ИНТЕГРИРУЕМЫЕ БИЛЛИАРДНЫЕ КНИЖКИ МОДЕЛИРУЮТ 3-АТОМЫ И ГРУБЫЕ МОЛЕКУЛЫ

И. С. Харчева
(Москва; *irina_harcheva@mail.ru*)

Опишем стандартную постановку биллиардной задачи в некоторой области на плоскости. Пусть дана связная плоская компактная область Ω, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой кривой. При этом все углы в точках излома границы равны $\pi/2$ и кривая не предполагается связной. Пусть материальная точка (биллиардный шар) движется внутри области Ω и отражается на границе по естественному закону (угол падения равен углу отражения) При этом в точках излома границы движение очевидно продолжается по непрерывности, так как угол излома равен $\pi/2$. Как известно, эта динамика задает гамильтонову систему на кокасательном расслоении к области Ω. При этом точка этого расслоения задаётся координатами материальной точки в области и кокасательным (касательным, поскольку метрика плоская) вектором в данной точке. Эта система обладает естественным интегралом – модулем вектора скорости. В некоторых случаях она имеет также второй независимый интеграл. Примером является биллиард в области Ω, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол. Оказывается, в таком биллиарде вектор скорости материальной точки на протяжении всей траектории будет направлен по касательной к фиксированной квадрике, софокусной с семейством. Поэтому у такой системы появляется еще один интеграл, независимый с предыдущим – параметр квадрики Λ. Это означает, что динамическая система биллиарда в такой области будет интегрируема по Лиувиллю. Ее интегрируемость была показана в работе В. В. Козлова, Д. В. Трещёва [1].

Расширим постановку биллиардной задачи. Пусть дано n областей $\Omega_1, ..., \Omega_n$ с кусочно-гладкой границей. Пусть граница этих областей содержит одну и ту же кривую l как часть границы. Припишем к этой дуге перестановку σ из n элементов. Тогда можно определить более сложный биллиард в объединении областей $\cup_{i=1}^{n}\Omega_i$ следующим образом: материальная точка отражается обычным образом от границ, отличных от l и переходит с одной области на другую по перестановке σ, достигая кривой l. Заметим, что общих граничных кривых у областей может быть несколько: $l_1, l_2, ..., l_k$. Ко всем им можно приписать перестановки $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ и рассмотреть биллиард, в котором материальная точка будет переходить с листа на лист на дугах $l_1, l_2, ..., l_k$ по перестановкам $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ соответственно. Такие биллиарды будем называть *биллиардными книжками*, а области Ω_i, из которых состоит биллиардная книжка – *листами*. В частном случае, когда $n = 2$ такие биллиарды называются топологическими. Топологические биллиарды были полностью классифицированы в работе В.В. Фокичевой [2]. Классификации в общем случае на нынешний момент нет.

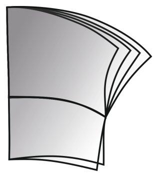

Рис. 1: Пример биллиардной книжки.

В классификации В.В. Фокичевой [2] было обнаружено, что многие известные и важные интегрируемые системы с двумя степенями свободы моделируются топологическими биллиардами, то есть их инварианты Фоменко-Цишанга (см. [3]) совпадают. В связи с этим А.Т. Фоменко предложил следующую гипотезу:

Гипотеза. (А.Т. Фоменко) *Биллиардными книжками можно моделировать:*

Гипотеза A. все 3-атомы;

Гипотеза B. все грубые молекулы (инварианты Фоменко);

Гипотеза C. все меченые молекулы (инварианты Фоменко-Цишанга) .

Теорема 1. (Ведюшкина-Харчева) *Гипотеза Фоменко A верна, а именно, для любого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится биллиардная книжка, такая что в её изоэнергетической поверхности Q^3 слоение Лиувилля прообраза окрестности особого значения интеграла Λ, отвечающего траекториям, направленным к или от одного из фокусов, послойно гомеоморфно данному атому.*

Теорема 2. (Ведюшкина-Харчева) *Гипотеза Фоменко B верна, а именно, для любой грубой молекулы алгоритмически строится биллиардная книжка, такая что в её изоэнергетической поверхности Q^3 слоение Лиувилля послойно гомеоморфно данной грубой молекуле.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01303).

Литература

1. *Козлов В. В., Трещёв Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 408 с.

2. *Фокичева В. В.* Топологическая классификация биллиардов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик. Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 10. С. 127–176.

3. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, том 1. Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 1999.