Международная молодежная конференция
Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна — 2018
тезисы пленарных докладов,
включенных в научную программу

Об асимптотических свойствах оператора Чезаро[1]

Н.Н. Авдеев
(Воронеж, ВГУ; *nickkolok@mail.ru*)
Е.М. Семенов
(Воронеж, ВГУ; *nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru*)

На пространстве ограниченных последовательностей l_∞ определяется оператор Чезаро C равенством $(Cx)_n = 1/n \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$. Определим на l_∞ α–функцию, характеризующую асимптотические свойства последовательности, равенством

$$\alpha(x) = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sup_{i<j\leqslant 2i} |x_i - x_j|.$$

Пусть $A = \{x \in l_\infty | 0 \leqslant x_n \leqslant 1\}$. Асимптотические свойства оператора Чезаро удобнее сначала изучать на множестве A, а затем перенормировкой распространять на всё l_∞. В [1] изучается ряд свойств оператора Чезаро. Можно легко доказать, что для $x \in A$ выполнено соотношение $\alpha(Cx) \leqslant 1/2$ и $\alpha(Cx) \leqslant \alpha(x)$. Возникает естественный вопрос о справедливости более точной оценки.

Теорема 1. *Не существует такого $\gamma < 1$, что для любого $x \in A$ выполнена мультипликативная оценка*

$$\alpha(Cx) \leqslant \gamma \cdot \alpha(x),$$

или, что то же самое, не существует такого $p \in \mathbb{N}$, что для любого $x \in A$ выполнено неравенство $\alpha(Cx) \leqslant (1 - 2^{-p+1}) \cdot \alpha(x)$.

[1]Работа выполнена за счёт гранта РНФ, проект 16-11-10125

Для доказательства теоремы 1 потребуются вспомогательные построения.

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{i \cdot 2^i}{p} = \frac{2^p(p-2)+2}{p} \qquad (1)$$

Введём вспомогательный оператор $S : l_\infty \to l_\infty$:

$$(Sy)_k = y_{i+2}, \text{ где } 2^i < k \leqslant 2^i + 1$$

Нам потребуются следующие свойства оператора S.

$$\alpha(Sx) = \overline{\lim_{k\to\infty}} |x_{k+1} - x_k| \qquad (2)$$

$$\sum_{k=2}^{2^p} (Sy)_k = \sum_{i=0}^{p-1} 2^i y_{i+2} \qquad (3)$$

Здесь и далее $(Tx)_n = x_{n+1}$.

$$\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+j+1}} (Sx)_k = 2^i \sum_{k=2}^{2^{j+1}} (ST^i x)_k \qquad (4)$$

Введём вспомогательную функцию

$$k_b(x) = (2b)^{-1} \left| \sum\nolimits_{k=1}^{b} x_k - \sum\nolimits_{k=b+1}^{2b} x_k \right|$$

Тогда

$$\alpha(Cx) \geqslant \overline{\lim_{i\to\infty}} k_i(x) \qquad (5)$$

Схема доказательства теоремы 1. Зафиксируем p и построим $y \in l_\infty$:

$$y = \left\{0, 0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, ..., \frac{p-1}{p}, 1, \frac{p-1}{p}, ..., \frac{1}{p}, 0, ..., 0, \frac{1}{p}, ...\right\}$$

так, что

$$T^{5p}y = y \tag{6}$$

Положим $x = Sy$, тогда с учётом (**??**) $\alpha(x) = \alpha(Sy) = \frac{1}{p}$.

Оценим $\alpha(Cx)$, принимая во внимание (**??**) и (**??**) — (**??**):

$$\alpha(Cx) \overset{(\mathbf{??})}{\geqslant} \varlimsup_{b\to\infty} k_b(x) \geqslant \varlimsup_{i\to\infty,\ b=2^i} \frac{1}{2^{i+1}} \left| \sum_{k=1}^{2^i} (Sy)_k - \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} (Sy)_k \right| \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{m\to\infty,\ i=5pm+p} \left| \frac{1}{2^{5pm+p+1}} \sum_{k=1}^{2^{5pm+p}} (Sy)_k - \frac{y_{5pm+p+2}}{2} \right| =$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \left| \frac{1}{2^{5pm+p+1}} \sum_{k=1}^{2^{5pm}} (Sy)_k + \frac{1}{2^{5pm+p+1}} \sum_{k=2^{5pm}+1}^{2^{5pm+p}} (Sy)_k - \frac{1}{2} \right| \overset{(\mathbf{??})}{=}$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \left| \frac{1}{2^{5pm+p+1}} \sum_{k=1}^{2^{5pm}} (Sy)_k + \frac{2^{5pm}}{2^{5pm+p+1}} \sum_{k=2}^{2^p} (ST^{5pm}y)_k - \frac{1}{2} \right| \overset{(\mathbf{??})}{=}$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \left| \frac{1}{2^{5pm+p+1}} \sum_{k=1}^{2^{5pm}} (Sy)_k + \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=2}^{2^p} (Sy)_k - \frac{1}{2} \right| \overset{(\mathbf{??})}{=}$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \left| \frac{1}{2^{5pm+p+1}} \sum_{k=1}^{2^{5pm}} (Sy)_k + \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{i=0}^{p-1} 2^i \cdot \frac{i}{p} - \frac{1}{2} \right| \overset{(\mathbf{??})}{=}$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \left| \frac{1}{2^{5pm+p+1}} \sum_{k=1}^{2^{5pm-2p}} (Sy)_k - \frac{1}{p} + \frac{1}{p2^p} \right| \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{m\to\infty} \left(\frac{1}{p}(1 - 2^{-p}) - \frac{1}{2^{3p+1}} \right) > \frac{1}{p}(1 - 2^{-p+1})$$

Таким образом, $\alpha(Cx) > (1 - 2^{-p+1}) \cdot \alpha(x)$.

Литература

1. *Semenov E. M., Sukochev F. A.* Invariant Banach limits and applications //Journal of Functional Analysis. – 2010. – Т. 259. – №. 6. – С. 1517-1541.