функционал V инвариантны относительно данного действия: $T_g(E) \subset E$, $T_g(F) \subset F$, $V(T_g(\cdot)) = V(\cdot)$, наряду с эквивариантностью редуцирующей субмерсии $\mathbf{p} : x \longmapsto \xi$, $x \in E$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, $\xi_j = \langle x, e_j \rangle$. Действие окружности в \mathbb{R}^4 состоит из вращений в координатных плоскостях переменных ξ_1, ξ_2 и ξ_3, ξ_4 (см. ниже (4.1.9)). Ключевая функция W , заданная формулой (4.1.5), также будет инвариантной (см. [194]).

Важное условие, используемое в работе, состоит в требовании гладкости действия группы $SO(2)$ в пространстве ключевых параметров. В рассмотренной модельной задаче последнее выполняется автоматически, так как индуцированное действие $SO(2)$ на любом конечномерном инвариантном подпространстве $N \subset H$ в рассмотренной задаче является гладким. Индуцированное действие $SO(2)$ на пространстве ключевых параметров \mathbb{R}^4 является полу-свободным (начало координат — единственная неподвижная точка). Если при этом отождествить вектор $\xi \in \mathbb{R}^4$ с комплексным вектором $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $z_k = \xi_{2k-1} + i\xi_{2k}$, то условие инвариантности W можно записать в виде соотношения $W(\tilde{z}) = W(z)$, $\tilde{z} = (\exp(i p_1\varphi)z_1, \exp(i p_2\varphi)z_2)$, $p_k \in \mathbb{Z}$, т.е. имеем инвариантность относительно действия

$$\{\exp(i\varphi), z\} \longmapsto (\exp(i p_1\varphi)z_1, \exp(i p_2\varphi)z_2) \tag{4.1.9}$$

группы $SO(2)$.

Множество ненулевых критических точек ключевой функции W и их образов относительно редуцирующего отображения $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$, $\varphi(\xi) = \sum_{j=1}^4 \xi_j e_j + \Phi(\xi)$, представляет собой набор одномерных подмногообразий (критических орбит действия (4.1.9)), диффеоморфных окружности.

Теорема 4.1 (см. [47]) В случае 4-мерного вырождения с резонансом 1 : 2 ключевая функция W допускает представление в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2) + \frac{1}{3}(C_3 I_3 + C_4 I_4) + \frac{1}{4}(A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + 2BI_1 I_2) + \\ + o(\|\xi\|^4) + O(\delta)O(\|\xi\|^4), \end{aligned}$$

где $I_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $I_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2$, $I_3 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_4$, $I_4 = 2\xi_1\xi_2\xi_3 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_4$ — полная система образующих инвариантов действия (4.1.9) группы $SO(2)$ на \mathbb{R}^4 , A_1, A_2, B, C_1, C_2 — константы, α_1, α_2 — зависящие от δ малые параметры.

Доказательство основано на асимптотическом представлении $W = U(\xi) + o(I_1^2, I_2^2, I_3^2, I_3 I_4)$, где $U(\xi) = V \left(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \sum_{j:|j|=2}^3 a_j \xi^j \right)$ — нелинейная ритцевская аппроксимация V по модам бифуркации e_1, e_2, e_3, e_4 , $a_j = a_j(\delta)$ — вычисляемые элементы пространства E , $\langle a_j, e_k \rangle = 0 \quad \forall j, k$.

После масштабирования и деления W на подходящий множитель получим функцию $\widetilde{W} = \widetilde{U}(\xi) + o(\|\xi\|^4)$, где $\widetilde{U}(\xi) = -\frac{1}{2}(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) + \frac{1}{3}(C_1 I_3 + C_4 I_4) + \frac{1}{4}(I_1^2 + I_2^2 + 2a I_1 I_2)$. В результате получаем следующее утверждение (см. [47], [69]).

Теорема 4.2 В случае 4-мерного вырождения с резонансом 1 : 2 ключевая функция W допускает в полярных координатах $\xi_1 = r_1 \cos(\varphi_1)$, $\xi_2 = r_1 \sin(\varphi_1)$, $\xi_3 = r_2 \cos(\varphi_2)$, $\xi_4 = r_2 \sin(\varphi_2)$, представление (после масштабирования и деления на нормирующую константу) в виде $\widetilde{W} = -\frac{1}{2}(\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2) + cr_1^2 r_2 \cos(\psi) + \frac{1}{4}(r_1^4 + r_2^4 + 2ar_1^2 r_2^2) + \vartheta(r_1^2, r_2^2) + r_1^2 r_2 \varrho(r_1^2, r_2, \psi)$, $a > -1$, где $a = a(\delta)$, $c = c(\delta)$ — вычисляемые константы, $\psi = \varphi_2 - 2\varphi_1 + const$, ϑ, ϱ — некоторые гладкие функции, соответственно, двух и трех переменных, для которых $\vartheta(r_1^2, r_2^2) = O(|\xi|^6)$, $\varrho(r_1^2, r_2, \psi) = O(|\xi|^2)$.

Условие стационарности орбиты по фазе $\psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ приводит к следующим критическим значениям фазы: $\psi = 0 + O(|\xi|^2)$, $\pi + O(|\xi|^2)$. Дальнейшее изучение

условий стационарности по амплитудам r_1, r_2 приводит к задаче о бифуркации критических точек из критической точки с омбилической особенностью параболического типа [161]. В этом случае локальной нормальной формой ключевой функции (при нулевых значениях возмущающих параметров) является полином $\widetilde{W}_0 = r_2^4 \pm r_1^2 r_2$ (известный как полином с омбилической особенностью параболического типа [6], [161]).

Ниже будет доказана теорема 4.3, из которой вытекает, что оптимальным по коэффициенту несимметрии является ветвь, представимая в виде

$$\xi_1(\delta) \cos(x) + \xi_2(\delta) \cos(2x) + o(|\xi(\delta)|)$$

при условии $\xi_2(\delta) = 2\xi_1(\delta)$.

4.1.3 Трехмодовые ключевые функции

На форму главной части ключевой функции в случае, рассмотренном в примере, основное влияние оказалось условие четности функционала. Если данная симметрия отсутствует, то главная часть ключевой функции в условиях резонанса 1:2:3 выглядит несколько иначе (см. [50]). В общем случае ключевая функция имеет следующий вид $\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \delta_k I_k \right) + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^3 A_k I_k^2 + 2 \sum_{k,j=1}^3 B_{k,j} I_k^2 I_j^2 \right) + J + o(\|\xi\|^4)$, где $I_k = \xi_{2k-1}^2 + \xi_{2k}^2$ — стандартные инварианты, а J — линейная комбинация всех дополнительных (кроме стандартных I_k) образующих инвариантов степени ≤ 4 — для рассматриваемого действия окружности на $\mathbb{R}^6 \cong \mathbb{C}^3$

$$\{\exp(i\varphi), z\} \longmapsto (\exp(i p_1 \varphi) z_1, \exp(i p_2 \varphi) z_2, \exp(i p_3 \varphi) z_3)^\top. \quad (4.1.10)$$

Для резонанса 1:2:3 ключевая функция (огрубленная) \mathcal{W} приводится к форме $\sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + b r_1^2 r_2 r_3 + \varepsilon_1 r_1 r_2 r_3 + \varepsilon_2 r_1^2 r_2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2$.

Подробный анализ нормальных форм ключевых функций, отвечающих двукратным резонансам, имеется в [50].

Оптимальной по коэффициенту несимметрии является ветвь, представимая в виде

$$\xi_1(\delta) \cos(x) + \xi_2(\delta) \cos(2x) + \xi_3(\delta) \cos(3x) + o(|\xi(\delta)|)$$

при условии $\xi_2(\delta) = 2\xi_1(\delta), \xi_3(\delta) = 3\xi_1(\delta)$. Данное утверждение основано на теореме доказанной в следующем параграфе.

4.2 Коэффициент несимметрии полигармонического импульса

В теории и практике создания некоторых технических устройств имеется необходимость отыскания решений, связанных с оптимизацией тригонометрических полиномов. Например, в задаче отыскания многомодового закритического прогиба упругой системы [47] с минимальной величиной относительного прогиба и в задаче повышения эффективности зубчатой передачи с целью увеличения коэффициента несимметрии силового импульса на выходе [55]. Аналогичные оптимизационные задачи имеются в теории антенных устройств, в теории оптимальных измерений динамически искаженных сигналов [196], в нелинейной оптике и других задачах современной физики [8], [34], [139], [161], [198].

Математической модель направляющего импульса [114], [161] может быть представлена в виде тригонометрического полинома

$$f_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \cos(kt), \quad t \in [0, \pi], \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (4.2.11)$$

Определение 4.6 *Функционал*

$$K_n(\lambda) = \frac{\max_t f_n(t, \lambda)}{|\min_t f_n(t, \lambda)|}, \quad (4.2.12)$$

называется *коэффициентом несимметрии* [91].

В ряде прикладных задач решается проблема создания эффективного импульса, путем максимизации функционала $K_n(\lambda)$ по вариациям λ

$$K_n(\lambda) \rightarrow \sup_{\lambda} \quad (4.2.13)$$

при условиях

$$\int_0^\pi f_n(t, \lambda) dt = 0, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = c > 0. \quad (4.2.14)$$

Определение 4.7 Многочлен $f_n(t, \bar{\lambda})$, решающий задачу (4.2.11) – (4.2.14), называется оптимальным [91].

Основным результатом настоящей главы является следующая теорема.

4.3 Теорема об оптимальном многочлене. Импульс Максвелла-Фейера

Теорема 4.3 Многочлен (4.2.11) является оптимальным тогда и только тогда, когда он с точностью до постоянного множителя имеет вид суммы Фейера [129]

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n (n+1-k) \cos(kt). \quad (4.3.15)$$

При этом имеет место равенство

$$\max_{\lambda} K_n(\lambda) = n.$$

Доказательство этой теоремы проводится поэтапно.

Переход к алгебраическому многочлену

Делая в (4.2.11) замену $x = \cos(t)$ и используя ортогональные многочлены Чебышёва 1-го рода $T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$, перейдём к алгебраическому полиному

$$V(x, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu_k x^k, \quad x \in [-1, 1], \quad \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n). \quad (4.3.16)$$

В случае $n = 2m + 1$ имеем

$$\begin{aligned} \cos(t) &= x, \\ \cos(2t) &= 2x^2 - 1, \\ \cos(3t) &= 4x^3 - 3x, \\ &\dots, \\ \cos(nt) &= \sum_{q=0, \dots, m} \varkappa_{n,q} x^{2q+1}, \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

где

$$\varkappa_{n,q} = (-1)^{m+q} \sum_{k,r; k-r=m-q} C_{2k}^{2m+1} C_r^k, \quad (4.3.18)$$

$C_l^p = \frac{p!}{l!(p-l)!}$ — биномиальный коэффициент.

Формула (4.3.18) для коэффициентов $\varkappa_{n,q}$ легко выводится из широко известного разложения $\cos(nt) = \operatorname{Re} (\cos(t) + i \sin t)^n$.

При $n = 2m$ последняя строка в (4.3.17) имеет следующий вид $\cos(nt) = \sum_{q=0, \dots, m} \varkappa_{n,q} x^{2q}$, где $\varkappa_{n,q}$ определяется аналогичным образом:

$$\varkappa_{n,q} = (-1)^{m+q} \sum_{k,r; k-r=m-q} C_{2k}^{2m} C_r^k. \quad (4.3.19)$$

На основе (4.3.17) можно получить взаимно однозначное соотношения между коэффициентами тригонометрического полинома λ_k и соответствующего ему коэффициентами алгебраического полинома μ_k . Из условия $\sum_{k=1}^n \lambda_k = c$ следует

$$V(1, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu_k = c.$$

Структура оптимального многочлена

Пусть $n = 2m + 1$ и для экстремальных точек многочлена $V(x, \mu)$ выполняются соотношения

$$-1 < b_1 < a_1 < b_2 < \dots < b_m < a_m < 1,$$

$$\frac{dV(b_k, \mu)}{dx} = \frac{dV(a_k, \mu)}{dx} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

При этом $\{b_k\}$ — точки локальных максимумов, $\{a_k\}$ — точки локальных минимумов.

Если $\mu = \bar{\mu}$ — решение задачи (4.2.11)–(4.2.14), то для него с необходимостью выполняется условие Максвелла [8], [161]:

$$V(-1, \bar{\mu}) = V(a_1, \bar{\mu}) = V(a_2, \bar{\mu}) = \dots = V(a_m, \bar{\mu}) = \mathcal{M}. \quad (4.3.20)$$

Определение 4.8 Многочлен степени n , для которого выполняется (4.3.20) называется \mathcal{M} -многочленом. Константа \mathcal{M} в выражении (4.3.20) называется константой Максвелла [91].

Множество всех \mathcal{M} -многочленов называется *минимальным стратом Максвелла* в пространстве многочленов степени не выше n .

Теперь рассмотрим вспомогательный многочлен

$$\mathcal{N}(x, \bar{\nu}) = (x + 1) \prod_{k=1}^m (x + a_k)^2 = \sum_{k=0}^{2m+1} \bar{\nu}_k x^k.$$

Очевидно, что он удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(-a_1, \bar{\mu}) &= \mathcal{N}(-a_2, \bar{\mu}) = \dots = \mathcal{N}(-a_m, \bar{\mu}) = \mathcal{N}(-1, \bar{\mu}) = \\ &= \mathcal{N}'_x(-a_1, \bar{\mu}) = \mathcal{N}'_x(-a_2, \bar{\mu}) = \dots = \mathcal{N}'_x(-a_m, \bar{\mu}) = 0 \end{aligned}$$

и совпадает с точностью до постоянного множителя с многочленом V . Следовательно, справедливо следующее утверждение о структуре оптимального многочлена.

Теорема 4.4 Каждый оптимальный многочлен $V(x, \bar{\mu})$ является \mathcal{M} -многочленом и представим в виде

$$V(x, \bar{\mu}) = \mathcal{C} \left[(x + 1) \prod_{k=1}^m (x + a_k)^2 - \mathcal{D} \right],$$

где константы \mathcal{C} и \mathcal{D} определяются условиями

$$V(1, \bar{\mu}) = c, \quad \int_{-1}^1 \frac{V(x, \bar{\mu}) dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0.$$

Отсюда

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(a) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(x + 1) \prod_{k=1}^m (x + a_k)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dt, \quad \mathcal{C} = \frac{c}{2 \prod_{k=1}^m (1 + a_k)^2 - \mathcal{D}}. \quad (4.3.21)$$

Некоторые свойства многочлена \mathbf{V}

Так как $V_{max} = c$, $V_{min} = \mathcal{M} = \mathcal{CD}$, то нахождение экстремумов для коэффициента несимметрии

$$K = \frac{V_{max}}{|V_{min}|} = \frac{2 \prod_{k=1}^m (1 + a_k)^2 - \mathcal{D}(a)}{\mathcal{D}(a)}$$

сводится к нахождению экстремумов функции

$$\mathcal{W}(a) = \frac{1}{\mathcal{D}(a)} \prod_{k=1}^m (1 + a_k)^2. \quad (4.3.22)$$

Запишем произведение из (4.3.22) в виде:

$$\prod_{k=1}^m (1 + a_k)^2 = \left(\sum_{k=0}^m \sigma_{m-k} x^k \right)^2 = \sum_{k=0}^m \sigma_{m-k}^2 x^{2k} + 2 \sum_{0 \leq p < q \leq m} \sigma_p \sigma_q x^{2m-p-q},$$

где $\{\sigma_k\}$ – элементарные симметрические многочлены от a

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = \sum_{j=1}^m a_j, \quad \sigma_2 = \sum_{j_1 < j_2} a_{j_1} a_{j_2}, \quad \sigma_m = \prod_{j=1}^m a_j.$$

Тогда из (4.3.21) получаем

$$\mathcal{D}(a) = \mathcal{Q}(\sigma) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \sigma_{m-k}^2 + 2 \sum_{p,r} \alpha_{m-p-r} \sigma_p \sigma_{p+2r},$$

здесь $0 \leq p \leq m$, $1 \leq r \leq \frac{m-p}{2}$, $\alpha_k = 2 \int_0^1 \frac{x^{2k} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n! \pi}{4^k (k!)^2}$.

Таким образом, имеем следующее представление

$$\mathcal{W}(\sigma) = \frac{\mathcal{P}^2(\sigma)}{\mathcal{Q}(\sigma)}, \quad \mathcal{P}(\sigma) = \sum_{k=0}^m \sigma_{m-k} x^k.$$

Отсюда для экстремальных точек получаем соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \sigma_k} = \left(2\mathcal{P}\mathcal{Q} - \mathcal{P}^2 \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k} \right) / \mathcal{Q}^2(\sigma) = 0.$$

Что даёт систему уравнений

$$2\mathcal{Q} = \mathcal{P} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

После последовательного вычитания уравнений этой системы и отбрасывания множителя \mathcal{P} , получаем равенства

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k} = \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_1}, k = 2, 3, \dots, m. \quad (4.3.23)$$

При отыскании решения системы (4.3.23) полезны следующие формулы

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k} = 2 \left(\sum_{j=[(k+1)/2]}^{[(k+m)/2]} \alpha_{m-j} \sigma_{2j-k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Из формул (4.3.23) следует, что многочлен \mathcal{Q} , а вместе с ним и многочлен V , являются максвелловскими в случае $n = 2m + 1$.

Случай $n = 2m$

Тригонометрическая форма функции \mathcal{W} даёт соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{\mathcal{N}^2(0)}{\mathcal{D}}, \quad \mathcal{N}(0) = \prod_{k=1}^m (1 - \cos(t_k)), \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{N}^2(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t_k} = -\frac{2 \sin(t_k) \mathcal{N}^2(0)}{\pi (1 - \cos(t_k))} \int_0^\pi \frac{\cos(t) - 1}{\cos(t) - \cos(t_k)} \mathcal{N}^2(t) dt.$$

И, следовательно, для искомой оптимальной точки получаем систему уравнений

$$\int_0^\pi \frac{\cos(t) - 1}{\cos(t) - \cos(t_k)} \mathcal{N}^2(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4.3.24)$$

Заметим, что левые части системы (4.3.24) являются градиентом функции

$$U(\bar{\mu}) = \int_0^\pi (\cos(t) - 1) \mathcal{N}^2(t, \bar{\mu}) dt. \quad (4.3.25)$$

И, таким образом, набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным в том и только том случае, когда он задаёт в R^m критическую точку функции (4.3.25).

Это утверждение можно переформулировать в виде: набор $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда выполняется соотношение ортогональности

$$\int_0^\pi (\cos(kt) - 1)\mathcal{N}(t, \bar{\mu}) dt = 0, k = 1, 2, \dots, m.$$

Отсюда, непосредственной проверкой, показывается, что с точностью до постоянного множителя, таким многочленом является

$$\mathcal{N}(t, \bar{\mu}) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos(kt).$$

Наконец, пользуясь соотношением

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos(kt)\right)^2 = \sum_{k=1}^{2m} (2m+1-k) \cos(kt), \quad (4.3.26)$$

получаем справедливость (4.2.14) и доказательство теоремы 4.3 при $n = 2m$.

Случай $n = 2m + 1$

Доказательство теоремы 4.3 в этом случае проводится аналогично, с учётом того, что здесь набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным для многочлена \mathcal{W} тогда и только тогда, когда он совпадает с компонентами градиента функции

$$U(\mu) = \int_0^\pi (\cos^2(t) - 1)\mathcal{N}^2(t, \mu) dt.$$

Вычисление оптимального многочлена также сводится к вычислению многочлена, ортогонального к наборам элементарных многочленов. В итоге получаем, что в случае $n = 2m + 1$ многочлен является ортогональным тогда и только тогда, когда он с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$\mathcal{N}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^p \cos(2kt), & m = 2p; \\ \sum_{k=0}^p \cos((2k+1)t), & m = 2p+1. \end{cases}$$

Отсюда, пользуясь (4.3.26), получаем представление

$$f_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} (2m+1-k) \cos(kt),$$

из которого следует окончательное доказательство теоремы 4.3.

4.4 Пример практической реализации вибропогружателя при $n=7$

Наибольший интерес для практики представляют случаи $n \leq 7$. Так на практике есть конструкции вибропогружателей, работа которых основана на полигармонические силовые импульсы (универсальное вдавливающее устройство по патенту РФ 2388868 (МПК E02D7/00, опубл. 10.05.2010), способ направленного инерционного вибровозбуждения по патенту РФ 2528715 (МПК E02D7/18, B06B1/16, опубл. 20.09.2014)). Математическая модель силовых импульсов в этих работах имеет $n = 7$ и $n = 5$ соответственно. Заметим, что оптимальная в смысле коэффициента несимметрии конструкция в этих работах не была предложена. Поэтому рассмотрим случай $n = 7$ для получения оптимального импульса.

Итак, рассмотрим полином

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=1}^7 \lambda_k \cos(kt), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_7). \quad (4.4.27)$$

Достижение коэффициентом несимметрии максимального значения обеспечивается решением следующей задачи математического программирования:

$$\inf_t f(t, \lambda) \longrightarrow \sup_\lambda, \quad t \in [0, \pi], \quad \sum_{k=1}^7 \lambda_k = c. \quad (4.4.28)$$

Решение этой задачи проведем, перейдя к алгебраическому полиному

$$V(x, \mu) = \sum_{k=0}^7 \mu_k x^k, \quad x \in [-1, 1], \quad \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_7),$$

который получен из (4.4.27) заменой косинусов соответствующими многочленами Чебышева первого рода

$$\left. \begin{aligned} \cos(t) &= x, \\ \cos(2t) &= 2x^2 - 1, \\ \cos(3t) &= 4x^3 - 3x, \\ \cos(4t) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ \cos(5t) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ \cos(6t) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\ \cos(7t) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.29)$$

Из (4.4.29) получаем соотношения между коэффициентами тригонометрического полинома и соответствующего ему алгебраического полинома:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= -\lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_6, \\ \mu_1 &= \lambda_1 - 3\lambda_3 + 5\lambda_5 - 7\lambda_7, \\ \mu_2 &= 2\lambda_2 - 8\lambda_4 + 18\lambda_6, \\ \mu_3 &= 4\lambda_3 - 20\lambda_5 + 56\lambda_7, \\ \mu_4 &= 8\lambda_4 - 48\lambda_6, \\ \mu_5 &= 16\lambda_5 - 112\lambda_7, \\ \mu_6 &= 32\lambda_6, \\ \mu_7 &= 64\lambda_7 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 + \frac{3}{4}\mu_3 + \frac{5}{8}\mu_5 + \frac{35}{64}\mu_7, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_4 + \frac{15}{32}\mu_6, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{4}\mu_3 + \frac{5}{16}\mu_5 + \frac{21}{64}\mu_7, \\ \lambda_4 &= \frac{1}{8}\mu_4 + \frac{3}{16}\mu_6, \\ \lambda_5 &= \frac{1}{16}\mu_5 + \frac{7}{64}\mu_7, \\ \lambda_6 &= \frac{1}{32}\mu_6, \\ \lambda_7 &= \frac{1}{64}\mu_7. \end{aligned} \right\}$$

Из условия $\sum_{k=1}^7 \lambda_k = c$ следует $V(1, \mu) = \sum_{k=0}^7 \mu_k = c$.

Пусть $-1 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < 1$ — критические (экстремальные) точки функции $V(x, \bar{\mu})$:

$$\frac{dV(x_k, \bar{\mu})}{dx} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

При этом $x_1, x_3, x_5, 1$ — точки локальных максимумов, а $-1, x_2, x_4, x_6$ — точки локальных минимумов. Если $\mu = \bar{\mu}$ — решение задачи (4.4.28), то для $V(x, \bar{\mu})$ выполняется условие Максвелла [6], [23]:

$$V(-1, \bar{\mu}) = V(x_2, \bar{\mu}) = V(x_4, \bar{\mu}) = V(x_6, \bar{\mu}). \quad (4.4.30)$$

Построение оптимального полинома

Многочлен степени 7, для которого выполнено условие (4.4.30), является \mathcal{M} -многочленом. Дальнейшая наша цель — максимизация константы Максвелла \mathcal{M} (общего значения в (4.4.30)).

Многочлен V отличается от \mathcal{N} постоянным слагаемым (с точностью до общего постоянного множителя). Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.5 *Каждый «экстремальный» (реализующий максимум коэффициента несимметрии) многочлен $V(x, \bar{\mu})$ является \mathcal{M} -многочленом и для него имеет место следующее представление:*

$$V(x, \bar{\mu}) = \mathcal{C} \left((x+1)(x-x_2)^2(x-x_4)^2(x-x_6)^2 + \mathcal{D} \right).$$

Константы \mathcal{C}, \mathcal{D} при этом определяются следующими двумя условиями

$$V(1, \bar{\mu}) = c, \quad \int_{-1}^1 \frac{V(x, \bar{\mu})}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.$$

Из первого равенства получаем

$$\mathcal{C} \left(2(1-x_2)^2(1-x_4)^2(1-x_6)^2 + \mathcal{D} \right) = c$$

или

$$\mathcal{C} = \frac{c}{(2(1-x_2)^2(1-x_4)^2(1-x_6)^2 + \mathcal{D})}.$$

Второе равенство, являющееся следствием аналогичного равенства для исходного тригонометрического многочлена, приводит к соотношению

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(x_2, x_4, x_6) = - \int_{-1}^1 \frac{(x+1)(x-x_2)^2(x-x_6)^2}{2\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Так как $V_{max} = c$, $V_{min} = \mathcal{M} := \mathcal{C}\mathcal{D}$, то отыскание экстремумов для коэффициента несимметрии

$$k := \frac{V_{max}}{|V_{min}|} = \frac{2(1-x_2)^2(1-x_4)^2(1-x_6)^2 + \mathcal{D}(x_2, x_4, x_6)}{|\mathcal{D}(x_2, x_4, x_6)|}$$

сводится к отысканию экстремумов функции

$$\mathcal{W} := \frac{(1-x_2)^2(1-x_4)^2(1-x_6)^2}{\mathcal{D}(x_2, x_4, x_6)}.$$

Следуя намеченным выше действиям, рассмотрим многочлен

$$\mathcal{N}(x, \bar{\nu}) = (x+1)(x-x_2)^2(x-x_4)^2(x-x_6)^2 + \mathcal{D} = \sum_{k=0}^7 \bar{\nu}_k x^k. \quad (4.4.31)$$

Учитывая, что

$$(x-x_2)^2(x-x_4)^2(x-x_6)^2 = (-\sigma_3 + \sigma_2 x - \sigma_1 x^2 + x^3)^2 = \\ = \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3 x + (\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3)x^2 - 2(\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2)x^3 + (\sigma_1^2 + 2\sigma_2)x^4 - 2\sigma_1 x^5 + x^6,$$

где

$$\sigma_1 = x_2 + x_4 + x_6, \quad \sigma_2 = x_2 x_4 + x_2 x_6 + x_4 x_6, \quad \sigma_3 = x_2 x_4 x_6$$

(элементарные симметричные многочлены), получаем для коэффициентов многочлена (4.4.31) следующие выражения (через $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^\top$):

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_0 &= \sigma_3^2 + \mathcal{D}, & \bar{\nu}_1 &= -2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2, & \bar{\nu}_2 &= 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_2^2, \\ \bar{\nu}_3 &= \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_3, & \bar{\nu}_4 &= 2\sigma_2 - 2\sigma_3 + \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2, \\ \bar{\nu}_5 &= -2\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_1^2, & \bar{\nu}_6 &= 1 - 2\sigma_1, & \bar{\nu}_7 &= 1. \end{aligned}$$

Несложные преобразования приводят к представлению $\mathcal{W} = \frac{P^2(\sigma)}{Q(\sigma)}$,

$$P(\sigma) = 1 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3, \quad Q(\sigma) = 3/8\sigma_1^2 + 1/2\sigma_2^2 + \sigma_3^2 -$$

$$-3/4\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 - 5/8\sigma_1 + 3/4\sigma_2 - 3/4\sigma_3 + 5/16.$$

Экстремальные значения коэффициентов многочлена \mathcal{N} определяются уравнениями

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \sigma_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

На рисунке 4.1 изображен график оптимального импульса в случае $c = 1$ и соответствующего этому случаю (единственного) экстремального набора значений коэффициентов \mathcal{M} -многочлена

$$\lambda = \frac{1}{4} \cdot \left(1, \frac{6}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7} \right)^T.$$

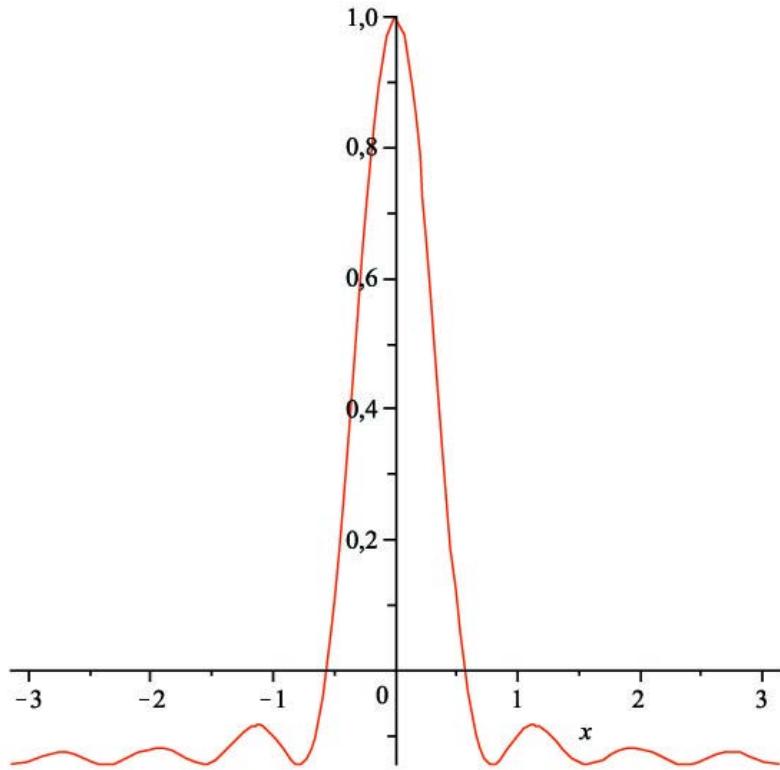


Рисунок 4.1

Минимальное значение \mathcal{M} функции импульса при $c = 1$ равно

$$(2(\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6) - 1) = \left(\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \right) - 1 \right) = -\frac{1}{7}.$$

Следовательно, коэффициент несимметрии равен 7.

4.5 Симметрия множества точек минимума оптимального многочлена

4.5.1 Случай $n = 2m$

Перейдем к тригонометрической форме функции \mathcal{W} :

$$\mathcal{W} = \frac{\mathcal{N}^2(0)}{\mathcal{D}}, \quad \mathcal{N}(t) := \prod_{k=1}^m (\cos(t) - \cos(t_k)), \quad \mathcal{D} := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{N}^2(t) dt. \quad (4.5.32)$$

Для производной $\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t_k}$ имеем выражение

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t_k} = \frac{(\sin(t_k) \left(\frac{2\mathcal{N}^2(0)}{(1-\cos(t_k))} \mathcal{D} - \mathcal{N}^2(0) \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t_k} \right))}{\mathcal{D}^2}.$$

Так как для числителя этого выражения имеем представление

$$\begin{aligned} & \frac{2 \sin(t_k) \mathcal{N}^2(0)}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{1 - \cos(t_k)} - \frac{1}{\cos(t) - \cos(t_k)} \right) \mathcal{N}^2(t) dt = \\ & = \frac{2 \sin(t_k) \mathcal{N}^2(0)}{\pi(1 - \cos(t_k))} \int_0^\pi \frac{(\cos(t) - 1)}{(\cos(t) - \cos(t_k))} \mathcal{N}^2(t) dt, \end{aligned}$$

то в оптимальной точке получаем следующую систему равенств:

$$\int_0^\pi \frac{(\cos(t) - 1)}{(\cos(t) - \cos(t_k))} \mathcal{N}^2(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.5.33)$$

Левые части этой системы (4.5.33) являются компонентами градиента функции

$$\mathcal{U} := \int_0^\pi (\cos(t) - 1) \mathcal{N}^2(t) dt. \quad (4.5.34)$$

(после отбрасывания постоянных множителей). Таким образом, имеем следующие утверждение.

Теорема 4.6 *Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда он задает в \mathbb{R}^m критическую точку функции (4.5.34).*

Отыскание критических точек функции (4.5.34) удобно проводить на основе следующих утверждений, вытекающих из теоремы 4.6.

Теорема 4.7 *Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:*

$$\int_0^\pi (\cos^k(t) - 1)\mathcal{N}(t)dt = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.5.35)$$

Последняя теорема допускает переформулировку (вследствие соотношений (4.3.17)).

Теорема 4.8 *Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:*

$$\int_0^\pi (\cos(kt) - 1)\mathcal{N}(t)dt = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.5.36)$$

Замечание 4.1 Эта теорема дает критерий оптимальности, полезный для практических применений: набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда многочлен $\mathcal{N}(t)$ ортогонален на отрезке $[0, \pi]$ многочленам $\cos(kt) - 1$, $k = 1, \dots, m$.

Прямое вычисление ортогонального многочлена приводит к следующему утверждению.

Теорема 4.9 *Оптимальный многочлен $\mathcal{N}(t)$ имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:*

$$\frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \cos(3t) + \cdots + \cos(mt). \quad (4.5.37)$$

Лемма 4.1 *Имеет место следующее соотношение:*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \cdots + \cos(mt)\right)^2 = \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{2m+1}{2} + 2m \cos(t) + (2m-1) \cos(2t) + (2m-2) \cos(3t) + \cdots + \cos(2mt)\right). \end{aligned}$$

Из этой леммы вытекает утверждение, дающее ответ на вопрос о форме оптимального импульса.

Теорема 4.10 Многочлен (4.2.11) является оптимальным (при $n = 2m$) тогда и только тогда, когда он имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:

$$W(t) = 2m \cos(t) + (2m - 1) \cos(2t) + (2m - 2) \cos(3t) + \cdots + \cos(2mt). \quad (4.5.38)$$

Из леммы (4.1) следует

Теорема 4.11 Для оптимизирующего набора $\{t_k\}_{k=1}^m$ выполнены соотношения

$$t_k = k\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{2m+1}, \quad k = 1, \dots, m,$$

означающие совпадение $\{t_k\}_{k=1}^m$ с аргументами комплексных корней степени $2m+1$ из единицы.

Таким образом, для множества точек минимума оптимального многочлена имеет место симметрия, связанная с естественным действием на \mathbb{C} группы $\mathbb{Z}_{2m+1} = \mathbb{Z} / (2m+1)\mathbb{Z}$.

4.5.2 Случай $n = 2m + 1$

Случай многочлена нечетной степени можно изучить аналогичным образом, внеся соответствующие модификации. Сформулируем основные утверждения для этого случая.

Теорема 4.12 Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным для многочлена \mathcal{W} тогда и только тогда, когда он задает в \mathbb{R}^m критическую точку функции

$$\mathcal{U} := \int_0^\pi (\cos^2(t) - 1) \mathcal{N}^2(t) dt. \quad (4.5.39)$$

Вычисление оптимального многочлена также сводится к вычислению многочлена, ортогонального к наборам элементарных многочленов. В итоге получаем следующие утверждения.

Теорема 4.13 Многочлен $\mathcal{N}(t)$ является оптимальным тогда и только тогда, когда он имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:

$$\frac{1}{2} + \cos(2t) + \cos(4t) + \cdots + \cos(mt), \quad (4.5.40)$$

если $m = 2p$, и

$$\cos(t) + \cos(3t) + \cdots + \cos(mt), \quad (4.5.41)$$

если $m = 2p + 1$.

Теорема 4.14 При $n = 2m + 1$ многочлен (4.2.11) является оптимальным тогда и только тогда, когда он имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:

$$(2m + 1) \cos(t) + 2m \cos(2t) + (2m - 1) \cos(3t) + \cdots + \cos((2m + 1)t).$$

Теорема 4.15 При $n = 2m + 1$ для оптимального набора $\{t_k\}_{k=1}^m$ выполнены соотношения

$$t_k = k\omega, \quad \omega = \frac{\pi}{m+1}, \quad k = 1, \dots, m,$$

означающие совпадение $\{t_k\}_{k=1}^m$ с аргументами комплексных корней степени $2(m + 1)$ из единицы.

Таким образом, при $n = 2m + 1$ для множества точек минимума оптимального многочлена имеет место симметрия, связанная с естественным действием на \mathbb{C} группы $\mathbb{Z}_{2(m+1)} = \mathbb{Z} / 2(m+1)\mathbb{Z}$.

Глава 5

Приложения к оптимизации турбинной лопатки и сигнальной задачи

5.1 Оптимизация изгиба упругой лопатки турбины

В настоящей главе рассмотрена простейшая математическая модель изгиба упругой лопатки турбины и предложена методика оптимизации закритического изгиба.

Представленный в разделе 2.2 общий случай колебания упругих систем, переносится на модель лопаток турбонасосов, как частный случай упругих балок на упругих основаниях, так как математические модели лопаток, подробно представленные в работах Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков [148], J.M.T. Thompson, N.B. Stewart [208], Б.С. Бардин, С.Д. Фурта [12], Г.С. Писаренко [157] связаны напрямую с уравнениями, описывающими колебания упругих балок с соответствующими краевыми условиями.

Математический аппарат представленный в главе 2 настоящей работы позволяет провести анализ математической модели упругой лопатки, а на основе теорем из главы 4 строится метод оптимизации по критерию максимизации коэффициента несимметрии (асимметрии).

5.1.1 Двухмодовые закритические изгибы упругой лопатки

В данном разделе применены результаты анализа упругой балки к исследованию турбинной лопатки. Уравнение описывающее колебания лопатки естественным образом совпадает с с уравнением рассмотренным в разделе 2.2. Важным отличием в этом исследовании является задача не просто отыскания прогиба, а нахождения оптимального изгиба лопатки в смысле коэффициента несимметрии.

Простейшая нелинейная (промасштабированная) модель движений (однородной) упругой лопатки описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha w + w^3 = 0,$$

где w — прогиб средней линии лопатки (поле смещений точек средней линии упругой лопатки, расположенной вдоль оси x). Аналогичное уравнение возникает в теории упругих балок и теории кристаллов [65] (в последнем случае w — параметр порядка). Первый шаг в изучении такой задачи — отыскание равновесных (стационарных) состояний, определяемых уравнением

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha w + w^3 = 0. \quad (5.1.1)$$

Если рассмотреть, например, стандартные краевые условия

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0, \quad (5.1.2)$$

то полученная граничная задача допускает 2-мерные вырождения, порождающие 2-модовые бифуркции, сопровождаемые достаточно интересными геометрическими и физическими эффектами. Решение этой задачи можно свести — на основе конечномерной редукции — к описанию экстремалей 2-параметрического семейства полиномов от двух переменных. В случае слабо неоднородной лопатки также допускается аналогичное сведение, но при этом в полиноме появляется дополнительное слагаемое, создающее более сложную картину бифуркционного поведения решений.

Уравнение (5.1.1) является уравнением Эйлера для экстремалей функционала

$$V = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \alpha w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dx. \quad (5.1.3)$$

Двумерное вырождение нулевой экстремали происходит при

$$\kappa = \kappa_1 := (p^2 + q^2)\pi^2, \quad \alpha = \alpha_1 := p^2 q^2 \pi^4, \quad p, q \in \mathbb{N},$$

со стандартным базисом (модами бифуркации) ядра второго дифференциала

$$e_1 = \sqrt{2} \sin(p \pi x), \quad e_2 = \sqrt{2} \sin(q \pi x).$$

Предположим, например, что $p = 1$, $q = 2$ и, соответственно, $\kappa_1 = 5\pi^2$, $\alpha_1 = 4\pi^4$ (эти значения являются наименьшими из тех, при которых происходит 2-мерное вырождение; в остальных случаях анализ аналогичен). При этом предположении анализ возможных изгибов осуществляется посредством редукции Ляпунова–Шмидта [47] к (ключевой) функции (двух переменных)

$$W(\xi, \delta) = \inf_{w: \langle w, e_1 \rangle = \xi_1, \langle w, e_2 \rangle = \xi_2} V(w, \alpha_1 + \delta_1, \kappa_1 + \delta_2), \quad (5.1.4)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2).$$

Так как функционал (5.1.3) инвариантен относительно инволюций J_1, J_2 :

$$J_2(p)(x) := p(1-x), \quad J_1 := -J_2,$$

то функция (5.1.4) обладает симметрией прямоугольного параллелограмма:

$$W(-\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, -\xi_2, \delta_1, \delta_2) = W(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_2),$$

из чего вытекает [47] справедливость асимптотического представления

$$W(\xi, \delta) = U(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где $U(\xi, \delta) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \delta)$ — линейная ритцевская аппроксимация функционала V по модам e_1, e_2 . Таким образом, для ключевой функции имеет место асимптотическое представление

$$W_0(\xi, \delta) = \frac{\lambda_1}{2} \xi_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{4} (A \xi_1^4 + 2B \xi_1^2 \xi_2^2 + C \xi_2^4) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta), \quad (5.1.5)$$

где

$$\lambda_1 = \delta_1 - \pi^2 \delta_2, \quad \lambda_2 = \delta_1 - 4\pi^2 \delta_2,$$

$$A = \int_0^1 e_1^4 dx = \frac{3}{2}, \quad B = \int_0^1 e_1^2 e_2^2 dx = 3, \quad C = \int_0^1 e_2^4 dx = \frac{3}{2}.$$

Сократив на множитель $3/2$, получим функцию (5.1.5) с нормализованной главной частью:

$$\widetilde{W}_0(\xi, \delta) = \widetilde{U}(\xi, \delta) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где

$$\widetilde{U}(\xi, \delta) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{2}\xi_1^2 + \frac{\tilde{\lambda}_2}{2}\xi_2^2 + \frac{1}{4}(\xi_1^4 + 4\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4).$$

«Геометрический сюжет» процесса бифуркации критических точек и первые асимптотики ветвей бифурцирующих точек (по критическим приращениям управляющих параметров) для функции $\widetilde{W}_0(\xi, \delta)$ определяются ее главной частью $\widetilde{U}(\xi, \delta)$, представляющей собой «возмущенную двумерную сборку» (с коэффициентом двойного отношения $a = 2$), четную по каждой переменной. Ее критические точки определяются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \xi_1} &= \tilde{\lambda}_1 \xi_1 + \xi_1^3 + 2\xi_1 \xi_2^2 = 0, \\ \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \xi_2} &= \tilde{\lambda}_2 \xi_2 + 2\xi_1^2 \xi_2 + \xi_2^3 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Решения этой системы делятся на три типа:

- 1) 0–решение $\xi_1 = \xi_2 = 0$,
- 2) 1–модовые решения $\xi_1 = \pm\sqrt{-\tilde{\lambda}_1}$ ($\lambda_1 < 0$), $\xi_2 = 0$ и $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \pm\sqrt{-\tilde{\lambda}_2}$ ($\lambda_2 < 0$),
- 3) 2–модовые решения $\xi_1 = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_1-2\tilde{\lambda}_2}{3}}$, $\xi_2 = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_2-2\tilde{\lambda}_1}{3}}$, ($\tilde{\lambda}_1-2\tilde{\lambda}_2 > 0$, $\tilde{\lambda}_2-2\tilde{\lambda}_1 > 0$).

Пусть $\theta_1 = \tilde{\lambda}_1 - 2\tilde{\lambda}_2$, $\theta_2 = \tilde{\lambda}_2 - 2\tilde{\lambda}_1$. Так как матрица Гессе функции \widetilde{U} представима в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 + 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 & 4\xi_1 \xi_2 \\ 4\xi_1 \xi_2 & \tilde{\lambda}_2 + 2\xi_1^2 + 3\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

то, как нетрудно проверить, при $\theta_1 > 0$ и $\theta_2 > 0$ существуют четыре 2-модовые критические точки индекса 1. Все 1-модовые точки при этом являются точками локальных минимумов, а нуль — критической точкой индекса 2. Рождение 1-модовых критических точек происходит при переходах параметров $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ в области отрицательных значений.

Каустика $\Sigma_{\tilde{U}}$ функции \tilde{U} разбивает плоскость управляющих параметров на шесть зон $\omega_0 = \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}$, $\omega_1 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 > 0\}$, $\omega_2 = \{\tilde{\lambda}_1 > 0, \tilde{\lambda}_2 < 0\}$, $\omega_3 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 < 0, \theta_2 > 0\}$, $\omega_4 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 < 0\}$, $\omega_5 = \{\tilde{\lambda}_1 < 0, \tilde{\lambda}_2 < 0, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0\}$. Каждой зоне соответствует свой расклад бифурцирующих критических точек: параметрам из зоны ω_0 отвечает случай единственной критической точки (точка минимума в нуле), для ω_1, ω_2 — пара симметрично расположенных (относительно нуля) 1-модовых точек минимума и седло в нуле, для ω_3, ω_4 — пара симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, пара 1-модовых седел и точка локального максимума в нуле, для ω_5 — четверка симметрично расположенных 1-модовых точек минимума, четверка 2-модовых седел и точка локального максимума в нуле.

Таким образом, для данной математической модели возможны только следующие (*bif*-расклады) $(1, 0, 0)$ — один минимум (лопатка не имеет изгиба), $(2, 1, 0)$ — 2 минимума (устойчивые состояния) и одно седло (исходное состояние лопатки становится не устойчивым состоянием), $(2, 2, 1)$ — два минимума, два седла и один максимум в нуле, $(4, 4, 1)$ — четыре минимума (наибольшее число устойчивых состояний), 4 седла и один максимум также в нуле.

Каждому из состояний могут отвечать следующие изгибы турбинной лопатки (устойчивые состояния соответствуют точкам минимума). Графики представляют собой точные изображения прогибов и были построены на основе приведенных выше алгоритмов с использованием зарегистрированных комплексов программ [121].

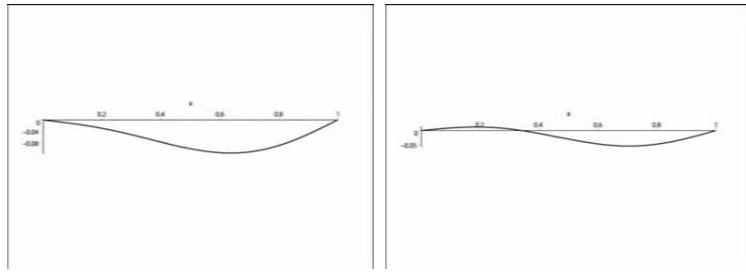


Рисунок 5.1

5.1.2 Оптимизация изгибов

Теперь, имея инструмент построения закритических изгибов лопатки, можно использовать результаты, изложенные в 4 главе, для получения оптимальных в смысле коэффициента несимметрии изгибов. В настоящем разделе предложен практический алгоритм для их получения.

Импульсом изгиба будем называть производную от функции изгиба W .

В общем случае n мод импульс изгиба выглядит как тригонометрический полином

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kt), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (5.1.6)$$

Коэффициентом несимметрии этого полинома называется число

$$k := \frac{f_{max}}{|f_{min}|}, \quad \text{где } f_{max} := \max_t f(t, \lambda), \quad f_{min} := \min_t f(t, \lambda).$$

Достижение коэффициентом несимметрии максимального значения (при вариациях λ) обеспечивается решением следующей задачи математического программирования:

$$\inf_t f(t, \lambda) \longrightarrow \sup_{\lambda}, \quad t \in [0, \pi], \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = c \quad (= const > 0). \quad (5.1.7)$$

Решение задачи (5.1.7) удобно проводить, перейдя к алгебраическому полиному, который получен из (5.1.6) заменой косинусов на соответствующие многочлены Чебышева (первого рода).

Здесь мы рассмотрим случай $n = 2$, в котором

$$w(t, \xi) = \xi_1 \sin(t) + \xi_2 \sin(2t) \quad (5.1.8)$$

и

$$f(t, \lambda) := \frac{\partial w}{\partial t}(t, \xi) = \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \cos(2t), \quad \lambda_1 = \xi_1, \quad \lambda_2 = 2\xi_2.$$

После замены $\cos(t) = x$, $\cos(2t) = 2x^2 - 1$ получим

$$V(x, \mu) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2, \quad x \in [-1, 1], \quad \mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2),$$

где

$$\mu_0 = -\lambda_2, \quad \mu_1 = \lambda_1, \quad \mu_2 = 2\lambda_2.$$

Несложные вычисления показывают, что верно следующее утверждение.

Теорема 5.1 *Многочлен $V(x, \mu)$ будет оптимальным тогда и только тогда, когда $\mu_1 = \mu_2$ или, что эквивалентно, $\lambda_1 = 2\lambda_2$.*

Для изгиба (5.1.8), являющегося оптимальным, имеем, соответственно, соотношение $\xi_1 = 4\xi_2$. На рисунке 5.2 приведено изображение оптимального импульса и соответствующего ему оптимального изгиба.

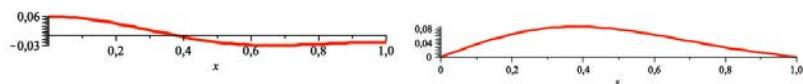


Рисунок 5.2

5.2 Амплитудно-фазовый синтез в математической теории антенн

5.2.1 Постановка задачи П.К. Сутина для диаграммы направленности в математической теории антенн

Как известно ([181], с.14) задача анализа и синтеза прямоугольных антенн сводится к исследованию интегрального уравнения первого рода.

$$F(t) = \int_{-a}^a e^{ixt} \cdot e^{i\Phi(x)} R(x) dx \quad (5.2.9)$$

Здесь $F(t)$ – диаграмма направленности (ДН) антенны, $R(x)$ – амплитудное распределение тока в антенне, $\Phi(x)$ – фазовое распределение.

Если при известной функции $F(t)$ нужно определить функции $R(x)$ и $\Phi(x)$, то мы имеем задачу амплитудно-фазового синтеза (АФС) для уравнения (5.2.9).

Отметим, что задача АФС является корректной, в том смысле, что по известной функции $F(t)$, она преобразуема по Лапласу, функции $R(x)$ и $\Phi(x)$ ([181], с.35).

Функция $F(t)$ на сегменте $(-b; b)$, $b = \frac{2\pi a}{\lambda}$, a – длина антенны, λ – длина волны, удовлетворяет условиям: в перемешивающейся системе точек

$$-b < t_1 < \xi_1 < t_2 < \dots < t_k < \xi_k < t_{k+1} < \dots < t_{n-1} < \xi_{n-1} < t_n < b \quad (5.2.10)$$

и значений $F(t_k) = 0$, $F(\xi_k) = M_k e^{i\phi_k}$, $F'(\xi_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$, $M_k > 0$, существует точка ξ_p , такая, что имеют место неравенства

$$M_1 < M_2 < \dots < M_p < M_{p+1} < \dots < M_{n-1}. \quad (5.2.11)$$

Точка ξ_p определяет главное направление излучения. В радиофизике для наглядности рассматривается график функций $|F(t)|$, который распадается на отдельные части, называемые лепестками ДН. При этом M_k является максимумом k -го лепестка.

Существуют многочисленные способы построения ДН. Среди которых одним из наиболее важных является метод алгебраических многочленов, когда

на интервале $(-b; b)$ строится многочлен удовлетворяющий условиям (5.2.11) [181].

Результаты настоящей работы также относятся к использованию возможностей этого метода.

Введем параметр $\Theta = \min_k \frac{M_p}{M_k}$, который назовем коэффициентом доминирования главного направления излучения. Ясно, что чем больше Θ , тем больше степень влияния главного направления излучения по сравнению с излучением боковых лепестков.

В связи с этим возникает вопрос о существовании многочлена $q_n(t) = \sum_{m=0}^n a_m t^m$ с максимальным коэффициентом доминирования $\Theta(q_n)$. Ответ на него дает следующая

Теорема 5.2 Пусть Q – множество многочленов $q_n(t) = \sum_{m=0}^n a_m t^m$, $t \in [-1; 1]$, таких что

$$\int_{-1}^1 q_n(t) dt = 0;$$

$$\sum_{m=0}^n a_m = n.$$

и $T_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ многочлены Чебышева 1-го рода. Тогда многочлен

$$\tilde{q}_n(t) = \frac{1 - T_{n+1}(1 - |t|)}{(n + 1)|t|}$$

максимизирует функционал $\Theta(q_n)$ при $q_n \in Q$ и справедливо равенство

$$\max_{q_n \in Q} \Theta(q_n) = \Theta(\tilde{q}_n) = n.$$

Заметим, что при этом все M_k , $k \neq p$ равны 1, $\tilde{q}_n(0) = n$.

5.2.2 Импульс М-Ф и решение задачи об оптимальном выборе диаграммы направленности

Как известно ([181], с.11), основой математической теории антенн и технической электродинамики является интегральное уравнение первого рода (совпа-

дающее с уравнением (5.2.9))

$$F(t) = \int_{-1}^1 e^{ixt} e^{i\Phi(x)} R(x) dx, \quad (5.2.12)$$

которое можно рассматривать как обратное преобразование Фурье некоторой финитной функции, тождественно равной нулю при $|x| > 1$. Для построения таких функций в соответствии с [129] выбирается полином $P_N(t)$ достаточно высокой степени. Затем, умножая его на, так называемый, стабилизирующий множитель $A_N(t)$ такой, что $A_N(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$, функцию $F(t)$ строят в виде

$$F_N(t) = P_N(t)A_N(t). \quad (5.2.13)$$

В качестве стабилизирующего множителя часто выбирают, например, функцию

$$A_N(t) = \left(\frac{N+1}{t} \sin\left(\frac{t}{N+1}\right) \right)^{N+1}. \quad (5.2.14)$$

В этом случае справедливо равенство $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} F_N(t) A_N(t) dt = 0$, при $|x| > 1$.

И тогда решение уравнения (5.2.12) представимо в виде

$$e^{i\Phi(x)} R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} F_N(t) A_N(t) dt. \quad (5.2.15)$$

Откуда функции $\Phi(x)$ и $R(x)$ находятся однозначно.

Вместе с тем, функция $F(t)$, которая в радиотехнике называется диаграммой направленности (ДН), должна удовлетворять и соответствующим условиям, характеризующим её технические свойства. Наиболее важные из них отражаются на графике функции $|F(t)|$, который распадается на отдельные части, называемые лепестками диаграммы направленности.

По форме диаграммы направленности антенны обычно подразделяются на узконаправленные и широконаправленные. Узконаправленные антенны имеют один ярко выраженный максимум, который называют основным лепестком и

побочные максимумы (боковые лепестки), обычно имеющие отрицательное влияние, высоту которых стремятся уменьшить. Узконаправленные антенны применяют для концентрации мощности радиоизлучения в одном направлении для увеличения дальности действия радиоаппаратуры, а также для повышения точности угловых измерений в радиолокации.

В связи с этим, на интервале $t \in (-b, b)$ выбираются две системы взаимно разделяющихся точек

$$-b < t_1 < \xi_1 < t_2 < \dots < t_k < \xi_k < t_{k+1} < \dots < t_{n-1} < \xi_{n-1} < t_n < b,$$

в которых на $F(t)$ накладываются условия $F(t_k) = 0$, $F(\xi_k) = M_k e^{i\varphi_k}$, $F'(\xi_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$.

Точка ξ_p , в которой выполняются условия

$$M_1 < M_2 < \dots < M_{p-1} < M_p > M_{p+1} > \dots > M_{n-2} > M_{n-1},$$

определяет главное направление излучения, а точки $\xi_k \neq \xi_p$ – вспомогательные.

В настоящем сообщении в представлении функции $F_N(t)$ соотношением (5.2.12), алгебраический полином $P_N(x)$ заменяется тригонометрической суммой Фейера (см. [129])

$$\mathfrak{G}_N(t) = 2 \sum_{k=1}^N \frac{N+1-k}{N+1} \cos\left(\frac{k\pi t}{b}\right), \quad (5.2.16)$$

при этом в качестве стабилизирующего множителя берется $A_N(t) = A_0(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Особенность многочлена (5.2.16) заключается в том, что изучая экстремумы функций с использованием минимального страта Максвелла [6], ([34], т.1), можно доказать, что среди всех тригонометрических многочленов вида $P_N(t) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \cos\left(\frac{k\pi t}{b}\right)$ $t \in (-b, b)$ именно многочлен (5.2.16) максимизирует функционал

$$K(P_N) = \frac{M_p}{\max_{k \neq p} M_k}, \quad (5.2.17)$$

характеризующий меру доминирования главного направления излучения над вспомогательными направлениями. При этом выполняются равенства $M_k = 1$ при всех $k \neq p$, и $\max_{\lambda} K(F_N) = M_p = N$.

Таким образом, для диаграммы направленности $F_N(t) = \mathfrak{G}_N(t)A_0(t)$ имеет место следующее представление решения уравнения (5.2.12)

$$\begin{aligned} e^{i\Phi(x)}R(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \sum_{k=1}^N \left(\frac{N+1-k}{N+1} \cos\left(\frac{k\pi}{b}t\right) \right) \frac{\sin t}{t} dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \left(\frac{N+1-k}{N+1} \int_0^{\infty} \cos(xt) \cos\left(\frac{k\pi t}{b}\right) \frac{\sin t}{t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{N+1-k}{N+1} [I_k(x) + I_{-k}(x)] = Q_N(x), \end{aligned}$$

где

$$I_{\pm k} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } 0 < x \pm \frac{k\pi}{b} < 1; \\ \frac{1}{4}, & \text{если } x \pm \frac{k\pi}{b} = 1; \\ 0, & \text{если } x \pm \frac{k\pi}{b} > 1; \end{cases}$$

Отсюда для действительнозначных $\Phi(x)$ и $R(x)$ получаем решение: $\Phi(x) = 2m\pi$ ($m = \pm 1, \pm 2$), $R_N(x) = Q_N(x)$.

Заметим также, что приведенный набор функций $F_N(t)$ ($N = 1, 2, \dots$) даёт один из ответов при решении задачи 4, поставленной П.К. Сутиным в [181] на стр.222 по составлению примеров теоретически допустимых ДН.

Заключение

В диссертации разработаны новые методы посткритического анализа математических моделей и оптимизации многопараметрических ветвей (локальных и нелокальных) бифурцирующих состояний моделируемых систем. Разработка новых методов осуществлена на базе теории фредгольмовых функционалов, теории полугрупп линейных преобразований и ряда численных методов, как традиционных, так и вновь созданных. Разработанные методы легли в основу создания комплексов программ, позволивших в итоге решить следующие проблемы:

- *научная проблема*: создание аналитического аппарата для эффективного изучения рассмотренных в диссертации математических моделей (моделей неоднородных упругих систем на упругом основании, вибропогружателей и антенных устройств);
- *техническая проблема*: разработка методики подбора оптимальных значений параметров конкретных технических устройств (полигармонических вибропогружателей, турбонасосных агрегатов и антенных устройств);
- *фундаментальная проблема*: обоснования корректности применения фредгольмого анализа и численных методов, использованных в диссертации;
- *прикладная проблема*: построение и апробация алгоритмов компьютерного анализа рассмотренных моделей.

Все полученные результаты соответствуют специальности «05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Дальнейшими перспективами в разработке темы диссертационной работы являются:
1. Применение разработанных теоретических методов и вычислительных алго-

ритмов к анализу разнообразных посткритических процессов, моделируемых в классической механике, механике сплошных сред, теории кристаллов, технике, экономике, радиотехнике и т.д. 2. Расширение и новое развитие разработанных средств анализа с целью применения к более широкому классу проблем и задач посткритического анализа разнообразных систем, в том числе к проектированию и созданию новых технических средств (виброустройств, турбинных лопаток, радиоантенн и т.д.).

Литература

- [1] Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. — М.: Наука, 1964. — 772 с.
- [2] Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости / П. Аппель. — М. — Л., ОНТИ, 1936. — 375 с.
- [3] Арнольд В.И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют / В.И. Арнольд // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, вып. 5(203). — С. 91–105.
- [4] Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. — М. : Наука, 1989. — 472 с.
- [5] Арнольд В.И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели / В.И. Арнольд. — 2-е изд. стереотип. — М.: МЦНМО, 2008. — 32 с.
- [6] Арнольд В.И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. — М. : МЦНМО, 2004. — 672 с.
- [7] Арнольд В.И., Математические аспекты классической и небесной механики / В.И. Арнольд, В.В. Козлов, А.И. Нейштадт // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М. : ВИНТИ, 1985. — Т. 3. — С. 1–304.
- [8] Арнольд В. И. Критические точки гладких функций и их нормальные формы / В.И. Арнольд // Успехи мат. наук. — 1975. — Т. 30 вып.5(185). — С. 3–65.

- [9] Бабенко Ю.И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена / Ю.И. Бабенко. – СПб.: НПО «Профессионал», 2009. – 584 с.
- [10] Бабенко Ю.И. Тепломассообмен: Методы расчета тепловых и диффузных потоков / Ю.И. Бабенко. – Л.: Химия, 1986. – 144 с.
- [11] Бадран С. О корректной разрешимости некоторых нестационарных задач для уравнений с дробными производными / С. Бадран, А.В. Костин, Д.В. Костин // Материалы международной молодежной научной школы Теория и численные решения обратных и некорректных задач. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. – С.219-224.
- [12] Бардин Б.С. Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании / Б.С. Бардин, С.Д. Фурта // Актуальные проблемы классической и небесной механики. – М. : Эльф, 1998. – С. 13–22.
- [13] Беккенбах Э. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Белман. – М.: Мир, 1962. – 276 с.
- [14] Белых Ф.А. Вторичные редукции в анализе бифуркаций экстремалей из точки минимума с особенностью 3-мерной сборки / Ф.А. Белых, А.В. Зачепа, Ю.И. Сапронов // Семинар по глобальному и стохастическому анализу. – Воронеж : ВГУ, 2005. – Вып. 1. – С. 18–33.
- [15] Бибиков Ю.Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации / Ю.Н. Бибиков. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1991. – 144 с.
- [16] Блехман И.И. Вибрационная механика / И.И. Блехман. – М. : Физматлит, 1994. – 400 с.
- [17] Бобылев Н.А. Геометрические методы в вариационных задачах / Н.А. Бобылев, С.В. Емельянов, С.К. Коровин. – М. : Магистр, 1998. – 658 с.

- [18] Бобылев Н.А. О бифуркации экстремалей вариационных задач / Н.А. Бобылев, М.А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 314, № 2. – С. 265–268.
- [19] Богоявленский О.И. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения / О.И. Богоявленский. – М. : Наука, 1991. - 320 с.
- [20] Борисович Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере – Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. – 1977. – Т. 32, вып. 4. – С. 3–54.
- [21] Боровских А.В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям/ А.В. Боровских, А.И. Перов // Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», Институт компьютерных исследований, 2004. – 540 с.
- [22] Болотин С.В. Периодические решения системы с гироскопическими силами / С.В. Болотин // Прикл. матем. и механ. – 1987. – Т. 51, вып. 4. – С. 686–687.
- [23] Брекер Т. Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Брекер, Л. Ландер. – М. : Мир, 1977. – 208 с.
- [24] Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях / А.Д. Брюно. – М. : Наука. Физматлит, 1998. – 288 с.
- [25] Валюхов С.Г. Оптимизация шестеренчатых зацеплений винтовых поверхностей / С.Г. Валюхов , В.А. Костин , Ю.И. Сапронов , С.М. Семенов. – Воронеж: ВГУ, 2005. – 177с.
- [26] Ван дер Варден Б.Л. Алгебра / Б.Л. Ван дер Варден. – М. : Наука, 1979. – 624 с.
- [27] Варкуев Б.Л. Модель макро- и микроэкономики / Б.Л. Варкуев. — М: ТЕ-ИС, 1999. – 235 с.

- [28] Варченко А.Н. Теорема об эквисингулярности семейств алгебраических многообразий / А.Н. Варченко // Успехи матем. наук. – 1971. – Т. 26, вып. 1. – С. 317–218.
- [29] Варченко А.Н. О ростках аналитических отображений, топологический тип которых определяется конечной струей / А.Н. Варченко // Функц. анализ и его прил. – 1972. – Т. 6, вып. 3. – С. 63–64.
- [30] Васильев В.В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание / В.В. Васильев, Л.А. Симак.— Киев : НАН Украины, 2008.— 256 с.
- [31] Волков Е.А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике / Е.А. Волков // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 147, № 2. – С. 13–16.
- [32] Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки / А.С. Вольмир. – М. : Гостехиздат, 1956. – 419 с.
- [33] Гельфанд И.М. Об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах и интегралах / И.М. Гельфанд // Матем. сборник. – 1941. 9(51). – С. 51-66.
- [34] Гилмор Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. – М. : Мир, 1984. – Т. 1. – 350 с.; Т. 2. – 285 с.
- [35] Глушко В.П. Линейные дифференциальные уравнения / В.П. Глушко. – Воронеж : ВГУ, 1972. – 192 с.
- [36] Гнездилов А.В. Бифуркации критических торов для функционалов с 3-круговой симметрией / А.В. Гнездилов // Функц. анализ. – 2000. – Т. 34, вып. 1. – С. 83–86.
- [37] Годбайон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика / К. Годбайон. – М. : Мир, 1973. – 188 с.
- [38] Годунов С.К. Уравнения математической физики / С.К. Годунов. М.: Наука, 1979. – 393 с.

- [39] Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. – Киев : «Выща школа», 1989. – 347 с.
- [40] Голубицкий М. Устойчивые отображения и их особенности / М. Голубицкий, В. Гийемин. – М. : Мир, 1978. – 290 с.
- [41] Даринский Б.М. Бифуркции экстремалей вблизи особенности многомерной сборки / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов // Известия вузов. Математика. – Казань : Форт-Диалог, 1997. – Т. 2. – С. 35–46.
- [42] Даринский Б.М. К термодинамической теории сегнетоэлектрических фазовых переходов в кристаллах / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, В.Л. Шалимов // Кристаллография. – 1999. – Т. 44, № 4. – С. 1–5.
- [43] Даринский Б.М. Топологический подход к классификациям фаз кристаллических сегнетоэлектриков / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов // В кн. : Топологические методы нелинейного анализа. – Воронеж : ВГУ, 2000. – С. 41–57.
- [44] Даринский Б.М. О двухмодовых бифуркациях решений одной вариационной краевой задачи для уравнения четвертого порядка / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов // Понtryгинские чтения – XI : сб. трудов. – Воронеж : ВГУ, 2000. – Ч. 1. – С. 57–64.
- [45] Даринский Б.М. Дискриминантные множества и расклады бифурцирующих решений фредгольмовых уравнений / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов // Современная математика и ее приложения. – Тбилиси, 2003. – Т. 7. – С. 72–86.
- [46] Даринский Б.М. Фредгольмовы функционалы с круговой симметрией и периодические волны / Б.М. Даринский, Е.В. Ладыкина, Ю.И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. – Воронеж : ВГУ, 2003. – Том 2. – С. 52–67.
- [47] Даринский Б.М. Бифуркции экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царёв // Современная ма-

тематика. Фундаментальные направления. – М. : МАИ, 2004. – Т. 12. – С. 3–140.

- [48] Даринский Б.М. Ветвление экстремалей в точках минимума однородными особенностями четвертого и шестого порядков /Б.М. Даринский, И.В. Колесникова, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // Вестник Воронежского государственного университета Серия: Физики.Математика, 2008, №1, январь-июнь, 285с.
- [49] Дерунова Е.В. Ветвление периодических экстремалей в стационарной точке с резонансом 1 : 2 : 4 / Е.В. Дерунова, Ю.И. Сапронов // Семинар по глобальному и стохастическому анализу. – Воронеж : ВГУ, 2010. – Вып. 5. – С. 42–54.
- [50] Дерунова Е.В. Применение нормализованных ключевых функций в задаче о ветвлении периодических экстремалей / Е.В. Дерунова, Ю.И. Сапронов // Известия вузов. Математика, 2015 Вып. 8 С. 14–24.
- [51] Джасим М.Д. Амплитудная оптимизация циклов, бифурцирующих при наличии кратных резонансов / М.Д. Джасим, А.Р. Эфендиев, А.П. Карпова, Д.В. Костин // Вестник Дагестанского государственного университета. 2012. Вып.1, С. 99-105.
- [52] Джасим М.Д. Ветвление и оптимизация циклов при наличии кратных резонансов / М.Д. Джасим, А.П. Карпова, Д.В. Костин // Вестник воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2012. №1. С. 99-109.
- [53] Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление/ В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М. : Наука, 1974. – 542 с.
- [54] Долженков А.А. Нелокальный бифуркационный анализ некоторых конфигураций кирхгофова стержня / А.А. Долженков, Ю.И. Сапронов, Т.Ю. Сапронова // Математические модели и операторные уравнения. – Воронеж : ВГУ, 2009. – Т. 6. – С. 27–41.

- [55] Ермоленко В.Н. Инновационные решения для свайного фундаментостроения / В.Н. Ермоленко // Стройпрофиль. – 2010. – № 6 (84). – С. 20–22.
- [56] Ермоленко В.Н. Оптимизация полигармонического импульса / В.Н. Ермоленко, В.А. Костин, Ю.И. Сапронов, Д.В. Костин // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Мат. моделирование и программирование. Челябинск 2012. №27 (286), вып. 13. – С.35-44.
- [57] Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления / Д.П. Желобенко. – М. : Наука, 1970. – 664 с.
- [58] Заваровский Ю.Н. Нормальная форма ключевой функции обобщенного уравнения Кирхгофа / Ю.Н. Заваровский // Успехи матем. наук. – 1983. – Т. 38, вып. 3. – С. 177–178.
- [59] Задорожний В.Г. Усредненная система дифференциальных уравнений для автогенератора на трех связанных контурах Ван-дер-Поля / В.Г. Задорожний, А.В. Попов // Дифференциальные уравнения. – 1999. – № 11. – С. 1580.
- [60] Зайцев В.Ф. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Ф. Зайцев. – Л. : ЛГПИ, 1989. – 80 с.
- [61] Замков О.О. Математические методы в экономике /О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: ДИС, 1997, 365 с.
- [62] Зачепа В.Р. Локальный анализ фредгольмовых уравнений / В.Р. Зачепа, Ю.И. Сапронов. – Воронеж : ВГУ, 2002. – 185 с.
- [63] Зачепа А.В. Трехмодовые бифуркции решений в краевой задаче для симметричного ОДУ шестого порядка / А.В. Зачепа // Труды матем. факультета. Вып. 8 (новая серия). – Воронеж : ТЕФА, 2004. – С. 48–55.
- [64] Зачепа А.В. О бифуркции экстремалей фредгольмова функционала из вырожденной точки минимума с особенностью 3-мерной сборки / А.В. Зачепа, Ю.И. Сапронов // Труды математического факультета. Вып. 9 (новая серия). – Воронеж : ВГУ, 2005. – С. 57–71.

- [65] Изюмов Ю.А. Фазовые переходы и симметрия кристаллов / Ю.А. Изюмов, В.И. Сыромятников. – М. : Наука, 1984. – 247 с.
- [66] Иллс Дж. Основания глобального анализа / Дж. Иллс // Успехи матем. наук. – 1969. – Т. 24, № 3. – С. 157–210.
- [67] Иосида К. Функциональный анализ: Учебник / К. Иосида; пер. с англ. В.М. Волосова. – М. : Мир, 1967. – 624 с.
- [68] Кадченко С.И. Нахождение собственных значений и собственных функций методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 246 с.
- [69] Карпова А.П. Бифуркационный анализ фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и его приложения / А.П. Карпова, Е.В. Ладыкина, Ю.И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. – Воронеж : ВГУ, 2008. – Т. 5, Ч. 1. – С. 45–90.
- [70] Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области/ М.В. Келдыш // Доклады АН СССР. – 1951, Т. 77, №2. – С. 181 – 183.
- [71] Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple: учебное пособие / М.Н. Кирсанов. – М.: Издательский дом МЭИ. – 2011. – 208 с.
- [72] Клемент Ф. Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент и др. – М.: Мир, 1992. – 352 с.
- [73] Койтер В.Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем / В.Т. Койтер // Механика. Периодический сборник переводов иностр. статей. – 1960. – № 5. – С. 99–110.
- [74] Колемаев В.А. Математическая экономика. Учебник изд.2 М.: ЮНИТИ, 2002, 399 с.
- [75] Коротких А.С. К моделированию структурной перестройки посредством нелинейного уравнения диффузии /А.С. Коротких, Д.В. Костин, Т.И.

Костина, Ю.И. Сапронов // Научно-технический журнал Насосы. Турбины. Системы. Изд. ООО НПЦ «Научная книга» 1(14) 2015. - С.81-85

- [76] Коротких А.С. К моделированию кластерной перестройки посредством нелинейного уравнения диффузии /А.С. Коротких, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (27 января - 2 февраля 2015г.) / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – Воронеж : Издательский дом ВГУ. 2015. – С. 63-66.
- [77] Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова / А.В.Костин, В.А. Костин. – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2007, – 259 с.
- [78] Костин В.А. Об аналитических полугруппах и сильно-непрерывных косинус-функциях // ДАН СССР. – 1989. – 307, №4. – С.796-799.
- [79] Костин В.А. К задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаевых пространствах / В.А. Костин // Дифференциальные уравнения с частными производными, АН СССР, СО Ин-т математики, Новосибирск, 1989. – С.93–116.
- [80] Костин В.А. О точной равномерно корректной разрешимости задачи Коши / В.А. Костин // ДАН СССР. – 1991. – Т.319, №1. – С.38-41.
- [81] Костин В.А. К решению одной проблемы, связанной с абстрактной косинус-функцией / В.А. Костин// ДАН. – 1994. Т. 336, №5. – С. 584–586.
- [82] Костин В.А. О раномерной корректной разрешимости краевых задач для абстрактных уравнений с оператором Келдыша – Феллера / В.А. Костин // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, №8. – С. 1419–1425.
- [83] Костин В.А. C_0 -операторные уравнения и полугрупповое /В.А. Костин, М.Х. Гим, Д.В. Костин// Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции: Воронежская

зимняя математическая школа (27 января - 2 февраля 2015г.) / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – Воронеж : Издательский дом ВГУ. 2015. – С. 68-69.

- [84] Костин В.А. Итерационные пространства локально интегрируемых функций / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии Наук. – 2011. – Т. 437, №5. – С. 597–600.
- [85] Костин В.А. C_0 -операторный интеграл Лапласа и краевые задачи для операторных уравнений с вырождением / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 441, № 1. – С. 10–13.
- [86] Костин В.А. О точных решениях задачи Коши для некоторых уравнений параболического и гиперболического типов / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 448, № 1. – С. 19–21.
- [87] Костин В.А. Функция нелинейного осреднения В.П. Маслова и математические модели в экономике / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии Наук, 2013, 449, №3, С. 263–266.
- [88] Костин В.А. Операторный метод Маслова–Хевисайда и C_0 -операторный интеграл Дюамеля / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук 2013, 452, №4, С. 367-370.
- [89] Костин В.А. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 455, №2. – С. 142-146.
- [90] Костин В.А. О полугруппах сдвигов и деформаций в анизотропных пространствах функций с равномерной метрикой / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии наук 2014. – Т. 459, №1. – С. 14–16.

- [91] Костин В.А. Многочлены Максвелла-Фейера и оптимизация полигармонических импульсов /В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // Доклады Академии наук. – 2012. Т. 445, № 3. – С. 271–273.
- [92] Костин В.А. О пространствах функций заданных на R , R^+ , инвариантных относительно дробного интегрирования /В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения - XXIII» / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. - Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. — С. 95-96.
- [93] Костин В.А. Исследование функций заданных на R^1 введением искусственной многомерности /В.А. Костин, Д.В. Костин // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронежской зимней математической школы / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. — С. 186-187.
- [94] Костин В.А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка / В.А. Костин, М.Н. Небольсина // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 428, №1. – С. 20–22.
- [95] Костин В.А. Корректная разрешимость задач без начальных условий для обобщенного уравнения Эйлера / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2016». – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2016. С. 229–233.
- [96] Костин Д.В. Применение формулы Маслова для асимптотического реше-

ния одной задачи об упругих деформациях / Д.В. Костин // Матем. заметки. – 2008. – Т. 83, № 1. – С. 50–60.

- [97] Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки / Д.В. Костин // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 418, № 4. – С. 295–299.
- [98] Костин Д.В. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем /Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов. - Воронеж: Издательство ВГУ, 2012. – 207 с.
- [99] Костин Д.В. Бифуркации резонансных колебаний и оптимизация тригоно-метрического импульса по коэффициенту несимметрии / Д.В. Костин // Математический сборник. – 2016. – Т. 207, № 12. – С. 90-109.
- [100] Костин Д.В. К вопросу оптимизации закритического изгиба упругой лопатки турбины /Д.В. Костин // Насосы. Турбины. Системы. – 2012. – №3 (4). – С.67-71.
- [101] Костин Д.В. Анализ изгибов упругой лопатки турбины с учетом неоднородности материала /Д.В. Костин // Насосы. Турбины. Системы. – 2013. – №3 (8). – С.56-61.
- [102] Костин Д.В. Математическая модель изгиба неоднородной турбинной лопатки и коэффициент несимметрии /Д.В. Костин // Насосы. Турбины. Системы. – 2014. – №1 (10). – С.68-71
- [103] Костин Д.В. Плоские сечения дискриминантного множества для уравнения прогибов слабо неоднородной упругой балки / Д.В. Костин // Воронежская зимняя математическая школа - 2006 (тез. докл.).- Воронеж, 2006. – С. 54.
- [104] Костин Д.В. Построение ключевой функции в краевой задаче, определяющей посткритические равновесные конфигурации слабо неоднородной балки / Д.В. Костин // Межвузовский сборник трудов семинара по фундаментальному и прикладному анализу. – Старый Оскол, 2006. – С.51-59.

- [105] Костин Д.В. О двухмодовых бифуркациях равновесных конфигураций слабо неоднородной балки на упругом основании / Д.В. Костин // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2006. Материалы научной конференции, 17-22 апреля 2006. - СПб., 2006. – С. 94-99.
- [106] Костин Д.В. Ортопроектор теории возмущения линейных операторов и бифуркации равновесия слабо неоднородной упругой балки / Д.В. Костин // Сборник трудов Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна - 2006 .- Воронеж: ВорГУ, 2006. – С. 106-113.
- [107] Костин Д.В. Бифуркации равновесий конфигураций слабо неоднородной балки / Д.В. Костин // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения - XVIII» - 2007. - Воронеж: ВорГУ, 2007. – С. 94-95.
- [108] Костин Д.В. Анализ ветвления равновесных конфигураций неоднородной балки / Д.В. Костин // Международная конференция, посвященная памяти И.Г. Петровского (XXII совместное заседание ММО и семинара им. И.Г. Петровского): Тезисы докладов. - М.: Изд-во МГУ, 2007. – С. 158.
- [109] Костин Д.В. Об одной схеме бифуркационного анализа фредгольмовых уравнений / Костин Д.В. // Воронежская зимняя математическая школа - 2008 (тез. докл.). – Воронеж, 2008. – С. 80.
- [110] Костин Д.В. Двухмодовые бифуркации решений уравнения Кармана в случае слабо неоднородной пластины / Д.В. Костин // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2008. Материалы научной конференции, 14-19 апреля 2008. - СПб., 2008. – С. 71 -73.
- [111] Костин Д.В. Применение асимптотических методов теории линейных операторов в анализе бифуркаций экстремалей /Д.В. Костин // Труды В-

ронежской зимней математической школы С.Г. Крейна 2008, Воронеж: ВорГУ, 2008. – С.172-179.

- [112] Костин Д.В Исследование дискриминантного множества полной развертки двумерной сборки / Д.В. Костин // Математические модели и операторные уравнения. Сборник научных статей под редакцией В.А. Костины и Ю.И. Сапронова. Том 7. Воронеж: ВорГУ, 2011. – С. 67-78.
- [113] Костин Д.В. К решению задачи о распространении сигнала во фрактальных средах в классах функций не преобразуемых по Лапласу / Д.В. Костин, А.В. Костин, В.А. Костин // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2012. Материалы международной конференции. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. – С.109-111.
- [114] Костин Д.В. Об оптимальном выборе диаграммы направленности в математической теории антенн / Д.В. Костин // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2012. Материалы международной конференции. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. – С.111-112.
- [115] Костин Д.В. Об одной задачи П.К. Сутина в математической теории антенн / Д.В. Костин, М.Д. Джасим // Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2012. Материалы международной конференции. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. – С.112-114.
- [116] Костин Д.В. О третьей краевой задаче для уравнения эллиптического типа в банаховом пространстве на R^+ /Д.В. Костин // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понtryгинские чтения - XXIII» / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. -

Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – С. 97-98.

- [117] Костин Д.В. Изгибы неоднородной упругой лопатки турбины и ее оптимизация по коэффициенту несимметрии /Д.В. Костин // Разработка, производство и эксплуатация турбо-, электронасосных агрегатов и систем на их основе: труды VII Международной научно-технической конференции «СИНТ'13». – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2013. -- С. 111-116.
- [118] Костин Д.В. Коэффициент несимметрии /Д.В. Костин // Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2014» / под. ред. В.А. Костины. - Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2014. С. 175-176.
- [119] Костин Д.В. Задача без начальных условий для диффузии на отрезке /Д.В. Костин, М.Н. Небольсина// Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (27 января - 2 февраля 2015г.) / Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. – С. 85-86.
- [120] Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ / Костин Д.В. // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. №2017610066 09.01.2017.
- [121] Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ / Костин Д.В. // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. №2017610263 09.01.2017.
- [122] Красносельский М.А. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. – М.: «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1966. – 500 с.

- [123] Красносельский М.А. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления / М.А. Красносельский, Н.А. Бобылев, Э.М. Мухамадиев // ДАН СССР. – 1978. – Т. 240, № 3. – С. 530–533.
- [124] Красносельский М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
- [125] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М. : Наука, 1967. – 464 с.
- [126] Крейн С.Г. Функциональный анализ / Н.Я. Вilenкин, Е.А. Горин, А.Г. Костюченко и др.; Под ред. С.Г. Крейна. – М. : Наука, 1964. – 424 с.
- [127] Лаврентьев М.М. Одномерные обратные задачи математической физики / М.М. Лаврентьев, К.Г. Резницкая, В.Г. Яхно. – Новосибирск: Наука, Сибир. отд., 1982. – 88 с.
- [128] Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.
- [129] Левитан Б.М. Почти-периодические функции / Б.М. Левитан. – М. : Гос. изд-во техн.-тор. лит. 1953. – 396 с.
- [130] Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий / С. Ленг. – М. : Мир, 1967. – 204 с.
- [131] Леонтьев В.В. Международное сопоставление факторных издержек и использование факторов. The American Economic Review, 1964. June. Vol.54, №4.
- [132] Логинов Б.В. Теория ветвления нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности / Б.В. Логинов. – Ташкент : Фан, 1985. – 184 с.
- [133] Ляв А. Математическая теория упругости / А. Ляв. – М., Л. : НКТН СССР, 1935. – 674 с.

- [134] Ляпунов А.М. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène donnée d'un mouvement de rotation, p.1 / А.М. Ляпунов. – СПб. : Зап. Акад. наук, 1906.
- [135] Мазер Дж.Н. Конечная определенность гладких отображений / Дж.Н. Мазер // Математика. – 1970. – Т. 14, № 1. – С. 145–175.
- [136] Мазер Дж.Н. Стратификация и отображения / Дж.Н. Мазер // Успехи матем. наук. – 1972. – Т. 27, № 5. – С. 85–113.
- [137] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: Пер. с англ. / Дж. Марри. – М.: Мир, 1983. – 399 с. ил.
- [138] Мартыненко Н. А. Конечные интегральные преобразования и их приложения к исследованию систем с распределенными параметрами / Н. А. Мартыненко, Л.М. Пустыльников. – М. : Наука, 1986. – 303 с.
- [139] Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы / В.П. Маслов. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 553 с.
- [140] Маслов В.П. Операторные методы / В.П. Маслов. – М. : Наука, 1973. – 543 с.
- [141] Маслов В.П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений / В.П. Маслов. – М.: Наука, 1987, 408 с.
- [142] Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений / В.П. Маслов. – М. : Наука, 1988. – 312 с.
- [143] Маслов В.П. Квантовая экономика / В.П. Маслов. – М.: Наука, 2006. – 91 с.
- [144] Маслов В.П. Квазистабильная экономика и её связь с термодинамикой сверхтекучей жидкости. Дефолт как фазовый переход нулевого рода. II. Обозрение прикладной и промышленной математики / В.П. Маслов. 2004, Т.11, Вып.4. – С.691–732.

- [145] Маслов В.П. Аксиомы нелинейного осреднения в финансовой математике и динамика курса акций / В.П. Маслов // Теория вероятности и её применение. – 2003. Т. 48:4. – С. 800–810
- [146] Милнор Дж. Теория Морса / Дж. Милнор. – М. : Мир, 1965. – 184 с.
- [147] Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей / Дж. Милнор. – М. : Мир, 1971. – 126 с.
- [148] Мітропольський Ю.О. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи) / Ю.О. Мітропольський, Б.І. Мосенков. – Київ : Видавництво Київського університету, 1961. – С. 123.
- [149] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М. : Наука, 1970. – 512 с.
- [150] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
- [151] Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях / Р. Нарасимхан. – М. : Мир, 1971. – 231 с.
- [152] Николаи Е.Л. К задаче об упругой линии двоякой кривизны / Е.Л. Николаи // Труды по механике. – М. : Гостехиздат, 1955. – С. 45–277.
- [153] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. – М. : Мир, 1977. – 232 с.
- [154] Обен Ж.-П. Прикладной нелинейный анализ / Ж.-П. Обен, И. Экланд. – М. : Мир, 1988. – 510 с.
- [155] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М. : Мир, 1989. – 639 с.
- [156] Особенности дифференцируемых отображений : сб. ст. под ред. В.И. Арнольда. – М. : Мир, 1968. – 268 с.

- [157] Писаренко С.Г. Колебания механических систем с учётом несовершенной упругости материала / С.Г. Писаренко. Киев : Издательство «Наукова Думка», 1970. – 380 с.
- [158] Полянин А.Д. Справочник по точным решениям уравнений тепло и мас- сопереноса / А.Д. Полянин, А.В. Вязьмин, А.И. Журов А.И., Д.А. Ка- зенин. М. : Факториал, 1998. – 367 с.
- [159] Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней / Е.П. Попов. – М. : ОГИЗ, 1948. – 170 с.
- [160] Постников М.М. Введение в теорию Морса / М.М. Постников. – М. : На- ука, 1971. – 568 с.
- [161] Постон Т. Теория катастроф и её приложения / Т. Постон, И. Стюарт. – М. : Мир, 1980. – 608 с.
- [162] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации / А.А. Потапов. – М.: «Логос», 2002. – 664 с.
- [163] Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т. 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел / А. Пуанкаре. – М. : Наука, 1972. – 1000 с.
- [164] Рапорт Л.Б. Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадра- тичной формы в конусе / Л.Б. Рапорт // Прикладная математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 4. – С. 674–679.
- [165] Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. / Г.Ю. Ризниченко. – Ижевск: НИЦ «Регуляр- ная и хаотическая динамика», 2002. – 232 стр.
- [166] Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Приме- ры. / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М. Физматлит, 2001. – 320 с.

- [167] Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.
- [168] Сапронов Ю.И. Многомодовые бифуркции упругих равновесий / Ю.И. Сапронов // Прикл. матем. и механ. – 1988. – Т. 52, вып. 6. – С. 997–1006.
- [169] Сапронов Ю.И. Двумодовая бифуркация решений уравнения Кармана / Ю.И. Сапронов // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 1078–1081.
- [170] Сапронов Ю.И. Полурегулярные угловые особенности гладких функций / Ю.И. Сапронов // Матем. сборник. – 1989. – Т. 180, № 10. – С. 1299–1310.
- [171] Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах / Ю.И. Сапронов // Математические заметки. – 1991. – Т. 49, вып. 1. – С. 94–103.
- [172] Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах / Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. – 1996. – Т. 51, № 1. – С. 101–132.
- [173] Сапронов Ю.И. Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах / Ю.И. Сапронов, С.Л. Царёв // Матем. заметки. – 2000. – Т. 58, № 5. – С. 745–754.
- [174] Сапронова Т.Ю. О разрушении компактных критических орбит инвариантных фредгольмовых функционалов при несимметричных возмущениях / Т.Ю. Сапронова // Труды математического факультета. Новая серия. – Воронеж : ВГУ, 1997. – № 2. – С. 54–58.
- [175] Сапронова Т.Ю. О методе квазинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов / Т.Ю. Сапронова // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. – Воронеж : ВГУ, 2000. – С. 107–124.
- [176] Сапронова Т.Ю. О квазинвариантных подмногообразиях фредгольмовых функционалов / Т.Ю. Сапронова // Некоторые актуальные про-

блемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2004. — СПб., 2004. — С. 81–88.

- [177] Саркисян С.С. Прогнозирование развития больших систем / С.С. Саркисян, Л.В. Голованов. — М.: «Статистика», 1975. — 192 с
- [178] Свиридов Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридов // Успехи мат. наук. — 1994. Т. 49, № 4. — С. 47–74.
- [179] Сегё Г. Ортогональные многочлены / Г. Сегё. — М. : Физматлит., 1962. — 500 с.
- [180] Советов Б.Я. Моделирование систем: Учеб. для вузов / Б.Я. Советов, С.А. Яковлева. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 2001. — 343 с.
- [181] Суэтин П.К. Начала математической теории антенн / П.К. Суэтин. — Инсвязьиздат, 2008. — 228 с.
- [182] Суэтин П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суэтин. — Изд 2-е. Гл.ред. физ.-мат. лит. М : «Наука», 1979. — 416 с.
- [183] Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 285 с.
- [184] Треногин В.А. Уравнение разветвления: потенциальность, бифуркации, симметрия / В.А. Треногин, Н.А. Сидоров, Б.В. Логинов // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 309, № 2. — С. 286–289.
- [185] Фёдоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов / В.Е. Фёдоров // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, №3. — С. 173–200.
- [186] Фёдоров В.Е. Обобщение теоремы Хилле-Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах / В.Е. Фёдоров // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, №2. — С. 426–448.

- [187] Феллер В. Параболические дифференциальные уравнения и соответствующие им полугруппы преобразований / В. Феллер // Математика. – 1957. Т. 1, №4. – С. 105–153.
- [188] Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве / К. Фридрихс. – М. : Мир, 1969. – 232 с.
- [189] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. –М.: Мир, 1985/ – 376 с.
- [190] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э.Хилле, Р.Филлипс. – М. : Изд-во иностр.лит., 1962. — 829 с.
- [191] Хэссард Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. М. Вэн : Мир, 1985. — 280 с.
- [192] Царёв С.Л. О глобальной распрямляемости гладких функций с единственной критической точкой / С.Л. Царёв // Труды матем. факультета ВГУ. – Воронеж : ВГУ, 1996. – № 1 (новая серия). – С. 92–96.
- [193] Царёв С.Л. Один вариант леммы Морса и его приложения к нелинейным вариационным задачам / С.Л. Царёв // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. – Воронеж : Изд-во ВГУ, 2000. – С. 132–136.
- [194] Царёв С.Л. Сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах с симметрией / С.Л. Царёв // Современная математика и ее приложения. – 2003. – Т. 7. – С. 87–91.
- [195] Чемерзина Е.В. Об одной схеме вариационного подхода в теории возмущений Релея – Шредингера / Е.В. Чемерзина // Сб. статей аспирантов и студентов матем. факультета ВГУ. – Воронеж : ВГУ, 2000. – С. 70–74.
- [196] Шестаков А.Л. Оптимальные измерения динамически искаженных сигналов/ А.Л. Шестаков , Г.А. Свиридов // Вестник ЮУрГУ. Сер. матем. моделир. и программирование. – 2011. – № 17. – С. 70–75.

- [197] Darinskii B.M. Phase transitions in crystals characterized by polarization and deformation components of the order parameter / B.M. Darinskii, Yu.I. Sapronov, V.V. Shalimov // Ferroelectrics. – 2002. – V. 265. – P. 31–42.
- [198] Guillemin V. Maslov theory and singularities / V. Guillemin, D. Schaeffer. – M.I.T., Cambridge, Mass., 1972.(Mimeographed notes.)
- [199] Holder E.J. Boundary conditions and mode jumping in the von Karman equations / E.J. Holder, D. Schaeffer // SIAM J. Math. Anal. – 1984. – V. 15, № 3. – P. 446–458.
- [200] Kostin D.V. On well-posed solvability of boundary value problems for equations with fractional derivatives in hyper-weight spaces of continuous functions on R^+ / D.V. Kostin // Applicable Analysis Volume 96, 2017 – Issue 3, p.396-408.
- [201] E.A.Kudryavtseva, E.Lakshtanov, Classification of singularities and bifurcations of critical points of even functions. In: Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, eds. A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, A. A. Oshemkov, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2006, 173-214.
- [202] Poénaru V. Singularités C^∞ en Présence de Symétrie / V. Poénaru // Lecture Notes in Mathematics. – N.-Y. : Springer-Verlag, 1976. – V. 510, chapter II. – P. 61–89.
- [203] Sapronov Yu.I. Direct parameterization of caustics of Fredholm functionals / Yu.I. Sapronov, E.V. Chemerzina // Journ. of Math. Sc. – 2007. – V. 142, № 3. – P. 2189–2197.
- [204] Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Theil 3: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und Verzweigung ihrer Lösungen / E. Schmidt // Math. Ann. – 1908. – V. 65. – P. 370–399.
- [205] Siersma D. Singularities of Functions on Boundaries, Corners, etc / D. Siersma // Quart. J. Oxford Ser. – 1981. – V. 32, № 125. – P. 119–127.

- [206] Sviridyuk G.A. Linear Sobolev Type Equation and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. - Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
- [207] Thompson J.M.T., A General Theory of Elastic Stability / J.M.T. Thompson. – JOHN WILEY & SONS SONS, 1973, 322 p.
- [208] Thompson J.M.T. Nonlinear Dynamiks and Chaos / J.M.T. Thompson, H.B. Stewart. – Wiley & Sons, Chichester – Singapore, 1986.
- [209] Thompson J.M.T. Advances in Shell Buckling: Theory and Experiments / J.M.T. Thompson. – International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 25, No. 1 (2015). - 25 p.

Приложение А

В данном приложении приведены основные сведения о комплексах программ, написанных для проведения численной реализации полученных в диссертации алгоритмов.

A.1 Программа для математического моделирования динамического изменения состояния упругой двумерной балки

Общее описание программы Программа предназначена для анализа изменений конструктивных особенностей двумерной балки. Позволяет численно строить динамически изменяющуюся конструкцию упругой балки под действием внешних сил. Программа осуществляется посредством функциональных методов анализа динамической математической модели, описываемой дифференциальным уравнением четвертого порядка с кубической нелинейностью.

Построение траектории спуска решения динамического нелинейного уравнения прогиба двухмерной упругой балки на упругом основании шарнирно закрепленной на концах со слабой неоднородностью материала при дискретных значения параметра нагрузки, находящихся в окрестности вырождения.

Системные требования Программа написана на языке системы компьютерной математики Maple. Для эксплуатации требуется операционная система Windows не ниже версии 2000.

Текст программы

```
restart;
```

$$\kappa := 5 \cdot \pi^2 - 6;$$

$$\alpha := 4 \cdot \pi^4;$$

```

epsilon[1] := 0.9;
epsilon[2] := .5;
epsilon[3] := 0.5e-1;
epsilon[4] := 0.1e-1;
epsilon[5] := -.7;
epsilon[6] := 0.9e-1;
epsilon[7] := 0.7e-1
for k from 1 by 1 to m do
h0:=-(diff(a0,[x$4])+kappa*diff(a0,[x$2]) + alpha*a0 + (a0)^(3));
h0:=2*sum(int(h0*sin(j* Pi*x),x=0..1, numeric)*sin(j*Pi*x), j=1..n);
q0:=int(((diff(a0,x$2))^(2))/(2)-kappa*((diff(a0,x$1))^(2))/(2)+(alpha * (a0)^(2))/(2)
+((a0)^(4))/(4) , x=0..1, numeric);
q1:=int(diff(a0,x$2) *diff(h0,x$2)-kappa*diff(a0,x$1) *diff(h0,x$1) + alpha *a0*h0
+2*(a0)^(3)*h0 , x=0..1, numeric);
q2 :=int(((diff(h0,x$2))^(2)-kappa*(diff(h0,x$1))^(2) + alpha *(h0)^(2)
+3*(a0)^(2)*(h0)^(2))/(2), x=0..1, numeric);
q3:=int(a0*(h0)^(3), x=0..1, numeric);
q4:=(int((h0)^(4), x=0..1, numeric))/(4);
p:=s^(4)*q4+s^(3)*q3+s^(2)*q2+s*q1+q0;
s0:=max(fsolve(diff(p,s)=0, s));
a[k]:=a0+s0*h0;
a0:=a[k];
end do;
kappa:=kappa+3;
alpha:=alpha ;
b[1]:=a0;
end do

```

А.2 Программа для математического моделирования реакции упругой балки на внешние воздействия

Программа предназначена для анализа характерных состояний упругих систем различных конструкций, содержащих в себе элементы типа упругой балки или пластины шарнирно закрепленной на концах. Программа позволяет получать наглядные зависимости характера прогиба от критических значений параметров, то есть рассчитывать изменения геометрических свойств проектируемых конструкций в зависимости от начальных данных и характера внешнего воздействия. Программа осуществляется посредством математического моделирования прогиба упругой балки и пластины, основанного на применении алгоритма редукции Ляпунова-Шмидта.

Системные требования Программа написана на языке системы компьютерной математики Maple. Для эксплуатации требуется операционная система Windows не ниже версии 2000.

Текст программы 1. Построение приближенного решения нелинейного уравнения прогиба двухмерной упругой балки на упругом основании шарнирно закрепленной на концах со слабой неоднородностью материала

1.1 Построение дискриминантного множества для визуализации зависимости количества и характера устойчивых решений уравнения прогиба балки.

```
> with(plots) :  
> d1 := -(x3 + a * x * y2 + d3 * y)/x;  
> d2 := -(y3 + a * x2 * y + d3 * x)/y;  
> d3 := -2 * x3 * (2 * a2 * y3 - 2 * y3)/(4 * a * x2 * y2 + 2 * x4 + 2 * y4);  
> x := r * cos(t) :  
> y := r * sin(t) :  
> a := 2;  
> p1 := plot3d([d1, d2, d3], r = 0..1, t = 0..2 * Pi) :  
> p5 := plot3d([r - r * cos(t), r + r * cos(t), r * sin(t)], r = 0..1, t = 0..2 * Pi) :  
> p6 := plot3d([-r - r * cos(t), -r + r * cos(t), r * sin(t)], r = 0..1, t = 0..2 * Pi) :  
> display([p1, p5, p6], style = patchnogrid, orientation = [178, 87],  
scaling = constrained);
```

1.2 Выбор значений параметров, отвечающих за внешнюю силу и упругость балки, а также функцию и параметр неоднородности материала из зон постоянства, на которые каустика разбивает пространство параметров. А также задание не возмущенных мод бифуркации

```

e1 := sqrt(2) * sin(Pi * x);
e2 := sqrt(2) * sin(2 * Pi * x);
gamma1 := sin2(x * Pi);
epsilon = -0.1;
q := epsilon * gamma1 + 1;
kappa1 := 5 * Pi2;
alpha1 := 4 * Pi4;

```

1.3 Вычисление возмущенных корневых векторов.

```

M1 := sum(2 * sqrt(2) * n2 * (int(gamma1 * sin(n * Pi * x) * sin(x * Pi),
x = 0..1)) * sin(n * Pi * x)/((n2 - 4) * (n2 - 1)), n = 3..4);
M2 := sum(8 * sqrt(2) * n2 * (int(gamma1 * sin(n * Pi * x) * sin(2 * x * Pi),
x = 0..1))/((n2 - 4) * (n2 - 1)) * sin(n * Pi * x), n = 3..4)
e11 := M1 * epsilon + e1;
e22 := M2 * epsilon + e2;

```

1.4 Построение ключевой функции

```

V1 := int(q * (diff(e11, x, x))2 - (kappa1 + delta1) * (diff(e11, x))2 +
(alpha1 + delta2) * e112, x = 0..1);
V2 := int(q * (diff(e22, x, x))2 - (kappa1 + delta1) * (diff(e22, x))2 +
(alpha1 + delta2) * e222, x = 0..1);
V3 := epsilon * (int(gamma * (diff(e11, x, x)) * (diff(e22, x, x)), x = 0..1));
A := 3/2;
C := 3/2;
B := 3;
W := 1/2 * (V1 * xi12 + V2 * xi22 + 2 * V3 * xi1 * xi2) +
1/4 * (A * xi14 + 2 * B * xi12 * xi22 + C * xi24);

```

1.5 Построение приближенных прогибов упругой балки при выбранных значениях параметров

```

solve(V1 = 0.2e - 1, V2 = -0.1e - 1, delta1, delta2);
{delta1 = -2.477007544, delta2 = -16.46912218}
delta1 := -2.477007544; delta2 := -16.46912218;
bm := 10;
minimize(W, xi1 = -bm..bm, xi2 = -bm..bm, location);

```

```

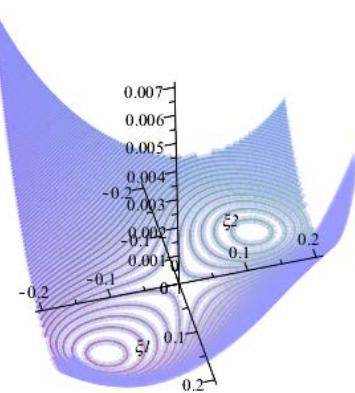
{ -0.0003548581483 },
{ { xi1 = -0.09160266459, xi2 = 0.1313019878 }, -0.0003548581483 },
{ { xi1 = 0.09160266459, xi2 = -0.1313019878 }, -0.0003548581483 }

```

```

bound := .21;
plot3d(W, xi1 = -bound..bound, xi2 = -bound..bound, contours = 100);

```



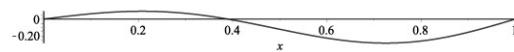
```

lambda1 := -0.9160266459e - 1;
lambda2 := .1313019878;
progib := e11 * lambda1 + e22 * lambda2;

(0.3664106584e - 3 * (-12 * sqrt(2) * sin(x * Pi) * cos(x * Pi)^2 +
3 * sqrt(2) * sin(x * Pi)))/Pi - 0.4963022674e -
3 * sqrt(2) * sin(4 * x * Pi)/Pi - 0.9160266459e - 1 * sqrt(2) * sin(x * Pi) -
(0.3751485366e - 3 * (192 * sqrt(2) * sin(x * Pi) * cos(x * Pi)^2 -
48 * sqrt(2) * sin(x * Pi)))/Pi -
(0.2778878048e - 5 * (-8192 * sqrt(2) * sin(x * Pi) * cos(x * Pi)^3 +
4096 * sqrt(2) * sin(x * Pi) * cos(x * Pi)))/Pi +
.1313019878 * sqrt(2) * sin(2 * x * Pi)

plot(progib, x = 0..1)

```



2. Построение приближенного решения нелинейное уравнение прогиба трехмерной упругой пластины на упругом основании, шарнирно закрепленной на концах со слабой неоднородностью материала.

2.1 Визуализация зависимости количества и характера решений уравнения прогиба с помощью построение дискриминантного множества, через редукцию Ляпунова-Шмидта.

```

> a := 2 :
> l1 := -x^2 * (1 + a + (a - 1) * (cos(2 * y))^3)/(2 + (a - 1) * (sin(2 * y))^2) :
> l2 := -x^2 * (1 + a - (a - 1) * (cos(2 * y))^3)/(2 + (a - 1) * (sin(2 * y))^2) :
> l3 := -x^2 * ((a^2 - 1) * (sin(2 * y))^3)/(2 * (2 + (a - 1) * (sin(2 * y))^2)) :
> p1 := plot3d([l1, l2, l3], x = 0..1, y = 0..Pi/4) :
> p2 := plot3d([l1, l2, l3], x = 0..1, y = Pi/4..Pi/2) :
> p3 := plot3d([l1, l2, l3], x = 0..1, y = Pi/2..3 * Pi/4) :
> p4 := plot3d([l1, l2, l3], x = 0..1, y = 3 * Pi/4..Pi) :
> p5 := plot3d([r - r * cos(t), r + r * cos(t), r * sin(t)], r = 0..1, t = 0..2 * Pi) :
> p6 := plot3d([-r - r * cos(t), -r + r * cos(t), r * sin(t)], r = 0..1, t = 0..2 * Pi) :
> display([p1, p2, p3, p4, p5, p6], style = line,
orientation = [-90, 0], axes = NORMAL);

```

2.2 Выбор значений параметров, отвечающих за упругость пластины и внешнее воздействие, а также функцию и параметр неоднородности материала из зон постоянства, на которые каустика разбивает пространство параметров. Начальных мод бифуркации.

```

> with(plots) :
> with(student) :
> g := 0.1 * sin(Pi * x) :
> s := 0.001 :
> a := 1 :
> en := 2 * sin(n * Pi * x/a) * sin(Pi * y) :
> ek := 2 * sin(k * Pi * x/a) * sin(Pi * y) :

```

2.3 Вычисление возмущенных корневых векторов

```

M1 := sum(4 * Pi * (a^2 + 1) * (a^2 + n^2)*
(int(int((gamma1 * sin(n * Pi * x/a) * sin(Pi * y) * sin(Pi * y))**
sin(Pi * x/a), y = 0..1), x = 0..a)) * en/(a^4 * (n^2 - 4) * (n^2 - 1)), n = 3..4);
M2 := sum(4 * Pi * (a^2 + 4) * (a^2 + n^2)*
(int(int((gamma1 * sin(n * Pi * x/a) * sin(Pi * y) * sin(Pi * y))**
sin(2 * Pi * x/a), y = 0..1), x = 0..a)) * en/(a^4 * (n^2 - 4) * (n^2 - 1)), n = 3..4);

```

```

e11 := M1 * epsilon + e1;
e22 := M2 * epsilon + e2;
V1 := q * (diff(e11, x, x) + diff(e11, y, y))^2 - delta1 * (diff(e11, x))^2;
V11 := int(int(V1, y = 0..1), x = 0..a);
V2 := q * (diff(e22, x, x) + diff(e22, y, y))^2 - delta2 * (diff(e22, x))^2;
V22 := int(int(V2, y = 0..1), x = 0..a);
V3 := q * (diff(e11, x, x) + diff(e11, y, y)) * (diff(e22, x, x) + diff(e22, y, y));
V33 := int(int(V3, y = 0..1), x = 0..a);
W := 1/2 * (V11 * xi1^2 + V22 * xi2^2 + 2 * V33 * xi1 * xi2) + 1/4 * (xi1^4 + xi2^4 + 4 * xi1 * xi2);
minimize(W, xi1 = -1..1, xi2 = -1..1, location);

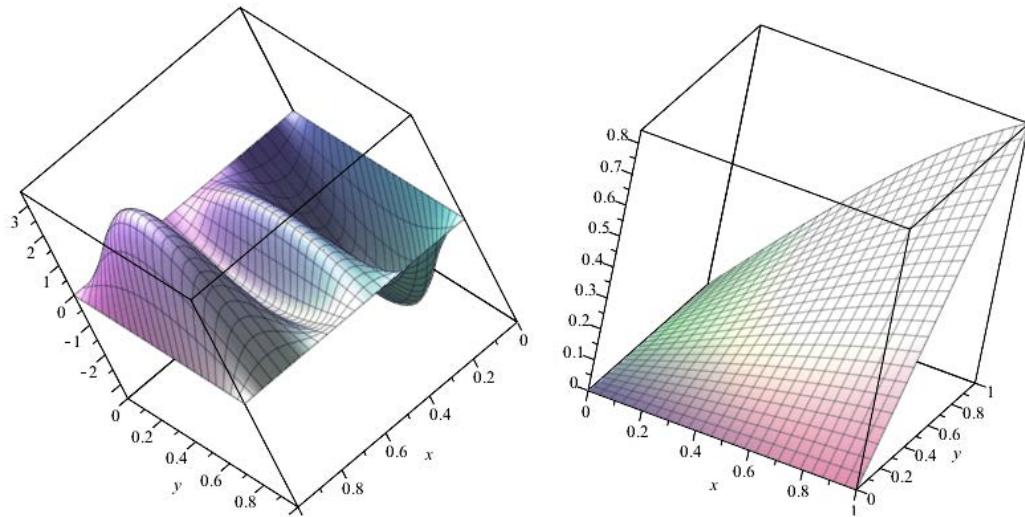
```

2.4 Построение приближенных прогибов упругой пластины при выбранных значениях параметров.

```

lambda1 := -1;
lambda2 := -1;
progib := e11 * lambda1 + e22 * lambda2;
plot3d(progib, x = 0..1, y = 0..1);
plot3d(gamma1, x = 0..1, y = 0..1);

```



Приложение Б

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU 2017610263

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):

2017610263

Автор:

Костин Дмитрий Владимирович (RU)

Дата регистрации: **09.01.2017**

Правообладатель:

Костин Дмитрий Владимирович (RU)

Номер и дата поступления заявки:

2016661928 07.11.2016

Дата публикации: **10.01.2017**

Название программы для ЭВМ:

Программа для математического моделирования реакции упругой балки на внешние воздействия

Реферат:

Программа предназначена для анализа характерных состояний упругих систем различных конструкций, содержащих в себе элементы типа упругой балки или пластины, шарнирно закрепленной на концах. Программа позволяет получать наглядные зависимости характера прогиба от критических значений параметров, то есть рассчитывать изменения геометрических свойств проектируемых конструкций в зависимости от начальных данных и характера внешнего воздействия. Программа осуществляется посредством математического моделирования прогиба упругой балки и пластины, основанного на применении алгоритма редукции Ляпунова-Шмидта.

Тип реализующей ЭВМ: **IBM-PC-совмест. ПК**

Язык программирования: **Maple**

Вид и версия операционной системы: **Windows 2000 и выше**

Объем программы для ЭВМ: **1 Мб**



ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства):
2017610066

Автор:

Костин Дмитрий Владимирович (RU)

Дата регистрации: **09.01.2017**

Правообладатель:

Костин Дмитрий Владимирович (RU)

Номер и дата поступления заявки:
2016661824 07.11.2016

Дата публикации: **10.01.2017**

Контактные реквизиты:
нет

Название программы для ЭВМ:

Программа для математического моделирования динамического изменения состояния упругой двумерной балки

Реферат:

Программа предназначена для анализа изменений конструктивных особенностей двумерной балки. Позволяет численно строить динамически изменяющуюся конструкцию упругой балки под действием внешних сил. Программа осуществляется посредством функциональных методов анализа динамической математической модели, описываемой дифференциальным уравнением четвертого порядка с кубической нелинейностью.

Тип реализующей ЭВМ: **IBM PC - совмест. ПК**

Язык программирования: **Maple**

Вид и версия операционной системы: **Windows 2000 и выше**

Объем программы для ЭВМ: **214 Кб**