



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

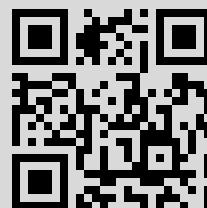
В. Н. Ермоленко, В. А. Костин, Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов, Оптимизация полигармонического импульса, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2012, выпуск 13, 35–44

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 45.137.112.200

21 июня 2021 г., 13:30:04



ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА

В.Н. Ермоленко, В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов

В теории и практике создания некоторых технических устройств имеется необходимость оптимизации тригонометрических полиномов. В статье изложено решение задачи оптимизации тригонометрического полинома (полигармонического импульса) $f(t) := \sum_{k=1}^n f_k \cos(kt)$ по коэффициенту несимметрии $k := \frac{f_{max}}{|f_{min}|}$, $f_{max} := \max_t f(t, \lambda)$, $f_{min} := \min_t f(t, \lambda)$. Вычислены оптимальные значения главных амплитуд. В основу представленного в статье анализа положено понятие «минимального страта Максвелла», под которым подразумевается модмножество многочленов фиксированной степени с максимально возможным количеством минимумов при условии, что все минимумы расположены на одном уровне (значения многочлена во всех точках минимума равны между собой). Многочлен $f(t)$ при выполнении данного условия называется максвелловским. Отправной точкой проведенного исследования послужил экспериментально найденный авторами оптимальный набор значений коэффициентов f_k для произвольного n . Позже появилось доказательство единственности оптимального многочлена с максимальным количеством минимумов на отрезке $[0, \pi]$ и найдена общая формула максвелловского многочлена степени n , связанная с ядром Фейера, для которого коэффициент несимметрии равен n . Возникла естественная гипотеза о том, что ядро Фейера задает оптимальный многочлен. В настоящей статье дано обоснование справедливости этой гипотезы.

Ключевые слова: полигармонический импульс, тригонометрический полином, коэффициент несимметрии, оптимизация, страт Максвелла, ортогональные многочлены.

1. Постановка задачи и комментарии к предмету исследования

В теории и практике создания некоторых технических устройств имеется необходимость отыскания решений, связанных с оптимизацией тригонометрических полиномов. Например, в задаче отыскания многомодового закритического прогиба упругой системы [1] с минимальной величиной относительного прогиба и в задаче повышения эффективности зубчатой передачи с целью увеличения коэффициента несимметрии силового импульса на выходе [2]. Аналогичные оптимизационные задачи имеются в теории антенных устройств, в теории оптимальных измерений динамически искаженных сигналов [3], в нелинейной оптике и других задачах современной физики [4].

Математическая модель полигармонического импульса выглядит как тригонометрический полином $f(t) := \sum_{k=1}^n f_k \cos(kt)$. Проведенный авторами оптимизационный анализ этого полинома дал интересные и несколько неожиданные результаты. В основу анализа было положено понятие «минимальный страт Максвелла» [5 – 8], под которым мы подразумеваем модмножество многочленов с максимально возможным количеством минимумов при условии, что все минимумы расположены на одном уровне (то есть значение многочлена во всех точках минимума одно и то же). Многочлен $f(t)$ при выполнении последнего условия мы называли максвелловским.

Отправной точкой нашего исследования послужил экспериментально найденный нами оптимальный набор значений коэффициентов f_k для произвольного $n \geq 10$. Позже появилось доказательство единственности оптимального многочлена с максимальным количеством минимумов на отрезке $[0, \pi]$. Затем была найдена общая формула максвелловского

многочлена степени n , связанная с ядром Фейера [9], для которого коэффициент несимметрии равен n (см. ниже формулу, идущую вслед за формулой (1)). Возникла естественная гипотеза о том, что ядро Фейера задает оптимальный многочлен. В настоящей статье дано обоснование справедливости этой гипотезы.

Представленные в статье формулы для коэффициентов оптимального многочлена дают объяснение феномену симметричного расположения точек минимума оптимального многочлена.

2. Переход к экстремальной задаче для алгебраического полинома

Итак, простейшей моделью полигармонического импульса является тригонометрический полином

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kt), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (1)$$

Коэффициентом несимметрии этого полинома называется число

$$k := \frac{f_{\max}}{|f_{\min}|}, \quad \text{где} \quad f_{\max} := \max_t f(t, \lambda), \quad f_{\min} := \min_t f(t, \lambda).$$

Достижение коэффициентом несимметрии максимального значения (при вариациях λ) обеспечивается решением следующей задачи математического программирования:

$$\inf_t f(t, \lambda) \longrightarrow \sup_{\lambda}, \quad t \in [0, \pi], \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = c \quad (= \text{const} > 0). \quad (2)$$

Решение задачи (2) удобно провести, перейдя к алгебраическому полиному

$$V(x, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu_k x^k, \quad x \in [-1, 1], \quad \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n), \quad (3)$$

который получен из (1) заменой косинусов на соответствующие многочлены Чебышева (первого рода). В случае $n = 2m + 1$ имеем

$$\cos(t) = x, \quad \cos(2t) = 2x^2 - 1, \quad \cos(3t) = 4x^3 - 3x, \quad \dots, \quad \cos(nt) = \sum_{q=0, \dots, m} \varkappa_{n,q} x^{2q+1}, \quad (4)$$

где

$$\varkappa_{n,q} = (-1)^{m+q} \sum_{k,r; k-r=m-q} C_{2k}^{2m+1} C_r^k, \quad (5)$$

$C_l^p = \frac{p!}{l!(p-l)!}$ — биномиальный коэффициент.

Формула (5) для коэффициентов $\varkappa_{n,q}$ легко выводится из широко известного разложения $\cos(nt) = \operatorname{Re} (\cos(t) + i \sin t)^n$.

При $n = 2m$ последняя строка в (4) имеет следующий вид $\cos(nt) = \sum_{q=0, \dots, m} \varkappa_{n,q} x^{2q}$ где $\varkappa_{n,q}$ определяется аналогичным образом:

$$\varkappa_{n,q} = (-1)^{m+q} \sum_{k,r; k-r=m-q} C_{2k}^{2m} C_r^k, \quad (6)$$

На основе (4) можно получить соотношения между коэффициентами тригонометрического полинома и соответствующего ему алгебраического полинома.

Из условия $\sum_{k=1}^n \lambda_k = c$ следует $V(1, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu_k = c$.

3. Теорема о структуре \mathfrak{M} -многочлена

Пусть $n = 2m + 1$ и $-1 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_m < a_m$ — критические (экстремальные) точки функции $V(x, \bar{\mu})$:

$$\frac{dV(b_k, \bar{\mu})}{dx} = \frac{dV(a_k, \bar{\mu})}{dx} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Очевидно, что при этом $b_1, b_2, \dots, b_m, 1$ — точки локальных максимумов, а $-1, a_1, a_2, \dots, a_m$ — точки локальных минимумов.

Если $\mu = \bar{\mu}$ — решение задачи (2), то для него с необходимостью выполняется условие Максвелла [6].

$$V(-1, \bar{\mu}) = V(a_1, \bar{\mu}) = V(a_2, \bar{\mu}) = \dots = V(a_m, \bar{\mu}). \quad (8)$$

Многочлен степени n , для которого выполнено условие (8), будем называть \mathfrak{M} -многочленом. Общее значение в выражениях (8) обозначим \mathfrak{M} и назовем константой Максвелла. Множество всех \mathfrak{M} -многочленов называется минимальным стратом Максвелла в пространстве многочленов степени n .

Рассмотрим вспомогательный многочлен $\mathcal{N}(x, \mu)$ степени n , для которого при $\mu = \bar{\mu}$ выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(-a_1, \bar{\mu}) &= \mathcal{N}(-a_2, \bar{\mu}) = \dots = \mathcal{N}(-a_m, \bar{\mu}) = \mathcal{N}(-1, \bar{\mu}) = \\ &= \frac{d\mathcal{N}(-a_1, \bar{\mu})}{dx} = \frac{d\mathcal{N}(-a_2, \bar{\mu})}{dx} = \dots = \frac{d\mathcal{N}(-a_m, \bar{\mu})}{dx} = 0, \\ -1 < -a_1 < -a_2 < \dots < -a_m < 1. \end{aligned}$$

Ясно, что эти условия определяют многочлен $\mathcal{N}(x, \bar{\mu})$ с точностью до постоянного множителя. Положим

$$\mathcal{N}(x, \bar{\nu}) = (x+1)(x+a_1)^2 \dots (x+a_m)^2 = \sum_{k=0}^n \bar{\nu}_k x^k. \quad (9)$$

Многочлен V отличается от (9) постоянным слагаемым (с точностью до общего постоянного множителя). Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Каждый оптимальный (являющийся решением задачи (2)) многочлен $V(x, \bar{\mu})$ является \mathfrak{M} -многочленом и для него имеет место следующее представление:*

$$V(x, \bar{\mu}) = \mathcal{C} \left((x+1)(x+a_1)^2 \dots (x+a_m)^2 - \mathcal{D} \right).$$

Константы \mathcal{C}, \mathcal{D} определяются условиями $V(1, \bar{\mu}) = \mathcal{C}$, $\int_{-1}^1 \frac{V(x, \bar{\mu})}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$.

Из первого равенства получаем $\mathcal{C} = \frac{c}{(2(1+a_1)^2 \dots (1+a_m)^2 - \mathcal{D})}$. Второе равенство — следствие аналогичного равенства для исходного тригонометрического многочлена. Из него получаем

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{(x+1)(x+a_1)^2 \dots (x+a_m)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (10)$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^\top.$$

4. Вычислительные формулы

Так как $V_{max} = c$, $V_{min} = \mathcal{M} := \mathcal{CD}$, то отыскание (при $n = 2m + 1$) экстремумов для коэффициента несимметрии $k := \frac{V_{max}}{|V_{min}|} = \frac{2(1+a_1)^2 \dots (1+a_m)^{2-\mathcal{D}(a)}}{\mathcal{D}(a)}$ сводится к отысканию экстремумов функции $\mathcal{W} := \frac{(1+a_1)^2 \dots (1+a_m)^2}{\mathcal{D}(a)}$. Запишем многочлен $(1+a_1)^2 \dots (1+a_m)^2$ в виде

$$\left(\sum_{k=0}^m \sigma_{m-k} x^k \right)^2 = \sum_{k=0}^m \sigma_{m-k}^2 x^{2k} + 2 \left(\sum_{0 \leq p < q \leq m} \sigma_p \sigma_q x^{2m-p-q} \right),$$

где $\{\sigma_k\}$ — элементарные симметрические многочлены от a : $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = \sum_{j=1}^m a_j$, $\sigma_2 = \sum_{j_1 < j_2} a_{j_1} a_{j_2}$, \dots , $\sigma_m = a_1 a_2 \dots a_m$. Тогда из (10) получаем $\mathcal{D}(a) = \mathcal{Q}(\sigma)$, $\mathcal{Q}(\sigma) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \sigma_{m-k}^2 + 2 \left(\sum_{p,r} \alpha_{m-p-r} \sigma_p \sigma_{p+2r} \right)$, $0 \leq p \leq m$, $1 \leq r \leq [(m-p)/2]$, $\alpha_k = \int_{-1}^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \cos^{2k}(t) dt$, или, положив $l = p + r$, получим $\mathcal{Q}(\sigma) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \sigma_{m-k}^2 + 2 \left(\sum_{l,r} \alpha_{m-l} \sigma_{l-r} \sigma_{l+r} \right)$, $1 \leq r \leq l \leq m$, $l+r \leq m$.

Таким образом, для \mathcal{W} имеем следующее представление: $\mathcal{W} = \frac{\mathcal{P}^2(\sigma)}{\mathcal{Q}(\sigma)}$, $\mathcal{P}(\sigma) = \sum_{k=0}^m \sigma_{m-k} x^k$. Соответственно, для производной получаем выражение

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \sigma_k} = \left(2\mathcal{P}\mathcal{Q} - \mathcal{P}^2 \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k} \right) / \mathcal{Q}^2(\sigma).$$

Так как в экстремальной точке $\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \sigma_k} = 0$, то для вычисления искомой экстремальной точки получаем следующую систему уравнений:

$$2\mathcal{Q} - \mathcal{P} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

Следствием этой системы является система линейных уравнений (полученная последовательным вычитанием уравнений системы (11) и отбрасыванием множителя \mathcal{P}):

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k} - \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_1} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, m. \quad (12)$$

При отыскании решения системы (12) полезны следующие формулы:

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k} = 2 \left(\sum_{j=[(k+1)/2]}^{[(k+m)/2]} \alpha_{m-j} \sigma_{2j-k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Из формул (11), (12) вытекают существование и единственность оптимального многочлена.

Аналогичное рассуждение (с небольшими модификациями) проводится в случае $n = 2m$.

5. Пример: $n = 7$

Наибольший интерес для практики представляют случаи $n \leq 7$. Остановимся на случае $n = 7$:

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=1}^7 \lambda_k \cos(kt), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_7). \quad (13)$$

Достижение коэффициентом несимметрии максимального значения осуществляется переходом к алгебраическому полиному

$$V(x, \mu) = \sum_{k=0}^7 \mu_k x^k, \quad x \in [-1, 1], \quad \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_7),$$

полученному заменой косинусов соответствующими многочленами Чебышева первого рода.

Из условия $\sum_{k=1}^7 \lambda_k = c$ следует $V(1, \mu) = \sum_{k=0}^7 \mu_k = c$.

Рассмотрим многочлен

$$\mathcal{N}(x, \bar{\nu}) = (x+1)(x+a_1)^2(x+a_2)^2(x+a_3)^2 + \mathcal{D} = \sum_{k=0}^7 \bar{\nu}_k x^k.$$

Введем, далее, многочлены $P(\sigma) = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ и

$$Q(\sigma) = 3/8\sigma_1^2 + 1/2\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 3/4\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 - 5/8\sigma_1 + 3/4\sigma_2 + 3/4\sigma_3 + 5/16,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — элементарные симметрические многочлены от $(a_1, a_2, a_3)^\top$.

Как установлено выше, коэффициенты экстремального многочлена \mathcal{N} определяются уравнениями $\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \sigma_k} = 0$, $k = 1, 2, 3$. Для производных многочлена Q имеем следующие представления:

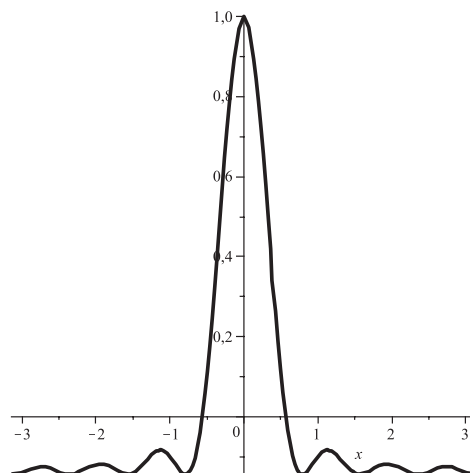
$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1} = \alpha_2 \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_3, \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_2} = \alpha_2 \sigma_0 + \alpha_1 \sigma_2, \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_3} = \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_0 \sigma_3.$$

В соответствии с системой уравнений (11) запишем соотношение

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma_3} - \frac{\partial Q}{\partial \sigma_1} \right) = \alpha_2 \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_3 - \alpha_1 \sigma_1 - \alpha_0 \sigma_3 = (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_1 - (\alpha_0 - \alpha_1) \sigma_3 = 0$$

или $\sigma_3 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_0 - \alpha_1} \sigma_1 = \frac{1}{4} \sigma_1$. Если положить $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$, то получим $\frac{\partial Q}{\partial \sigma_2} = 0$ и, следовательно, $\sigma_2 = -\frac{3}{4}$. Нетрудно увидеть, что этим значениям элементарных симметрических многочленов соответствуют следующие точки минимума (оптимального) многочлена $\mathcal{N}(x, \bar{\nu})$: $a_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

На рисунке изображен соответствующий график оптимального импульса в случае $c = 1$.



Минимальное значение \mathfrak{M} функции импульса равно $-\frac{1}{7}$ (при $c = 1$). Следовательно, коэффициент несимметрии равен 7.

6. Симметрия множества точек минимума оптимального многочлена

6.1. Случай $n = 2m$

Перейдем к тригонометрической форме функции \mathcal{W} :

$$\mathcal{W} = \frac{\mathcal{N}^2(0)}{\mathcal{D}}, \quad \mathcal{N}(t) := \prod_{k=1}^m (\cos(t) - \cos(t_k)), \quad \mathcal{D} := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{N}^2(t) dt. \quad (14)$$

Для производной $\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t_k}$ имеем выражение

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t_k} = \frac{(\sin(t_k) \left(\frac{2\mathcal{N}^2(0)}{(1-\cos(t_k))} \mathcal{D} - \mathcal{N}^2(0) \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t_k} \right))}{\mathcal{D}^2}.$$

Так как для числителя этого выражения имеем представление

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin(t_k) \mathcal{N}^2(0)}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{1 - \cos(t_k)} - \frac{1}{\cos(t) - \cos(t_k)} \right) \mathcal{N}^2(t) dt = \\ = \frac{2 \sin(t_k) \mathcal{N}^2(0)}{\pi(1 - \cos(t_k))} \int_0^\pi \frac{(\cos(t) - 1)}{(\cos(t) - \cos(t_k))} \mathcal{N}^2(t) dt, \end{aligned}$$

то в оптимальной точке получаем следующую систему равенств:

$$\int_0^\pi \frac{(\cos(t) - 1)}{(\cos(t) - \cos(t_k))} \mathcal{N}^2(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (15)$$

Левые части этой системы (15) являются компонентами градиента функции

$$\mathcal{U} := \int_0^\pi (\cos(t) - 1) \mathcal{N}^2(t) dt. \quad (16)$$

(после отбрасывания постоянных множителей). Таким образом, имеем следующие утверждение.

Теорема 2. *Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда он задает в \mathbb{R}^m критическую точку функции (16).*

Отыскание критических точек функции (16) удобно проводить на основе следующих утверждений, вытекающих из теоремы 2.

Теорема 3. *Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:*

$$\int_0^\pi (\cos^k(t) - 1) \mathcal{N}(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (17)$$

Последняя теорема допускает переформулировку (вследствие соотношений (4)).

Теорема 4. Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:

$$\int_0^\pi (\cos(kt) - 1) \mathcal{N}(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (18)$$

Замечание 1. Эта теорема дает критерий оптимальности, полезный для практических применений: набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда многочлен $\mathcal{N}(t)$ ортогонален на отрезке $[0, \pi]$ многочленам $\cos(kt) - 1$, $k = 1, \dots, m$.

Прямое вычисление ортогонального многочлена приводит к следующему утверждению.

Теорема 5. Оптимальный многочлен $\mathcal{N}(t)$ имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:

$$\frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \cos(3t) + \dots + \cos(mt). \quad (19)$$

Лемма 1. Имеет место следующее соотношение: $\left(\frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \dots + \cos(mt)\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2m+1}{2} + 2m \cos(t) + (2m-1) \cos(2t) + (2m-2) \cos(3t) + \dots + \cos(2mt)\right)$.

Из этой леммы вытекает утверждение, дающее ответ на вопрос о форме оптимального импульса.

Теорема 6. Многочлен (1) является оптимальным (при $n = 2m$) тогда и только тогда, когда он имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:

$$W(t) = 2m \cos(t) + (2m-1) \cos(2t) + (2m-2) \cos(3t) + \dots + \cos(2mt). \quad (20)$$

Из леммы (1) следует

Теорема 7. Для оптимизирующего набора $\{t_k\}_{k=1}^m$ выполнены соотношения

$$t_k = k\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{2m+1}, \quad k = 1, \dots, m,$$

означающие совпадение $\{t_k\}_{k=1}^m$ с аргументами комплексных корней степени $2m+1$ из единицы.

Таким образом, для множества точек минимума оптимального многочлена имеет место симметрия, связанная с естественным действием на множестве комплексных чисел \mathbb{C} группы

$$\mathbb{Z}_{2m+1} = \mathbb{Z} / (2m+1)\mathbb{Z}.$$

6.2. Случай $n = 2m + 1$

Случай многочлена нечетной степени можно изучить аналогичным образом, внося соответствующие модификации. Сформулируем основные утверждения для этого случая.

Теорема 8. Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным для многочлена \mathcal{W} тогда и только тогда, когда он задает в \mathbb{R}^m критическую точку функции функции

$$\mathcal{U} := \int_0^\pi (\cos^2(t) - 1) \mathcal{N}^2(t) dt. \quad (21)$$

Вычисление оптимального многочлена также сводится к вычислению многочлена, ортогонального к наборам элементарных многочленов. В итоге получаем следующие утверждения.

Теорема 9. *Многочлен $\mathcal{N}(t)$ является оптимальным тогда и только тогда, когда он имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:*

$$\frac{1}{2} + \cos(2t) + \cos(4t) + \dots + \cos(mt), \quad (22)$$

если $m = 2p$, и

$$\cos(t) + \cos(3t) + \dots + \cos(mt), \quad (23)$$

если $m = 2p + 1$.

Теорема 10. *При $n = 2m + 1$ многочлен (1) является оптимальным тогда и только тогда, когда он имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:*

$$(2m + 1) \cos(t) + 2m \cos(2t) + (2m - 1) \cos(3t) + \dots + \cos((2m + 1)t).$$

Теорема 11. *При $n = 2m + 1$ для оптимального набора $\{t_k\}_{k=1}^m$ выполнены соотношения*

$$t_k = k\omega, \quad \omega = \frac{\pi}{m+1}, \quad k = 1, \dots, m,$$

означающие совпадение $\{t_k\}_{k=1}^m$ с аргументами комплексных корней степени $2(m+1)$ из единицы.

Таким образом, при $n = 2m + 1$ для множества точек минимума оптимального многочлена имеет место симметрия, связанная с естественным действием на \mathbb{C} группы $\mathbb{Z}_{2(m+1)} = \mathbb{Z} / 2(m+1)\mathbb{Z}$.

Литература

1. Даринский, Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. – М.: МАИ. – 2004. – Т. 12. – С. 3–140.
2. Ермоленко, В.Н. Инновационные решения для свайного фундаментостроения / В.Н. Ермоленко // Стройпрофиль. – 2010. – №6 (84). – С. 20–22.
3. Шестаков, А.Л. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – № 17(234), вып. 8. – С. 70–75.
4. Маслов, В.П. Теория возмущений и асимптотические методы / В.П. Маслов. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 553 с.
5. Бреккер, Т. Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Бреккер, Л. Ландер. – М.: Мир, 1977. – 208 с.
6. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф. Т.1 / Р. Гилмор. – М.: Мир, 1984. – 350 с.
7. Арнольд, В.И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. – М.: МЦНМО, 2004. – 672 с.
8. Постон, Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт. – М.: Мир, 1980. – 608 с.

9. Сегё, Г. Ортогональные многочлены / Г. Сегё. – М.: Физматлит, 1962. – 500 с.

Виктор Николаевич Ермоленко, кандидат физико-математических наук, доцент, инженеринговая компания «Виброновации» (г. Воронеж, Российская Федерация), vibronovacii@mail.ru.

Владимир Алексеевич Костин, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой математического моделирования, Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), vkostin@mail.ru.

Дмитрий Владимирович Костин, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического моделирования, Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), vkostin@mail.ru.

Юрий Иванович Сапронов, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического моделирования, Воронежский государственный университет (г. Воронеж, Российская Федерация), yusapr@mail.ru.

MSC 90C30, 90C90

Optimization of a Polyhamonic Impulse

V.N. Ermolenko, Engineering company «Vibroinnovation», (Voronezh, Russian Federation),
V.A. Kostin, Voronezh State University (Voronezh, Russian Federation),
D.V. Kostin, Voronezh State University (Voronezh, Russian Federation),
Yu.I. Sapronov, Voronezh State University (Voronezh, Russian Federation)

In theory and practice of building some technical devices, it is necessary to optimize trigonometric polynomials. In this article, we provide optimization of a trigonometric polynomial (polyharmonic impulse) $f(t) := \sum_{k=1}^n f_k \cos(kt)$ with the asymmetry coefficient $k := \frac{f_{max}}{|f_{min}|}$, $f_{max} := \max_t f(t, \lambda)$, $f_{min} := \min_t f(t, \lambda)$. We have calculated optimal values of main amplitudes. The basis of the analysis represented in the article is the idea of the “minimal Maxwell stratum” by which we understand the subset of polynomials of a fixed degree with maximal possible number of minima under condition that all these minima are located at the same level. Polynomial $f(t)$ is then called maxwellian. The starting point of the present study was an experimentally obtained optimal set of coefficients f_k for arbitrary n . Later, we proved uniqueness of the optimal polynomial with maximal number of minima on interval $[0, \pi]$ and derived general formula of a maxwellian polynomial of degree n , which was related to Fejer kernel with the asymmetry coefficient n . Thus, a natural hypothesis arose that Fejer kernel should define the optimal polynomial. The present paper provides justification of this hypothesis.

keywords: polyharmonic impulse, trigonometric polynom, asymmetry coefficient, optimization, Maxwell stratum, orthogonal polynomials.

References

1. Darinskii B.M., Sapronov Yu.I., Tsarev S.L. Bifurcations of Extremals of Fredholm Functionals. *J. of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 145, no. 6, pp. 5311–5453.
2. Ermolenko V.N. Innovative Solutions for Pile Deep Foundation [Innovatsionnye resheniya dlya svaynogo fundamentostroeniya]. *Stroyprofil'*, 2010, no. 6 (84), pp. 20–22.
3. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe*

modelirovanie i programmirovaniye» – Bulletin of South Ural State University. Seria «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software», 2011, no. 17(234), issue 8, pp. 70–75.

4. Maslov V.P. *Teoriya vozmushcheniy i asimptoticheskie metody [Perturbation Theory and Asymptotic Methods]*. Moscow, Publishing House of Moscow State University, 1965. 553 p.
5. Bröcker Th., Lander L. *Differentiable Germs and Catastrophes*. London Mathematical Society. Lecture Notes Series 17, Cambridge University Press, 1975. 178 p.
6. Gilmore R. *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. N. Y., Dover, 1993.
7. Arnold V.I., Varchenko A.N., Gusein-Zade S.M. *Singularities of Differentiable Maps. Volume 1: The Classification of Critical Points Caustics, Wave Fronts*. Birkhäuser Boston, 1985. 396 p.
8. Poston T., Stewart I. *Catastrophe: Theory and Its Applications*. N. Y., Dover, 1998.
9. Szego G. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, 1939. 432 p.

Поступила в редакцию 29 июня 2012 г.