

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Математический факультет  
Кафедра функционального анализа и операторных уравнений

Программная реализация динамического моделирования погружения сваи  
Магистерская диссертация  
Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки  
Профиль Математическое и компьютерное моделирование

Зав. Кафедрой \_\_\_\_\_ д. ф.-м. н., проф. М.И. Каменский \_\_.\_\_.20\_\_г.

Обучающийся \_\_\_\_\_ А.А. Уткин

Руководитель \_\_\_\_\_ д. ф.-м. н., проф. М.И. Каменский

Воронеж 2021

# Содержание

Введение	3
1   Задача оптимизации	4
2   Описание вибрационного погрузателя	6
3   Построение модели работы импульсного погрузателя	9
4   Программная реализация	14
5   Заключение	16
Список литературы	17
Приложение	18

# Введение

На сегодняшний день в строительной сфере довольно часто возникает потребность в использовании вибропогружателя для погружения свайных элементов в землю. Данная востребованность подталкивает к созданию математической модели погружения свайного элемента, а также к разработке программного обеспечения для динамической визуализации этой модели.

Целью работы была поставлена задача, на основе теории вибрационных машин и теоремы об оптимальности импульса Максвелла-Фейера, разработать программное обеспечение для динамической визуализации модели погружения свайного элемента в землю.

Решение данной задачи несомненно актуальна и соответствует профилю.

# 1 Задача оптимизации

В теории и практике создания некоторых технических устройств имеется необходимость поиска решений, связанных с оптимизацией тригонометрических полиномов. Такая необходимость, например, возникает в теории антенных устройств, нелинейной оптике или зубчатой передаче.

Математической модель направляющего импульса может быть представлена в виде тригонометрического полинома:

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \cos(kt) \quad (1.1)$$

Пусть  $f_{\max}(t)$  — максимальное значение импульса силы за время  $t$ ,  $f_{\min}(t)$  — минимальное значение импульса за время  $t$ . Тогда:

$$\begin{aligned} K &= \left| \frac{f_{\max}(t)}{f_{\min}(t)} \right| \rightarrow \max \\ f_{\max} &= \max_t f(t, \lambda), \\ f_{\min} &= \min_t f(t, \lambda) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Число  $K$  будем называть коэффициентом асимметрии полинома (1.1).

В ряде прикладных задач решается проблема создания эффективного импульса, путем максимизации функционала  $K$ .

Для достижения коэффициентом асимметрии максимального значения необходимо решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \inf_t f(t, \lambda) &\rightarrow \sup_{\lambda}, \text{ где } t \in [0, \pi] \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k &= c, \text{ где } c = \text{const} > 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Оптимальность (1.1) может быть доказана следующей теоремой [3]:

**Теорема 1.** *Многочлен (1.1) является оптимальным тогда и только тогда, когда он с точностью до постоянного множителя имеет вид суммы Фейера:*

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n (n+1-k) \cos(kt) \quad (1.4)$$

*При этом имеет место равенство:*

$$\max_{\lambda} K_n(\lambda) = n \tag{1.5}$$

## 2 Описание вибрационного погружателя

Вибрационный погружатель предназначен для погружения или извлечения свайных элементов в песчаных или глинистых грунтах. Работа таких погружателя (рис. 1) основана на двух основных принципах:

1. На эффекте резкого снижения сопротивления погружения свайного элемента при сообщении последнему вибрации;
2. На действии полигармонического импульса, создаваемого центробежными силами системы дебалансов.

Такую процедуру погружения свайного элемента в землю называют вибрационным погружением.

**Определение 1.** *Вибрационным погружением называют внедрение твердого тела в сопротивляющуюся среду под действием постоянной и знакопеременной сил.*

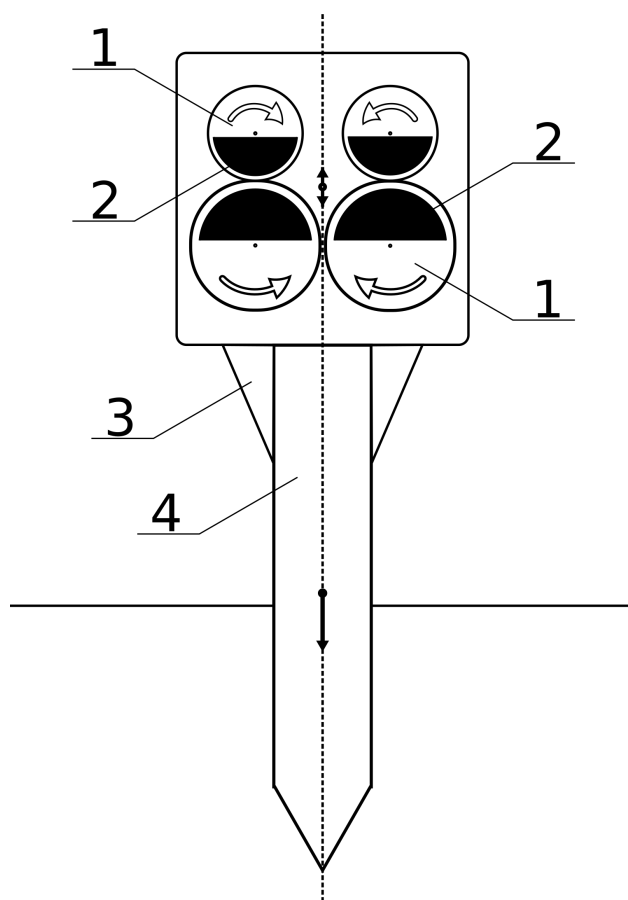


Рис. 1: Схема вибрационного погружателя.

При вращении валов (1) с дебалансами (2) на их ось крепления действует центробежная сила и вибрационный погружатель получает вибрирующее движение, которое сообщается через наголовник (3) свайному элементу (4).

**Определение 2.** *Дебалансом называют неуравновешенность вращающихся частей машин (роторов, коленчатых валов, шкивов и т. п.).*

**Определение 3.** *Сила, препятствующая материальной точке, которая движется по окружности, удалиться от центра этой окружности, называется центростремительной силой. Эта сила направлена по радиусу от окружности к центру. По третьему закону Ньютона имеется равная и противоположно направленная ей сила противодействия (сила, с которой движущаяся точка стремится удалиться от центра). Такая сила называется центробежной.*

При этом, предполагается, что погружаемый элемент жестко присоединен к возбудителю вибраций.

В случае с вибрационным погружателем в его конструкции участвует лишь одна пара<sup>1</sup> дебалансов. В таком случае графиком его гармоническим колебания будет косинусоида (рис. 2).

**Определение 4.** *Гармоническим колебанием называют колебание, в процессе которого величины, характеризующие движение, изменяются гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону.*

При использовании в конструкции погружателя двух и более пар дебалансов разных характеристик, погружатель можно назвать импульсным. В графике гармоническим колебания такого погружателя будет замечен характерный импульс (рис. 5 и рис. 6), направлена на погружение твердого тела в сопротивляющуюся среду.

**Определение 5.** *Импульсом силы называют векторную физическую величину, которая является мерой действия силы за некоторый промежуток времени.  $\vec{I}$  — импульс силы  $\vec{F}$  за малый промежуток времени  $t$ .*

---

<sup>1</sup> Причины использования дебалансов парами более подробно будет рассказано в главе 3.

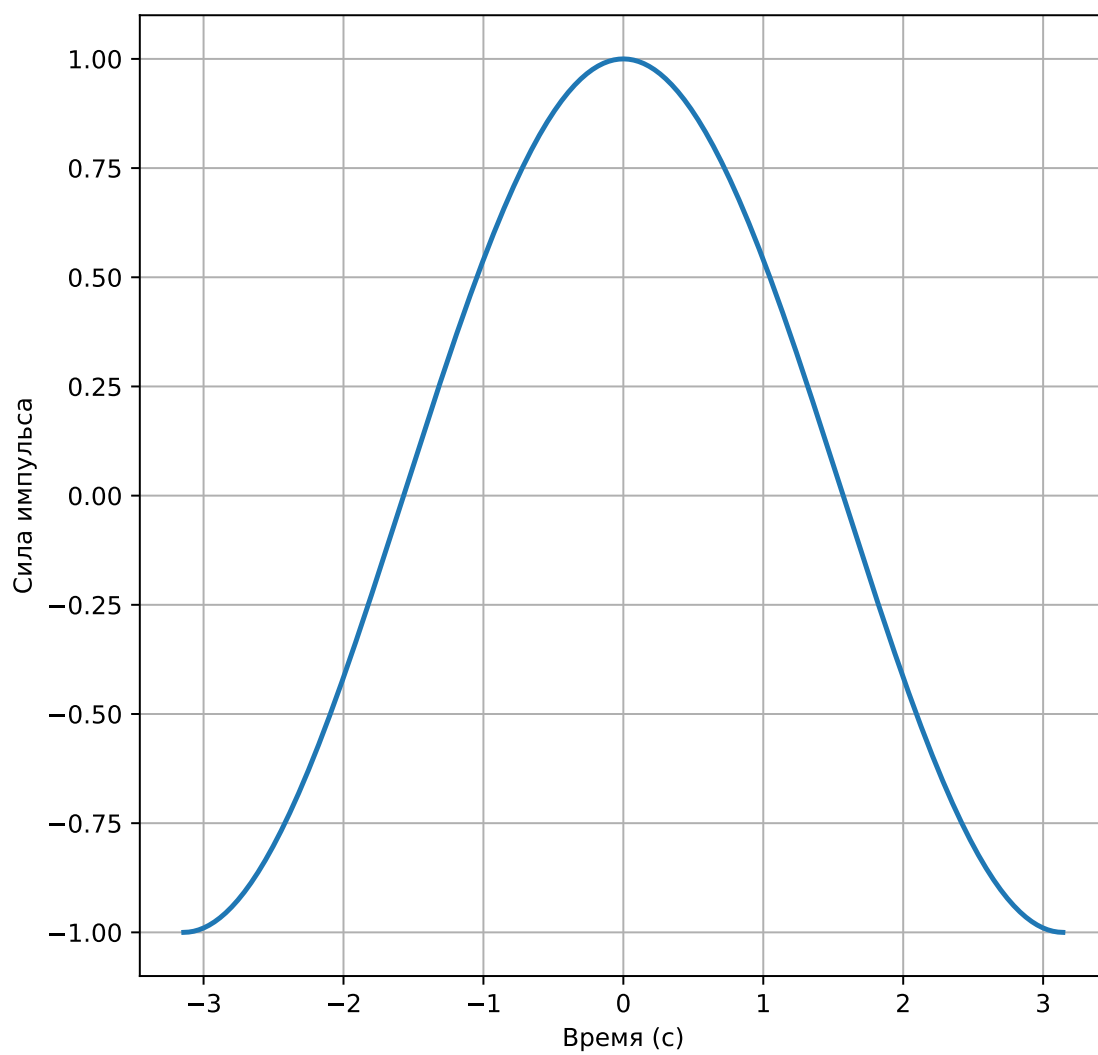


Рис. 2: Импульс силы для одной пары дебалансов.



### 3 Построение модели работы импульсного погрузателя

Пусть дан некий дебаланс с радиусом  $r$ , радиус вала которого равен  $R$ ,  $\omega$  — угловая скорость и  $l$  — расстояние от центра масс до оси вращения дебаланса, а его масса будет равна  $m$  (рис. 3).

**Определение 6.** *Центром масс называют точку, через которую должна проходить линия действия силы, чтобы под действием этой силы тело двигалось поступательно (не вращалось).*

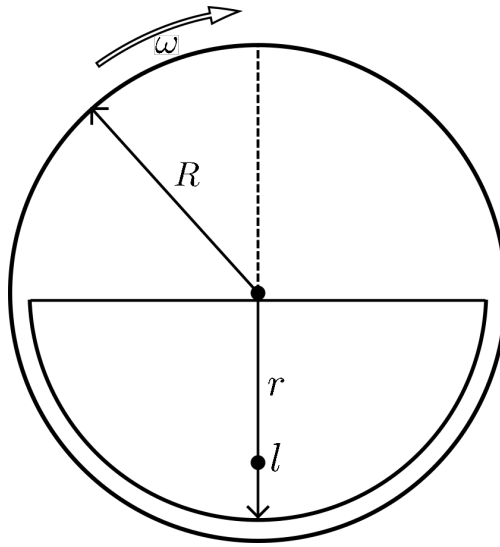


Рис. 3: Схема дебаланса.

Тогда, при вращении данного дебаланса возникнет центробежная сила, которая имеет вид:

$$F_{\text{центр.}} = m \cdot \omega^2 \cdot \vec{R}_0 \quad (3.1)$$

В нашем случае  $\vec{R}_0$  будет равен расстоянию от центра масс  $l$ , которое, в случае дебаланса, имеет вид:

$$l = \frac{4r}{3\pi} \quad (3.2)$$

Вращение такого дебаланса вокруг собственной оси будет иметь вид гармонического колебания, которое будет иметь вид:

$$x(t) = \lambda \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3.3)$$

где  $\lambda = m \cdot \omega^2 \cdot l$

где  $x(t)$  — значение изменяющейся величины в момент времени  $t$ ,  $\lambda$  — амплитуда колебаний,  $\omega$  — циклическая (круговая) частота колебаний,  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний.

Гармонические колебания являются периодическими. Период  $T$  этих колебаний равен периоду функции  $\cos(\omega t + \varphi_0)$ , то есть:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Начальная фаза колебаний в работе импульсного погружателя не является важной, из чего следует, что ее можно игнорировать:

$$x(t) = \lambda \cos(\omega t) \quad (3.4)$$

В работе импульсного погружателя полезной силой считается та, которая направлена на погружение твердого тела в сопротивляющуюся среду. Для компенсации горизонтальных сил, возникающих при вращении одного дебаланса, в конструкции погружателя дебалансы используются парами (рис. 4). Их вращение происходит в противоположные стороны, по отношению друг к другу (рис. 1). В таком случае, уравнение гармонического колебания пары дебалансов будет иметь вид:

$$x(t) = 2m\omega^2 l \cos(\omega t) \quad (3.5)$$

Сила, направленная вверх может привести к разрушению погружаемого твердого тела. Для компенсации этой силы в импульсном погружателе используется несколько пар дебалансов с разными характеристиками.

Уравнение гармонического колебания для второй пары дебалансов будет иметь вид:

$$x(t) = 2m_2 \cdot 4\omega^2 \cdot l(r_2) \cdot \cos(2\omega t)$$

Уравнение гармонического колебания для пары дебалансов в общем виде:

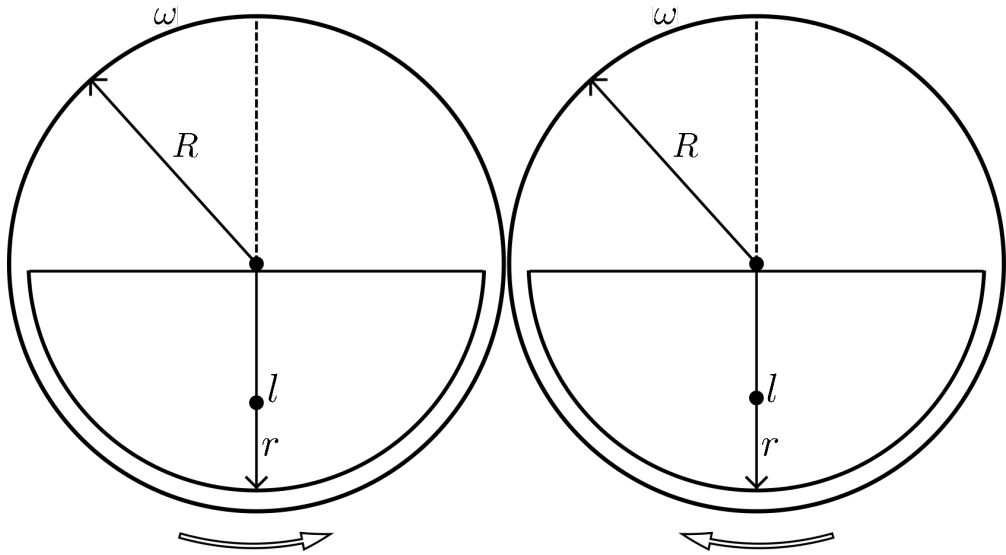


Рис. 4: Схема пары дебалансов.

$$x(t) = 2m_k \cdot (k\omega)^2 \cdot l(r_k) \cdot \cos(k\omega t) \quad (3.6)$$

Для всех пар дебалансов сумма гармонических колебаний будет иметь вид полинома (1.1).

Из (1.1) следует, что угловая скорость каждого вышестоящего уровня пар дебалансов будет в два раза больше, по сравнению с предыдущим. Если же представить (1.1) в сокращенном виде, то:

$$F = \sum_{k=1}^n 2\lambda_k \cdot \cos(k\omega t) \quad (3.7)$$

$$\lambda = m \cdot \omega^2 \cdot l$$

где  $n$  — количество пар дебалансов,  $k$  — порядковый номер пары дебалансов.

Из этого теоремы 1 следует, что:

$$\lambda_k = \frac{n - k + 1}{n} \cdot \lambda_1, \quad (3.8)$$

где  $\lambda_1 = m_1 \cdot \omega_1^2 \cdot l_1$

где  $n$  — количество пар дебалансов,  $k$  — порядковый номер пары дебалансов.

Равенство (3.8) дает возможность найти значение коэффициента  $\lambda$  для каждой пары дебалансов. Это дает возможность оптимизировать характеристики каждой пары дебалансов в импульсном погружателе отталкиваясь от нужных характеристик первой пары, что позволяет получить наибольший

импульс, направленный на погружение твердого тела, и компенсацию силы, которая направлена в противоположную сторону.

График импульса силы для трех пар дебалансов за время  $t$  представлен на графике (5).

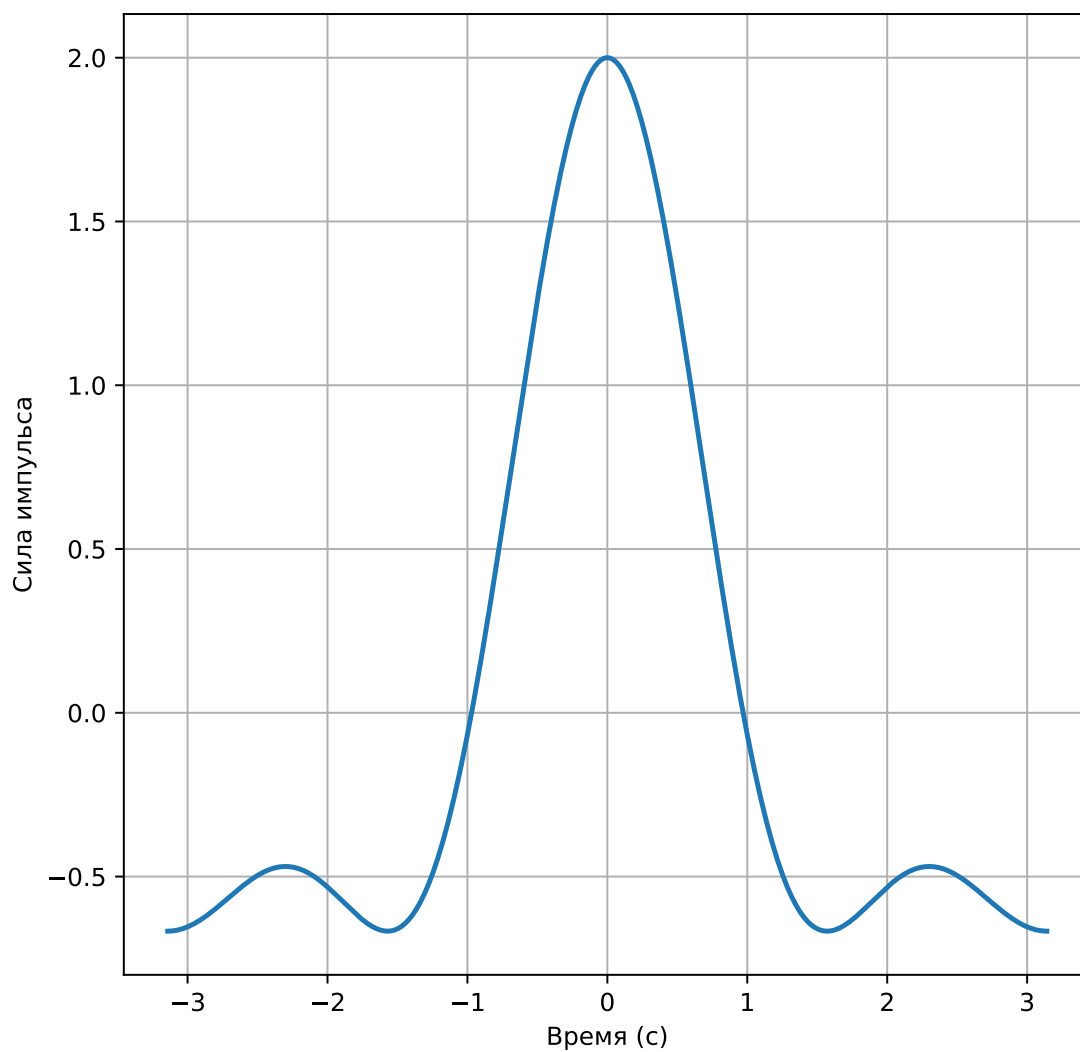


Рис. 5: Импульс силы для трех пар дебалансов.

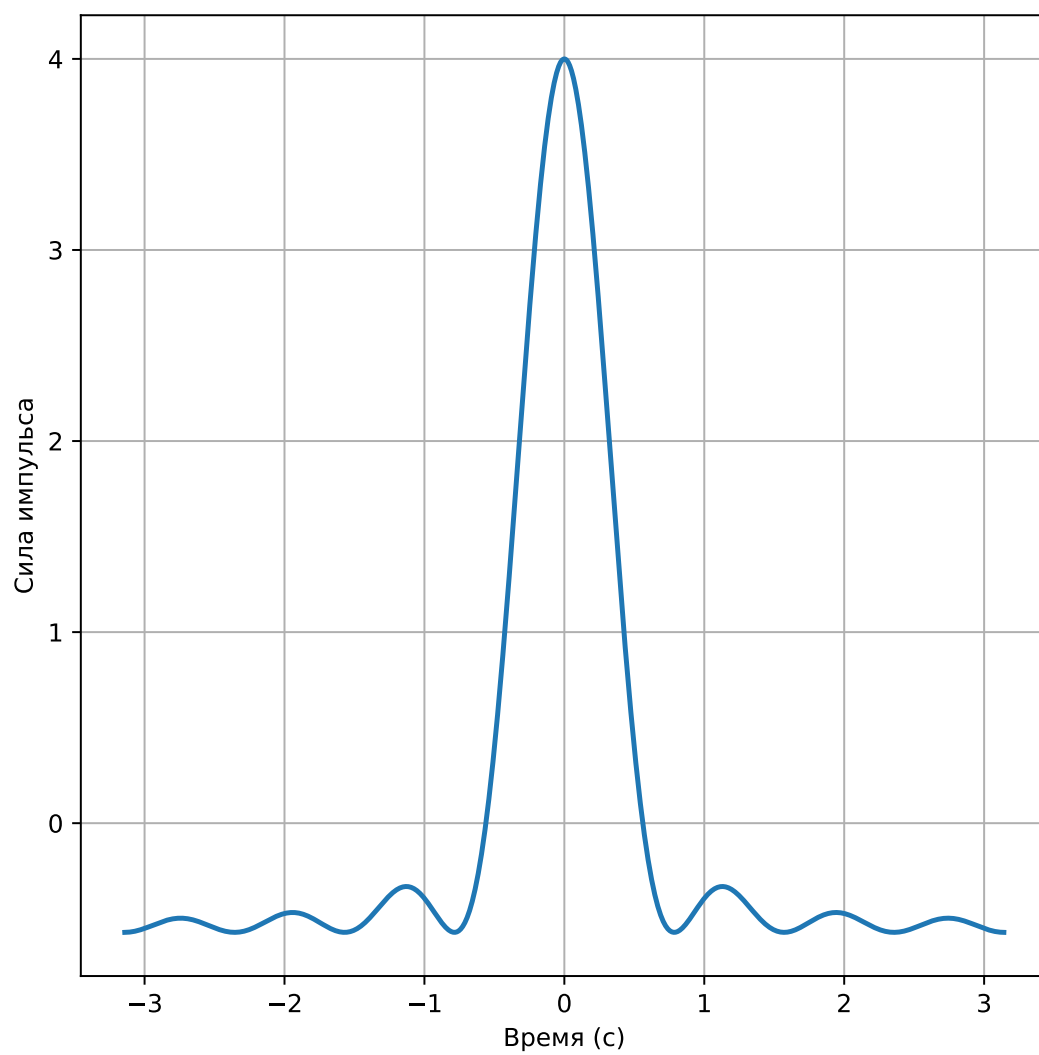


Рис. 6: Импульс силы для семи пар дебалансов.

## 4 Программная реализация

Для динамической визуализации модели погружения свайного элемента в землю была создана программа на языке программирования Python (рис. 7 - 8).

The screenshot shows a software window titled 'Холм3' with two tabs: 'Параметры' (Parameters) and 'Графики' (Graphs). The 'Параметры' tab is active and contains four sections of input fields:

- Параметры сваи (Pile parameters):**
  - Шаг по времени: 0.0001
  - Длина сваи, м.: 0.6
  - Ширина сваи, м.: 0.04
  - Глубина сваи, м.: 0.04
  - Толщина стенки сваи, м.: 0.018
  - Вес 1 метра, кг.: 1.11
- Параметры погружателя (Vibrator parameters):**
  - Кол-во пар дебалансов: 6
  - Вес, кг.: 170
- Параметры грунта (Soil parameters):**
  - Коэф. условий работы грунта под нижним концом сваи: 1.1
  - Коэф. условий работы грунта на боковой поверхности: 1
  - Расчётное сопротивление по боковой поверхности, кПа: 35000
  - Коэффициент шума: 0.001
- Рассчитанные параметры (Calculated parameters):**
  - Вес сваи, кг.: 2.664
  - Периметр сваи, м.: 0.16
  - Площадь сваи, кв. м.: 0.001116

Рис. 7: Интерфейс меню характеристик.

Функционал данной программы разделен на два логических меню:

- Меню характеристик и переменных: позволяет указать характеристики свайного элемента (длина, ширина, глубина, толщина стенки, вес), характеристики вибрационного погружателя (количество дебалансов, вес) и характеристики грунта (коэффициент условий работы грунта под нижним концом сваи, коэффициент условий работы грунта на боковой поверхности, расчётное сопротивление по боковой поверхности, коэффициент шума).

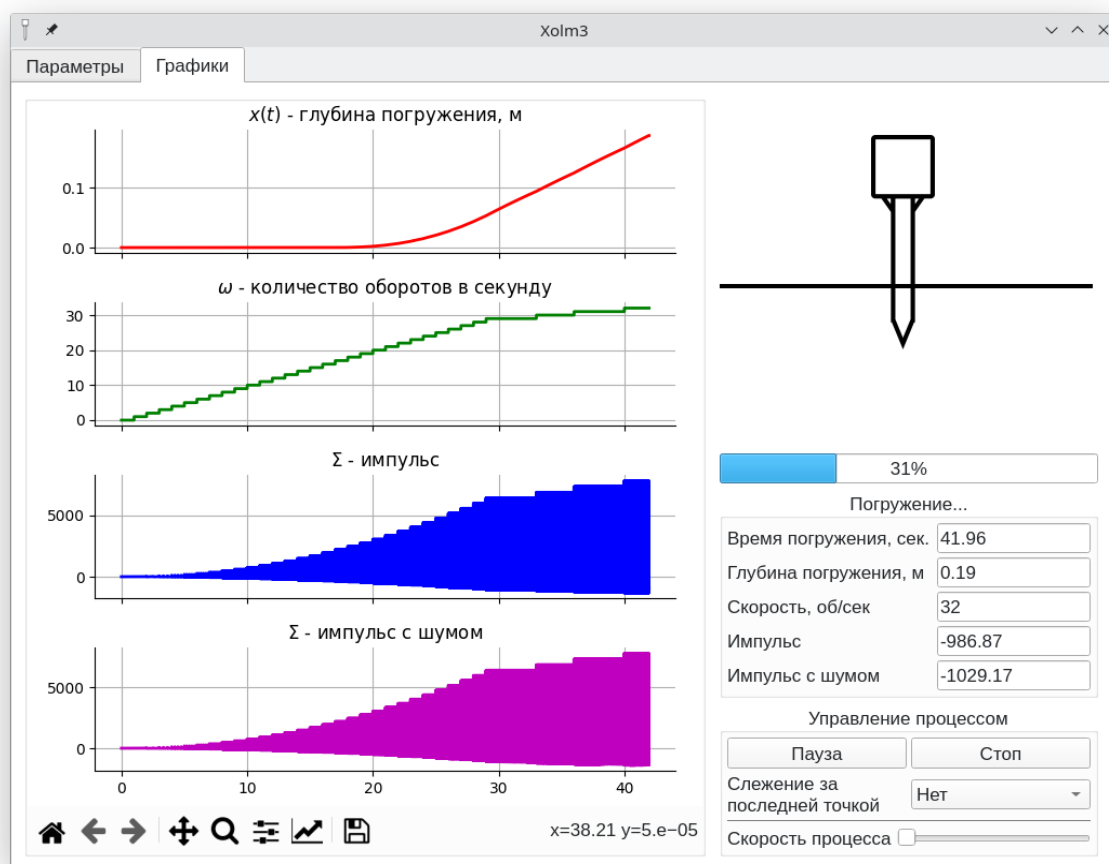


Рис. 8: Интерфейс меню погружения.

- Меню погружения: позволяет следить за динамическим процессом погружения свайного элемента с отображением характеристик данного процесса (текущее время погружения, текущая глубина погружения, количество оборотов в секунду, сила импульс и сила импульс с шумом) и графиков, построенных на параметрах процесса погружения.

После ввода всех характеристик и старта процесса погружения программа дает схематичное представление данного процесса с помощью динамической отрисовки графиков, вывода характеристик процесса, а также визуальное представления состояния процесса.

## 5 Заключение

Целью работы была поставлена задача, на основе теории вибрационных машин и теоремы об оптимальности импульса Максвелла-Фейера, разработать программное обеспечение для динамической визуализации модели погружения свайного элемента в землю.

С помощью применения теоремы об оптимальности модели полигармонического импульса в отношении коэффициента асимметрии и на основе теории вибрационных машин эта цель была достигнута с применением языка программирования Python.



## Список литературы

1. *Блехман И. И.* Вибрационная механика. — М. : Физико-математическая литература, 1994.
2. *Костин В. А., Костин Д. В., Сапронов Ю. И.* Многочлены Максвелла-Фейера и оптимизация полигармонических импульсов // ДАН. — М., 2012.
3. *Костин Д. В.* Бифуркация резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии // Математический сборник. — М., 2016. — С. 90—109.
4. *Костин Д. В., Прицепов М. Ю., Уткин А. А.* Задача о расчете антенны с диаграммой направленности с импульсом Максвелла-Фейера // Современные методы теории функций и смежные проблемы. — Воронеж, 2021.
5. *Савинов О. А., Лускин А. Я.* Вибрационный метод погружения свай и его применение в строительстве. — М. : Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960.
6. *Саммерфилд М.* Программирование на Python 3. Подробное руководство. — Символ-Плюс, 2009.

# Приложение



Рис. 9: Свидетельство о государственной регистрации программы.