



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Костин, Бифуркация резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 12, 90–109

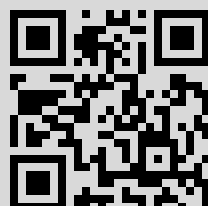
DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8616>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 45.137.112.200

21 июня 2021 г., 13:35:01



УДК 517.538

Д. В. Костин

Бифуркации резонансных колебаний и оптимизация тригонометрического импульса по коэффициенту несимметрии

Изложена методика приближенного вычисления ветви резонансного колебания при ее бифуркации из точки покоя и оптимизации этой ветви по коэффициенту несимметрии, определяемому как отношение максимального значения амплитуды к минимальному. Установлено, что оптимальные значения базисных амплитуд представляют собой коэффициенты соответствующего ряда Фейера. Получено точное наибольшее значение коэффициента несимметрии.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: гладкий функционал, периодическая экстремаль, бифуркация, коэффициент несимметрии, тригонометрический ряд Фейера, редукция Ляпунова–Шмидта.

DOI: 10.4213/sm8616

§ 1. Введение

Центральной темой настоящей работы является задача оптимизации ненулевого тригонометрического импульса

$$f_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kt) \quad (1.1)$$

по критерию максимальности коэффициента несимметрии:

$$K_n = \frac{\max_t f_n(t)}{|\min_t f_n(t)|}. \quad (1.2)$$

Отметим, что критерий такого вида относится к классу “дробных критериев” теории прогнозирования больших систем (см. [1]). Классы таких задач представляют как общематематический, так и прикладной интерес.

Исследованию по первому направлению посвящен § 2 настоящей работы. В этом параграфе представлен метод оптимизации решений общего скалярного обыкновенного дифференциального уравнения порядка $2n$ из точки многомодового вырождения. Полученный результат может применяться к решению конкретных задач прикладного характера. Например, частным случаем такой задачи является оптимизация турбинных лопаток, изученная ранее с помощью представленных здесь методов [2], [3].

Среди инженерных задач встречаются и такие, в которых модель системы непосредственно описывается тригонометрическим импульсом (антенные

устройства и вибропогружатели). Такие задачи тоже были исследованы, и соответствующие оптимальные импульсы для наглядности приведены в § 4 статьи.

Структура статьи представлена тремя основными частями: сведение задачи оптимизации обыкновенного дифференциального уравнения к оптимизации тригонометрического полинома, анализ и оптимизация этого полинома, примеры приложения полученных теорем к инженерным задачам.

В § 2 описан метод исследования бифурцирующих из нуля периодических решений скалярного обыкновенного дифференциального уравнения, приводящий к задаче исследования тригонометрического полинома. Такой анализ состоит из трех шагов. На первом шаге для уравнения выписывается соответствующий функционал действия и задача сводится к поиску экстремалей функционала. На втором шаге вариационная задача переводится в конечномерное пространство посредством редукции Ляпунова–Шмидта. Строится так называемая ключевая функция, главная часть которой – полином, имеющий те же топологические свойства, что и функционал действия.

На третьем шаге проводится анализ особых точек главной части ключевой функции и строится приближенное решение исходного обыкновенного дифференциального уравнения в виде тригонометрического полинома (1.1). Пример таких многомодовых ($n = 2$ и 3) решений приведен в конце § 2. Таким образом, результатом § 2 является схема получения асимптотических представлений ветвей бифурцирующих решений исходного уравнения и, как следствие, получение возможности проведения оптимизации ветви.

В § 3 дается определение коэффициента несимметрии K_n , формулируется центральная задача об оптимизации полинома (1.1) по коэффициенту несимметрии K_n , доказываются теоремы о строении оптимального многочлена. Основным результатом этого параграфа является теорема о том, что многочлен (1.1) является оптимальным (в смысле максимизации коэффициента несимметрии) тогда и только тогда, когда этот многочлен с точностью до постоянного множителя имеет вид суммы Фейера $f_n(t) = \sum_{k=1}^n (n+1-k) \cos(kt)$ и при этом имеет место равенство $K_n = \max_{\lambda} K_n(\lambda) = n$.

В § 4 приведены примеры применения основной теоремы к прикладным задачам из теории антенн и вибропогружательных систем.

Результаты исследований, приведенные в настоящей статье, представляют собой ряд теорем об оптимальном многочлене, позволяющих решить в общем виде центральную задачу, а также примеры приложения этих теорем к исследованию конкретных математических моделей.

§ 2. О вычислении экстремалей посредством нелинейной ритцевской аппроксимации функционала

2.1. Постановка. Рассмотрим общее скалярное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) порядка $2n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^{2n}w}{dt^{2n}} + a_n \frac{d^{2(n-1)}w}{dt^{2(n-1)}} + \dots + a_2 \frac{d^2w}{dt^2} + a_1 w + U\left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}, \dots, \frac{d^{2n-1}w}{dt^{2n-1}}\right) = 0, \quad (2.1)$$

$U(w, w_1, w_2, \dots, w_{2n-1}) = O(w^2 + w_1^2 + \dots + w_{2n-1}^2)$, a_k , $k = 0, \dots, n$, – не зависят от t . Периодическое решение данного уравнения может быть неединственным, и при определенных значениях параметров a_1, \dots, a_n может наблюдаться и появление или вырождения ненулевых периодических решений (бифуркации). Причем главные асимптотические части периодических решений в силу высших степеней уравнения будут многомодовыми, т.е. будут представлять собой линейную комбинацию собственных векторов оператора из левой части (2.1). Главная периодическая часть ветвей периодического решения представляет собой линейную комбинацию собственных векторов (мод бифуркации) линейного оператора, равного производной Фреше от левой части уравнения (2.1). Многомодовая бифуркация периодических решений возникает при наличии n -кратного резонанса в нуле (при критических значениях параметров).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под n -кратным резонансом (типа $p_1 : p_2 : \dots : p_n$) уравнения (2.1) подразумевается случай одновременного существования (для соответствующего линеаризованного ОДУ) набора из n периодических решений

$$\exp\left(\frac{2\pi i p_k}{T} t\right), \quad T > 0, \quad p_k \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n, \quad \text{НОД}(p_1, p_2, \dots, p_n) = 1,$$

или, что эквивалентно, n пар вещественных периодических решений

$$\cos\left(\frac{2\pi p_k}{T} t\right) + i \sin\left(\frac{2\pi p_k}{T} t\right)$$

– мод бифуркации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Резонанс $p_1 : p_2 : \dots : p_n$ называется *сильным*, если существует такой ненулевой набор целых чисел m_1, m_2, \dots, m_n , что $m_1 p_1 + m_2 p_2 + \dots + m_n p_n = 0$ и $|m_1| + |m_2| + \dots + |m_n| \leq 4$. Число $|m_1| + |m_2| + \dots + |m_n|$ называется *порядком резонансного соотношения*. Число, наименьшее из порядков резонансных соотношений, называется *порядком* данного резонанса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Резонансные соотношения порядка 5 и более называются *слабыми*. Резонанс, для которого существует сильное резонансное соотношение, называется *сильным*, и слабым – в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Под *градиентом функции* $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ понимается отображение $\nabla V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое условием $\langle \nabla V(\xi), h \rangle = V'(\xi)h$ для любых $\xi, h \in \mathbb{R}^n$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение на \mathbb{R}^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $g(a) = 0$, то точка a называется *особой точкой отображения* g . В случае градиентного отображения $g(\xi, \lambda) = \nabla V(\xi, \lambda)$ особая точка отображения ∇V называется также *особой* или *критической для функции* V .

Шаг 1. Ниже предполагается, что $T = 2\pi$ и $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Одно из базовых предположений статьи состоит в условии потенциальности, которое означает, что уравнение (2.1) служит уравнением Эйлера–Пуассона

экстремалей функционала

$$V(w, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \left((-1)^n \left(\frac{d^n w}{dt^n} \right)^2 + (-1)^{n-1} a_n \left(\frac{d^{n-1} w}{dt^{n-1}} \right)^2 + \dots - a_2 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + a_1 w^2 \right) + \mathcal{U} \right) dt, \quad (2.2)$$

$\mathcal{U} = \mathcal{U}(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2 w}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} w}{dt^{n-1}})$, где $\mathcal{U}(w, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = o(w^2 + w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_{n-1}^2)$, $w_m = \frac{d^m w}{dt^m}$, на банаховом пространстве E 2π -периодических вещественнозначных функций класса C^{2n} .

Предполагается также, что при закритических значениях параметра нуль является точкой $\min V|_{N^\perp}$ (N^\perp – ортогональное дополнение линейной оболочки мод вырождения). Таким образом, в наших предположениях исходная задача об оптимизации ветвей бифурцирующих решений уравнения (2.1) сводится к задаче нахождения экстремалей функционала (2.2).

Шаг 2. Оптимизацию бифурцирующих периодических экстремалей функционала V можно осуществить посредством редукции Ляпунова–Шмидта, в результате которой возникает задача о бифуркации критических точек полинома от $2n$ переменных, обладающего круговой симметрией [4]–[6]. Более подробно об этом переходе будет изложено ниже.

Редукция позволяет сводить анализ бифуркации циклов к анализу бифуркации критических точек функции

$$W(\xi, a) = \inf_{w: \langle w, e_k \rangle = \xi_k} V(w, a) = V\left(\sum_{i=1}^{2n} \xi_i e_i + \Phi(\xi, a), a\right), \quad (2.3)$$

зависящей от ключевых переменных ξ_1, \dots, ξ_{2n} : $\xi_j = \langle w, e_j \rangle$, где e_1, e_2, \dots, e_{2n} – моды бифуркации, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в пространстве $L_2[0, 2\pi]$.

Шаг 3. Вычисление критической точки $\bar{\xi}(\delta) = (\bar{\xi}_1(\delta), \bar{\xi}_2(\delta), \dots, \bar{\xi}_{2n}(\delta))$ ключевой функции (2.3) приводит к асимптотической формуле для ветви бифурцирующей экстремали

$$w = f(t, \delta) + o(\delta), \quad f(t, \delta) := \sum_{i=1}^{2n} \bar{\xi}_i(\delta) e_i, \quad (2.4)$$

где δ – приращение к критическому значению q параметра $a = q + \delta$.

Как уже было сказано, при изучении бифуркаций, связанных с проектированием и созданием некоторых технических устройств, возникает дополнительная задача оптимизации бифурцирующей ветви – подбора таких значений δ , при которых заданный критерий качества принимает максимальное (минимальное) значение. Например, в задаче отыскания многомодового закритического прогиба упругой системы возникает вопрос о минимальной величине относительного прогиба (см. [2], [3]), а в задаче повышения эффективности зубчатой передачи ставится вопрос максимального увеличения коэффициента несимметрии силового импульса на выходе (см. [7]). Аналогичные вопросы возникают при оптимизации антенных устройств, в некоторых задачах нелинейной оптики и других задачах современной физики (см. [8]).

Для решения многих прикладных задач часто используется ритцевская аппроксимация функционала действия (энергии) V по заранее выбранным модам e_1, e_2, \dots, e_{2n} : $W_R(\xi, a) = V(\sum_{i=1}^{2n} \xi_i e_i, a)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n})$. Критическим точкам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{2n})$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{i=1}^{2n} \bar{\xi}_i e_i$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V . Точность решения задачи обычно повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций.

Если, обобщая, рассмотреть “нелинейные” аппроксимации вида $W(\xi, a) = V(\sum_{j=1}^{2n} \xi_j e_j + \Phi(\xi, a), a)$, где Φ – гладкое отображение из $N := \text{span}(e_1, \dots, e_{2n})$ в N^\perp (ортогональное дополнение к N в гильбертовом пространстве H), то можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы [4].

Обоснованием последнего тезиса служит ключевая функция (2.3). Топологические и аналитические понятия, характеризующие тип стационарной точки функционала (2.2) (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и так далее (см. [9])) можно вводить через ключевую функцию и ее нормальную форму (см. [4]). Итогом построения нормальной формы ключевой функции является возможность полного и детального описания качественной картины поведения ветвей бифурцирующих критических точек и, в частности, отыскание их точного количества и их асимптотик (по закритическим приращениям параметров).

В приложениях для достижения полной точности качественного анализа часто достаточно вычисления лишь нескольких первых членов разложения W в ряд Тейлора.

Рассмотрим типовой пример применения схемы локальной редукции к функции (2.3). Как предполагалось выше, будем рассматривать 2π -периодические экстремали.

Пусть $g(x, a)$ – левая часть уравнения (2.1), рассмотренная как отображение банаховых пространств $E \rightarrow F$, $E := \Pi_{2\pi}^{2n}$, $F := \Pi_{2\pi}^0$ – пространства 2π -периодических функций классов C^{2n} и, соответственно, C^0 . Пусть $H := L_2[0, 2\pi]$ – (гильбертово) пространство функций на отрезке $[0, 2\pi]$ с суммируемым квадратом со скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} uv \, dt.$$

Очевидно, что E непрерывно вложено в F , F непрерывно и плотно вложено в H и E плотно в H (плотность перечисленных вложений пространств необходима для того, чтобы правильно заработала вариационная схема Ляпунова–Шмидта, приведенная в [4]).

В общем случае n пар мод и локализации параметров $a_k = \bar{a}_k + \delta_k$, $k = 1, 2, \dots$, где $\bar{a}_1 = p_1^2 p_2^2 \cdots p_n^2$, $\bar{a}_2 = p_1^2 p_2^2 + p_1^2 p_3^2 + p_2^2 p_3^2 + \cdots + p_{2n-1}^2 p_{2n}^2$, \dots , $\bar{a}_n = p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2$, $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ – малые параметры, пересечение движущейся точкой $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ характеристической плоскости (в пространстве параметров \mathbb{R}^n) приводит к смене значения индекса Морса в нулевой критической точке.

Характеристические плоскости задаются уравнением

$$\frac{d^{2n}h}{dt^{2n}} + \dots + a_2 \frac{d^2h}{dt^2} + a_1 h = 0 \quad (2.5)$$

и состоят из тех и только тех точек $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, для которых уравнение (2.5) имеет ненулевое 2π -периодическое решение. Поиск таких случаев приводит к характеристическому уравнению

$$(-1)^n \lambda^{2n} + (-1)^{n-1} a_n \lambda^{2(n-1)} + \dots - a_2 \lambda^2 + a_1 = 0. \quad (2.6)$$

При пересечении движущейся точкой $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ характеристической поверхности происходит бифуркация рождения (уничтожения) экстремалей в нуле.

Для иллюстрации рассмотрим один важный для приложений случай.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 3$ и

$$\mathcal{U}\left(w, \frac{dw}{dt}, \frac{d^2w}{dt^2}, \frac{d^3w}{dt^3}\right) = \frac{w^4}{4}, \quad m = 1, \quad n = 2, \quad l = 3.$$

После подстановки функции $u = \sum_{k=1}^6 \xi_k e_k$ в интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^3w}{dt^3} \right)^2 - a_3 \left(\frac{d^2w}{dt^2} \right)^2 + a_2 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 - a_1 w^2 \right) + \frac{w^4}{4} \right) dt$$

получим, с точностью до постоянного множителя, следующее выражение для кватерничной части ключевой функции:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^{(4)} = & (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + (\xi_3^2 + \xi_4^2)^2 + (\xi_5^2 + \xi_6^2)^2 + \frac{4}{3}(\xi_1^3 \xi_5 + \xi_2^3 \xi_6) \\ & + 4(\xi_1^2 \xi_4^2 + \xi_1^2 \xi_5^2 + \xi_1^2 \xi_6^2 + \xi_2^2 \xi_3^2 + \xi_2^2 \xi_4^2 + \xi_2^2 \xi_5^2 + \xi_2^2 \xi_6^2 + \xi_3^2 \xi_5^2 + \xi_3^2 \xi_6^2 + \xi_4^2 \xi_5^2 + \xi_4^2 \xi_6^2) \\ & + 4(-\xi_1 \xi_2^2 \xi_5 + \xi_1^2 \xi_2 \xi_6 - \xi_3^2 \xi_5 \xi_1 - \xi_2 \xi_3^2 \xi_6 + \xi_1 \xi_4^2 \xi_5 + \xi_2 \xi_4^2 \xi_6) \\ & + 8(\xi_1 \xi_3 \xi_4 \xi_6 + \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5). \end{aligned}$$

Соответственно, для ключевой функции (2.3) имеет место асимптотическое представление

$$W = \widetilde{W}^{(4)} + \frac{1}{2}(\lambda_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \lambda_2(\xi_3^2 + \xi_4^2) + \lambda_3(\xi_5^2 + \xi_6^2)) + o(|\xi|^4) + O(|\xi|^4)O(\delta),$$

где $\lambda_1 = c(\delta_1 - \delta_2 + \delta_3)$, $\lambda_2 = c(\delta_1 - 16\delta_2 + 4\delta_3)$, $\lambda_3 = c(\delta_1 - 81\delta_2 + 9\delta_3)$, $c = \text{const}$. Проверка основана на прямом вычислении главной части ключевой функции¹. Обоснование последнего утверждения почти дословно повторяет рассуждения, приведенные в [10] в доказательстве теоремы о нормальной форме для уравнения (2.1) при краевых условиях Дирихле. Если в трех плоскостях $\{\xi_1, \xi_2\}$, $\{\xi_3, \xi_4\}$ и $\{\xi_5, \xi_6\}$ ввести полярные координаты: $\xi_{2k-1} = r_k \cos(\varphi_k)$, $\xi_{2k} = r_k \sin(\varphi_k)$, $k = 1, 2, 3$, и провести редукцию по угловым переменным φ_k :

¹Вычисление многочлена $\widetilde{W}^{(4)}$ проведено в среде Maple.

$\widehat{W}(r) := \text{extr}_\varphi W(\xi)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, то получим редуцированную ключевую функцию:

$$\begin{aligned} \widehat{W}(r) = & \sum_{j=1}^3 r_j^4 + 4(r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2) \\ & - \frac{4}{3} r_1^3 r_3 + 4r_1 r_2^2 r_3 + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_j r_j^2 \right) + o(|r|^4) + O(|r|^4)O(\delta). \end{aligned}$$

В итоге бифурцирующие решения можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^3 f_k(\delta) \cos(\pi k + \omega_k) + o(\delta).$$

2.2. Двухмодовая ключевая функция в случае простого резонанса.

2.2.1. Случай резонанса 1 : 2. Подробная информация о двухмодовых бифуркациях в случае круговой симметрии имеется в [11].

Пусть задан гомоморфизм (не гладкий) $T: G \rightarrow O(H)$ группы $G = SO(2)$ в группу ортогональных линейных преобразований гильбертова пространства H , определяемый ортогональным действием (вообще говоря, не непрерывным) $G \times H \rightarrow H$, $(g, w) \mapsto y = T_g(w) \forall (g, w) \in G \times H$, где $g = \exp(i\tau)$, $T_g(w)(t) := w(t + \tau)$ ($\exp(i\tau)$ – комплексная форма двумерной ортогональной матрицы положительной ориентации). Будем предполагать, что пространства E , F и функционал V инвариантны относительно данного действия: $T_g(E) \subset E$, $T_g(F) \subset F$, $V(T_g(\cdot)) = V(\cdot)$, наряду с эквивариантностью редуцирующей субмерсии $\mathbf{p}: x \mapsto \xi$, $x \in E$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, $\xi_j = \langle x, e_j \rangle$. Действие окружности в \mathbb{R}^4 состоит из вращений в координатных плоскостях переменных ξ_1, ξ_2 и ξ_3, ξ_4 (см. ниже (2.7)). Ключевая функция W , заданная формулой (2.3), также будет инвариантной (см. [6]).

Важное условие, используемое в работе, состоит в требовании гладкости действия группы $SO(2)$ в пространстве ключевых параметров. В рассмотренной модельной задаче последнее выполняется автоматически, так как индуцированное действие $SO(2)$ на любом конечномерном инвариантном подпространстве $N \subset H$ в рассмотренной задаче является гладким. Индуцированное действие $SO(2)$ на пространстве ключевых параметров \mathbb{R}^4 является полусвободным (начало координат – единственная неподвижная точка). Если при этом отождествить вектор $\xi \in \mathbb{R}^4$ с комплексным вектором $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $z_k = \xi_{2k-1} + i\xi_{2k}$, то условие инвариантности W можно записать в виде соотношения $W(\tilde{z}) = W(z)$, $\tilde{z} = (\exp(ip_1\varphi)z_1, \exp(ip_2\varphi)z_2)$, $p_k \in \mathbb{Z}$, т.е. имеем инвариантность относительно действия

$$\{\exp(i\varphi), z\} \mapsto (\exp(ip_1\varphi)z_1, \exp(ip_2\varphi)z_2) \quad (2.7)$$

группы $SO(2)$.

Множество ненулевых критических точек ключевой функции W и их образов относительно редуцирующего отображения $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow E$, $\varphi(\xi) = \sum_{j=1}^4 \xi_j e_j + \Phi(\xi)$, представляет собой набор одномерных подмногообразий (критических орбит действия (2.7)), диффеоморфных окружности.

ТЕОРЕМА 1 (см. [4]). В случае 4-мерного вырождения с резонансом $1 : 2$ ключевая функция W допускает представление в виде

$$-\frac{1}{2}(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2) + \frac{1}{3}(C_3 I_3 + C_4 I_4) + \frac{1}{4}(A_1 I_1^2 + A_2 I_2^2 + 2B I_1 I_2) + o(\|\xi\|^4) + O(\delta)O(\|\xi\|^4),$$

где $I_1 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $I_2 = \xi_3^2 + \xi_4^2$, $I_3 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_3 + 2\xi_1\xi_2\xi_4$, $I_4 = 2\xi_1\xi_2\xi_3 - (\xi_1^2 - \xi_2^2)\xi_4$ – полная система образующих инвариантов действия (2.7) группы $SO(2)$ на \mathbb{R}^4 , A_1, A_2, B, C_1, C_2 – константы, α_1, α_2 – зависящие от δ малые параметры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на асимптотическом представлении $W = U(\xi) + o(I_1^2, I_2^2, I_3^2, I_4^2)$, где $U(\xi) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \sum_{j:|j|=2}^3 a_j \xi^j)$ – нелинейная ритцевская аппроксимация V по модам бифуркации e_1, e_2, e_3, e_4 , $a_j = a_j(\delta)$ – вычисляемые элементы пространства E , $\langle a_j, e_k \rangle = 0$ для любых j, k .

После масштабирования и деления W на подходящий множитель получим функцию $\widetilde{W} = \widetilde{U}(\xi) + o(\|\xi\|^4)$, где

$$\widetilde{U}(\xi) = -\frac{1}{2}(\beta_1 I_1 + \beta_2 I_2) + \frac{1}{3}(C_1 I_3 + C_4 I_4) + \frac{1}{4}(I_1^2 + I_2^2 + 2a I_1 I_2).$$

В результате получаем следующее утверждение (см. [4], [11]).

ТЕОРЕМА 2. В случае 4-мерного вырождения с резонансом $1 : 2$ ключевая функция W допускает в полярных координатах $\xi_1 = r_1 \cos(\varphi_1)$, $\xi_2 = r_1 \sin(\varphi_1)$, $\xi_3 = r_2 \cos(\varphi_2)$, $\xi_4 = r_2 \sin(\varphi_2)$, представление (после масштабирования и деления на нормирующую константу) в виде

$$\widetilde{W} = -\frac{1}{2}(\beta_1 r_1^2 + \beta_2 r_2^2) + c r_1^2 r_2 \cos(\psi) + \frac{1}{4}(r_1^4 + r_2^4 + 2a r_1^2 r_2^2) + \vartheta(r_1^2, r_2^2) + r_1^2 r_2 \varrho(r_1^2, r_2, \psi), \quad a > -1,$$

где $a = a(\delta)$, $c = c(\delta)$ – вычисляемые константы, $\psi = \varphi_2 - 2\varphi_1 + \text{const}$, ϑ, ϱ – некоторые гладкие функции, соответственно, двух и трех переменных, для которых $\vartheta(r_1^2, r_2^2) = O(|\xi|^6)$, $\varrho(r_1^2, r_2, \psi) = O(|\xi|^2)$.

Условие стационарности орбиты по фазе $\psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ приводит к следующим критическим значениям фазы: $\psi = 0 + O(|\xi|^2)$, $\psi = \pi + O(|\xi|^2)$. Дальнейшее изучение условий стационарности по амплитудам r_1, r_2 приводит к задаче о бифуркации критических точек из критической точки с омбилической особенностью параболического типа [15]. В этом случае локальной нормальной формой ключевой функции (при нулевых значениях возмущающих параметров) является полином $\widetilde{W}_0 = r_2^4 \pm r_1^2 r_2$ (известный как полином с омбилической особенностью параболического типа [15], [9]).

Ниже будет доказана теорема 1, из которой вытекает, что оптимальной по коэффициенту несимметрии является ветвь, представимая в виде

$$\xi_1(\delta) \cos(x) + \xi_2(\delta) \cos(2x) + o(|\xi(\delta)|)$$

при условии $\xi_2(\delta) = 2\xi_1(\delta)$.

2.3. Трехмодовые ключевые функции. На форму главной части ключевой функции в случае, рассмотренном в примере 1, основное влияние оказало условие четности функционала. Если данная симметрия отсутствует, то главная часть ключевой функции в условиях резонанса $1 : 2 : 3$ выглядит несколько иначе (см. [12]). В общем случае ключевая функция имеет следующий вид:

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \delta_k I_k \right) + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^3 A_k I_k^2 + 2 \sum_{k,j=1}^3 B_{k,j} I_k^2 I_j^2 \right) + J + o(\|\xi\|^4),$$

где $I_k = \xi_{2k-1}^2 + \xi_{2k}^2$ – стандартные инварианты, а J – линейная комбинация всех дополнительных (кроме стандартных I_k) образующих инвариантов степени не выше 4 – для рассматриваемого действия окружности на $\mathbb{R}^6 \cong \mathbb{C}^3$

$$\{\exp(i\varphi), z\} \mapsto (\exp(ip_1\varphi)z_1, \exp(ip_2\varphi)z_2, \exp(ip_3\varphi)z_3)^\top. \quad (2.8)$$

Для резонанса $1 : 2 : 3$ ключевая функция (огрубленная) \mathscr{W} приводится к форме $\sum_{j=1}^3 r_k^4 + \sum_{j < k} a_{j,k} r_j^2 r_k^2 + br_1^2 r_2 r_3 + \varepsilon_1 r_1 r_2 r_3 + \varepsilon_2 r_1^2 r_2 + \delta_1 r_1^2 + \delta_2 r_2^2 + \delta_3 r_3^2$.

Подробный анализ нормальных форм ключевых функций, отвечающих двукратным резонансам, имеется в [12].

Оптимальной по коэффициенту несимметрии является ветвь, представляемая в виде

$$\xi_1(\delta) \cos(x) + \xi_2(\delta) \cos(2x) + \xi_3(\delta) \cos(3x) + o(|\xi(\delta)|)$$

при условии $\xi_2(\delta) = 2\xi_1(\delta)$, $\xi_3(\delta) = 3\xi_1(\delta)$. Данное утверждение основано на теореме, доказанной в следующем параграфе.

§ 3. Оптимизация общего тригонометрического импульса

Итак, для обоснования результатов, приведенных в примерах из п. 2.2 и п. 2.3, докажем теорему 1, сформулированную во введении.

3.1. Переход к экстремальной задаче для алгебраического полинома. Пусть

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kt), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n). \quad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Коэффициентом несимметрии этого полинома называется число

$$K := \frac{f_{\max}}{|f_{\min}|}, \quad \text{где } f_{\max} := \max_t f(t, \lambda), \quad f_{\min} := \min_t f(t, \lambda).$$

В дальнейшем мы полагаем $\sum_k \lambda_k = \text{const} > 0$, $\sum_k \lambda_k = f(0, \lambda)$. Кроме того, заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t, \lambda) dt = 0,$$

из чего следует, что $f_{\min} < 0$.

Достижение коэффициентом несимметрии максимального значения (при вариациях λ) обеспечивается решением следующей задачи математического программирования:

$$\inf_t f(t, \lambda) \rightarrow \sup_{\lambda}, \quad t \in [0, \pi], \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = c \quad (= \text{const} > 0). \quad (3.2)$$

Решение данной задачи представимо в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Многочлен (1.1) является оптимальным в смысле коэффициента несимметрии тогда и только тогда, когда он с точностью до постоянного множителя имеет вид суммы Фейера*

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n (n+1-k) \cos(kt).$$

При этом имеет место равенство

$$K_n = \max_{\lambda} K_n(\lambda) = n.$$

Решение задачи (3.2) удобно провести, перейдя к алгебраическому полиному

$$V(x, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu_k x^k, \quad x \in [-1, 1], \quad \mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n), \quad (3.3)$$

который получается из (3.1) заменой косинусов на соответствующие многочлены Чебышёва (первого рода) $T_n = \cos(n \arccos x)$ (см. [13]), заменив их ультрасферической формой [14].

В случае $n = 2m + 1$ имеем

$$\cos(nt) = T_n(x) = \sum_{q=0, \dots, m} \varkappa_{n,q} x^{2q+1}, \quad (3.4)$$

где

$$\varkappa_{n,q} = (-1)^{m+q} \sum_{k,r; k-r=m-q} C_{2k}^{2m+1} C_r^k, \quad (3.5)$$

$C_l^p = p!/(l!(p-l)!)$ – биномиальный коэффициент.

При $n = 2m$ равенство (3.4) имеет следующий вид

$$\cos(nt) = T_n = \sum_{q=0, \dots, m} \varkappa_{n,q} x^{2q}, \quad (3.6)$$

где $\varkappa_{n,q}$ определяется аналогичным образом:

$$\varkappa_{n,q} = (-1)^{m+q} \sum_{k,r; k-r=m-q} C_{2k}^{2m} C_r^k.$$

Представления (3.4) и (3.6) являются частным случаем ультрасферических многочленов из [14].

Кроме того, их можно получить, используя широко известное разложение

$$\cos(nt) = \operatorname{Re}(\cos(t) + i \sin(t))^n.$$

На основе (3.4) и (3.6) можно вывести соотношения между коэффициентами тригонометрического полинома и соответствующего ему алгебраического полинома.

Из условия $\sum_{k=1}^n \lambda_k = c$ следует: $V(1, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu_k = c$.

3.1.1. Теорема о структуре \mathfrak{M} -многочлена. Пусть $n = 2m + 1$ и $-1 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_m < a_m$ – критические (экстремальные) точки функции $V(x, \bar{\mu})$:

$$\frac{dV(b_k, \bar{\mu})}{dx} = \frac{dV(a_k, \bar{\mu})}{dx} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.7)$$

Очевидно, что при этом $b_1, b_2, \dots, b_m, 1$ – точки локальных максимумов, а $-1, a_1, a_2, \dots, a_m$ – точки локальных минимумов.

Если $\mu = \bar{\mu}$ – решение задачи (3.2), то для него с необходимостью выполняется условие Максвелла (см. [16])

$$V(-1, \bar{\mu}) = V(a_1, \bar{\mu}) = V(a_2, \bar{\mu}) = \dots = V(a_m, \bar{\mu}). \quad (3.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Многочлен степени n , для которого выполнено условие (3.8), будем называть \mathfrak{M} -многочленом. Общее значение в выражениях (3.8) обозначим \mathfrak{M} и назовем *константой Максвелла*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Множество всех \mathfrak{M} -многочленов называется *минимальным стратом Максвелла* в пространстве многочленов степени n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Многочлен называется *оптимальным*, если он является решением задачи (3.2).

Рассмотрим вспомогательный многочлен $\mathcal{N}(x, \mu)$ степени n , для которого при $\mu = \bar{\mu}$ выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(-a_1, \bar{\mu}) &= \mathcal{N}(-a_2, \bar{\mu}) = \dots = \mathcal{N}(-a_m, \bar{\mu}) = \mathcal{N}(-1, \bar{\mu}) \\ &= \frac{d\mathcal{N}(-a_1, \bar{\mu})}{dx} = \frac{d\mathcal{N}(-a_2, \bar{\mu})}{dx} = \dots = \frac{d\mathcal{N}(-a_m, \bar{\mu})}{dx} = 0, \\ &-1 < -a_1 < -a_2 < \dots < -a_m < 1. \end{aligned}$$

Ясно, что эти условия определяют многочлен $\mathcal{N}(x, \bar{\mu})$ с точностью до постоянного множителя. Положим

$$\mathcal{N}(x, \bar{\nu}) = (x+1)(x+a_1)^2 \dots (x+a_m)^2 = \sum_{k=0}^n \bar{\nu}_k x^k. \quad (3.9)$$

Многочлен V отличается от (3.9) постоянным слагаемым (с точностью до общего постоянного множителя). Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Каждый оптимальный многочлен $V(x, \bar{\mu})$ является \mathfrak{M} -многочленом и для него имеет место следующее представление:

$$V(x, \bar{\mu}) = \mathcal{C}((x+1)(x+a_1)^2 \cdots (x+a_m)^2 - \mathcal{D}).$$

Константы \mathcal{C}, \mathcal{D} при этом определяются следующими двумя условиями:

$$V(1, \bar{\mu}) = c, \quad \int_{-1}^1 \frac{V(x, \bar{\mu})}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.$$

Из первого равенства получаем

$$\mathcal{C}(2(1+a_1)^2 \cdots (1+a_m)^2 - \mathcal{D}) = c$$

или

$$\mathcal{C} = \frac{c}{(2(1+a_1)^2 \cdots (1+a_m)^2 - \mathcal{D})}.$$

Второе равенство – следствие из аналогичного равенства для исходного тригонометрического многочлена. Из него получаем

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(a) = \int_{-1}^1 \frac{(x+1)(x+a_1)^2 \cdots (x+a_m)^2}{2\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (3.10)$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_m)^\top.$$

3.1.2. *Расчетные формулы.* Так как $V_{\max} = c$, $V_{\min} = \mathcal{M} := \mathcal{C}\mathcal{D}$, то отыскание экстремумов для коэффициента несимметрии

$$K := \frac{V_{\max}}{|V_{\min}|} = \frac{2(1+a_1)^2 \cdots (1+a_m)^2 - \mathcal{D}(a)}{\mathcal{D}(a)}$$

сводится к отысканию экстремумов функции

$$\mathcal{W} := \frac{(1+a_1)^2 \cdots (1+a_m)^2}{\mathcal{D}(a)}.$$

Запишем многочлен $(1+a_1)^2 \cdots (1+a_m)^2$ в следующем виде:

$$\left(\sum_{k=0}^m \sigma_{m-k} x^k \right)^2 = \sum_{k=0}^m \sigma_{m-k}^2 x^{2k} + 2 \left(\sum_{0 \leq p < q \leq m} \sigma_p \sigma_q x^{2m-p-q} \right),$$

где $\{\sigma_k\}$ – элементарные симметрические многочлены от a :

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = \sum_{j=1}^m a_j, \quad \sigma_2 = \sum_{j_1 < j_2} a_{j_1} a_{j_2}, \quad \dots, \quad \sigma_m = a_1 a_2 \cdots a_m.$$

Тогда из (3.10) получаем $\mathcal{D}(a) = \mathcal{Q}(\sigma)$,

$$\mathcal{Q}(\sigma) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \sigma_{m-k}^2 + 2 \left(\sum_{p,r} \alpha_{m-p-r} \sigma_p \sigma_{p+2r} \right), \quad 0 \leq p \leq m, \quad 1 \leq r \leq \left\lfloor \frac{m-p}{2} \right\rfloor,$$

$$\alpha_k = \int_{-1}^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{k!} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

или, положив $l = p + r$, получаем

$$\mathcal{Q}(\sigma) = \sum_{k=0}^m \alpha_k \sigma_{m-k}^2 + 2 \left(\sum_{l,r} \alpha_{m-l} \sigma_{l-r} \sigma_{l+r} \right), \quad 1 \leq r \leq l \leq m, \quad l+r \leq m.$$

Таким образом, для \mathcal{W} имеем следующее представление:

$$\mathcal{W} = \frac{\mathcal{P}^2(\sigma)}{\mathcal{Q}(\sigma)}, \quad \mathcal{P}(\sigma) = \sum_{k=0}^m \sigma_{m-k} x^k.$$

Соответственно, для производной $\partial \mathcal{W} / \partial \sigma_k$ получаем выражение

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \sigma_k} = \left(2 \mathcal{P} \mathcal{Q} - \mathcal{P}^2 \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k} \right) / \mathcal{Q}^2(\sigma).$$

Так как в экстремальной точке $\partial \mathcal{W} / \partial \sigma_k = 0$, то для вычисления искомой экстремальной точки получаем следующую систему уравнений:

$$2\mathcal{Q} - \mathcal{P} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.11)$$

Следствием этой системы является система линейных уравнений, полученная последовательным решением уравнений системы (3.11) и отбрасыванием множителя \mathcal{P} :

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k} - \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_1} = 0, \quad k = 2, 3, \dots, m. \quad (3.12)$$

При отыскании решения системы (3.12) полезны следующие формулы:

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \sigma_k} = 2 \left(\sum_{j=[(k+1)/2]}^{[(k+m)/2]} \alpha_{m-j} \sigma_{2j-k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Из формул (3.11), (3.12) вытекают существование и единственность оптимального многочлена. Ниже этот результат будет получен на основе других рассуждений.

Аналогичное рассуждение (с небольшими модификациями) проводится в случае $n = 2m$.

3.2. Симметрия множества точек минимума оптимального многочлена.

3.2.1. Случай $n = 2m$. Перейдем к тригонометрической форме функции \mathcal{W} :

$$\mathcal{W} = \frac{\mathcal{N}^2(0)}{\mathcal{D}}, \quad \mathcal{N}(t) := \prod_{k=1}^m (\cos(t) - \cos(t_k)), \quad \mathcal{D} := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{N}^2(t) dt. \quad (3.13)$$

Для производной $\partial \mathcal{W} / \partial t_k$ имеем выражение

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t_k} = \sin(t_k) \left(\frac{2\mathcal{N}^2(0)}{1 - \cos(t_k)} \mathcal{D} - \mathcal{N}^2(0) \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t_k} \right) \mathcal{D}^{-2}.$$

Так как для числителя этого выражения имеем представление

$$\begin{aligned} & \frac{2 \sin(t_k) \mathcal{N}^2(0)}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{1 - \cos(t_k)} - \frac{1}{\cos(t) - \cos(t_k)} \right) \mathcal{N}^2(t) dt \\ &= \frac{2 \sin(t_k) \mathcal{N}^2(0)}{\pi(1 - \cos(t_k))} \int_0^\pi \frac{\cos(t) - 1}{\cos(t) - \cos(t_k)} \mathcal{N}^2(t) dt, \end{aligned}$$

то в оптимальной точке получаем следующую систему равенств:

$$\int_0^\pi \frac{\cos(t) - 1}{\cos(t) - \cos(t_k)} \mathcal{N}^2(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.14)$$

Левые части этой системы (3.14) являются компонентами градиента функции

$$\mathcal{U} := \int_0^\pi (\cos(t) - 1) \mathcal{N}^2(t) dt \quad (3.15)$$

(после отбрасывания постоянных множителей). Таким образом, имеем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда этот набор задает в \mathbb{R}^m критическую точку функции (3.15).*

Отыскание критических точек функции (3.15) удобно проводить на основе следующих утверждений, вытекающих из теоремы 5.

ТЕОРЕМА 6. *Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:*

$$\int_0^\pi (\cos^k(t) - 1) \mathcal{N}(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.16)$$

Последняя теорема допускает переформулировку (вследствие соотношений (3.4)).

ТЕОРЕМА 7. *Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:*

$$\int_0^\pi (\cos(kt) - 1) \mathcal{N}(t) dt = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эта теорема дает критерий оптимальности, полезный для практических применений: набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным тогда и только тогда, когда многочлен $\mathcal{N}(t)$ ортогонален на отрезке $[0, \pi]$ многочленам $\cos(kt) - 1$, $k = 1, \dots, m$.

Прямое вычисление ортогонального многочлена приводит к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 8. *Оптимальный многочлен $\mathcal{N}(t)$ имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:*

$$\frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \cos(3t) + \dots + \cos(mt). \quad (3.18)$$

ЛЕММА 1. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \cos(3t) + \cdots + \cos(mt) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2m+1}{2} + 2m \cos(t) + (2m-1) \cos(2t) \right. \\ & \quad \left. + (2m-2) \cos(3t) + \cdots + \cos(2mt) \right). \end{aligned}$$

Из этой леммы вытекает утверждение, дающее ответ на вопрос о форме оптимального импульса.

ТЕОРЕМА 9. *Многочлен (1.1) является оптимальным (при $n = 2m$) тогда и только тогда, когда он имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:*

$$W(t) = 2m \cos(t) + (2m-1) \cos(2t) + (2m-2) \cos(3t) + \cdots + \cos(2mt). \quad (3.19)$$

Из леммы 1 следует

ТЕОРЕМА 10. *Для оптимизирующего набора $\{t_k\}_{k=1}^m$ выполнены соотношения*

$$t_k = k\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{2m+1}, \quad k = 1, \dots, m,$$

означающие совпадение $\{t_k\}_{k=1}^m$ с аргументами комплексных корней степени $2m+1$ из единицы.

Таким образом, для множества точек минимума оптимального многочлена имеет место симметрия, связанная с естественным действием на \mathbb{R}^m группы

$$\mathbb{Z}_{2m+1} = \mathbb{Z}/(2m+1)\mathbb{Z}.$$

3.2.2. Случай $n = 2m+1$. Случай многочлена нечетной степени можно изучить аналогичным образом, внося соответствующие модификации. Сформулируем основные утверждения для этого случая.

ТЕОРЕМА 11. *Набор значений $\{t_k\}_{k=1}^m$ является оптимальным для многочлена \mathcal{W} тогда и только тогда, когда он задает в \mathbb{R}^m критическую точку функции*

$$\mathcal{U} := \int_0^\pi (\cos^2(t) - 1) \mathcal{N}^2(t) dt. \quad (3.20)$$

Вычисление оптимального многочлена также сводится к вычислению многочлена, ортогонального к наборам элементарных многочленов. В итоге получаем следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 12. *Многочлен $\mathcal{N}(t)$ является оптимальным тогда и только тогда, когда он имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:*

$$\frac{1}{2} + \cos(2t) + \cos(4t) + \cdots + \cos(mt), \quad (3.21)$$

если $m = 2p$, и

$$\cos(t) + \cos(3t) + \cdots + \cos(mt), \quad (3.22)$$

если $m = 2p+1$.

ТЕОРЕМА 13. При $n = 2m + 1$ многочлен (3.1) является оптимальным тогда и только тогда, когда он имеет, с точностью до постоянного множителя, следующий вид:

$$(2m + 1) \cos(t) + 2m \cos(2t) + (2m - 1) \cos(3t) + \cdots + \cos((2m + 1)t).$$

ТЕОРЕМА 14. При $n = 2m + 1$ для оптимального набора $\{t_k\}_{k=1}^m$ выполнены соотношения

$$t_k = k\omega, \quad \omega = \frac{\pi}{m+1}, \quad k = 1, \dots, m,$$

означающие совпадение $\{t_k\}_{k=1}^m$ с аргументами комплексных корней степени $2(m+1)$ из единицы.

Таким образом, при $n = 2m + 1$ для множества точек минимума оптимального многочлена имеет место симметрия, связанная с естественным действием на \mathbb{R}^m группы

$$\mathbb{Z}_{2(m+1)} = \mathbb{Z}/2(m+1)\mathbb{Z}.$$

Далее, воспользовавшись равенством для тригонометрических сумм Фейера [17]

$$\sum_{k=-n}^n \frac{n - |k|}{n} e^{ikt} = \frac{\sin^2(nt/2)}{n \sin^2(t/2)}, \quad (3.23)$$

запишем формулу импульса (3.1) в виде

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(n+1-k)}{n+1} \cos(kt) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2((n+1)t/2)}{(n+1) \sin^2(t/2)} - 1 \right]. \quad (3.24)$$

Отсюда следует оценка снизу

$$f_k \geq -\frac{1}{2}. \quad (3.25)$$

Учитывая, что в точках $t_m = 2m\pi/(n+1)$ неравенство (3.25) переходит в равенство, приходим к заключению

$$\left| \min_{t \in [-\pi, \pi]} f_n(t) \right| = \frac{1}{2}. \quad (3.26)$$

С другой стороны, непосредственно из (3.1) легко следует неравенство

$$\max_{t \in [-\pi, \pi]} f_n(t) \leq \frac{n}{2}, \quad (3.27)$$

которое при $t = 0$ переходит в равенство.

И, таким образом, из (3.26) и (3.27) следует оптимальное значение коэффициента несимметрии $K = n$. В итоге доказана основная теорема 3.

§ 4. Примеры

4.1. Модель вибропогружателя. Этот пример является важным для решения инженерной задачи оптимизации параметров вибропогружающего устройства. Математическая модель полезного действия вибропогружателя описывается тригонометрическим полиномом (1.1) при $n = 1, \dots, 7$, имеет вид

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=1}^7 \lambda_k \cos(kt), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_7).$$

Из теоремы 3 следует, что наибольший коэффициент несимметрии в данном случае равен 7 и соответствующий график оптимального импульса при $n = 7$ представлен на рис. 1.

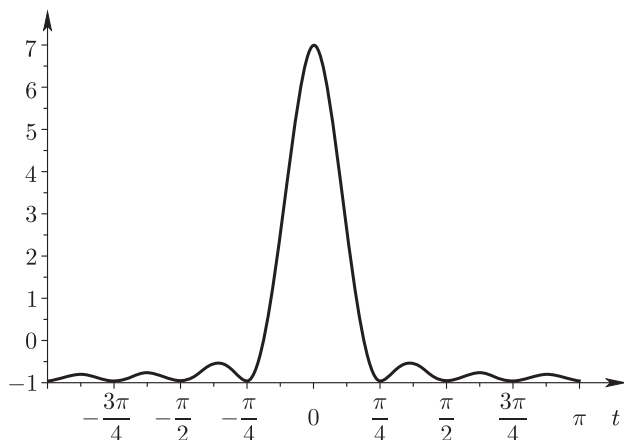


Рис. 1

4.2. Об одной задаче П. К. Суетина в математической теории антенн. Как известно (см. [18]), основой математической теории антенн и технической электродинамики является интегральное уравнение первого рода

$$F(t) = \int_{-a}^a e^{ixt} e^{i\Phi(x)} R(x) dx, \quad (4.1)$$

которое можно рассматривать как обратное преобразование Фурье некоторой финитной функции, тождественно равной нулю при $|x| > a$. Для построения таких функций в соответствии с работой [17] выбирается полином $P_N(t)$ достаточно высокой степени. Затем, умножая его на так называемый стабилизирующий множитель $A_N(t)$ такой, что $A_N(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$, функцию $F(t)$ строят в виде

$$F_N(t) = P_N(t) A_N(t). \quad (4.2)$$

В качестве стабилизирующего множителя часто выбирают, например, функцию

$$A_N(t) = \left(\frac{N+1}{t} \sin\left(\frac{t}{N+1}\right) \right)^{N+1}. \quad (4.3)$$

В этом случае справедливо равенство $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} F_N(t) A_N(t) dt = 0$, при $|x| > a$. И тогда решение уравнения (4.1) представимо в виде

$$e^{i\Phi(x)} R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} F_N(t) A_N(t) dt, \quad (4.4)$$

откуда функции $\Phi(x)$ и $R(x)$ находятся однозначно.

Вместе с тем функция $F(t)$, которая в радиотехнике называется диаграммой направленности (ДН), должна удовлетворять и соответствующим условиям, характеризующим ее технические свойства. Наиболее важные из них отражают на графике функции $|F(t)|$, который распадается на отдельные части, называемые лепестками диаграммы направленности.

По форме диаграммы направленности антенны обычно подразделяют на узконаправленные и широконаправленные. Узконаправленные антенны имеют один ярко выраженный максимум, который называют основным лепестком, и побочные максимумы (боковые лепестки), обычно имеющие отрицательное влияние, высоту которых стремятся уменьшить. Узконаправленные антенны применяют для концентрации мощности радиоизлучения в одном направлении с целью увеличения дальности действия радиоаппаратуры, а также для повышения точности угловых измерений в радиолокации.

В связи с этим на интервале $t \in (-b, b)$ выбирается две системы взаимно разделяющихся точек

$$-b < t_1 < \xi_1 < t_2 < \dots < t_k < \xi_k < t_{k+1} < \dots < t_{n-1} < \xi_{n-1} < t_n < b, \quad (4.5)$$

в которых на $F(t)$ накладываются условия $F(t_k) = 0$, $F(\xi_k) = M_k e^{i\varphi_k}$, $F'(\xi_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Точка ξ_p , в которой выполняются условия

$$M_1 < M_2 < \dots < M_{p-1} < M_p > M_{p+1} > \dots > M_{n-2} > M_{n-1}, \quad (4.6)$$

определяет главное направление излучения, а точки $\xi_k \neq \xi_p$ – вспомогательные.

Пусть $f_n(t)$ – оптимальный импульс, заданный выражением (3.24).

П. К. Суетин в работе [18] поставил задачу построения теоретически допустимой диаграммы направленности, отличной от интерполяционного многочлена.

Если на интервале $[-\pi, \pi]$ функция $f_n(t)$ удовлетворяет условию (4.6) и видоизмененному условию (4.5) с той лишь разницей, что $F(t_k) = -1$, то эту функцию можно использовать в качестве диаграммы направленности.

Действительно, если в качестве стабилизирующего множителя выбрать функцию

$$A_0(t) = \frac{\sin(t)}{t}, \quad (4.7)$$

то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \cos(kt) \frac{\sin(t)}{t} dt &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-k)t} \frac{\sin(t)}{t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x+k)t} \frac{\sin(t)}{t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} [\varphi_k^+(x) + \varphi_k^-(x)]. \end{aligned}$$

Здесь, в соответствии с [18; п. 1.6, (1.6.9), (1.6.10)] имеем

$$\varphi_k^+ = \begin{cases} 1 & \text{при } |x+k| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |x+k| = 1, \\ 0 & \text{при } |x+k| > 1, \end{cases} \quad \varphi_k^- = \begin{cases} 1 & \text{при } |x-k| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } |x-k| = 1, \\ 0 & \text{при } |x-k| > 1, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Отсюда следует соотношение

$$e^{i\Phi(x)} R(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f_n(t) \frac{\sin(t)}{t} dt = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} f_k [\varphi_k^+(x) + \varphi_k^-(x)] & \text{при } |x| < n+1, \\ 0 & \text{при } |x| > n+1. \end{cases}$$

И, следовательно, функция $f_n(t)$ является диаграммой направленности (ДН). А так как $f_n(t)$ является в силу теоремы 3 оптимальной в смысле коэффициента несимметрии, то мы получаем справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 15. *Функция $f_n(t)$, определенная равенствами (3.24), является оптимальной по коэффициенту несимметрии теоретически допустимой ДН среди тригонометрических полиномов. При этом*

$$K := \frac{M_p}{\max_{i=1, \dots, n-1, i \neq p} M_i} = n.$$

Благодарности. Материалы статьи были доложены на кафедральном семинаре академика А.Т. Фоменко, в связи с чем автор выражает глубокую благодарность участникам семинара за обсуждение и конструктивные замечания. Также автор благодарит рецензентов за внимательное рассмотрение работы и ряд ценных замечаний.

Список литературы

- [1] С. С. Саркисян, Л. В. Голованов, *Прогнозирование развития больших систем*, Статистика, М., 1975, 192 с.
- [2] Д. В. Костин, “К вопросу оптимизации закритического изгиба упругой лопатки турбины”, *Насосы. Турбины. Системы*, 2012, № 3(4), 67–72.
- [3] Д. В. Костин, “Анализ изгибов упругой лопатки турбины с учетом неоднородности материала”, *Насосы. Турбины. Системы*, 2013, № 3(8), 56–61.
- [4] Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев, “Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов”, *Функциональный анализ, СМФН*, **12**, МАИ, М., 2004, 3–140; англ. пер.: B. M. Darinskii, Yu. I. Sapronov, S. L. Tsarev, “Bifurcations of extremals of Fredholm functionals”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **145**:6 (2007), 5311–5453.
- [5] Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев, “Глобальное сравнение схем конечномерной редукции в гладких вариационных задачах”, *Матем. заметки*, **67**:5 (2000), 745–754; англ. пер.: Yu. I. Sapronov, S. L. Tsarev, “Global comparison of finite-dimensional reduction schemes in smooth variational problems”, *Math. Notes*, **67**:5 (2000), 631–638.
- [6] С. Л. Царев, “Сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах с симметрией”, *Совр. матем. и ее приложения*, **7**, Ин-т кибернетики АН Грузии, Тбилиси, 2003, 86–90.

- [7] В. А. Костин, Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов, “Многочлены Максвелла–Фейера и оптимизация полигармонических импульсов”, *Докл. РАН*, **445**:3 (2012), 271–273; англ. пер.: V. A. Kostin, D. V. Kostin, Yu. I. Saproinov, “Maxwell–Fejér polynomials and optimization of polyharmonic impulse”, *Dokl. Math.*, **86**:1 (2012), 512–514.
- [8] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, 549 с.
- [9] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982, 304 с.; англ. пер.: V. I. Arnol’d, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, v. I: *The classification of critical points, caustics and wave fronts*, Monogr. Math., **82**, Birkhäuser, Boston, MA, 1985, xi+382 pp.
- [10] А. В. Зачепа, Ю. И. Сапронов, “О бифуркации экстремалей фредгольмова функционала из вырожденной точки минимума с особенностью 3-мерной сборки”, *Тр. матем. ф-та (новая серия)*, **9**, Изд-во ВГУ, Воронеж, 2005, 57–71.
- [11] А. П. Карпова, У. В. Ладыкина, Ю. И. Сапронов, “Бифуркационный анализ фредгольмовых уравнений с круговой симметрией и его приложения”, *Матем. модели и операторные уравнения*, **5**, ч. 1, “Созвездие”, ВГУ, Воронеж, 2008, 45–90.
- [12] Е. В. Дерунова, Ю. И. Сапронов, “Применение нормализованных ключевых функций в задаче о ветвлении периодических экстремалей”, *Изв. вузов. Матем.*, 2015, № 8, 14–24; англ. пер.: E. V. Derunova, Yu. I. Saproinov, “Application of normalized key functions in a problem of branching of periodic extremals”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **59**:8 (2015), 9–18.
- [13] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, 2-е изд., Наука, М., 1979, 415 с.
- [14] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962, 500 с.; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1959, ix+421 pp.
- [15] Т. Постон, И. Стюарт, *Теория катастроф и ее приложения*, Мир, М., 1980, 608 с.; пер. с англ.: T. Poston, I. Stewart, *Catastrophe theory and its applications*, Surveys and Reference Works in Mathematics, **2**, Pitman, London–San Francisco, Calif.–Melbourne, 1978, xviii+491 pp.
- [16] Р. Гилмор, *Прикладная теория катастроф*, т. 1, Мир, М., 1984, 350 с.; пер. с англ.: R. Gilmore, *Catastrophe theory for scientists and engineers*, John Wiley & Sons, New York, 1981, xvii+666 pp.
- [17] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Гостехиздат, М., 1953, 396 с.
- [18] П. К. Суетин, *Начала математической теории антенн*, Инсвязыздат, М., 2008, 228 с.

Дмитрий Владимирович Костин
(Dmitrii V. Kostin)

Воронежский государственный университет
E-mail: dvkostin@rambler.ru

Поступила в редакцию
09.10.2015 и 26.05.2016