

**Невыпуклые топологические бильярды как  
модели интегрируемых геодезических потоков на  
ориентируемых поверхностях.**

*А. Т. Фоменко*

(Москва; *atfomenko@mail.ru* )

*В. В. Ведюшкина*

(Москва; *arinir@yandex.ru* )

Две интегрируемые системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой системы. Если торы Лиувилля на всюду плотном множестве являются замыканиями нерезонансных траекторий (как в большинстве невырожденных классических случаев интегрируемости), то лиувиллева эквивалентность систем означает, что сравниваемые системы имеют “одинаковые” замыкания решений (т.е. интегральных траекторий) на трёхмерных уровнях постоянной энергии. Топологический тип слоения Лиувилля полностью определяется инвариантом Фоменко–Цишанга, который является некоторым графом с числовыми метками (см. подробнее книгу Болсинова А.В., Фоменко А.Т. [1], и работу Фоменко А.Т., Цишанга Х. [2]).

Пусть дана замкнутая компактная двумерная поверхность. Рассмотрим геодезический поток на ней. Оказывается, такой геодезический поток в аналитическом случае является интегрируемым в том только случае когда поверхность гомеоморфна сфере, тору, проективной плоскости или бутылке Клейна (Козлов В.В. [3]).

Далее, для линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков были вычислены инварианты Фоменко–Цишанга (см. работы [4-6]). Оказалось, что схожие инварианты возникают для других интегрируемых систем – топологических бильярдов.

Пусть область  $\Omega$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  такова, что граница области является кусочно-гладкой кривой, причем в точках излома этой кривой углы равны  $\frac{\pi}{2}$ . Рассмотрим билиард, описывающий движение (материальной) точки внутри области  $\Omega$  с естественным отражением на границе  $P = \partial\Omega$ . Будем считать, что в точках, где граница  $P$  не гладкая (тогда, как было сказано, угол излома обязательно равен  $\frac{\pi}{2}$ ) траектории системы можно доопределить по непрерывности: а именно, попав в вершину угла границы, материальная точка, не теряя скорости, отразится назад по той же траектории. Фиксируем декартовы координаты  $(x, y)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Рассмотрим семейство софокусных квадрик – кривых, задаваемых соотношением

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda), \lambda \leq a.$$

Как заметили В.В.Козлов и Д.В.Трещёв (см. [7]) касательные в любой точке билиардной траектории внутри области  $\Omega$ , ограниченной дугами софокусных квадрик, касаются эллипса или гиперболы, софокусных с семейством квадрик, образующих границу  $P$  билиарда  $\Omega$ . Относительно стандартной симплектической структуры на плоскости, функции  $|v|^2$  – квадрат модуля вектора скорости – и  $\Lambda$  – параметр софокусной квадрики коммутируют. Так как они сохраняются вдоль траекторий билиарда, значит в пределе они коммутируют и на границе билиардной области. Таким образом, данная система имеет два независимых интеграла – квадрат модуля вектора скорости (или энергия) и параметр софокусной квадрики, обозначаемый через  $\Lambda$ . Рассмотрим следующие топологические билиарды, полученные склейкой из плоских билиардов вдоль сегментов границ (обозначения и описание областей см. [8]):  $\Delta_\alpha(2(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 4mnB_0 + A_1))$  (гомеоморфен сфере) и  $\Delta_{\alpha eh}(2n\widetilde{B_0})$  (гомеоморфен тору), а также следующий топологический

бильярд с четырьмя коническими точками  $\Delta_{\beta eh}(2n\widetilde{B}_0)$  (см. рис. 1). Оказывается, при выборе подходящих областей сложение Лиувилля соответствующих изоэнергетической поверхности описывается той же молекулой, что и квадратично интегрируемый геодезический поток сферы (для бильярдов, гомеоморфных сфере) и тора (для бильярдов, склеенных из  $B_0$ ) с глобально лиувиллевой метрикой или линейно интегрируемым геодезическим потоком. Таким образом удалось установить лиувиллеву эквивалентность интегрируемых геодезических потоков на ориентируемых поверхностях топологическим бильярдам с помощью сравнения меченых молекул. Тем самым, образно говоря, топологические интегрируемые бильярды “наглядно моделируют” все линейно и квадратично интегрируемые геодезические потоки на двумерных ориентируемых поверхностях. Напомним, что аналитический геодезический поток на двумерной ориентируемой замкнутой поверхности интегрируем в том и только в том случае, когда поверхность гомеоморфна сфере или тору. При этом, хорошо известно описание римановых метрик, геодезические потоки которых допускают линейные или квадратичные по импульсам интегралы. См. подробный обзор, например, в [1].

### **Теорема.**

*а) Квадратично-интегрируемый геодезический поток двумерной сферы на изоэнергетической трехмерной поверхности лиувиллево эквивалентен топологическому двумерному интегрируемому бильярду  $\Delta_\alpha(2(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 4\pi nB_0 + A_1))$  (см. рис. 1).*

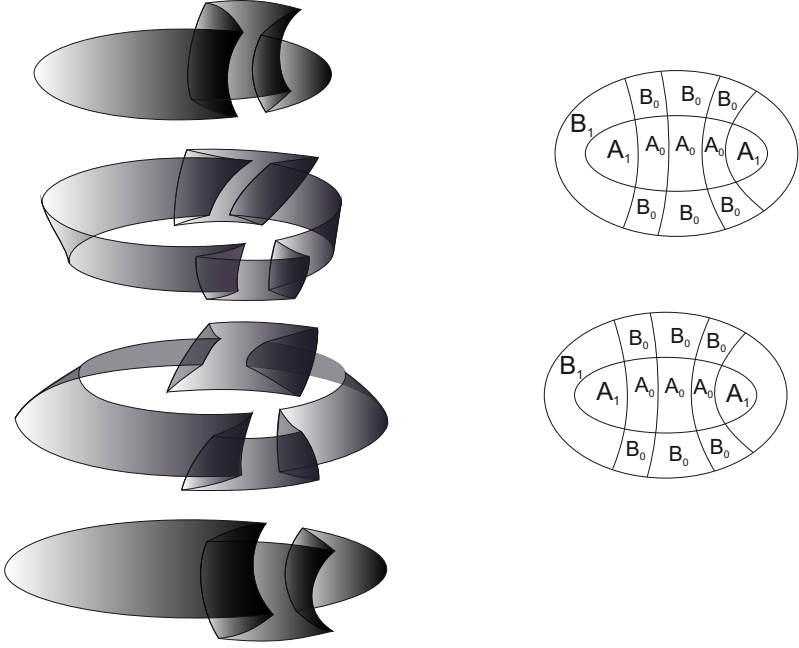
*б) Геодезический поток двумерного тора с глобально лиувиллевой метрикой (то есть допускающий квадратичный интеграл) на изоэнергетической трехмерной поверхности лиувиллево эквивалентен топологическому двумерному интегрируемому бильярду  $\Delta_{\alpha eh}(2n\widetilde{B}_0)$  (см. рис. 1).*

в) Геодезический линейно-интегрируемый поток двумерного тора на трехмерной изоэнергетической поверхности Лиувиллево эквивалентен топологическому двумерному интегрируемому бильярду  $\Delta_{beh}(\widetilde{2nB_0})$  (см. рис. 1).

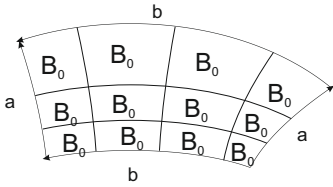
### Литература

1. Болсинов А.В, Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, Т.1,2, Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999
2. Фоменко А.Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем, Изв. АН СССР 52:2(1988), 378–407
3. Козлов В.В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем, ДАН СССР, 249:6 (1979), 1299-1302
4. Селиванова Е.Н. Классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической эквивалентности, Матем. сб., 183:4 (1992), 69-86
5. Матвеев В.С. Особенности отображения момента и топологическое строение интегрируемых геодезических потоков. Диссертация на осискание ученой степени к.ф.-м.н., Москва, МГУ, мех-матем. ф-т, 1996
6. Нгуен Т.З., Полякова Л.С., Селиванова Е.Н. Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков с дополнительным квадратичным или линейным по импульсам интегралом на двумерных ориентируемых римановых многообразиях, Функциональный анализ, 27:3 (1993), 42-56
7. Козлов В.В., Трещёв Д.В. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991
8. Ведюшкина В.В. Слоение Лиувилля невыпуклых топологических бильярдов, ДАН, 478:1(2018)

$$\Delta_{\alpha}(2(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 4mnB_0 + A_1))$$



$$\Delta_{\alpha eh}(2n\widetilde{B_0})$$



$$\Delta_{\beta eh}(2n\widetilde{B_0})$$

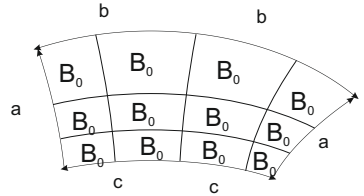


Рис. 1: Топологические биллиарды:  $\Delta_{\alpha}(2(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 4mnB_0 + A_1))$  и  $\Delta_{\beta eh}(2n\widetilde{B_0})$  (гомеоморфные сфере) и  $\Delta_{\alpha eh}(2n\widetilde{B_0})$  (гомеоморфен тору).