ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Материалы работы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна — 2018

Воронеж 2018

УДК 517.5 517.9

Напечатано по решению Ученого
совета математического факультета

Издано при поддержке
гранта РФФИ № 12-01-06000-моб_г

Материалы работы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2018». Воронеж: ВГУ, 2018 - с.

Под редакцикй:
В.А.Костин

Редакционная коллегия:
А.Д. Баев, А.В. Глушко, В.Г. Звягин, М.И. Каменский, Ю.И. Сапронов,
Е.М. Семенов

В сборнике представлены статьи участников международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2018», содержащие новые результаты по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, краевым задачам математической физики и другим разделам современной математики.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов.

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВНУТРЕННЕЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, Т.А. Козаченко
(Москва, ИПМехРАН; *kumak@ipmnet.ru*, Одесса;
leshchenko_ d@ukr.net, kushpil.t.a@gmail.com)

Рассматривается задача квазиоптимального торможения вращений динамически симметричного твердого тела с подвижной массой, прикрепленной к точке на оси симметрии. Считается, что при движении на тело действует упругая сила и сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. На тело также действует момент сил линейного сопротивления среды.

Система уравнений управляемого движения в проекциях на главные центральные оси инерции тела имеет вид [1-4]

$$\begin{gathered} A_1\dot{p} + (A_3 - A_1)qr = -b_1A_1pG^{-1} + FG^2qr + Spr^6\omega_\perp - \lambda A_1p, \\ A_1\dot{q} + (A_1 - A_3)pr = -b_2A_1qG^{-1} - FG^2pr + Sqr^6\omega_\perp - \lambda A_1q, \\ A_3\dot{r} = -b_3A_3rG^{-1} - A_1A_3^{-1}Sr^5\omega_\perp^3 - \lambda A_3r, \\ 0 < A_3 \leqslant 2A_1,\ A_3 \neq A_1. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$ на связанные оси, $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(A_1, A_1, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела; кинетический момент тела $\mathbf{G} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$, его модуль $G = |\mathbf{G}| = \left(A_1^2\omega_\perp^2 + A_3^2r^2\right)^{1/2},\ \omega_\perp^2 = p^2 + q^2$.

Считается, что момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту.

Компоненты управляющего момента сил представлены в виде [3]:

$$M_i^u = b_iu_i,\ u_i = -G_iG^{-1},\ i = 1, 2, 3,\ |\mathbf{u}| \leqslant 1. \tag{2}$$

Отметим, что при $b_1 = b_2 = b_3 = b$, управление (2) является оптимальным. Если величины b_i близки, то указанный закон будет квазиоптимальным.

Введенные в (1) обозначения F, S выражаются следующим образом [1,2]:

$$F = m\rho^2\Omega^{-2}A_1^{-3}A_3,\ S = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}d|d|A_1^{-4}A_3^4,\ d = 1 - A_3A_1^{-1}. \tag{3}$$

Коэффициенты F, S характеризуют моменты сил, обусловленные упругим элементом. Здесь m – масса подвижной точки, ρ – радиус-вектор точки крепления подвижной массы. Постоянные $\Omega^2 = c/m,\ \Lambda = \delta/m,\ \lambda_1 = \mu/m$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания; c – жесткость, μ – коэффициент квадратичного трения.

Рассматривается случай, когда коэффициенты связи λ_1 и Ω таковы, что «свободные» движения точки m, вызванные начальными отклонениями, затухают значительно быстрее, чем тело совершит оборот. Предполагается, что

$$\lambda_1 = \Lambda\Omega^3,\ \Omega \gg \omega_0, \tag{4}$$

где ω_0 – модуль начального значения угловой скорости.

Неравенство (4) позволяет ввести малый параметр в (3).

Ставится задача квазиоптимального по быстродействию торможения вращений:

$$\boldsymbol{\omega}(T) = 0, T \to \min_{\mathbf{u}},\ |\mathbf{u}| \leqslant 1. \tag{5}$$

Параметры b_i предполагаются близкими ($b_i \approx b,\ |b_i - b| \ll b$).

Для обезразмеривания задачи выбираем моменты инерции тела относительно оси $x_1 - A_1 = A_2$ и величину порядка начальной скорости – ω_0 в качестве характерных параметров. Введем безразмерные коэффициенты инерции $\tilde{A}_i = A_i/A_1$ и время $\tau = \omega_0 t$.

Система примет вид

$$\frac{d\tilde{p}}{d\tau} = -\left(\tilde{A}_3 - 1\right)\tilde{q}\tilde{r} - \varepsilon\frac{\tilde{b}_1\tilde{p}}{\tilde{G}} + \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{q}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{S}\tilde{p}\tilde{r}^6\left(\tilde{p}^2+\tilde{q}^2\right)^{1/2} - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{p},$$
$$\frac{d\tilde{q}}{d\tau} = -\left(1 - \tilde{A}_3\right)\tilde{p}\tilde{r} - \varepsilon\frac{\tilde{b}_2\tilde{q}}{\tilde{G}} - \varepsilon\tilde{F}\tilde{G}^2\tilde{p}\tilde{r} + \varepsilon\tilde{S}\tilde{q}\tilde{r}^6\left(\tilde{p}^2+\tilde{q}^2\right)^{1/2} - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{q},$$
$$\frac{d\tilde{r}}{d\tau} = -\varepsilon\frac{\tilde{b}_3\tilde{r}}{\tilde{G}} - \varepsilon\tilde{S}\tilde{A}_3^{-2}\tilde{r}^5\left(\tilde{p}^2+\tilde{q}^2\right)^{3/2} - \varepsilon\tilde{\lambda}\tilde{r}. \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon\tilde{F} = m\rho^2\Omega^{-2}A_1^{-1}\tilde{A}_3\omega_0^2,\ \tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 1,\\ \varepsilon\tilde{b}_i = b_i/A_1\omega_0^2,\ \varepsilon\tilde{\lambda} = \lambda/\omega_0,\ \tilde{G} = G/A_1\omega_0,\\ \varepsilon\tilde{S} = m\rho^3\Lambda\Omega^{-3}\left(1-\tilde{A}_3\right)\left|1-\tilde{A}_3\right|A_1^{-1}\tilde{A}_3^4\omega_0^6.\end{gathered} \tag{7}$$

Снова перейдем к обозначению безразмерных выражений в (6), (7) без волн.

Используем порождающее решение системы (6) при $\varepsilon = 0$:

$$r = \text{const},\ p = a\cos\psi,\ q = a\sin\psi,\ a > 0,\ \text{const} \neq 0. \tag{8}$$

Здесь $\psi = (A_3 - 1)\,r\tau + \psi_0$ - фаза колебаний экваториальной составляющей вектора угловой скорости.

Подставим (8) в третье уравнение системы (6). Усредним полученную систему уравнений для a и r. После усреднения система примет вид ($' = d/d\theta$)

$$\begin{gathered}a' = -\frac{a}{2}\left[G^{-1}(b_1+b_2) - 2Sr^6a + 2\lambda\right],\\ r' = -r\left[b_3G^{-1} + SA_3^{-2}r^4a^3 + \lambda\right].\end{gathered} \tag{9}$$

Отметим, что при $b_1 = b_2 = b_3 = b$ уравнения (9) интегрируются полностью [4].

Исследуем частный случай

$$\frac{1}{2}(b_1+b_2) = b_3 = b. \tag{10}$$

Домножим первое уравнение (6) на p, второе – на q, а третье – на $A_3^2 r$ и сложим (перейдя к обозначению безразмерных выражений в (6) без волн). Проведя усреднение, получим

$$G' = -b - \lambda G. \tag{11}$$

Начальное и конечные условия записываются следующим образом

$$G(0) = G^0,\ G\left(T, \theta_0, G^0\right) = 0,\ T = T\left(\theta_0, G^0\right). \tag{12}$$

Решение уравнения (11) с учетом условий (12) имеет вид

$$G(\theta) = -\frac{b}{\lambda} + \left(G^0 + \frac{b}{\lambda}\right)\exp(-\lambda\theta),\ \Theta = \frac{1}{\lambda}\ln\left(G^0\frac{\lambda}{b} + 1\right). \tag{13}$$

Заметим, что величина $\Theta \to \infty$ при $G^0/b \to \infty$ для различных λ; в свою очередь, $\Theta \to 0$ при $G^0\lambda/b \to 0$ (λ - любое) или при $\lambda \to \infty$.

Для системы (9) при условии (10) воспользуемся заменой переменных: $r = \eta G$, $a = \alpha G$. В этом случае уравнения системы (9) принимают вид

$$\alpha' = S\alpha^2\eta^6G^7,\ \eta' = -\eta^5 S A_3^{-2}\alpha^3 G^7. \tag{14}$$

Разделим первое уравнение на второе и получим

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = -A_3^2\eta/\alpha.$$

Находим первый интеграл C_1:

$$\eta^2 = 2C_1 - A_3^{-2}\alpha^2,\ C_1 = \frac{1}{2}A_3^{-2}. \tag{15}$$

Подставим η^2 из (15) в первое уравнение системы (14)

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = SA_3^{-6}\left(1-\alpha^2\right)^3 G^7\alpha^2,\ G_0 = 1. \tag{16}$$

Подставим выражение для G (13) в уравнение (16) для α и проинтегрируем это уравнение [5]

$$A_3^6\left[-\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha}{4(1-\alpha^2)^2}+\frac{7\alpha}{8(1-\alpha^2)}+\frac{15}{16}\ln\left|\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right|\right]=$$
$$=S\left[-\frac{b^7}{\lambda^7}\theta-\frac{7b^6}{\lambda^7}b_*\exp(-\lambda\theta)+\frac{21b^5}{2\lambda^6}b_*^2\exp(-2\lambda\theta)-\right.$$
$$-\frac{35b^4}{3\lambda^5}b_*^3\exp(-3\lambda\theta)+\frac{35b^3}{4\lambda^4}b_*^4\exp(-4\lambda\theta)-\frac{21b^2}{5\lambda^3}b_*^5\exp(-5\lambda\theta)+$$
$$\left.+\frac{7b}{6\lambda^2}b_*^6\exp(-6\lambda\theta)-\frac{1}{7\lambda}b_*^7\exp(-7\lambda\theta)\right]+C_2, \tag{17}$$
$$b_*=G_0+\frac{b}{\lambda}=1+\frac{b}{\lambda}.$$

Вторая постоянная C_2 интегрирования определяется из начального условия: при $\theta=0$ $\alpha=\alpha_0$. Величины η и α связаны соотношением (15). Таким образом, получены выражения для параметров оптимального движения $G(\theta)$, Θ (13) и $a(\theta)$, $r(\theta)$ (14)-(17). Их качественные свойства достаточно просты.

Литература

1. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой // Изв. АН СССР. МТТ. - 1978. - №5. - С.29-34.

2. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2015. - 308с.

3. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. - 368с.

4. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я.С.* Возмущенные и управляемые вращения твердого тела. Одесса: ОНУ им. И.И. Мечникова, 2013. - 288с.

5. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973. - 228с.

О КОЛИЧЕСТВЕ ГОЛОМОРФНО-ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}^3$[1]

А.В. Атанов, А.В. Лобода
(Воронеж; *lobvgasu@yandex.ru*)

В сообщении обсуждается один фрагмент сложной задачи описания голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств. Рассматриваются строго псевдо-выпуклые (СПВ) гиперповерхности с дискретными группами изотропии. Такая поверхность определяется не более чем тремя вещественными коэффициентами (см. [1]) своего нормального мозеровского уравнения (см. [2]), если многочлен 4-й степени N_{220} из этого уравнения имеет специальный вид

$$N_{220} = \varepsilon(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4),\ \varepsilon = \pm 1. \qquad (1)$$

При этом известны (см. [3]) семейства аффинно-различных аффинно-однородных СПВ-гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств, определяемые тремя вещественными параметрами. Можно показать, что после голоморфной нормализации многочлен N_{220} в уравнениях этих поверхностей имеет именно вид (1). Представляется естественной ситуация, в которой три вещественных параметра, позволяющие устанавливать аффинное различие поверхностей, «удерживали» бы и голоморфные различия этих же многообразий. Например, известным аффинно-однородным

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00592-а).

трубчатым поверхностям (трубкам) из двухпараметрического семейства

$$Re\, z_3 = (Re\, z_1)^\alpha (Re\, z_2)^\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{2}$$

соответствуют, как несложно проверить, различные алгебры также из двухпараметрического семейства $g_{5,33}$ работы [4]. В силу этого и голоморфная эквивалентность (как более слабая по сравнению с абстрактной алгебраической эквивалентностью) невозможна для различных поверхностей семейства (2), по крайней мере, при малых возмущениях пары (α, β).

Однако, компьютерные вычисления показывают, что в нормальных уравнениях поверхностей из [3], обобщающих известные примеры [5–6], фактически совпадают не только многочлены N_{220}, но и два других многочлена N_{320}, N_{330}.

Напомним, что именно три вещественных коэффициента пары (N_{320}, N_{330}) позволяют определить однородную СПВ-поверхность при выполнении условия (1). В итоге оказываются справедливыми следующие утверждения.

Теорема 1. *Все алгебраические СПВ-гиперповерхности 4-го порядка из [3]*

$$\begin{aligned} v = x_2 y_1 + \frac{m}{n} y_1 y_2 - \frac{1}{2n} x_1 y_1^2 - \frac{m}{6n^2} y_1^3 - \\ - \frac{s(y_1^2 - 2ny_2)^2}{4n(nx_1 - my_1)} + C(nx_1 - my_1)^3, \end{aligned} \tag{3}$$

где $m^2 + n^2 - ns = 0$, $n < 0$, голоморфно эквивалентны друг другу и поверхности $v = x_2^2/x_1 + x_1^3$.

Теорема 2. *Любая из алгебраических СПВ-гиперповерхностей 6-го порядка из [3]*

$$v = x_2 y_1 + \frac{m}{n} y_1 y_2 - \frac{1}{2n} x_1 y_1^2 - \frac{m}{6n^2} y_1^3 +$$

$$+C\left|(nx_1-my_1)^2-N(y_1^2-2ny_2)\right|^{3/2}+ \tag{4}$$
$$+\frac{(N+2ns)(nx_1-my_1)}{6n^2N^2}\left(2(nx_1-my_1)^2-3N(y_1^2-2ny_2)\right),$$

где $n\neq 0$, $N=m^2+n^2-ns\neq 0$, *голоморфно эквивалентна аффинно-однородной трубке*

$$(v-x_1x_2-x_1^3)^2=C^2(x_2-x_1^2)^3 \tag{5}$$

с тем же, что и в формуле (4), значением параметра C.

Замечание. *Всем трубкам (5) отвечает одна и та же алгебра Ли* $g_{5,33}$ *из работы [4].*

Литература

1. *Лобода А.В.* Коэффициентный анализ в задаче описания голоморфно-однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода // Междунар. конф., посв. 100-летию С.Г.Крейна. – Воронеж, 2017. – С. 130–131.

2. *Лобода А.В.* Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии/ А.В. Лобода // Матем. сборник. – 2001. – Т. 192, №12. – С. 3–24.

3. *Лобода А.В.* О различных способах представления матричных алгебр Ли, связанных с однородными поверхностями / А. В. Лобода, В. К. Евченко // Изв. вузов. Матем. – 2013. – № 4. – С. 42–60.

4. *Мубаракзянов Г.М.* Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка / Г.М. Мубаракзянов // Изв. вузов. Матем. – 1963. – № 3. – С. 99–106.

5. *Doubrov B.M.* Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry / B. M. Doubrov, B. P. Komrakov, M. Rabinovich // Geometric Topology of Submanifolds VIII, World Scientific. – 1996. – P. 168–178.

6. *Beloshapka V.K.* Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic / V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskiy // J. Geom. Anal. – 2010. – V. 20, № 3. – P. 538–564.

ОБРАТНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ РЕЖИМАХ ПОЛЁТА

Г.Г. Бильченко , Н.Г. Бильченко
(Казань; *ggbil2@gmail.com* , *bilchnat@gmail.com*)

Работа является продолжением [1, 2].

1. Рассмотренную в [3–5] прямую задачу:

$$(m, \tau, s) \to (q,\ f;\ \ Q,\ F,\ N)\,, \tag{1}$$

рассмотренные в [5] обратные задачи по вдуву:

$$q^{\vee} \to m^{\sim}\,, \qquad (m^{\sim}, \tau, s) \to (q^{\sim} \approx q^{\vee},\, f^{\sim})\,, \tag{2}$$

$$f^{\vee} \to m^{\sim}\,, \qquad (m^{\sim}, \tau, s) \to (q^{\sim},\, f^{\sim} \approx f^{\vee})\,, \tag{3}$$

а также рассмотренную в [6] двумерную обратную задачу:

$$(q^{\vee}, f^{\vee}) \to (m^{\sim}, \tau^{\sim})\,,\ \ (m^{\sim}, \tau^{\sim}, s) \to (q^{\sim} \approx q^{\vee},\, f^{\sim} \approx f^{\vee}) \tag{4}$$

обозначим ПЗ , ОЗ_m^q , ОЗ_m^f , $\text{ОЗ}_{(m,\tau)}^{(q,f)}$, соответственно.

В [5, 6] управления: *вдув* $m\,(x)$, *температурный фактор* $\tau\,(x) = T_w\,(x)/T_{e0}$, *магнитное поле* $s\,(x) = \sigma B_0^2\,(x)$ задавались для $X = [0; 1]$ или разыскивались $\big(m^{\sim} = \big(m_j^{\sim}\big)_{j=1,\ldots,n_1}$, $\tau^{\sim} = \big(\tau_j^{\sim}\big)_{j=1,\ldots,n_1}\big)$ в виде элементов [7] для сетки *управления*

$$X_1:\quad x_0^{\wedge} = 0 < x_1^{\wedge} < \ldots < x_{n_1}^{\wedge} = 1\,; \tag{5}$$

контрольные значения $q^{\vee} = \big(q_j^{\vee}\big)_{j=0,\ldots,n_2}$, $f^{\vee} = \big(f_j^{\vee}\big)_{j=0,\ldots,n_2}$ задавались, а значения $q^{\sim} = \big(q_j^{\sim}\big)_{j=0,\ldots,n_2}$, $f^{\sim} = \big(f_j^{\sim}\big)_{j=0,\ldots,n_2}$ вычислялись для всех узлов сетки *наблюдения*

$$X_2:\quad x_0^{\vee} = 0 < x_1^{\vee} < \ldots < x_{n_2}^{\vee} = 1\,. \tag{6}$$

Будем предполагать, что:
1) выполнены условия существования решения [5, 6], в частности, $X_1 \subseteq X_2$;
2) согласованы *ограничения* [7] на вдув $I^m_{j,k} = \left[b^m_{j,k}; t^m_{j,k}\right]$ и на температурный фактор $I^\tau_{j,k} = \left[b^\tau_{j,k}; t^\tau_{j,k}\right]$, где $j = 1, \ldots, n_1$:

$$\left(m^\sim\right)^{(k)}(x) \in I^m_{j,k} \text{ для } x \in \left[x^\wedge_{j-1}; x^\wedge_j\right],\ k=0,\ldots,\nu^m_1,\ \nu^m_1 \geq 0\,; \quad (7)$$

$$\left(\tau^\sim\right)^{(k)}(x) \in I^\tau_{j,k} \text{ для } x \in \left[x^\wedge_{j-1}; x^\wedge_j\right],\ k=0,\ldots,\nu^\tau_1,\ \nu^\tau_1 \geq 1\,. \quad (8)$$

ПЗ (1) является частью *прямой экстремальной задачи* (далее – ПЭЗ), рассмотренной в [8–10]. В ПЭЗ^Q_m для заданных $\tau(x)$ и $s(x)$ требуется в ограничениях (7) найти управление $m^\sim$ как приближённое решение экстремальной задачи

$$Q^*\left(\tau, s; N_{\max}\right) = \inf_{m^\sim} Q(m^\sim, \tau, s) \quad (9)$$

с ограничением на мощность обеспечивающей вдув системы

$$N(m^\sim, \tau, s) \leq N_{\max}\,. \quad (10)$$

В ПЭЗ^F_m требуется найти $m^\sim$ как приближённое решение

$$F^*\left(\tau, s; N_{\max}\right) = \inf_{m^\sim} F(m^\sim, \tau, s) \quad (11)$$

в условиях (7), (10) при заданных $\tau(x)$ и $s(x)$.

Обратные задачи (2), (3), (4) с условиями (7) или/и (8) в аппроксимационной постановке [5, 6] с дополнительным условием (10) назовём *обратными экстремальными задачами* и обозначим их ОЭЗ^q_m, ОЭЗ^f_m, ОЭЗ$^{(q,f)}_{(m,\tau)}$, соответственно.

2. Для некоторых ОЭЗ обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

3. Случаю использования ОЭЗ в *задачах на фрагментах* [1, 2] посвящено продолжение [11] данной работы.

Литература

1. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Смешанные обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта // Международная конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения С. Г. Крейна (Воронеж, 13–19 ноября 2017 г.): сборник материалов. — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2017. — С. 52–54.

2. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Комбинированные обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта // Международная конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения С. Г. Крейна (Воронеж, 13–19 ноября 2017 г.): сборник материалов. — Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2017. — С. 50–51.

3. *Бильченко Н. Г.* Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1. — С. 5–14.

4. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 3. — С. 5–11.

5. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О некоторых постановках и возможности восстановления управления // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 4. — С. 5–12.

6. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзву-

ковых летательных аппаратов. III. О постановке двумерных задач и областях допустимых значений «тепло – трение» // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2017. — № 1. — С. 18–25.

7. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* О некоторых классах функций, применяемых для решения задач эффективного управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2017. — № 3. — С. 5–15.

8. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.

9. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.

10. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения “простых” законов вдува // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 95–102.

11. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Экстремальные и неэкстремальные обратные задачи на фрагментах // «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2018»: Материалы международной конференции (26–31 января 2018 г.). — Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2018.

ДИСКРЕТНЫЕ

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОЫ И УРАВНЕНИЯ[2]

В.Б. Васильев
(Белгород; *vbv57@inbox.ru*)

Обозначим $u_d(\tilde{x})$ функцию дискретного аргумента $\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m, h > 0$, и $\tilde{u}_d(\xi), \xi \in \hbar\mathbb{T}^m, \hbar = h^{-1}, \mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$, – ее дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m} u_d(\tilde{x}) e^{i\tilde{x}\cdot\xi} h^m.$$

Пусть $D = \mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}$, положим $D_d = h\mathbb{Z}^m \cap D, h > 0$, $\widetilde{A}_d(\xi)$ – периодическая функция на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $\hbar\mathbb{T}^m$ (см. также [1–4]).

Определение 1. *Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ состоит из функций дискретного аргумента $u_d(\tilde{x})$, для которых конечна норма*

$$||u_d||^2_s = \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} (1 + |\zeta^2_h|)^s \tilde{u}_d(\xi) d\xi,$$

где $\zeta^2_h = \hbar^{-2} \sum\limits_{k=1}^{m} (e^{ih\xi_k} - 1)^2$. Пространство $H^s(D_d)$ состоит из дискретных функций пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{D_d}$. Пространство $H^s_0(D_d)$ состоит из дискретных функций u_d with с носителем в D_d, причем эти функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Норма в пространстве $H^s_0(D_d)$ дается формулой

$$||u_d||^+_s = \inf ||\ell u_d||_s,$$

где infimum берется по всевозможным продолжениям ℓ.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.7311.2017/БЧ).

Определение 2. *Дискретный псевдодифференциальный оператор на функциях дискретного аргумента $u_d(\tilde{x})$ определяется формулой*

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^m} \sum_{\tilde{y}\in h\mathbb{Z}^m} A(\xi) e^{i(x-y)\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) h^m d\xi, \quad \tilde{x} \in D_d, \quad (1)$$

Рассмотрим уравнение

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \quad v_d \in H_0^s(D_d). \qquad (2)$$

Класс E_α – символы, удовлетворяющие условию

$$c_1(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \le |A_d(\xi)| \le c_2(1+|\zeta^2|)^{\alpha/2} \qquad (3)$$

с положительными постоянными c_1, c_2, не зависящими от h.

Обозначим $\Pi_\pm = \{(\xi', \xi_m \pm i\tau), \tau > 0\}, \xi = (\xi', \xi_m) \in \mathbb{T}^m$.

Определение 3. *Периодической факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представление в виде*

$$A_d(\xi) = A_{d,+}(\xi) A_{d,-}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\pm}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в полу-полосы $\hbar\Pi_\pm$ по последней переменной ξ_m при почти всех фиксированных $\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}$ и удовлетворяют оценкам

$$|A_{d,+}^{\pm 1}(\xi)| \le c_1(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{æ}{2}}, \quad |A_{d,-}^{\pm 1}(\xi)| \le c_2(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\pm\frac{\alpha-æ}{2}},$$

с постоянными c_1, c_2, не зависящими от h,

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left(\sum_{k=1}^{m-1} (e^{-ih\xi_k} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_m + i\tau)} - 1)^2 \right), \quad \xi_m + i\tau \in \hbar\Pi_\pm.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической факторизации.

Теорема. *Пусть* $æ - s = n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$. *Тогда общее решение уравнения* (2) *в образах Фурье имеет следующий вид*

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi) X_n(\xi) P_{\xi'}^{per}(X_n^{-1}(\xi)\tilde{A}_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{\ell v_d}(\xi)) + \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi)\sum_{k=0}^{n-1} c_k(\xi')\hat{\zeta}_m^k,$$

$$(P_{\xi'}^{per}\tilde{u}_d)(\xi) \equiv \frac{1}{2}\left(\tilde{u}_d(\xi) + \frac{1}{2\pi i} v.p. \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \tilde{u}_d(\xi', \eta_m) \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_m - \eta_m)}{2} d\eta_m\right),$$

где $X_n(\xi)$ – *произвольный многочлен степени* n *переменных* $\hat{\zeta}_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1)$, $k = 1, \cdots, m$, *удовлетворяющий условию* (3), $c_j(\xi'), j = 0, 1, \cdots, n-1$, – *произвольные функции из* $H_{s_j}(h\mathbb{T}^{m-1}), s_j = s - æ + j - 1/2$. *Имеют место априорные оценки*

$$||u_d||_s \leq C(||f||_{s-\alpha}^+ + \sum_{k=0}^{n-1} [c_k]_{s_k})$$

где $[\cdot]_{s_k}$ *обозначает норму в пространстве* $H^{s_k}(h\mathbb{T}^{m-1})$, *и постоянная* C *не зависит от* h.

Литература

1. *Vasilyev A.V., Vasilyev V.B.* Discrete singular integrals in a half-space. In: Current Trends in Analysis and its Applications. Research Perspectives. Mityushev, V., Ruzhansky, M. (Eds.) Birkhäuser, Basel, 2015. P. 663-670.

2. *Vasilyev V.B.* Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization. In: Integral Methods in Science and Engineering. V.1. Theoretical Technique. C. Constanda, Dalla Riva, M., Lamberti, P.D., Musolino, P. (Eds.) Birkhäuser, Cham, 2017. P. 315–324.

3. *Vasilyev V.B.* The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, and discrete pseudo-differential operators. AIP Conf. Proc. V. 1863. 2017 (140014).

4. *Vasilyev V.B.* On discrete boundary value problems. AIP Conf. Proc. V. 1880. 2017 (050010).

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ТЕОРЕМЫ ДИРИХЛЕ ОБ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова, Т. М. Сивоплясов
(Воронеж)

В настоящей работе рассмотрен частный случай теоремы Дирихле об арифметической прогрессии. Сформулируем теорему Дирихле.

Теорема 1. *Арифметическая прогрессия вида* $nk + a$*:*

$$a,\ a+k,\ a+2k,\ \ldots,\ a+(n-1)k,\ \ldots$$

при $a, n, k \in N$ *и* $(a, k) = 1$ *содержит бесконечное множество простых чисел.*

Отметим, что требование $(a, k) = 1$ важно, так как если $(a, k) > 1$, то арифметическая прогрессия будет содержать самое большее одно простое число.

Доказательство теоремы 1 получил Л. Дирихле в 1837 г. Оно основано на применении характеров (по модулю k) и L – рядов Дирихле с использованием теории функций комплексной переменной.

Доказательство теоремы 1 или более сильного результата можно найти в книгах [1] – [3]. О характерах можно узнать из книги [4].

Некоторые частные случаи теоремы 1 могут быть просто доказаны, например, для арифметических прогрессий видов $4k+1$, $4k+3$, $6k+1$, $6k+5\,(k \in N)$. Эти доказательства приведены в книге [5].

В 1949 г. А. Сельберг получил элементарное доказательство теоремы 1, то есть без использования теории функций комплексной переменной. Это доказательство является технически сложным, использует аппроксимацию числовой функции. Элементарное доказательство теоремы 1 приведено в книге [6].

В 1961 г. А. Роткевич получил элементарное доказательство для частного случая теоремы 1, а именно, для арифметической прогрессии вида $nk + 1\,(n, k \in N)$.

Теорема 2. *Для любого натурального числа n существует бесконечное множество простых чисел вида $nk+1$, где $k \in N$.*

Элементарное доказательство теоремы 2, то есть частного случая теоремы 1 при $a = 1$, приведено в статье [7], в книгах его нет. Идея доказательства состоит в том, что достаточно было доказать существование простого числа вида $nk + 1$ для любого натурального числа n, то есть простого числа вида $nmt + 1$, которое больше m и имеет вид $nk + 1$ при $k = mt\,(n, m, k, t \in N)$. При этом использованы понятие показателя числа по простому модулю, функция Мёбиуса и теорема Ферма.

Литература

1. *Гельфонд А. О.* Элементарные методы в аналитической теории чисел / А. О. Гельфонд, Ю. В. Линник. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 272 с.

2. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел / А. А. Карацуба. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1983. – 240 с.

3. *Чандрасеккхаран К.* Введение в аналитическую теорию чисел / К. Чандрасекхаран. – перевод с англ. С. А. Степанова. – М.: Мир, 1974. – 187 с.

4. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел / И. М. Виноградов. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука, 1981. – 176 с.

5. *Бухштаб А. А.* Теория чисел / А. А. Бухштаб. – 2-е изд., исправл. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.

6. *Трост Э.* Простые числа / Э. Трост. – перевод с нем. Н. И. Фельдмана. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 135 с.

7. *Rotkiewicz A.* Demonstraton arithmetique de l‘existence d‘une infinite de nombres premiers de la forme $nk + 1$ / A.

Rotkiewicz // L‘enseignement Mathematique, 1961. – T. VII. – P. 277–280.

ИНВАРИАНТЫ ЖОРДАНА–КРОНЕКЕРА ПОЛУПРЯМЫХ СУММ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБР ЛИ

К.С. Ворушилов
(Москва; *ksvorushilov@gmail.com*)

В докладе будет рассказано о связи инвариантов Жордана–Кронекера алгебр Ли с методом сдвига аргумента, изложенным А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в работе [4], а также о вычислении инвариантов Жордана–Кронекера для некоторых классов алгебр Ли. В частности, эти инварианты вычислены для полупростых алгебр Ли и алгебр малой размерности; данные результаты можно найти в работах [1] и [2] . Интересным примером для вычисления инвариантов Жордана–Кронекера являются полупрямые суммы полупростых алгебр Ли с несколькими экземплярами пространств их стандартных представлений.

Согласно теореме Болсинова из [3], полнота коммутативного набора, построенного методом сдвига аргумента на некоторой алгебре Ли, означает, что эта алгебра Ли имеет кронекеров тип. Используя этот факт и некоторые дополнительные соображения, автору удалось вычислить инварианты Жордана-Кронекера для полупрямых сумм $so(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$ и $sp(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$. При этом в случае $sp(n)$ при различных значениях n и k полупрямая сумма может иметь как кронекеров, так и смешанный тип.

Для аналогичных полупрямых сумм в случаях $sl(n)$ и $gl(n)$ полный ответ пока не получен, но удалось вычислить инварианты Жордана–Кронекера алгебры $sl(n) \oplus (\mathbb{R}^n)^k$ для некоторых значений k и n, в частности, для случаев $k \geq n$.

Литература

1. *Bolsinov A.V., Zhang P.* Jordan–Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras. Transform. Groups Vol. 21 (1), pp. 51–86, 2016.

2. *Zhang P.* Algebraic Aspects of Compatible Poisson Structures. PhD Thesis, Loughborough University, 2012.

3. *Болсинов А.В.* Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на алгебрах Ли. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, МГУ им. М. В. Ломоносова, 1987.

4. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли. Изв. АН СССР. Сер. матем., 42 (2), с. 396–415, 1978.

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Г. Э. Гришанина, Э. М. Мухамадиев
(Дубна; *anora66@mail.ru*; Вологда;
emuhamadiev@rambler.ru)

Рассмотрим задачу о существовании классического решения [1] неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x, y) = f(x, y),\ (x, y) \in G \qquad (1)$$

где Δ- оператор Лапласа, G- ограниченная область в R^2, $f(x, y)-$ непрерывная в G функция. Возникает вопрос о том, каким дополнительным условиям, кроме непрерывности, должна удовлетворять функция $f(x, y)$ для того, чтобы уравнение (1) имело классическое решение. Подобная задача для уравнения Пуассона была изучена авторами в работе [2].

Определим множество

$$\widetilde{G} = \{(x, y, r) :\ M = (x, y) \in G,\ 0 \le r < \rho(M, \partial G)\},$$

где $\rho(M, \partial G)$ - расстояние от точки M до границы ∂G области G, и функцию

$$g(x, y, r, \varphi) = f(x + r\cos\varphi,\ y + r\sin\varphi)$$

на $\widetilde{G} \times [0, 2\pi]$. Очевидно, эта функция непрерывна по совокупности переменных. Комплекснозначная функция

$$F_k(x, y, r) = \int_0^{2\pi} g(x, y, r, \varphi)\exp(ik\varphi)d\varphi, \quad k = \pm 1, \pm 2, ...$$

определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$ и

$$F_k(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in G.$$

Определим функции

$$f_k(x, y, r) = \int_r^{r_1} F_k(x, y, s)\,\frac{ds}{s}, \quad 0 < r \le r_1(x, y) \equiv \frac{1}{2}\rho(M, \partial G).$$

Назовем непрерывную функцию $f(x, y)$ k-усиленно непрерывной, если $f_k(x, y, r)$ имеет непрерывное продолжение на подмножестве $\{(x, y, 0) : (x, y) \in G\}$ множества $\widetilde{G}$. Очевидно, непрерывная по Гельдеру функция является k-усиленно непрерывной для любого k. Более общее достаточное условие k-усиленной непрерывности функции $f(x, y)$ дает наличие оценки для функции $F_k(x, y, r)$:

$$|F_k(x, y, r)| \le C(1 + |\ln r|)^{\nu},$$

$$\nu < -1, \quad C > 0, \quad 0 < r \le r_1(x, y).$$

Теорема 1. *Если уравнение (1) имеет в области G классическое решение, то функция $f(x,y)$ k-усиленно непрерывна при $k=2$ и $k=4$ в этой области.*

Сформулируем несколько вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства этой теоремы. Пусть функция $u(x,y), \quad (x,y)\in G$, имеет непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно в области G. Положим

$$f(x,y)=\Delta^2 u(x,y),\ (x,y)\in G. \tag{2}$$

По функциям $f(x,y)$ и $u(x,y)$ определим функции

$$g(x,y,r,\varphi)=f(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi),$$

$$v(x,y,r,\varphi)=u(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)$$

в области $\widetilde{G}\times[0,2\pi]$ и комплекснозначные функции

$$F_k(x,y,r)=\int_0^{2\pi} g(x,y,r,\varphi)\exp(ik\varphi)d\varphi,$$

$$U_k(x,y,r)=\int_0^{2\pi} v(x,y,r,\varphi)\exp(ik\varphi)d\varphi, \quad (x,y,r)\in\widetilde{G},$$

$$f_k(x,y,r)=\int_r^{r_1} F_k(x,y,s)\,\frac{ds}{s},$$

$$u_k(x,y,r)=\int_r^{r_1} U_k(x,y,s)\,\frac{ds}{s},$$

$$(x,y,r)\in\widetilde{G}, \quad r_1(x,y)\equiv\frac{1}{2}\rho(M,\partial G), \quad M=(x,y).$$

Отметим, что функции $F_k(x,y,r)$ непрерывны по совокупности переменных, а $U_k(x,y,r)$ имеют непрерывные частные производные по всем переменным до 4-го порядка включительно. Наша задача - установить сходимость несобственного интеграла

$$f_k(x,y,0)=\lim_{r\to 0} f_k(x,y,r)=\lim_{r\to 0}\int_r^{r_1} F_k(x,y,s)\,\frac{ds}{s}=$$

$$= \int_0^{r_1} F_k(x,y,s)\,\frac{ds}{s},$$

равномерно относительно (x,y) из компактного подмножества области G, при $k = 2$ и $k = 4$, исходя из связи (2) между функциями $f(x,y)$ и $u(x,y)$.

Лемма 1. *Справедливо тождество*

$$F_k(x,y,r) =$$

$$= r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} + \frac{5-2k^2}{r^3}\frac{\partial U_k}{\partial r} + \frac{4(4-k^2)}{r^4}U_k\right) +$$

$$+\frac{(4-k^2)(16-k^2)}{r^4}U_k,$$

где

$$U_k = U_k(x,y,r), \quad (x,y,r) \in \widetilde{G}.$$

Лемма 2. *Функции $U_2(x,y,r)$ и $U_4(x,y,r)$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$U_2(x,y,0) = \frac{\partial U_2}{\partial r}(x,y,0) = 0,$$

$$U_4(x,y,0) = \frac{\partial U_4}{\partial r}(x,y,0) = \frac{\partial^2 U_4}{\partial r^2}(x,y,0) = \frac{\partial^3 U_4}{\partial r^3}(x,y,0) = 0.$$

Существуют пределы

$$\lim_{r\to 0}\frac{2}{r^2}U_2(x,y,r) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\frac{\partial U_2}{\partial r}(x,y,r) =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2}(x,y,r) = \frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2}(x,y,0),$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{4!}{r^4}U_4(x,y,r) = \lim_{r\to 0}\frac{3!}{r^3}\frac{\partial U_4}{\partial r}(x,y,r) = \lim_{r\to 0}\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 U_4}{\partial r^2}(x,y,r) =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 U_4}{\partial r^3}(x,y,r) = \lim_{r\to 0} \frac{\partial^4 U_4}{\partial r^4}(x,y,r) = \frac{\partial^4 U_4}{\partial r^4}(x,y,0)$$

равномерно на каждом компактном подмножестве области G.

Лемма 3. *Пусть функция $u(x,y)$ непрерывна в области G вместе со всеми частными производными до k-го порядка включительно. Тогда функция*

$$U_k(x,y,r) = \int_0^{2\pi} v(x,y,r,\varphi)\exp(ik\varphi)d\varphi,$$

$$v(x,y,r,\varphi) = u(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)$$

в области G имеет непрерывные частные производные по совокупности переменных (x,y,r), причем

$$U_k(x,y,0) = \frac{\partial U_k}{\partial r}(x,y,0) = ... = \frac{\partial^{k-1} U_k}{\partial r^{k-1}}(x,y,0) = 0,$$

и равномерно на каждом компактном подмножестве области G имеют место предельные соотношения

$$\lim_{r\to 0} \frac{U_k(x,y,r)}{r^k} \cdot k! = \lim_{r\to 0} \frac{(k-1)!}{r^{k-1}} \frac{\partial U_k(x,y,r)}{\partial r} = ... =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \frac{\partial^{k-1} U_k(x,y,r)}{\partial r^{k-1}} = \frac{\partial^k U_k}{\partial r^k}(x,y,0).$$

При некоторых дополнительных условиях необходимое условие существования классического решения является и достаточным, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема и k-усиленно непрерывна при $k=2$ и $k=4$ в области G. Тогда функция*

$$u_0(x,y) = \frac{1}{8\pi} \int\int_G f(\xi,\eta) r^2 \ln r d\xi d\eta, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2,$$

является классическим решением уравнения (1).

Литература

1. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский* Уравнения математической физики. М: Наука, 1977. — 735 с.

2. *Э. М. Мухамадиев, Г. Э. Гришанина, А.А.Гришанин* О применении метода регуляризации к построению классического решения уравнения Пуассона. Труды института мателатики и механики УрО РАН, т. 21, №1, 2015. С. 196-211.

ЧЕМ АКСИОМЫ ОТЛИЧАЮТСЯ ОТ ПОСТУЛАТОВ

Г.А. Зверкина

(Москва; *zverkina@inbox.ru*)

Как известно, современная математика построена по принципам, заложенным учёными Древней Греции, а именно по образу "Начал" Евклида. То есть имеется некоторый набор аксиом (недоказуемых утверждений), из которых по некоторым правилам логики выводятся новые математические факты. Однако в тексте Евклида кроме аксиом присутствуют также некоторые недоказуемые утверждения, называемые "постулатами" (от лат. *postulatus* "жалоба, иск", из *postulare* "требовать, просить"; греч. $\alpha\grave{\iota}\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha$ – требование). В Средние века арабоязычные математики, познакомившиеся в греческой наукой, воспринимали постулаты как некие специфические аксиомы, и именно в это время начинаются попытки доказательства знаменитого пятого постулата. Как известно, позднее этим вопросом заинтересовались и европейские учёные, результатом чего стали исследования Яноша Бойяи (Bolyai János, 1802–1860), Карла Фридриха Гаусса (Johann Carl Friedrich Gauß, 1777–1855) и Николая Ивановича Лобачевского (1792–1856). При этом всегда постулаты воспринимались как разновидность аксиом, по неизвестной причине выделенных в отдельную группу, сформулированную *перед* аксиомами (и сейчас, когда формулируется некая аксиома, математик часто говорит: “я постулирую...”):

ПОСТУЛАТЫ. Допустим:

П1. *Что от всякой точки до всякой точки <можно> провести прямую линию.*

П2. *И что ограниченную прямую <можно> непрерывно продолжать по прямой.*

П3. *И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг.*

П4. (Акс. 10.) *И что все прямые углы равны между собой.*

П5. (Акс. 11.) *И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.*

Сравните это с аксиомами:

А1. *Равные одному и тому же равны и между собой.*

А2. *И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.*

А3. *И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.*

А4. *И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.*

А5. *И удвоенные одного и того же равны между собой.*

А6. *И половины одного и того же равны между собой.*

А7. *И совмещающиеся друг с другом равны между собой.*

А8. *И целое больше части.*

А9. *И две прямые не содержат пространства.*

Разнородность постулатов и аксиом видна невооруженным глазом! И чтобы понять, почему Евклид разделил аксиомы и постулаты на две группы утверждений, надо попытаться понять то, в каких условиях он творил.

Мы часто забываем, что условия, в которых работали математики прошлого, и их инструментарий (в т.ч. теоретический) сильно отличались от условий современного математического исследования. Здесь не имеется в виду современная электронная техника – мы не задумываемся о том, на чём писали или чертили свои чертежи наши предшественники, как они выполняли вычисления, какими геометрическими и арифметическими инструментами они пользовались. Вплоть до распространения бумаги из Китая на Ближний Восток геометрические чертежи и арифметические расчёты делались на разнообразных подсобных поверхностях – у богатых имелись восковые таблички, менее обеспеченные писали (чертили) на черепках или ровных земляных площадках; папирус был дорог, а временами и недоступен, а сменивший его пергамент был ещё дороже. Лишь окончательный результат исследования мог быть записан на дорогом материале типа пергамента или папируса, а все предварительные исследования чаще всего производились весьма неуклюжими и крупными геометрическими инструментами на подготовленных земляных площадках. Теперь становятся ясными постулаты или "требования", предъявляемые к этим основам чертежей:

П1. *Площадка для чертежа не имеет ям или иных препятствий для прочерчивания прямой линии.*

П2. *Площадка для чертежа достаточно велика, чтобы вместить все необходимые детали чертежа.*

П3. *Повтор: площадка для чертежа достаточно велика.*

П4. (Акс. 10.) *Площадка не имеет бугров и впадин, искажающих углы между начерченными линиями – т.е. это площадка с постоянной кривизной.*

П5. (Акс. 11.) *И эта кривизна - нулевая.*

Объём тезисов доклада не позволяет привести достаточно аргументов для подтверждения этой интерпретации постулатов. Надеемся, время для доклада будет достаточным, чтобы убедить слушателей в обоснованности высказанного.

Литература

1. *Евклид.* Начала Евклида. Книги I-VI / пер. с греч. и комм. Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М.-Л.: ГТТИ, 1948. – 448 с.

1. *Зверкина Г.А.* Об аксиомах и постулатах в античной математике// Труды X Международных Колмогоровских Чтений. Ярославль, 2012. с.160-164.

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В КОРНЕВОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ

С.П.Зубова, Е.В. Раецкая
(Воронеж; *spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru*)

Рассматривается в банаховом пространстве $E = \{v(x),\ x \in \in X\}$ уравнение

$$\frac{\partial u}{dt} = Au(x,t), \quad t \in [t_0, t_k], \tag{1}$$

с оператором A, имеющим при всех $x \in X$ число 0 нормальным собственным числом.

Под решением уравнения (1) подразумевается дифференцируемая по t функция $u(x,t) \in domA$, удовлетворяющая (1) при всех $t \in [t_0, t_k]$, $x \in X$.

Свойство оператора A иметь число 0 нормальным собственным числом означает, что при каждом $x \in X$ имеет место разложение пространства E в прямую сумму подпространств:

$$E = M(x) \dot{+} N(x), \tag{2}$$

где $N(x)$ — корневое подпространство оператора A, $M(x)$ — инвариантное относительно A подпространство, в котором A имеет ограниченный обратный A^{-} [1].

С помощью (2) уравнение (1) раскладывается на два изолированных уравнения в подпространствах $M(x)$ и $N(x)$.

Теорема. *В подпространстве* $N(x)$ *решение уравнения* (1) *строго полиномиально по* t:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \Big(\sum_{r=k}^{m_j} c_j^r(x) \cdot t^{r-k} \Big) e_j^k(x).$$

Здесь $e_j^1(x)$ — собственные элементы оператора A, $e_j^k(x)$ — элементы жордановых цепочек, $c_j^r(x)$ — произвольные скалярные функции.

Литература

1. *Гохберг И.Ц., М.Г. Крейн М.Г..* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов. М. : Наука, 1965. — 448 с.

2. *Zubova S.P.* Solution of the homogeneous Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator multiplying the derivative // Pleiades Publishing: Doklady Mathematics. – 2009. – Vol. 80, No. 2. – P. 710-712.

3. *Zubova S. P., Raetskaya E.V.* Solution of the Cauchy Problem for Two Descriptive Equations with Fredholm Operator / Pleiades Publishing: Doklady Mathematics. – 2014. – Vol. 90, No. 3. – Pp. 528-532.

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

П. Н. Зюкин, И. В. Сапронов, В. В. Зенина

(Воронеж; *pzukin@mail.ru*)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$xy'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x) \tag{1}$$

где $x \in [0,1]$, $h(x)$ - непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция со значениями в комплексном банаховом пространстве E, $a_0(x)$, $a_1(x)$ - непрерывные на отрезке $[0,1]$ функции со значениями в пространстве L линейных ограниченных операторов, действующих из E в E. Уравнение (1) вырождается при $x = 0$. В настоящей работе приводятся условия существования гладких вплоть до точки $x = 0$ решений дифференциального уравнения (1). Эти условия получены на основе результатов, содержащихся в работах [1], [2].

Пусть $\overline{C}((0,1];E)$ - пространство функций, принадлежащих $C((0,1];E)$, каждую из которых можно продолжить на отрезок $[0,1]$ до функции класса $C([0,1];E)$, n - натуральное число. Введем функциональное пространство с "весом"

$$C_1^n([0,1];E) = \{z(x) \in C^{n-1}([0,1];E) : xz^{(n)}(x) \in \overline{C}((0,1];E)\}.$$

Пусть I - тождественный оператор в E , $\sigma(a_1(0))$ - спектр оператора $a_1(0)$.

Теорема 1. *Пусть m - наименьшее из натуральных чисел k таких, что $\sigma(a_1(0)) \subset \{\lambda : Re\lambda > -k\}$. Пусть $m > 1$ и в дифференциальном уравнении (1) функции $a_0(x)$, $a_1(x)$ принадлежат $C^n([0,1];L)$, $h(x) \in C^n([0,1];E)$, где n - натуральное число, $n \geq m$. Если стистема уравнений*

$$\begin{cases} a_1(0)\psi_1 + a_0(0)\psi_0 = h(0), \\ (a_1(0) + iI)\psi_{i+1} + a_0(0)\psi_i + \\ + \sum\limits_{j=1}^{i} C_i^j(a_1^{(j)}(+0)\psi_{i-j+1} + a_0^{(j)}(+0)\psi_{i-j}) = h^{(i)}(+0), \\ i = 1, 2, ..., m-1 \end{cases} \tag{2}$$

разрешима относительно элементов ψ_0, ψ_1,..., ψ_m пространства E, то каждому решению ψ_0, ψ_1,..., ψ_m этой системы уравнений соответствует единственное решение $y(x)$ дифференциального уравнения (1), принадлежащее $C^{m+1}([0,1];E)$ и удовлетворяющее условиям

$$y(0)=\psi_0, y\prime(+0)=\psi_1, y\prime\prime(+0)=\psi_2, ..., y^{(m)}(+0)=\psi_m;$$

это решение $y(x)$ принадлежит также $C_1^{n+2}([0,1];E)$. Если система уравнений (2) неразрешима относительно элементов ψ_0, ψ_1,..., ψ_m пространства E, то дифференциальное уравнение (1) не имеет решения, принадлежащего $C^{m+1}([0,1];E)$.

Замечание 1. *Теорема 1 остается справедливой и в случае $m=1$, если систему уравнений (2) заменить уравнением $a_1(0)\psi_1+a_0(0)\psi_0=h(0)$.*

Литература

1. *Зюкин П.Н.* О гладких решениях линейного вырождающегося дифференциального уравнения ℓ-го порядка / П.Н. Зюкин // Воронеж. гос. лесотехн. акад. - Воронеж, 2005. - 15с. - Деп. в ВИНИТИ 29.11.05, №1562 - В2005.

2. *Зюкин П.Н.* О гладких решениях линейного вырождающегося дифференциального уравнения / П.Н. Зюкин // Математические модели и операторные уравнения: сб. научн. тр. / ВорГУ. - Воронеж, 2003. - Т. 2. - С. 68-74.

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ЧЛЕНАМИ

Е.В. Иконникова

(Воронеж; *uralochka_87@mail.ru*)

В настоящей статье рассматривается задача о существовании и единственности почти периодического решения, а также о сходимости решений к стационарному решению для дифференциальных уравнений нейтрального типа:

$$y'(\tau) = f\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}, y(\tau)\Big) + Cy'(\tau - \varepsilon h). \qquad (1)$$

Предполагается, что выполнены следующие условия: $D1$) функция $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных, $\varepsilon \in (0,1)$; $D2$) $f(\cdot, u)$ является почти периодической по первой переменной; $D3$) $f(\xi, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой k_1 по второй переменной; $D4$) Оператор $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $C = \{c_{ij}\delta_{ij}\}$, где δ_{ij} – символы Кронекера и $|c_{ii}| < 1$.

Пусть $Q = [q_{ij}]_{i,j=1}^n$ – квадратная матрица размера $n \times n$; $\mathfrak{R}$ – метрическое пространство; coA — выпуклая оболочка множества $A \subset \mathfrak{R}$; $C(\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных и ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций $x \in \mathbb{R}^n$ с векторной нормой $\|x\|_{C,\,n} = colon(\|x_1\|_{C(\mathbb{R})}, \ldots, \|x_n\|_{C(\mathbb{R})})$, где $\|x_i\|_{C(\mathbb{R})} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x_i(t)|$ $(i = \overline{1,n})$; $B(\mathbb{R}^n)$ — пространство почти периодических функций $x \in \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{B,\,n} = \|x\|_{C,\,n}$.

Пусть функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ локально-липшицева. Через Ω_g обозначим множество точек, в которых g не дифференцируема. Если в точке $y \in \mathbb{R}^n$ функция g дифференцируема, то через $Jg(y)$ будем обозначать матрицу якобиана.

Определение [1, стр. 69]. *Пусть $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ локально-липшицева. Обобщенный якобиан Кларка $\partial g(x)$ функции g в точке x определяется следующим образом:*

$$\partial g(x) = co\left\{\lim_{k\to\infty} Jg(x_k) : \{x_k\} \subset \mathbb{R}^n, x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x, x_k \notin \Omega_f\right\}.$$

Пусть функция $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ липшицева по второй переменной. Через $\partial f(\xi, u)$ обозначим обобщенный якобиан Кларка по переменной u при фиксированной ξ. Элемент строки с номером i и столбца с номером j матрицы

$\partial f(\xi,u)$ обозначен через $\frac{\partial f_i(\xi,u)}{\partial u_j}$. Пусть $\mathfrak{A}=\{\partial f(\xi,u):\xi\in(-\infty,\infty),u\in\mathbb{R}^n\}$. Обозначим:

$$m_{ii}=\min_{\mathfrak{A}}\frac{\partial f_i(\xi,u)}{\partial u_i}, M_{ii}=\max_{\mathfrak{A}}\frac{\partial f_i(\xi,u)}{\partial u_i}\ (i=\overline{1,n});$$
$$|M_{ij}|=\max_{\mathfrak{A}}\left|\frac{\partial f_i(\xi,u)}{\partial u_j}\right|\ (i,j=\overline{1,n};\ i\neq j).$$

Замечание. *В зависимости от значений M_{ii} на элементы матрицы C накладываются следующие ограничения: 1) $-1<\frac{-m_{ii}}{M_{ii}-m_{ii}}<c_{ii}<\frac{m_{ii}}{m_{ii}+M_{ii}}<1$, если $M_{ii}>0$; 2) $-1<c_{ii}<\frac{1}{2}$, если $M_{ii}<0$.*

Пусть $u\in\mathbb{R}^n$. Обозначим $F^0(u)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\varsigma,u)d\varsigma$. Наряду с (1) рассмотрим уравнение:

$$\frac{dy}{d\tau}=\sum_{l=0}^{\infty}C^lF^0(y). \tag{2}$$

Предположим также, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет следующему условию:

i) Пусть m_{ii}, M_{ii}, $|M_{ij}|$ конечны при всех $i,j=\overline{1,n}$, причем $M_{ii}\neq 0$. Определим вспомогательную матрицу Q следующим образом. Пусть среди M_{ii} и соответствующих им компонент c_{ii} встречаются числа разных знаков, без ограничения общности можно считать, что существуют $\nu,p,r\in\mathbb{N}$, $1\le\nu\le p\le r\le n-1$ такие, что $M_{i_ki_k}>0,c_{i_ki_k}>0$ при $i_k=\overline{1,\nu}$, $M_{i_ki_k}>0,c_{i_ki_k}<0$ при $i_k=\overline{\nu+1,p}$, $M_{i_ki_k}<0,c_{i_ki_k}>0$ при $i_k=\overline{p+1,r}$ и $M_{i_ki_k}<0,c_{i_ki_k}<0$ при $i_k=\overline{r+1,n}$.

Положим

$$Q = \begin{pmatrix} Q^{+}_{ij}\Big|^{j=\overline{1,\nu}}_{i=\overline{1,\nu}} & Q^{+}_{ij}\Big|^{j=\overline{\nu+1,p}}_{i=\overline{1,\nu}} & Q^{+}_{ij}\Big|^{j=\overline{p+1,r}}_{i=\overline{1,\nu}} & Q^{+}_{ij}\Big|^{j=\overline{r+1,n}}_{i=\overline{1,\nu}} \\ Q^{-}_{ij}\Big|^{j=\overline{1,\nu}}_{i=\overline{\nu+1,p}} & Q^{-}_{ij}\Big|^{j=\overline{\nu+1,p}}_{i=\overline{\nu+1,p}} & Q^{-}_{ij}\Big|^{j=\overline{p+1,r}}_{i=\overline{\nu+1,p}} & Q^{-}_{ij}\Big|^{j=\overline{r+1,n}}_{i=\overline{\nu+1,p}} \\ \overline{Q}^{+}_{ij}\Big|^{j=\overline{1,\nu}}_{i=\overline{p+1,r}} & \overline{Q}^{+}_{ij}\Big|^{j=\overline{\nu+1,p}}_{i=\overline{p+1,r}} & \overline{Q}^{+}_{ij}\Big|^{j=\overline{p+1,r}}_{i=\overline{p+1,r}} & \overline{Q}^{+}_{ij}\Big|^{j=\overline{r+1,n}}_{i=\overline{p+1,r}} \\ \overline{Q}^{-}_{ij}\Big|^{j=\overline{1,\nu}}_{i=\overline{r+1,n}} & \overline{Q}^{-}_{ij}\Big|^{j=\overline{\nu+1,p}}_{i=\overline{r+1,n}} & \overline{Q}^{-}_{ij}\Big|^{j=\overline{p+1,r}}_{i=\overline{r+1,n}} & \overline{Q}^{-}_{ij}\Big|^{j=\overline{r+1,n}}_{i=\overline{r+1,n}} \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица Q записана в виде блоков: Q^{+}_{ij}, Q^{-}_{ij}, $\overline{Q}^{+}_{ij}$, $\overline{Q}^{-}_{ij}$ с элементами q^{+}_{ij}, q^{-}_{ij}, $\overline{q}^{+}_{ij}$, $\overline{q}^{-}_{ij}$, соответственно. Элементы блоков определены следующим образом: $q^{+}_{ii} = \frac{m_{ii}}{M_{ii}} - \frac{c_{ii}}{1-c_{ii}}$ при $i = \overline{1,\nu}$; $q^{+}_{ij} = -\frac{|M_{i,j}|}{M_{ii}}\frac{1}{1-c_{ii}}$ при $i = \overline{1,\nu}, j = \overline{1,n}, j \neq i$; $q^{-}_{ii} = \frac{m_{ii}}{M_{ii}} + \frac{c_{ii}}{1-c_{ii}}$ при $i = \overline{\nu+1,p}$; $q^{-}_{ij} = -\frac{|M_{ij}|}{M_{ii}}\Big(1 - \frac{c_{ii}}{1-c_{ii}}\Big)$ при $i = \overline{\nu+1,p}, j = \overline{1,n}, j \neq i$; $\overline{q}^{+}_{ii} = \frac{M_{ii}}{m_{ii}}\Big(1 - \frac{c_{ii}}{1-c_{ii}}\Big)$ при $i = \overline{p+1,r}$; $\overline{q}^{+}_{ij} = \frac{|M_{ij}|}{m_{ii}}\frac{1}{1-c_{ii}}$ при $i = \overline{p+1,r}, j = \overline{1,n}, j \neq i$; $\overline{q}^{-}_{ii} = \frac{M_{ii}}{m_{ii}}\frac{1}{1-c_{ii}}$ при $i = \overline{r+1,n}$; $\overline{q}^{-}_{ij} = \frac{|M_{ij}|}{m_{ii}}\Big(1 - \frac{c_{ii}}{1-c_{ii}}\Big)$ при $i = \overline{r+1,n}, j = \overline{1,n}, j \neq i$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $D1)$–$D4)$,* ***i)*** *и пусть все последовательные главные миноры соответствующей матрицы Q положительны. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ уравнение (1) имеет единственное почти периодическое решение $y^{\varepsilon}(\tau)$, причем $\|y^{\varepsilon}(\tau) - y^{*}\|_{B,n} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где y^{*} — стационарное решение усредненной задачи (2) .*

Литература

1. *Кларк, Фрэнк* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ У НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

А.И. Перов, В.К. Каверина
(Воронеж; *anperov@mail.ru, lera_ evk@mail.ru*)

В работе изучается вопрос существования периодических решений у возмущенного дифференциального уравнения . Полученные теоремы навеяны проблемой В.И. Зубова [1], [3, с. 220] и связаны с понятиями асимптотической устойчивости в целом и устойчивости по Дирихле.

Рассмотрим обыкновенное нелинейное дифференциальное скалярное уравнение n-го порядка следующего вида

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}), \tag{1}$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n-раз) $\to \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами

1^0. $f(0, \ldots, 0) = 0$,

2^0. $f(x_1, 0, \ldots, 0) \neq 0$ при $x_1 \neq 0$,

3^0. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывная функция,

4^0. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ локально липшицева

$$\|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\| \leq \sum_{i=1}^{n} l_i |x_i - y_i|, \tag{2}$$

где $x, y \in K$, где K – любое ограниченное множество в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$, причем $l_i = l_i(K)$, $i = 1, \ldots, n$.

Одно уравнение n-го порядка (1) равносильно системе n уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \ldots \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3}$$

или

$$\dot{x} = F(x), \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определяемое естественным образом.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим возмущенное уравнение

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + h(t), \tag{5}$$

где $h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывная ω-периодическая функция: $h(t+\omega) = h(t)$, где $\omega > 0$ – некоторое положительное число.

Это уравнение равносильно периодически возмущенной системе

$$\dot{x} = F(x) + \mathbf{h}(t),$$

где $\mathbf{h}(t)$ – непрерывная ω-периодическая векторная функция: $\mathbf{h}(t+\omega) = \mathbf{h}(t)$, $\mathbf{h}(t) = col(0, \dots, 0, h(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Пусть выполнены еще два условия:

5^0. Любое решение $x(t)$ уравнения (1) определено при всех $t : 0 \leq t < +\infty$. (Это относится и к системе (4).)

6^0. Дифференциальное уравнение (1) асимптотически устойчиво в целом, т.е. ее нулевое решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво и для любого другого решения $x(t)$: $x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t) \to 0$ при $t \to \infty$ (это относится и к системе (4)).

Теорема 1. *Рассмотрим дифференциальное уравнение* (1) *при условиях* 1^0-6^0. *Тогда при любой непрерывной* ω-*периодической функции* $h(t)$ *периодически возмущенное дифференциальное уравнение* (5) *имеет по крайней мере одно* ω-*периодическое решение* $x(t)$

$$x(t+\omega) = x(t)$$

(вынужденное колебание), если выполнено условие

$$f(\mathbb{R}, 0, \dots, 0) = \mathbb{R}.$$

Пусть выполнены следующие три условия

7^0. Любое решение $x(t)$ уравнения (1) определено при всех t, $-\infty < t < +\infty$.

8^0. Любое решение $x(t)$ является ограниченным вместе с производными до $(n-1)$-го порядка включительно

$$\|x(t)\| \leq c_1, \|\dot{x}(t)\| \leq c_2, \ldots, \|x^{(n-1)}(t)\| \leq c_n, \ -\infty < t < +\infty.$$

9^0. Предположим, что периоды всех собственных колебаний системы (3) (см. также (4)) ограничены снизу

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma.$$

Теорема 2. *Рассмотрим дифференциальное уравнение* (1) *при выполнение условий* 1^0-4^0 *и* 7^0-9^0. *Тогда при любой непрерывной ω-периодической функции $h(t)$ периодически возмущенное дифференциальное уравнение* (5) *имеет по крайней мере одно ω-периодическое решение $x(t)$*

$$x(t+\omega) = x(t)$$

(вынужденное колебание), если период ω достаточно мал

$$0 < \omega < \sigma_0$$

и

$$f(\mathbb{R}, 0, \ldots, 0) = \mathbb{R}.$$

Литература

1. *Евченко В.К.* Об одной задаче из теории колебаний. - Вестник Тамбовского университета. - Тамбов: 2015. - Том 20, вып.5. - С. 1136-1137.

2. *Боровских А.В., Перов А.И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. - 540 с.

3. *Зубов В.И.* Теория колебаний. М.: Высшая школа, 1979. - 400 с.

4. *Перов А.И., Евченко В.К.* Метод направляющих функций. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. - 182 с.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РОМАНОВСКОГО

В.А. Калитвин
(Липецк; *kalitvin@mail.ru*)

Будем рассматривать частично интегральное уравнение

$$x(t,s)=\int_a^b m(t,s,\sigma)x(\sigma,t)d\sigma+f(t,s)\equiv(Mx)(t,s)+f(t,s) \quad (1)$$

с непрерывными заданными функциями $f(t,s)$ и $m(t,s,\sigma)$, где $t,s,\sigma\in[a,b]$.

Следующая схема обоснована В.И. Романовским в [1] и применима для численного решения уравнения (1).

Отрезок $[a,b]$ разобъём на части длины δ точками $t_i=s_i=\sigma_i$ $(i=0,\ldots,n; t_0=s_0=\sigma_0=a, t_n=s_n=\sigma_n=b)$. Положим $x_{kl}=x(t_k,s_l), f_{kl}=f(t_k,s_l), m_{hkl}=m(t_k,s_l,\sigma_h)$ и через Δ обозначим определитель системы

$$x_{kl}=f_{kl}+\delta\sum_{h=1}^{n}x_{hk}m_{hkl}\ (k,l=1,\ldots,n). \quad (2)$$

Этот определитель имеет размер $n^2\times n^2$, а его строки и столбцы могут быть занумерованы двойными индексами

$ih=11,12,\ldots,1n,21,22,\ldots,2n,\ldots,n1,n2,\ldots,nn,$

$fg=11,12,\ldots,1n,21,22,\ldots,2n,\ldots,n1,n2,\ldots,nn.$

Применение обозначений $a_{ih|kk}=m_{ihk}, a_{ih|fg}=0(h\neq f)$, $e_{ih|fg}=\begin{cases}1, \text{если} i=f, h=g,\\ 0, \text{если} i\neq f \text{или} h\neq g\end{cases}$ приводит к равенству $\Delta=|e_{ih|fg}-\delta a_{ih|fg}|=|e_{pq}-\delta a_{pq}|$, где $p=ih, q=fg$. Пусть Δ_{pq} — минор определителя Δ, соответствующий элементу $e_{pq}-\delta a_{pq}$. При $\Delta\neq0$ система (2) имеет единственное решение

$$x_p=\frac{1}{\Delta}\sum_q\Delta_{pq}f_q=\frac{1}{\Delta}\sum_{f,g=1}^{n}\Delta_{ih|fg}f_{fg}=$$

$$= \frac{\Delta_{pp}}{\Delta} f_p + \frac{1}{\Delta} \sum_{g=1}^{n} \Delta_{ih|gi} f_{gi} + \frac{1}{\Delta} \sum_q{}' \Delta_{pq} f_q, \qquad (3)$$

где $\sum{}'$ обозначает суммирование по всем q, кроме $q = p$ и $q = gi(g = 1, 2, \ldots, n)$.

Если теперь $n \to \infty$, то система (2) аппроксимирует уравнение (1), а решение (3) стремится к решению уравнения (1) [1]. Таким образом, численное решение уравнения (1) может быть найдено по формуле (3).

Отметим, что формула (3) получается при условии $\Delta \neq 0$. При достаточно большом n это условие означает, что $1 \notin \sigma(M)$, где через $\sigma(M)$ обозначен спектр оператора M.

Ещё один метод численного решения уравнения (1) основан на численном решении системы интегральных уравнений Фредгольма с параметром t

$$\begin{cases} y(t,s) = \int_a^b k(t,s,\sigma) y(t,\sigma) d\sigma - \int_a^b l(t,s,\sigma) z(t,\sigma) d\sigma + g(t,s), \\ z(t,s) = \int_a^b l(t,s,\sigma) y(t,\sigma) d\sigma - \int_a^b k(t,s,\sigma) z(t,\sigma) d\sigma + h(t,s) \end{cases} \qquad (4)$$

при условии $y(t,s) = y(s,t),\ z(t,s) = -z(s,t)$. на неизвестные функции.

Действительно, система (4) с приведённым дополнительным условием получается из уравнения (1) с применением обозначений $y(t,s) = \frac{1}{2}(x(t,s) + x(s,t)), z(t,s) = \frac{1}{2}(x(t,s) - x(s,t))$, $g(t,s) = \frac{1}{2}(f(t,s) + f(s,t))$, $h(t,s) = \frac{1}{2}(f(t,s) - f(s,t))$, $k(t,s,\sigma) = \frac{1}{2}(m(t,s,\sigma) + m(s,t,\sigma)), l(t,s,\sigma) = \frac{1}{2}(m(t,s,\sigma) - m(s,t,\sigma))$.

С применением квадратурных формул система (4) с дополнительным условием заменяется системой линейных алгебраических уравнений. Например, при использовании формулы левых прямоугольников отрезок $[a,b]$ разбивается на n равных частей точками $t_i = s_i = \sigma_i = a + ih$, где $h =$

$(b-a)/n, i=0,1,\ldots,n$, а система (4) заменяется системой

$$\begin{cases} y_{ij}(n) = h\left(\sum\limits_{p=0}^{n-1} k_{ijp} y_{ip}(n) - \sum\limits_{p=0}^{n-1} l_{ijp} z_{ip}(n)\right) + g_{ij}, \\ z_{ij}(n) = h\left(\sum\limits_{p=0}^{n-1} l_{ijp} y_{ip}(n) - \sum\limits_{p=0}^{n-1} k_{ijp} z_{ip}(n)\right) + h_{ij}, \end{cases} \tag{5}$$

где $k_{ijp} = k(t_i, s_j, \sigma_p), l_{ijp} = l(t_i, s_j, \sigma_p)$, $g_{ij} = g(t_i, s_j)$, $h_{ij} = h(t_i, s_j)$ $(i, j, p = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Система (5) решается при каждом фиксированном $i = 0, 1, \ldots, n-1$, т.е. её решение сводится к решению n систем линейных алгебраических уравнений [3]. Так как при каждом фиксированном $t \in [a, b]$ система (4) есть система линейных интегральных уравнений с вполне непрерывными интегральными операторами, то при $n \to \infty$ решение $(y_{ij}^{(n)}, z_{ij}^{(n)})$ системы (5) стремится к (y_{ij}, z_{ij}), где $y_{ij} = y(t_i, s_j), z_{ij} = z(t_i, s_j)$.

Проверка дополнительного условия сводится к оценке малости числа $\delta = \max_{ij}(|y_{ij} - y_{jj}| + |z_{ij} + z_{jj}|$. Если δ достаточно мало, то приближённые значения решения уравнения (3) в точках $(t_i, s_j)(i, j = 0, 1, \ldots, n-1)$ вычисляются по формуле $x(t_i, s_j) = y(t_i, s_j) + z(t_i, s_j)(i, j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Отметим, что непосредственное применение квадратурных формул к уравнению (1) с непрерывными заданными функциями $f(t, s)$ и $m(t, s, \sigma)$ вызывает трудности, связанные с тем, что оператор M в уравнении (1) не является вполне непрерывным, а известные обоснования метода механических квадратур для интегральных уравнений Фредгольма используют полную непрерывность интегральных операторов, определяющих такие уравнения.

Однако, если $1 \notin \sigma(M^2)$, то метод механических квадратур применяется не к уравнению (1), а к эквивалентному ему обратимому уравнению

$$x(t,s) = (M^2x)(t,s) + (Mf)(t,s) + f(t,s) \tag{6}$$

с вполне непрерывным интегральным оператором M^2. При этом используется формула

$$\int_a^b \int_a^b z(t,s)dtds = \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{Q} \gamma_{ijPQ} z(t_i, s_j) + r_{PQ}(z), \tag{7}$$

где $a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_P \le b, a \le s_1 < s_2 < \cdots < s_Q \le b$. Предполагается, что квадратурный процесс (7) сходится, т.е. для любой непрерывной функции $f \in C(D)$ выполняется условие $r_{PQ}(z) = \int_a^b \int_a^b z(t,s)dtds - \sum\limits_{i=1}^{P} \sum\limits_{j=1}^{Q} \gamma_{ijPQ} z(t_i, s_j) \to 0$ при $P, Q \to \infty$.

Уравнение (6) запишем в виде

$$x(t,s) = \int_a^b \int_a^b k(t,s,\sigma,\sigma_1) x(\sigma_1, \sigma) d\sigma_1 d\sigma + g(t,s), \tag{8}$$

где $k(t,s,\sigma,\sigma_1) = m(t,s,\sigma)m(\sigma,t,\sigma_1)$, а функция $g(t,s)$ определяется равенством $g(t,s) = \int_a^b m(t,s,\sigma)f(\sigma,t)d\sigma + f(t,s)$.

Полагая в (7) $t = t_p$, $s = s_q$ и заменяя интеграл по формуле $\int_a^b \int_a^b k(t_p, s_q, \sigma, \sigma_1) x(\sigma_1, \sigma) d\sigma_1 d\sigma = \sum\limits_{i=1}^{P} \sum\limits_{j=1}^{Q} \gamma_{ijPQ} k_{pqij} x(t_i, s_j) + r_{pqPQ}$, где $k_{pqij} = k(t_p, s_q, t_i, s_j)$, а r_{pqPQ} — остаток, получим систему, после отбрасывания остатков в уравнениях которой будем иметь систему уравнений для приближенных значений x_{pq} функции x в точках (t_p, s_q) $(p = 1, \ldots, P; q = 1, \ldots, Q)$:

$$x_{pq} = \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{Q} \gamma_{ijPQ} k_{pqij} x_{ij} + g(t_p, s_q) (p = 1, \ldots, P; q = 1, \ldots, Q), \tag{9}$$

где $x_{ij} = x(t_i, s_j)$. В силу [2] справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) при каждых P и Q коэффициенты γ_{ijPQ} формулы (7) положительны и существует такое число G, что $\gamma_{ijPQ} \leq G$;

2) процесс (7) сходится;

3) $x_0 \in C$ — решение уравнения (8).

Тогда при достаточно больших P и Q система (9) имеет решение $x_{pq}(p = 1, \ldots, P; q = 1, \ldots, Q)$,

$$\max_{1\leq p\leq P, 1\leq q\leq Q} |x_{pq} - x_0(t_p, s_q)| \to 0 \text{ при} P, Q \to \infty,$$

а скорость сходимости оценивается неравенствами $c_1 R_{PQ} \leq \max_{1\leq p\leq P, 1\leq q\leq Q} |x_{pq} - x_0(t_p, s_q)| \leq c_2 R_{PQ}$, *где c_1 и c_2 — положительные постоянные,*

$$R_{PQ} = \max_{1\leq p\leq P, 1\leq q\leq Q} |r_{PQ}(z_{pqPQ})|,$$

$$z_{pqPQ}(t, s) = k(t_p, s_q, t, s) x_0(t, s).$$

Аналитическое приближение $x_{pq}(t, s)$ к решению $\tilde{x}(t, s)$ уравнения (8) естественно определить равенством

$$x_{pq}(t, s) = hg \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{Q} \gamma_{ijPQ} k(t, s, t_i, s_j) x_{ij} + g(t, s).$$

Литература

1. *Romanovskij V.I.* Sur une classe d'equations integrales lineares// Acta Math., 1932. - Vol. 59. - P. 99-208.

2. *Вайникко Г.М.* Возмущенный метод Галёркина и общая теория приближённых методов для нелинейных уравнений// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1967. - Т. 7, № 4. - С. 723-751.

3. *Калитвин А.С., Калитвин В.А.* Один метод численном решения интегрального уравнения Романовского двухсвязных марковских цепей// Обозрение прикладной и промышленной математики, 2009. - Т. 16, вып. 1. - С. 115-116.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ПОТОКЕ ЭЛЛИПСОИДА В ПОЛЕ УПРУГОЙ СИЛЫ

И.Ф. Кобцев
(Москва; *int396.kobtsev@mail.ru*)

Как известно [1], геодезический поток двумерного эллипсоида в $\mathbb{R}^3$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1, \quad a > b > c > 0$$

является вполне интегрируемой по Лиувиллю задачей. Класс интегрируемых задач о движении материальной точки по эллипсоиду существенно расширяется, если добавить потенциальную силу, действующую на точку. В [2] показано, что введение в исходную систему силы с потенциалом более общего вида

$$\frac{k}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{y^2} + \frac{\gamma}{z^2}$$

сохраняет интегрируемость задачи.

Исследование проводилось как для притягивающей силы ($k > 0$), так и для отталкивающей ($k < 0$).

Задачу о движении точки по эллипсоиду под действием упругой силы можно исследовать с точки зрения гамильтонова формализма. Поскольку в рассматриваемой системе нет диссипации энергии, полная механическая энергия точки

$$H = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

является интегралом движения. Следовательно, топологию слоения Лиувилля можно описывать изоэнергетическими инвариантами, определяемыми для многообразия постоянной энергии $Q_h^3 = \{H = h\}$. Кроме того, исследуемая система имеет две степени свободы; для таких гамильтоновых систем в [3] построена соответствующая теория и классификация особенностей.

Результаты представлены в виде изоэнергетических инвариантов — молекул Фоменко–Цишанга; это удобный и наглядный способ. Исследование проводится алгебраическим методом, предложенным в М.П. Харламовым в [4]. Использование такого подхода значительно упрощает вычисления; это было наглядно показано при анализе других задач классической механики [5].

В результате исследования задачи о геодезическом потоке эллипсоида в поле упругой силы получены новые изоэнергетические молекулы Фоменко–Цишанга, проведена топологическая классификация слоений Лиувилля. Также обнаружено, что лиувиллево эквивалентны некоторым другим задачам динамики твердого тела.

Литература

1. *Якоби К.* Лекции по динамике. Пер. с нем. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит-ры, 1936.

2. *Козлов В.В.* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1, 1995.

3. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

4. *Харламов М.П.* Топологический анализ и булевы функции. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динамика. - 2010. - Том 6. - N.4 - С. 769–805.

5. *Николаенко С. С.* Топологическая классификация интегрируемого случая Горячева в динамике твердого тела // Математический сборник. - Том 207. - N.1.

ОТРАЖЕНИЕ НА МЕТЕОРНЫХ ПОТОКАХ

А.А. Копьев, Е.И. Яшагин

(Зеленодольск; *eugene.yashagin@gmail.com*)

В данной работе найдено аналитическое решение для поверхности отражения на метеорных потоках, когда последние представлены несобственным пучком прямых.

Сначала рассмотрим пучок прямых второго рода. Из фиксированной точки S исходят лучи, и в точке P они собираются, испытывая отражение в точках заданного пучка, где выполняется известное условие равенства падающего и отраженного угла. Определим кривую, состоящую из точек отражения.

Обозначим направляющий вектор пучка прямых $\vec{a} = \{1, l\}$, где l действительное число. Такое задание направляющего вектора $\vec{a}$ исключает случай, когда $\vec{a}$ параллелен оси OY, но он тривиален. Из точки S источника (совпадающей с началом координат) проведем векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{MP}$ — ход луча после отражения от точки M на прямой в точку приемника P.

В выбранных координатах $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$. Точка P находится на положительной части оси OX и имеет координаты $(p; 0)$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$
$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \{x, y\} - \{p, 0\} = \{x - p, y\}$$

Построим направляющий вектор биссектрисы угла между $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{MP}$, для этого каждый из векторов сделаем единичной длины и сложим.

$$\vec{N} = \frac{1}{|\overrightarrow{OM}|} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{1}{|\overrightarrow{PM}|} \cdot \overrightarrow{PM}$$

Для того, чтобы получить кривую отражения найдем такие точки на прямых пучка в которых выполняется условие перпендикулярности направляющего вектора $\vec{a}$ и вектора определяющего направление биссектрисы $\vec{N}$

$$(\vec{a}, \vec{N}) = 0$$

или

$$\left(\vec{a}, \frac{1}{|\overrightarrow{OM}|} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{1}{|\overrightarrow{PM}|} \cdot \overrightarrow{PM}\right) = 0$$

Используя свойства скалярного произведения получим:

$$\overrightarrow{PM} \cdot (\vec{a}, \overrightarrow{OM}) = (-1) \cdot \overrightarrow{OM} \cdot (\vec{a}, \overrightarrow{PM})$$

И окончательно в координатах:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\,(x_a x + y_a y) = \sqrt{x^2 + y^2}\,(x_a(p-x) - y_a y)$$

С учетом выбранного вектора $\vec{a} = \{1, l\}$:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\,(x + ly) = \sqrt{x^2 + y^2}\,((p-x) - ly)$$

Это уравнение кривой отражения на пучке прямых второго рода с заданным вектором $\vec{a} = \{1, l\}$. Оно задает на плоскости две полуветви гиперболы, что было известно ранее, но получено из иных соображений.

Мы, используя наш метод, добавим третью координату и получим:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2 + z^2}\,(x + ly + mz) =$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,((p-x) - ly - mz)$$

Здесь $\vec{a} = \{1, l, m\}$ — уже определяет направление несобственного пучка в пространстве. Уравнение (2) имеет следующее действительное решение:

$$z=(-p+2x+2ly)/(6m)-(2^{\frac{1}{3}}(-\frac{1}{4}(-p+2x+2ly)^2+\frac{3}{2}m(mp^2-$$

$$-2mpx+2mx^2+2my^2)))/(3m(\frac{1}{4}p^3-\frac{9}{4}m^2p^3-\frac{3}{2}p^2x-\frac{9}{2}m^2p^2x+$$

$$+3px^2+27m^2px^2-2x^3-18m^2x^3-\frac{3}{2}lp^2y-9lm^2p^2y+6lpxy+$$

$$+18lm^2pxy-6lx^2y-18lm^2x^2y+3l^2py^2+9m^2py^2-6l^2xy^2-$$

$$-18m^2xy^2-2l^3m^3-18lm^2y^3+((\frac{1}{4}p^3-\frac{9}{4}m^2p^3-\frac{3}{2}p^2x-\frac{9}{2}m^2p^2x+$$

$$+3px^2+27m^2px^2-2x^3-18m^2x^3-\frac{3}{2}lp^2y-9lm^2p^2y+6lpxy+$$

$$+18l^2pxy-6lx^2y-18lm^2x^2y+3l^2py^2+9m^2py^2-6l^2xy^2-$$

$$-18m^2xy-2l^3y^3-18lm^2y^3)^2+4(-\frac{1}{4}(-p_2x+2ly)^2+\frac{3}{2}m(mp^2-$$

$$-2px+2mx^2+2my^2))^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}})+(1)/(32^{\frac{1}{3}}m)*(\frac{1}{4}p^3-\frac{9}{4}m^2p^2-$$

$$-\frac{3}{2}p^2x-\frac{9}{2}m^2p^2x+3px^2+27m^2px^2-2x^3-18m^2x^3-\frac{3}{2}lp^2y-$$

$$-9lm^2p^2y+6lpxy+18lm^2xy-6lx^2y-18lm^2x^2y+3l^2py^2+$$

$$+9m^2py^2-6l^2xy^2-18m^2xy^2-2l^3y^3-18lm^2y^3+((\frac{1}{4}p^3-\frac{9}{4}m^2p^2-$$

$$+\frac{3}{2}p^2x-\frac{9}{2}m^2p^2x+3px^2+27m^2px^2-2x^3-18m^2x^3-\frac{3}{2}lp^2y-$$

$$-9lm^2p^2y+6lpxy+18lm^2pxy-6lx^2y-18lm^2x^2y+3l^2py^2+$$

$$+9m^2py^2-6l^2xy^2-18m^2xy^2-2l^3y^3-18lm^2y^3)^2+4(-\frac{1}{4}(-p+$$

$$+2x+2ly)^2+\frac{3}{2}m(mp^2-2mpx+2mx^2+2my^2))^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

Эта формула представлена впервые, явное выражение даёт возможность применить методы дифференциальной геометрии в полной мере.

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ C^*-АЛГЕБР

Корчагин А.И.
(Санкт-Петербург; *mogilevmedved@yandex.ru*)

В работе [1] была введена топологическая сложность $TC(X)$ для компакта X. Она является любопытным гомотопическим инвариантом, а так же полезна при изучении механических систем, если в качестве X брать конфигурационное пространство. В работе [2] был построен некоммутативный вариант этого понятия для C^*-алгебр. По определению топологическая сложность $TC(A)$ унитальной C^*-алгебры A это такое наименьшее число n (или бесконечность, если такого числа не существует), что существуют n эпиморфизмов $\beta_j : A \otimes A \to B_j$ в некоторые C^*-алгебры B_j такие, что $\oplus_{j=1}^n \beta_j$ - инъективно, и $\beta_j \circ \alpha_0$ гомотопично $\beta_j \circ \alpha_1$ для любого j, где $\alpha_i : A \to A \otimes A$, $\alpha_0(a) = a \otimes 1$, $\alpha_1(a) = 1 \otimes a$. Отметим, что гомотопическая теория C^*-алгебр находится еще на своем раннем этапе развития, а потому полезна любая топологическая информация о C^*-алгебрах.

На докладе предполагается рассказать о топологической сложности и ее значениях на важнейших примерах C^*-алгебр, таких как коммутативные C^*-алгебры, AF-алгебры и многие другие. Особое внимание планируется уделить следующим теоремам:

Теорема 1. *Пусть A - унитальная AF-алгебра. Тогда $TC(A) = 1$ тогда и только тогда, когда A - UHF-алгебра. В противном случае $TC(A) = \infty$.*

Теорема 2. *Верно равенство $TC(\mathcal{O}_{2n}) = 1$, где $\mathcal{O}_{2n}$ - алгебра Кунтца.*

До сих пор остается открытым вопрос значения $TC(\mathcal{O}_{2n+1})$ в случае "нечетных"алгебр Кунтца.

Литература

1. *Farber M.* Topological Complexity of Motion Planning, Discrete Comput. Geom. 29, 211–221, 2004

2. *Manuilov V.* A Noncommutative Version of Farber‘s Topological Complexity, Topol. Methods Nonlinear Anal. 49 (4), 287-298, 2017

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

М.В.Кукушкин
(Железноводск; *kukushkinmv@rambler.ru*)

В 1960 году Киприянов И.А. в своей работе [1] посвященной свойствам одноименного оператора, сформулировал теорему существования и единственности решения краевой задачи для уравнения второго порядка в частных производных с дробной производной в младших членах. В дальнейшем Нахушев А.М., Джрбашян М.М. одни из первых в своих работах исследова-ли дифференциальный оператор второго порядка с дробными производными в младших членах.

В данной работе доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с дробной производной в смысле Киприянова в младших членах. Благодаря редукции оператора Киприянова к оператору дробного дифференцирования в смысле Маршо в одномерном случае, полученные результаты можно считать действительными для оператора дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, ввиду известного факта совпадения этих операторов на классах функций представимых дробным интегралом.

Следуя обозначениям [1] будем полагать Ω — выпуклая область n — мерного евклидова пространства, P — фиксированная точка границы $\partial\Omega$, $Q(r,\vec{\mathbf{e}})$ — произвольная точка области Ω; обозначим через $\vec{\mathbf{e}}$ — единичный вектор имеющий направле-ние от P к Q, через r — евклидово расстояние между точками P и Q. Под классом $\operatorname{Lip}\mu,\ 0<\mu\leq 1$ будем понимать множество функций удовлетворяющих условию Гельдера-Липшица в области $\bar{\Omega}$.

Оператор дробного дифференцирования в смысле Киприянова определенный в [1] действует следующим образом

$$\mathfrak{D}^{\alpha}: H_0^1(\Omega)\to L_2(\Omega),\ 0<\alpha<1$$

$$(\mathfrak{D}^{\alpha}f)(Q)=-\frac{\alpha\, r^{1-n}}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^r \frac{\triangle_{\bar{\mathbf{e}}}^{-t}f(Q)}{t^{\alpha}}\,(r-t)^{n-1}\,dt+$$

$$+C_n^{(\alpha)}f(Q)r^{-\alpha},\ \triangle_{\bar{\mathbf{e}}}^{-t}f(Q)=[f(Q-\vec{\mathbf{e}}t)-f(Q)]/t.$$

Рассмотрим оператор

$$Lu:=-D_j(a^{ij}D_iu)+p\,\mathfrak{D}^{\alpha}u,\ \ i,j=1,2,...,n\,, \qquad (1)$$

$$\mathfrak{D}(L)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \qquad (2)$$

$$a^{ij}(Q)\in C^1(\bar{\Omega}),\ a^{ij}\xi_i\xi_j\geq a_0|\xi|^2,\ a_0>0,$$

$$p(Q)>0,\ p(Q)\in\operatorname{Lip}\lambda,\ \lambda>\alpha.$$

Определение 1. Будем называть функцию $z\in H_0^1(\Omega)$ обобщенным решением краевой задачи (1),(2) если имеет место следующее интегральное тождество

$$B(z,v)=(f,v)_{L_2(\Omega)},\ \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

$$B(u,v)=\int\limits_{\Omega}\left(a^{ij}D_iuD_jv+u\,\mathfrak{D}^{\alpha}_{d-}p\,v\right)\,dQ,\ u,v\in H_0^1(\Omega).$$

Теорема 1. *Существует единственное решение обобщенной краевой задачи (1),(2).*

Литература

1. *Киприянов И.А.* Оператор дробного дифференцирования и степени эллиптических операторов. Доклады Академии наук СССР, 1960. Т.131. №2. С. 238-241.

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Д. В. Лукъяненко, М. О. Корпусов, А. А. Панин
(Москва; *lukyanenko@physics.msu.ru, a-panin@yandex.ru*)

Нами рассмотрен [4]–[9] ряд начально-краевых задач математической физики, в которых при некоторых начальных данных происходит разрушение решения за конечное время. Как правило, это означает обращение нормы решения в бесконечность за конечное время:

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|u(t)\| = +\infty,$$

но в некоторых случаях решение, существующее на конечном промежутке времени, может быть непродолжаемым и при этом ограниченным по норме [6].

Установлен факт разрушения решения для некоторых начальных данных и получены оценки сверху на время разрушения. Продемонстрировано, как в каждом конкретном примере данные оценки могут быть численно уточнены методом, основанным на идеях Н. Н. Калиткина и соавторов [1]–[3].

Литература

1. *Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Корякин П. В.* Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2005. 45, № 10. 1837– 1847.

2. *Калиткин Н. Н., Альшин А. Б., Альшина Е. А., Рогов Б. В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.

3. *Al'shin A. B., Al'shina E. A.* Numerical diagnosis of blow-up of solutions of pseudoparabolic equations // Journal of Mathematical Sciences, 2008. 148, no. 1. 143–162.

4. *А. А. Панин, Г. И. Шляпугин.* О локальной разрешимости и разрушении решений одномерных уравнений типа Ядзимы–Ойкавы–Сацумы. Теоретическая и математическая физика, 2017, 193, № 2, с. 179—192.

5. *М. О. Корпусов, А. А. Панин.* О непродолжаемом решении и разрушении решения одномерного уравнения ионно-звуковых волн в плазме // Матем. заметки, том 102, № 3 (2017), 383–395.

6. *Корпусов М. О., Лукъяненко Д. В., Овсянников Е. А., Панин А. А.* Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрцитивной нелинейностью. // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия Математическое моделирование и программирование, 2017, 10, № 2, с. 107—123.

7. *Korpusov M. O., Lukyanenko D. V., Panin A. A., Yushkov E. V.* Blow-up phenomena in the model of a space charge stratification in semiconductors: analytical and numerical analysis // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2017. Vol. 40, no. 7, pp. 2336—2346.

8. *Д. В. Лукъяненко, А. А. Панин.* Разрушение решения уравнения стратификации объемного заряда в полупроводниках: численный анализ при сведении исходного уравнения к дифференциально-алгебраической системе. // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии (Электронный научный журнал), 2016, том 17, № 1, с. 437–446.

9. *Korpusov M. O., Lukyanenko D. V., Panin A. A.,*

Yushkov E. V. Blow-up for one Sobolev problem: theoretical approach and numerical analysis // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2016. Vol. 442. No. 2. P. 451—468.

Некоторые подходы к непараметрической идентификации диффузионных моделей

И.А. Макарова
(Томск; *irina_ makarova_mmf@mail.ru*)

Пусть на вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, F, (F)_{t\geq 0}, P)$ задано стохастическое дифференциальное уравнение следующего вида

$$dy_t = S(y_t)\,dt + dw_t\,, \tag{1}$$

где $(w_t)_{t\geq 0}$ стандартный винеровский процесс, начальное значение y_0 - некоторая заданная константа, а $S(\cdot)$ - неизвестная функция, называемая коэффициентом сноса. Напомним,что уравнение (1) определяет диффузионный случайный процесс Ито. Диффузионные процессы широко используются в прикладных задачах биомедицины, экономики, финансовой математики и особенно в физике в задачах обработки сигналов при их предаче по зашумленным каналам связи. Задача состоит в том, чтобы оценить функцию $S(x)$, $x \in [a, b]$, по наблюдениям процесса $(y_t)_{0\leq t\leq T}$.

В данной работе рассматриваются некоторые подходы к оцениванию неизвестной функции $S(x)$, $a < x < b$ в смысле среднеквадратической точности:

$$R(S_T, S) = E_S\|S_T - S\|^2\,, \quad \|S\|^2 = \int_a^b S^2(x)dx\,, \tag{2}$$

где S_T - оценка S по наблюдениям $(y_t)_{0\leq t\leq T}$ (т.е. измеримая функция относительно σ - алгебры, порожденной процессом $(y_t)_{0\leq t\leq T}$) . Здесь E_S обозначим как математическое ожидание относительно распределения случайного процесса $(y_t)_{0\le t\le T}$ при истинной функции S.

Основной целью является построение адаптивной процедуры выбора модели на основе улучшенных взвешенных оценок МНК для оценивания функции сноса S в (1). Применение улучшенных оценок в регрессионных моделях стало возможно благодаря работам [3]. Такой подход позволяет повысить среднеквадратическую точность статистической идентификации модели (1) по сравнению с оценками по методу наименьших квадратов, предложенных в работе [1]. Такой подход позволяет повысить среднеквадратическую точность статистической идентификации модели (1) по сравнению с оценками по методу наименьших квадратов, предложенных в работе [2]. В этой статье предложен новый метод построения адаптивных оценок, основанных на использовании усеченных последовательных процедур. Такой метод позволяет свести исходящую задачу к задачи оценивания в дискретной регрессионной модели. А также дает возможность получения точных неасиптотических оракульных неравенств для среднеквадратических рисков оценок МНК и доказательства их асимптотических свойств. Как и в работе [2] предположим, что на множестве $\Gamma \subseteq \Omega$ задана непараметрическая регрессионная модель

$$Y_l = S(x_l) + \zeta_l\,, \quad 1 \le l \le n\,, \tag{3}$$

где $\zeta_l = \sigma_l\,\xi_l + \delta_l$. Расчетные точки $(x_l)_{1\le l\le n}$ определим далее. Функция $S(\cdot)$ неизвестна и оценивается по наблюдениям $Y_1,\ldots,Y_n$.

Качество любой оценки S будет измеряться эмпирической квадратической ошибкой

$$\|S - S\|_n^2 = (S - S, S - S)_n = \frac{b-a}{n}\sum_{l=1}^{n}(S(x_l) - S(x_l))^2\,.$$

Зафиксируем ортогональный базис $(\phi_j)_{1\le j\le n}$

$$(\phi_i\,,\,\phi_j)_n = \frac{b-a}{n}\sum_{l=1}^{n}\phi_i(x_l)\phi_j(x_l) = \mathbf{Kr}_{ij}\,, \tag{4}$$

где $\mathbf{Kr}_{ij}$ - постоянная Кронекера. Используя этот базис, применим дискретное преобразование к (3) и получим коэффициенты Фурье:

$$\hat{\theta}_{j,n} = \frac{b-a}{n}\sum_{l=1}^{n} Y_l\phi_j(x_l)\,,\quad \theta_{j,n} = \frac{b-a}{n}\sum_{l=1}^{n} S(x_l)\,\phi_j(x_l)\,.$$

Для такой модели предложена взвешенная оценка МНК следующего вида:

$$\hat{S}_\lambda(x_l)\;=\;\sum_{j=1}^{n}\lambda(j)\,\hat{\theta}_{j,n}\,\phi_j(x_l)\,\Gamma\,,\quad 1\le l\le n\,, \tag{5}$$

где $\lambda = (\lambda(1),\ldots,\lambda(n))'$ принадлежит некоторому конечному множеству $\Lambda\subset[0,1]^n$.

Далее предположим, что первые $d\le n$ координат вектора λ равны 1, т.е. $\lambda(j)=1$ для всех $1\le j\le d$.

Определим новый класс оценок для S в (3):

$$S^*_\lambda(x_l)\;=\;\sum_{j=1}^{n}\lambda(j)\,\theta^*_{j,n}\,\phi_j(x_l)\,\Gamma\,,\quad 1\le l\le n\,, \tag{6}$$

где

$$\theta^*_{j,n}\;=\;\left(1-\frac{c(d)}{||\widetilde{\theta}_n||}1_\Gamma\right)\hat{\theta}_{j,n} \tag{7}$$

и

$$c(d)\;=\;\frac{(d-1)\sigma_*^2 L(b-a)^{\frac{1}{2}}}{n(s^*+(\frac{d\sigma_*}{n})^{\frac{1}{2}})}. \tag{8}$$

Тогда для каждого $a \leq x \leq b$ положим

$$S_{\lambda}^{*}(x) \;=\; S_{\lambda}^{*}(x_l)1_{a\leq x\leq x_l} + S_{\lambda}^{*}(x_l)1_{x_{l-1}\leq x\leq x_l}. \tag{9}$$

Обозначим разность рисков оценок (9) и (6), как

$$\Delta_n(S) \;:=\; E_S||S_{\lambda}^{*} - S||_n^2 - E_S||\hat{S}_{\lambda} - S||_n^2. \tag{10}$$

Теорема 1. Оценка (9) превосходит по среднеквадратической точности оценку (6), т.е.

$$\sup \Delta_n(S) \leq -c^2(d). \tag{11}$$

Литература

1. *Galtchouk L., Pergamenshchikov S.* Nonparametric sequential estimation of the drift in diffusion processes // Mathematical Methods of Statistics. 2004. V. 13. No. 1. P. 25-49.

2. *Galtchouk L., Pergamenshchikov S.* Asymptotic efficient sequential kernel estimates of the drift coefficient in ergodic diffusion processes // Statistical Inference for Stochastic Process. 2006. V.9. No. 1. P. 1-16.

3. *Pchelintsev E.* Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2013. V. 16. No. 1. P. 15-28.

4. *Kutoyants Yu.*Statistical inference for ergodic diffusion processes. Sprinter-Verlag, London.2004.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ С S- УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А.Н. Малютина, У.К. Асанбеков

(Томск; Национальный исследовательский Томский государственный университет; *nmd@math.tsu.ru*)

В работе мы продолжаем развивать геометрический метод изучения свойств пространственных отображений с s-усредненной характеристикой, основанного на характеристическом законе искажения модулей семейств кривых.

Определение 1. Следуя [1], определим α- модуль семейств кривых. Пусть Γ семейство кривых в R^n. Обозначим $\rho\wedge\Gamma$ множество неотрицательных борелевских функций $p : R^n \to [0, \infty]$ таких, что

$$\int\limits_{\gamma} \rho dl_x \geq 1$$

для каждой спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma$, где $dl_x = \frac{dl}{1+|x|^2}$. Для любого $\alpha \geq 1$ величину $M_{\alpha(\Gamma)} = \inf\limits_{\rho\wedge\Gamma} \int\limits_{R^n} \rho^\alpha d\sigma_x$, где $d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}, \frac{1}{n-1} \leq \alpha$ назовем сферическим α- модулем семейств кривых Γ.

Дадим, как и в [1], определение отображения с s- усредненной характеристикой $1 < s < n$, примеры таких отображений и вычисление сферического модуля приведены в [2 - 4].

Определение 2. Пусть отображение $D, D' \subset R^n$, $f : D \to D'$ назовем отображением класса $f \in \tilde{W}^1_{n,loc}(D)$, если $f \in W^1_{n,loc}(D)$, $f^{-1} \in W^1_{n,loc}(D')$ и обладает N, N^{-1}- свойствами.

Определение 3. Пусть область $D \subset R^n$, $f : G \to R^n$, открыто, непрерывно, изолировано, $f \in \tilde{W}^1_{n,loc}(D)$, и сохраняет ориентацию (можно считать, что якобиан отображения, вычисленный в точке $x \in D$, $J(x, f) > 0$) и конечны интегралы $\int\limits_D K_I^s(x, f)|J(x, f)|d\sigma_x$ и $\int\limits_D K_O^{s'}(x, f)d\sigma_x$.

Определение 4. Скажем, что открытое дискретное непрерывное отображение f:

1) принадлежит классу $Q_s(D)$, где $\frac{1}{n-1} \leq s < \infty$, если для любого p, такого что $\frac{1}{n-1} \leq p < s$, существует Φ_p- неотрицательная ограниченная σ- аддитивная функция борелевских

множеств в D, такая, что для любого семейства кривых Γ из D и произвольного борелевского множества $U \subset D$, содержащего все кривые из Γ, выполняется неравенство

$$M^{p+1}_{\frac{np}{(p-1)}}(\Gamma') \leq \Phi_p(U) M_n^p(\Gamma), \tag{1}$$

где $\Gamma' = f(\Gamma)$.

Обозначим $q_s(D)$- подкласс $q_s(D) \subset Q_s(D)$ отображений, для которых выше определенные функции Φ_p являются абсолютно непрерывными функциями борелевских множеств. Очевидно, что если $s' < s$, то $Q_s(D) \subset Q_{s'}(D)$, $q_s(D) \subset q_{s'}(D)$.

2) принадлежит классу $Q_{s'}(D')$, где $n-1 \leq s' < \infty$, существует $\Psi_{s'}$- неотрицательная ограниченная σ- аддитивная функция борелевских множеств в D', такая, что для любого семейства кривых Γ' из D' и произвольного борелевского множества $U' \subset D'$, содержащего все кривые из Γ', выполняется неравенство

$$M_s^n(\Gamma') \leq [\Phi_{s'}(U')]^s M_{n\beta}^{\frac{s}{\beta}}(\Gamma), \tag{2}$$

где $U' = f(U), \Gamma' = f(\Gamma) = \{f(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}, \beta = s(s-1)^{-1}$;

3) принадлежит классу $Q_{s,s'}(D)$, где $n-1 \leq s, s' < \infty$, если выполняются оба неравенства (1), (2) искажения модулей любых семейств кривых $\Gamma \in D$ и $\Gamma' \in D'$.

Обозначим $q_{s'}(D'), q_{s,s'}(D)$- подкласс $q_{s'}(D') \subset Q_{s'}(D')$, $q_{s,s'}(D') \subset Q_{s,s'}(D')$ отображений, для которых функции $\Phi_p, \Psi_{s'}$, существование которых доказано в [4] (теоремы 1, 2 и следствия из них) являются абсолютно непрерывными функциями борелевских множеств.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 1. Открытое отображение $f : D \to R^n, f \in Q_s(D)$ при $n-1 \leq s < \infty$ есть ACL^n- отображение, дифференцируемое п.в. в области D, и такое, что конечен интеграл

$$\int\limits_D K_I^s(x,f)|J(x,f)|d\sigma_x < \infty.$$

Литература

1. *Елизарова М.А., Малютина А.Н.* Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства. LAMBERT Academic Publishing, 2013. 121 с. ISBN 978-3-8484-1319-5.

2. *Асанбеков У.К., Малютина А.Н.* Вычисление модуля сферического кольца. В книге: Комплексный анализ и приложения материалы VIII Петрозаводской международной конференции, 2016. С. 103-106.

3. *Alipova K., Elizarova M., Malyutina A.* Examples of the mappings with s-averaged characteristic. В сборнике: Комплексный анализ и его приложения материалы VII Петрозаводской международной конференции, 2014. С. 12-17.

4. *Малютина А.Н., Елизарова М.А.* Оценки искажения модулей для отображения с s-усредненной характеристикой //Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2010. №2 (10). С. 5-15.

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов, М.К. Собиров

(Вологда; *emuhamadiev@rambler.ru, nan67@rambler.ru*, Душанбе; *msobirov@yahoo.com*)

Статья посвящена исследованию положительных ω-периодических решений следующей системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(t) = c(t)(Y(t) - y(t))x(t) - k_1(t)x(t), \\ y'(t) = a(t)(Y(t) - y(t))x(t) - k_2(t)y(t). \end{cases} \tag{1}$$

Предполагается, что функции $c(t)$, $a(t)$, $Y(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ известны, ω-периодичны и непрерывны.

Система уравнений (1) в случае, когда функции $c(t)$, $a(t)$, $Y(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ постоянны и положительны исследована в работах [1, 2]. В этих работах анонсировано и доказано, что если $cY > k_1$, то любое положительное решение системы уравнений (1) при неограниченном возрастании t приближается к точке (x_*, y_*), где

$$y_* = Y - \frac{k_1}{c}, \qquad x_* = \frac{k_2 y_*}{a(Y - y_*)}.$$

В настоящей работе найдены условия, при которых множество положительных ω-периодических решений системы уравнений (1) ограничено по норме пространства $C[0, \omega]$ и непусто.

Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть функции* $c(t)$, $a(t)$, $Y(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ *положительны,* ω*-периодичны и непрерывны, и пусть* $c(t)Y(t) > k_1(t)$. *Тогда существуют положительные числа* B_1, B_2, D_1, D_2, *зависящие лишь от максимальных и минимальных значений функций* $c(t)$, $a(t)$, $Y(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ *и модуля непрерывности функции* $Y(t)$, *такие, что для любого положительного* ω*-периодического решения системы уравнений (1) имеют место оценки*

$$B_1 < x(t) < B_2, \qquad D_1 < y(t) < D_2. \tag{2}$$

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то существует хотя бы одно положительное* ω*-периодическое решение системы уравнений (1).*

Существование положительного ω-периодического решения системы уравнений (1) доказано с применением аппарата вычисления вращения конечномерных векторных полей ([3, 4, 5]) следующим образом. Рассмотрим двумерное векторное поле

$$\Phi(x_0, y_0) \equiv (x_0, y_0) - (\varphi(\omega, x_0, y_0), \psi(\omega, x_0, y_0)),$$

где $(\varphi(t, x_0, y_0), \psi(t, x_0, y_0))$ - решение системы уравнений (1) с начальными значениями x_0 и y_0. Отметим, что в условиях теоремы 1 решение $(\varphi(t, x_0, y_0), \psi(t, x_0, y_0))$ определено и положительно при всех положительных t, x_0, y_0. Из теоремы 1 следует, что двумерное векторное поле Φ не обращается в ноль на границе прямоугольника $\Pi = [B_1, B_2] \times [D_1, D_2]$. В ходе доказательства теоремы 2 установлено, что вращение векторного поля Φ на границе прямоугольника Π равно 1. Отсюда, в силу принципа ненулевого вращения векторных полей ([3]), вытекает существование положительного ω-периодического решения системы уравнений (1).

Литература

1. *Горский А. А., Локшин Б. Я., Розов Н. Х.* Режим обострения в одной системе нелинейных уравнений // Дифференц. уравнения. - 1999. - Т. 35, № 11. - С. 1571.

2. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н., Собиров М. К.* Исследование положительных решений динамической модели производства и продажи товара // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сборник трудов X междунар. конф. «ПМТУКТ-2017». - Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2017. - С. 268–271.

3. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. - М.: Наука, 1975. - 512 с.

4. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н.* К теории двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных урав-

нений второго порядка // Дифференц. уравнения. - 1999. - Т. 35, № 10. - С. 1372-1381.

5. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н.* Критерий разрешимости одного класса нелинейных двухточечных краевых задач на плоскости // Дифференц. уравнения. - 2016. - Т. 52, № 3. - С. 334-341.

ОСОБЕННОСТИ СЛОЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ НЕКОМПАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ НА ЛИНИИ УРОВНЯ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

С.С. Николаенко

(Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова; *nikostas@mail.ru*)

Рассматривается классическая задача описания топологии слоений, порождаемых гладкими функциями на двумерных поверхностях. Помимо того, что эта задача представляет самостоятельный интерес, она может быть рассмотрена в контексте теории интегрируемых гамильтоновых систем. Действительно, изучаемые слоения можно интерпретировать как слоения Лиувилля гамильтоновых систем с одной степенью свободы. Кроме того, такие слоения могут возникать как сечения фазовых пространств интегрируемых систем с большим числом степеней свободы (см. [1]). Для копмактных многообразий рассматриваемый вопрос хорошо изучен. Некомпактный же случай оказывается гораздо сложнее (см., например, [2]).

Пусть M^2 – гладкое некомпактное многообразие, $f \in C^\infty(M^2)$ – вещественнозначная функция, все критические точки которой изолированы. Линией уровня функции f будем называть связную компоненту множества $f^{-1}(c) \subset M^2$, где $c \in \mathbb{R}$. Назовём линии уровня l и $\tilde{l}$ эквивалентными, если найдётся такая конечная последовательность линий уровня $l_1 = l, l_2, \ldots, l_n = \tilde{l}$, что для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$ линии l_i и l_{i+1} не имеют инвариантных (т.е. целиком состоящих из линий уровня) непересекающихся окрестностей.

Определение 1. ***Слоем*** *слоения, порождаемого функцией f на многообразии M^2, будем называть объединение всех линий уровня из некоторого класса эквивалентности.*

Определение 2. *Слой L называется* ***бифуркационным****, если он не имеет инвариантной окрестности, послойно гомеоморфной прямому произведению $L \times (-1, 1)$.*

Определение 3. ***Атомом*** *называется связная инвариантная окрестность бифуркационного слоя, не содержащая иных бифуркационных слоёв и рассматриваемая с точностью до послойного гомеоморфизма.*

Для простоты будем рассматривать лишь атомы V, бифуркационный слой L которых состоит из конечного числа компонент связности и содержит конечное число критических точек функции f. Пусть $f|_L \equiv c$. Тогда компонеты связности множества $V \setminus L$ можно разделить на положительные (на которых $f > c$) и отрицательные (на которых $f < c$). Наибольший интерес представляют неминимаксные атомы V, для которых множество $V \setminus L$ содержит как положительные, так и отрицательные компоненты.

Определение 4. **f*****-атомом*** *называется атом V с бифуркационным слоем L, для которого фиксировано разделение компонент связности множества $V \setminus L$ на положительные и отрицательные.*

В компактном случае для функций Морса А.А. Ошемковым в [3] был предложен изящный и эффективный метод перечисления всех f-атомов с помощью так называемых f-графов. С некоторыми модификациями эту конструкцию можно обобщить на некомпактный случай и свести тем самым задачу классификации атомов к гораздо более простой задаче классификации графов специального вида.

Определение 5. *Конечный связный граф с ориентированными рёбрами назовём* $\bar{\mathbf{f}}$***-графом****, если он удовлетворяет следующим условиям:*

1) все вершины графа имеют степень 1, 2, 3 или 4;
2) все рёбра графа окрашены в 2 цвета (синий и красный) так, что:
– каждой вершине степени 1 инцидентно синее ребро;
– каждой вершине степени 2 инцидентны либо два синих ребра, либо одно синее и одно красное;
– каждой вершине степени 3 инцидентны два синих ребра и одно красное;
– каждой вершине степени 4 инцидентны два синих и два красных ребра;
3) если какой-то вершине инцидентны два ребра одного цвета, то одно из них входит в эту вершину, а другое выходит из неё;
4) каждой вершине степени 3 или 4 приписана метка $\varepsilon = \pm 1$*;*
5) каждому циклу из красных рёбер приписана метка $\delta \in \{0, 1\}$*.*

Введём на множестве $\bar{f}$-графов отношение эквивалентности $\sim$, полагая два $\bar{f}$-графа эквивалентными, если один из них можно получить из другого последовательностью замен ε-меток всех вершин, а также ориентации всех рёбер некоторого максимального связного одноцветного подграфа.

Пусть $\mathfrak{d}$ – множество всех $\bar{f}$-графов, за исключением графа, состоящего из двух вершин, соединённых синим ребром.

Теорема 2. *Имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между множеством всех f-атомов и множеством классов эквивалентности $\mathfrak{d}/\sim$.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01303).

Литература

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: изд. дом «Удмуртский университет», 1999.

2. *Шарко В.В.* Гладкие функции на некомпактных поверхностях. // Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 2006, т. 3, № 3, с. 443–473.

3. *Ошемков А.А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей. // Труды МИРАН, 1994, т. 205, с. 131–140.

СХОДИМОСТЬ КОМБИНАТОРНОГО ПОТОКА РИЧЧИ С ОБОБЩЕННЫМИ ВЕСАМИ

Р.Ю. Пепа

(Москва; *pepa@physics.msu.ru*)

Б. Чоу и Ф. Луо в 2003 году доказали аналог теоремы Р. Гамильтона о сходимости потока Риччи на дискретных многообразиях с заданной метрикой для упаковки окружностей У. Тёрстона. Комбинаторная структура включает в себя набор весов, определенных для каждого ребра симплекса. Необходимым условием теоремы Б. Чоу и Ф. Луо является неотрицательность весов. В данной работе показано, что тех же результатов о сходимости потока Риччи можно достигнуть и при более слабых условиях для весов на ребрах симплекса: некоторые веса могут быть отрицательными и должны удовлетворять определенным неравенствам.

В работе обсуждается наиболее естественная, с точки зрения геометрии, дискретизация потока Риччи в двумерном случае. Пусть задана триангуляция некоторой двумерной замкнутой поверхности T. Перенумеруем каким-либо образом вершины многогранника. Для ребра, соединяющего вершины с номерами i и j, выберем число $w_{ij} = w_{ji} \in [-1, 1]$. Наконец, в каждой вершине зафиксируем положительное число r_i. Набор данных, состоящий из триангуляции T, набора весов $W = \{w_{ij}\}$ и положительных чисел $R = \{r_i\}$, определяет на многограннике метрику следующим образом. Длину ребра l_{ij}, соединяющего вершины i и j, определим по формуле $l_{ij}^2 = {r_i}^2 + {r_j}^2 + 2r_i r_j w_{ij}$. Заданные таким образом длины ребер многогранника определяют плоские углы всех граней, которые в свою очередь вычисляются через множество длин ребер. С комбинаторной точки зрения, такое определение длин ребер многогранника имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть C_i, C_j — окружности радиуса r_i, r_j соответственно в евклидовой плоскости, θ_{ij} определяют их угол пересечения, причем $w_{ij} = \cos\theta_{ij}$. Тогда, l_{ij} — расстояние между центрами окружностей C_i, C_j. Далее, гауссова кривизна многогранника с евклидовой метрикой на гранях сконцентрирована в его вершинах и определятся формулой

$$K_i = 2\pi - \sum_j \alpha_{ij},$$

где i — номер вершины, а α_{ij} — все плоские углы в вершине i.**Определение 1.** *Дискретным потоком Риччи называется система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dr_i}{dt} = -K_i r_i,$$

где триангуляция T и веса W считаются фиксированными. В статье [2] доказано, что для любого набора неотрицательных w_{ij} и при некоторых ограничениях на триангуляцию существует и притом единственная метрика постоянной кривизны. Далее, в статье [1] показано, что при неотрицательных w_{ij} для любых начальных условий нормализованный поток Риччи сходится к метрике постоянной кривизны тогда и только тогда, когда эта метрика существует для данных (T, W).

В этой работе рассматриваются примеры триангуляций с весами, которые могут принимать и отрицательные значения.

Теорема 1. *Пусть задан многогранник, зафиксируем на нём триангуляцию и набор весов* (T, W)*, и пусть для каждой грани многогранника, с набором весов* α, β, γ *выполнено условие:* α, β *— неотрицательные,* $\gamma < 0$ *и* $\alpha\beta + \gamma > 0$ *, тогда дискретный поток Риччи (1) сходится к метрике постоянной кривизны.*

Литература

1. *B.Chow, F. Luo* Combinatorial Ricci flows on surfaces . J. of differential geometry 63 (2003) 97–129

2. *A. Marden, B. Rodin* On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem, Computational methods and function theory (Valparaiso, 1989), 103–115, Lect. Notes in Math., 1435, Springer, Berlin, 1990

3. *A.Akopyan* Matematicheskoe prosveshchenie, Ser. 3, N 13, 2009, 155–170 (in English: arXiv:1105.2153v1 [math.MG])

4. *W. Thurston* Geometry and topology of 3-manifolds, Princeton lecture notes, 1976, http://www.msri.org/publications/books/gt3m/.

Неподвижные точки отображений упорядоченных множеств

Д.А. Подоприхин
(Москва; *podoprikhindmitry@gmail.com*)

Доклад посвящен вопросам существования неподвижных точек и точек совпадения отображений упорядоченных множеств и состоит из двух частей. В первой части будут рассмотрены вопросы, касающиеся существования общих неподвижных точек семейства многозначных отображений. В частности, будут изложены достаточные условия, гарантирующие существование наименьшего элемента во множестве общих неподвижных точек, а также представлен конструктивный метод итерационного поиска общей неподвижной точки конечного семейства отображений. Будет показана связь полученных результатов с недавними результатами, представленными в работах [1, 2].

Вторая часть доклада посвящена вопросам сохранения свойства отображения иметь неподвижные точки при упорядоченной гомотопии. Для отображений банаховых пространств известны результаты об инвариантности свойства отображения иметь неподвижную точку при гомотопии (см. [3]). В докладе данная проблема будет рассмотрена для случая отображений упорядоченных множеств, где отображения связаны упорядоченной гомотопией. Понятие упорядоченной гомотопии между изотонными отображениями упорядоченных множеств было введено Уолкером (Walker) в 1983 году в [4]. Также в докладе будут рассмотрены теоремы, полученные в соавторстве с Т. Н. Фоменко, о сохранении парой отображений упорядоченных множеств свойства иметь точку совпадения при упорядоченных гомотопиях.

Все изложенные в докладе результаты представлены в работах [5, 6].

Литература

1. *Подоприхин Д. А., Фоменко Т. Н.* О совпадениях семейств отображений упорядоченных множеств // Доклады Академии наук, 2016. Т. 471. No. 1. С. 16-18.

2. *Fomenko T. N., Podoprikhin D. A.* Common fixed points and coincidences of mapping families on partially ordered sets // Topology and its Applications, 2017.

3. *Frigon M.* On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings // Recent Advances on Metric Fixed Point Theory, 1996. T. 48. С. 19-30.

4. *Walker J. W.* Isotone relations and the fixed point property for posets // Discrete Mathematics, 1984. T. 48. No. 2-3. С. 275-288.

5. *Podoprikhin D. A.* Fixed Points of Mappings on Ordered Sets // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, T. 38, No.

6, С. 1069–1074.

6. *Подоприхин Д. А., Фоменко Т. Н.* Сохранение свойства неподвижной точки и свойства совпадения при гомотопии отображений упорядоченных множеств // Доклады академии наук, 2017, Т. 477, No. 4, С. 1–4

О ТОЧНЫХ ГРАНИЦАХ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ВОЗМУЩЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

А.З. Пчелова
(Чебоксары; *apchelova@mail.ru*)

Рассматривается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с полиномиальной правой частью пятой степени, в общем случае не интегрируемое в квадратурах, решение которого обладает подвижными особыми точками. За счет нового подхода к оценке приближенного решения в окрестности приближенного значения подвижной особой точки удается значительно расширить область представления приближенного решения. Полученные результаты сопровождаются расчетами.

Применяется метод построения приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, представленный в работах [1–3].

Рассмотрим задачу Коши для уравнения в нормальной форме

$$w'(z) = w^5(z) + r(z) \tag{1}$$

с начальным условием

$$w(z_0) = w_0, \tag{2}$$

к которому приводится с помощью некоторой замены переменных уравнение $w'(z) = \sum\limits_{i=0}^{5} f_i(z) w^i(z)$ [4].

В работе [5] доказана теорема существования и единственности решения задачи (1)–(2), получена оценка погрешности приближенного решения в случае точного значения подвижной особой точки, а также проведено исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение, которое имеет вид

$$\tilde{w}_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{\frac{n-1}{4}}, \quad \tilde{C}_0 \neq 0. \tag{3}$$

Для приближенного решения (3) получена оценка погрешности. При этом выяснилось, что область существования приближенного решения в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки $\tilde{z}^*$ значительно уменьшилась по сравнению с областью, полученной в теореме существования и единственности решения в окрестности подвижной особой точки. Новый подход в получении оценок приближенного решения, основанный на замене приращения функции выражением дифференциала [6], позволяет существенно увеличить область применения приближенного решения (3) и получить ее точные границы.

Обозначим $\rho_3 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, где

$$\rho_2 = 1/\sqrt[5]{(4M+1)^4}, \quad M = \sup_n \frac{|r^{(n)}(z^*)|}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

а ρ_1 определяет область для представления функции $r(z)$ в степенной ряд [5].

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $r(z) \in C^1$ в области $|\tilde{z}^* - z| < \rho_3$, где $\rho_3 = \mathrm{const} > 0$ и $\tilde{z}^*$ — приближенное значение подвижной особой точки решения задачи Коши (1)–(2);

2) $\exists M_1$*:* $\dfrac{|r^{(n)}(\tilde z^*)|}{n!} \leqslant M_1$*, где* $M_1 = \mathrm{const}$*,* $n = 0, 1, 2, \ldots$*;*

3) $|\tilde z^*| \leqslant |z^*|$*;*

4) известна оценка погрешности значения $\tilde z^*$*:* $|z^* - \tilde z^*| \leqslant \Delta\tilde z^*$*;*

5) $\Delta\tilde z^* < 1/\sqrt[5]{16(4M_2 + 4\Delta M + 1)^4}$*, где*

$$M_2 = \sup_n \frac{|r^{(n)}(\tilde z^*)|}{n!}, \quad \Delta M = \left(\sup_{n,U} \frac{|r^{(n+1)}(z)|}{n!}\right)\Delta\tilde z^*,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad U = \{z\colon |\tilde z^* - z| \leqslant \Delta\tilde z^*\}.$$

Тогда для приближенного решения (3) задачи (1)–(2) в области

$$G = G_1 \cap G_2 \cap G_3 \tag{4}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta\tilde w_N(z) \leqslant \sum_{i=1}^{4} \Delta_i,$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\Delta\tilde z^*}{4\sqrt{2}|\tilde z^* - z|^{\frac{5}{4}}},$$

$$\Delta_2 \leqslant \frac{4^{-2}\Delta\tilde z^*(4M_2 + 4\Delta M + 1)}{1 - (4M_2 + 4\Delta M + 1)|\tilde z_1^* - z|^{\frac{5}{4}}} \sum_{i=1}^{5} |\tilde z_1^* - z|^{\frac{i-1}{4}}, \tag{5}$$

$$\Delta_3 \leqslant \frac{\Delta M|\tilde z_1^* - z|}{1 - 2(4M_2 + 4\Delta M + 1)|\tilde z_1^* - z|^{\frac{5}{4}}} \sum_{i=1}^{5} \frac{|\tilde z_1^* - z|^{\frac{i-1}{4}}}{8 + i}, \tag{6}$$

$$\Delta_4 \leqslant \frac{4^{-1}|\tilde z^* - z|^{\frac{N}{4}}}{1 - (4M_7 + 1)|\tilde z^* - z|^{\frac{5}{4}}} \sum_{i=1}^{5} \frac{(4M_7 + 1)^{\left[\frac{N+i}{5}\right]}}{N + 4 + i} |\tilde z^* - z|^{\frac{i-1}{4}},$$

при этом

$$|\tilde z_1^*| = |\tilde z^*| + \Delta\tilde z^*, \quad \arg\tilde z_1^* = \arg\tilde z^*, \quad G_1 = \{z\colon |z| < |\tilde z^*|\},$$

$$G_2=\left\{z\colon |\tilde{z}_1^*-z|<\frac{1}{\sqrt[5]{16(4M_2+4\Delta M+1)^4}}\right\},$$

$$G_3=\left\{z\colon |\tilde{z}^*-z|<\frac{1}{\sqrt[5]{(4M_2+1)^4}}\right\}.$$

Замечание. *Теорема справедлива в области (4), где*

$$G_1=\{z\colon |z|>|\tilde{z}^*|\},$$

$$G_2=\left\{z\colon |\tilde{z}_2^*-z|<\frac{1}{\sqrt[5]{16(4M_7+4\Delta M_2+1)^4}}\right\},$$

если вместо условия 3 этой теоремы выполняется условие $|\tilde{z}^*|>|z^*|$. *В этом случае* $|\tilde{z}_2^*|=|\tilde{z}^*|-\Delta\tilde{z}^*$, $\arg\tilde{z}_2^*=\arg\tilde{z}^*$ *и в (5), (6) выражение* $|\tilde{z}_1^*-z|$ *заменяется на выражение* $|\tilde{z}_2^*-z|$.

Пример. Найдем приближенное решение задачи Коши (1)–(2), где $r(z)\equiv 0$ и $w(i)=(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}})/2$, в окрестности приближенного значения подвижной особой точки.

Имеем точное решение $w(z)=1/\sqrt[4]{3i-4z}$. $z^*=0,75i$ — точное значение подвижной особой точки; $\tilde{z}^*=0,0003+0,7498i$ — приближенное значение подвижной особой точки, $\Delta\tilde{z}^*=0,00036$, $z_1=0,12+0,57i$ попадает в область действия теоремы. Рассмотрим случай $C_0=1/\sqrt{2}$. Результаты расчетов представлены в табл. 1, где $w(z_1)$ — значение точного решения, $\tilde{w}_3(z_1)$ — значение приближенного решения, Δ — абсолютная погрешность, Δ' — априорная погрешность, найденная по теореме, Δ'' — апостериорная погрешность.

В следующей табл. 2 приведено сравнение результатов, полученных по теореме настоящей работы и по теореме 3

Таблица 1

Оценка приближенного решения задачи Коши в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки

z_1	$w(z_1)$	$\tilde{w}_3(z_1)$	Δ	Δ'	Δ''
$0,12+$ $+0,57i$	$0,88954-$ $-0,53266i$	$0,88988-$ $-0,53286i$	$4\cdot10^{-4}$	$0,02782$	$0,00062$

Таблица 2

Сравнение оценок приближенного решения задачи Коши в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки

z_2	$w(z_2)$	$\tilde{w}_3(z_2)$	$\lvert w-\tilde{w}_3\rvert$	Δ'_{I}	Δ'_{II}
$0,00029+$ $+0,71325i$	$1,49083-$ $-0,62097i$	$1,49414-$ $-0,61877i$	$0,00397$	$0,00933$	$0,00835$

работы [5]. Значение $z_2 = 0,00029 + 0,71325i$ попадает в область действия указанных выше теорем. Здесь $w(z_2)$ — значение точного решения, $\tilde{w}_3(z_2)$ — значение приближенного решения, $|w-\tilde{w}_3|$ — абсолютная погрешность, Δ'_{I} — априорная погрешность, найденная по теореме 3 работы [5], Δ'_{II} — априорная погрешность, найденная по теореме настоящей работы.

Предложенные исследования позволяют значительно увеличить область применения приближенного решения (3) задачи Коши (1)–(2) в окрестности возмущенного значения подвижной особой точки по сравнению с результатами работы [5] и найти точные границы этой области. При этом представленные расчеты в табл. 2 подтверждают адекватность результата теоремы этой работы с результатом теоремы 3 из работы [5].

Литература

1. *Орлов В.Н.* Точные границы области применения приближенного решения дифференциального уравнения Абеля

в окрестности приближенного значения подвижной особой точки // Вестник Воронеж. гос. тех. ун-та. 2009. Т.5, №10. С. 192–195.

2. *Орлов В.Н., Редкозубов С.А.* Математическое моделирование решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Известия ин-та инж. физики. 2010. №4(18). С. 2–6.

3. *Орлов В.Н.* Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати: монография. Чебоксары: Перфектум, 2012. — 112 с.

4. *Орлов В.Н., Пчелова А.З.* Приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения в области голоморфности // Вестник Чув. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Серия: Ест. и техн. науки. 2012. №4(76). С. 133–139.

5. *Пчелова А.З.* Улучшенные оценки точности приближенных аналитических решений задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки // Вестник Российской Академии естеств. наук. Дифф. уравнения. 2017. Т.17, №4. С. 63–69.

6. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975. — 632 с.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ НАГРУЖЕННОЙ БАЛКИ

А.А. Самсонов, С.И. Соловьёв
(Казань; *anton.samsonov.kpfu@mail.ru*)

Пусть ось балки длины l занимает в равновесном горизонтальном положении отрезок $\overline{\Omega} = [0, l]$ оси Ox, $\Omega = (0, l)$. Обозначим через $\rho = \rho(x)$ и $E = E(x)$ линейную плотность и модуль упругости материала балки в точке x, через

$S = S(x)$ и $J = J(x)$ – площадь поперечного сечения балки и момент инерции сечения в точке x относительно своей горизонтальной оси. Предположим, что концы балки $x = 0$ и $x = l$ заделаны жёстко. Предположим, что в точке балки $x_0 \in (0, l)$ упруго присоединён груз (осциллятор) с массой M и коэффициентом жёсткости подвески K, $\sigma = K/M$, при этом $\sqrt{\sigma}$ есть собственная частота осциллятора.

Исследование собственных колебаний механической системы балка-пружина-груз приводит к задаче на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра [1]: найти числа λ и ненулевые функции $u(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющие уравнению

$$(EJu'')'' + \frac{\lambda}{\lambda - \sigma} K\delta(x - x_0)u = \lambda\, \rho S\, u, \quad x \in \Omega,$$

и граничным условиям $u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0$, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Число $\sqrt{\lambda}$ определяет частоту собственного колебания системы, а функция $u(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ – амплитуду собственного колебания каждой точки балки.

В работе установлено существование последовательности положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности, которой соответствует последовательность нормированных собственных функций задачи. Задача аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов на равномерной сетке с эрмитовыми конечными элементами произвольного порядка. Исследована сходимость и доказаны оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций. Полученные результаты развивают и обобщают результаты из [1–3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00301, 17-08-01279).

Литература

1. *Соловьёв С.И.* Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы. – Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 256 с.

2. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, №7. – С. 937–950.

3. *Соловьёв С.И.* Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, №3. – С. 418–432.

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

В.В. Семёнов

(Киев; *semenov.volodya@gmail.com*)

Доклад основан на результатах недавних исследований, опубликованных в [1–6].

Пусть H – действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$, C – непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства H и $A : H \to H$ – некоторый оператор. Рассмотрим вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C: \ (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Множество решений вариационного неравенства (1) обозначим $VI\,(A, C)$.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

(A1) $VI\,(A, C) \neq \emptyset$;

(A2) оператор $A : H \to H$ – монотонный, равномерно непрерывный на ограниченных множествах и отображает ограниченные множества в ограниченные.

Далее рассмотрим модификацию субградиентного экстраградиентного алгоритма с динамической регулировкой величины шага, предложенную в [1].

Инициализация. *Задаем числовые параметры* $\sigma > 0$, $\tau \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$ *и элемент* $x_0 \in H$.

Итерационный шаг. *Для* $x_n \in H$ *вычисляем*

$$y_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A x_n\right),$$

где λ_n *получаем из условия*

$$\begin{cases} j\left(n\right) = \min\left\{j \geq 0 : \ \ \left\|AP_C\left(x_n - \sigma\tau^j A x_n\right) - Ax_n\right\| \leq \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left. \leq \frac{\theta}{\sigma\tau^j}\left\|P_C\left(x_n - \sigma\tau^j A x_n\right) - x_n\right\|\right\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)}. \end{cases}$$

Если $y_n = x_n$ *то конец и* x_n *— решение (1), иначе вычисляем*

$$x_{n+1} = P_{T_n}\left(x_n - \lambda_n A y_n\right),$$

где

$$T_n = \left\{z \in H : \ \left(x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n\right) \leq 0\right\}.$$

Лемма 1. *Правило выбора параметра* λ_n *корректно, то есть*

$$j\left(n\right) < +\infty.$$

Лемма 2. *Для последовательностей* (x_n), (y_n), *порожденных алгоритмом, имеет место неравенство*

$$\left\|x_{n+1} - z\right\|^2 \leq \left\|x_n - z\right\|^2 - \left(1-\theta\right)\left\|x_n - y_n\right\|^2 - \\ - \left(1-\theta\right)\left\|x_{n+1} - y_n\right\|^2, \qquad (2)$$

где $z \in VI\left(A, C\right)$.

Из неравенства (2) следует фейеровское свойство последовательности (x_n) относительно множества $VI\,(A,C)$ и сходимость к нулю последовательностей $(x_n - y_n)$, $(x_{n+1} - y_n)$. Это позволяет получить следующий результат относительно сходимости предлагаемого итерационного алгоритма.

Теорема 1. *Последовательности (x_n), (y_n), порожденные алгоритмом, слабо сходятся к точке $z \in VI(A,C)$.*

Сильно сходящийся вариант метода можно получить, используя метод итеративной регуляризации или гибридный метод.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГФФИУ (проект № F74/24921) и МОНУ (проект № 0116U004777).

Литература

1. *Denisov S.V., Semenov V.V., Chabak L.M.* Convergence of the Modified Extragradient Method for Variational Inequalities with Non-Lipschitz Operators, Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 51 (2015), p. 757-765.

2. *Верлань Д.А., Семенов В.В., Чабак Л.М.* Сильно сходящийся модифицированный экстраградиентный метод для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами, Проблемы управления и информатики, 2015, № 4, с. 37-50.

3. *Lyashko S.I., Semenov V.V., Voitova T.A.* Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems, Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 47 (2011), p. 631-639.

4. *Malitsky Yu.V., Semenov V.V.* Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities, Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 50 (2014), p. 271-277.

5. *Malitsky Yu.V., Semenov V.V.* A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems, Journal of Global Optimization, Vol. 61 (2015), p. 193-202.

6. *Semenov V.V.* A version of the mirror descent method to solve variational inequalities, Cybernetics and Systems Ana-

lysis, Vol. 53 (2017), p. 234-243.

ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С ФУНКЦИЕЙ ЛЕЖАНДРА ПЕРВОГО РОДА В ЯДРЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

О.В. Скоромник
(г.Новополоцк; *skoromnik@gmail.com*)

Расматривается двумерное интегральное преобразование

$$(\mathbf{P}_\delta^\gamma f)(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \left(\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2\right)^{\frac{-\gamma}{2}} P_\delta^\gamma \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \ (\mathbf{x} > \mathbf{0}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R^2$; $\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} := \int\limits_0^{x_1} \int\limits_0^{x_2}$; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum\limits_{k=1}^{2} x_k t_k$; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $0 < Re(\gamma_j) < 1$, $(j = 1, 2)$; $\delta = (\delta_1, \delta_2) \in R^2$; $(\mathbf{x})^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in R_+^2$; $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \cdot \Gamma(\alpha_2)$; $|k| = k_1 + k_2$; $D^k = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial x_2)^{\alpha_2}}$; $d\mathbf{t} = dt_1 dt_2$; $f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2)$; $\mathbf{x} \geq \mathbf{t}$ означает $x_1 \geq t_1, x_2 \geq t_2$. $P_\delta^\gamma(\mathbf{x}) = \prod\limits_{j=1}^{2} P_{\delta_j}^{\gamma_j}(x_j) = = \prod\limits_{j=1}^{2} \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_j)} \left(\frac{x_j+1}{x_j-1}\right)^{\frac{\gamma_j}{2}} F\left(-\delta_j, 1+\delta_j; 1-\gamma_j; \frac{1-x_j}{2}\right)$, где $P_{\delta_j}^{\gamma_j}(x_j)$ $(j = 1, 2)$– функции Лежандра первого рода [1,2]; $F\left(-\delta_j, 1+\delta_j; 1-\gamma_j; \frac{1-x_j}{2}\right)$ $(j = 1, 2)$ – гипергеометрические функции Гаусса [1,2].

Находим двумерное преобразование Меллина [3,формула 1.4.42]: $(\mathfrak{M}\varphi)(s) = \int\limits_{R_{++}^2} \mathbf{t}^{s-1} \varphi(\mathbf{t}) \mathbf{dt}$, $R_{++}^2 = \{\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in R^2 : t_j > 0 \ (j = 1, 2)\}$, $s = (s_1, s_2)$, $s_j \in C$ $(j = 1, 2)$, выражения (1).

Последовательно применяя [4,лемма 2,формула 39, формула 10], окончательно получаем:

$$(\mathfrak{M}\mathbf{P}_\delta^\gamma f)(s) = \prod_{j=1}^{2} 2^{\gamma_j-1}\frac{\Gamma\Big(\frac{1+\gamma_j+\delta_j-s_j}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\gamma_j-\delta_j-s_j}{2}\Big)}{\Gamma\Big(1-\frac{s_j}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1-s_j}{2}\Big)}\times$$

$$\times\int_0^\infty t_2^{1-\gamma_2+s_2-1}\Big\{\int_0^\infty t_1^{1-\gamma_1+s_1-1}f(t_1,t_2)dt_1\Big\}dt_2 =$$

$$\Big(\mathfrak{M}f\Big)(1-\gamma+s)\prod_{j=1}^{2}2^{\gamma_j-1}\mathcal{H}_{2,2}^{0,2}\left[\begin{matrix}\big(\frac{1-\gamma_j-\delta_j}{2},\frac{1}{2}\big), & \big(1+\frac{\delta_j-\gamma_j}{2},\frac{1}{2}\big)\\ \big(0,\frac{1}{2}\big), & \big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big)\end{matrix}\,\middle|\, s_j\right]$$

$$= 2^{\gamma-1}\mathcal{H}_{2,2}^{0,2}\left[\begin{matrix}\big(\frac{1-\gamma-\delta}{2},\frac{1}{2}\big), & \big(1+\frac{\delta-\gamma}{2},\frac{1}{2}\big)\\ \big(0,\frac{1}{2}\big), & \big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big)\end{matrix}\,\middle|\, s\right]\Big(\mathfrak{M}f\Big)(1-\gamma+s).$$

Поэтому в силу [5, формула (5.1.14)] исходный интеграл преобразования (1)является двумерным аналогом модифицированного H – преобразования [5, формула (5.1.4)] с $\sigma = 0,\ k = 1-\gamma$:

$$\big(\mathbf{P}_\delta^\gamma f\big)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1}\int_{\mathbf{0}}^{\infty}\mathrm{H}_{2,2}^{0,2}\left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\,\middle|\,\begin{matrix}\big(\frac{1-\gamma-\delta}{2},\frac{1}{2}\big) & \big(1+\frac{\delta-\gamma}{2},\frac{1}{2}\big)\\ \big(0,\frac{1}{2}\big) & \big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big)\end{matrix}\right]\mathbf{t}^{-\gamma}f(\mathbf{t})\mathbf{dt}. \tag{2}$$

На основании (2) формулы обращения [5, (5.5.23), (5.5.24)] для $\mathbf{P}_\delta^\gamma f\,:\,f(\mathbf{x}) = -2^{1-\gamma}h\mathbf{x}^{(\lambda+1)/h-1+\gamma}\frac{d}{d\mathbf{x}}\mathbf{x}^{-(\lambda+1)/h}\times$

$$\times\int_{\mathbf{0}}^{\infty}\mathrm{H}_{3,3}^{2,1}\left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\,\middle|\,\begin{matrix}(-\lambda,h), \big(\frac{\gamma+\delta}{2},\frac{1}{2}\big), & \big(\frac{\gamma-\delta-1}{2},\frac{1}{2}\big)\\ \big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big), & \big(0,\frac{1}{2}\big), (-\lambda-1,h)\end{matrix}\right]\big(\mathbf{P}_\delta^\gamma f\big)(\mathbf{t})d\mathbf{t}, \tag{3}$$

или

$$f(\mathbf{x}) = 2^{1-\gamma} h \mathbf{x}^{(\lambda+1)/h-1} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\lambda+1)/h} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{H}^{3,0}_{3,3}\left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \left| \begin{matrix} \left(\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2}\right), & \left(\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2}\right), (-\lambda, h) \\ (-\lambda-1, h), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), & \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right. \right] \left(\mathbf{P}^{\gamma}_{\delta} f\right)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (4)$$

Введем пространство $\mathfrak{L}_{\mathbf{v},\mathbf{r}}$ функций $f(\mathbf{x})= f(x_1, x_2)$, имеющих конечную норму
$\|f\|_{\mathbf{v},\mathbf{r}}= \{\int_{R^1_+} x_2^{v_2 r_2 - 1} \, [\int_{R^1_+} x_1^{v_1 r_1 - 1} |f(x_1, x_2)|^{r_1} dx_1]^{r_2/r_1} dx_2\} < \infty$ $(\mathbf{r} = (r_1, r_2), 1 < r_j < \infty, \ \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in R^2)$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \mathbf{v} - \mathrm{Re}(1-\gamma) < \min[\mathrm{Re}(1+\gamma+\delta), \mathrm{Re}(\gamma-\delta)]$, $0 < 1 - \mathbf{v} + \mathrm{Re}(1-\gamma) < \infty$ *и пусть* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in C^2$, $h > 0$.

(a) Если $\mathrm{Re}(\gamma-1) = 0$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\mathbf{v},2}$, *то формула обращения (3) справедлива при* $\mathrm{Re}(\lambda) > (1 - \mathbf{v} + \mathrm{Re}(1-\gamma))h - 1$, *а формула (4) справедлива при* $\mathrm{Re}(\lambda) < (1-\mathbf{v}+\mathrm{Re}(1-\gamma))h-1$.

(b) Если $\mathrm{Re}(\gamma-1) = 0$, $f \in \mathfrak{L}_{\mathbf{v},\mathbf{r}}$, $1 < \mathbf{r} < \infty$, *то формула обращения (3) справедлива при* $\mathrm{Re}(\lambda) > (1-\mathbf{v}+\mathrm{Re}(1-\gamma))h-1$, *а формула (4) справедлива при* $\mathrm{Re}(\lambda) < (1 - \mathbf{v} + \mathrm{Re}(1-\gamma))h - 1$.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Конвергенция – 2020 "(программа 1, задание 1.2.01).

Литература

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. *Бейтмен Г.,Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965.

3. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. North - Holland Mathematics Studies 204. Amsterdam: Elsevier.xv, 2006.–523 p.

4.*Kilbas A.A., Skoromnik O.V.* Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $L_{\nu,r}$ - spaces // Integral Transforms and Special Functions. - 2009. - Vol. 20, № 9. - P. 653-672.

5. *Kilbas A. A., Saigo M.* H — Transforms. Theory and Applications // Boca Raton, Florida: Chapman and Hall. 2004.— 400 p.

ОБ ОСНОВНОМ ПЕРИОДЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Г.К. Соколова, С.С. Орлов
(Иркутск; *98gal@mail.ru, orlov_ sergey@inbox.ru*)

Математическое моделирование самоподобных объектов и их свойств, а также различных процессов, повторяющихся во времени и пространстве, естественным образом приводит к понятию периодической функции нескольких переменных. Например, оно возникает при изучении зонной структуры кристаллов [1], когда на волновую функцию ψ, задающую их состояние, накладывают условия Борна–Кармана

$$\psi(\bar{r} + N_i\bar{a}_i) = \psi(\bar{r}),\ i = 1, \ldots, d,$$

где d — размерность решётки Бравé, $\bar{a}_i$ — её элементарные трансляционные векторы, N_i — целые числа. Периодическая функция $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ имеет *основные* векторные периоды $\bar{a}_i$, т. е. векторные периоды наименьших модулей, и любой её векторный период $\bar{T}$ определяется линейной комбинацией основных векторных периодов с целыми коэффициентами как вектор трансляций. Эти факты следуют из структуры множества, на котором рассматривается функция ψ, нежели из самого нелокального свойства периодичности.

Известно, что у произвольной периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не всегда существует основной период. Этот факт имеет место даже в одномерном случае, когда $n = 1$. Примеры таких функций доставляют постоянная функция, у которой любое действительное число является периодом, характеристическая функция множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел или функция Дирихле, множество периодов которой совпадает с $\mathbb{Q}$, и многие другие. Критериев существования у периодической функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ основного периода авторам неизвестно. Достаточные условия даёт теорема, которая приведена в книгах [2, с. 8] и [3, с. 450].

Теорема 1. *Если периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является непрерывной и отлична от постоянной, то она имеет основной период.*

В представляемой работе аналогичная теорема доказана для функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенной всюду на $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется периодической с периодом $\bar{T}$, если существует вектор $\bar{T} \neq \bar{0}$, что для всех $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется $f(\bar{r} + \bar{T}) = f(\bar{r})$.*

Из определения 1 следует, что, если $\bar{T}$ — период функции f, то для любого $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ вектор $k \cdot \bar{T}$ также является периодом этой функции.

Рассмотрим далее множество n-мерных прямых $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ с направляющим вектором $\bar{T}$. Здесь $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ — радиус-вектор некоторой точки, принадлежащей данной прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$. Эту точку можно выбирать, например, в линейном многообразии $\langle \bar{r}, \bar{T} \rangle = 0$, тогда соответствие $\bar{a} \to \ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ оказывается взаимно однозначным. Параметрическое уравнение прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ имеет вид $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{\mathcal{T}}$, в котором t — действительная переменная, $\bar{T} = |\bar{T}| \cdot \bar{\mathcal{T}}$. Вдоль каждой прямой функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принимает значения $f(\bar{r})\big|_{\bar{r} \in \ell_{\bar{T}}(\bar{a})} = f(\bar{a} + t\bar{\mathcal{T}})$, т. е. является функцией $g_{\bar{a}}(t) = f(\bar{a} + t\bar{\mathcal{T}})$ одной переменной.

Лемма. *Всякая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, периодическая с периодом $\bar{T}$, является периодической с периодом $|\bar{T}|$ вдоль каждой прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ с направляющим вектором $\bar{T}$.*

Для доказательства следует показать периодичность с периодом $|\bar{T}|$ функций $g_{\bar{a}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Определение 2. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ периодическая с периодом $\bar{T}$. Период $\bar{T}_0$ наименьшего модуля, коллинеарный $\bar{T}$, называется основным (базисным) периодом функции f в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$.*

Рассмотрим некоторые примеры. Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида $(x,\, y) \to x \sin y + (x+1) \sin 2y$ является периодической в направлении орта $\bar{j}$ с основным периодом $\bar{T}_0\{0;\, 2\pi\}$. Вдоль прямых $(x,\, y) = (a,\, t)$ данная функция имеет следующий вид: $g_{\{a;\,0\}}(t) = a \sin t + (a+1) \sin 2t$, и при $a = -1$ является π-периодической, а при всех $a \neq -1$ — 2π-периодической. Таким образом, вдоль разных прямых $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ периодическая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ может иметь различные основные периоды, в т. ч. меньшие модуля $|\bar{T}_0|$ её базисного векторного периода. Очевидно, что вдоль некоторой прямой функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ может и совсем не иметь основного периода. Например, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида $(x,\, y) \to y \sin x$, периодическая в направлении орта $\bar{i}$ с основным периодом $\bar{T}_0\{2\pi;\, 0\}$, но вдоль прямой $(x,\, y) = (t,\, 0)$ она постоянна: $g_{\{0;\,0\}}(t) = 0$. Пример отсутствия базисных периодов доставляет функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида $(x,\, y) \to (x-y) \sin(x-y)$. Множество её периодов континуально и состоит из векторов $\bar{T}\{a;\, a\}$, где $a \in \mathbb{R}$, среди которых нет вектора наименьшей длины.

Теорема 2. *Если периодическая с периодом $\bar{T}$ функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вдоль хотя бы одной прямой $\ell_{\bar{T}}(\bar{a})$ непрерывна и отлична от постоянной, то она имеет основной период в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$.*

Предполагая, что периодическая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ не имеет основного периода в направлении $\bar{\mathcal{T}}$, заключаем существование её периода $\bar{S}$, модуль которого как угодно мал. Согласно лемме, $|\bar{S}|$ — период функций $g_{\bar{a}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при этом хотя бы одна из них по теореме 1 имеет основной период, что противоречит малости $|\bar{S}|$.

Литература

1. *Ашкрофт Н., Мермин Н.* Физика твёрдого тела. Том 1. М.: Мир, 1979. – 400 с.

2. *Ахиезер Н.И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. – 304 с.

3. *Будак Б.М., Фомин С.В.* Курс высшей математики и математической физики. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. – 608 с.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

К.И. Солодских
(Москва; *solodskihkirill@gmail.com*)

Если гамильтонова система с двумя степенями свободы является интегрируемой по лиувиллю при помощи боттовского интеграла F, то она допускает качественное описание в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга (подробнее см. [1]). Оказвается класс изоэнергитических многообразий гамильтоновых систем интегрируемых при помощи боттовского интеграла совпадает с классом граф-многообразий Вальдхаузена(см. [2]). Изучение топологии этих многообразий очень важно, так как это позволяет сильно ограничить лиувиллевы слоения, которые могут возникнуть в конкретной задаче. Многие топологические свойства гамильтоновых систем были изучены в [3]. В данной работе демонстрируется применение кручения Рейдемейстера для установления топлогического типа изоэнергетического многообразия.

Определение 1. Молекула интегрируемой системы называется простой, если она имеет всего один седловой атом без звездочек, который является плоским.

Фундаментальная группа таких многообразий имеет следующее копредставление

$$\pi_1(\mathbf{Q}^3) = \langle\ \lambda_V, \mu_1, \dots \mu_m \mid [\lambda_V, \mu_i], \lambda_V^{\alpha_i}\mu_i^{\beta_i},\ \mu_1 \dots \mu_m, i = 1, \dots, m\ \rangle,$$

где $\lambda_V, \mu_1, \dots, \mu_m$ – образующие в фундаментальной группе седлового атома V, которые соответствуют гомотопным допустимым циклам на граничных торах, α_i, β_i – элементы матриц склейки

$$C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Теорема 1 [см. 4]. *Пусть гомоморфизм колец в поле*

$$h\colon \mathbb{Z}[\pi_1(\mathbf{Q}^3] \to \mathbb{F},$$

такой, что $h(\lambda_V)^{\gamma_k} h(\mu_k)^{\delta_k} \neq 1, k = 1, \dots, m$. *Тогда кручение многообразия* $\mathbf{Q}^3$ *не равно* 0 *в том и только том случае, когда* $h(\lambda_V) \neq 1$. *Если* $h(\lambda_V) \neq 1$, *то*

$$\tau_h(\mathbf{Q}^3) = (h(\lambda_V) - 1)^{m-2} \prod_{k=1}^{m} (h(\lambda_V^{\gamma_k}\mu_k^{\delta_k}) - 1)^{-1} \in \mathbb{F}^*/\pm h(\pi_1(\mathbf{Q}^3)).$$

Пусть все r-метки простой молекулы равны нулю, а n-метка не равна $0, 1, -1$. Без ограничения общности матрицы склейки в этом случае имеют следующий вид

$$C_m = \begin{pmatrix} n & \varepsilon_m \\ \varepsilon_m & 0 \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_i \\ \varepsilon_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Фундаментальная группа многообразия $\mathbf{Q}^3$ является циклической группой порядка n

$$\pi_1(\mathbf{Q}^3) = \langle\ \lambda_V \mid \lambda_V^n\ \rangle,$$

поэтому многообразие $\mathbf{Q}^3$ гомеоморфно некоторой линзе $L(n,q)$.

Следствие. *Многообразие* $\mathbf{Q}^3$ *гомеоморфно линзе* $L(n,1)$.

Далее рассмотрим такие простые молекулы, что только две r-метки не равны 0. Без ограничения общности можно считать, что матрицы склейки следующие

$$C_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_i \\ \varepsilon_i & 0 \end{pmatrix},$$

$$i = 3, \ldots, m.$$

Фундаментальная группа таких многообразий имеет следующее копредставление

$$\pi_1(\mathbf{Q}^3) = \left\langle \ \lambda_V, \mu_2 \ \middle| \ [\lambda_V, \mu_1], \lambda_V^{\alpha_1} \mu_2^{-\beta_1}, \lambda_V^{\alpha_2} \mu_2^{\beta_2} \ \right\rangle .$$

Следствие. *Многообразие* $\mathbf{Q}^3$ *гомеоморфно линзе* $L(p,q)$, *где*

$$p = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \quad q = \alpha_1\gamma_2 \ + \ \beta_1\delta_2.$$

Литература

1. *Болсинов А.В., Фомнеко А.Т.* Интегрируемые Гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1. – Ижевск.: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. - 444 С.

2. *Матвеев С.В., Фомнеко А.Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. - М.: Наука, 1998. - 304 С.

3. *Фоменко А. Т., Цишанг Х.* “О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 52:2 (1988), 378–407

4. *Солодских К. И.* “Граф-многообразия и интегрируемые гамильтоновы системы”, Математический сборник(в печати) 2017 г.

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КАПИЛЛЯРНОСТИ

Л.В. Стенюхин
(Воронеж; *stenyuhin@mail.ru*)

Рассмотрим основной энергетический функционал задачи

$$E(u)=\int\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,dx+\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\Omega}\Upsilon\rho u\,dx+\lambda\int\limits_{\Omega}u\,dx. \qquad (1)$$

Его первое слагаемое является функционалом площади. Пусть u_0 – экстремаль (1). Близкие к u_0 поверхности будем задавать в системе координат нормального расслоения к u_0. Это приведет к одному скалярному уравнению для близкой поверхности:

$$\left(\frac{\delta S}{\delta u}(u_0+\eta\bar{n}),\bar{n}\right)=0,$$

или

$$\frac{\delta S}{\delta\eta}(\eta)=0, \qquad (2)$$

где $\frac{\delta S}{\delta u}$ – функциональная производная функционала площади, $\bar{n}$ – нормаль к поверхности u_0. Из уравнения (2) определяется нормальная координата $\eta=\eta(x,y)$.

Теорема 1. *Функционал площади близких к u_0 поверхностей $S(\eta)$ и его оператор Эйлера $\frac{\delta S}{\delta\eta}(\eta)$ имеет следующую аналитическую структуру*

$$S(\eta)=\int\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,dxdy, \qquad (3)$$

$$\frac{\delta S}{\delta u}(\eta) = E^3(EG - F^2)^{-\frac{3}{2}}(A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G). \qquad (4)$$

Здесь E, G, F – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности,

$$A = \sum_{p=1}^{6} a_{ijk}\eta_x^i\eta_x^j\eta^k + 1, \;\; B = \sum_{p=1}^{6} b_{ijk}\eta_x^i\eta_y^j\eta^k,$$

$$C = \sum_{p=1}^{6} c_{ijk}\eta_y^i\eta_y^j\eta^k + 1, \;\; G = \sum_{p=2}^{7} g_{ijk}\eta_x^i\eta_y^j\eta^k + g\eta,$$

где i, j, k – целые неотрицательные числа, $p = i + j + k$. Все коэффициенты $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, g_{ijk}, g$ – являются аналитическими функциями и находятся по формулам, подобным следующей

$$g = (\bar{n}, \bar{n}_{xx} + \bar{n}_{yy}) + \frac{4}{E}\left[(\bar{n}, u_{xx})^2 + (\bar{n}, u_{yy})^2\right]. \qquad (5)$$

Линейная часть оператора $A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G$ равна

$$\Delta\eta + g\eta, \qquad (6)$$

где Δ – лапласиан.

Линейная часть первой вариации равна

$$L\eta = E^3(EG - F^2)^{-\frac{3}{2}}(\Delta\eta + g\eta) + (\frac{\Upsilon\rho}{\sigma} + \lambda)\eta,$$

где g определена равенством (5). Соотношение $\frac{\Upsilon\rho}{\sigma}$ определяет число Бонда, $B = \frac{\Upsilon\rho}{\sigma}$. Поэтому линеаризованная задача имеет вид

$$\begin{cases} \Delta\eta + (g + E^{-3}(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}(B + \lambda))\eta - 0, \\ \eta \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Линейный оператор (7) действует из $W_2^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и самосопряжён в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.

Пусть поверхность капли $u(x,y) = (u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y))$ задана в конформных координатах, $E = G, F = 0$. Тогда функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям $u_x^2 = u_y^2$, $u_x u_y = 0$. В этом случае функционал энергии имеет вид

$$E(u) = \int\limits_{\Omega} \frac{E+G}{2}\,dx + \int\limits_{\Omega} Bu\,dx + \lambda \int\limits_{\Omega} u\,dx. \qquad (8)$$

Первая вариация функционала равна

$$\frac{\delta E}{\delta u}(\eta) = \Delta\eta + (B+\lambda)\eta.$$

Получаем задачу

$$\begin{cases} \Delta\eta + (B+\lambda)\eta - 0, \\ \eta \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Теорема 2. *Собственные значения оператора $\Delta + B + \lambda$ задачи (9) являются $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n + B + \lambda$, где λ_n – собственные значения оператора Δ с нулевым граничным условием.*

Литература

1. *Стенюхин Л.В.* Бифуркационный анализ задачи капиллярности с круговой симметрией // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. Том 7, №3, 2014. С. 77 – 83.

СПЕКТРАЛЬНО ОБРАТИМЫЕ И ГАМИЛЬТОНОВЫ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

А.В. Субботин, Ю.П. Вирченко
(Белгород; *virch@bsu.edu.ru*)

Введено общее понятие о спектрально обратимых автономных динамических системах. Показано, что всякая автономная гамильтонова система является спектрально обратимой. Доказана теорема о том, что генераторы линейных систем, получаемых линеаризацией каждой данной спектрально обратимой системы, связаны линейным преобразованием на основе дифференцируемой матриц-функции $\mathsf{U}(X)$ с генераторами линейных гамильтоновых систем.

Пусть $\mathsf{F} : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ – биекция $\mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Система дифференциальных уравнений

$$\dot{X}(t) = \mathsf{F}(X(t)) \tag{1}$$

определяет траектории $X(t) = \langle x_1(t), ..., x_{2n}(t)\rangle$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ состояний $X = \langle x_1, ..., x_{2n}\rangle$. Для этой динамической системы в каждой точке $X \in \mathbb{R}^{2n}$ определена $2n \times 2n$-матрица $\mathsf{G}(X) = (G_{ij}(X); i, j = 1 \div 2n)$,

$$G_{ij}(X) = \frac{\partial \mathsf{F}_i(X)}{\partial x_j}\,, \quad \det \mathsf{G}(X) \neq 0. \tag{2}$$

Определение 1. *Пусть* G *– невырожденная четномерная матрица размерности* $2n$, $\det G \neq 0$ *простой структуры, не имеющая кратных точек спектра* $\{\lambda_1, ..., \lambda_{2n}\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, *если* $i \neq j$, $i, j = 1 \div 2n$. *Матрицу* G *называется спектрально-обратимой, если ее спектр обладает следующим свойством: для каждого* $j = 1 \div 2n$ *существует единственный номер* j' *такой, что* $\lambda_{j'} = -\lambda_j$.

Вводится понятие спектрально-обратимых динамических систем вида (1).

Определение 2. *Динамическую систему (2) назовем спектрально-обратимой, если в каждой точке* $X \in \mathbb{R}^{2n}$ *соответствующая ей матрица* $\mathsf{G}(X)$ *является спектрально-обратимой.*

Примером спектрально-обратимых систем являются т.н. гамильтоновы системы. Для гамильтоновой системы соответствующий генератор $\mathsf{G}(X)$ в каждой точке $X \in \mathbb{R}^{2n}$ имеет блочную структуру

$$\mathsf{G}(X) = \begin{pmatrix} -\mathsf{B}^{\mathrm{T}}(X) & -\mathsf{C}(X) \\ \mathsf{A}(X) & \mathsf{B}(X) \end{pmatrix} \tag{3}$$

с блоками в виде $n \times n$-матриц $\mathsf{A}(X)$, $\mathsf{B}(X)$, $\mathsf{C}(X)$, где матрицы $\mathsf{A}(X)$ и $\mathsf{C}(X)$ симметричны.

Матрицы, имеющие блочную структуру (3), мы называем *гамильтоновыми матрицами.*

Теорема 1. *Каждая гамильтонова матрица (4) является спектрально-обратимой.*

Справедлива следующая теорема, обратная к Теореме 1.

Теорема 2. *Каждая вещественная спектрально-обратимая матрица G размерности $2n$ вещественно подобна гамильтоновой матрице той же размерности.*

В настоящем сообщении по заданной матриц-функции $\mathsf{G}(X)$ со значениями в виде вещественных спектрально обратимых матриц построена соответствующей ей матриц-функции $\mathsf{H}(X)$, со значениями в виде гамильтоновых матриц.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для фиксированного четного числа $d = 2n$ задана $\mathsf{G} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ – дифференцируемая по $X \in \mathbb{R}^d$ матриц-функция со значениями в виде вещественных невырожденных спектрально-обратимых матриц $\mathsf{G}(X)$, $\det \mathsf{G}(X) \neq 0$ простой структуры, которые не имеют кратных собственных значений. Тогда существует дифференцируемая по X матриц-функция $\mathsf{U} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ со значениями в виде вещественных невырожденных матриц $\mathsf{U}(X)$, $\det \mathsf{U}(X) \neq 0$, такая, что матрицы*

$\mathsf{U}(X)\mathsf{G}(X)\mathsf{U}^{-1}(X) = \mathsf{H}(X)$ *являются гамильтоновыми при каждом* $X \in \mathbb{R}^d$ *.*

Теорема доказывается в два этапа. Сначала доказывается утверждение о существовании дифференцируемой по $\xi \in \mathbb{R}$ матриц-функции $\mathsf{U} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ с указанными в утверждении теоремы свойствами при наличии дифференцируемой матриц-функции $\mathsf{G}(\xi)$, которую она трансформирует в матриц-функцию $\mathsf{U}(\xi)\mathsf{G}(\xi)\mathsf{U}^{-1}(\xi) = \mathsf{H}(\xi)$. Для этого доказывается разрешимость гомологического уравнения $[\mathsf{R}(\xi), \mathsf{H}(\xi)] + \mathsf{D}(\xi) = \mathsf{S}(\xi)$, где

$$\mathsf{R}(\xi) = \frac{d\mathsf{U}(\xi)}{d\xi}\,\mathsf{U}^{-1}(\xi)\,, \qquad \mathsf{T}(\xi) = \frac{d\mathsf{G}(\xi)}{d\xi}\,, \qquad \mathsf{S}(\xi) = \frac{d\mathsf{H}(\xi)}{d\xi}\,.$$

Затем матриц-функция $\mathsf{U}(X)$ строится в виде $\mathsf{U}(X) = \mathsf{U}(x_1, x_2, ..., x_d) \cdot ... \cdot \mathsf{U}(x_1, x_2)\mathsf{U}(x_1)$, где последовательность $\langle \mathsf{U}(x_1), \mathsf{U}(x_1, x_2), ..., \mathsf{U}(x_1, x_2, ..., x_d)\rangle$ дифференцируемых матриц-функций составляется пошагово, полагая $\xi = x_j$ на каждом шаге $j = 1, 2, ..., d$ построения.

Литература

1. *Вирченко Ю.П., Субботин А.В.* Характеризация линейных гамильтоновых систем // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» 26-31 мая 2013, Белгород / Белгород: Политерра, 2013. – С.180-181.

2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / М.: Наука, 1966. – 576 с.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И НЕКОТОРЫМ ПАРАМЕТРОМ В ПРАВОЙ ЧАСТИ

В.И. Усков

(Воронеж; *vum1@yandex.ru*)

Рассматривается следующая задача:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = (A + c\cdot I)x(t,\varepsilon) + h(t), \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0(\varepsilon) \in E, \tag{2}$$

где A — замкнутый линейный оператор, E — банахово пространство, $\overline{\operatorname{dom} A} = E$; A — фредгольмов оператор с нулевым индексом (далее, Ф-оператор); $h(t)$ — заданная достаточно гладкая функция со значениями в E; $x^0(\varepsilon)$ — голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция; $c \in \mathbb{C}$; $t \in [0,T]$; $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$.

Под *решением* задачи (1), (2) подразумевается дифференцируемая функция $x(t,\varepsilon)$, удовлетворяющая (1), (2) при каждых t, ε.

Исследуется поведение решения при $\varepsilon \to 0$; устанавливается возможность наблюдения явления погранслоя [1]; изучается влияние параметра c на качественные свойства решения; строится асимптотическое разложение решения по степеням параметра ε; доказывается асимптотичность этого разложения.

Определение Ф-свойства некоторого оператора A и решение линейного уравнения с таким оператором, использующиеся при решении задачи, приведены в [2].

Приложением поставленной задачи может быть начально-краевая задача для уравнения

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2c\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} + 2c\frac{\partial u}{\partial x} + (\gamma^2 + c^2)u(x,t,\varepsilon) = \varphi(x,t),$$

встречающаяся в задачах математической физики, связанных с потенциальными барьерами квантовой физики, в теории дифракции, в теории тонких упругих оболочек, в задачах на собственные функции типа волн Релея и т.д. [3].

В работе [2] было построено асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) в случае Ф-оператора, имеющего произвольную размерность ядра и жордановы цепочки разной длины. Поскольку оператор $A + c \cdot I$ вообще говоря не является Ф-оператором, результаты этой работы перенести на эту задачу не представляется возможным. О поставленной задаче делался доклад на конференции [4]; приводился в качестве примера матрично-дифференциальный оператор (о нем см. [5]).

В настоящей работе методом Васильевой-Вишика-Люстерника, разработанным в [6, 7], строится асимптотическое разложение решения по степеням малого параметра ε в виде

$$x(t,\varepsilon) = \bar{x}_m(t,\varepsilon) + \bar{v}_m(t,\varepsilon) + R_m(t,\varepsilon),$$

$$\bar{x}_m(t,\varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k x_k(t),\ \bar{v}_m(t,\varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k v_k(\tau),\ \tau = \tau(t,\varepsilon), \quad (4)$$

где $\bar{x}_m(t,\varepsilon)$ — регулярная часть, $\bar{v}_m(t,\varepsilon)$ — погранслойная часть, $R_m(t,\varepsilon)$ — остаточный член разложения.
Доказывается асимптотичность этого разложения.

Литература

1. *Зубова С.П.* О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной / С. П. Зубова // Доклады РАН. — 2014. — Т. 454, № 4. — С. 383–386.

2. *Зубова С.П.* Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве / С.П. Зубова, В.И. Усков // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика. — 2016. — № 3. — С. 147–155.

3. *Вишик М.И.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12, вып. 5 (77). — С. 3–122.

4. *Усков В.И.* Задача Коши для уравнения первого порядка с малым параметром / В.И. Усков // Современные проблемы анализа динамических систем, приложения в технике и технологиях: материалы II Международной открытой конференции. — Воронеж. — 2017.

5. *Зубова С.П.* О свойствах вырожденности некоторого матричного дифференциального оператора. — Естественные и математические науки: научные приоритеты учёных. Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции / С.П. Зубова, В.И. Усков // Пермь. — 2016. — Вып. 1. — С. 9–12.

6. *Васильева А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. Наука. — 1973. — 272 с.

7. *Треногин В.А.* Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика / В.А. Треногин // Успехи мат. наук. — 1970, июль-август. — Т. 25, вып. 4 (154). — С. 123–156.

Кобордизмы свободных узлов и графов

Д.А. Федосеев
(Москва: МГУ им. Ломоносова, ИПУ им. Трапезникова РАН; *denfedex@yandex.ru*)

В 2009 году В.О. Мантуров ввел в маломерной топологии понятие *четности* [1], позволившее усилить множество инвариантов виртуальных узлов, свободных узлов и др. и построить много новых инвариантов. Одним из главных отличительных свойств четности является возможность строить инварианты со значениями в *картинках* — диаграммах или линейных комбинациях диаграмм, которые позволяют доказывать утверждения о том, что *если диаграмма достаточно сложна, то она воспроизводит сама себя*, см. также [2, 3].

Компактно такое утверждение записывается в виде формулы

$$[K] = K,$$

где в левой части K обозначает узел или зацепление (класс эквивалентности диаграмм по движениям), а в правой части K — одна достаточно сложная диаграмма этого же узла. Скобка $[K]$ строится комбинаторным образом и такое равенство означает, что для любой диаграммы K', эквивалентной диаграмме K, имеет место $[K'] = K$, что по построению значит, что диаграмма K может быть получена из диаграммы K' посредством некоторых операций *разведения*.

Таким образом, о многих свойствах *всех* диаграмм узла (например, K') можно судить по *одной-единственной* его диаграмме K. В частности, глядя на единственную диаграмму (свободного) узла или зацепления, можно сказать о его нетривиальности, о минимальном количестве перекрестков у диаграмм этого узла.

Центральный результат, изложенный в настоящем докладе, использует технику двумерных узлов и четности на них (см. [4]) и позволяет для некоторых (нечетных) диаграмм судить еще об одном свойстве — их *срезанности*. Важнейшим отношением эквивалентности классических узлов является отношение конкордантности — возможности затянуть два узла цилиндрической пленкой в четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^3 \times [0,1]$, в компонентах края которого $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ и $\mathbb{R}^3 \times \{1\}$ лежат исследуемые узлы. В классической теории узлов это понятие особенно важно в связи с наличием различных типов конкордантности и срезанности — топологической и гладкой, которые связаны с различными проблемами четырехмерной топологиии.

Понятие конкордантности легко переносится на свободные узлы. Узел (свободный) называется *срезанным*, если он конкордантен тривиальному узлу.

Свободные узлы представляют собой класс эквивалентности оснащенных 4-графов с одной компонентой по движениям Рейдемейстера, которые мы приводить не будем, поскольку эквивалентные оснащенные 4-графы являются кобордантными. Под *кобордантностью* мы понимаем следующее. Скажем, что два оснащенных 4-графа Γ_1, Γ_2 *кобордантны*, если существует *затягивающая поверхность*, представляющая собой двумерный комплекс — образ цилиндра при непрерывном отображении общего положения, такой что образами краев цилиндра являются графы Γ_1, Γ_2, при этом в окрестности прообраза каждой вершины графа Γ_i образ компоненты края цилиндра принадлежит объединению двух противоположных полуребер.

Ясно, что это отношение действительно является отношением эквивалентности. Эквивалентность оснащенного 4-графа Γ тривиальному узлу (задаваемому окружностью без вершин) называется *срезанностью*. Заклеивая тривиальную окружность диском, мы получаем *срезывающий диск* для Γ.

Далее, пусть Γ — оснащенный 4-граф, $D(\Gamma)$ — соответствующая этому графу хордовая диаграмма. Назовем *спариванием* $\mathcal{P}$ хорд разбиение всех хорд $\{d_i\}$ диаграммы $D(\Gamma)$ на попарно непересекающиеся множества $\mathcal{P}_i$, состоящие из одного или двух элементов, у которого для каждого множества $\mathcal{P}_i$, состоящего из двух хорд c_i, d_i, каждому концу хорды c_i взаимно-однозначно соответствует один конец хорды d_i. Хордовая диаграмма $C(\mathcal{P})$ состоит из множества хорд, концы которых совпадают с концами хорд диаграммы D, а каждая хорда либо совпадает с хордой диаграммы C, составляющей одно семейство, либо соединяет два соответствующих друг другу конца двух различных хорд из одного семейства.

Основная теорема, изложенная в настоящем докладе, состоит в следующем:

Теорема. *Если диаграмма K свободного узла является* нечетной*, то она является* срезанной *тогда и только тогда, когда ее хорды допускают* спаривание без пересечений*.*

Отметим, что эта теорема дает *конечную процедуру* для определения, является ли данный свободный узел со всеми нечетными перекрестками срезанным.

Литература

1. *Мантуров В.О.* Четность в теории узлов. Математический Сборник. 201:5, 2010. с. 65–110.

2. *Мантуров В.О.* Почти классификация свободных зацеплений. Доклады РАН. 452:4, 2013. с. 1–4.

3. *Kauffman L.H., Manturov V.O.* A graphical construction of the $sl(3)$ invariant for virtual knots. Quantum Topology. 5:4, 2014. с. 523–539.

4. *Fedoseev D.A., Manturov V.O.* Parities on 2-knots and 2-links. J. Knot Theory Ramifications. 25, 2016.

О совпадениях отображений упорядоченных множеств

Т.Н. Фоменко

(Москва; *tn-fomenko@yandex.ru*)

Доклад посвящен проблемам существования общих неподвижных точек и совпадений семейств многозначных отображений упорядоченных множеств.

Классическими результатами о существовании неподвижной точки отображения упорядоченного множества в себя являются теоремы Кнастера-Тарского (Knaster-Tarski), Смитсона (Smithson) и Цермело (Zermelo) (см. [1,2]), имеющие многочисленные применения. Результаты о существовании совпадений двух многозначных отображений получены в [3,4], затем развиты и обобщены в [5–7]. В [3–7] получены результаты, обобщающие теоремы Кнастера-Тарского и Смитсона. Однако из них не следует теорема Цермело.

В докладе будут представлены теоремы об общих неподвижных точках и совпадениях семейств многозначных отображений, уточняющие и обобщающие некоторые результаты [5-8] и соответствующие теоремы из [3,4]. В отличие от работ [3–7], на отображения не накладываются требования типа изотонности или накрываемости. Требуется лишь наличие специальных цепей в упорядоченном множестве и их нижних границ с определенными свойствами.

Известно, что проблемы существования общих неподвижных точек и точек совпадения *семейств отображений*, рассматриваемые в [6,7,8], не сводятся к случаю одного или двух отображений соответственно, представляют самостоятельный интерес и важны в приложениях. В частности, многими авторами изучаются задачи об общих неподвижных точках полугрупп отображений (например, особые точки динамических систем), об общих неподвижных точках семейств монотонных операторов в упорядоченных банаховых пространствах, рассматриваются варианты таких задач для семейств отображений с различными свойствами типа сжимаемости в метрических и обобщенных метрических пространствах, задачи о совпадениях семейств отображений в духе обобщений теоремы Хопфа о склеивании диаметрально противоположных точек сферы (см., например, [9–12] и многие другие работы российских и зарубежных авторов.)

Необходимые обозначения. Символ $\rightrightarrows$ обозначает многозначное отображение. $(X, \preceq_X), (Y, \preceq_Y)$ – упорядоченные множества , $x_0 \in X$, $\mathcal{F} = \{F_1, F_2\}$, где $F_1, F_2 : X \rightrightarrows Y$.

Обозначим через $\mathcal{C}(\mathbf{x_0}; \mathcal{F})$ совокупность пар вида (S, f), где цепь $S \subseteq T_X(x_0) := \{x' \in X | x' \preceq_X x_0\}$, $f = \{f_1, f_2\}, f_i : S \to Y, i = 1, 2, f_2(x) \preceq_Y f_1(x), \forall x \in S$, причем $f_1(x) \in$

$F_2(T_X(x_0)) \cap F_1(x), f_2(x) \in F_2(x)$ для любого $x \in S$. Кроме того, для любых $x, z \in S$, $x \prec z \Longrightarrow f_1(x) \preceq f_2(z)$.

Приведем одно из следствий результатов [8] для случая совпадений двух многозначных отображений.

Теорема 1. *Пусть* $(X, \preceq), (Y, \preceq)$ *- частично упорядоченные множества,* $x_0 \in X$, $\mathcal{F} = \{F_1, F_2\}$, $F_1, F_2 : X \rightrightarrows Y$ *- многозначные отображения. Пусть множество* $\mathcal{C}(x_0; \mathcal{F})$ *непусто, и для любой пары* $(S, f) \in \mathcal{C}(x_0; \mathcal{F})$, *где* $f = \{f_1, f_2\}$, *цепь* S *имеет нижнюю границу* $w \in X$, *и существуют значения* $\{z_1, z_2\}$, $z_1 \succeq z_2$, $z_j \in F_j(w)$, *где* z_j *есть нижняя граница множества* $\{f_j(x) | x \in S\}, j = 1, 2$. *При этом, если* $z_2 \prec z_1$, *то* $\exists w_1 \in X, w_1 \preceq w$, *что* $z_2 \in F_1(w_1) \cap F_2(w)$ *и* $\exists v \in F_2(w_1)$, $v \preceq z_2$. *Тогда* $Coin(F_1, F_2) = \{x \in X | F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset\} \neq \emptyset$.

Можно показать, что из Теоремы 1 следуют Теорема 1 из [3,4], а также Теорема 3 из [6,7], при $n = 2$.

Если в условиях Теоремы 1 положить $X = Y$, $F_1 = Id_X, F_2 = F : X \rightrightarrows X$, то получается, например, следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $(X, \preceq)$ *- частично упорядоченное множество,* $x_0 \in X$, $F : X \rightrightarrows X$, *и* $\mathcal{C}(x_0; \{Id_X, F\}) \neq \emptyset$. *Пусть для каждой пары* $(S, f) \in \mathcal{C}(x_0; \{Id_X, F\})$ *существует нижняя граница* w *цепи* $f(S)$, *и существует* $z \in F(w)$, $z \preceq w$. *Тогда* $Fix(F) \neq \emptyset$.

Можно показать, что из Теоремы 2 следует результат Ячимского (Ya. Yachymski) [1, Глава 18, Теорема 3.13], являющийся обобщением теоремы Цермело. Поэтому Теоремы 1 и 2 следует рассматривать и как обобщения теорем Ячимского и Цермело, не вытекающих из [3–7].

Литература

1. *Kirk W.A., Sims B. (eds.)* Handbook of metric fixed point theory. Springer Science & Business Media, 2001.

2. *Smithson R.E.* Fixed points of order preserving

multifunctions. Proc.Amer.Math.Soc., 28(1971), 304–310.

3. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points of set-valued mapping in partially ordered spaces, Dokl. Math., 88 (3), 2013, 727–729.

4. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces. Topology and its Applications, 201:330–343, 2016.

5. *Fomenko T.N., Podoprikhin D.A.* Fixed points and coincidences of mappings of partially ordered sets, Journal of Fixed Point Theory and its Applications, 18 (2016), c.823–842.

6. *Подоприхин Д.А., Фоменко Т.Н.* О совпадениях семейств отображений упорядоченных множеств. // ДАН, **471**:1, 2016, с.16–18.

7. *Fomenko T.N., Podoprikhin D.A* Common fixed points and coincidences of mapping families on partially ordered sets. Topology and its Applications, 2017, vol.221, p.275-285.

8. *Фоменко Т.Н.* Неподвижные точки и совпадения в упорядоченных множествах // ДАН, 2017, **474**:5, с.550–552.

9. *А. Ю. Воловиков*, Точки совпадения отображений $\mathbb{Z}_p^n$ -пространств // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. том 69, выпуск 5, с. 53–106.

10. *Р. Демарр*, Общие неподвижные точки коммутирующих нерастягивающих отображений, Математика, 1965, том 9, выпуск 4, с. 139–141.

11. *R.N. Karasev, A.Yu. Volovikov* Knaster's problem for almost $(\mathbb{Z}_p)^k$-orbits // Topology and its Applications 157 (2010), p. 941 – 945.

12. *Бахтин И.А., Попова В.В.* Существование общих неподвижных точек монотонных не коммутирующих операторов. // Депонированная рукопись, 2299-В 92 Деп., РЖМв., 1992, ИБИ79. 27 с.

К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИКЕ ДВИЖЕНИЯ

ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

В.Л. Хацкевич
(Воронеж; *vlkhats@mail.ru*)

Пусть Ω – ограниченная область в R^n, $(n = 2,3)$ с липшицевой границей S, $T > 0$ – заданное число. Обозначим $Q_T := \Omega \times (0,T)$ и $S_T := S \times [0,T]$. Движение вязкой несжимаемой жидкости в Q_T описывается уравнениями Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - \mu \Delta u + \nabla p_* = f(x,t), \ divu = 0 \ (x,t \in Q_T); \quad (1)$$

$$u(x,t) = 0 \ (x,t \in S_T); \ u(x,0) = a(x) \ (x \in \bar{\Omega}). \quad (2)$$

Здесь векторная функция u и скалярная функция p_* – искомые скорость жидкости и давление. Векторные функции a и f – соответственно начальное условие на скорость жидкости и вектор плотности внешних сил заданы, μ – кинематический коэффициент вязкости.

В настоящем сообщении обсуждается вопрос обоснования поведения решений начально-краевых задач для нестационарных уравнений Навье-Стокса (1), (2) при стремлении коэффициента вязкости к нулю. Существует большое количество работ по асимптотике решений уравнений Навье-Стокса в случае малой вязкости. Однако, вопросы обоснования изучены до настоящего времени недостаточно.

В случае задачи Коши результат о предельном поведении решений нестационарной системы Навье-Стокса при исчезающей вязкости известен. Различные результаты в этом направлении для начально-краевых задач получили О.А. Ладыженская, Ж.Лионс, В.П. Маслов, Т.Като, Р. Темам, Ф.Л. Черноусько, С.Н. Алексеенко, Г.В. Сандраков и др.. Большинство результатов получено для линеаризованных задач, либо в случае двумерной области, либо для частных ситуаций.

Важную роль при исследовании предельного поведения решений задачи (1), (2) при $\mu \to 0$ играют решения вырожденной задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} = f(x,t) - gradp_0,\ divv = 0,\ x,t \in Q_T; \qquad (3)$$

$$v(x,0) = a(x)\ (x \in \bar{\Omega}),\ v \cdot \bar{n}|_{S_T} = 0. \qquad (4)$$

где $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе S.

Задача (3), (4) описывает движение идеальной жидкости. В силу наличия пространственного пограничного слоя трудно ожидать в общей ситуации хорошей сходимости при $\mu \to 0$ решений задачи (1), (2) к решению вырожденной задачи (3), (4).

Нами в работе [1] предложено рассматривать задачу (1) при условиях

$$u|_{t=0} = a(x),\ u|_{S_T} = v^0|_{S_T}, \qquad (5)$$

где v_0 – решение вырожденной задачи (3), (4).

Показано, что имеет место сходимость решений задачи (1), (5) к решению вырожденной задачи (3), (4) при $\mu \to 0$ в пространстве $L_2(Q_T)$.

Полученный в работе [1] результат подтверждает тот факт, что при малой вязкости решение задачи (1), (2) можно приближенно представить в виде суммы решения вырожденной задачи (3), (4) и некоторой погранслойной функции.

Литература

1. *Хацкевич В.Л.* Об асимптотике движения вязкой несжимаемой жидкости при малой вязкости. Дифференциальные уравнения, 2017, Т. 53, №6, С. 830 - 840

О ЗАДАЧЕ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. В. Чернова
(Белгород; *volga@mail.ru*)

В конечной области $D \in \mathbb{C}$, ограниченной гладким контуром Γ, рассматривается эллиптическая система первого порядка

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x} + a(z)U(z) + b(z)\overline{U(z)} = F(z),\ z \in D, \quad (1)$$

где постоянные матрицы $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{l \times l} \in C^\mu(D)$ и $l \times l-$ матричные коэффициенты $a, b \in C^\mu(D), 0 < \mu < 1$. Пусть l_1 (l_2) – число корней характеристического уравнения этой системы (взятое с учетом кратности) в верхней (нижней) полуплоскости, так что $l = l_1 + l_2$. Очевидно, эти числа совпадают с соответствующими числами собственных значений матрицы $A = -A_2^{-1}A_1$.

Для системы (1) ставится краевая задача Римана – Гильберта

$$\operatorname{Re} CU^+ = f, \quad (2)$$

где комплексная $l \times l-$матрица–функция $C \in C^\mu(\Gamma)$ и $+$ означает граничное значение функции U на Γ. Эта задача рассматривается в классе классических решений $U \in C^\mu(\overline{D}) \cap C^1(D)$ системы (1), для которых

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x} \in C^\mu(\overline{D}). \quad (3)$$

Теорема 1. *Пусть контур $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и матрица $C \in C^\nu(\Gamma)$, $\mu < \nu < 1$. Пусть обратимая матрица $B \in \mathbb{C}^{l \times l}$, записанная в блочном виде $(B_1, \overline{B}_2)$ с некоторыми $B_k \in \mathbb{C}^{l \times l_k}$ такова, что $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(J_1, \overline{J}_2)$, где собственные значения матриц $J_k \in \mathbb{C}^{l_k \times l_k}$, $k = 1, 2$, лежат в верхней полуплоскости.*

Тогда условие обратимости матрицы–функции G, записанной в блочном виде $(CB_1, \overline{C}B_2)$, *необходимо и достаточно для фредгольмовости задачи (1), (2) в рассматриваемом классе (3) и ее индекс дается формулой*

$$æ = -\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\pi}[\arg\det G]_{\Gamma_j} + (2-m)l,$$

где $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ *– простые контура, составляющие* Γ, *и приращение* $[\;]_{\Gamma_j}$ *вдоль* Γ_j *берется в направлении, оставляющем область* D *слева.*

Если дополнительно $C \in C^{1,\nu}(\Gamma)$, *то любое решение* $U \in C^{\mu}(\overline{D}) \cap C^1(D)$ *задачи из класса (3) с правой частью* $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ *в действительности принадлежит* $C^{1,\mu}(\overline{D})$.

В случае простого контура Γ задача (1)–(2) изучена в [1].

Литература

1. *Солдатов А.П., Чернова О.В.* Задача Римана- Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера, Научные ведомости БелГУ, 2009, № 13(68, вып. 17/2, С. 115- 121.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ

М.В. Шамолин

(Москва; *shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru*)

Работа посвящена новым случаям интегрируемости систем на касательном расслоении к конечномерной сфере. К такого рода задачам приводятся системы из динамики многомерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним [1]. Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций [2, 3].

Построение неконсервативного силового поля, действующего на закрепленное многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных закрепленных твердых тел, находящихся, в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил, поскольку ранее другими авторами использовалось поле сил лишь потенциальное.

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получены новые случаи интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов или узлов, предельных циклов).

Рассматриваемые ранее автором задачи из динамики n-мерного твердого тела в неконсервативном силовом поле породили системы на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. В работе будет тщательно разобран индуктивный переход от систем на касательных расслоениях к маломерным сферам до систем на касательных расслоениях к сферам произвольной размерности. При этом исследование начинается для систем при отсутствии силового поля и продолжается системами при наличии некоторых неконсервативных силовых полей (см. также [2, 3]).

В качестве примера рассмотрим системы вида

$$\dot{\alpha} = -z + bg(\alpha), \ \dot{z} = F(\alpha), \tag{1}$$

на двумерном цилиндре — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^1\{z;\alpha\}$ к одномерной сфере $\mathbf{S}^1\{\alpha:\ \alpha \bmod 2\pi\}$.

Функции $F(\alpha)$ и $g(\alpha)$ — периодические, достаточно гладкие и определяют силовое поле. Первое уравнение системы (1) задает координату z в касательном пространстве к сфере (является кинематическим соотношением).

Система (1) также может быть представлена в виде маятникового уравнения $\ddot{\alpha} - bg'(\alpha)\dot{\alpha} + F(\alpha) = 0$.

При $b = 0$ система (1) является консервативной и обладает одним (полным набором) гладким первым интегралом:

$$F_1(z;\alpha) = z^2 + z_2^2 + 2\int_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_1 = \mathrm{const}.$$

При $b > 0$ система (1) перестает быть консервативной и является динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [1–3].

Замечание. *В случае если $g(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система (1) описывает плоскопараллельное движение твердого тела во внешнем силовом поле $F(\alpha)$, а также под* *действием следящей силы [2]. В частности, если* $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $g(\alpha) = \sin\alpha$, *то система (1) описывает также плоский (цилиндрический) маятник, помещенный в поток набегающей среды [2], и обладает одним (полным набором) трансцендентным первым интегралом, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда функция имеет существенно особые точки, соответствующие имеющимся притягивающим или отталкивающим предельным множествам системы.*

Введем ограничение на силовое поле для полной интегрируемости системы.

Теорема. *Если существует такая постоянная* $\lambda \in \mathbf{R}$, *что выполнено равенство* $F(\alpha) = \lambda g(\alpha) g'(\alpha)$, *то при* $b \neq 0$ *система (1) обладает одним (полным набором) первым интегралом (вообще говоря, трансцендентным) следующего вида:*

$$\Phi_1\left(g(\alpha), \frac{z}{g(\alpha)}\right) = g(\alpha)\exp\left\{\int \frac{(u-b)du}{u^2 - bu + \lambda}\right\} =$$

$$= C_1 = const,\ u = \frac{z}{g(\alpha)}.$$

Если функция $g(\alpha)$ не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае (благодаря теореме) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде (см. также [1–3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15–01–00848–а).

Литература

1. *Шамолин М.В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фундам. и прикл. матем. – 2015. – Т. 20. – Вып. 4. – С. 3–231.

2. *Шамолин М.В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Часть 1 // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2017. – Т. 134. – С. 6–128.

3. *Шамолин М.В.* Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле. Часть 2 // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2017. – Т. 135. – С. 3–93.

ОБ ОДНОЗНАЧНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РОСТКОВ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Н.А. Шананин

(Москва; *nashananin@inbox.ru*)

Пусть Ω - открытое множество в $\mathcal{R}^n$, X_1 и X_2 - линейно независимые в каждой точке Ω векторные поля:

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(x)\partial_k, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, 2,$$

с вещественными коэффициентами $a_{j,k}(x) \in C^\infty(\Omega), j = 1, 2,$ $k = 1, 2, \ldots, n$, комплекснозначная функция $a(x) \in C(\Omega)$ и

$$P = X_1 + iX_2 + a(x), \quad i^2 = -1,$$

- линейный дифференциальный оператор. Пусть $u^j(x) \in L_2(U_j)$, где $j = 1, 2$, и U_j - две открытые окрестности точки

$x^0 \in \Omega$. Говорят, что ростки функций $u^1(x)$ и $u^2(x)$ равны в x^0 и пишут $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$, если существует открытая окрестность $V \subset U_1 \cap U_1$ этой точки, в которой $u^1(x) = u^2(x)$. Пусть Γ - непрерывная кривая в Ω. Пусть $f(x) \in L_{2,loc}(\Omega)$. Говорят, что функция $u(x)$, определенная в некоторой окрестности U кривой Γ, удовлетворяет вдоль Γ уравнению $Pu = f$, если выражение $Pu(x)$ корректно определено в смысле теории обобщенных функций, $Pu(x) \in L_2(U)$ и $Pu_x \cong f_x$ для всех $x \in \Gamma$. Будем говорить, что ростки решений дифференциального уравнения $Pu = f$ *однозначно продолжаются вдоль кривой* Γ, если для любых двух решений $u^1(x)$ и $u^2(x)$ уравнения вдоль кривой Γ из равенства $u^1_{x^*} \cong u^2_{x^*}$, выполненного в некоторой точке $x^* \in \Gamma$, следует, что $u^1_x \cong u^2_x$ для всех $x \in \Gamma$.

Отображение $x \to \mathcal{L}_P(x)$, ставящее в соответствие точке $x \in \Omega$ линейное подпространство, натянутое на векторы $X_1(x)$ и $X_2(x)$ в касательном пространстве $T_x(\Omega)$, определяет двумерное распределение (дифференциальную систему) на Ω. Для того чтобы решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами однозначно продолжались вдоль непрерывно дифференцируемой кривой необходимо, чтобы касательный вектор в каждой точке кривой был бы ортогонален характеристическим векторам оператора $P(D)$. Для уравнений первого порядка это условие ортогональности эквивалентно принадлежности касательного вектора распределению $\mathcal{L}_P$. Непрерывно дифференцируемую кривую называют *интегральной* для распределения $\mathcal{L}_P$, если в каждой точке кривой касательный к ней вектор принадлежит подпространству $\mathcal{L}_P(x)$. Обозначим через $[X_1, X_2](x)$ коммутатор векторных полей X_1 и X_2 в точке x.

Теорема 1. *Для того чтобы любая интегральная кривая распределения $\mathcal{L}_P$ обладала свойством однозначного* *продолжения ростков решений любого дифференциального оператора со старшей частью $X_1 + iX_2$ вдоль кривой необходимо и достаточно, чтобы векторные поля X_1 и X_2 инволютивны:*

$$[X_1, X_2](x) \in \mathcal{L}_P(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{1}$$

В силу Теоремы Фробениуса при выполнении условия (1) через каждую точку x множества Ω проходит одно и только одно максимальное интегральное многообразие $\Omega_{x,\mathcal{L}_P}$ распределения $\mathcal{L}_P$. Вследствие единственности включение $y \in \Omega_{x,\mathcal{L}_P}$ влечет равенство $\Omega_{y,\mathcal{L}_P} = \Omega_{x,\mathcal{L}_P}$. Непрерывно дифференцируемая регулярная кривая является интегральной для распределения $\mathcal{L}_P$ тогда и только тогда, когда она содержится в одном из максимальных интегральных многообразий распределения $\mathcal{L}_P$.

Теорема 2. *Предположим, что векторные поля X_1 и X_2 инволютивны, функции $u^1(x)$, $u^2(x)$, $Pu^1(x)$ и $Pu^2(x)$ $\in L_{2,loc}(\Omega)$ и $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ в точке $x^0 \in \Omega$. Тогда $u^1_x \cong u^2_x$ во всех точках x линейно связной компоненты множества*

$$\Omega_{x^0,\mathcal{L}_P} \cap \{x \,|\, Pu^1_x \cong Pu^2_x\},$$

содержащей точку x^0.

Доказательство приведенных теорем можно найти в статье [1].

Литература

1. *Шананин Н.А.* Об однозначном продолжении ростков решений дифференциальных уравнений уравнений первого порядка вдоль кривых. Матем. заметки, 102:6, 2017, 890-903.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ,

ОПРЕДЕЛЯЕМОГО НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.Н. Шелковой
(Воронеж; *shelkovoj.aleksandr@mail.ru*)

Пусть $L_2[0,1]$ - гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида
$(x,y) = \int\limits_0^1 x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau$. Через $W_2^2[0,1]$ обозначим пространство Соболева $\{x \in L_2[0,1] : x'$ абсолютно непрерывна, $x'' \in L_2[0,1]\}$. Рассматривается интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, порождаемый интегро-дифференциальным выражением вида

$$(\mathcal{L}x)(t) = -\ddot{x}(t) - [\dot{x}(0)a_0(t) - \dot{x}(1)a_1(t)] - \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds \quad (1)$$

с вырожденным ядром $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(t)q_i(s),\ p_i, q_i \in L_2[0,1]$, с областью определения $D(\mathcal{L}) = \{x \in W_2^2[0,1],\ x(0) = x(1) = 0\}$ и краевыми условиями

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (2)$$

Такого класса оператор возникает при переходе к сопряженному при исследовании оператора, действующего в $L_2[0,1]$, задаваемого выражением

$$(\mathcal{L}y)(t) = -\ddot{y}(t) - \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{k} p_i(t)q_i(s)y(s)ds$$

и нелокальными краевыми условиями

$$y(0) = \int\limits_0^1 a_0(t)y(t)dt,\ y(1) = \int\limits_0^1 a_1(t)y(t)dt.$$

Здесь a_0 и a_1 - функции из $L_2[0,1]$.

Для исследования спектра оператора $\mathcal{L}$ рассмотрим сопряженный ему оператор $\mathcal{L}^*$ (см. [3]), который задается интегро-дифференциальным выражением

$$(\mathcal{L}^* x)(t) = -\ddot{x}(t) - [\dot{x}(0)a_0(t) - \dot{x}(1)a_1(t)] - \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds \tag{3}$$

и краевыми условиями (2).

Методом исследования оператора $\mathcal{L}^*$ является метод подобных операторов, рассматриваемый в работах [1-6]. Представим его в виде

$$\mathcal{L}^* x = Ax - B_1 x - B_2 x. \tag{4}$$

Оператор A порождается дифференциальным выражением $Ax = -\ddot{x}$, $x \in D(A)$, $D(A) = \{x \in L_2[0,1] : \ x, \dot{x} \in C[0,1], \ \ddot{x} \in L_2[0,1], \ x(0) = x(1) = 0\}$. Он является самосопряженным оператором с дискретным спектром, собственные значения которого $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$, являются простыми, а соответствующие собственные функции $e_n(t) = \sqrt{2}\sin \pi n t$, $n \geq 1$, образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ (см., например, [1]). Операторы B_1 и B_2 на области определения $D(A)$ задаются соотношениями

$$(B_1 x)(t) = \dot{x}(0)a_0(t) - \dot{x}(1)a_1(t); \ (B_2 x)(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

$x \in d(A)$, $t \in [0,1]$.

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора (4), мы получим следующие результаты.

Теорема. *Пусть для рассматриваемых функций* $p_i, q_i, a_0, a_1 \in L_2[0,1]$, *для последовательностей величин* γ_1 *и* γ_2, *определенных формулами*

$$\gamma_1(n) = \frac{1}{\pi^2}\Bigg(\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \Bigg\{ n^2 \Bigg[\pi(|a_{0m}^{\sin}| + |a_{1m}^{\sin}|) + \frac{1}{8}\sup_j \Bigg| \sum_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} \cdot p_{im}^{\sin} \Bigg| \Bigg]^2 +$$

$$+ m^2 \Bigg[\pi(|a_{0n}^{\sin}| + |a_{1n}^{\sin}|) + \frac{1}{8}\sup_j \Bigg| \sum_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} \cdot p_{in}^{\sin} \Bigg| \Bigg]^2 \Bigg\} \Bigg/ |n^2 - m^2|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\gamma_2(n) = \frac{1}{\pi^2}\max\Bigg\{ \frac{n\left[\pi(|a_{0n}^{\sin}|+|a_{1n}^{\sin}|)+\frac{1}{8}\sup\limits_j \left|\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{q_{ij}^{\sin}}{j}\cdot p_{in}^{\sin}\right|\right]}{2n-1},$$

$$\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{m\left[\pi(|a_{0m}^{\sin}| + |a_{1m}^{\sin}|) + \frac{1}{8}\sup\limits_j \left| \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j}\cdot p_{im}^{\sin}\right|\right]}{|n^2 - m^2|} \Bigg\},$$

где $a_{0j}^{\sin} = 2\int\limits_0^1 a_0(t)\sin \pi j t dt$, $a_{1j}^{\sin} = 2\int\limits_0^1 a_1(t)\sin\pi j t dt$,

$p_{ij}^{\sin} = 2\int\limits_0^1 p_i(t)\sin\pi j t dt$, $q_{ij}^{\sin} = 2\int\limits_0^1 q_i(s)\sin\pi j s ds$, $j = 1, 2, \ldots$, *- коэффициенты разложения функций* a_0, a_1, p_i, q_i, $i = \overline{1,k}$, *в ряд Фурье по синусам, выполнены условия:* $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_1(n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_2(n) = 0$. *Тогда спектр* $\sigma(A-B)$ *оператора* $A - B (B = B_1 + B_2)$ *представим в виде* $\sigma(A-B) = \widetilde{\sigma}_m \bigcup \left(\bigcup\limits_{n\geq m+1} \widetilde{\sigma}_n \right)$, *где* $\widetilde{\sigma}_n$, $n \geq m+1$, *— одноточечные множества, а* $\widetilde{\sigma}_m$ *— конечное множество с числом точек, не превосходящим* m. *Для собственных значений* $\widetilde{\lambda}_n$ *из* $\widetilde{\sigma}_n$

имеет место оценка:

$$\Bigg|\widetilde{\lambda}_n - \pi^2 n^2 - \pi n(a_{0n}^{\sin} + (-1)^{n+1} a_{1n}^{\sin}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{in}^{\sin} +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \Bigg(\Bigg[\pi n(a_{0m}^{\sin} + (-1)^{n+1} a_{1m}^{\sin}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{im}^{\sin}\Bigg]\cdot$$

$$\cdot\Bigg[\pi m(a_{0n}^{\sin} + (-1)^{m+1} a_{1n}^{\sin}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} q_{im}^{\sin} p_{in}^{\sin}\Bigg]\Bigg/(n^2 - m^2)\Bigg)\Bigg| \leq$$

$$\leq \text{const } \cdot n \cdot \left(\pi(|a_{0n}^{\sin}| + |a_{1n}^{\sin}|) + \frac{1}{8}\sup_j \left|\sum_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} p_{in}^{\sin}\right|\right)\cdot \gamma_2(n).$$

Для собственных функций $\widetilde{e}_n$ оператора (4) справедлива оценка:

$$\Bigg(\int_0^1 \Bigg|\widetilde{e}_n(t) - \sqrt{2}\sin\pi nt +$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\pi n(a_{0m}^{\sin} + (-1)^{n+1} a_{1m}^{\sin}) + \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k} q_{in}^{\sin} p_{im}^{\sin}}{n^2 - m^2}\sin\pi mt\Bigg|^2 dt\Bigg)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \text{const } \cdot n \cdot \left(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{\left[\pi(|a_{0n}^{\sin}| + |a_{1n}^{\sin}|) + \frac{1}{8}\sup\limits_j \left|\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{q_{ij}^{\sin}}{j} p_{in}^{\sin}\right|\right]^2}{|n^2 - m^2|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Литература

1. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. 165 с.

2. *Баскаков А.Г.* Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А.Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1986. Т. 50, № 3. С. 435-1457.

3. *Баскаков А.Г.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями / А.Г. Баскаков, Т.К. Кацаран // Дифференциальные уравнения, 1998. Т. 24, № 8. С. 1424-1433.

4. *Ульянова Е.Л.* О некоторых спектральных свойствах одного класса дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями / Е.Л. Ульянова, А.Н. Шелковой // Вестник ВГУ. Сер. физика, математика, 2002. № 2. С. 106-110.

5. *Шелковой А.Н.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2004. 144 с.

6. *Шелковой А.Н.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями / А.Н. Шелковой // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика, 2016. № 13. С. 72-80.

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.В. Шеметова
(Иркутск; *valentina501@mail.ru*)

Пусть E — банахово пространство, u и f — неизвестная и заданная функции со значениями в E. Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение вида

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t-h) + f(t),\ t > 0. \tag{1}$$

Здесь A и B — линейные непрерывные операторы из E в E, $h > 0$. Для уравнения (1) зададим начальные условия

$$u(t) = \varphi(t),\ -h \le t < 0,\ \ u(0) = u_0, \tag{2}$$

где функция $\varphi(t) \in C([-h, 0]\,;\, E)$ и вектор $u_0 \in E$ известны. Под *классическим* решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $u(t) \in C(t \ge -h;\, E) \cap C^1(t > 0;\, E)$, обращающую в тождество уравнение (1) и удовлетворяющую начальным условиям (2). Для существования классического решения необходимо $u_0 = \varphi(0)$, т. е. $u(t) = \varphi(t)$, $-h \le t \le 0$, и задача (1), (2) становится обычной задачей с начальной функцией.

Проблема однозначной разрешимости рассматриваемой начальной задачи (1), (2) изучается с помощью аппарата обобщенных функций Соболева–Шварца со значениями в бесконечномерном банаховом пространстве [1]. Концепция фундаментальной оператор-функции [1] линейного интегро-дифференциального оператора в банаховых пространствах распространяется на класс дифференциальных операторов уравнения (1) с отклоняющимся аргументом.

Пусть u — классическое решение, продолжим его нулем при $t < -h$ следующим образом:

$$\tilde{u}(t) = \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + u(t)\theta(t),$$

где θ — *функция Хевисайда.* В классе $K'_{+}(E)$ распределений с ограниченным слева носителем начальная задача (1), (2) принимает вид сверточного уравнения

$$\big(\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)\big) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t) \tag{3}$$

с правой частью

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) - A\varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) +$$

$$\delta'(t) * \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + u_0\delta(t),$$

Здесь и далее δ — *дельта-функция Дирака.* Единственным решением уравнения (3) в $K'_+(E)$ (*обобщенным* решением задачи (1), (2)) является распределение $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t)$, где $\mathcal{E}$ — обобщенная оператор-функция такая, что

$$\forall\, v(t) \in K'_+(E) \quad \big(\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)\big) * \mathcal{E}(t) * v(t) = v(t),$$

$$\forall\, v(t) \in K'_+(E) \quad \mathcal{E}(t) * \big(\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h)\big) * v(t) = v(t),$$

называемая *фундаментальным решением* функционально-дифференциального оператора $(\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h))$.

Теорема 1. *Пусть композиция операторов A, $B \in \mathcal{L}(E)$ коммутативна, тогда оператор $(\mathbb{I}\delta'(t) - A\delta(t) - B\delta(t-h))$ имеет фундаментальное решение вида*

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_{k-1}\big(t-(k-1)h\big)\theta\big(t-(k-1)h\big),$$

где оператор-функции $U_k(t)$ задаются следующим образом:

$$U_k(t) = \frac{t^k}{k!} e^{At} B^k.$$

При выполнении условий теоремы 1 начальная задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение вида

$$\tilde{u}(t) = \varphi(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + \Big(e^{At}\varphi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)ds\Big)\theta(t) +$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \Bigg\{ \Bigg[U_k(t-kh)u_0 + \int_{(k-1)h}^{kh} U_{k-1}(t-s)B\varphi(s-kh)ds +$$

$$\int_{kh}^{t} U_k(t-s)f(s-kh)ds \Bigg] \theta(t-kh) +$$

$$\int\limits_{(k-1)h}^{t} U_{k-1}(t-s)B\varphi(s-kh)ds\big(\theta(t-(k-1)h)-\theta(t-kh)\big)\Bigg\}.$$

которое является регулярным распределением и порождено функцией $u : [-h; +\infty) \to E$, заданной кусочно на полуинтервалах $[(n-1)h, nh)$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. В предположениях $f(t) \in C([0, +\infty); E)$ и $u_0 = \varphi(0)$ эта функция является классическим решением рассматриваемой задачи. В точках $t = nh$, $n \in \mathbb{N}$, порядок гладкости решения равен n. Этот факт согласуется с известными сведениями [2] о скалярных ($E = \mathbb{R}$) уравнениях с отклоняющимся аргументом.

Если $u_0 \neq \varphi(0)$, то в точке $t = 0$ функция $u = u(t)$ имеет разрыв, а в точках $t = nh$, $n \in \mathbb{N}$, является $n-1$ раз сильно непрерывно дифференцируемой. В случае, когда оператор B необратим, и $\big(u_0-\varphi(0)\big) \in N(B)$, разрывное при $t = 0$ решение задачи (1), (2) в точках $t = nh$, $n \in \mathbb{N}$, имеет порядок гладкости n, как у классического решения данной задачи. Таким образом, наличие вырожденного оператора при слагаемом, содержащем отклонение аргумента, может улучшить свойства решения.

Литература

1. *Sidorov N. et al.* Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 568 p.

2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.

PALEY PROBLEM FOR PLURISUBHARMONIC FUNCTIONS

B.N. Khabibullin, R.A. Baladai
(Ufa; *khabib-bulat@mail.ru*)

For function $u\colon \mathbb{C}^n \to [-\infty, +\infty)$ we introduce the notation $u^+ := \max\{0, u\}$, $M(r; u) := \max\bigl\{u(z)\colon |z| = r\bigr\}$,

$$T(r; u) := \frac{1}{|S^{2n-1}|} \int_{S^{2n-1}} u^+(rz)\ \mathrm{d}s(z),$$

where S^{2n-1} is the unit sphere in $\mathbb{C}^n$ with the area $|S^{2n-1}|$, $\mathrm{d}s$ is the area element on S^{2n-1}, i. e. $T(r, u)$ is the Nevalinna characteristic of u. Denote by $\mathrm{psh}_{\lambda}(\mathbb{C}^n)$ the class of all plurisubharmonic functions $u \not\equiv -\infty$ on $\mathbb{C}^n$ of finite lower order

$$\lambda := \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log T(r; u)}{\log r} < +\infty.$$

Paley Problem (in 1932 for $n = 1$ and entire functions; here for $n \geq 1$). *Let $\lambda \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Find the value the Paley constant*

$$\mathcal{P}(n, \lambda) := \sup \left\{ \liminf_{r\to+\infty} \frac{M(r; u)}{T(r; u)} : \quad u \in \mathrm{psh}_{\lambda}(\mathbb{C}^n) \right\}.$$

Previous results (see our survey [1]):

1. N. V. Govorov, V. P. Petrenko, 1967–68; M. R. Essén, 1975,

$$\mathcal{P}(1, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda} & \text{for } 0 \leq \lambda < \dfrac{1}{2}, \\ \pi\lambda & \text{for } \lambda \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Meromorphic (in $\mathbb{C}$) and subharmonic (in $\mathbb{R}^m$) versions of the Paley Problem have been studied (B. Dahlberg, M. L. Sodin, A. A. Kondratyuk, W. Hayman and many others).

3. B. N. Khabibullin, 1999 (see [1]–[3]),

$$\mathcal{P}(n, \lambda) = \mathcal{P}(1, \lambda) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\lambda}{2k}\right) \quad \forall \lambda \in [0, 1], n > 1, \qquad (1)$$

and for all $\lambda > 1, n > 1$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{\lambda}{2k}\right) \le \frac{\mathcal{P}(n,\lambda)}{\mathcal{P}(1,\lambda)} \le e^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{\lambda}{2k}\right). \tag{2}$$

In 2002, [1], B. N. Khabibullin formulated
Conjecture. *The equality* (1) *is also true for all* $\lambda > 1, n > 1$.
4. B. N. Khabibullin and R. A. Baladai, 2010, [4]–[5]. This Conjecture is given in three equivalent elementary integral forms. Let us discuss one of these forms.

Let $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$, $\alpha > 1/2$. Denote by $\mathrm{incr}^+(\mathbb{R}^+)$ the class of all nonnegative increasing functions $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. We set

$$C_{\mathrm{Kh}}(n,\alpha) := \sup\left\{\int_0^\infty \frac{h(t)}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^{2\alpha}} : \int_0^t \frac{h(x)}{x}\,(t-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x \right.$$
$$\left. \le t^{\alpha+n-1} \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}^+,\ h \in \mathrm{incr}^+(\mathbb{R}^+)\right\}.$$

Designation C_{Kh} was introduced by R. A. Sharipov and A. Bërdëllima later. The results of B. N. Khabibullin and R. A. Baladai mean that $\boxed{\mathcal{P}(n,\lambda) = 2\lambda\, C_{\mathrm{Kh}}(n, 2\lambda)}$. So, if

$$C_{\mathrm{Kh}}(n,\alpha) > \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right), \tag{3}$$

then our Conjecture is false for such n and $\lambda = 2\alpha$.
5. In 2010, [6]–[7], R. A. Sharipov proved (3) for $n = 2$ and $\alpha = 2$. He uses explicit spline functions. This shows that our Conjecture is false for $n = 2, \lambda = 4$.
6. In 2015–2017, [8]–[10], A. Bërdëllima proved (3) for all $n \ge 2$ for each $\alpha > 1/2$. A. Bërdëllima substantially develops the counterexample of R. A. Sharipov.

Thus, our Conjecture is false for all $n \ge 2$ for each $\lambda > 1$. We consider some upper estimates for $C_{\mathrm{Kh}}(n,\alpha)$. This reduces the upper bound in (2).

Supported by RFBR grant No. 16-01-00024.

Литература

1. *Khabibullin B. N.* The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results // Mathematical Physics, Analysis, and Geometry (Ukraine), 9:2 (2002), 146-167.

2. *Khabibullin B. N.* Paley problem for plurisubharmonic functions of finite lower order // Sb. Math., 190:2 (1999), 145–157; Eng. transl. 309–321.

3. *Khabibullin B. N.* The Paley problem for functions that are meromorphic in $\mathbb{C}^n$ // Dokl. Math., 51:3 (1995), 385–387.

4. *Khabibullin B. N.* A conjecture on some estimates for integrals // e-print arXiv:1005.3913 in http://arXiv.org.

5. *Baladai R. A., Khabibullin B. N.* Three equivalent hypotheses on estimation of integrals // Ufimsk. Mat. Zh., 2:3 (2010), 31-38.

6. *Sharipov R. A.* A note on Khabibullin's conjecture for integral inequalities // e-print arXiv:1008.0376 in http://arXiv.org.

7. *Sharipov R. A.* A counterexample to Khabibullin's conjecture for integral inequalities // Ufimsk. Mat. Zh., 2:4 (2010), 99–107.

8. *Bërdëllima A.* About a Conjecture Regarding Plurisubharmonic Functions // Ufa Math. Journal, 7:4 (2015), 154-165.

9. *Bërdëllima A.* A note on a conjecture of Khabibullin // Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, 2017 (to appear).

10. *Bërdëllima A.* On a conjecture of Khabibullin about a pair of integral inequalities //Ufa Math. Journal, 2017 (to appear).

Оглавление