ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Материалы работы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна — 2018

Воронеж 2018

УДК 517.5 517.9

Напечатано по решению Ученого совета математического факультета

Издано при поддержке гранта РФФИ № 12-01-06000-моб_г

Материалы работы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2018». Воронеж: ВГУ, 2018 - с.

В сборнике представлены статьи участников международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна 2018», содержащие новые результаты по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, краевым задачам математической физики и другим разделам современной математики.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов.

ПОВЕДЕНИЕ В ГРАНИЧНОЙ ТОЧКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ P–ЛАПЛАСИАНА, РАВНОМЕРНО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ЧАСТИ ОБЛАСТИ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ[1]

Ю.А. Алхутов, А.С. Хрипунова Балджы
(Россия, г.Владимир, ВлГУ им. А.Г. и Н.Г. Столетовых;
Германия, Билефельдский Университет;
yurij-alkhutov@yandex.ru, akhripun@math.uni-bielefeld.de)

Рассмотрим в ограниченной области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$, уравнение

$$Lu = \operatorname{div}\left(\omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0,\ p = const > 1 \qquad (1)$$

с положительным весом ω_ε, содержащим малый параметр, который сейчас определим. Предполагается, что область D разделена гиперплоскостью Σ на части $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ и

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon, \text{ если } x \in D^{(1)} \\ 1, \text{ если } x \in D^{(2)} \end{cases},\ \varepsilon \in (0,1].$$

Ниже $W_p^1(D)$ означает соболевское пространство функций, которые L_p-суммиремы в D вместе со всеми обобщенными производными первого порядка, а $\overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$ - замыкание финитных, бесконечно дифференцируемых в D функций $C_0^\infty(D)$ по норме $W_p^1(D)$. Скажем, что функция $u \in W_p^1(D)$ является решением уравнения (1) в D, если интегральное тождество

$$\int\limits_D \omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = 0 \qquad (2)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 19-01-00184-а.

выполнено для любой пробной функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D)$.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u \in W_p^1(D), \quad h \in W_p^1(D), \quad (u - h) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D).$$

Решение данной задачи совпадает с минимизантом решения вариационной задачи

$$\min_{w \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D)} F(w + h), \quad F(u) = \int\limits_D \omega_\varepsilon(x) |\nabla u|^p \, dx.$$

Настоящее сообщение посвящено граничным свойствам решения задачи Дирихле

$$Lu_f = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u_f|_{\partial D} = f \tag{3}$$

с непрерывной на ∂D функцией f.

Решение задачи (3) определяется следующим образом. Продолжим граничную функцию f по непрерывности на $\overline{D}$, сохранив за продолжением то же обозначение. Возьмём последовательность бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций f_k, которые равномерно на $\overline{D}$ сходятся к f. Решим задачи Дирихле

$$Lu_k = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u_k \in W_p^1(D), \quad (u_k - f_k) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(D).$$

Последовательность u_k сходится равномерно на компактных подмножествах D к функции u, принадлежащей пространству $W_p^1(D')$ в произвольной подобласти $D' \Subset D$, которая удовлетворяет интегральному тождеству (2) на пробных функциях $\varphi \in W_p^1(D)$ с компактным носителем в D. Предельная функция не зависит от способов продолжения и аппроксимации граничной функции f и называется обобщенным решением задачи Дирихле (3).

Граничная точка $x_0 \in \partial D$ называется регулярной, если

$$\lim_{D \ni x \to x_0} u_f(x) = f(x_0)$$

для любой непрерывной на ∂D функции f.

Далее нам потребуется понятие ёмкости. Ёмкостью компакта $K \subset B$ относительно относительно шара $B \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$C_p(K,\, B) = \inf \left\{ \int\limits_B |\nabla \varphi|^p \, dx : \quad \varphi \in C_0^\infty(B), \quad \varphi \geq 1 \quad \text{на} \quad K \right\}.$$

Критерий регулярности граничной точки состоит в выполнении равенства

$$\int\limits_0 \left(\frac{C_p \left(\overline{B_r^{x_0}} \setminus D,\, B_{2r}^{x_0}) \right)}{r^{n-p}} \right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dr}{r} = \infty, \qquad (4)$$

где $B_r^{x_0}$ —открытый шар с центром в точке x_0 радиуса r, а $\overline{B_r^{x_0}}$ — его замыкание.

Для уравнения Лапласа это утверждение является классическим результатом Н. Винера [1]. В случае линейных уравнений, когда $p = 2$, критерий получен в [2]. Если $p \neq 2$, то достаточное условие регулярности граничной точки найдено В.Г. Мазьёй в [3]. Позже в работе [4] было показано, что полученное в [3] достаточное условие регулярности является и необходимым.

Для уравнения вида (1), не содержащего малый параметр ε, в статье [3] получена оценка модуля непрерывности решений задачи Дирихле в регулярной граничной точке. Настоящее сообщение посвящено оценке модуля непрерывности решений задачи Дирихле (3) для уравнения (1) с постоянными, не зависящими от ε. Предполагается, что в окрестности граничной точки границы $x_0 \in \partial D \cap \Sigma$ дополнение области D симметрично относительно гиперплоскости Σ.

Прежде чем сформулировать полученный результат, положим

$$\gamma(r) = \left(\frac{C_p\left(\overline{B_r^{x_0}} \setminus D,\ B_{2r}^{x_0})\right)}{r^{n-p}} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Теорема. *Если выполнено условие (4), то при достаточно малом ρ и $r \leq \rho/4$ для решения u_f задачи Дирихле (3) справедливы оценки*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D\cap B_r^{x_0}} |u_f - f(x_0)| \leq$$

$$\leq C\left(\operatorname*{osc}_{\partial D\cap B_\rho^{x_0}} f + \operatorname*{osc}_{\partial D} f \cdot \exp\left(-k \int\limits_r^\rho \gamma(t) t^{-1}\, dt \right)\right),\ \textit{если } p \leq n,$$

и

$$\operatorname*{ess\,sup}_{D\cap B_r^{x_0}} |u_f - f(x_0)| \leq$$

$$\leq C\left(\operatorname*{osc}_{\partial D\cap B_\rho^{x_0}} f + \operatorname*{osc}_{\partial D} f \cdot (r/\rho)^{1-n/p} \right),\ \textit{если } p > n,$$

в которых положительные постоянные C и k зависят только от n и p.

Литература

1. *Wiener N.* Certain notions in potential theory // J. Math. Phys. 1924. V. 3. P. 24–51.

2. *Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F.* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1963. V. 3. № 17. P. 43–77.

3. *Мазья В. Г.* О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений // Вестн. ЛГУ. Сер. матем. 1970. Т. 25. №13. С. 42–55.

4. *Kilpeläinen T., Malý J.* The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations // Acta Math. 1994. V.172. P. 137–161.

ПРЯМОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ М.Г. КРЕЙНА ВЕЩЕСТВЕННОСТИ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

В.П. Аносов
(Новосибирск, Новосибирский государственный педагогический университет; *averi@ngs.ru*)

В работе [1] Левина А.Ю. рассматривались функции вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (n \leqslant \infty)$$

с положительными коэффициентами, для вещественности корней которых были приведены необходимые условия, которые сформулируем в виде теоремы 1.

Теорема 1. *Условия*

$$a_k^2 \geqslant a_{k-1} a_{k+1} \quad (k \geqslant 1)$$

являются необходимыми условиями вещественности корней целой функции с положительными коэффициентами, если её порядок меньше единицы.

Как утверждает Левин А. Ю., эти условия были ранее отмечены М. Г. Крейном (см. [1, с. 72]). Мы считаем, что можно дать прямое доказательство этого результата для многочленов. А именно, мы докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если многочлен*

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{1}$$

степени $n \geqslant 2$ с положительными коэффициентами имеет только вещественные корни, то необходимо, чтобы для коэффициентов многочлена (1) была справедлива система неравенств

$$\begin{cases} a_{n-1}^2 \geqslant a_n a_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-k}^2 \geqslant a_{n-k+1} a_{n-k-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^2 \geqslant a_2 a_0 \qquad\qquad . \end{cases} \tag{2}$$

Прежде чем начать доказательство, поясним некоторые обозначения. Систему неравенств в теореме 2 мы обозначили через (2), а через (2_k) обозначим k-ую строку системы (2) сверху. Это пояснение относится и к последующим системам. А теперь приступим к доказательству теоремы 2 и проведём его методом математической индукции. При $n = 2$ данное утверждение легко проверяется.

Пусть утверждение теоремы 2 справедливо для всех таких многочленов степени $n = m \geqslant 2$. Докажем его для многочленов степени $m + 1$, то есть докажем неравенство (2) для $n = m + 1$ и $k = 1, 2, \dots, m$. Для этого воспользуемся для многочлена $f_{m+1}(z)$ формулами Виета (см. [2, с. 512])

$$\begin{cases} z_1 + \ldots + z_{m+1} = -\frac{a_m}{a_{m+1}}, \\ z_1 z_2 + \ldots + z_m \cdot z_{m+1} = \frac{a_{m-1}}{a_{m+1}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_{m+1} = (-1)^{m+1} \frac{a_0}{a_{m+1}} \qquad , \end{cases} \tag{3}$$

где $z_1, \dots, z_{m+1}$ — вещественные корни многочлена $f_{m+1}(z)$. Отметим, что все эти корни отрицательные.

Наряду с многочленом $f_{m+1}(z)$ рассмотрим многочлен

m-ой степени

$$g_m(z) = z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_0,$$

корнями которого являются числа $z_1, \ldots, z_m$, и для коэффициентов которого $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m = 1$ имеют место следующие равенства

$$\begin{cases} z_1 + \ldots + z_m = -b_{m-1}, \\ z_1 \cdot z_2 + \ldots + z_{m-1} \cdot z_m = b_{m-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 \cdot z_2 \cdot z_k + \ldots + z_{m-k+1} \cdot \ldots \cdot z_m = (-1)^k b_{m-k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_m = (-1)^m b_0 \qquad . \end{cases} \tag{4}$$

Из (4), в силу отрицательности корней z_i, вытекает, что $b_i > 0$ для $i = 0, 1, \ldots, m-1$, а также, из предложения индукции, следует справедливость неравенств

$$b_i^2 \geqslant b_{i-1}b_{i+1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{5}$$

Из (4) и (3) имеем равенства

$$\begin{cases} -b_{m-1} + z_{m+1} = -\frac{a_m}{a_{m+1}}, \\ b_{m-2} + z_{m+1}(-b_{m-1}) = \frac{a_{m-1}}{a_{m+1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^k b_{m-k} + z_{m+1}(-1)^{k-1}b_{m-k+1} = (-1)^k \frac{a_{m-k+1}}{a_{m+1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0 z_{m+1} = (-1)^{m+1} \frac{a_0}{a_{m+1}} \qquad . \end{cases} \tag{6}$$

Возведя обе части равенства (6_1) в квадрат, будем иметь равенство

$$b_{m-1}^2 + 2z_{m+1}(-b_{m-1}) + z_{m+1}^2 = \frac{a_m^2}{a_{m+1}^2},$$

из которого, учитывая неравенство (5) при $i = m-1$, получаем

$$\frac{a_m^2}{a_{m+1}^2} \geqslant b_{m-2} + z_{m+1}(-b_{m-1}).$$

Отсюда, с учётом равенства (6_2), убеждаемся в справедливости неравенства (2_1) для $n = m+1$ и $k = 1$.

Далее докажем справедливость неравенства (2_k) при $n = m+1$ и $1 < k \leqslant \frac{m+1}{2}$. Для этого возведём сначала обе части равенства (6_k) в квадрат. В результате получим

$$\frac{a_{m-k+1}^2}{a_{m+1}^2} = b_{m-k}^2 - 2b_{m-k} \cdot b_{m-k+1} \cdot z_{m+1} + z_{m+1}^2 b_{m-k+1}^2. \qquad (7)$$

Затем перемножив, соответственно, левые и правые части равенств (6_{k-1}), (6_{k+1}), будем иметь

$$\frac{a_{m-k} \cdot a_{m-k+2}}{a_{m+1}^2} = b_{m-k+1} \cdot b_{m-k-1} - b_{m-k-1} \cdot b_{m-k+2} z_{m+1} -$$

$$-b_{m-k} \cdot b_{m-k+1} \cdot z_{m+1} + z_{m+1}^2 \cdot b_{m-k} \cdot b_{m-k+2}. \qquad (8)$$

Из (5) при $i = m-k+1$ и $i = m-k$ имеем, что

$$b_{m-k+1}^2 \geqslant b_{m-k} \cdot b_{m-k+2}, b_{m-k}^2 \geqslant b_{m-k-1} \cdot b_{m-k+1}, \qquad (9)$$

из которых следует неравенство

$$b_{m-k} \cdot b_{m-k+1} \geqslant b_{m-k-1} \cdot b_{m-k+2}. \qquad (10)$$

Из (9) – (10) вытекает, что правая часть (8) меньше правой части равенства (7). Отсюда следует справедливость неравенства (2_k) при $n = m+1$ и $k \leqslant \frac{m+1}{2}$. Остальные неравенства (2), то есть неравенства (2) при $n = m+1$ и $\frac{m+1}{2} < k \leqslant m$ вытекают из доказанных выше, если учесть что в том случае, когда многочлен $f_{m+1}(z)$ имеет отличные от нуля вещественные корни, то и многочлен $v_{m+1}(z) = a_0 z^{m+1} + \ldots + a_{m+1}$

также имеет вещественные корни. Здесь следует отметить, что утверждение, сформулированное в последнем предложении, следует из равенства

$$f_{m+1}(z) = z^{m+1} v_{m+1}(\frac{1}{z}).$$

Итак, мы доказали, что если утверждение теоремы 2 справедливо для всех n от 2 до m, то оно справедливо и для $n = m + 1$. Тогда, на основании метода математической индукции, заключаем, что теорема 2 справедлива для любого $n \geqslant 2$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *Константу 1, присутствующую в неравенствах* $a_{n-k}^2 \geqslant 1 \cdot a_{n-k-1} \cdot a_{n-k+1}$ *теоремы 2, невозможно увеличить. Сказанное подтверждается следующей аргументацией. Рассмотрим функцию*

$$f_n(z) = (z + 1)^n.$$

Коэффициенты a_k *этого многочлена равны*

$$a_k = \binom{k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

Но для этих коэффициентов не справедливо неравенство

$$a_k^2 \geqslant q a_{k-1} a_{k+1}$$

при некотором $q > 1$*, достаточно больших* $n \geqslant 2$ *и* $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Замечание 2. *Доказательство теоремы 2 можно свести к теореме 53 из работы [3, с. 69], но доказательство которой практически отсутствует.*

Итак, мы привели одно из возможных доказательств необходимых условий М.Г. Крейна вещественности корней многочленов, которое является простым и экономным.

Литература

1. *Левин А. Ю.* Элементарный признак вещественности корней целой функции с положительными коэфициентами. Воронеж: Проблемы мат. анализа сложных систем, 1968, №2. С 72–77.

2. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 1979, — 559 с.

3. *Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

ЛИУВИЛЛЕВА КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМОГО ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Е.И. Антонов

(Москва; *antonov.zhenya@hotmail.com*)

Полученные результаты основываются на теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, созданной А. Т. Фоменко и его школой (см. [1]). Подробнее о лиувиллевой классификации (т.е. о вычислении инвариантов Фоменко-Цишанга) для геодезических потоков см.[1].

Рассмотрим риманово многообразие вращения $M = S^2$ с естественными координатами $(r; \varphi), r \in (0; L), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, в которых метрика вращения записывается в виде

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + f^2(r)\mathrm{d}\varphi^2.$$

В окрестности полюсов введем локальные координаты

$$x = f(r)\cos\varphi, \qquad y = f(r)\sin\varphi.$$

При этом метрика в полюсах запишется в виде $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему на кокасательном расслоении T^*S^2 с гамильтонианом

$$H = \begin{cases} \dfrac{p_r^2}{2} + \dfrac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r), & \text{вне полюсов,} \\ \dfrac{p_x^2 + p_y^2}{2} + V(0), & \text{в полюсах} \end{cases}$$

и первым интегралом

$$K = \begin{cases} p_\varphi, & \text{вне полюсов,} \\ xp_y - yp_x, & \text{в окрестности полюсов.} \end{cases}$$

Представим проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ как фактор сферы S^2 по инволюции η, которая в координатах r, φ задаётся формулой:

$$\eta(\varphi, r) = (\varphi + \pi, L - r).$$

Полюса при инволюции переходят друг в друга: $\eta(S) = N, \eta(N) = S$. Имеем:

$$T^*\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = T^*S^2/\eta^*,$$
$$\eta^*(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = (-p_r, p_\varphi, L - r, \varphi + \pi).$$

Далее мы считаем, что $f(r) = f(L - r)$ и $V(r) = V(L - r)$, чтобы f и V задавали функции на $\mathbb{RP}^2$.

Теорема 1

Рассмотрим систему (то есть геодезический поток с линейным интегралом и с инвариантным при вращениях потенциалом) на многообразии вращения $M \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, заданную парой функций $(V(r); f(r))$. Пусть Q^3 - связная компонента неособой изоэнергетической поверхности Q_h^3. Пусть $W - W$ – молекула системы на Q^3.

1. Метки на нецентральных ребрах молекулы следующие:

   (a) на ребрах между седловыми атомами метки: $r = \infty, \varepsilon = +1$;

(b) На ребрах между седловыми атомами и атомами типа A метка $r = 0$, за исключением тех случаев, когда атом A отвечает неподвижной точке инволюции. В этом случае метка $r = \frac{1}{2}$. Метка ε в обоих случаях равна $+1$.

2. Метки на центральных ребрах молекулы следующие:

(a) на ребре, соединяющем седловые атомы, метки следующие: $r = \infty, \varepsilon = -1$;

(b) Если молекула $W - W$ имеет тип $A - A$, то метка r определяется следующим образом:

- если $Q^3_{S^2} \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ то:
  $r = \frac{1}{4}, \varepsilon = +1$;
- если $Q^3_{S^2} \approx S^1 \times S^2$ то возможны два случая:
  - $r = \infty, \varepsilon = +1$;
  - $r = \infty, \varepsilon = +1$;
- если $Q^3_{S^2} \approx S^3$ то:
  $r = 0, \varepsilon = +1$;

3. Если молекула $W - W$ отлична от $A - A$, то она содержит единственную семью, получаемую отбрасыванием всех атомов A. Тогда значение метки n определяется топологическим типом $Q^3_{S^2}$ и сечением атомов, соединенных центральным ребром, то есть:

- Если $Q^3_{S^2} \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^3$, то метка n равна 0.
- Если $Q^3_{S^2} \approx S^1 \times S^2$, то метка n равна либо 0, либо -1.
- Если $Q^3_{S^2} \approx S^3$, то метка n равна 1.

Литература

1. *А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко*, “Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классифика-

ция", Т. 1, 2, Изд. дом "Удмуртский университет", Ижевск, 1999, 444 с., 447 с.

2. *Е. О. Кантонистова,* "Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле", *Матем. сб.*, **207**:3 (2016), 47–92;

3. *D. S. Timonina*, "Topological classification of integrable geodesic flows in a potential field on the torus of revolution", Lobachevskii J. Math., **38**:6 (2017), 1108–1120

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА[2]

А.И. Аристов

(Москва; МГУ им. М.В. Ломоносова; *ai_ aristov@mail.ru*)

Работа посвящена точным решениям уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (1)$$

В статье [1] рассмотрены начально-краевые задачи на отрезке и на луче для модельного уравнения теории ионно-звуковых волн

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon u - \frac{\varepsilon^2 u^2}{2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (2)$$

Для первой задачи обоснована однозначная разрешимость, по крайней мере, локально по времени, для второй получена верхняя оценка времени существования слабого решения и, кроме того, указаны начальные данные, для которых имеет место мгновенное разрушение решения.

[2]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 18-29-10085мк).

Уравнение (2) сводится к (1) с помощью линейной замены. В данной работе построено 6 классов точных решений для (1), представимых через элементарные и специальные функции.

Теорема 1. *Существуют точные решения уравнения (1), имеющие следующие типы качественного поведения:*

- *ограниченность глобально по времени;*
- *ограниченность на любом ограниченном промежутке времени, но не глобально;*
- *обращение в бесконечность на ограниченных промежутках времени.*

Справедливость этого утверждения вытекает из того, что среди построенных решений имеются решения, соответствующие всем типам, перечисленным в теореме.

При построении точных решений использовались методы аддитивного и мультипликативного разделения переменных, метод бегущей волны и поиск решений специального вида.

Литература

1. *Корпусов М.О.* О мгновенном разрушении слабого решения одной задачи теории плазмы на полупрямой. Дифференциальные уравнения. 2019 г. Том 55. Номер 1. С. 59–66.

2. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М., Физматлит, 2005.

ПРИМЕРЫ ГОЛОМОРФНО-ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{C}^4$

А.В. Атанов

(Воронеж; *atanov.cs@gmail.com*)

Известная в комплексной геометрии задача классификации голоморфно-однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^n$ решена Э.Картаном для случая $n = 2$ (см. [1]). Решение аналогичной задачи при $n = 3$ также фактически завершено (см., например, [2]). При этом в комплексных пространствах больших размерностей к настоящему моменту отсутствуют нетривиальные примеры голоморфно-однородных гиперповерхностей. В тексте строится пример одной голоморфно-однородной гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$.

Утверждение 1. *Любая гиперповерхность из семейства*

$$\mathrm{Im}(z_4) = |z_1| \left(\mathrm{Im}(z_2)^2 + \mathrm{Im}(z_3)\right)^{\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

является голоморфно-однородной в пространстве $\mathbb{C}^4_{z_1,z_2,z_3,z_4}$.

Для получения уравнения данного семейства гиперповерхностей будем применять подход, использованный в работах [2, 3] для случая $\mathbb{C}^3$. Данный подход основан на построении реализаций абстрактных алгебр Ли в виде алгебр голоморфных векторных полей.

В работе [3] описана процедура перехода от абстрактной алгебры Ли к соответствующей алгебре голоморфных векторных полей, касательных к однородным гиперповерхностям. Базисные векторные поля такой алгебры будем записывать в виде

$$e_k = a_k \frac{\partial}{\partial z_1} + b_k \frac{\partial}{\partial z_2} + c_k \frac{\partial}{\partial z_3} + d_k \frac{\partial}{\partial z_4}, \ k = 1, \ldots, 7,$$

или, сокращённо, $e_k = (a_k, b_k, c_k, d_k)$. Здесь a_k, b_k, c_k, d_k — голоморфные (в окрестности некоторой точки гиперповерхности) функции четырёх переменных z_1, z_2, z_3, z_4.

Как известно, любое гладкое векторное поле в окрестности неособой точки может быть выпрямлено подходящим координатным диффеоморфизмом (под выпрямлением здесь понимается уменьшение количества переменных, участвующих в записи векторного поля — вплоть до одной переменной). В работе [3] для случая $\mathbb{C}^3$ показано, как такие упрощения могут проводиться сразу для нескольких полей. Очевидно, что выпрямление одного поля с учётом коммутационных соотношений алгебры упрощает и остальные поля. Последовательно рассматривая все коммутаторы и постепенно упрощая базисный набор полей, приходим к некоторому относительно простому виду указанного набора. Интегрируя затем систему уравнений в частных производных, отвечающую рассматриваемым полям, можно получить явный вид уравнения голоморфно-однородной гиперповерхности.

Используя эту же технику, можно получать голоморфно-однородные объекты и в случае $\mathbb{C}^4$.

Рассмотрим 7-мерную (разложимую) алгебру Ли $\mathfrak{g}$, определяемую следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{gathered}
[e_1, e_2] = e_1, [e_1, e_3] = 2e_2, [e_2, e_3] = e_3, \\
[e_4, e_7] = (h+1)e_4, [e_5, e_6] = e_4, \\
[e_5, e_7] = e_5, [e_6, e_7] = he_6, \ |h| \leqslant 1.
\end{gathered} \tag{1}$$

Построение реализаций алгебры (1) в виде алгебр голоморфных векторных полей требует рассмотрения ряда подслучаев. В простейшем из них можно считать, что три векторных поля имеют простейший вид:

$$e_1 = (0,0,0,1), e_4 = (0,0,1,0), e_5 = (0,1,0,0).$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Базис голоморфной реализации алгеб-*

ры (1) допускает представление в виде

$$
\begin{gathered}
e_1=(0,0,0,1), \quad e_2=(z_1,0,0,z_4),\\
e_3=\left(2z_1z_4+A_3z_1^2,0,0,z_4^2-\tfrac{1}{4}A_3^2z_1^2\right),\\
e_4=(0,0,1,0), \quad e_5=(0,1,0,0), \quad e_6=(0,B_6,z_2,0),\\
e_7=\left(A_7z_1,z_2,2z_3+C_7,-\tfrac{1}{2}A_3A_7z_1\right),
\end{gathered} \tag{2}
$$

где A_3, A_7, B_6, $B_7\in\mathbb{C}$.

Уравнение однородной гиперповерхности M, соответствующей алгебре (2), будем искать в виде $\mathrm{Im}(z_4)=F(z_1,z_2,z_3,z_4)$. Определяющая функция $\Phi=-\mathrm{Im}(z_4)+F$ этой гиперповерхности должна удовлетворять системе семи уравнений в частных производных

$$\mathrm{Re}\left(e_k\left(\Phi\right)\big|_M\right)\equiv 0,\ k=1,\dots,7.$$

Решив эту систему и выполнив элементарные преобразования координат, получим уравнение голоморфно-однородной гиперповерхности вида

$$\mathrm{Im}(z_4)=|z_1|\left(\mathrm{Im}(z_2)^2+\mathrm{Im}(z_3)\right)^{\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Литература

1. *Cartan E.* Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes: I / E. Cartan // Ann. Math. Pura Appl. — 1932. — V. 11, № 4. — P. 17–90.

2. *Атанов А. В.* Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в $\mathbb{C}^3$ / А.В. Атанов, А.В. Лобода // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2019. – Т. 173. – С. 86–115.

3. *Beloshapka V. K.* Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic / V. K.Beloshapka, I. G. Kossovskiy // J. Geom. Anal. — 2010. — V. 20, № 3. — P. 538–564.

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

А.О. Бабаян
(Ереван; *barmenak@gmail.com*)

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости, а $\Gamma = \partial D$ – его граница. В области D рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V(x,y) = 0, (x,y) \in D, \quad (1)$$

где λ_1, λ_2 – различные действительные числа. Решение уравнения (1) ищем в классе функций $C^4(D) \cap C^{(1,\alpha)}(D \cup \Gamma)$. На границе Γ решение удовлетворяет условиям Дирихле:

$$V\big|_\Gamma = f_0(x,y), \quad V_r\big|_\Gamma = f_1(x,y), (x,y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь $f_k \in C^{(1-k,\alpha)}(\Gamma)$, $k = 0,1$ – заданные функции, $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ – производные, соответственно, по радиусу и аргументу комплексного числа $z = x + iy = re^{i\theta}$.

Как известно (см. [1]), задача Дирихле для неэллиптического уравнения не является корректно поставленной, однако в этом случае также удается получить содержательные результаты. В работе [2] рассмотрено уравнение $u_{xy} = 0$ в произвольной области. Были получены условия на границу области, при которых задача Дирихле имеет решение. Далее, в [3] было рассмотрено уравнение $(1+\lambda)u_{xx} - (1-\lambda)u_{yy} = 0$ в единичном круге и получены условия на λ, при которых однородная задача Дирихле для этого уравнения имеет нетривиальные решения. В работах [4,5] исследована задача Дирихле для строго гиперболической системы первого порядка в произвольной области. Были получены условия на геометрию границы области, при которых задача Дирихле имеет решение.

В работе предлагается схема решения краевых задач в единичном круге, основанная на представлении искомого решения в виде ряда по полиномам Чебышева. Приведем краткое описание метода и сформулируем полученный результат. Общее решение уравнения (1) представим в виде:

$$V = \Phi_0(x+\lambda_1 y)+\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi_1(x+\lambda_1 y)+\Psi_0(x+\lambda_2 y)+\frac{\partial}{\partial\theta}\Psi_1(x+\lambda_2 y)$$

Здесь Φ_j, Ψ_j - функции, подлежащие определению. Граничные условия (2) представим в эквивалентной форме:

$$V_x|_\Gamma = F; V_x|_\Gamma = G; V(1,0) = f_0(1,0). \qquad (3)$$

Здесь $F = \cos\theta f_1 - r^{-1}\sin\theta f_0'$ и $G = \sin\theta f_1 + r^{-1}\cos\theta f_0'$. Подставим общее решение в равенства (3) и используем операторные тождества: $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}$. Получим два уравнения для определения функций Φ_j', Ψ_j'.

$$\Phi_0'(A_1)+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\lambda_1 I\right)\Phi_1'(A_1)+\Psi_0'(A_2)+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\lambda_2 I\right)\Psi_1'(A_2) =$$

$$= F(\theta);\quad \lambda_1\Phi_0'(A_1)+\left(\lambda_1\frac{\partial}{\partial\theta}-I\right)\Phi_1'(A_2)+\lambda_2\Psi_0'(A_2)+$$

$$+\left(\lambda_2\frac{\partial}{\partial\theta}-I\right)\Psi_1'(A_2) = G(\theta),\ A_j = \cos\theta+\lambda_j\sin\theta, \qquad (4)$$

где $j = 1,2$. Аргументы A_j представим в виде

$$A_j = \sqrt{1+\lambda_j^2}\cos(\theta-\alpha_j);\ \cos\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}, \sin\alpha_j = \frac{\lambda_j}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}.$$

Тогда неизвестные функции будут зависеть от $\cos(\theta-\alpha_j)$ и, следовательно, могут быть представлены рядами по многочленам Чебышева первого рода. Далее, приравнивая в уравнениях (4) коэффициенты при $\cos k\theta$ и $\sin k\theta$, получим систему линейных уравнений четвертого порядка для определения коэффициентов этих рядов. Определитель этой системы, с точностью до ненулевого сомножителя, равен $\Delta_k(\gamma) = k^2 - U_{k-1}^2(\cos\gamma)$, где U_{k-1} - многочлен Чебышева второго рода степени $k-1$, $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$. Учитывая, что при $\gamma \neq 0, \pi$ имеем оценку $|U_{k-1}(\cos\gamma)| < k$ (см.[6], пункт 2.2) искомые коэффициенты разложений определяем однозначно для произвольных граничных функций. Итак, получена следующая теорема.

Теорема 1. *Задача (1),(2) однозначно разрешима.*

Литература

1. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics. New York, Chichester etc.: John Wiley and Sons, 1989. 831p.

2. *John F.* The Dirichlet problem for a Hyperbolic Equation. Amer. J. of Math. 1941.— V.63(1) - P.141-155.

3. *Александрян Р.А.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С.Л. Соболева. Труды ММО, 1960. — Т.9. - С.455-505.

4. *Жура Н.А., Солдатов А.П.* Граничная задача для гиперболической системы первого порядка в двухмерной области. Известия РАН, сер. Математика, 2017. — Т.81, No.3. - С. 83-108

5. *Солдатов А. П.* Характеристически замкнутые области для строго гиперболических систем первого порядка на плоскости. Проблемы матем. анализа, 2018. — No. 93. - С. 133-135 с.

6. *Mason J.S., Handscomb D.C.* Chebyshev Polynomials. New York etc.: CRC Press, 2003. 335p.

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ СДВИГОВОГО

ТЕЧЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Е.С. Барановский, А.А. Домнич, М.А. Артемов
(Воронеж, ВГУ; *esbaranovskii@gmail.com*)

В настоящей работе изучается математическая модель, описывающая установившееся сдвиговое течение несжимаемой вязкой жидкости между плоскостями $z = -h$ и $z = h$. Предполагается, что течение обусловлено действием постоянного перепада давления $\partial p/\partial x = -\xi$ и осуществляется в условиях пристенного скольжения типа Навье при наличии теплового потока ω:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dz}\big\{\mu[\theta(z)]u'(z)\big\} = \xi, \ \ z \in [-h,h], \\ -\dfrac{d}{dz}\big\{k[\theta(z)]\theta'(z)\big\} = \omega(z), \ \ z \in [-h,h], \\ \mu[\theta(h)]u'(h) = -\chi[\theta(h)]u(h), \\ \mu[\theta(-h)]u'(-h) = \chi[\theta(-h)]u(-h), \\ k[\theta(h)]\theta'(h) = -\beta\theta(h), \\ k[\theta(-h)]\theta'(-h) = \beta\theta(-h), \end{cases} \qquad (\mathbf{A})$$

где u — скорость течения жидкости вдоль оси x; θ — температура; $\mu[\theta]$, $k[\theta]$, $\chi[\theta]$ — коэффициенты вязкости, теплопроводности и проскальзывания соответственно; β — постоянный коэффициент теплообмена на стенках канала.

Неизвестными в системе ($\mathbf{A}$) являются скорость u и температрура θ, а все остальные функции и величины считаются заданными. Предположим, что:

(C1) функция $\omega\colon [-h,h] \to \mathbf{R}$ является четной и принадлежит пространству Лебега $L^2[-h,h]$;

(**C2**) функции $\chi\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\mu\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $k\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ непрерывны;

(**C3**) существует константа k_0 такая, что $0<k_0\le k(s)$ для любого $s\in\mathbf{R}$;

(**C4**) для любого $r>0$ существуют константы χ_r и μ_r такие, что $0<\chi_r\le\chi(s)$ и $0<\mu_r\le\mu(s)$ для $\forall s\in[-r,r]$;

(**C5**) выполнено неравенство $\beta>0$.

Введем следующие обозначения:

$$\overline{v}_h \stackrel{\text{def}}{=} (2h)^{-1}\int_{-h}^{h} v(z)\,dz,$$

$$H^1_{even}[-h,h] \stackrel{\text{def}}{=} \{v\in H^1[-h,h]:\ \ v(-z)=v(z)\ \forall z\in[-h,h]\},$$

где $H^1[-h,h]$ — пространство Соболева.

Определение. *Слабым решением* задачи (**A**) назовем пару функций $(u,\theta)\in H^1_{even}[-h,h]\times H^1_{even}[-h,h]$ такую, что

$$\int_{-h}^{h}\mu[\theta(z)]u'(z)\psi'(z)\,dz+2\chi[\theta(h)]u(h)\psi(h)=\xi\int_{-h}^{h}\psi(z)\,dz,$$

$$\int_{-h}^{h}k[\theta(z)]\theta'(z)\psi'(z)\,dz+2\beta\theta(h)\psi(h)=\int_{-h}^{h}\omega(z)\psi(z)\,dz$$

для любой пробной функции $\psi\in H^1_{even}[-h,h]$.

Сформулируем теперь основные результаты работы.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (**C1**)–(**C5**). *Тогда*

(i) *задача* (**A**) *имеет по крайней мере одно слабое решение;*

(ii) *если* (u,θ) *— слабое решение задачи* $(\mathbf{A})$, *то на стенках канала* $z = \pm h$ *выполнены соотношения:*

$$u(h) = u(-h) = \frac{\xi h}{\chi[\overline{\omega}_h h\beta^{-1}]}, \quad \theta(h) = \theta(-h) = \overline{\omega}_h h\beta^{-1};$$

(iii) *если* (u,θ) *— слабое решение задачи* $(\mathbf{A})$, *то выполнены следующие энергетические равенства:*

$$\int_{-h}^{h} \mu[\theta(z)]|u'(z)|^2\,dz + 2\chi[\theta(h)]u^2(h) = 2h\xi\overline{u}_h,$$

$$\int_{-h}^{h} k[\theta(z)]|\theta'(z)|^2\,dz + 2\beta\theta^2(h) = \int_{-h}^{h} \omega(z)\theta(z)\,dz;$$

(vi) *если* (u,θ) *и* (v,θ) *— слабые решения задачи* $(\mathbf{A})$, *то* $u = v$;

(v) *если* k *удовлетворяет условию Липшица с константой* M, *где* $M < \min\{k_0^2,\beta^2\}/\big(\|\omega\|_{L^1[-h,h]}\max\{1,4h\}\big)$, *то задача* $(\mathbf{A})$ *имеет единственное слабое решение.*

Замечание. В линейной постановке задача о протекании неравномерно нагретой вязкой жидкости сквозь ограниченный сосуд с двумя плоскими отверстиями рассмотрена в [1]. В статье [2] изучается обратная задача для эволюционной линейной модели однонаправленного термогравитационного движения вязкой жидкости в плоском канале. В работе [3] предложена модель оптимального граничного управления неизотермическим течением жидкости через заданную локально-липшицеву область $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, $d = 2, 3$.

Литература

1. *Крейн С.Г., Чан Тху Ха.* Задача протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1989. Т. 29. № 8. С. 1153–1158.

2. *Черемных Е.Н.* Априорные оценки решения задачи об однонаправленном термогравитационном движении вязкой жидкости в плоском канале // Математические заметки. 2018. Т. 103. № 1. С. 147–157.

3. *Baranovskii E.S., Domnich A.A., Artemov M.A.* Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow // Fluids. 2019. V. 4. № 3. Article ID 133.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ НА КВАДРИКАХ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[3]

Г.В. Белозеров
(Москва; *gleb0511beloz@yandex.ru*)

Теории математического биллиарда, т. е. задаче о движении материальной точки в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой с абсолютно упругим отражением на границе, посвящено много работ.

Биллиарды в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, являются интегрируемыми гамильтоновыми системами. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности начали изучаться в работах В. Драговича, М. Раднович [1], [2], а также В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [3], [4].

Данная работа посвящена интегрируемым геодезическим биллиардам на поверхностях положительной и отрицательной гауссовой кривизны, а именно на невырожденных квадриках E, т.е. на эллипсоиде, однополостном и двуполостном гиперболоидах. Биллиардным столом на такой квадрике E назовем замкнутую область, ограниченную конечным

[3]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

числом квадрик, софокусных с данной, и имеющую углы излома на границе равные $\frac{\pi}{2}$. Возникает динамическая система: материальная точка (шар) движется по биллиардному столу вдоль геодезических с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от границы абсолютно упруго. На множестве биллиардных столов (на фиксированной квадрике) введем отношение эквивалентности. Назовем две области эквивалентными в том и только в том случае, когда они получаются друг из друга элементарными преобразованиями. Автором получена полная классификация биллиардных столов на квадриках. Оказывается, что на эллипсоиде есть ровно 21 тип неэквивалентных биллиардных столов, на однополостном гиперболоиде – 21, а на двуполостном – 13.

Интегрируемость этих биллиардов следует из известной теоремы Якоби – Шаля. Далее автор полностью классифицировал все такие геодезические биллиарды с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Как оказалось, на эллипсоиде их ровно 7, на однополостном гиперболоиде тоже 7, а на двуполостном – 6.

Далее оказалось, что некоторые геодезические биллиарды на квадриках разного типа лиувиллево эквивалентны. В итоге, на квадриках в $\mathbb{R}^3$ есть ровно 10 лиувиллево неэквивалентных биллиардов.

Как оказалось, существует частичное соответствие между геодезическими биллиардами на эллипсоиде и плоскими биллиардами внутри эллипса. При этом омбилические точки заменяются фокусами, а сетка эллиптических координат на эллипсоиде — на сетку на плоскости. Для биллиардов на двуполостном гиперболоиде автором доказаны следующие 2 теоремы. Первая утверждает существование взаимно однозначного соответствия между биллиардными столами на двуполостном гиперболоиде и биллиардными столами на плоскости, ограниченными софокусными квадриками. При этом отношение эквивалентности биллиардных столов сохраняется. Вторая теорема утверждает существование взаимно однозначного соответствия между плоскими биллиардными системами (ограниченными софокусными квадриками) и геодезическими биллиардными системами на двуполостном гиперболоиде. Это соответствие сохраняет лиувиллеву эквивалентность. Интересно, что для однополостного гиперболоида даже частичного соответствия нет.

Также оказалось, что все найденные геодезические биллиарды на квадриках лиувиллево эквивалентны некоторым известным интегрируемым системам из физики, механики и геометрии.

Литература

1. *V. Dragovich, M. Radnovich*, "Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards Regul. Chaotic Dyn., 14:4-5 (2009), 479-494.

2. *В. Драгович, М. Раднович*, Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика М. - Ижевск, 2010, 338 с.

3. *В. В. Фокичева*, "Описание особенностей системы "биллиард в эллипсе, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2012, No 5, 31 - 34; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for system "billiard in an ellipse, Moscow Univ. Math. Bull., 67:5-6 (2012), 217-220.

4. *В. В. Фокичева*, "Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Ма- тем. Мех., 2014, No 4, 18-27; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas Moscow Univ. Math. Bull., 69:4 (2014), 148-158.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КРИВЫХ, ЗАДАВАЕМЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ УРАВНЕНИЯМИ. ЧАСТЬ 2.

Г.Г. Бильченко(ст.)
(Казань; *ggbil40@gmail.com*)

Рассматривается движение механической системы, состоящей из носителя и груза, совершающего заданное движение по отношению к носителю [1–3]. В алгоритмах установления типа двусторонних движений носителя по горизонтальной плоскости используются определяющие выражения [4].

В рассматриваемом сообщении устанавливается важное свойство определяющих уравнений, записанных для определяющих выражений $I_2(\varphi;\beta)$ и $I_3(\varphi;\beta)$ – отсутствие других точек пересечения, кроме единственной точки $M_0(0;\beta_0)$ [5].

Ключевые слова: носитель, груз, угол установки канала, определяющие уравнения, двусторонние движения носителя.

1. Дифференциальные уравнения движения носителя.

Рассматривается движение механической системы, состоящей из носителя и груза [1–4]. Носитель, располагаясь всё время в горизонтальной плоскости, двигается поступательно по прямолинейной траектории. Носитель имеет прямолинейный канал, по которому может перемещаться груз. Ось канала расположена в вертикальной плоскости, проходящей через траекторию носителя. Пусть закон движения груза в канале задан в виде $\ell \cdot \sin(\omega t)$, где $\ell = const$, $\omega = const$, а силы сопротивления среды движению носителя моделируются силами типа кулонова трения. Тогда дифференциальные уравнения движения носителя (ДУДН), согласно [1, 2], будут следующими

$$\ddot{x} = \beta \cdot (\cos\varphi + f \cdot \sin\varphi) \cdot \sin(\omega t) - \gamma \qquad \text{при} \quad \dot{x} > 0\,; \qquad (1)$$

$$\ddot{x} = \beta \cdot (\cos\varphi - f \cdot \sin\varphi) \cdot \sin(\omega t) + \gamma \qquad \text{при} \quad \dot{x} < 0\,; \qquad (2)$$

$$\ddot{x} = 0 \qquad\qquad\qquad \text{при} \quad \dot{x} = 0\,, \tag{3}$$

где x – координата носителя; φ – угол установки канала; $\beta = \ell \cdot \omega^2 \cdot \dfrac{m}{m+M}$; $\gamma = g \cdot f$; M – масса носителя; m – масса груза; g – ускорение свободного падения; f – коэффициент трения скольжения в движении, равный коэффициенту трения скольжения в покое, для пары материалов «носитель – подстилающая горизонтальная плоскость». Пусть угол установки канала

$$0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}\,. \tag{4}$$

Предполагается, что выполнено неравенство [3]

$$\beta \cdot \sin\varphi \le g\,, \tag{5}$$

которое гарантирует безотрывное от горизонтальной плоскости движение носителя. Если $\beta \ge g$, то из (5) вытекает вместо (4) ограничение на угол установки канала

$$0 \le \varphi \le \arcsin\left(\frac{g}{\beta}\right). \tag{6}$$

2. Условия двусторонних движений носителя из состояния покоя.

Условием того, чтобы ДУДН (1) имело место в действительной динамике носителя является неравенство

$$\beta \cdot (\cos\varphi + f \cdot \sin\varphi) > \gamma\,, \tag{7}$$

а условием реализации ДУДН (2) в действительной динамике будет неравенство

$$\beta \cdot (\cos\varphi - f \cdot \sin\varphi) > \gamma\,. \tag{8}$$

При этом, так как $\varphi \ge 0$, то $\cos\varphi + f \cdot \sin\varphi > 0$ всегда, а из требования $\cos\varphi - f \cdot \sin\varphi > 0$ вытекает ограничение на угол установки канала в виде

$$0 \le \varphi < \operatorname{arctg}\frac{1}{f}\,. \tag{9}$$

Ранее [3] было установлено, что если

$$\beta > \frac{\gamma}{\sqrt{1+f^2}}\,, \tag{10}$$

а $\varphi \in \overrightarrow{\Phi} \equiv (\overrightarrow{\varphi}_1; \overrightarrow{\varphi}_2)$, где

$$\overrightarrow{\varphi}_1(\beta) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta\cdot f - \sqrt{\beta^2(1+f^2)-\gamma^2}}{\beta+\gamma}\,,$$

$$\overrightarrow{\varphi}_2(\beta) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta\cdot f + \sqrt{\beta^2(1+f^2)-\gamma^2}}{\beta+\gamma}\,,$$

то носитель может двигаться из состояния покоя в положительном направлении оси Ox, т.е., ДУДН (1) может иметь место в действительной динамике носителя.

Если (10) выполнено, а $\varphi \in \overleftarrow{\Phi} \equiv (\overleftarrow{\varphi}_1; \overleftarrow{\varphi}_2)$, где $\overleftarrow{\varphi}_1 = -\overrightarrow{\varphi}_2$, $\overleftarrow{\varphi}_2 = -\overrightarrow{\varphi}_1$, то носитель может двигаться из состояния покоя в отрицательном направлении оси Ox, т.е., ДУДН (2) может иметь место.

Было показано [3], что если

$$\beta > \gamma\,, \tag{11}$$

а угол установки канала $\varphi \in \overleftrightarrow{\Phi} \equiv (\overrightarrow{\varphi}_1; \overleftarrow{\varphi}_2)$, то из состояния покоя носитель может двигаться как в положительном, так и в отрицательном направлении оси Ox, т.е., могут реализовываться ДУДН (1) и (2).

Тогда, с учётом (6), двусторонние движения носителя из состояния покоя в рассматриваемом случае возможны, если

$$\varphi \in [0; \overleftarrow{\varphi}_2(\beta)) \qquad \text{при} \qquad \beta_1 < \beta < \beta_2\,; \tag{12.1}$$

$$\varphi \in \left[0; \arcsin\left(\frac{g}{\beta}\right)\right] \qquad \text{при} \qquad \beta_2 \le \beta\,, \tag{12.2}$$

где $\beta_1 = \gamma$; $\beta_2 = g \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot f^2}$ – корень уравнения

$$2 \operatorname{arctg} \frac{-\beta_2 \cdot f + \sqrt{\beta_2^2 \left(1 + f^2\right) - \gamma^2}}{\beta_2 + \gamma} = \arcsin \left(\frac{g}{\beta_2} \right) . \qquad (13)$$

3. Определяющие уравнения.

Пусть угол установки канала таков, что выполняются условия (12). При этом вводятся

$$\tau_+ = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\gamma_+}{\beta} , \qquad \tau_- = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\gamma_-}{\beta} ,$$

где

$$\gamma_+ = \frac{\gamma}{\cos\varphi + f \cdot \sin\varphi} , \qquad \gamma_- = \frac{\gamma}{\cos\varphi - f \cdot \sin\varphi} .$$

Затем, следуя [4], выделяются определяющие выражения

$$I_1\left(\varphi; \beta\right) = \sqrt{\beta^2 - \gamma_+^2} + \sqrt{\beta^2 - \gamma_-^2} -$$

$$- \gamma_+ \cdot \left[\pi + \arcsin\left(\frac{\gamma_-}{\beta}\right) - \arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right) \right];$$

$$I_2\left(\varphi; \beta\right) = \sqrt{\beta^2 - \gamma_+^2} + \sqrt{\beta^2 - \gamma_-^2} -$$

$$- \gamma_- \cdot \left[\pi + \arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right) - \arcsin\left(\frac{\gamma_-}{\beta}\right) \right];$$

$$I_3\left(\varphi; \beta\right) = \sqrt{\beta^2 - \gamma_+^2} - \frac{\gamma\pi}{\cos\varphi} +$$

$$+ \beta \cdot \cos\left[\arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right) + \pi \cdot f \cdot \operatorname{tg}\varphi \right],$$

используя которые, можно записать определяющие уравнения

$$I_1\left(\varphi; \beta\right) = 0 \,; \qquad (14)$$

$$I_2\,(\varphi;\beta) = 0\,; \tag{15}$$

$$I_3\,(\varphi;\beta) = 0\,. \tag{16}$$

Определяющее выражение $I_3\,(\varphi;\beta)$ привлекается для установления типа движения носителя, когда $I_1\,(\varphi;\beta) > 0$ и $I_2\,(\varphi;\beta) > 0$. При этом [4]

$$\int\limits_{\tau_+}^{\frac{T}{2}+\tau_-} \Big[\beta \cdot (\cos\varphi + f\cdot\sin\varphi)\cdot\sin(\omega t) - \gamma\Big]\cdot dt > 0 \tag{17}$$

и

$$-\int\limits_{\frac{T}{2}+\tau_-}^{T+\tau_+} \Big[\beta \cdot (\cos\varphi - f\cdot\sin\varphi)\cdot\sin(\omega t) + \gamma\Big]\cdot dt > 0\,. \tag{18}$$

Неравенства (17) и (18) приводятся к виду

$$\beta\left[\cos(\omega\tau_+) + \cos(\omega\tau_-)\right] - \gamma_+\left[\pi + \omega\tau_- - \omega\tau_+\right] > 0 \tag{19}$$

и

$$\beta\left[\cos(\omega\tau_+) + \cos(\omega\tau_-)\right] - \gamma_-\left[\pi + \omega\tau_+ - \omega\tau_-\right] < 0\,. \tag{20}$$

Неравенства (19) и (20) сводятся к одному неравенству

$$\gamma_-\left[\pi + \omega\tau_+ - \omega\tau_-\right] > \gamma_+\left[\pi + \omega\tau_- - \omega\tau_+\right]\,,$$

которое принимает вид

$$\arcsin\left(\frac{\gamma_-}{\beta}\right) - \arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right) < \pi\cdot f\cdot \operatorname{tg}\varphi\,, \tag{21}$$

т.е., при $I_1\,(\varphi;\beta) > 0$ и $I_2\,(\varphi;\beta) > 0$ рассматриваются только такие механические системы «носитель – груз», параметры которых удовлетворяют условию (21).

Если $\varphi = 0$, то

$$\gamma_+ = \gamma_- = \gamma = g \cdot f\,,$$
$$I_2 = I_3 = I = 2\sqrt{\beta^2 - \gamma^2} - \gamma \cdot \pi\,,$$

а (15) и (16) приводятся к одному виду $I = 0$. Откуда

$$\beta_0 = \gamma \cdot \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{2}\,. \tag{22}$$

Т.е., на плоскости $(\varphi; \beta)$ кривые, задаваемые уравнениями (15) и (16), имеют одну общую точку $M_0\,(0; \beta_0)$.

Пусть теперь $\varphi \neq 0$. Покажем, что на плоскости $(\varphi; \beta)$ в области, где определённые условиями (12) допустимы двусторонние движения носителя из состояния покоя, не существует ни одной точки $M_*\,(\varphi_*; \beta_*)$, в которой $I_2\,(\varphi_*; \beta_*) = 0$ и $I_3\,(\varphi_*; \beta_*) = 0$, отличной от точки $M_0\,(0; \beta_0)$.

Сделаем предположение, что такая точка найдётся, т.е., определяющие уравнения (15) и (16) совместны при условии (21).

При этом несовпадающие члены уравнений (15) и (16) должны быть равными, т.е.,

$$\sqrt{\beta^2 - \gamma_-^2} - \gamma_- \cdot \left[\pi + \arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right) - \arcsin\left(\frac{\gamma_-}{\beta}\right)\right] =$$
$$= \beta \cdot \cos\left[\arcsin\left(\frac{\gamma_+}{\beta}\right) + \pi \cdot f \cdot \operatorname{tg}\varphi\right] - \frac{\gamma\pi}{\cos\varphi}\,. \tag{23}$$

После замены $\beta = k \cdot \gamma_-$, где $k > 1$, условие (21) запишется в виде

$$\arcsin\left(\frac{1}{k}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{k} \cdot \frac{1 - z}{1 + z}\right) < \pi \cdot z\,, \tag{24}$$

а уравнение (23) будет иметь вид

$$k \cdot \cos\left[\arcsin\left(\frac{1}{k} \cdot \frac{1 - z}{1 + z}\right) + \pi \cdot z\right] +$$

$$+ \arcsin\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{1-z}{1+z}\right) + \pi\cdot z = \sqrt{k^2-1} + \arcsin\left(\frac{1}{k}\right), \quad (25)$$

где $z = f\cdot \operatorname{tg}\varphi$. Уравнение (25) удовлетворяется если

$$\arcsin\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{1-z}{1+z}\right) + \pi\cdot z = \arcsin\left(\frac{1}{k}\right),$$

т.е.,

$$\arcsin\left(\frac{1}{k}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{k}\cdot\frac{1-z}{1+z}\right) = \pi\cdot z\,. \qquad (26)$$

Уравнение (26) противоречит условию (24), что доказывает факт отсутствия других точек пересечения кривых, задаваемых определяющими уравнениями (15) и (16), кроме единственной точки $M_0\,(0;\beta_0)$.

Заключение. Установленные в Частях 1 и 2 свойства кривых, задаваемых определяющими уравнениями $I_1 = 0$, $I_2 = 0$ и $I_3 = 0$, гарантируют разбиение области плоскости $(\varphi;\beta)$, где определённые условиями (12) допустимы двусторонние движения носителя из состояния покоя, на подобласти, в каждой из которых будет своя комбинация значений определяющих выражений, что используется в процессе установления типа движений носителя.

Литература

1. *Бильченко Г. Г.* Влияние подвижного груза на динамику носителя // Тезисы докладов международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвящённой памяти профессора В. Ф. Демьянова (CNSA – 2017, г. Санкт-Петербург, 22–27 мая 2017 г.). — Ч. I. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. — С. 218–224.

2. *Бильченко Г. Г.* Влияние подвижного груза на движение носителя // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды XI Международной Четаевской конференции. – Т. 1. Секция 1. Аналитическая Механика. Казань,

13–17 июня 2017 г. — Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — С. 37–44.

3. *Бильченко Г. Г.* Движение носителя с подвижным грузом по горизонтальной плоскости // Сборник материалов международной конференции «XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ – 2017). Секции 1–4. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2017. — С. 58–61.

4. *Бильченко Г. Г.* Алгоритмы установления типа двусторонних движений носителя с подвижным грузом по горизонтальной плоскости // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. — Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2019. — С. 605–611.

5. *Бильченко Г. Г.* Об одном свойстве кривых, задаваемых определяющими уравнениями. Часть 1. // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. — Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2019.

О РАЗВИТИИ ТЕОРИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ВКЛАДЕ М.А. КРАСНОСЕЛЬСКОГО[4]

Е.М. Богатов

(Старый Оскол-Губкин; *embogatov@inbox.ru*)

В начале XX в. в математическом мире обнаружился интерес к матрицам вида

$$A = \{a_{ij} \geq 0\}. \qquad (1)$$

[4]Работа выполнена при поддежке РФФИ, проект 20-011-00402.

С одной стороны, это было связано с изучением малых колебаний упругих континуумов (развитие идей Ш.Ф. Штурма), а сдругой - с появлением марковских цепей и стохастических матриц. Первые результаты о положительных собственных значениях матриц (1) были получены О. Перроном и Ф.Г. Фробениусом в 1907-1908 гг. [1][5].

Исследования И. Фредгольма и Д. Гильберта открыли дорогу для обобщения теоремы Перрона-Фробениуса[6] на интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода с положительным ядром. Это обобщение было выполнено учеником Фробениуса Р. Ентчем в 1912г. [1].

Более интересные результаты были получены московским математиком П.С. Урысоном в 1918 г. [1] в контексте исследования положительной разрешимости нелинейного уравнения

$$y = \mu \int_a^b K(x, s, y(s))ds. \qquad (2)$$

Урысон доказал существование положительных собственных значений (2), пользуясь методом последовательных приближений и оценил спектральный интервал порожденного задачей (2) оператора.

В 1935 г. П.С. Александров и Х. Хопф продемонстрировали оригинальный подход к доказательству теоремы существования положительных решений матричного уравнения

$$Ay = \lambda y, \qquad (3)$$

применив теорему Брауэра о неподвижной точке [1].

[5]Ссылка на работу [1] здесь и далее означает, что в ней имеются выходные данные статей цитируемых в тексте авторов.

[6]О существовании наибольшего по модулю собственного значения матрицы (1).

Дальнейшее продвижение в исследованиях положительных решений (3), где A – положительный оператор произвольной природы, оказалось более естественным проделывать в функционально-аналитическом контексте. Оно было связано с именем М.Г. Крейна, который ввёл понятие конуса K в банахово пространство E и позитивного функционала в K, исследуя проблему моментов[7].

Отметим, что понятие позитивного функционала было также дано в работе Л.В. Канторовича [2] также в рамках исследования проблемы моментов (1937). Более того, конце 1930-х гг. им была создана теория полуупорядоченных пространств, позволяющая, в частности, ответить на вопрос о положительной разрешимости уравнений вида (3) в одной из самых общих постановок [1].

С конца 1930-х гг. М. Крейн вместе со своим учеником М. Рутманом стали активно разрабатывать теорию конусов в банаховых пространствах. При этом б*о*льшая часть результатов была получена ими для линейных операторов (в пространствах с конусом), и уже на их основе стало возможно обобщение теоремы Ентча на нелинейный случай. Итогом 10-летней работы М. Крейна и М. Рутмана стала фундаментальная статья, опубликованная в УМН в 1948 г. [1] и вошедшая в золотой фонд отечественной науки.

Следующий этап в развитии теории положительных операторов ассоциируется с именем М.А. Красносельского и воронежской математической школой [3]. С 1947 по 1952 г.,

[7]Здесь видятся минимум три побудительных мотива. Первый - дальнейщая "геометризация" банаховых пространств в стиле польской математической школы, обобщение теоремы Асколи-Мазура. Второй - возможность развития идей Александрова-Хопфа на основе теоремы Шаудера о неподвижной точке, в которой фигурирует выпуклое подмножество банахова пространства E, инвариантное относительно оператора A. И третий - изоморфность множества положительных функций из пространства $C[a, b]$ некоторому конусу $K \subset E$.

Красносельский работал в НИИ математики АН УССР, посещал семинары М.Г. Крейна по функциональному анализу и Н.Н. Боголюбова по нелинейной механике. Это оказало существенное влияние на его научное мировоззрение. В результате

- теория конусов попала в число приоритетных для Красносельского методов *исследования нелинейных интегральных уравнений*[8];
- знание передовых идей и актуальных задач нелинейной механики[9] дало возможность для проверки работоспособности разрабатываемых конусных методов.

В исследованиях М.А. Красносельского по теории положительных операторов можно выделить два отправных пункта - теоретический (восходящий к логике развития математики), и прикладной (относящийся к задачам нелинейной механики).

Отметим, что Красносельский не ограничился применением теории конусов к доказательству теорем существования решений уравнений вида (3), как это сделали М. Рутман, Э. Роте и Г. Биркгоф [1]. Он стал рассматривать эту теорию, как дополнительную возможность (наряду с вариационными методами, теорией ветвления и теорией вращения векторных полей) для изучения качественных свойств решений уравнения (3) с нелинейным оператором A, действующим в банаховом пространстве. Сюда, в том числе, входил поиск ответа на вопросы о структуре и кратности спектра A, о структуре множества собственных функций A,

[8] Основной темой исследований М.А. Красносельского в то время.

[9] Модельной задачей, рассматриваемой Красносельским, приводящей к уравнению (2), была задача о продольном изгибе шарнирно-опёртого стержня переменной жёсткости.

об условиях сходимости метода последовательных приближений (3) и др.

Деятельность Красносельского предполагала наличие активных участников научного процесса, в первую очередь студентов и аспирантов. Почти сразу после своего приезда в Воронеж (1952 г.) он привлёк к научной работе в указанной области молодых математиков - Л.А. Ладыженского, И.А. Бахтина, В.Я. Стеценко, Ю.В. Покорного и др. Прицип разработки нового научного направления, характерный для Красносельского, был сформулирован в статье Б.Н. Садовского [4, с.147]:

"*...Стержнем работы являлся всегда семинар с обязательным привлечением сотрудников факультета, аспирантов и студентов. За 3-4 года по данной тематике готовилось и издавалось в журналах 2-3 десятка публикаций, содержащих оригинальные результаты. Одновременно, с самого начала, обычно писался и текст монографии, который в последующем претерпевал ряд изменений...* "

Итогом 10-летней деятельности созданного Красносельским научного коллектива явилась монография [5], переведённая в 1964 г. на английский язык.

Одним из наиболее интересных (с моей точки зрения) результатов, нашедших своё продолжение в дальнейшем в работах отечественных и зарубежных математиков [6, с. 4-5] явилась так называемая "*конусная теорема Красносельского о неподвижной точке*" [5, гл. 4, §2,4]:

Пусть вполне непрерывный оператор A сжимает или растягивает конус K. Тогда оператор A имеет в конусе K по крайней мере одну неподвижную точку.

Специалист по нелинейному функциональному анализу, профессор М.К. Квонг (КНР) указывает на то, что данная теорема может быть интерпретирована за рамками метрического восприятия и тем самым *поставлена в один ряд с* *теоремой о неподвижной точке Брауэра-Шаудера* [6, с. 2].

Усилиями Красносельского и его учеников теория положительных операторов внесла весомый вклад в развитие нелинейного функционального анализа (1950-1970 гг.). Отметим здесь появление *новых* типов операторов и теорем о неподвижной точке, *новых* методов исследования спектральных свойств операторов и *ранее неизвестных* применений производных операторов (по конусу).

В докладе будут представлены некоторые подробности развития теории конусов в работах воронежской математической школы и анализ дальнейшего развития этой теории в исследованиях отечественных и зарубежных учёных (1960 – 1980 гг.) с использованием результатов [7].

Литература

1. *Богатов Е.М.* Об истории теории конусов и полуупорядоченных пространств (в контексте развития нелинейного функционального анализа) / В сб. Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVI междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения проф. Мишеля Деза (13-18 мая 2019). - Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого. 2019. с. 322-325.

2. *Канторович Л.В.* К проблеме моментов для конечного интервала // Доклады АН СССР, Т. XIV (1937), вып. 9. С. 531-536.

3. *Садовский Б.Н.* Научная школа М.А. Красносельского в Воронеже / В сб. Материалы к истории математического факультета ВГУ. Воронеж, ВГУ, 1998. с. 34-50.

4. Марк Александрович Красносельский. К 80-летию со дня рождения. Сб. статей. М.: ИППИ РАН, 2000. - 216 с.

5. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962. - 394 с.

6. *Kwong M. K.* The topological nature of Krasnoselskii's cone fixed point theorem // Nonlinear Analysis: Theory, Methods

& Applications. - 2008. - V. 69. - Iss. 3. - p. 891-897.

7. *Богатов Е.М.* О развитии теории конусов в работах отечественных математиков / В сб. Годичная научная конференция ИИЕТ РАН им. С.И. Вавилова, 2019. Саратов: Амирит, 2019. с. 224-227.

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ СЕМЕЙСТВАХ НА МНОГООБРАЗИИ С НЕГЛАДКИМ КРАЕМ

В.Б. Васильев
(Белгород; *vbv57@inbox.ru*)

Материал этого доклада основан на двух авторских препринтах [1,2], которые развивают абстрактные операторные идеи И.Б. Симоненко [3] с одной стороны и факторизационные идеи Г.И. Эскина для эллиптических символов псевдодифференциальных операторов с другой стороны [4].

Рассматриваются специальные классы операторов, действующих в функциональных пространствах на многообразиях. Такие операторы называются операторами локального типа и определяются с точностью до компактного оператора [3]. Этот подход можно назвать операторно-геометрической трактовкой хорошо известного локального принципа. Описываются в абстрактной форме условия фредгольмовости рассматриваемых операторов и показывается, как эти результаты можно применить к исследованию эллиптических псевдодифференциальных операторов на многообразиях с негладкой границей.

Пусть M – компактное многообразие с краем ∂M, и $A(x)$ – некоторая оператор-функция, определенная на M. Выделим на границе ∂M подмногообразия $M_k, k = 0, 1, ..., m-1$, как гладкие k-мерные многообразия так, что по определению $M_{m-1} \equiv \partial M, M_0$ представляет собой совокупность изолированных точек $\partial M, M_m \equiv M$. Наконец, введем множество классов операторов $\mathrm{T}_k, k = 0, 1, ..., m$, так, что для

$x \in M_k$ оператор $A(x) : H_k^{(1)} \to H_k^{(2)}$ является линейным ограниченным оператором, а $H_k^{(j)}, k = 0, 1, ..., m, j = 1, 2,$ – некоторые банаховы пространства.

Такое подмногообразие M_k мы называем сингулярным k-подмногообразием, если для всех $x \in M_k$ имеет место включение $A(x) \in \mathrm{T}_k$.

Теорема 1. *Если семейство $A(x)$ состоит из локальных фредгольмовых операторов и непрерывно на каждой компоненте $\overline{M_k \setminus \cup_{i=0}^{k-1} M_i}, k = 0, 1, ..., m,$ то оно порождает единственный фредгольмов оператор A', действующий в пространствах прямых сумм $\sum\limits_{k=0}^{m} \oplus H_1^{(k)} \to \sum\limits_{k=0}^{m} \oplus H_2^{(k)}$.*

Такой оператор A' мы называем виртуальным оператором, соответствующим семейству $A(x)$. Виртуальный оператор A' называется эллиптическим, если семейство $A(x)$ состоит из фредгольмовых операторов для всех $x \in M$.

Предложенная абстрактная схема применяется для исследования псевдодифференциального оператора A на m-мерном компактном многообразии M с краем, содержащим особенности. Такой оператор обычно определяют с помощью символа $A(x, \xi), (x, \xi) \in \mathbf{R}^{2m}$ (здесь мы используем локальные координаты; обычно символ задается на (ко)касательном расслоении). Предполагается, что на границе ∂M имеются гладкие компактные подмногообразия M_k размерности $0 \le k \le m - 1$, которые представляют собой особенности границы. Эти особенности границы описываются специальными локальными представителями оператора A в точке $x_0 \in M$ на карте $U \ni x_0$ следующим образом

$$(A_{x_0} u)(x) = \int\limits_{D_{x_0}} \int\limits_{\mathbf{R}^m} e^{i\xi \cdot (x-y)} A(\varphi(x_0), \xi) u(y) d\xi dy, \quad x \in D_{x_0},$$

где $\varphi : U \to D_{x_0}$ – диффеоморфизм, и каноническая область D_{x_0} имеет разную форму в зависимости от расположения точки x_0 на многообразии M. Рассматриваются следующие канонические области: D_{x_0}: $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m_+ = \{x \in \mathbf{R}^m : x = (x', x_m), x_m > 0\}, W^k = \mathbf{R}^k \times C^{m-k}$, где C^{m-k} – выпуклый конус в $\mathbf{R}^{m-k}$. Другими словами, граница ∂M может содержать конические точки и ребра различных размерностей.

Псевдодифференциальный оператор A изучается в пространствах Соболева–Слободецкого $H^s(M)$, и в качестве локального варианта этих пространств выбираются пространства $H^s(D_{x_0})$.

Можно предложить следующие достаточные условия фредгольмовости.

Теорема 2. *Предположим, что классический эллиптический символ $A(x,\xi), x \in M_k$, допускает k-волновую факторизацию относительно конусов C^{m-k} с индексами $\kappa_k(x), k = 0, 1, \cdots, m-2$ [5], удовлетворяющими условиям:*

$$|\kappa_k(x) - s| < 1/2, \quad \forall x \in M_k, \quad k = 0, 1, \cdots, m-1. \qquad (1)$$

Тогда оператор $A : H^s(M) \to H^{s-\alpha}(M)$ фредгольмов.

Замечание. *Если эллиптичность нарушается на подмногообразиях M_k, рассматриваются модификации оператора A с привлечением граничных или кограничных операторов* [4, 5]. *В частности, это происходит, когда нарушается одно из условий* (1).

Литература

1. *Vasilyev V.B.* Operator symbols. ArXiv: Math.FA/1901.06630, pp. 1–11.

2. *Vasilyev V.B.* Operator symbols. II. ArXiv: Math.FA/1911.08099, pp. 1–13.

3. *Симоненко И.Б.* Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих. Ростов-на-Дону, ЦВВР, 2007. —120 с.

4. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. — 232 с.
5. *Васильев В.Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: КомКнига, 2010.—135 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ БИЛЛИАРДАМИ НА КЛЕТОЧНЫХ КОМПЛЕКСАХ[10]

В.В. Ведюшкина
(Москва; *arinir@yandex.ru*)

В работе [1] А.Т. Фоменко выдвинул фундаментальную гипотезу о моделировании (реализации) биллиардами интегрируемых систем с двумя степенями свободы. В настоящей работе мы анализируем раздел C этой гипотезы.

Гипотеза C (реализация меченых молекул). Широкий класс инвариантов Фоменко–Цишанга (т.е. меченых молекул [2], задающих с точностью до лиувиллевой эквивалентности множество всех интегрируемых систем), которые моделируются интегрируемыми биллиардами. Тем самым, для многих невырожденных интегрируемых систем их слоения Лиувилля на инвариантных трехмерных поверхностях (возможно, все такие слоения) послойно гомеоморфны слоениям интегрируемых биллиардных систем из подходящего класса.

В данный момент эта гипотеза доказана для большого числа интегрируемых гамильтоновых систем, известных в математической физике, механике и геометрии. В частности, для многих классических случаев интегрируемости в динамике твердого тела (например, для многих зон энергии

[10]Работе выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук.

случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева–Чаплыгина, Клебша, Соколова, Стеклова, Ковалевской–Яхьи и др.). Гипотеза C также доказана В. В. Ведюшкиной и А. Т. Фоменко для всех интегрируемых при помощи линейных и квадратичных интегралов геодезических потоков на ориентированных замкнутых двумерных поверхностях, т.е. для потоков на торе и на сфере.

В качестве естественного класса плоских интегрируемых биллиардов рассматриваются биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик. Такие биллиарды называются в работах В.В.Ведюшкиной элементарными. Их интегрируемость эквивалентна малой теоремы Понселе: любая траектория такого биллиарда лежит на прямых, касательных к некоторой квадрике — эллипсу или гиперболе – софокусных с квадриками, образующими границу биллиарда. Топологические биллиарды и биллиардные книжки получаются склейками таких биллиардов вдоль сегментов их границ. Если вдоль граничного сегмента склеено больше двух элементарных биллиардов-листов (случай биллиардной книжки), то этому ребру склейки необходимо приписать перестановку, которая определяет порядок перехода биллиардной частицы с одного биллиарда на другой при ударе об это ребро склейки. Очевидно, что биллиардные книжки, также как и элементарные биллиарды, интегрируемы с той же парой интегралов.

Вопрос о справедливости гипотезы Фоменко C в полном объеме пока неясен. В связи с этим А.Т. Фоменко сформулировал "локальный" вариант гипотезы C, являющийся "максимальным упрощением" общей гипотезы C.

1. Пусть γ — произвольное ребро с метками r, ε некоторой меченой молекулы W^*. Тогда существует интегрируемый биллиард, реализующий такую комбинацию чисел r, ε на одном из ребер своей меченой молекулы.

Отметим, что имеются следующие четыре варианта: метка $r = p/q$ конечна, и $\varepsilon = \pm 1$; метка $r = \infty$, и $\varepsilon = \pm 1$.

2. (усиление пункта **1**) В условиях пункта **1** существует подходящий биллиард, реализующий произвольную пару меток r и ε на ребре между любыми, наперед заданными атомами.

3. Пусть S — семья с целочисленной меткой n в некоторой меченой молекуле W^* интегрируемой системы. Тогда существует интегрируемый биллиард, реализующий некоторую семью с точно такой же целочисленной меткой n.

4. (усиление пункта **3**) В условиях пункта **2** существует подходящий биллиард, реализующий не только данную метку n, но и саму семью, т.е. граф с нужными атомами и нужным набором ребер.

5. (реализация меченой окрестности любой семьи) Пусть S — семья с целочисленной меткой n в некоторой меченой молекуле, причем внешние ребра γ_i семьи оснащены произвольными метками r_i, ε_i. Тогда существует подходящий биллиард, реализующий такой меченый подграф в своей меченой молекуле.

Анализу и частичному доказательству этой гипотезы посвящен доклад.

Литература

1. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности. Вестн.Моск.Унив., Серия Матем. и Мех. 2019. **3**. 15–25.

2. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Изв. АН СССР.Матем., 1990.**54**, №3. 546–575.

ПРОБЛЕМА ФЕРМА–ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ КОМПАКТНЫХ

ПОДМНОЖЕСТВ $\mathbb{R}^m$ С МЕТРИКОЙ ХАУСДОРФА[11]

А.Х. Галстян
(Москва; *ares.1995@mail.ru*)

Проблема Ферма–Штейнера состоит в поиске всех точек метрического пространства Y таких, что сумма расстояний от каждой из них до точек из некоторого фиксированного конечного подмножества A пространства Y минимальна [1]. Мы изучаем эту проблему в случае, когда Y — это пространство компактных подмножеств евклидового пространства $\mathbb{R}^m$, наделённого метрикой Хаусдорфа, а точки из A — это конечные попарно непересекающиеся компакты в $\mathbb{R}^m$.

Множество $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ изначально заданных компактных подмножеств называется *границей*, а каждое A_i — граничным компактом. Положим $A_i = \bigcup_{j=1}^{m_i}\{a_j^i\}$. Подмножества, которые реализуют минимум суммы расстояний до граничных компактов, называются *компактами Штейнера*. Мы обозначаем множество всех компактов Штейнера через $\Sigma(A)$. Оно разбивается на попарно непересекающиеся классы $\Sigma_d(A)$, где $d = (d_1, \ldots, d_n)$, а d_i — это расстояние Хаусдорфа от компакта $K \in \Sigma_d(A)$ до A_i.

Известно [2], что каждый класс $\Sigma_d(A)$ содержит в себе единственный компакт K_d, который максимален по включению, а также некоторое количество минимальных по включению компактов. Через $B_r(y) \subset Y$ мы обозначаем замкнутый шар с центром в точке y радиуса r. Мы показываем, что для каждых d, i и j справедливо $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d \neq \emptyset$. Если это множество конечно, мы обозначаем его через $\mathrm{HP}(a_j^i)$, иначе полагаем $\mathrm{HP}(a_j^i) = \emptyset$. Также пусть $\mathrm{HP}(A) = \bigcup \mathrm{HP}(a_j^i)$. Все

[11]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

результаты ниже справедливы для любой конечной границы $A = \{A_1, \dots, A_n\}$.

Теорема 1. *Существуют такие* $i \in \{1, \dots, n\}$ *и* $j \in \{1, \dots, m_i\}$, *что множество* $B_{d_i}(a_j^i) \cap K_d$ *имеет лишь конечное число точек.*

Следствие 2. *Пусть* K *— компакт Штейнера в классе* $\Sigma_d(A)$. *Тогда* $K \cap \partial K_d \neq \emptyset$.

Теорема 3. *Минимальный компакт* $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ *является конечным множеством, количество его точек не превосходит* $\sum_{i=1}^n m_i - n + 1$, *а в случае, когда имеется больше одного* i, *для которого* $m_i > 1$, *оно не превосходит* $\sum_{i=1}^n m_i - n$, *где* n *— количество граничных компактов. В обоих случаях оценка точна.*

Теорема 4. *Компакт* $K \subset \mathbb{R}^m$ *является минимальным компактом Штейнера в классе* $\Sigma_d(A)$ *тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три следующие условия:*

(1) K *— конечное подмножество* K_d;

(2) $K \cap B_j^i \neq \emptyset$ *для любых* $i \in \{1, \dots, n\}$ *и* $j \in \{1, \dots, m_i\}$;

(3) *Для любого* $p \in K$ *существуют* $i \in \{1, \dots, n\}$ *и* $j \in \{1, \dots, m_i\}$ *такие, что* $\big(K \setminus \{p\}\big) \cap B_j^i = \emptyset$.

Теорема 5. *Минимальный компакт Штейнера* K_λ *— единственный минимальный в* $\Sigma_d(A)$ *тогда и только тогда, когда для каждой точки* $p \in K_\lambda$ *существует точка* a_j^i *такая, что* $\mathrm{HP}(a_j^i) = \{p\}$.

Будем говорить, что на точке $p \in \mathbb{R}^m$ *реализуется расстояние* d_i, если существует $a_j^i \in A_i$ такая, что $|a_j^i p| = d_i$.

Теорема 6. *Для каждого минимального компакта* $K_\lambda \in \Sigma_d(A)$ *и любого номера* i *существует точка* $p \in K_\lambda$ *такая, что на ней реализуются по крайней мере два расстояния* d_i *и* d_k $(i \neq k)$.

Автор выражает благодарность своим научным руководителям, профессору А. А. Тужилину и профессору А. О. Иванову, за постановку задачи и постоянное внимание к ней в процессе совместной работы.

Литература

1. *Ivanov A., Tuzhilin A.* Branching Solutions To One-Dimensional Variational Problems. World Scientific, 2001. 364 p.

2. *Ivanov A., Tuzhilin A., Tropin A.* Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance. Journal of Geom. 108, 2017. 575–590 pp.

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ МАТРИЦЫ

Г.В. Гаркавенко, Д.Г. Усков
(Воронеж; *g.garkavenko@mail.ru, uskov.dan@mail.ru*)

Рассматривается бесконечная матрица $\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, элементы которой задаются формулами $\mathcal{A}(n, n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(n, m) = 1/(n - m)^2$, $n \neq m$, n, $m \in \mathbb{N}$. Рассматриваемую матрицу можно представить в виде $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 - B$, где $\mathcal{A}_0 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — диагональная матрица, т. е. $\mathcal{A}_0(n, n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{A}_0(n, m) = 0$, $n \neq m$. Матрица B будет иметь нулевую главную диагональ, остальные ее элементы $B(n, m) = -1/(n - m)^2$, $n \neq m$, n, $m \in \mathbb{N}$. Отметим, что матрица B является теплицевой матрицей с суммируемыми диагоналями. Рассматривается вопрос приближенного нахождения собственных значений матрицы $\mathcal{A}$.

При применении проекционных методов в вопросах приближенного нахождения собственных значений [1] обычно вместо матрицы $\mathcal{A}$ рассматривают последовательность конечномерных матриц $\mathcal{A}_n$, собственные значения которых считают численно и далее полученные последовательности собственных значений используются в качестве приближений к искомым собственным значениям. Но здесь возникает вопрос обоснования проекционного метода (метода Галеркина). Важным является тот факт, что собственные значения λ_n, $n \in \mathbb{N}$, диагональной матрицы $\mathcal{A}_0$ стремятся к бесконечности, поэтому при конечном $n \in \mathbb{N}$ имеем $\|\mathcal{A} - \mathcal{A}_n\| \to \infty$. Таким образом, если рассматривать матрицу $\mathcal{A}$ как возмущение конечномерной матрицы $\mathcal{A}_n$, то возмущение не является матрицей ограниченного оператора.

Подойдем к методу Галеркина с точки зрения метода подобных операторов.

Пусть задано семейство матриц P_n, $n \in \mathbb{N}$, таких, что каждая из матриц P_i имеет только один ненулевой элемент $P_i(i,i) = 1$, а остальные элементы равны нулю и $P_{(n)} = \sum_{i \leqslant n} P_i$.

Согласно [2, Теорема 19.2] матрицы $\mathcal{A}_0 - B$ и

$$\mathcal{A}_0 - P_{(n)}\mathcal{X}P_{(n)} - \sum_{i>n} P_i\mathcal{X}P_i = \mathcal{A}_0 - J_n\mathcal{X}$$

$$= \mathcal{A}_0 P_{(n)} - P_{(n)}\mathcal{X}P_{(n)} + \sum_{i>n}(\mathcal{A}_0 P_i - P_i\mathcal{X}P_i),$$

где $\mathcal{X}$ — решение уравнения метода подобных операторов, подобны, если выполнено условие $\pi^2/(3(2n+1)) < 1/4$. В этом случае $\sigma(P_{(n)}(\mathcal{A}_0 - B)P_{(n)}) = \sigma(\mathcal{A}_0 P_{(n)} - P_{(n)}\mathcal{X}P_{(n)})$. Но нам известна не сама матрица $\mathcal{X}$, а последовательные приближения к ней, причем первым приближением является матрица B, а также известна оценка $\|J_n\mathcal{X} - J_n B\| = \mathcal{O}((2n+1)^{-1})$. Таким образом, для собственных значений λ_k, $k \in \mathbb{N}$, матрицы $\mathcal{A}$ и соответствующих собственных значений λ_{kn} последовательности матриц A_n, $n \geqslant k$, имеет место оценка $|\lambda_k - \lambda_{kn}| = \mathcal{O}((2n+1)^{-1})$, $n \geqslant k$.

Проведен вычислительный эксперимент, результаты которого полностью согласуются с вышеизложенным.

Отметим, что вопросы асимптотической оценки элементов бесконечных матриц с помощью метода подобных операторов рассматривались, например, в [3 - 6].

Литература

1. *Красносельский М. А. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1967. 456 с.

2. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. - 165 с.

3. *Бройтигам И. Н., Поляков Д. М.* Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц — Уфимск. матем. журн. 11:3 (2019), С. 10-29.

4. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О диагонализации некоторых классов матриц — В сборнике: Информационные технологии в науке, образовании и производстве (ИТНОП-2018). VII Международная научно-техническая конференция. Сборник трудов конференции. 2018. С. 539-542.

5. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Асимптотика собственных значений операторов с ленточной матрицей и полугруппыоператоров — Вопросы науки. – 2016. – Т. 1. – С. 27-30.

6. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О собственных значениях одного разностного оператора — В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015). Сборник трудов VIII международной конференции. – 2015. – С. 369-371.

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В.Ю. Гончаров, Л.А. Муравей

(Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), РГУ имени А.Н. Косыгина; *fulu.happy@gmail.com, l_muravey@mail.ru*)

Экстремальные задачи, в которых функционал цели представляет собой собственное число некоторой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, встречаются в различных приложениях. В работе рассматриваются две такие задачи, относящиеся к классу задач оптимального проектирования элементов механических конструкций, связанных с потерей устойчивости.

Первая задача состоит в определении оптимального распределения толщины обшивки тонкого прямого крыла, для которого критическая скорость дивергенции (превышение которой приводит к разрушению крыла) максимальна, а масса имеет заданное значение. Краевая задача на собственные значения имеет вид

$$\begin{gathered}(a^3u\theta')'(x) + \lambda\,(a^2\theta)(x) = 0, \quad x \in \Omega \triangleq (0,1),\\ \theta(0) = 0, \quad (a^3u\theta')(0) = 0.\end{gathered} \tag{$\mathcal{E}_1$}$$

Здесь u — фиксированное распределение толщины обшивки крыла, выступающее в качестве управляющей переменной; a — длина хорды профиля крыла. Наименьшее собственное значение $\lambda_1[u]$ краевой задачи $(\mathcal{E}_1)$ соответствует критической скорости дивергенции. Собственная функция θ, соответствующая первому собственному значению краевой задачи $(\mathcal{E}_1)$, представляет собой распределение угла закручивания крыла по размаху при скорости дивергенции. Будем предполагать, что $a \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, $a(x) \geq a_0 > 0$ для всех $x \in \Omega$. Пусть $0 < \alpha < \beta < +\infty$.

Масса обшивки крыла определяется формулой

$$M[u] = \int_0^1 a(x)u(x)\,dx.$$

Введем множество

$$\mathcal{U}(m) = \{u \in L_\infty(\Omega) :\ \alpha \leq u(x) \leq \beta,\ M[u] = m\}$$

допустимых распределений толщины обшивки крыла, предполагая, что параметры α, β и m выбраны так, что множество $\mathcal{U}(m)$ является непустым. Математическая формулировка рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$\text{найти}\ \ \hat{u} \in \mathcal{U}(m) :\ \lambda_1[\hat{u}] = \sup_{u \in \mathcal{U}(m)} \lambda_1[u]. \tag{$\mathcal{P}_1$}$$

Поскольку допустимые управления принадлежат классу существенно ограниченных измеримых функций, оптимальное решение может не представлять практического интереса, например, в том случае, когда получаемая форма крыла будет иметь ступенчатые переходы. В связи с этим возникает необходимость исследования вопроса регулярности оптимального решения, т. е. определения класса функций, обладающих некоторой степенью гладкости (возможно, обобщенной), к которому указанное оптимальное решение относится.

Одно из первых исследований, посвященных теме задач оптимального проектирования крыльев летательных аппаратов, было проведено в работе Макинтоша и Истепа [1]. В указанной работе была поставлена близкая к $(\mathcal{P}_1)$ задача, состоящая в минимизации массы обшивки крыла при заданном значении скорости дивергенции, и получено выражение для оптимального решения в случае линейного распределения хорды. Их подход был обобщен Н. В. Баничуком в работе [2] на случай переменных параметров крыла и более общего типа краевых условий. Примечательно, что в [1] и [2] на распределение толщины обшивки крыла не накладываются никакие ограничения и, как следствие, полученные там оптимальные решения обращаются в нуль в точке, соответствующей свободному концу крыла. Поэтому представляет интерес рассмотрение случая наличия положительной нижней грани для значений толщины обшивки крыла, который учитывается в приведенной нами постановке. Задача минимизации массы обшивки прямоугольного крыла, отвечающая случаю $a(x) \equiv 1$, при заданном значении скорости дивергенции была рассмотрена Ж.-Л. Арманом и В. Дж. Витте в [3], где рассмотрен как случай без ограничений, так и случай общей положительной нижней грани для значений толщины, а также дан вывод аналитических решений. Кроме того, следует отметить работу Ю. А. Арутюнова и А. П. Сейраняна [4], в которой рассмотрена задача минимизации массы обшивки крыла при дополнительных интегральных ограничениях. Подробный литературный обзор по задачам оптимального проектирования летательных аппаратах в связи с явлением дивергенции приводится в работе [5].

Приведем основные результаты для задачи $(\mathcal{P}_1)$.

Теорема 1. *Существует единственное решение задачи* $(\mathcal{P}_1)$, *причем элемент* $\hat{u} \in \mathcal{U}(m)$ *является решением тогда и только тогда, когда для некоторой не равной тождественно нулю функции*

$$\hat{y} \in W \triangleq \{y \in H^1(\Omega) : \ y(1) = 0\}$$

пара $(\hat{u}, \hat{y})$ *является седловой точкой функционала*

$$\Lambda(u, y) = \int_0^1 \frac{y'^2(x)}{a^2(x)}\, dx \bigg/ \int_0^1 \frac{y^2(x)}{a^3(x)u(x)}\, dx$$

на множестве $\mathcal{U}(m) \times (W \setminus \{0\})$, *т. е. выполняются следующие неравенства*

$$\Lambda(u, \hat{y}) \le \Lambda(\hat{u}, \hat{y}) \le \Lambda(\hat{u}, y), \quad (u, y) \in \mathcal{U}(m) \times (W \setminus \{0\}) \,. \quad \text{(SP)}$$

Необходимое и достаточное условие оптимальности (SP) позволяет заменить задачу $(\mathcal{P}_1)$ эквивалентной задачей поиска седловой точки функционала $\Lambda(\cdot, \cdot)$. Сделанное замечание лежит в основе доказательств следующих утверждений.

Теорема 2. *Решение* $\hat{u}$ *задачи* $(\mathcal{P}_1)$ *является непрерывной по Липшицу функцией. Кроме того, задача* $(\mathcal{P}_1)$ *является корректной в смысле Адамара относительно параметра* m, *причем непрерывная зависимость от параметра* m *для оптимального решения имеет место в смысле сходимости по норме пространства* $C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$, *где* $\kappa \in (0, 1)$.

Теорема 3. *Пусть $u_0 \in \mathcal{U}(m)$. Рассмотрим последовательность $\{u_n\}$, каждый элемент которой определяется как решение экстремальной задачи*

$$\Lambda(u_{n+1}, y_n) = \sup_{u \in \mathcal{U}(m)} \Lambda(u, y_n),$$

где y_n обозначает собственную функцию, отвечающую собственному значению $\lambda_1[u_n]$. Тогда если

$$\frac{1}{u_n} \xrightharpoonup{*} \frac{1}{u_*},$$

то последовательность $\{u_n\}$ в действительности сходится к оптимальному решению $\hat{u}$ в $C^{0,\kappa}(\bar{\Omega})$ для любого значения $\kappa \in (0, 1)$.

Теорема 3 в сущности дает метод отыскания оптимального решения, причем если в результате численного решения последовательность приближений сходится поточечно, то она сходится к оптимальному решению в соответствии с утверждением теоремы 3 в пространствах Гёльдера. В рамках обсуждения предполагается также уделить внимание вопросу о сходимости последовательностей приближений к оптимальному решению, порождаемыми другими итерационными методами.

Доказательства всех приведенных утверждений для задачи $(\mathcal{P}_1)$ приводятся в [5].

Вторая часть обсуждения посвящена задаче об определении оптимальной формы жестко фиксированной неоднородной колонны, для которой критическая сила, приводящая к потере устойчивости колонны, максимальна, а масса колонны имеет заданное значение. Эта проблема является вариацией известной задачи Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны.

Краевая задача на собственные значение имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} (eu^{\nu}y'')''(x) + \lambda y''(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0. \end{gathered} \tag{$\mathcal{E}_2$}$$

Будем предполагать, что $e, \rho \in L_\infty(\Omega)$, причем для некоторых положительных постоянных e_0, ρ_0 и п. в. $x \in \Omega$ выполняются неравенства $e(x) \geq e_0$, $\rho(x) \geq \rho_0$. При указанных предположениях будем рассматривать обобщенную постановку задачи ($\mathcal{E}_2$). Здесь e — модуль упругости материала колонны, а ρ — его переменная плотность. Как и ранее, u выступает управляющей переменной, но характеризует площадь поперечных сечений колонны. Параметр $\nu > 0$ задает тип сечения. Первое собственное значение $\lambda_1[u]$ краевой задачи ($\mathcal{E}_2$) соответствует критической силе, при которой происходит потеря устойчивости колонны. Масса колонны определяется формулой

$$M[u] = \int_0^1 \rho(x)u(x)\,dx.$$

Для заданного значения m массы колонны определим множество

$$\mathcal{U} = \{u \in L_\infty(\Omega) : \ \alpha \leq u(x) \leq \beta, \ M[u] = m\}$$

допустимых распределений площади поперечных сечений колонны, которое будем считать непустым. Рассматриваемая задача формулируется следующим образом:

$$\text{найти } \ \hat{u} \in \mathcal{U} : \ \lambda_1[\hat{u}] = \sup_{u \in \mathcal{U}} \lambda_1[u]. \tag{$\mathcal{P}_2$}$$

Можно показать, что функционал $\lambda_1[\cdot]$ в задаче ($\mathcal{P}_2$) является слабо* полунепрерывным сверху при $\nu \in (0, 1]$ (см. [6]).

Вместе с тем в приложениях параметр ν принимает только натуральные значения. Поэтому возникает необходимость в отыскании другого способа, позволяющего установить разрешимость задачи $(\mathcal{P}_2)$ и для остальных значений параметра ν.

Задача $(\mathcal{P}_2)$ для однородной колонны, отвечающей случаю $e(x) = \rho(x) \equiv 1$, подробно была рассмотрена в работе [7], в которой доказательство существования оптимального решения проведено с использованием соображений симметрии и утверждения о существовании положительной собственной функции, соответствующей первому собственному значению задачи $(\mathcal{E}_2)$. Указанные особенности доказательства объясняются тем, что в общей ситуации при осуществлении предельного перехода получившаяся краевая задача может отвечать старшему собственному значению. Отмеченная трудность, естественно, возникает и при исследовании задачи $(\mathcal{P}_2)$ в приведенной нами постановке. Заметим, что эта проблема в принципе является общей для ряда задач оптимального проектирования, постановка которых вовлекает собственные значения в качестве основного функционала. Кроме того, представляют интерес способы доказательства разрешимости экстремальных задач для собственных значений, не использующие характерных свойств собственных функций, сохраняющихся при предельных переходах, поскольку информации о них просто может и не быть.

Основной результат для задачи $(\mathcal{P}_2)$ заключен в следующем утверждении.

Теорема 4. *Задача $(\mathcal{P}_2)$ об определении оптимальной формы неоднородной колонны обладает решением для любого $\nu > 0$.*

Литература

1. *McIntosh S.C., Eastep F.E.* Design of minimum-mass structures with specified stiffness properties // AIAA Journal.

1968. Vol. 6. No. 5. Pp. 962–964.

2. *Баничук Н.В.* Минимизация веса крыла при ограничении по скорости дивергенции // Уч. зап. ЦАГИ. 1978. Т. 9. № 5. С. 97–103.

3. *Armand J.-L., Vitte W.J.* Foundations of aeroelastic optimization and some applications to continuous system. Stanford: Stanford University, 1970.

4. *Арутюнов Ю.А., Сейранян А.П.* Применение принципа максимума к задаче минимизации веса крыла летательного аппарата // Уч. зап. ЦАГИ. 1973. Т. 4. № 1. С. 55–70.

5. *Гончаров В.Ю., Муравей Л.А.* Минимизация массы тонкого прямого крыла при ограничении по скорости дивергенции // ЖВМ. 2019. Т. 59. № 3. С. 465–480.

6. *Goncharov V.Yu.* Existence criteria in some extremum problems involving eigenvalues of elliptic operators // J. Sib. Fed. Uni. 2016. Vol. 9. No. 1. Pp. 37–47.

7. *Cox S.J., Overton M.L.* On the optimal design of columns against buckling // SIAM J. Math. Anal. 1992. Vol. 23. No. 2. Pp. 287–325.

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ОДНОМЕРНЫМИ КОНСТАНТАМИ НИКОЛЬСКОГО–БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПОЛИНОМОМ И ФУНКЦИЙ[12]

Д.В. Горбачев, И.А. Мартьянов
(Тула; *dvgmail@mail.ru, martyanow.ivan@yandex.ru*)

Пусть $0 < p \le \infty$, $\mathcal{C}(n;p;r) = \sup \frac{\|T^{(r)}\|_{L^\infty[0,2\pi)}}{\|T\|_{L^p[0,2\pi)}}$ и $\mathcal{L}(p;r) = \sup \frac{\|F^{(r)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\|F\|_{L^p(\mathbb{R})}}$ — точные константы Никольского–Бернштейна

[12]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

для r-х производных тригонометрических полиномов степени n и целых функций экспоненциального типа 1 соответственно. Недавно Е. Левин и Д. Любинский (2015) доказали, что для констант Никольского

$$\mathcal{C}(n;p;0) = n^{\frac{1}{p}}\mathcal{L}(p;0)(1+o(1)), \quad n\to\infty.$$

М. Ганзбург и С. Тихонов (2017) обобщили этот результат на случай констант Никольского–Бернштейна:

$$\mathcal{C}(n;p;r) = n^{r+\frac{1}{p}}\mathcal{L}(p;r)(1+o(1)), \quad n\to\infty.$$

Также они показали существование в этой задаче экстремальных полинома $\tilde{T}_{n,r}$ и функции $\tilde{F}_r$ соответственно. Ранее мы дали более точные границы в результате типа Левина–Любинского, доказав, что для всех p и n

$$n^{\frac{1}{p}}\mathcal{L}(p;0) \le \mathcal{C}(n;p;0) \le (n+\lceil\tfrac{1}{p}\rceil)^{\frac{1}{p}}\mathcal{L}(p;0).$$

Мы устанавливаем близкие факты для случая констант Никольского–Бернштейна, из которых также вытекает асимптотическое равенство Ганзбурга–Тихонова. Результаты формулируется в терминах экстремальных функций $\tilde{T}_{n,r}$, $\tilde{F}_r$ (норма которых равна единице) и коэффициентов Тейлора $A_{s,i}$ ядра типа Джексона–Фейера $(\frac{\sin\pi x}{\pi x})^{2s}$. В частности, имеем

Теорема. *Пусть $p\in(0,\infty]$, $r,n\in\mathbb{Z}_+$, $s\in\mathbb{N}$.*

(i) *Если $2s\ge r+1$, $n\ge s-1$, то*

$$\mathcal{C}(n;p;r) \ge (n-s+1)^{r+\frac{1}{p}}\left(\mathcal{L}(p;r)+\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\frac{(-1)^i\binom{r}{2i}A_{s,i}\tilde{F}_r^{(r-2i)}(0)}{n^{2i}}\right).$$

(ii) *Если $n\ge 1$, $ps\ge 1$, то*

$$\mathcal{C}(n;p;r)+\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}(-1)^i\binom{r}{2i}A_{s,i}\tilde{T}_{n,r}^{(r-2i)}(0) \le n^r(n+s)^{\frac{1}{p}}\mathcal{L}(p;r),$$

где
$$|\tilde{T}_{n,r}^{(r-2i)}(0)| \leq n^{r-2i}(n + \lceil \tfrac{1}{p} \rceil)^{\frac{1}{p}} \mathcal{L}(p; 0).$$

КУЛЬТУРНО-ИСТОРИЧЕСКИЙ ДИСКУРС КАК МЕХАНИЗМ ТРАНСЛЯЦИИ ЦЕННОСТНОГО СОДЕРЖАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Л.В. Жук
(Елец, *krasnikovalarisa@yandex.ru*)

Актуализируется проблема реализации психодидактического подхода к организации процесса обучения математике в вузе. В качестве эффективного средства достижения личностно-ориентированных целей математического образования рассматривается культурно-исторический дискурс. Представлены примеры интеграции конкретно-исторического содержания в практику обучения бакалавров.

Ключевые слова: психодидактическая парадигма образования, культурно-исторический дискурс, диалектика математики, коммуникация, .

Отличительной особенностью математики как учебной дисциплины является высокая степень абстрактности объектов изучения. Наиболее ярко указанная специфика проявляется при обучении математике в вузе: освоение будущими бакалаврами понятий высшей алгебры, математического анализа, геометрии предполагает овладение теоретическими способами мышления через диалектическое восхождение от абстрактного к конкретному. При этом зачастую математическая теория представляется в виде списка определений, теорем и выводимых из них утверждений, подкрепляется набором упражнений и задач, ориентированных преимущественно на формально-логические действия с математическими объектами в стандартных ситуациях. Описанный формально-дедуктивный подход, традиционный для высшей школы, препятствует психическому развитию личности обучающихся в отношении таких качеств, как поисковая активность, креативность, достижению ими уровня понимания.

Одним из содержательных резервов реализации личностно-ориентированных целей математического образования бакалавров является культурно-исторический дискурс. Развивающий потенциал культурно-исторического дискурса заключается в формировании у обучающихся интереса к учению, представления об исторически взаимообусловленном единстве математики с другими составляющими духовной культуры, воспитании эстетического восприятия математики.

Культурно-исторический дискурс в математическом образовании предполагает использование математических суждений в адекватной целям математического образования интерпретации. Грамотное построение дискурса в процессе коммуникации отражает философское осмысление осваиваемых понятий, способов деятельности и культурных норм. Приведём некоторые примеры введения культурно-исторического дискурса в процесс обучения математике в вузе.

При изучении темы «Аффинная система координат на плоскости» мы формируем у будущих бакалавров представление о том, что идея координат возникла ещё у древних греков (Архимед, Аполлоний Пергский), однако её развитию помешал невысокий уровень древнегреческой алгебры и слабый интерес к кривым, отличным от прямой и окружности. Позднее, в 14 веке, Николай Орезмский использовал координатное изображение для функции, зависящей от времени, он называл координаты по аналогии с географическими - долготой и широтой. К этому времени развитое понятие о координатах уже существовало в астрономии и географии. Около 1637 года Ферма распространяет мемуар «Введение в изучение плоских и телесных мест», где выписывает и обсуждает уравнения различных кривых 2-го порядка в прямоугольных координатах, наглядно показывая, насколько новый подход проще и плодотворней чисто геометрического. Однако гораздо большее влияние имела «Геометрия» Декарта, вышедшая в том же 1637 году, которая независимо и гораздо более полно развивала те же идеи. Декарт включил в геометрию более широкий класс кривых, в том числе «механические» (трансцендентные, вроде спирали), построил их уравнения и провёл классификацию.

При изучении линий второго порядка студенты с интересом узнают, что эллипс, парабола и гипербола изначально были получены сечением прямого кругового конуса плоскостями, не проходящими через его вершину. Открывателем конических сечений считается Менехм (4 в. до н. э.), ученик Платона. Он использовал параболу и равнобочную гиперболу для решения задачи об удвоении куба. В свою очередь, Аполлоний Пергский (ок. 260-170 гг. до н.э.) в знаменитом трактате «Конические сечения», варьируя угол наклона секущей плоскости, получил все конические сечения, ему мы обязаны и современными их названиями.

Согласно типологии, предложенной Лео Роджерсом, можно выделить пять подходов к организации культурно-исторического дискурса в процессе обучения математике:

1) эмпирический подход - хронологическая реконструкция прошлого как исторического прогресса математических идей;

2) социально-культурный подход - рассмотрение истории математики в контексте общественного (экономического, политического, культурного, технологического) развития;

3) личностно-ориентированный подход - анализ индивидуальных творческих процессов, логики математических открытий, психологии изобретений;

4) концептуальный подход - реконструкция математических теорий прошлого в соответствии с современным состоянием математики;

5) герменевтический подход - вовлечение в реконструкцию математического знания уточненных исторических текстов.

При выборе преподавателем любого из перечисленных подходов культурно-исторический контекст должен быть непосредственно привязан к математическому образовательному контексту, то есть к конкретному математическому содержанию. В связи с этим актуален вопрос о разработке учебных пособий по различным разделам высшей математики, интегрирующих содержание культурно-исторического дискурса. Среди отечественных разработок, реализующих практику математического культурно-исторического дискурса, следует отметить элективный курс «Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс», предложенный А.Н. Земляковым [2]. В данном курсе ознакомление старшеклассников с основными линиями развития математического знания - числами, уравнениями, функциями, множествами – осуществляется в конкретно-историческом контексте: учащиеся знакомятся с историей развития алгебры и предысторией математического анализа, получают представления о взаимосвязях математики с другими науками и практикой.

Поводя итог, отметим, что интеграция культурно-исторического дискурса в процесс математического образования бакалавров способствует демонстрации целесообразности построения и развития математических теорий, дает возможность раскрыть диалектику математики, показать её как развивающуюся систему взаимосвязанных теорий и различных подходов к решению конкретных задач в их зарождении, представить математику как органичную и неотъемлемую часть системы научного познания мира, раскрыть роль личности математиков и математических сообществ в становлении человеческой цивилизации, сформировать личностное, психологическое отношение к предмету математики.

Литература

1. *Арутюнова Н.Д.* Дискурс. Речь // Лингвистический энциклопедический словарь. – М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия», 2002. – С. 136–137.

2. *Земляков А.Н.* Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс. Элективный курс: Учебное пособие/ Земляков А.Н. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. – 320с.

3. *Земляков А.Н.* Психодидактические аспекты углубленного изучения математики в старших классах общеобразовательной средней школы // Учебно-методическая газета «Математика». «Первое сентября». –№6. –2005. – С. 17-21.

ИНТЕГРИРУЕМЫЙ БИЛЛИАРД С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ[13]

В.Н. Завьялов

(Москва; *vnzavyalov@mail.ru*)

Пусть дана кусочно-гладкая кривая, ограниченная дугами софокусных квадрик (углы равны $\frac{\pi}{2}$). Определим систему биллиарда в области, ограниченной этой кривой. Шар

[13]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ(грант НШ-2554.2020.1).

(материальная точка) движется в области по прямолинейным отрезкам, с сохранением скорости и отражается от кривой по закону "угол падения равен углу отражения". При попадании в угол точка после отражения продолжает движение по той же прямой, по которой попала в этот угол.

В теории интегрируемых систем представляют интерес интегрируемые биллиарды, для которых вдоль траектории сохраняется дополнительная функция, функционально независимая от квадрата длины вектора скорости. Например, биллиард в окружности – любая траектория, касается меньшей окружности с тем же центром, т.е. радиус этой меньшей окружности есть интеграл. Биллиард в эллипсе также интегрируем – траектории (или их продолжения) касаются некоторого эллипса или некоторой гиперболы, софокусной с данным эллипсом [1]. Семейство софокусных квадрик можно задать уравнением

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda),$$

где $a > b > 0$. Пусть эллипс, который ограничивает биллиард соответствует параметру $\lambda = 0$. Вдоль траектории биллиарда сохраняется параметр λ квадрики, которой касаются траектории или её продолжения.

Определим новую интегрируемую систему, называемую биллиардом с проскальзыванием. Пусть даны два эллипса. При попадании на границу точка продолжает движение по второму эллипсу выходя из соответствующей ей симметричной точке на другом эллипсе под тем же углом. Аналогично можно определить систему при которой точка после отражения продолжает движение по тому же эллипсу, но выходит из диаметрально противоположной точки, "проскальзывая". Заметим, что обе системы по прежнему останутся интегрируемыми с тем же интегралом, что и классический биллиард в эллипсе. Это позволяет изучить топологию соответствующей изоэнергетической поверхности, используя теорию инвариантов интегрируемых систем Фоменко-Цишанга [2].

Литература

1. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.

2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1,2, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ РАСХОДА ЖИДКОСТИ ПРИ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Н.С. Задорожная, Т.В. Клодина
(Ростов-на-Дону; *simon@sfedu.ru*)

В связи с тем, что при решении задач фильтрации наиболее важным является отыскание характеристик потока, которые зависят как от вида краевых условий, так и от формы границы области фильтрации, возникает вопрос, как изменяются эти характеристики при изменении границы области.

Ответить на этот вопрос позволяет метод мажорантных областей. Его сущность заключается в том, что путем деформации границы области фильтрации строятся две такие области, для которых поставленную задачу можно решить точно. Полученные характеристики для этих областей дают заведомо верхние и нижние оценки искомых. В работе Г.Н. Положего [1] наиболее полно изложены теоремы для различных случаев границ области фильтрации.

Однако, на практике встречаются задачи теории фильтрации, когда область фильтрации ограничена одной линией тока и тремя потенциальными линиями. Задачи такого рода представляют существенную трудность вследствие того, что в этом случае вид годографа комплексного потенциала может быть заранее неизвестен.

Предлагается определение верхней и нижней границ расхода жидкости в области фильтрации, ограниченной тремя потенциальными линиями AB, AD, CD и одной линией тока BC.

Имеем плоскую или осесимметричную задачу стационарной фильтрации

$$div\overline{V} = 0, \overline{V} = -\kappa_0\, grad\, h, \tag{1}$$

($\overline{V} = (V_x, V_y)$ - скорость фильтрации, $h(x, y)$ - напорная функция, $\kappa_0(x, y)$ - коэффициент фильтрации).

Краевые условия имеют вид

$$\varphi|_{AB} = -\kappa_0 H, \varphi|_{CD} = 0, \varphi|_{AD} = -\kappa_0 H_0, \phi|_{BC} = 0, \tag{2}$$

где $\varphi(x, y)$ - потенциальная функция, $\phi(x, y)$ - линия тока, H и H_0 - величины напоров на границе области фильтрации, когда $H_0 > H > 0$. Полагаем, что коэффициент фильтрации $k_0(x, y)$ вместе со своими частными производными является правильно непрерывной функцией в области фильтрации плоскости z.

Авторы предлагают новую теорему об изменении расхода при решении задачи, когда варьируется область фильтрации, ограниченная тремя потенциальными линиями и одной линией тока, при условии $H_0 > H > 0$.

Теорема. *При вдавливании линии тока расход жидкости через всякую связную часть потенциальной линии, имеющей общий конец с линией тока, уменьшается. При выдавливании линии тока расход увеличивается.*

Искомое решение находим как среднее арифметическое найденных оценок.

Отметим, что аналогичная теорема при условии $H > H_0$ изложена в работе [2].

Литература

1. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических и (p, g)-аналитических функций. Киев : Наукова думка, 1973. 423 с.

2. *Клодина Т.В., Задорожная Н.С.* Теорема об изменении расхода жидкости при решении одной задачи стационарной фильтрации. Сборник материалов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Г. Крейна. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2017. — С. 116-117.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ТЕРМО-ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ[14]

А.В. Звягин

(Воронеж; *zvyagin.a@mail.ru*)

На $Q_T = \Omega \times [0, T]$, где $\Omega \subset R^n, n = 2, 3$, область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ и $T > 0$, рассматривается следующая начально–краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\ (\mu(\theta)\mathcal{E}(v)) + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$v = (I - \alpha^2\Delta)u; \qquad \mathrm{div}\, u = 0; \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0; \quad u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad \Delta u|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\theta - \chi\Delta\,\theta = 2\mu(\theta)\mathcal{E}(u) : \mathcal{E}(v) + g; \quad (4)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0; \quad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

[14]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00146).

Здесь, v — вектор–функция скорости движения частицы среды, u — вектор–функция модифицированной скорости движения частицы среды, $\theta(t,x)$ — функция температуры среды, p — функция давления, f — функция плотности внешних сил, g — источник внешнего тепла, $\alpha > 0$ — скалярный параметр, $\mu(\cdot) > 0$ — коэффициент вязкости среды, $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности, u_0 и θ_0 — начальные скорость и температура. Через $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, $i,j = \overline{1,n}$, обозначается тензор скоростей деформации.

Изучаемая начально–краевая задача с постоянной вязкостью называется альфа–моделью системы Навье—Стокса (см. [1]). Введем пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

$$W_1 = \{u \in L_2(0,T;V^2) \cap L_\infty(0,T;V^1), u' \in L_2(0,T;V^{-2})\};$$

$$W_2 = \{\theta : \theta \in L_p(0,T;W_p^1(\Omega)), \theta' \in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega)).$$

Определение 1. *Слабым решением задачи (1)–(5) называется пара (u,θ), где $u \in W_1$ и $\theta \in W_2$, удовлетворяющая при всех $\varphi \in V^2$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ и почти всех $t \in [0,T]$ соотношениям*

$$\langle (J+\alpha^2 A)u', \varphi\rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i((J+\alpha^2 A)u)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n ((J+\alpha^2 A)u)_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\varphi_j\,dx - 2\int_\Omega \mu(\theta)(J+\alpha^2 A)u\Delta\varphi\,dx =$$

$$\langle f, \varphi\rangle,$$

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial \theta}{\partial t}\phi dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i\theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} dx + \chi \int\limits_\Omega \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi) dx =$$

$$= 2 \int\limits_{\Omega} \big(\mu(\theta)\mathcal{E}(u) : \mathcal{E}(u)\big) : \phi dx + \langle g, \phi\rangle,$$

и начальным условиям $u|_{t=0} = v_0$ *и* $\theta|_{t=0} = \theta_0$. *Здесь* $J = PI$, *где* P *– проектор Лере, а* I *– тождественный оператор.*

Теорема 1. *Пусть функция* $\mu \in C^2(-\infty, +\infty)$ *и* $0 < \mu(\theta) \leq M$ *для всех* $\theta \in W_2$, $f \in L_p(0,T;V^{-1})$, $g \in L_1(0,T; H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $u_0 \in V^1$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. *Тогда при* $1 < p < 4/3$ *для* $n = 2$ *и для* $1 < p < 10/9$ *при* $n = 3$ *существует слабое решение задачи (1)–(5).*

Доказательство теоремы 1 основано на последовательном применение аппроксимационно–топологического подхода к задачам гидродинамики и на итерационном процессе, и поэтому проводится поэтапно (см. работы [2]–[6]). На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (1)–(3) при фиксированном $\theta \in W_2$. Затем устанавливается разрешимость задачи (4)–(5) с заданной $u \in W_1$. Далее, описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (1)–(5).

Литература

1. *Звягин А.В.* Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье-Стокса // Доклады Академии Наук. — 2019. — Т. 486, Н. 5. — С. 527–530.

2. *Звягин А.В.* Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере // Известия ВУЗов. Математика. — 2016. — Н. 10. — С. 70–75.

3. *Звягин А.В.* Оптимальное управление с обратной связью для термовязкоупругой модели движения жидкости Фойгта // Доклады Академии Наук. — 2016. — Т. 468, Н. 3. — С. 251–253.

4. *Звягин А.В.* Исследование разрешимости термовязкоупругой модели, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров // Сибирский математический журнал. — 2018. — Т. 59, Н. 5. — С. 1066–1085.

5. *Звягин А.В.* Слабая разрешимость термовязкоупругой модели Кельвина-Фойгта // Известия ВУЗов. Математика. — 2018. — Н. 3. — С. 91–95.

6. *Звягин А. В.* Исследование разрешимости термовязкоупругой модели движения растворов полимеров, удовлетворяющей принципу объективности // Математические Заметки. — 2019. — Т. 105, Н. 6. — С. 839–856.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕНИЯ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С.П. Зубова, А.Х. Мохамад
(Воронеж, ВГУ; *spzubova@mail.ru*, *abdulftah.hosni90@gmail.com*)

Рассматривается уравнение

$$A(\frac{\partial U}{\partial t}+\alpha U)=B(\frac{\partial U}{\partial x}+\beta U)+f(t,x), \qquad (1)$$

где $A, B : E \to E$, E банахово пространство, A-замкнутый линейный оператор с плотной в E областью определения $D(A)$. имеющий число 0 нормальным собственным числом, $B \in L(E,E)$, B^{-1} не существует, $f(t,x)$ - непрерывная вектор-функция со значениями в E, $U = U(t,x) \in E$, α, β скалярные функции; $\alpha = \alpha(t,x), \beta = \beta(t,x)$, $(t,x) \in T \times X$, где $T = [0,t_0], X = [0,x_0]$.

Рассматривается регулярный случай, т.е. при λ достаточно малых по модулю отличных от нуля ($\lambda \in \dot{U}(0)$) оператор $(A-\lambda B)$ обратим. В этом случае оператор $(A-\lambda B)^{-1}A$

имеет число 0 нормальным собственным числом [1], что позволяет разложить прстранство E в прямую сумму подпространств $M^{(1)}$ и $N^{(1)}$ с проекторами на них $Q^{(1)}$ и $P^{(1)}$ соответственно. Уравнение (1) расщепляется на уравнения в этих подпространствах и решается в них с условиями

$$Q^{(1)}U(0,x) = \varphi(x) \in M^{(1)}, \quad P^{(1)}U(t,0) = \psi(t) \in N^{(1)}. \quad (2)$$

Теорема 1. *Решение* $U(t,x)$ *задачи* (1), (2) *существует и единственно.*

Получены формулы для $U(t,x)$. Приводится иллюстрирующий пример.

Литература

1. *Зубова С.П.* Solution of the homogeneous Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator multiplying the derivative // S.P. Zubova // Doklady Mathematics. - 2009. - Vol. 80, No. 2. — P. 710–712.

2. *Нгуен Х.Д.* О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных / Х.Д. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. - 2013. - Т. 6, № 1. - С. 98–111.

3. *Зубова С.П., Мохамад А.Х.* Решение одной задачи для дескрипторного уравнения в частных производных. Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции ВВМШ «ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ — XXX» (3–9 мая 2019 г.). С. 145.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая

(Воронеж; *spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru*)

Рассматривается система в частных производных

$$\frac{\partial x}{\partial t} = B(\frac{\partial x}{\partial s} + \alpha x) + Du, \qquad (1)$$

где $t \in [0, T]$, $s \in [0, S]$; $x(t, s) \in R^n$; $u(t, s) \in R^m$; $\alpha(t, s)$ - скалярная функция; B, D — матрицы соответствующих размеров.

Система (1) называется полностью управляемой, если существует такое управление $u(t, s)$, под воздействием которого система переводится из произвольного состояния $x(0, s)$ в произвольное состояние $x(T, s)$.

Для системы (1), описывающей процессы в вязко-пластической среде, решается задача построения программного управления.

Основным методом исследования является метод каскадной декомпозиции ([1] – [6]), опирающийся на свойство фредголь- мовости конечномерного отбражения и заключающийся в поэтапном переходе к системам в подпространствах, так что на последнем шаге декомпозиции формируется система

$$\frac{\partial x_p}{\partial t} = B(\frac{\partial x_p}{\partial s} + \alpha_p x_p) + D_p(\frac{\partial u_p}{\partial s} + \beta_p u_p), \qquad (2)$$

где $D_p = 0$ или D_p - сюръекция; $x_p(t, s)$ - удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial x_p^j}{\partial s}|_{t=0} = a_j, \frac{\partial x_p^j}{\partial s}|_{t=T} = b_j, j = 1, ..., p, \qquad (3)$$

где a_j и b_j - некоторые функции. Доказывается

Теорема 1. *Система* (1) *полностью управляема в том и только том случае, когда* D_p *- сюръекция.*

В случае сюръективного D_p, для любого гладкого x_p, удовлетворяющего условиям (3) существует гладкое u_p, удовлетворяющее уравнению (2). Обратным ходом декомпозиции строятся функции состояния и управления в аналитическом виде с любой желаемой степенью гладкости.

Литература

1. *Zubova С.П.* Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System /Zubova С.П., Raetskaya E.V.// Automation and Remote Control. 2018 .Vol.79, No. 5, p. 774–791.

2. *Zubova С.П.* Algorithm to Solve Of Control By The Method Of Cascade Decomposition /Zubova С.П., Raetskaya E.V.// Automation and Remote Control. 2017 .Vol.78, No. 7, p. 1189–1202.

3. *Zubova С.П.* A Study Of The Rigidity Of Descriptor Dynamical System In a Banach Space /Zubova С.П., Raetskaya E.V.// Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol.208, 1, p. 131–138.

4.*Zubova С.П.* Solution Of The Coushy Problem For Two Descriptive Equations With Fredholm Operator /Zubova С.П., Raetskaya E.V.// Doklady Mathematics. 2014. Vol. 90, No. 3. p. 732–736.

5.*Zubova С.П.* Invariance Of a Nonstationary Observability System Under Certain Perturbations /Zubova С.П., Raetskaya E.V.// Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 188, No. 3. p. 218–226.

6.*Zubova С.П.* On Polinomial Solution Of The Linear Stationary Control /Zubova С.П., Trung L.H., Raetskaya E.V.// Automation and Remote Control. 2008 .Vol.69, No. 11, p. 1852–1858.

ДРОБНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

М. Илолов

(Душанбе, Таджикистан; *ilolov.mamadsho@gmail.com*)

В работе доказана теорема существования решений задачи Коши для нелинейного дробного по времени импульсного дифференциального включения с почти секториальным оператором в линейной части. Соответствующий результат для линейных и полулинейных дробных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве без импульсных воздействий установлен в работе [1].

1. Рассмотрим задачу Коши для дробных дифференциальных включений с импульсными воздействиями

$$^{c}D^{\alpha}u(t) \in Au(t) + F(t, u(t)), t \in J = [0, T], t \neq t_k, k = 1, ..., m, \tag{1}$$

$$\triangle u\Big|_{t=t_k} = I_k(u(t_k^-)), k = 1, ..., m, \tag{2}$$

$$u(0) = u_0 \tag{3}$$

где $^{c}D^{\alpha}$ дробная производная Капуто, $0 < \alpha < 1$, A почти секториальный оператор порождающий сингулярную полугруппу порядка $1 + \gamma(-1 < \gamma < 0)$ при $t = 0, F : J \times E \to P(E)$ многозначное отображение, $P(E)$ семейство непустых подмножеств банахово пространство $E, I_K : E \to E, k = 1, ..., m$ и $u_0 \in E$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T, \triangle u\Big|_{t=t_k} = u(t_k^+) - u(t_k^-)$, $u(t_k^+) = \lim\limits_{h \to 0+} u(t_k + h), u(t_k^-) = \lim\limits_{h \to 0-} u(t_k + h)$ являются правыми и левыми пределами $u(t)$ при $t = t_k, k = 1, ..., m$.

Аналогичные дифференциальные уравнения целого порядка с импульсными воздействиями и со секториальными операторами были предметом анализа работы [2]. В работе [3] рассматривались нелокальные дробные дифференциальные включения со секториальным оператором. В [1] приводится пример эллиптического дифференциального оператора A' действующего в пространстве функций Гельдера $C^l(\bar{\Omega}), 0 < l < 1$, где Ω-ограниченная область в $R^n (N \geq 1)$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, такой что $A' + \nu, \nu > 0$ не является секториальным, но является почти секториальным оператором. Почти секториальный оператор A генерирует полугруппу $T(t)$ порядка роста $1 + \gamma$ со сингулярным поведением при $t = 0$.

Обозначим через $E_{\alpha,\beta}$ обобщенную функцию типа Миттаг-Лефлера в виде

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} = \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\lambda^{\alpha \mp \beta} l^{\lambda}}{\lambda^{\alpha - z}} d\lambda, \alpha, \beta > 0, z \in C, \tag{4}$$

где контур L начинается и заканчивается в $-\infty$ и обходит диск $|\lambda| < |z|^{1/\alpha}$ против часовой стрелки. Определим также функцию

$$e_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha n)} + O(|z|^{-N}),\ z \to \infty. \tag{5}$$

С помощью функций (4),(5) и соответствующей резольвенты оператора A вводим семейство операторозначных функций

$$S_\alpha(t) = E_\alpha(-zt^\alpha)(A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\theta} E_\alpha(-zt^\alpha) R(z, A) dz, E_\alpha(z) = E_{\alpha,\alpha}(z)$$

и

$$T_\alpha(t) = e_\alpha(-zt^\alpha)(A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\theta} e_\alpha(-zt^\alpha) R(z, A) dz, e_\alpha(z) = e_{\alpha,\alpha}(z),$$

где интегральный контур $\Gamma_\theta = \{R_+ l^{i\theta}\} \cup \{R_+ l^{-i\theta}\}$ направлен против часовой стрелки и $\omega < \theta < \pi/2 - |argt|$.

Лемма 1. Для каждого $t > 0, S_\alpha(t)$ и $T_\alpha(t)$ являются линейными ограниченными операторами на E. Более того существуют постоянные $C_S = C(\alpha, \gamma) > 0$, $C_T = C(\alpha, \gamma) > 0$ такие, что

$$\|S_\alpha(t)\| \leq C_S t^{-\alpha(1+\gamma)}, \|T_\alpha(t)\| \leq C_T t^{-\alpha(1+\gamma)}.$$

2. Пусть F в (1) является компактным многозначным отображением.

Рассмотрим пространство кусочно непрерывных функций

$$PC(J,E) = \{u : J \to E, u \in C((t_k, t_{k+1}), E), k = 0, ..., m+1$$
$$u(t_k^-), u(t_k^+), u(t_k^-) = u(t_k), k = 0, ..., m\}$$

с нормой

$$\|u\|_{PC} = \sup_{t \in J} \|u(t)\|.$$

Через $AC((t_k, t_{k+1}), E)$ обозначим пространство абсолютно непрерывных функций. Пусть $J' = J/\{t_1, .., t_m\}$.

Определение 1. Функция $u \in PC(J,E) \cap \cup_{k=o}^m AC((t_k, t_{k+1}), E)$ с дробной производной порядка α называется слабым решением задачи (1)-(3), если существует функция $v \in L^1([0,T], E)$ такая, что $v(t) \in Av(t) + F(t, v(t))$ для п.в. $t \in [0,T]$ и

$$u(t) = S_\alpha(t)x_0 + \sum_{k=1}^{m} s_\alpha(t - t_k) I_k(u(t_k^-)) + \int_0^t T_\alpha(t-s)v(s)ds,$$

где v является селектором для многозначного отображения $F(t, u(t))$.

Приводим основной результат для почти секториального оператора A.

Теорема 1. Пусть A почти секториальный оператор и пусть $F : J \times E \to P(E)$ непустое выпуклое компактное многозначное отображение. Пусть выполнены следующие предположения:

(HF1) Для каждого $u \in E$, функция $t \to F(t, u)$ измеримая и для п.в. $t \in J$ полунепрерывная сверху;

(HF2) Существует функция $\varphi \in L^{1/q}(J, R_+), q \in (0, \alpha)$ и неубывающая непрерывная функция $\psi : R_+ \to R_+$ такая, что для каждой $u \in E$,

$$\|F(t, u)\| \leq \varphi(t)\psi(\|u\|), t \in J;$$

(HF3) Существует функция $\beta \in L^{1/q}(J, R_+), qt(0, \alpha)$ удовлетворяющей неравенству

$$2\eta C_T \|\beta\|_{L^{1/q}(J,R_+)} < 1,$$

где $\eta = \frac{T^{\alpha-q}}{\bar{\omega}^{1-q}}$ и $\bar{\omega} = \frac{\alpha-q}{1-q}$, и для каждого ограниченного подмножества $D \subset E$

$$\chi(F(t, D)) \leq \beta(t)\chi(D)$$

для п.в. $t \in J$, где χ мера некомпактности Хаусдорфа в E.

(HI) Для каждого $k = 1, ..., m, I_k$ непрерывный и компактный оператор и существуют положительные постоянные h_k такие, что

$$\|I_k(u)\| \leq h_k\|u\|, u \in E.$$

Тогда задача (1)-(3) имеет слабое решение при условии, что

$$C_S(\|u_0\| + hr) + C_T n\psi(r)\|\varphi\|_{L^{1/2}(J,R_+)} \leq r,$$

где $r > 0$ и $h = \sum\limits_{k=i}^{m} h_k$.

Доказательство теоремы состоит в сведении задачи (1),(2),(3) к задаче о неподвижной точке многозначного отображения $R : P(C(J,E)) \to 2^{P(C(J,E))}$. Для $u \in P(C(J,E))$ $R(u)$ является множеством всех функций $v \in R(u)$ такие, что

$$v(t) = S_\alpha(t)u_0 + \sum_{k=1}^{n} S_\alpha(t-t_k)I_k(u(t_k^-)) + \int\limits_0^t (t-s)f(s)ds,$$

где f является селектором многозначного отображения $F(t, u(t))$. Легко видеть, что любая неподвижная точка отображения $R(u)$ является слабым решением задачи (1)-(3).

Таким образом задача сводится к доказательству существования неподвижной точки многозначного отображения $R(u)$. Существование неподвижной точки многозначного отображения $R(u)$ подробным образом исследовано в работе [4].

Литература

1. *Wang R.-N., Chen D.-H., Xiao T.-J.* Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators. J. Differential Equations. 2012. v.252. — pp. 202-235

2. *Самойленко А.М., Илолов М.* К теории неоднородных по времени эволюционных уравнений с импульсными воздействиями. Докл.АН СССР. 1991. т. 319, №1. — с.63-67

3. *Wang J., Ibrahim A.G. and Feckan M.* Nonlocal impulsive fractional differential inclusions with fractional sectorial operators on Banach Spaces. Appl.Math.Comput. 2015. v.257. — pp. 103-118

4. *Гельман Б.Д., Обуховский В.В.* О неподвижных точках многозначных отображений ациклического типа. Фундаментальная и прикладная математика. 2015. т.20, №3. — с.47-59

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ОПЕРАТОРОВ И УРАВНЕНИЙ С МНОГОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ ФУНКЦИЙ[15]

А.И. Иноземцев
(Липецк; *inozemcev.a.i@gmail.com*)

В работе получен критерий фредгольмовости уравнения с частными интегралами

$$(I - \sum_{\alpha} K_{\alpha})x = f, \qquad (1)$$

в пространстве непрерывных на $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ функций, где $(K_{\alpha}x)(t_1,t_2,t_3) = \int\limits_{D_{\alpha}} k_{\alpha}(t_1,t_2,t_3,t_{\alpha})x(s_{\alpha})dt_{\alpha}$, $k_{\alpha} \in C(L^1(D_{\alpha}))$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ — мультииндекс, $\alpha_j \in \{0,1\}$, $D_{\alpha} = \prod\limits_{j=1}^{n}[a_j,b_j]^{\alpha_j}$. При $\alpha_j = 0$ отрезок $[a_j,b_j]$ не входит в декартово произведение. t_{α} — совокупность элементов τ_j, для которых $\alpha_j = 1$, а s_{α} — совокупность элементов τ_j, для которых $\alpha_j = 1$ и элементов t_k, для которых $\alpha_k = 0$. $dt_{\alpha} = \prod\limits_{j=1}^{n} d\tau_j^{\alpha_j}$, $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3)$, где $\bar{\alpha}_j = 1 - \alpha_j$, $k_{\alpha} \in C(D_{\alpha})$.

Теория уравнений вида $(I - \sum\limits_{\alpha} K_{\alpha})x = f$ существенно отлична не только от теории интегральный уравнений Фредгольма, но и от теории сингулярных интегральных уравнений [1, 2]. Никакая гладкость ядер k_{α} не обеспечивает ни нетеровость, ни фредгольмовость данного уравнения.

Принадлежность ядер k_{α} операторов K_{α} пространству $C(L^1(D_{\alpha}))$ означает $\sup\limits_{(t_1,t_2,t_3)\in D} \int\limits_{D_{\alpha}} |k_{\alpha}(t_1,t_2,t_3,t_{\alpha})|dt_{\alpha} < \infty$ и

[15]Работа поддержана РФФИ (проект № 19-41-480002).

для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|t_i - t_i'| < \delta$ $(i = 1, 2, 3)$ $\int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(t_1, t_2, t_3, t_\alpha) - k_\alpha(t_1', t_2', t_3', t_\alpha)| dt_\alpha < \varepsilon$. При сделанных предположениях операторы K_α непрерывны в пространстве $C(D)$. Непосредственно проверяется, что ядра их композиций также принадлежат $C(L^1(D_\alpha))$.

Пусть операторы $I - K_{(1,0,0)}$, $I - K_{(0,1,0)}$ и $I - K_{(0,0,1)}$ обратимы, то в силу [2] $(I - K_{(1,0,0)})^{-1} = I + R_{(1,0,0)}$, $(I - K_{(0,1,0)})^{-1} = I + R_{(0,1,0)}$, $(I - K_{(0,0,1)})^{-1} = I + R_{(0,0,1)}$, где R_i — операторы с частными интегралми. Тогда уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$x = (I + R_{(0,0,1)})(I + R_{(0,1,0)})(I + R_{(1,0,0)})\times$$

$$\times(K_{12}^{(1)} + K_{13}^{(1)} + K_{23}^{(1)} + K_{123}^{(1)})x + G_1 f, \qquad (2)$$

где $G_1 = (I - K_{(0,0,1)})^{-1}(I - K_{(0,1,0)})^{-1}(I - K_{(1,0,0)})^{-1}$, $K_{12}^{(1)} = K_{(1,1,0)} + K_{(1,0,0)}K_{(0,1,0)}$, $K_{13}^{(1)} = K_{(1,0,1)} + K_{(1,0,0)}K_{(0,0,1)}$, $K_{23}^{(1)} = K_{(0,1,1)} + K_{(0,1,0)}K_{(0,0,1)}$, $K_{123}^{(1)} = K_{(1,1,1)} + K_{(1,0,0)}K_{(0,1,0)}K_{(0,0,1)}$.

Умножая операторы в (2), получим уравнение $x = (K_{12}^{(2)} + K_{13}^{(2)} + K_{23}^{(2)} + K_{123}^{(2)})x + G_1 f$, эквивалентное уравнению $(I - K_{12}^{(2)})(I - K_{13}^{(2)})(I - K_{23}^{(2)})x = (K_{12}^{(2)}K_{13}^{(2)} + K_{12}^{(2)}K_{23}^{(2)} + K_{13}^{(2)}K_{23}^{(2)} - K_{12}^{(2)}K_{13}^{(2)}K_{23}^{(2)} + K_{123}^{(2)})x + G_1 f$.

Если существуют обратные операторы [2] $(I - K_{23}^{(2)})^{-1}$, $(I - K_{13}^{(2)})^{-1}$, $(I - K_{12}^{(2)})^{-1}$, то $(I - K_{23}^{(2)})^{-1} = I + R_{23}, (I - K_{13}^{(2)})^{-1} = I + R_{13}, (I - K_{12}^{(2)})^{-1} = I + R_{12}$, где R_{ij} — операторы с частными интегралами. После умножения операторов получим уравнение

$$x = H_{123}x + F, \qquad (3)$$

где $F = G_2 G_1 f$, $H_{123} = (I + R_{23})(I + R_{13})(I + R_{12})(K_{12}^{(2)}K_{13}^{(2)} + K_{12}^{(2)}K_{23}^{(2)} + K_{13}^{(2)}K_{23}^{(2)} - K_{12}^{(2)}K_{13}^{(2)}K_{23}^{(2)} + K_{123}^{(2)})$ — интегральный оператор, а уравнение (3) — интегральное уравнение.

Из приведенных рассуждений следует

Теорема. *Линейное интегральное уравнение (1) с частными интегралами фредгольмово в $C(D)$ тогда и только тогда, когда в $C(D)$ обратимы операторы* $(I - K_{(1,0,0)})$, $(I - K_{(0,1,0)})$, $(I - K_{(0,0,1)})$, $(I - K_{12}^{(2)})$, $(I - K_{13}^{(2)})$, $(I - K_{23}^{(2)})$.

Литература

1. *Appel J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appel, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. New York-Basel: Marcel Dekker, 200. — 560 pp.

2. *Калитвин А.С., Фролова Е.В.* Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория: второе издание. – Липецк: ООО "Оперативная полиграфия", 2015. — 195 с.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ДВУХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ С ПРИМЕНЕНИЕМ PYTHON[16]

В.А. Калитвин

(Липецк; *kalitvin@mail.ru*)

К уравнениям Вольтерра с частными интегралами приводятся различные задачи механики сплошных сред [1-3].

В пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a, b] \times [c, d]$ функций рассматривается линейное уравнение с частными интегралами вида

$$x(t, s) = \int_a^t l(t, s, \tau)x(\tau, s)d\tau + \int_c^s m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma + f(t, s), \quad (1)$$

где $(t, s) \in D$, l, m, f — заданные непрерывные на $D \times T$, $D \times S$, D соответственно функции, $T = \{\tau : a \leq \tau \leq t \leq b\}$, $S = \{\sigma : c \leq \sigma \leq s \leq d\}$.

[16]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект номер 19-41-480002).

Найти решение уравнения (1) в явном виде удается в редких случаях, поэтому актуальной задачей является разработка алгоритмов и программ для численного решения этого уравнения.

Отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ разобъем на части точками

$$t_p = a + ph \ (p = 0, 1, \ldots, P,\ a + Ph \leq b < (P + 1)h),$$

$$s_q = c + qg \ (q = 0, 1, \ldots, Q,\ c + Qg \leq d < (Q + 1)g)$$

соответственно. Полагая $t = t_p$, $s = s_q$ и применяя формулы

$$\int\limits_a^{t_p} l(t_p, s_q,\tau)x(\tau,s_q)d\tau = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{pqi} x(t_i, s_q) + r^l_{pq},$$

$$\int\limits_c^{s_q} m(t_p, s_q, \sigma)x(t_p, \sigma)d\sigma = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{pqj} x(t_p, s_j) + r^m_{pq},$$

где $l_{pqi} = l(t_p, s_q, t_i)$, $m_{pqj} = m(t_p, s_q, s_j)$, а r^l_{pq}, r^m_{pq} — остатки квадратурных формул, получим после отбрасывания остатков систему уравнений для приближенных значений x_{p0}, x_{0q}, x_{pq} функции x в точках (t_p, s_0), (t_0, s_q), (t_p, s_q) $(p = 1, \ldots, P$; $q = 1, \ldots, Q)$. Пусть δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} — погрешности в уравнениях с x_{p0}, x_{0q}, x_{pq}. Тогда

$$x_{00} = f(a, c),$$

$$x_{p0} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{p0i} x_{i0} + f_{p0} + \delta_{p0},$$

$$x_{0q} = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{0qj} x_{0j} + f_{0q} + \delta_{0q},$$

$$x_{pq} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{pqi} x_{iq} + g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{pqj} x_{p_j} + f_{pq} + \delta_{pq}$$

$$(p = 1, \dots, P; q = 1, \dots, Q),$$

где

$$f_{p0} = f(t_p, s_0), f_{0q} = f(t_0, s_q), f_{pq} = f(t_p, s_q).$$

Теорема 1. *Если r^l_{pq} и r^m_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$; существуют такие числа A, B что $|\alpha_{pi}| \leq A < \infty$, $|\beta_{jq}| \leq B < \infty$; погрешности δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$, то при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} может быть найдено из последней системы, причем для любого заданного $\epsilon > 0$ найдутся такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$ будут выполняться неравенства $|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \epsilon$ $(p = 0, 1, \dots, P; q = 0, 1, \dots, Q)$, а последовательность функций*

$$x_{pq}(t, s) = h \sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l(t, s, t_i) x_{iq} + g \sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m(t, s, s_j) x_{pj} + f(t, s)$$

равномерно сходится на D к решению $x(t, s)$ при $p, q \to \infty$.

С использованием данного алгоритма разработана программа на языке Python и проведены численные эксперименты, показывающие достаточно хорошие результаты.

В пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a, b] \times [c, d]$ функций рассматривается нелинейное уравнение с частными интегралами вида

$$x(t, s) = \int_a^t l(t, s, \tau, x(\tau, s)) d\tau + \int_c^s m(t, s, \sigma, x(t, \sigma)) d\sigma + f(t, s), \tag{2}$$

Здесь $(t, s) \in D = [a, b] \times [c, d]$, а l, m, f – заданные непрерывные функции.

При численном решении уравнения (2) отрезок $[a, b]$ разобъем на равные части точками t_i и s_j $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$.

При $i = j = 0$ $x(t_i, s_j = 0)$. Заменяя интегралы в уравнении (2) конечными суммами с помощью какой-либо квадратурной формулы, при фиксированных $j = 0$ и $i = 0$ получаем значения $x(t_i, s_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $x(t_0, s_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Используя найденные значения, вычисляем значения $x(t_i, s_j)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. Например, при использовании квадратурной формулы средних прямоугольников,

$$x(t_i, s_0) = f(t_i, s_0) + h \sum_{k=0}^{i-1} (l(t_i, s_0, t_k + \frac{h}{2}, x(t_k, s_0))),$$

$$x(t_0, s_j) = f(t_0, s_j) + h \sum_{k=0}^{j-1} (m(t_0, s_j, s_k + \frac{h}{2}, x(t_0, s_k))),$$

$$x(t_i, s_j) = f(t_i, s_j) + h \sum_{k=0}^{i-1} (l(t_i, s_j, t_k + \frac{h}{2}, x(t_k, s_j))) +$$

$$+ h \sum_{k=0}^{j-1} (m(t_i, s_j, s_k + \frac{h}{2}, x(t_i, s_k))),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n$$

С использованием данного алгоритма разработана программа на языке программирования Python и проведены численные эксперименты, демонстрирующие достаточно хорошие результаты.

Литература

1. *Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000, 560 p.

2. *Калитвин А.С.* Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000, 252 с.

3. *Калитвин А.С., Калитвин В.А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2006, 177 с.

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ С ВЫПУКЛЫМИ СКЛЕЙКАМИ НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО[17]

Е. Е. Каргинова

(Москва; *karginov13@gmail.com*)

Определение 1. *Плоскостью Минковского называется* $\mathbf{R}^2$ *со скалярным произведением*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_2y_2$$

.

Рассмотрим на плоскости Минковского эллипс E, задаваемый соотношением:

$$E\colon \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

Здесь $a > b > 0$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ - вещественные числа. Софокусное семейство квадрик C_λ задается уравнением

$$C_\lambda\colon \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1 \tag{1}$$

Биллиард в эллипсе на плоскости Минковского был исследован в работе (2) В. Драгович и М. Раднович, а именно

[17]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

описан закон отражения в таком биллиарде, первые интегралы системы и движение в системе.

Определение 2. *Простым биллирадом назовем двумерное, связное, плоское, компактное многообразие с кусочно-гладким краем, состоящим из сегментов квадрик семейства (1), попарно пересекающихся под углами, не превышающими* $\frac{\pi}{2}$.

Определим отражение в простом биллиарде: при отражении сохраняется евклидова длина вектора скорости и угол падения в смысле Минковского равен углу отражения.

Определение 3. *Топологическим биллиардом называем двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой метрикой Минковского, полученное отождествлением (склейкой) простых биллиардов вдоль некоторых выпуклых или прямолинейных сегментов (ребра склейки).*

Вышеописанная конструкция была предложена В. В. Ведюшкиной в работе [3].

Отражение в топологическом биллиарде устроено следующим образом: при попадании на ребро склейки материальная точка продолжает движение по другому листу, а при попадании в угол или ребро, не являющееся ребром склейки, точка продолжает движение так же, как и в случае плоской области.

Такое отражение сохраняет два первых интеграла: квадрат евклидовой длины вектора скорости v_E и каустику траектории λ. Эти функции находятся в инволюции и функционально независимы, следовательно, топологический биллиард интегрируем по Лиувиллю.

Рассмотрим ограничение фазового пространства системы топологического биллиарда на поверхность уровня интеграла v_E - это трехмерное многообразие Q^3, называемое изоэнергетической поверхностью. Изменяя значения интеграла λ, получим слоение Q^3 на двумерные поверхности -

неособые слои (двумерные торы) и особые слои, описываемые 3-атомами.

В своей работе я рассматриваю топологические биллиарды, которые могут быть получены склейкой простых биллиардов на плоскости Минковского вдоль выпуклых сегментов границы. Я получила полную классификацию таких биллиардов, и для каждого класса посчитала меченую молекулу Фоменко-Цишанга - граф с целочисленными метками, являющийся инвариантом Лиувиллевой эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем (подробнее о теории Фоменко-Цишанга см. [1]).

Литература

1. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 1999. - Т.1

2. *Драгович, В., Раднович, М.* Топологические инварианты эллиптических биллиардов и геодезических потоков на эллипсоиде. Фундаментальная и прикладная математика. - 2015. - Т. 20(2), - С. 51-64.

3. *Ведюшкина В.В.* Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

М.А. Кащенко, В.И. Усков
(Воронеж; *vum1@yandex.ru*)

Рассматривается задача Коши для уравнения Леонтьева межотраслевого баланса, возмущенного операторной добавкой:

$$A\frac{dx}{dt} = (B + \varepsilon C)x(t, \varepsilon), \qquad (1)$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0(\varepsilon). \tag{2}$$

Здесь $A = \mathcal{B}$ — матрица коэффициентов приростной фондоёмкости, $B = I - \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — матрица прямых затрат, x — вектор-столбец валовой продукции, $t \in [0, T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Функция $x^0(\varepsilon)$ голоморфна в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Вектор-функция $A\frac{dx}{dt}$ называется акселератором Харрода [1].

Такие модели с непрерывными функциями времени отражают условия динамического равновесия валового и конечного продукта в экономике страны.

Целью работы является исследование влияния возмущения, вызываемого малым параметром в задаче (1), (2) с конкретными значениями коэффициентов. Отметим, что в случае вырожденного оператора A, стоящего перед производной, влияние может быть значительным. Модель рассматривается на примере трех отраслей народного хозяйства: $A, B, C : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $x(t, \varepsilon) \in \mathbf{R}^3$.

Известно, что оператор A, задаваемый вырожденной квадратной матрицей, фредгольмов.

Зададим матрицы коэффициентов в уравнении (1):

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Ядро оператора A одномерно. Имеем:

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{2}{5}x_1 \\ -\frac{1}{5}x_1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \operatorname{Coim} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5}x_1 + x_2 \\ \frac{1}{5}x_1 + x_3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \operatorname{Coker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 - 2y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -8 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Применим результаты, полученные в работе [2].

$$d_{00} =< QBe, \varphi >= 0,$$

$$d_{01} =< QCe, \varphi >= -0.08 \neq 0,$$

$$d_{10} =< QBA^- Be, \varphi >= -0.16 \neq 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d_{10}}{d_{01}} = 2 > 0. \tag{3}$$

Таким образом, операторная пара (A, B) регулярна; длина B-жордановой цепочки равна 2.

Получен следующий результат.

Теорема. *В задаче* (1), (2) *имеет место явление погранслоя.*

Условие (3) — это условие регулярности вырождения.

Замечание. *Если не выполняется условие регулярности вырождения, то это влечет за собой большое расхождение между планируемым объемом производства* ($\varepsilon = 0$) *и полученным на практике.*

Литература

1. Динамические многоотраслевые модели [электронный ресурс]. – Режим доступа: http://vsh1791.ru/sbks/BKS/EMM2/05.pdf (дата обращения: 19.11.2019).

2. *Зубова С. П., Усков В. И.* Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай // Математические заметки. – 2018. – Т. 103, вып. 3. – С. 393-404.

3. *Кащенко М. А.* Решение задачи Коши для динамической модели В. Леонтьева с вырожденным коэффициентом фондоемкости // Материалы Всеукраинской научно-практической конференции соискателей высшего образования и молодых ученых 11-12 апреля 2019 года: Современные и исторические проблемы фундаментальные и прикладныематематической подготовки в учреждениях высшего образования. – Харьков: ХНАДУ, 2019. – С. 167-170.

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕДИ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

А.В. Келлер, А.А. Замышляева, Н.А. Манакова
(Воронеж, Челябинск; *alevtinak@inbox.ru*)

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathrm{A}, P)$ – полное вероятостное пространство, $\mathbf{R}$ – множество вещественных чисел, наделенное борелевской σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ – случайная величина. Множество случайных величин с $E\xi = 0$ и конечной дисперсией образует гильбертово пространство $\mathbf{L_2}$ со скалярным произведением $< \xi_1, \xi_2 >= E(\xi_1\xi_2)$. Пусть $I \subset \mathbf{R}$ – некоторый интервал. Отображение $\eta : I \times \Omega \to \mathbf{R}$ вида $\eta = \eta(t, \omega)$ – одномерный стохастический процесс, для каждого фиксированного $t \in I$ значение отображения $\eta =$

$\eta(t,\ \cdot)$ является случайной величиной, т. е. $\eta = \eta(t,\ \cdot) \in \mathbf{L}_2$ и для любого фиксированного $\omega \in \Omega$ значение стохастического процесса $\eta = \eta(\ \cdot, \omega)$ называется (выборочной) траекторией. Обозначим: $C\mathbf{L}_2$ – пространство непрерывных случайных процессов, $\overset{\circ}{\eta}{}^{(\ell)}$ – ℓ-ю производную Нельсона-Гликлиха случайного процесса η [1]. Множество непрерывных стохастических процессов, имеющих непрерывные производные Нельсона-Гликлиха до порядка $k \in \mathbf{N}$ в каждой точке множества I, образуют пространство $C^k\mathbf{L}_2$. Рассмотрим стохастическую систему леонтьевского типа:

$$L\overset{\circ}{\xi} = A\xi + B(u + \varphi), \tag{1}$$

где $u : I \to \mathbf{R}^n$– вектор-функция, φ - стохастический процесс. Пусть матрица A – (L, p)-регулярна, $p \in \{0\} \cup \mathbf{N}$, и начальные состояния (1) описываются начальным условием Шоултера-Сидорова:

$$\left[(\alpha L - A)^{-1} L\right]^{p+1} (\xi(0) - \xi_0) = 0, \tag{2}$$

где $\xi_0 = \sum_{k=0}^{n} \xi_{0,k} e_k$, $\xi_{0,k}$ – попарно независимые гауссовские случайные величины, а $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ является ортонормированным базисом в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 1. *Для любой вектор-функции $u \in C^{p+1}(I, \mathbf{R}^n)$, начальных значений ξ_0 и стохастического процесса $\varphi \in C^{p+1}\mathbf{L}_2(I, \mathbf{R}^n)$, независимых для любого $t \in I$, существует единственное решение ξ задачи (1), (2), заданное формулой*

$$\xi(t) = \xi_u(t) + \xi_\varphi(t),\ \xi_u \in C^1(I, \mathbf{R}^n),\ \xi_\varphi \in C^1\mathbf{L}_2(I, \mathbf{R}^n),$$

где

$$\xi_u(t) = \int_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q u(s) ds +$$

$$+ \sum_{q=0}^{p} \left(M^{-1} (I_n - Q) L\right)^q M^{-1} (Q - I_n) u^{(q)}(t)$$

- это детерминированная часть, а

$$\xi_\varphi(t) = U^t\xi_0 + \int_0^t U^{t-s}L_1^{-1}Q\varphi(s)ds+$$

$$+\sum_{q=0}^{p}\left(M^{-1}\left(I_n - Q\right)L\right)^q M^{-1}\left(Q - I_n\right)\overset{\circ}{\varphi}{}^{(q)}(t)$$

- это стохастическая часть решения.

Здесь $U^t = \lim\limits_{r\to\infty}\left(\left(L - \frac{t}{r}M\right)^{-1}L\right)^r$, $Q = \lim\limits_{r\to\infty}\left(rL_r^L(M)\right)^p$, $L_r^L(M){=}L\big(L - \frac{1}{r}M\big)^{-1}$, I_n *– единичная матрица порядка* n.

Аналогично детерминированному случаю введем пространство измерений $U = \{u \in L_2(I, \mathbf{R}^n) : u^{(p+1)} \in L_2(I, \mathbf{R}^n)\}$, выделим в нем замкнутое выпуклое множество допустимых измерений $U_\partial \subset U$, которое содержит априорную информацию об измерениях. Задача восстановления динамически искаженного сигнала сводится к решению задачи оптимального управления

$$J(v) = \min_{u\in U_\partial} J(u),$$

для (1) с условием (2), где функционал качества

$$J(u) = J(\eta(u)) = \sum_{k=0}^{1}\int_0^\tau E\left\|\overset{\circ}{\eta}{}^{(k)}(t) - \eta_0^{(k)}(t)\right\|^2 dt$$

отражает близость реального наблюдения $\eta_0(t)$ и виртуального наблюдения $\eta(t)$, полученного на основе математической модели измерительного устройства (ИУ) (1), (2). Точка минимума $v(t)$ функционала на множестве U_∂, являющаяся решением задачи оптимального управления, называется оптимальным динамическим измерением. На практике существует только косвенная информация о $v(t)$.

Теорема 2. *Оптимальное динамическое измерение не зависит от случайных начальных условий, шумов в цепях и на выходе МТ.*

Таким образом, доказательство теоремы приводит к возможности применения численных алгоритмов, разработанных для детерминированного случая [2], при решения задачи восстановления измеренного сигнала. Заметим, что модель ИУ (1), (2) при $\det L = 0$ представлена в [3].

Литература

1. *Gliklikh Yu.E., Mashkov E.Yu.* Stochastic Leontieff Type Equations and Mean Derivatives of Stochastic Processes // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2013, vol. 6, pp. 25–39.

2. *Shestakov A.L., Keller A.V., Sviridyuk G.A.* Optimal Measurements XXI IMEKO World Congress "Measurement in Research and Industry 2015, pp. 2072–2076.

3. *Khudyakov Yu.V.* On mathematical modeling of the measurement transducers // Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2016, vol. 3, no. 3, pp. 68–73.

МАГНИТНЫЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК НА МНОГООБРАЗИИ ВРАЩЕНИЯ: ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

И.Ф. Кобцев

(Москва; *int396.kobtsev@mail.ru*)

Рассмотрим многообразие $M \approx S^2$, на котором определено действие группы S^1 изометриями (такое многообразие называется многообразием вращения). Оно имеет метрику $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\varphi^2$. Определим на T^*M магнитный геодезический поток как гамильтонову систему с гамильтонианом $H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)}$ и симплектической структурой $\widetilde{\omega} = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi + \Lambda'(r)dr \wedge d\varphi$.

В [1] использовался другой подход к получению новых систем на многообразии вращения — добавление потенциала: $H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r)$. Рассмотрение магнитного поля вместо потенциала приводит к ряду новых топологических свойств.

Предположим, что выполнены следующие условия на функции $f(r)$ и $\Lambda(r)$ [1]:

1. $f(r) : (0, L) \to \mathbb{R}$ продолжается до гладкой нечетной $2L$-периодической функции Морса $f(r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$f'(0) = 1$, $f'(L) = -1$;

2. $\Lambda(r) : (0, L) \to \mathbb{R}$ продолжается до гладкой четной $2L$-периодической функции Морса $\Lambda(r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

3. $(\Lambda'(r))^2 + (f'(r))^2 > 0$,

где L — длина геодезической, соединяющей полюса. Этот набор условий обеспечивает гладкость H и $\widetilde{\omega}$ на T^*M.

Целью исследования является вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга, характеризующих топологию слоения Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии $Q_h = \{H = h\}$.

Утверждение 1. *Определенная таким образом система имеет две степени свободы и является вполне интегрируемой по Лиувиллю; дополнительным интегралом является* $K = p_\varphi - \Lambda(r)$.

Фазовое пространство этой системы расслаивается на инвариантные (относительно фазового потока системы) двумерные слои, являющиеся совместными поверхностями уровня интегралов $H = h$, $K = k$, т.е. корректно определено слоение, называемое слоением Лиувилля. Согласно теореме Лиувилля это слоение состоит из слоев двух типов:

- регулярные слои, диффеоморфные несвязному объединению торов T^2 (называемых торами Лиувилля);

- особые слои (бифуркации торов Лиувилля).

Структура слоения Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы известна и описана в [2].

В ходе исследования получены следующие результаты:

- построены бифуркационные диаграммы, найдены уравнения бифуркационных кривых;

- исследован топологический тип перестроек торов Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии. В частности, обнаружены перестройки типов A, V_s (встречавшиеся в [1]) и найдены новые бифуркации (рис. 1), у которых критические окружности ориентированы несогласованно [2, раздел 3.3];

- по виду бифуркационных диаграмм вычислены инварианты Фоменко и Фоменко–Цишанга;

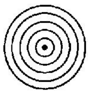
- обнаружено совпадение ряда инвариантов с уже встречавшимися в других задачах механики. Это позволяет сделать вывод о лиувиллевой эквивалентности систем с совпадающими инвариантами.

Литература

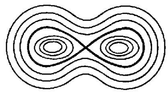
1. *Кантонистова Е. О.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле. Матем.сб.,2016, том 207, №3, с. 47–92.

2. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

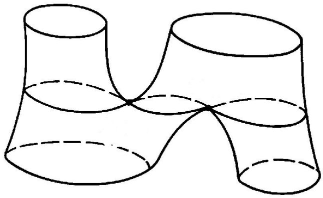
АППРОКСИМАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ



а)



б)



в)

Рис. 1. Двумерные базы 3-мерных окрестностей особых слоев слоения Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии: а — типа A; б — типа $V_2 = B$; в — пример 4-мерной перестройки торов Лиувилля с несогласованными ориентациями критических окружностей (показана зависимость двумерной базы от уровня энергии h). Трехмерная (соотв. четырехмерная) бифуркация получается в результате умножения двумерной базы (при каждом значении h) на окружность.

С ПРИСОЕДИНЁННЫМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ[18]

Д.М. Коростелева, А.А. Самсонов, П.С. Соловьёв, С.И. Соловьёв

(Казань; *diana.korosteleva.kpfu@mail.ru*)

Исследуется нелинейная дифференциальная задача на собственные значения в частных производных четвёртого порядка, описывающая поперечные собственные колебания квадратной упругой изотропной пластины с присоединённым осциллятором. Предполагаются выполненными граничные условия шарнирного опирания. Эта задача имеет неубывающую последовательность положительных конечнократных собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует нормированная система собственных функций. В настоящей работе изучаются свойства собственных значений и собственных функций при изменении параметров присоединённого осциллятора. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных разностей на равномерной сетке. Исследуется точность приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки. Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3].

Литература

1. *Соловьёв С.И.* Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. 256 с.

2. *Соловьёв С.И.* Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 7. С. 937–950.

[18]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160029. Работа поддержана РФФИ (проект № 19-31-90063).

3. *Соловьёв С.И.* Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 3. С. 418–432.

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ МАЙНАРДИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В.А. Костин, Е.Д. Кочетова, С.С. Лемешаев
(Воронеж; ВГУ им. М.В. Ломоносова; *jancd@inbox.ru*)

В Банаховом пространстве E с нормой $||*||_E$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^{1+\alpha}u(t)}{\partial t^{1+\alpha}} = Au(t), \quad t \geqslant 0 \tag{1}$$

где A - линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A) \subset E$ и областью значения $R(A)$.

$$\frac{\partial^{1+\alpha}u(t,x)}{\partial t^{1+\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u''(s)ds}{(t-s)^{\alpha}}; \quad \alpha \in (0,1) \tag{2}$$

- дробная производная в смысле Капуто.

Рассматривается задача о нахождении решения уравнения 1, удовлетворяющее условиям

$$u(0) = u_0, \ u'(0) = 0 \tag{3}$$

Определение 1 *Решением уравнения 1 называется оператор-функция $u(t)$ со значениями в $D(A)$, для которой определяется производная 2 и удовлетворяющая уравнению 1*

Определение 2 *Решением уравнения 1 удовлетворяющее условиям 3, где $u_0 \in D(A), u_1 \in D(A)$, называется решением задачи Каши.*

Определение 3 *Задачу 1 - 3 будем называть равномерно-корректной, если для ее решения справедлива оценка*

$$||u(t)||_E \leq M||u_0||_E, \tag{4}$$

где константа M от t и u_0 не зависит.

Для оператора A, заданного выражением $D = d^2/dx^2$, уравнение 1 рассматривалось Ф. Майнарди [7].

В настоящем сообщении доказывается

Теорема 1 *Если оператор A является производящим оператором сильно-непрерывной косинус функции $C(t, A)$ с оценкой*

$$||C(t, A)||_E \leq M, \tag{5}$$

то задача Коши 1 - 3 равномерно-корректна и ее решение имеет вид

$$u(t) = \int\limits_0^\infty I_t^{(1-\alpha)}(h_\alpha(t, \xi)C(\xi, A)u_0 d\xi, \tag{6}$$

где $I^{(1-\alpha)}f(t)$ - дробный интеграл Риммана-Лиувиля,

$$h_\alpha(t, s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{tp-\xi p^\alpha} dp$$

— функция Иосиды и справедлива оценка 4

Литература

1. *Иосида К.* Функциональный анализ // К. Иосида - Издательство Мир, Москва 1967, с. 357.

2. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев: Выща школа, 1989. 347 с.

3. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М.: Наука 1967. -464 с.
4. *Маслов В.П.* Операторные методы / Главная редация физико-математической литературы изд-ва "Наука М., 1973. - 544 с.
5. *Kurepa S.* Semigroups and cosine functions. Lecture Notes in Math, vol 948 Berlin, Springs, 1982. - p. 47 - 72.
6. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторих их приложения // С.Г. Самко / А.А. Килбис / О.И. Маричев
7. *Mainardi F.* Временное уравнение диффузии-волны. Радиофизика и квантовая электроника, вып. 38, №1-2, 1995
8. *Костин В.А.,. Костин А.В,. Костин Д.В* "Операторные косинус-функции и граничные задачи". ДАН, 2019,т.486 №5, с.531-536.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ АЭРОДИНАМИКИ

Д.В.Костин, М.Ю.Прицепов, М.Н.Силаева
(Воронеж; *dvk605@mail.ru, marinanebolsina@yandex.ru*)

При исследовании процесса обтекания газовой средой крыла самолета в [1] с.309 приходят к уравнению смешанного типа (см. [3])

$$\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial \theta^2} = r^2(r^2-1)\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} + r(r^2-1)\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r}, \theta > 0. \quad (1)$$

При $r > 1$ уравнение (1) описывает сверхзвуковой поток обтекаемой среды и является уравнением гиперболического типа.

При $r \in (0,1)$ - это уравнение эллиптического типа и оно описывает звуковой поток.

В настоящем сообщении для $r > 1$ рассматривается задача Коши нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$u(r, 0) = \varphi(r), \tag{2}$$

где функция $\varphi(r)$ разложима в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(\frac{1}{r}), \tag{3}$$

$T_n(x)$- ортогональные многочлены Чебышева 1-го рода.

Справедливо следующее

Утверждение *Решение задачи (1)-(2) существует, единственно и представимо в виде*

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(\frac{1}{r}) \cos n\theta. \tag{4}$$

Литература

1. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Т.1. Под редакцией Л.Хоуарта.-Москва, 1955.— 491с.

2. *Костин В.А.* C_0 — операторные ортогональные многочлены Чебышева и их представления / В.А. Костин, М.Н. Небольсина // Записки научных семинаров ПОМИ, Том 376, 2010, С. 64-88.

3. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.:Наука, 1970 .— 295 с.

4. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.:Наука, 1979 .— 415 с.

КЛЮЧЕВАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЕЦКОГО

Т.И. Костина

(Воронеж; *tata@rambler.ru*)

Математическая модель колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты, представленная уравнением Белецкого имеет следующий вид [1]:

$$(1 + e\cos(\nu))2e\sin(\nu) + \frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin(\delta) - 4e\sin(\nu) = 0, \quad (1)$$

где параметр e — эксцентриситет орбиты, μ — параметр, характеризующий распределение массы спутника, ν — угловая (полярная) координата центра масс спутника, δ — угол между фокальным радиусом и осью симметрии спутника.

В случаи $e \neq 0$ и $\mu \neq 1$ уравнение (3) не интегрируется, поэтому для его решения используются приближенные методы, например метод Ляпунова-Шмидта. Для его применения было доказано [3], что уравнение Белецкого является вариационным, был найден интегрирующий множитель $(1+e\cos(\nu))$, при умножении на который уравнения (1) получается уравнением Эйлера-Лагранжа для экстремалей функционала действия

$$V(q) = \int\limits_0^{2\pi} L(\dot{q}, q)dt,$$

с лагранжианом $L(\dot{q}, q)$:

$$\frac{\dot{q}^2}{2}(1+e\cos(\nu))^2+(1+e\cos(\nu))4eq\sin(\nu)+(1+e\cos(\nu))\mu\cos(q).$$

Затем ставится задача построения алгоритма получения и исследования ключевой функции. Приближенное построение ключевых функций осуществляется на основе аппроксимации Галеркина-Ритца и редукции Пуанкаре, с помощью численного метода градиентного спуска в точку минимума функционала энергии V:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left((1+\varepsilon\, e_1(t))^2\ \frac{\dot{x}^2}{2} + (1+\varepsilon\, e_1(t))(\mu\cos(x) + 4\varepsilon x e_2(t))\right) dt.$$

Получаются сходящиеся итерационные процессы, позволяющие строить ключевую функцию с любой требуемой точностью.

$$W(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \mu, \varepsilon) = \inf V(\xi_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + v),$$

где $e_1 = \sqrt{2}\cos(t), e_2 = \sqrt{2}\sin(t)$.

В связи с развитием современной компьютерной техники и методов численного анализа стало возможным получить фазовые портреты решений и провести качественный анализ. При компьютерной реализации вычисления и анализа возникает существенные технические трудности. Требуется наличие большого объема оперативной памяти, иначе происходит зацикливание или зависание программ. Исследование облегчает наличие круговой симметрии, возникающей из-за того, что функционал действия инвариантен относительно сдвига функции. Положив $\xi_2 = 0$ можно провести вторичную редукцию функционала.

Получены компьютерные изображения поверхностей линий уровней редуцированных приближений ключевой функции для уравнения Белецкого при двух различных значениях параметра:

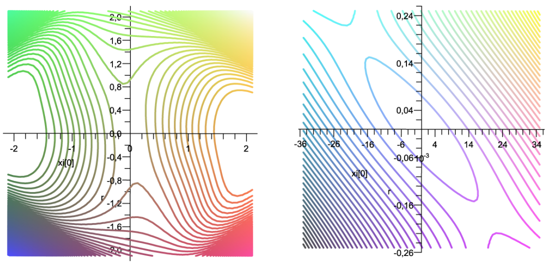


Рис. 1. Семейства линий уровней ключевой функции для уравнения Белецкого при $\mu = 1.1$, $\varepsilon = 0.2$; $\mu = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$.

Литература

1. Белецкий В.В Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.

2. Костина Т.И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. №1. 2011 – С. 181-186.

3. Костина Т.И. О ветвлении периодических решений уравнения колебаний маятника и уравнения Белецкого// Т.И. Костина , Ю.И Сапронов / Вестник Воронежского Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. №1. 2018 – С.99-114.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГРАНИЧНОГО РЕЖИМА С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ОДНОМЕРНЫМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ ДЛЯ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ

Ф.Е. Ломовцев, К.А. Спесивцева

(Минск; *lomovcev@bsu.by, ksenia.spesivtseva@gmail.com*)

Для первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ в задаче

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{xt}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t)\in\dot{G}_\infty, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0}=\psi(x),\ x>0, \tag{2}$$

$$[\zeta(t)u_{tt}+\xi(t)u_{xt}+\theta(t)u_{xx}+\alpha(t)u_t+\beta(t)u_x+\gamma(t)u]|_{x=0}=\mu(t),\ t>0, \tag{3}$$

нижними индексами функции u обозначены её частные производные соответствующих порядков по указанным в индексах переменным, $a_1>0$, $a_2>0$, ζ, ξ, θ, α, β, γ – заданные функции от t и f, φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x и t. Впервые зависящие от времени t коэффициенты в граничных режимах (3) для уравнения колебаний струны (1) при $a_1 = a_2$ появились в [1].

Уравнение (1) имеет характеристики $x - a_1 t = C_1$, $x + a_2 t = C_2$, $\forall\, C_1, C_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Характеристика $x = a_1 t$ является критической для уравнения (1) [2]. Она делит первую четверть плоскости $G_\infty = [0, +\infty[\times[0, +\infty[$ на два множества G_- и G_+ [2]. Под $C^k(\Omega)$ понимается множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. В случае нехарактеристических вторых производных в граничном режиме (3) критерий корректности задачи (1)–(3) для классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ найден в [2]. Для характеристических вторых производных в (3) для ограниченной струны нужны критерии корректности этой задачи для более гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$, $m \geq 2$.

Определение. Гладким m раз непрерывно дифференцируемым решением начально-граничной задачи (1)–(3) называется функция $u \in C^m(G_\infty)$, где $m = 2, 3, 4, \ldots$, удовлетворяющая уравнению (1) в обычном смысле, а начальным (2) и граничному (3) условиям в смысле пределов соответствующих выражений от ее значений $u(\dot{x}, \dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ для всех указанных в них граничных точек x и t.

Для решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ задачи (1)–(3) на "единицу" большей гладкости верны следующие условия согласования.

Теорема. *Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты имеют гладкость порядка* m*:* ζ, ξ, θ, α, β, $\gamma \in C^m[0, +\infty[$, *первые производные берутся не вдоль:* $a_1\alpha(t) \neq \beta(t)$, $t \in [0, +\infty[$, *а вторые производные – вдоль критической характеристики уравнения (1):* $a_1^2\zeta(t) - a_1\xi(t) + \theta(t) \equiv 0$, $t \in [0, +\infty[$. *Если начально-граничная задача (1)–(3) имеет ре-*

шение $u \in C^{m+1}(G_\infty)$, *то для правой части* $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, *начальных* $\varphi \in C^{m+1}[0,+\infty[$, $\psi \in C^{m}[0,+\infty[$ *и граничного* $\mu \in C^{m-1}[0,+\infty[$ *данных верны условия согласования*

$$Y_{k+1} \equiv \sum_{i=0}^{k} Z_{i\,k} = \mu^{(k)}(0), \; k \in [0, m-1], \; m \geq 2, \tag{4}$$

где слагаемые этой суммы соответственно равны

$$Z_{0\,k} \equiv \zeta^{(k)}(0)\big[f(0,0)+(a_2-a_1)\{\psi^{(1)}(0)+a_1\varphi^{(2)}(0)\}\big]+\xi^{(k)}(0)\times$$

$$\times\big[\psi^{(1)}(0)+a_1\varphi^{(2)}(0)\big]+\alpha^{(k)}(0)\psi(0)+\beta^{(k)}(0)\varphi^{(1)}(0)+\gamma^{(k)}(0)\varphi(0),$$

$$Z_{1\,k} \equiv k\Big\{\zeta^{(k-1)}(0)[f^{(0,1)}(0,0)+(a_2-a_1)f^{(1,0)}(0,0)+a_2(a_2-a_1)\times$$

$$\times\{\psi^{(2)}(0)+a_1\varphi^{(3)}(0)\}]+\xi^{(k-1)}(0)[f^{(1,0)}(0,0)+a_2\{\psi^{(2)}(0)+a_1\varphi^{(3)}(0)\}]+$$

$$+\alpha^{(k-1)}(0)[f(0,0)+(a_2-a_1)\psi^{(1)}(0)+a_1a_2\varphi^{(2)}(0)]+$$

$$+\beta^{(k-1)}(0)\psi^{(1)}(0)+\gamma^{(k-1)}(0)\psi(0)\Big\},$$

$$Z_{i\,k} \equiv \frac{k\,!}{i\,!\,(k-i)\,!}\Big\langle\zeta^{(k-i)}(0)\Bigg\{\sum_{s=1}^{i+1}\rho_{s-1}f^{(s-1,i-s+1)}(0,0)-$$

$$-a_1^2\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s+1,i-s-1)}(0,0)+\Big[\eta_{i+1}-a_1^2\eta_{i-1}\Big]\varphi^{(i+2)}(0)+$$

$$+\Big[\rho_{i+1}-a_1^2\rho_{i-1}\Big]\psi^{(i+1)}(0)\Bigg\}+\xi^{(k-i)}(0)\Bigg\{\sum_{s=1}^{i}\rho_{s-1}f^{(s,i-s)}(0,0)+$$

$$+a_1\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s+1,i-s-1)}(0,0)+\Big[\eta_i+a_1\eta_{i-1}\Big]\varphi^{(i+2)}(0)+$$

$$+\Big[\rho_i+a_1\rho_{i-1}\Big]\psi^{(i+1)}(0)\Bigg\}+\alpha^{(k-i)}(0)\sum_{s=1}^{i}\rho_{s-1}f^{(s-1,i-s)}(0,0)+$$

$$+\beta^{(k-i)}(0)\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s,i-s-1)}(0,0)+\Big[\eta_i\alpha^{(k-i)}(0)+\eta_{i-1}\beta^{(k-i)}(0)\Big]\times$$

$$\times\varphi^{(i+1)}(0)+\Big[\rho_i\alpha^{(k-i)}(0)+\rho_{i-1}\beta^{(k-i)}(0)\Big]\psi^{(i+1)}(0)+$$

$$+\gamma^{(k-i)}(0)\Bigg\{\sum_{s=1}^{i-1}\rho_{s-1}f^{(s-1,i-s-1)}(0,0)+\eta_{i-1}\varphi^{(i)}(0)+\rho_{i-1}\psi^{(i-1)}(0)\Bigg\}\Bigg\rangle,$$

где $i\in[2,k]$, $k\in[2,m-1]$, *и* ρ_j *и* η_j *находятся реккурентно*

$$\rho_j=(a_2-a_1)\rho_{j-1}+a_1a_2\rho_{j-2},\ j\geq 2,\ \rho_0=1,\ \rho_1=a_2-a_1,$$

$$\eta_j=(a_2-a_1)\eta_{j-1}+a_1a_2\eta_{j-2},\ j\geq 2,\ \eta_0=0,\ \eta_1=a_1a_2.$$

Здесь справа сверху над коэффициентами ζ, ξ, θ, α, β, γ, начальными φ, ψ и граничным μ данными задачи цифрой в круглых скобках обозначены порядки производных по x или t. Аналогично обозначены в круглых скобках через запятую соответственно порядки частных производных по x и t от правой части f.

Идея доказательства. Доказательство осуществляется методом математической индукции. Чтобы получить условие (4) при $k=0$ в равенстве (3) полагаем $t=0$ и используем правую часть уравнения, начальные данные и характеристичность вторых производных. Для получения условий (4) при $0<k\leq m-1$ равенство (3) дифференцируется k раз по t, вычисляются значения производных от решения u при $x=0$, $t=0$ с помощью начальных условий (2), уравнения (1) и характеристичности вторых производных.

Литература

1. *Ломовцев Ф.Е.* О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с

переменной областью определения операторных коэффициентов./ Ф.Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 5. — С. 873–886.

2. *Ломовцев Ф.Е.* Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных. / Ф.Е. Ломовцев, В.В Лысенко // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта, № 3 (104), — 2019. — С. 5–17.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГРАНИЧНОГО РЕЖИМА С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ОДНОМЕРНЫМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ ДЛЯ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ

Ф.Е. Ломовцев, Е.В. Устилко
(Минск; *lomovcev@bsu.by, ustilko@tut.by*)

Выведены достаточные условия согласования для смешанной задачи с характеристической косой производной в граничном режиме в первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$:

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{xt}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{t=0}= \varphi(x),\ u_t(x,t)|_{t=0}= \psi(x),\ x > 0, \quad (2)$$

$$[\alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0}= \mu(t),\ t > 0, \quad (3)$$

где нижними индексами функции u обозначены её частные производные соответствующих порядков по указанным в индексах переменным, постоянные $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, коэффициенты α, β, γ – заданные функции переменной t, $a_1\alpha(t) = \beta(t)$, $t > 0$, и исходные данные f, φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x и t.

Уравнение (1) имеет характеристики $x - a_1 t = C_1$, $x + a_2 t = C_2$, $\forall\, C_1,\, C_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Характеристика $x = a_1 t$ является критической для уравнения (1) и делит множество $G_\infty = [0, +\infty[\times[0, +\infty[$ на два подмножества G_- и G_+ [1]. Под $C^k(\Omega)$ понимается множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Критерий корректности смешанной задачи (1)–(3) для простейшего уравнения колебаний полуограниченной струны (1) при $a_1 = a_2$ с характеристической косой производной граничного режима (3) во множестве классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ установлен в [1]. Работа [2] свидетельствует о том, что в случае характеристической косой производной граничного режима (3) для уравнения колебаний ограниченной струны нужны критерии корректности этой вспомогательной смешанной задачи (1)–(3) для более гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$, $m \geq 2$.

Определение. Гладким m раз непрерывно дифференцируемым решением начально-граничной задачи (1)–(3) называется функция $u \in C^m(G_\infty)$, где $m = 2, 3, 4, \ldots$, удовлетворяющая уравнению (1) в обычном смысле, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле пределов соответствующих выражений от ее значений $u(\dot{x}, \dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ для всех указанных в них граничных точек x и t.

Для решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ задачи (1)–(3) на "единицу" большей гладкости нами найдены условия согласования. Для этих решений из (1)–(3) вытекают очевидные требования гладкости

$$f \in C^{m-1}(G_\infty),\ \varphi \in C^{m+1}[0, +\infty[,\ \psi \in C^m[0, +\infty[,\ \mu \in C^m[0, +\infty[. \tag{4}$$

Для получения первого условия согласования в равенстве (3) полагаем $t = 0$ и вычисляем значения слагаемых его левой части, используя условия (2) и характеристичность первых производных

$$\alpha(0)[\psi(0)+a_1\varphi^{(1)}(0)]+\gamma(0)\varphi(0)=\mu(0). \tag{5}$$

Второе условие согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) находится, полагая $t=0$ в первой производной по t от равенства (3) и вычисляя значения соответствующих производных от решения u при $x=0$, $t=0$ с помощью начальных условий (2) при $x=0$, уравнения (1) при $x=0$, $t=0$ и характеристичности первых производных

$$\alpha^{(1)}(0)[\psi(0)+a_1\varphi^{(1)}(0)]+\gamma^{(1)}(0)\varphi(0)+$$

$$+\alpha(0)\big\langle a_2[\psi^{(1)}(0)+a_1\varphi^{(2)}(0)]+f(0,0)\big\rangle+\gamma(0)\psi(0)=\mu^{(1)}(0). \tag{6}$$

Аналогичным образом выводятся остальные условия согласования граничного режима с начальными условиями и уравнением.

Теорема. *Пусть в граничном режиме (3) с коэффициентами* α, β, $\gamma\in C^m[0,+\infty[$ *косая производная является характеристической, т.е. она направлена вдоль критической характеристики уравнения (1):* $a_1\alpha(t)=\beta(t)$, $t\in[0,+\infty[$. *Если смешанная задача (1)–(3) имеет решение* $u\in C^{m+1}(G_\infty)$, *то для исходных данных* f, φ, ψ, μ *из (4) справедливы условия согласования (5), (6) и*

$$\alpha^{(q)}(0)[\psi(0)+a_1\varphi^{(1)}(0)]+\gamma^{(q)}(0)\varphi(0)+$$

$$+q\Bigg\{\alpha^{(q-1)}(0)\Bigg\langle a_2[\psi^{(1)}(0)+a_1\varphi^{(2)}(0)]+f(0,0)\Bigg\rangle+\gamma^{(q-1)}(0)\psi(0)\Bigg\}+$$

$$+\sum_{i=2}^{q}\frac{q\,!}{i\,!\,(q-i)\,!}\Bigg\{\alpha^{(q-i)}(0)\Bigg\langle a_2^i[\psi^{(i)}(0)+a_1\varphi^{(i+1)}(0)]+$$

$$+\sum_{j=0}^{i-1} a_2^j f^{(j,\,i-j-1)}(0,0)\Bigg\rangle + \gamma^{(q-i)}(0)\Bigg\langle(-a_1)^{i-1}\psi^{(i-1)}(0)+$$

$$+a_2\,\frac{a_2^{i-1}-(-a_1)^{i-1}}{a_1+a_2}\,[\psi^{(i-1)}(0)+a_1\varphi^{(i)}(0)]+$$

$$+\sum_{k=0}^{i-2}\,\frac{a_2^{k+1}-(-a_1)^{k+1}}{a_1+a_2}\,f^{(k,\,i-k-2)}(0,0)\Bigg\rangle\Bigg\}=\mu^{(q)}(0),\ q=\overline{2,m}. \tag{7}$$

Здесь справа сверху над коэффициентами α, β, γ, начальными φ, ψ и граничным μ данными этой задачи цифрой в круглых скобках обозначены порядки производных по x или t. Аналогичным образом в круглых скобках через запятую обозначены соответственно порядки частных производных по x и t от правой части f.

Замечание. В дальнейшем мы ослабим достаточные условия согласования (сопряжения) (5)–(7) до необходимых условий таких, как, например, в [1]. Затем мы их применим для выявления критерия корректности аналогичной смешанной задачи при характеристических косых производных на двух концах ограниченной струны без продолжений данных новым методом "вспомогательных смешанных задач для волновых уравнений на полупрямой" из [3].

Литература

1. *Ломовцев Ф.Е.* Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии./ Ф.Е. Ломовцев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2016. — № 1 — С. 21–27.

2. *Ломовцев Ф.Е.* Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах. / Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко // Веснік Гродзен-

скага дзяржаунага універсітэта імя Я. Купалы. Серыя 2. — 2019. — Т. 9, № 2. — С. 56–75.

3. *Ломовцев Ф.Е.* Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. / Ф.Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: матер. Междунар. матем. конф. Минск БГУ. 7–10 дек. 2015 г. в 2 ч. Минск : ИМ НАН Беларуси. — 2015. — Ч. 2. — С. 74–75.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ В-ГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина, С.А. Рощупкин
(Воронеж, *levnlya@mail.ru, sanina08@mail.ru,* Елец, *roshupkinsa@mail.ru*)

Рассматривается сингулярный дифференциальный оператор Лапласа—Бесселя Δ_B и B-гармоническое уравнение $\Delta_B u = 0$ в шаре. Решение граничной задачи Дирихле представлено в виде ряда Лапласа по весовым сферическим функциям. Полученные решения совпадают с решениями классического гармонического уравнения при равенстве нулю всех размерностей операторов Бесселя, входящих в оператор Δ_B.

1. **Весовые сферические функции (В-гармоники)**. Пусть n и N натуральные числа и $1{\le}n{\le}N$ и пусть $\mathbb{R}_N^+\{x{=}(x',x''){=}(x_1\,\ldots\,,x_n,x_{n+1}\,\ldots\,,x_N),\ \ x_1{>}0,\ldots,x_n{>}0\}$. В $\mathbb{R}_N^+$ рассматривается сингулярный дифференциальный оператор $\Delta_B\ =\ \sum_{j=1}^n B_j{+}\sum_{i=n+1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},\ B_{x_i}{=}\frac{\partial^2}{\partial x^2}{+}\frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\ ,\ \gamma_i\ >\ 0.$ Отметим, что обозначение Δ_B (в настоящее время принятое в мировой литературе) введено И.А. Киприяновым в 60-х годах прошлого столетия. Из [1] и книги [2] вытекает, что ограниченные решения уравнений, содержащие оператор Δ_B, надо искать в классе функций C^2, четных по каждой из переменных $x_1,\ \ldots\ ,x_n$. Такие функции будем называть x'-чётными.

Однородный x'-четный многочлен $P_m^\gamma(x)$ порядка m, удовлетворяющий уравнению $\Delta_B P_m^\gamma(x) = 0$, называется B-гармоническим. Весовой сферической функцией (B-гармоникой) (далее используется сокращение — в.с.ф.) *называется сужение B-гармонического многочлена на сферу:*

$$Y_m^\gamma(\Theta) = \frac{P_m^\gamma(x)}{|x|^m} = P_m^\gamma\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Для наших исследований потребуются следующие свойства в.с.ф., полученные в [3], [4], [5] (см. также книгу [6]).

Пусть $S_1^+ = \{x : |x| = 1\} \cap \mathbb{R}_N^+$.

Ортогональность в.с.ф., отвечающих различным порядкам m и k (m, k=0,1,2,...), определяется равенством

$$\int\limits_{S_1^+} Y_m^\gamma(\Theta)\, Y_k^\gamma(\Theta)\, (\Theta')^\gamma\, dS{=}0, \quad m{\neq}k, \quad Y_0^\gamma(\Theta) = 1\,. \qquad (1)$$

где $(\Theta')^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n} \Theta_i^{\gamma_i}$, $\mathcal{P}_{\Theta'}^\gamma$ – многомерный оператор Пуассона, C_m^ν — многочлен Гегенбауэра и коэффициент $|S_1^+|_\gamma$ определен по формуле "площади нагруженной сферы" (см. [6], с. 20). Среди в.с. функций данного порядка m в свою очередь можно выбрать ортогональный базис $Y_{m,k}^\gamma(\Theta)$, $1{\leq}k{\leq}d_\gamma(m)$. В результате получим систему ортогональных в.с. функций

$$\{Y_{m,k}^\gamma(\Theta)\}, \quad m{=}0, 1, 2, \ldots, \quad k{=}1, 2, \ldots d_\gamma(m),$$

которая плотна в пространстве непрерывных на S_1^+ функций, четных по каждому аргументу $x_1, \ldots, x_n$ и плотна в $L_2^\gamma(S_1^+)$ и полна в $L_2^\gamma(S_1^+)$.

Оценки D_B-производных от в.с. функций $Y_m^\gamma(\Theta)$ при $m \to \infty$.

Введем обозначение

$$(D_B)^{\beta}_{x'} = \begin{cases} B_{x_i}^{\frac{\beta_i}{2}} & , \ \beta_i = 2k - \text{ четное число,} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} B_{x_i}^{\frac{\beta_i - 1}{2}} & , \ \beta_i = 2k{+}1 - \text{ нечетное число,.} \end{cases}$$

Имеет место весовая среднеквадратическая оценка

$$\int\limits_{S_N^+} \left| \left((D_B)^{\beta}_{x'} \ D^{\alpha}_{x''} \ P^{\gamma}_m \right)(x) \right|^2 (x')^{\gamma} \, dS \leqslant C_1 m^{2|\alpha+\beta|} \| Y^{\gamma}_m \|_{L_2^{\gamma}(S_1^+)}$$

и равномерная оценка

$$\left| \left(B^{\beta}_{x'} D^{\alpha}_{x''} \, P^{\gamma}_m \right)(x) \right|^2 \leqslant C_2 m^{2|\alpha+2\beta|+N+|\gamma|-2} \, |x|^{2m-2|\alpha+2\beta|} \ \| Y^{\gamma}_m |_{L_2^{\gamma}(S_1^+)} \ ,$$

где постоянные C_1 и C_2 зависят от n, k, α и β, но не от m.

Дифференциальное уравнение в.с. функций:

$$\left(\Delta_B(\Theta) \, Y^{\gamma}_m \right)(\Theta) {=} m(m{+}N{+}|\gamma| - 2) Y^{\gamma}_m(\Theta) \, .$$

Здесь через $\Delta_B(\Theta)$ обозначено сужение Δ_B на сферу S_1^+ (оператор Бельтрами): $\Delta_B {=} \frac{\partial^2}{\partial r^2} {+} \frac{N+|\gamma|-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} {+} \frac{1}{r^2} \, \Delta_B(\Theta)$.

Ряды Лапласа по в.с. функциям. Справедливы следующие утверждения.

Пусть $f{\in}C^{2l}_{ev}(S_1^+)$ *и* $a_{m,k}$ *и* $b_{m,k}$ *коэффициенты Фурье-Лапласа функций* $f(\Theta)$ *и* $\left(\Delta^l_B(\Theta) \, f \right)(\Theta)$ *соответственно по системе в.с.функций. Тогда*

$$a_{m,k} = [m(m + N + |\gamma| - 2)]^l \, b_{m,k}.$$

Если $f{\in}C^{2l}_{ev}(S_1^+)$, *то*

$$|a_{m,k}| \leq M \, m^{-2l} \, , \quad M {=} \int_{S_1^+} |(\Delta_B(\Theta) f)(\Theta)|^2 \, (\Theta')^{\gamma} \, dS \, .$$

2. Задача Дирихле для B-гармонического уравнения в шаре

Пусть $U = \{x : |x| < 1\} \cap \mathbb{R}^+_{\mathbb{N}}$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta_B u{=}0,\ \ u\Big|_{|x|=1} = f(\Theta)\ \ , u \in C^2(U) \cap C(\overline{U}), \qquad (4)$$

где $\Theta_j = \Theta(\varphi^i)$, $\varphi^i = (\varphi_1, ..., \varphi_j)$ — сферические координаты точки на замкнутой n-полусфере в $\mathbb{R}^+_N$:

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_1 = \cos\varphi_1 \\ \Theta_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Theta_{N-1} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-1}, \\ \Theta_N = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}, \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} 0 \le \varphi_i \le \pi/2, \\ i = \overline{1, n}, \\ \\ 0 \le \varphi_j \le \pi, \\ j = \overline{n, N-1}, \\ 0 \le \varphi_{N-1} \le 2\pi. \end{array}$$

Решение задачи (4) в сферических координатах обозначим $\widetilde{u} = u(r, Q)$. Это приведет к задаче:

$$\Delta_B u{=}\Delta B_{n_r|\gamma|-1,r}\widetilde{u}\,(r,\Theta) + \frac{1}{r^2}\Delta_{B,\Theta}\widetilde{u}(r,\Theta),\ \ \widetilde{u}\Big|_{r=1}{=}f(\Theta)\,. \quad (5)$$

Предположим существование решения (5) в виде $\widetilde{u} = R(r) \cdot Y(\Theta)$. Тогда оно должно удовлетворять уравнению

$$r^2 Y(\Theta) B_{N+|\gamma|-1,r} R(r) + R(r)\Delta_{B,\Theta} Y\,(\Theta) = 0. \qquad (6)$$

Отсюда имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} r^2 B_{N+|\gamma|-1,r} R(r) - \lambda R(r) = 0, \\ \Delta_{B,\Theta} Y\,(\Theta) + \lambda Y(\Theta) = 0. \end{cases}$$

Из условия Дирихле следует, что по каждой переменной φ_j решение задачи (6) периодично с периодом 2π. Такому условию удовлетворяет и B-гармоника $Y^\gamma_m(\Theta)$. Поэтому за нетривиальное решение уравнения примем спектральный набор

$$\lambda = m\left(m + N + |\gamma| - 2\right), \quad Y\left(\Theta\right) = Y_m^\gamma\left(\Theta\right), \;\; m = 0, 1, 2, ...$$

Решение $R(r)$ ищем в виде $R(r) = r^k$. Имеем $k\left(k{+}N{+}\left|\gamma\right|{-}2\right){-}k\left(m{+}N{+}\left|\gamma\right|{-}2\right){=}0 \implies k^2 - km = 0.$ Таким образом, число k может принимать два значения $k_1 = 0$ и $k_2 = m$. В первом случае $R(r) = 1$ и мы получили решение, не зависящее от r. Т.е. оно постоянно на лучах, выходящих из центра шара и, следовательно, представляет собой однородную функцию, которая, очевидно, не определена в начале координат. Итак решение уравнения (6) имеет вид $\widetilde{u}_m(r,\Theta) = r^m \cdot a_m \cdot Y_m^\gamma(\Theta)$. Предположим, что это решение представлено рядом Лапласа

$$\widetilde{u}(r,\Theta) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m a_m Y_m^\gamma(\Theta).$$

При выполнении условия задачи и при $r < 1$ он сходится абсолютно и равномерно, поэтому функция $\widetilde{u}(r,\Theta)$ — решение (5). Если это решение удовлетворяет условию Дирихле, то это условие представлено рядом Фурье—Бесселя $f(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m Y_m^\gamma(\Theta(\varphi))$, следовательно

$$a_m = \int_{S_N^+} f(\varphi) Y_m^\gamma\left(\Theta(\varphi)\right)\left(\Theta'\right)^\gamma \; dS(\Theta).$$

Литература

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. // ДАН СССР. 1951. Т.77. № 1.С.181-183.

2. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические задачи / И. А. Киприянов. – М. : Наука, 1997. – 199 с.

3. *Ляхов Л.Н.* Об одном классе сферических функций и сингулярных псевдодифференциальных операторов. // ДАН. 1983. Т.272.№ 4. С.781-784

4. *Ляхов Л.Н.* О рядах по весовым сферическим функциям. // Новосибирскю: СО АН СССР. 1984 Кн. Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математ. физики. С. 102-109.

5. *Ляхов Л.Н.* Весовые сферические функции и сингулярные псевдодифференциальные операторы. // Дифференц. уравн. 1985. Т.21. № 6. С. 1020-1032.

6. *Ляхов Л.Н.* В-гиперсингулярные интегралы и их приложение к функциональным классам Киприянова и интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. / Липецк: Редакционно издательский центр ЛГПУ. 2007. С. 232.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНСТАНТЕ НИКОЛЬСКОГО С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВЕСОМ ГЕГЕНБАУЭРА[19]

И.А. Мартьянов

(Тула; *martyanow.ivan@yandex.ru*)

Пусть $L^p_\alpha(-\pi,\pi]$ — комплексное пространство периодических функций с конечной относительно периодического веса Гегенбауэра нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, |\sin x|^{2\alpha+1}\, dx\right)^{1/p}, \quad \alpha \geq -1/2,$$

$\mathcal{T}_n$ — подпространство тригонометрических полиномов порядка n с комплексными коэффициентами.

Через

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = \sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}} \frac{\|T\|_{\infty,\alpha}}{\|T\|_{p,\alpha}}$$

[19]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90152.

обозначим точную константу Никольского разных метрик. Задача нахождения $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n)$ имеет долгую историю, особенно в безвесовом случае $\alpha = -1/2$. Однако даже в нем она вычислена только при $p = 2$. Отметим результаты Я.Л. Геронимуса (1938), Л.В. Тайкова (1993), Д.В. Горбачева (2005), В.В. Арестова и М.В. Дейкаловой (2015), И.Е. Симонова и П.Ю. Глазыриной (2015), E. Levin и D.S. Lubinsky (2015), М.И. Ганзбурга и С.Ю. Тихонова (2017) и многих других.

Теорема. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\alpha \ge -1/2$. *Тогда*

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = T_*(0),$$

где T_* *— экстремальный действительный четный полином порядка* n, *для которого* $\|T_*\|_{p,\alpha} = 1$.

Кроме того, $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n)$ *с точностью до положительной константы совпадает с соответствующей точной константой Никольского для алгебраических полиномов степени* n *в пространстве* L^p *на отрезке* $[-1, 1]$ *с весом Гегенбауэра* $(1 - x^2)^\alpha$.

Отметим в данном направлении результаты В.В. Арестова и М.В. Дейкаловой (2015), В.В. Арестова, А.Г. Бабенко, М.В. Дейкаловой и А. Хорват (2018), Д.В. Горбачева и Н.Н. Добровольского (2018).

Теорема сводит вычисление тригонометрической константы Никольского к константе для алгебраических полиномов. В последнем случае она может быть вычислена методами нелинейной оптимизации на основе доказанных В.В. Арестовым и М.В. Дейкаловой соотношений двойственности.

Для доказательства теоремы при $\alpha > -1/2$ применяется положительный оператор обобщенного сдвига

$$T^t f(x) = \frac{c_\alpha}{2} \int_0^\pi \big(f(\psi)(1 + B) + f(-\psi)(1 - B)\big) \sin^{2\alpha}\theta \, d\theta,$$

где $c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}$,

$$\psi = \arccos(\cos x \cos t + \sin x \sin t \cos \theta),$$

$$B = \frac{\sin x \cos t - \cos x \sin t \cos \theta}{\sin \psi}, \quad T^t 1 = 1.$$

Он построен и изучен Д.В. Чертовой (2009). В частности, она доказала, что его норма в $L^p_\alpha(-\pi, \pi]$ равна единице. На четных функциях T^t совпадает со сдвигами Лежандра ($\alpha = 0$) и Гегенбауэра ($\alpha > -1/2$).

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БИФРУКАЦИЙ СЛОЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ В ИНТЕГРИРУЕМЫХ БИЛЛИАРДАХ В НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ[20]

В.А. Москвин

(Москва; *aoshi.k68@gmail.com*)

Математический биллиард — динамическая система, описывающая движение без трения материальной точки внутри области с абсолютно упругим отражением от границы (угол падения равен углу отражения). В книге С.Л. Табачникова [1] дан обзор актуальных исследований биллиардов. Топология совместных поверхностей уровня интегралов описывается с помощью теории А.Т. Фоменко, которая в случае полных потоков изложена в книге Болсинова–Фоменко [2]. В докладе будет представлено исследование топологии фазового многообразия плоских биллиардов, потоки в которых не являются полными вследствие наличия невыпуклых углов на границе области. Как было показано В. Драгович и

[20]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

М. Раднович [4] почти для всех значений интеграла в таких биллиардах совместная поверхность уровня интегралов будет гомеоморфна сфере с ручками и проколами. В докладе будет представлено топологическое описание трехмерных окрестностей двумерных комплексов, являющихся прообразами критических значения интеграла Λ.

Мы будем понимать под биллиардной областью Ω односвязную часть плоскости, ограниченную дугами софокусных квадрик из семейства:

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda),\ \lambda \leq a.$$

Биллиард Ω не должен содержать фокусов. Также любой сегмент фокальной прямой, содержащийся в биллиарде Ω, либо лежит между фокусами, либо лежит вне фокусов. Такие биллиарды будем называть однородными.

Разрежем биллиард Ω следующим образом: если биллиард Ω не содержит сегментов фокальной прямой между фокусами, то проведем все эллипсы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на которых лежат вершины углов в $3\pi/2$, а если биллиард Ω не содержит сегментов фокальной прямой вне фокусов, то проведем все гиперболы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на которых лежат вершины не выпуклых углов. В результате биллиард Ω разобьется на биллиарды $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ без не выпуклых углов на границе области. Значения дополнительного интеграла $\Lambda = \lambda_i$ и $\Lambda = b$ будут особыми [4].

Определим 3-атомы для таких биллиардов. В этой работе они будут рассматриваться как CW-комплексы.

Определение 1. *Трехмерным атомом (3-атомом) назовем трехмерную окрестность $U \subset Q^3$ двумерного слоя G, задаваемую неравенством $c - \epsilon \leq \Lambda \leq c + \epsilon$ для достаточно малого ϵ, расслоённую на двумерные поверхности уровни функции Λ и рассматриваемую с точностью до послойной эквивалентности. ($c = b$ или $c = \lambda_i$ для некоторого i)*

Рассмотрим биллиард Ω и сегмент квадрики λ_i. Обозначим через ν число компонент связности внутри гиперболы (вне эллипса) λ_i, а через ξ — число компонент связности вне гиперболы (внутри эллипса) с параметром λ_i.

Теорема 1. *Рассмотрим однородный биллиард Ω с выбранным на нем разбиением $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$. Рассмотрим окрестность значения дополнительного интеграла $\lambda_i - \epsilon \leq \Lambda \leq \lambda_i + \epsilon$ и соответствующий 3-атом U_i. Тогда:*

1. Комплекс $U_i \cong \tilde{U}_i \cup (G_g \times I)$, где G_g — поверхность рода g с приклеенными к ней ν цилиндрами $S^1 \times I$ и $g = const$ при изменении интеграла Λ. Комплекс $\tilde{U}_i \in Q^3$ проектируется при естественной проекции π в окрестность квадрики λ_i в биллиарде Ω;

2. Комплекс $\tilde{U}_i \setminus T_{\lambda_i}|_{\Lambda<\lambda_i} \cong (C_1 \cup \ldots \cup C_{2\nu+2\xi}) \times I$, где T_{λ_i} — двумерный комплекс, построенный алгоритмически;

3. Комплекс $\tilde{U}_i|_{\Lambda \geq \lambda_i} \cong (C_1 \cup \ldots \cup C_{2\nu}) \times I$;

4. Трехмерный комплекс $\tilde{U}_i \setminus T_{\lambda_i}|_{\Lambda<\lambda_i}$ приклеивается к двумерному комплексу T_{λ_i} послойно. Данная склейка описывается алгоритмом.

Теорема 2 описывает строение окрестности U особого слоя $\Lambda = b$.

Теорема 2. *Рассмотрим однородный биллиард Ω с выбранным на нем разбиением $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$. Рассмотрим окрестность значений дополнительного интеграла $b-\epsilon \leq \Lambda \leq b+\epsilon$ и соответствующий 3-атом U. Тогда:*

1. Комплекс $U \setminus (T_{\lambda_1} \cup \ldots \cup T_{\lambda_n}) \cong V_{\Sigma_1} \times I \cup \ldots \cup V_{\Sigma_N} \times I$, где объединение несвязно. Здесь T_{λ_i} — двумерные комплексы, построенный алгоритмически, а V_{Σ_j} — 2-атом, соответствующий 3-атому выпуклого биллиарда Σ_j, см. [3];

2. Двумерные комплексы $(T_{\lambda_1} \cup \ldots \cup T_{\lambda_n})$ приклеиваются к трехмерному комплексу $U \setminus (T_{\lambda_1} \cup \ldots \cup T_{\lambda_n})$ послойно. Данная склейка описывается алгоритмом.

Литература

1. *Табачников С. Л.* Геометрия и бильярды.М.;Ижевск:НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2011.

2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 1999.

3. *Фокичева В. В.* Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик// матем. сб. 2015, 206, 10. 127–176.

4. *Dragovic V., Radnovic M.* Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards// Regullar Chaotic Dyn. РАН. 2009. 14. 479–494.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РЕШЕТЧАТЫХ МОДЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Е.Ю. Московченко, Ю.П. Вирченко

(Белгород; *virch@bsu.edu.ru*)

Изучается класс решетчатых моделей статистической механики классических систем с суммируемым парным потенциалом взаимодействия. Изучается система уравнений для частных распределений вероятностей гиббсовского точечного случайного поля. Доказана аналитическая зависимость решений этой системы от спектрального параметра z в области $\{z : \mathrm{Re} z \geq 0\}$ при достаточно больших значений параметра $T > 0$ в распределении Гиббса. Пусть $\Lambda = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^3 : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{3} n_j \mathbf{e}_j, n_j = 0 \div L-1\}$ — последовательность множеств в $\mathbf{Z}^3$, где $\mathbf{e}_j$ – орты в $\mathbf{R}^3$. При $L \to \infty$ трансляцией $\Lambda \Rightarrow \Lambda - (L/2)\sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j$ определен переход к пределу $\Lambda \to \mathbf{Z}^3$. Для каждого Λ вводится пространство случайных событий $\Omega(\Lambda)$, состоящее из класса всех дихотомических функций $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda$ со значениями 0 и 1. На этом пространстве определен функционал

$$\mathsf{H}_\Lambda[\rho] = -\mu \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda} \rho(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}\in\Lambda, \mathbf{y}\in\mathbf{Z}^d, \mathbf{y}\neq\mathbf{x}} U(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{x})\rho(\mathsf{P}_\Lambda\mathbf{y})\,, \quad (1)$$

где $\mu \in \mathbf{R}$ и функция $U(\mathbf{x})$ со значениями в $\mathbf{R}$ — центрально-симметрична, $U(-\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$ и суммируема на $\mathbf{Z}^3$, $\|U\| \equiv \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^d} |U(\mathbf{x})| < \infty$, причем $U(0) = 0$. Здесь P_Λ – оператор проектирования, определяемый $\mathsf{P}_\Lambda\mathbf{x} = \mathbf{z} \in \Lambda$ для каждого вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^3$ на основе однозначного представления в виде $\mathbf{x} = \mathbf{z} + L\sum_{j=1}^{3} n_j\mathbf{e}_j$, $\langle n_1, n_2, n_3\rangle \in \mathbf{Z}^3$.

На основе гамильтониана (1) вводится распределение вероятностей Гиббса на $\Omega(\Lambda)$.

$$\Pr\{\rho\} = Q_\Lambda^{-1}(z)\, \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho]/T\Big), \quad T > 0,$$

$$Q_\Lambda(z) = \sum_{\rho\in\,\Omega(\Lambda)} \exp\Big(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho]/T\Big)\,.$$

Набор p_Λ вероятностей $p_\Lambda(X, z) = \mathsf{E}\prod_{\mathbf{x}\in X} \rho(\mathbf{x})$, $X \subset \Lambda$. В пределе $\Lambda \to \mathbf{Z}^d$ он удовлетворяет системе уравнений

$$\mathsf{p}(z) = z(1+z)^{-1}\mathsf{e} + \mathsf{K}\mathsf{p}(z)\,, \quad z = e^{\mu/T}, \quad (2)$$

где $\mathsf{e} = \langle \delta_{1,|X|} : \emptyset \neq X \subset \Lambda\rangle$ и линейный оператор K, действующий в линейном банаховом пространстве $\mathcal{E}$ с нормой $\|\mathsf{p}\|_0 = \sup_{X\subset\mathbf{Z}^3; |X|<\infty} |p(X, z)|$, определяется формулой

$$\big(\mathsf{K}\mathsf{g}\big)(X) = \frac{zW(\mathbf{x}; X)}{1 + zW(\mathbf{x}; X)}\Big[(1-\delta_{0,|X\backslash\{\mathbf{x}\}|})g(X\backslash\{\mathbf{x}\}) +$$

$$+ \sum_{\emptyset\neq Y\subset\mathbf{Z}^d\backslash X} K(\mathbf{x}; Y)\big[g(X\backslash\{\mathbf{x}\}\cup Y) - g(X\cup Y)\big]\Big]\,, \quad (3)$$

$$K(\mathbf{x}; Y) = \Big\{\prod_{\mathbf{y}\in Y} K(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \text{ при } |Y| > 0\,; \quad 1, \text{ при } |Y| = 0\,.\Big\}\,,$$

$K(\mathbf{x}) = \exp(-U(\mathbf{x})/T) - 1$, $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^d$, $W(\mathbf{x};X) = \exp\Big(-\sum_{\mathbf{y}\in X} U(\mathbf{x}-\mathbf{y})/T\Big)$.

Теорема 1. *Уравнение (2) с оператором (3), разрешимы однозначным образом в области* $\{z : \mathrm{Re}\, z \geq 0\} \subset \mathbf{C}$ *и их решения* $\mathsf{p} = \langle p(X,z); X \subset \mathbf{Z}^3\rangle$ *являются аналитическими функциями от* z *при* $\mathrm{Re} z > 0$*, если* $T > \|U\|/|\ln \kappa_0|$*, где* κ_0 *– единственный корень полинома* $\kappa^4 + 4(\kappa - 1)$ *на отрезке* $[0,1]$.

Литература

1. *Добрушин Р.Л.* Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием // Функциональный анализ и его приложения.– 1968.– 4(1).– С.31-43.

О КОЭРЦИТИВНОЙ ОЦЕНКЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов
(Вологда; *emuhamadiev@rambler.ru, nan67@rambler.ru*)

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_\lambda x(t) \equiv x'(t) - A(t,\lambda)|x(t)|^{m-1}x(t)$$

в пространстве $C^1(0,\omega;R^n)$, где $\omega > 0$, $n, m > 1$, $A(t,\lambda)$ - квадратная матрица-функция, непрерывная по совокупности переменных $(t,\lambda) \in [0,\omega] \times [0,1]$ и ω-периодическая по t. Исследуем вопрос о коэрцитивной оценке вида

$$||L_\lambda x|| + |x(0) - x(\omega)|^m \geq \sigma ||x||^m \qquad (1)$$

при $||x|| \geq M$, где положительные числа M и σ не зависят от $x(t)$ и λ.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если в любой точке $(t,\lambda) \in [0,\omega] \times [0,1]$ матрица $A(t,\lambda)$ не имеет чисто мнимых собственных значений, то верна оценка (1).*

Используя оценку (1) можно исследовать разрешимость периодической задачи

$$L_\lambda x(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < t < \omega, \quad x(0) = x(\omega). \qquad (2)$$

Здесь $f : [0,\omega] \times R^n \mapsto R^n$ - непрерывное отображение, ω-периодическое по t и удовлетворяющее условию

$$\max_{0 \le t \le \omega} |f(t,y)||y|^{-m} \to 0 \quad \text{при} \quad |y| \to \infty. \qquad (3)$$

Из теоремы 1 вытекает, что для решений периодической задачи (2) имеет место априорная оценка

$$||x|| < M_1,$$

где M_1 не зависит от x и λ. Следовательно, определено вращение $\gamma(\Phi_\lambda, S_r)$ вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi_\lambda x \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t (L_\lambda x(s) - f(s, x(s)))ds$$

на сферах $S_r = \{x : ||x|| = r\}$ радиуса $r \ge M_1$ (см., напр., [1]), при этом $\gamma(\Phi_\lambda, S_r)$ не зависит от λ и r. К тому же, $\gamma(\Phi_\lambda, S_r) = \gamma(\Psi_0, S_r)$, где

$$\Psi_0 x \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t L_0 x(s)ds.$$

Векторное поле Ψ_0 нечетно, поэтому $\gamma(\Psi_0, S_r) \ne 0$ [1]. Отсюда, применяя принцип ненулевого вращения получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда задача (2) разрешима при любых $\lambda \in [0,1]$ и f, удовлетворяющем условию (3).*

Литература

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука. 1975. 512 с.

НЕКОМПАКТНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ[21]

С.С. Николаенко

(Москва; *nikostas@mail.ru*)

Изучается задача топологической классификации 3-мерных бифуркаций (перестроек) лиувиллевых слоений, возникающих в интегрируемых гамильтоновых системах с двумя степенями свободы, ограниченных на неособые невырожденные изоэнергетические многообразия Q^3. Такие бифуркации были названы А.Т. Фоменко *3-атомами* (см. [1]). Как было показано А.Т. Фоменко [2], в случае компактного многообразия Q^3 в некоторой малой инвариантной окрестности бифуркационного слоя определено сохраняющее первые интегралы гамильтоново S^1-действие с тривиальными либо изоморфными группе $\mathbb{Z}_2$ стабилизаторами. Как следствие, каждый компактный 3-атом допускает структуру S^1-расслоения, а именно, известного в маломерной топологии расслоения Зейферта с особыми слоями типа $(2,1)$ (см., например, [3]), базой которого является *2-атом* (описывающий бифуркации одномерных слоений, задаваемых функциями Морса на 2-мерных многообразиях). Отметим, что аналогичный результат получен Н.Т. Зунгом [4] в многомерном случае для вещественно-аналитических систем. Мы обобщаем теорему Фоменко на случай систем с некомпактными изоэнергетическими многообразиями Q^3, удовлетворяющих следующим двум условиям:

[21]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01303).

1. гамильтоновы поля, порождаемые первыми интегралами системы, полны (т. е. естественный параметр на их интегральных траекториях определён на всей числовой прямой);

2. на бифуркационном слое хотя бы одна орбита гамильтонова $\mathbb{R}^2$-действия (определённого в силу предыдущего условия) является нестягиваемой (т. е. гомеоморфна окружности S^1 или цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$).

Таким образом, как и в компактном случае, задача классификации некомпактных 3-атомов (для систем, удовлетворяющих двум перечисленным условиям) сводится к задаче классификации некомпактных 2-атомов, полученной ранее в работе [5].

Литература

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1. Ижевск: изд. дом "Удмуртский университет", 1999. – 444 с.

2. *Фоменко А.Т.* Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1986. – Т. 50, № 6. – С. 1276–1307.

3. *Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трёхмерной топологии. М.: изд-во МГУ, 1991. – 304 с.

4. *Zung N.T.* A note on degenerate corank-one singularities of integrable Hamiltonian systems // Commentarii Mathematici Helvetici. – 2000. – Vol. 75, no. 2. – P. 271–283.

5. *Николаенко С.С.* Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // Матем. сборник (в печати).

ОБ ОДНОЙ ДРОБНОЙ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ[22]

В.П. Орлов
(Воронеж; *orlov_vp@mail.ru*)

Устанавливается существование и единственность сильного решения начально-краевой задачи для системы уравнений движения нелинейно-вязкоупругой жидкости, являющейся дробным аналогом модели вязкоупругости Фойгта, в плоском случае.

В $Q = [0,T] \times \Omega$, где $\Omega \in R^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, рассматривается начально-краевая задача Z:

$$\partial v/\partial t + \sum_{i=1}^{n} v_i \partial v/\partial x_i -$$

$$\mu_0 \mathrm{Div}\, \mathcal{E}(v) - \mathrm{Div}\, \mu_1(S(v))\, \mathcal{E}(v) -$$

$$-\mu_2 \mathrm{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\, \mathcal{E}(v)(s,x)\, ds =$$

$$f(t,x) + \mathrm{grad}\, p,\ (t,x) \in Q;$$

$$\mathrm{div}\, v = 0,\ (t,x) \in Q; \quad \int_\Omega p(t,x)\, dx = 0;\ t \in [0,T];$$

$$v(0,x) = v^0(x),\ x \in \Omega, \quad v(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega.$$

Здесь $v(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x))$ и $p(t,x)$ искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t,x)$ — плотность внешних сил, $\mathcal{E}(v)$ – тензор скоростей деформаций, т.е. матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i))$. Дивергенция $\mathrm{Div}\, \mathcal{E}(v)$ матрицы определяется как вектор с компонентами — дивергенциями строк, $S(v) = \sum_{i,j=1}^{2} (\partial v_i/\partial x_j)^2$, $0 < \alpha < 1$, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 \geq 0$,

[22]Работа выполнена при финансовой Российского Научного Фонда (проект №19-11-00146).

$\mu_1(s)$ неотрицательная непрерывно дифференцируемая при $s \geq 0$ функция.

Гильбертовы пространства H и V определяются обычным образом (см., напр. известную монографию Темама). Обозначим через $\mathcal{P}$ ортопроектор Лерэ в $L_2(\Omega)^2$ на H.

Пусть

$$W = \{v: \ v \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega)^2 \cap L_2(0,T;H) \cap$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega))^2, \quad v' \in L_2^1(0,T;H)\}.$$

Запишем задачу Z в операторной форме. Определим в H оператор A формулой $Av = -\mathcal{P}\triangle v$ на $D(A) = H \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)^2 \cap W_2^2(\Omega)^2$. Оператор A является положительно определенным самосопряженным оператором.

Положим $K(v) = \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$ для $v \in V$ и введем операторы

$$B(v) = -\mathcal{P}\mathrm{Div}\,(\mu_1\,(S(v(t,x)))\,\mathcal{E}(v)(t,x));$$

$$C(v) = \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}\,Av(s,\cdot)\,ds.$$

Операторы B и C определены при п.в. t для функций $v \in W_2^{0,2}(Q)$.

Рассмотрим при $t \in [0,T]$ задачу ZP:

$$v' + \mathcal{P}K(v) + kv + \mu_0 Av + B(v) + \mu_2 C(v) = f, \ v(0) = v^0.$$

Определение. *Сильным решением задачи ZP называется функция $v \in W$, удовлетворяющая условию и при п.в. (t,x) уравнению ZP .*

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(0,T;H)$, $v^0 \in V$, а $\mu_1(s)$ такова, что*

$$\mu_1(s) + 2\mu_1'(s) \geq 0, s \geq 0; \quad s|\mu_1(s)| \leq M, \quad s \geq a,$$

где $a > 0$ - некоторая константа. Тогда задача ZP имеет сильное решение.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда сильное решение задачи ZP единственно.*

Для операторного уравнения определяется семейство аппроксимационных уравнений ZPA при $k \geq 0$:

$$v' + \exp(kt)\mathcal{P}K(v) + kv + \mu_0 Av + B_k(v) =$$

$$f + \mu_2 C_k(v),\, t \in [0, T], \quad v(0) = v^0.$$

Здесь

$$C_k(v) = \int\limits_0^t R_k(t-s)\, Av(s)\, ds,$$

$$B_k(v) = -\mathcal{P}\mathrm{Div}\left(\mu_1 \left(\exp(2kt) S(v(t))\right) \mathcal{E}(v)(t)\right)$$

$$R_k(t) = \exp(-kt)t^{-\alpha} \text{ при } t \in [0, T], \quad R_k(t) = 0 \text{ при } t \notin [0, T].$$

Задача ZPA получается формально умножением уравнения ZP на $\exp(-kt)$. Существование решений аппроксимационных уравнений ZPA устанавливается с помощью некоторого итерационного процесса. Решение основного операторного уравнения получается как слабый предел решений аппроксимационных уравнений. Затем устанавливается, что слабое решение является сильным.

Результаты получены совместно с В.Г. Звягиным.

Литература

1. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* О сильных решениях дробной нелинейно-вязкоупругой модели типа Фойгта. *Известия ВУЗов. Математика.* No 12 (1919), с. 106-111.

2. *Орлов В.П., Соболевский П.Е.* О гладкости обобщенных решений уравнений движения почти ньютоновской жидкости, *Численные методы механики сплошной среды.* No 1, Т. 16 (1985), с. 107–119.

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ [23]

Г.Г. Петросян
(Воронеж, ВГУИТ, ВГПУ; *garikpetrosyan@yandex.ru*)

В работе для полулинейного функционально-дифференциального включения в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида

$$^{C}D^{q}x(t) \in Ax(t) + F(t, x_t),\ t \in [0, T], \tag{1}$$

мы исследуем задачу существования интегральных решений удовлетворяющих периодическому краевому условию

$$x_0 = x_T. \tag{2}$$

Символом $^{C}D^{q}$ обозначается дробная производная Капуто порядка $q \in (0, 1)$, x_t - предыстория функции $x(t)$ до момента времени $t \in [0, T]$, то есть $x_t(s) = x(t + s), s \in [-h, 0], 0 < h < T$. A - линейный замкнутый оператор в E удовлетворяющий условию:

(A) $A : D(A) \subseteq E \to E$ порождает ограниченную C_0–полугруппу $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ линейных операторов в E.

Мы полагаем, что многозначное нелинейное отображение $F : [0, T] \times C([-h, 0]; E) \to Kv(E)$, где $Kv(E)$ - совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств E, подчиняется следующим условиям:

$(F1)$ для каждого $\xi \in C([-h, 0]; E)$ мультифункция $F(\cdot, \xi) : [0, T] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

[23]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60011.

$(F2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ мультиоператор $F(t,\cdot) : E \to Kv\,(E)$ полунепрерывен сверху;

$(F3)$ существует функция $\alpha \in L^{\infty}_{+}([0,T])$ такая, что

$$\|F(t,x_t)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|x_t\|_{C([-h,0];E)}) \text{ для п.в. } t \in [0,T];$$

$(F4)$ существует функция $\mu \in L^{\infty}([0,T])$ такая, что для каждого ограниченого множества $\Delta \subset C([-h,0];E)$:

$$\chi(F(t,\Delta)) \leq \mu(t)\varphi(\Delta),$$

для п.в. $t \in [0,T]$, где $\varphi(\Delta) = \sup_{s\in[-h,0]} \chi(\Delta(s))$, χ мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\Delta(s) = \{y(s) : y \in \Delta\}$.

Теорема 1. *При выполнении условий* (A), $(F1) - (F4)$, *и дополнительного условия*

$((A1))$ *полугруппа* U *экспоненциально убывающая, то есть*

$$\|U(t)\| \leq e^{-\eta t}, \quad t \geq 0,$$

для некоторого числа $\eta > 0$.

Если $\frac{k}{\eta} < 1$, *где* $k = \max\{\|\alpha\|_\infty, \|\mu\|_\infty\}$, *то задача (1)-(2) имеет решения.*

Литература

1. *Борисович Ю.Г.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. - М.: Книжный дом „Либроком“, 2011. - 224 С.

2. *Kamenskii M.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. — Berlin— New-York: de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Walter de Gruyter, 2001. — 231 P.

3. *Kamenskii M.* Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space

/ M. Kamenskii, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, J.-C. Yao // Applicable Analysis. - 2017. - Vol. 96. №4.- P. 571-591.

4. *Kamenskii M.* On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan, J.C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. - 2017. - Vol. 28. №4. - P. 1-28.

5. *Kamenskii M.* Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan, J.C. Yao // Fixed Point Theory and Applications. - 2019. - Vol. 30. №2.

6. *Kamenskii M.I.* The Semidiscretization method for differential inclusions of fractional order / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2018. - Т. 23. №122. - С. 125-130.

7. *Афанасова М.С.* О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве / М.С. Афанасова, Г.Г. Петросян // Известия вузов. Математика. – 2019 .- №9. – С. 3-15.

8. *Петросян Г.Г.* О формальном представлении решений дифференциальных уравнений дробного порядка /Г.Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2018. - Т. 23. №123. - С. 524-530.

9. *Петросян Г.Г.* Об одной задаче управляемости для дифференциального включения с дробной производной Капуто / Г.Г. Петросян, О.Ю. Королева // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2018. - Т. 23. №124. - С. 679-684.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АТЛАС ОДНОЙ

ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ[24]

П.Е. Рябов, В.К. Каверина
(Москва; *PERyabov@fa.ru; VKKaverina@fa.ru*)

В докладе представлены задачи и результаты исследования фазовой топологии интегрируемых систем с двумя и тремя степенями свободы из динамики твердого тела, допускающих представление Лакса. Основой таких исследований послужило понятие топологического атласа, введенное М. П. Харламовым в начале 2000-х гг. для неприводимых интегрируемых систем с тремя степенями свободы [1]. Топологический атлас включает аналитическое описание критических подсистем полного отображения момента, каждая из которых при фиксированных физических параметрах является почти гамильтоновой системой с меньшим числом степеней свободы; классификацию оснащенных изоэнергетических диаграмм Смейла с полным описанием регулярных торов Лиувилля и их бифуркаций; определение типов всех критических точек полного отображения момента и программы-конструктора построения топологических инвариантов. Как оказалось, к настоящему моменту локальное и полулокальное исследование критических подсистем является эффективным средством для конструирования грубых топологических инвариантов. Для интегрируемых гамильтоновых систем с n степенями свободы с полиномиальными или рациональными интегралами множество критических значений отображения момента $\mathcal{F}$ может быть записано в виде $P = 0$, где P – полином от фазовых переменных. Разложение его на неприводимые сомножители $P = \prod_j L_j$ приводит к определению критической подсистемы $\mathcal{M}_j$ как

[24]Работа первого автора поддержана Российским научным фондом (№ 19-71-30012).

множества критических точек нулевого уровня некоторой функции L_j. Оказывается, критическая точка ранга k локально является точкой пересечения $n-k$ подобластей критических подсистем. Интегралы L_j этих подсистем порождают симплектические операторы $\mathcal{A}_{L_j}$, которые определяют тип критической точки. Бифуркации, которые возникают при пересечении поверхностей $\mathcal{F}(M_j)$ в точке $\mathcal{F}(x)$, порождают полулокальный тип критической точки. Такой подход приводит к аналитическому описанию топологических инвариантов исключительно в терминах первых интегралов. Для некоторых интегрируемых задач динамики твердого тела (волчок Ковалевской в двойном поле сил, интегрируемый случай Ковалевской-Соколова, интегрируемый случай Ковалевской-Яхья) удалось эффективно реализовать программу построения топологического атласа [2], [3], [4].

В докладе также представлены некоторые результаты построения топологического атласа интегрируемой системы с тремя степенями свободы на ко-алгебре Ли $e(3,2)^*$, которая описывает динамику двухполевого обобщенного гиростата при наличии двух силовых полей (случай интегрируемости Соколова-Цыганова) [5]. Это один из наиболее общих найденных на сегодня случаев интегрируемости гиростата в двойном поле с условиями типа Ковалевской и гироскопическими силами с непостоянным гироскопическим моментом. В общем случае не удавалось даже выписать в обозримом виде дополнительные интегралы.

Речь идет о следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \\ &\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{M}} \end{aligned} \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$
\begin{gathered}
H = M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 + 2\lambda M_3 - 2\varepsilon_2(\alpha_1 + \beta_2) \\
+2\varepsilon_1(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2 + M_3\beta_1 - M_1\beta_3).
\end{gathered} \tag{2}
$$

Здесь трехмерные векторы $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ представляют собой проекции кинетического момента и двух силовых полей на оси, жестко связанные с твердым телом; λ – параметр гиростатического момента, направленного вдоль оси динамической симметрии; ε_1 и ε_2 – параметры деформации. Система с таким гамильтонианом, существенно зависящими от $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, не допускает непрерывной группы симметрии, и поэтому неприводима глобально к семейству систем с двумя степенями свободы.

Соответствующая скобка Ли–Пуассона задается формулами

$$
\begin{aligned}
&\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \{M_i, \alpha_j\} = \varepsilon_{ijk}\alpha_k, \\
&\{M_i, \beta_j\} = \varepsilon_{ijk}\beta_k, \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \\
&\{\alpha_i, \beta_j\} = 0, \{\beta_i, \beta_j\} = 0, \\
&\varepsilon_{ijk} = \tfrac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i), 1 \leqslant i, j, k \leqslant 3.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Функциями Казимира являются выражения $\boldsymbol{\alpha}^2$, $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\beta}^2$.

Относительно скобки Ли–Пуассона, заданной соотношениями (3), систему (1) можно представить в гамильтоновом виде

$$
\dot{x} = \{H, x\},
$$

где через x обозначена любая из координат.

Фазовое пространство $\mathcal{P}$ системы уравнений (1) задается общим уровнем функций Казимира

$$
\boldsymbol{\alpha}^2 = a^2, \quad \boldsymbol{\beta}^2 = b^2, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = c, \quad (0 < b < a, |c| < ab).
$$

Для гамильтониана (2) необходимые для интегрируемости по Лиувиллю два дополнительных интеграла K и G имеют следующий явный вид [6]:

$$K = Z_1^2 + Z_2^2 - \lambda[(M_3+\lambda)(M_1^2+M_2^2) + 2\varepsilon_2(\alpha_3 M_1 + \beta_3 M_2)]$$

$$+\lambda\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2)M_3 +$$

$$+2\lambda\varepsilon_1[\alpha_2 M_1^2 - \beta_1 M_2^2 - (\alpha_1 - \beta_2)M_1 M_2] - 2\lambda\varepsilon_1^2\omega_\gamma,$$

$$G = \omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2 + 2(M_3+\lambda)\omega_\gamma - 2\varepsilon_2(\boldsymbol{\alpha}^2\beta_2 + \boldsymbol{\beta}^2\alpha_1) +$$

$$+2\varepsilon_1[\boldsymbol{\beta}^2(M_2\alpha_3 - M_3\alpha_2) - \boldsymbol{\alpha}^2(M_1\beta_3 - M_3\beta_1)]$$

$$+2(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})[\varepsilon_2(\alpha_2+\beta_1) + \varepsilon_1(\alpha_3 M_1 - \alpha_1 M_3 + \beta_2 M_3 - \beta_3 M_2)],$$

где

$$Z_1 = \tfrac{1}{2}(M_1^2 - M_2^2) + \varepsilon_2(\alpha_1 - \beta_2) +$$

$$+\varepsilon_1[M_3(\alpha_2+\beta_1) - M_2\alpha_3 - M_1\beta_3] + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^2(\boldsymbol{\beta}^2 - \boldsymbol{\alpha}^2),$$

$$Z_2 = M_1 M_2 + \varepsilon_2(\alpha_2+\beta_1) -$$

$$-\varepsilon_1[M_3(\alpha_1-\beta_2) + \beta_3 M_2 - \alpha_3 M_1] - \varepsilon_1^2(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}),$$

$$\omega_\alpha = M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2 + M_3\alpha_3,$$

$$\omega_\beta = M_1\beta_1 + M_2\beta_2 + M_3\beta_3,$$

$$\omega_\gamma = M_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) +$$

$$+M_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + M_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

В докладе предложен подход к описанию фазовой топологии такой системы. В явном виде описываются некоторые критические подсистемы с указанием бифуркаций торов Лиувиля [6], [7], [8], а также некоторые оснащенные изоэнергетические диаграммы. На сегодняшний день для указанной системы определены порядка 150 оснащенных изоэнергетических диаграмм полного отображения момента с указанием всех камер, семейств регулярных 3-мерных торов и их 4-мерных бифуркаций.

Литература

1. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // Regular and Chaotic Dynamics. 2005. Vol. 10, № 4. P. 381–398.

2. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E.* Topological atlas of the Kovallevskaya top in a double field // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2017. Vol. 223, №. 6. P. 775–809.

3. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Savushkin A.Y.* Topological Atlas of the Kowalevski-Sokolov // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, №. 1. P. 24–65.

4. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Kharlamova I.I.* Topological Atlas of the Kovalevskaya-Yehia Gyrostat // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2017. Vol. 227, №. 3. P. 241–386.

5. *Sokolov V.V., Tsiganov A.V.* Lax Pairs for the Deformed Kowalevski and Goryachev-Chaplygin Tops // Theoretical and Mathematical Physics. 2002. Vol. 131, №. 1. P. 543–549.

6. *Ryabov P.E.* Phase topology of one irreducible integrable problem in the dynamics of a rigid body // Theoretical and Mathematical Physics. 2013. Vol. 176, №. 2. P. 1000–1015.

7. *Ryabov P.E.* New invariant relations for the generalized two-field gyrostat // Journal of Geometry and Physics. 2015. Vol. 87. P. 415–421.

8. *Sokolov S.V.* New invariant relations for one critical subsystem of a generalized two-field gyrostat // Doklady Physics. 2017. Vol. 62, №. 12. P. 567–570.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

К.Б. Сабитов

(Стерлитамак; *sabitov_fmf@mail.ru*)

Исследование вопросов неустойчивых колебаний (резонансов колебаний в жидкости в тонкостенных баках ракет с собственными колебаниями) тесно связано с задачей Дирихле для волнового уравнения. Эта задача изучалась многими математиками (см. [1 – 3]).

Если задача Дирихле для одномерного волнового уравнения в прямоугольной области изучена достаточно полно [4], [5, с. 112–118], то эта задача для многомерного волнового уравнения практически не исследована. Только работы [6, 7] посвящены задаче Дирихле для трехмерного волнового уравнения с ненулевой правой частью и однородными граничными условиями в области Ω, когда Ω – эллипсоид, цилиндр с образующими, параллельными оси t, и параллелепипед, где установлены критерий единственности и существование решения задачи в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$ при определенных условиях на правую часть, связанных сходимостью числовых рядов. При этом возникающие малые знаменатели не изучены.

В данной работе в классе регулярных решений гиперболических уравнений высокого порядка установлен критерий единственности решения задачи Дирихле и само решение построено в явном виде как сумма ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей от многих переменных более сложной структуры, чем в ранее известных работах [4, 8, 9]. В связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей, на основании которых доказана сходимость ряда в классе регулярных решений при некоторых условиях относительно граничных функций.

1.Задача Дирихле для двумерного уравнения

гиперболического типа высокого порядка

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$Lu = \frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} = f(x,t) \qquad (1.1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, где l, T – заданные положительные числа, $p \in N$, и поставим следующую первую граничную задачу.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u \in C^{2p-1}(\overline{D}) \cap C^{2p}(D), \qquad (1.2)$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x,t), \quad (x,t) \in D, \qquad (1.3)$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=l} = 0, \quad 0 \le t \le T, \qquad (1.4)$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l, \qquad (1.5)$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=T} = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad k = \overline{0, p-1}. \qquad (1.6)$$

Теорема 1.1. *Если существует решение задачи* (1.2) – (1.6), *то оно единственно только тогда, когда отношение сторон $\alpha = T/l$ прямоугольника D является иррациональным числом.*

Решение задачи (1.2) – (1.6) строится в виде суммы двойного ряда

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{lT}} \sum_{m,n=1}^{+\infty} u_{mn} \sin\frac{\pi m}{l}x \sin\frac{\pi n}{T}t. \qquad (1.7)$$

Теорема 1.2. *Если число $\alpha > 0$ является иррациональным алгебраическим числом степени $n \ge 2$ и функция $f(x,t) \in C^{2p+5}(\overline{D})$,*

$$f_x^{(i)}(0,t) = f_x^{(i)}(l,t) = \begin{cases} 0, & i = 0,2,...,p+1,\ \ p+3 - \textit{четное}; \\ 0, & i = 0,2,...,p+2,\ \ p+3 - \textit{нечетное}, \end{cases}$$

$$f_t^{(j)}(x,0) = f_t^{(j)}(x,T) = \begin{cases} 0, & j = 0,2,...,p+1, \;\; p+2 - \textit{нечетное}; \\ 0, & j = 0,2,...,p, \;\; p+2 - \textit{четное}, \end{cases}$$

то существует единственное решение задачи (1.2) – (1.6), *которое определяется рядом* (1.7).

2.Задача Дирихле для трехмерного уравнения гиперболического типа высокого порядка и связь с проблемой Ферма

Далее для трехмерного аналога уравнения (1.1), т.е. для уравнения вида

$$Lu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial y^{2p}} = f(x,y,t), \tag{2.1}$$

в прямоугольном параллелепипеде $Q = \{(x,y,t)| \; (x,y) \in D, t \in (0,T)\}$, где $D = \{(x,y)| \; 0 < x < l, \; 0 < y < q\}$, l, q, T – заданные положительные числа, $f(x,y,t)$ – заданная в Q функция, $p \in N$, исследуется следующая

Задача Дирихле. *Найти в области* Q *функцию* $u(x,y,t)$, *удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u \in C^{2p-1}(\overline{Q}) \cap C^{2p}(Q), \tag{2.2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\Big|_{x=l} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}}\Big|_{y=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}}\Big|_{y=q} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\Big|_{t=T} = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}, \quad k = \overline{0, p-1}. \tag{2.5}$$

Здесь установлен следующий результат.

Теорема 2.1. *Если существует решение задачи* (2.1) – (2.5), *то оно единственно только тогда, когда уравнение*

$$\left(\frac{m}{l}\right)^{2p} + \left(\frac{n}{q}\right)^{2p} = \left(\frac{k}{T}\right)^{2p}, \quad m,n,k \in N, \tag{2.6}$$

не разрешимо во множестве натуральных чисел.

Если $l = q = T$, т.е. Q является кубом, то (2.6) переходит в известное уравнение Ферма

$$m^{2p} + n^{2p} = k^{2p}. \qquad (2.7)$$

Если $q = l \neq T$, $\frac{l}{T} \in Q$ или $q = T \neq l$, $\frac{T}{l} \in Q$, то уравнение (2.6) также сводится к уравнению типа (2.7). Следовательно, в этих случаях в силу полученного результата единственность решения задачи Дирихле для уравнения (2.1) при любом натуральном p равносильна великой проблеме Ферма.

Решение задачи (2.1) – (2.5) строится в виде суммы тройного ряда

$$u(x, y, t) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{lqT}} \sum_{m,n,k=1}^{+\infty} u_{mnk} \sin\frac{\pi m}{l} x \sin\frac{\pi n}{q} y \sin\frac{\pi k}{T} t,$$

$$u_{mnk} = \frac{1}{\pi^2} \frac{(-1)^p f_{mnk}}{(k/T)^{2p} - (m/l)^{2p} - (n/q)^{2p}},$$

$$f_{mnk} = \int\limits_Q f(x, y, t) \sin\frac{\pi m}{l} x \sin\frac{\pi n}{q} y \sin\frac{\pi k}{T} t \, dxdydt.$$

Литература

1. *Соболев С. Л.* Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе // ДАН СССР. 1956. Т. 109. № 4. С. 707–709.

2. *Арнольд В. И.* Математическое понимание природы. М.: Изд-во МЦНМО, 2010. 144 с.

3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели. I // Известия АН СССР. Серия математическая. 1961. № 25. С. 21–86

4. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнений с частными производными // Матем. заметки. 2015. Т. 97. № 2. С. 262–276.

5. *Сабитов К. Б.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2013. 352 с.

6. *Денчев Р.* О спектре одного оператора // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. № 2. С. 259–262.

7. *Денчев Р.* О задаче Дирихле для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 3. С. 501–504.

8. *Сабитова Ю. К.* Задача Дирихле для телеграфного уравнения в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем. 2017. № 12. С. 46–56.

9. *Сабитова Ю. К.* Задача Дирихле для уравнения гиперболического типа со степенным вырождением в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 228–237.

ЗАДАЧА КЕЛДЫША ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ[25]

Ю.К. Сабитова
(Стерлитамак; *sabitovauk@rambler.ru*)

Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)\, y\, u_{yy} + au_y - b^2u = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|\ 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 1$, b – заданные действительные числа, поставим следующую задачу.

Задача Келдыша. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

[25]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 183100111 мол_а).

$$u(0,y)=u(l,y)=0, \qquad -\alpha\le y\le\beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta)=f(x), \quad 0\le x\le l, \tag{5}$$

где $D_-=D\cap\{y<0\}$, $D_+=D\cap\{y>0\}$, $f(x)$ *– заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию* $f(0)=f(l)=0$.

М.В. Келдыш [1] впервые исследовал более общее эллиптическое уравнение, чем уравнение (1) при $y>0$, второго порядка от двух переменных с характеристическим вырождением. Он показал, что корректность первой граничной задачи существенным образом зависит от показателя степени вырождения и коэффициента при младшей производной u_y.

Опираясь на эту работу, И.Л. Кароль [2] исследовал задачу Трикоми для уравнения смешанного типа (1) при $b=0$ в области G, где G – область плоскости XOY, ограниченная простой жордановой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y>0$ с концами в точках $O(0,0)$ и $A(1,0)$, характеристиками OC и AC уравнения, расположенными в полуплоскости $y<0$. И.Л. Кароль доказал, что характер краевых задач, которые могут быть поставлены для уравнения (1) в области G, в отличие от уравнений с нехарактеристическим вырождением, существенно зависит от коэффициента a и класса решений уравнения (1). Например, классическая задача Трикоми в случае $a<0$ недоопределена, при $a>0$ – переопределена.

В данной статье опираясь на работы [3 – 8] решена задача (2) – (5) в прямоугольной области для уравнения (1). Решение построено в виде суммы ряда. Доказаны теоремы единственности и существования решения этой задачи.

Решение задачи (2) – (5) построено в виде суммы ряда

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(y)\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{6}$$

В формуле (6) функции $u_k(y)$ определены формулой

$$u_k(y)=\begin{cases} f_k\left(\dfrac{y}{\beta}\right)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{I_{a-1}(p_k y^{\frac{1}{2}})}{I_{a-1}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})}, & y\geq 0,\\ f_k\left(\dfrac{-y}{\beta}\right)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{J_{a-1}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})}{I_{a-1}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})}, & y\leq 0,\end{cases}$$

где $f_k=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\int\limits_0^l f(x)\sin\lambda_k x dx$, $p_k=2\sqrt{b^2+\lambda_k^2}$, $I_{a-1}(p_k y^{\frac{1}{2}})$ – модифицированная функция Бесселя первого рода, $J_{a-1}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})$ – функция Бесселя первого рода.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2) – (5), *то оно единственно.*

Теорема 2. *Если функция* $f(x)\in C^3[0,l]$ *и выполнены условия* $f(0)=f(l)=0$, $f''(0)=f''(l)=0$, *то существует единственное решение задачи* (2) – (5) *и это решение определяется рядом* (6).

Если вместо условия (5) задать граничное условие на нижнем основании прямоугольника

$$u(x,-\alpha)=g(x),\quad 0\leq x\leq l,$$

тогда функции $u_k(y)$ в формуле (6) будут иметь вид

$$u_k(y)=\begin{cases} -g_k\left(\dfrac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{I_{a-1}(p_k y^{\frac{1}{2}})}{J_{a-1}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})}, & y\geq 0,\\ g_k\left(\dfrac{-y}{\alpha}\right)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{J_{a-1}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})}{J_{a-1}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})}, & y\leq 0,\end{cases}$$

где

$$g_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l g(x)\sin\lambda_k x dx.$$

Из данной формулы видно, что функции $u_k(y) \to \infty$ при $k \to \infty$ и фиксированных $y > 0$. Следовательно, показать равномерную сходимость ряда (6) не удастся.

Литература

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // ДАН. – 1951. – Т.77. – №2. – С. 181 – 184.

2. *Кароль И.Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода // ДАН. – 1953. – Т.88. – №2. – С. 197 – 200.

3. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. – 2007. – Т. 413. – № 1. – С. 23 – 26.

4. *Сабитов К.Б. Сулейманова А.Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем. 2007. № 4. С. 45–53.

5. *Сабитов К.Б. Сулейманова А.Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // Изв. вузов. Матем. 2009. № 11. С. 43–52.

6. *Хайруллин Р.С.* О существовании решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53. – № 5. – С. 684 – 692.

7. *Сабитова Ю.К.* Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т.46. – № 8. – С. 1205 – 1208.

8. *Сабитова Ю.К.* Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // Матем. заметки. – 2015. – Т.98. – Вып. 3. – С. 393 – 406.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО

СТЕРЖНЯ С ПРИСОЕДИНЁННЫМ ГРУЗОМ[26]

А.А. Самсонов, П.С. Соловьёв, С.И. Соловьёв, Д.М. Коростелева
(Казань; *anton.samsonov.kpfu@mail.ru*)

Исследуется обыкновенная дифференциальная задача на собственные значения второго порядка, описывающая продольные собственные колебания упругого стержня с присоединённым к торцу грузом. Задача имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует полная ортонормированная система собственных функций. В данной работе изучаются асимптотические свойства собственных значений и собственных функций при неограниченном увеличении массы присоединённого груза. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных элементов произвольного порядка с численным интегрированием на неравномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки. Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3]. Выводы работы могут быть перенесены на случаи более сложных и важных прикладных задач расчёта собственных колебаний балок, пластин и оболочек с присоединёнными грузами.

Литература

1. *Соловьёв С.И.* Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. 256 с.

[26]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160029. Работа поддержана РФФИ (проект № 19-31-90063).

2. *Соловъёв С.И.* Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 7. С. 937–950.

3. *Соловъёв С.И.* Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 3. С. 418–432.

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ КРАСНОСЕЛЬСКОГО–МАННА[27]

В.В. Семёнов

(Киев; *semenov.volodya@gmail.com*)

Построение и исследование приближенных методов метрической теории неподвижных точек – интересная, имеющая много приложений и активно развивающаяся область нелинейного анализа.

Классические теоремы Брауэра, Шаудера и Какутани о неподвижной точке имеют неконструктивный характер. Но для более узких классов операторов существует развитая алгоритмика аппроксимации неподвижных точек. Одним из таких классов является класс нерастягивающих операторов. Хорошее введение в их теорию с описанием основных методов содержится в [1] (см. также книгу [2]).

Еще в 1955 г. М.А. Красносельский [3] (близкие идеи были высказаны в работе W.R. Mann [4]) предложил для поиска неподвижных точек действующего в банаховом пространстве нерастягивающего оператора T процесс

$$x_{n+1} = \frac{x_n + Tx_n}{2}. \tag{1}$$

В [3] также доказана сильная сходимость (1) для компактных нерастягивающих операторов T, действующих в равномерно выпуклых банаховых пространствах.

[27]Работа выполнена при финансовой поддержке МОНУ (проект 0219U008403) и НАНУ (проект 0119U101608).

Классические работы [3, 4] положили начало большому количеству исследований по сходимости метода Красносельского–Манна, т.е. процесса вида

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_n(Tx_n - x_n), \tag{2}$$

где $\lambda_n \in (0,1]$ (см. [1]). А в статье [5] для нерастягивающих операторов в гильбертовом пространстве H был предложен и изучен непрерывный аналог метода (2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda(t)\left(Tx(t) - x(t)\right), \\ x(0) = x_0 \in H, \end{cases} \tag{3}$$

где $\lambda : [0,+\infty) \to (0,1]$. В частности, при определенных условиях доказана слабая сходимость при $t \to +\infty$ решения (3) к неподвижной точке T. Регуляризованный по Тихонову вариант динамики (3) изучен в [6].

Мы отталкиваемся от упомянутых работ [5, 6]. Пусть $T : H \to H$ – нерастягивающий оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, причем $F(T) \neq \emptyset$. В лекции мы рассмотрим асимптотическое поведение траекторий динамических систем

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda(t)\left(Tx(t) - x(t)\right) - \varepsilon(t)Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

где $x_0 \in H$, оператор $A : H \to H$ сильно монотонный и липшицевый, а функции $\lambda : [0,+\infty) \to (0,1]$, $\varepsilon : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ удовлетворяют определенным условиям. Доказана сильная сходимость $x(t)$ (при $t \to +\infty$) к решению вариационного неравенства

$$x \in F(T) : \ (Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall y \in F(T).$$

Также рассмотрим распределенный вариант динамики (4) и конкретные методы, порождаемые при применении (4) к задачам математического программирования, игровым задачам и вариационным неравенствам. Например, с задачей

$$f(x) \to \min, \quad x \in \operatorname{argmin} g, \tag{5}$$

где функция g выпукла и полунепрерывна снизу, а функция f сильно выпукла и имеет липшицев градиент, можно связать динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \big(\mathrm{prox}_g x(t) - x(t)\big) - \frac{1}{\sqrt{t+1}}\nabla f(x(t)), \\ x(0) = x_0 \in H, \end{cases}$$

где

$$\mathrm{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y \in H}\left\{g(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2\right\}.$$

Если $\operatorname{argmin} g \neq \emptyset$, то $x(t)$ при $t \to +\infty$ сильно сходится к решению (5).

Литература

1. *Bauschke H.H., Combettes P.L.* Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. NY: Springer, 2011. 408 p.

2. *Васин В.В., Еремин И.И.* Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 200 с.

3. *Красносельский М.А.* Два замечания о методе последовательных приближений. УМН. 1955. Том 10. Выпуск 1. С. 123–127.

4. *Mann W.R.* Mean value methods in iteration. Proc. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 4 P. 506–510.

5. *Bot R.I., Csetnek E.R.* A dynamical system associated with the fixed points set of a nonexpansive operator. Journal of Dynamics and Differential Equations. 2017. Vol. 29. Iss. 1. P. 155–168.

6. *Vilches P., Perez-Aros E.* Tikhonov regularization of dynamical systems associated with nonexpansive operators defined in closed and convex sets. arXiv. 1904.05718. 2019.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

С.Н. Сидоров
(Стерлитамак; *stsid@mail.ru*)

Рассмотрим уравнение

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - bt^n u, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b(-t)^m u, \end{cases}$$

$$F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l,\ -\alpha < t < \beta\}$, где $n > 0$, $m > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа, и b – заданное любое действительное число, и поставим следующие задачи.

Задача 1. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{5}$$

где $F(x,t)$ – заданная достаточно гладкая функция, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям (2) – (5) и*

$$g_1(t) \in C[0,\beta]; \tag{6}$$

$$u(x_0, t) = h_1(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \le t \le \beta, \tag{7}$$

где $f_i(x)$, $i = 1, 2$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ *– заданные функции,* x_0 *– заданная точка из интервала* $(0, l)$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 3. *Найти функции* $u(x, t)$ *и* $g_2(t)$, *удовлетворяющие условиям* (2) – (5) *и*

$$g_2(t) \in C[-\alpha, 0], \tag{8}$$

$$u(x_0, t) = h_2(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \le t \le 0, \tag{9}$$

где $f_i(x)$, $i = 1, 2$, $g_1(t)$, $h_2(t)$ *– известные функции.*

Задача 4. *Найти функции* $u(x, t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, *удовлетворяющие условиям* (1.2) – (1.9), *здесь* $f_i(x)$, $h_i(t)$, $i = 1, 2$, *– заданные функции.*

Отметим, что ранее задачи 1 – 4 впервые поставлены и изучены в работах [1, с. 228–238], [2] для уравнения (1) при $n = m = 0$. Начально-граничная задача (1.2) – (1.5) для уравнения (1) изучена в работах [3 – 5], когда $n = 0$, $m > 0$; $n > 0$, $m = 0$ и $n > 0$, $m > 0$. В работе [6] изучены обратные задачи для уравнения (1) при $n = 0$, $m > 0$, по отысканию функций $u(x, t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$. В статьях [7, 8] рассмотрены задачи 1 – 4 для уравнения (1), когда $n > 0$, $m = 0$ и $n = 0$, $m > 0$ соответственно.

В данной работе изучены обратные задачи 2 – 4 по отысканию сомножителей правой части уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением на линии изменения типа, исследование которых проводится на основе решения прямой начально-граничной задачи 1, изученной в работах [3 – 5]. Решение обратных задач 2 – 4 эквивалентно редуцировано к разрешимости нагруженных интегральных уравнений. Используя теорию интегральных уравнений доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений поставленных обратных задач и указаны явные формулы решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ-Перспектива (№ 19-31-60016).

Литература

1. *Сабитов К. Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016. 272 с.

2. *Сабитов К. Б.* Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 3. С. 415–435.

3. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Диф. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 356–365.

4. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тем. обз. 2017. Т. 137. С. 26–60.

5. *Sabitov K. B., Sidorov S. N.* Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type // Journal of Mathematical Sciences. 2019. V. 236. Issue 6. P. 603–640.

6. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // Известия Вузов. Математика. 2015. № 1. С. 46–59.

7. *Сидоров С. Н.* Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 144–157.

8. *Сидоров С. Н.* Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени // Уфимский матем. журнал. 2019. Т. 11. № 1. С. 72–

86.

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ ПО КАПУТО В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.Н.Силаева, Алкади Хамса Мохамад
(Воронеж; *marinanebolsina@yandex.ru*)

В [6] для уравнения

$$\frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, 0 < \alpha < 1, t > 0, x \in (-\infty, \infty);$$

где

$$\frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} ds-$$

производная в смысле Капуто по переменной t, рассматривается задача Коши с условиями

$$u(0,x,\alpha) = g(x),$$

$$u(t, \pm\infty, \alpha) = 0,$$

и приводится решение этой задачи в виде

$$u(t,x,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\xi,\alpha) g(x-\xi) d\xi$$

с указанием функции Грина $G(t,\xi,\alpha)$.

Однако, корректная разрешимость этой задачи, с точки зрения устойчивости решения к погрешностям, в [6] не обсуждается.

Решению этой проблемы для общего случая дифференциальных уравнений в банаховом пространстве посвящена настоящая заметка.

В банаховом пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|$ рассматривается уравнение

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = Au(t), t \geq 0, \tag{1}$$

где A-линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A) \subset E$ и областью значений $R(A)$,

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds- \tag{2}$$

производная по Капуто порядка $0 < \alpha < 1$.

Определение 1. *Решением уравнения (1) называется вектор-функция $u(t)$ со значениями в $D(A)$, для которой определена производная (2) и, удовлетворяющая уравнению (1).*

Определение 2. *Решение уравнения (1) удовлетворяющее условию*

$$u(0) = u_0 \in D(A) \tag{3}$$

будем называть решением задачи Коши (1)-(2).

Определение 3. *Задачу (1)-(2) будем называть равномерно корректной, если для ее решений выполняется оценка*

$$\|u(t)\|_E \leq M\|u_0\|_E, \tag{4}$$

где константа M от t и u_0 не зависит.

Теорема *Если оператор A является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы линейных преобразований $U(t, A)$, то задача Коши (1)-(3) равномерно корректна и ее решение имеет вид*

$$u(t) = \int_0^\infty I_t^{(1-\alpha)}(h_\alpha(t,\xi))U(\xi, A)u_0 d\xi,$$

где $I^{(1-\alpha)}f(t)$-дробный интеграл Римана-Лиувилля,

$h_\alpha(t,s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{tp-\xi p^\alpha} dp$-функция Иосиды и справедлива оценка (4).

Литература

1. *Иосида К.* Функциональный анализ : [учебник] / К. Иосида ; пер. с англ. В.М. Волосова .— М. : Мир, 1967 .— 624 с.

2. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве/С.Г. Крейн.– М.: Наука, 1967.–464 с.

3. *Костин В.А.* Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин // Доклады Академии Наук .— Москва, 2014 .— Т. 455, № 2. - С. 142-146

4. *Костин А.В.* О корректной разрешимости задач без начальных условий для некоторых сингулярных уравнений / А. В. Костин, Д. В. Костин, М. Н. Небольсина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика. Математика .— Воронеж, 2018 .— № 1. - С. 87-93

5. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев .— Минск : Наука и техника, 1987 .— 687 с.

6. *Майнарди Ф.* Временное уравнение дробной диффузионно-волновой функции /Майнарди Ф. // Радиофизика и квантовая электроника. Выпуск 38, №1-2, 1995.-С.20-36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ (ЛГФДСП)[28]

П.М. Симонов

[28]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332 А).

(Пермь; *simpm@mail.ru*)

Постановка задачи: одно уравнение — линейное разностное, определенное в дискретном множестве точек (линейное разностное уравнение с последействием (ЛРУП)), а другое — линейное функционально-дифференциальное уравнение с последействием (ЛФДУП) на полуоси.

Исследование продолжает работы [1–7].

Обозначим через $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots$ размерами n, а через $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $g(0), g(1), ..., g(N), \ldots$ размерами n.

Каждой бесконечной матрице $y = \{y(-1), y(0), y(1), ..., y(N), \ldots\}$ можно сопоставить вектор-функцию $y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$

Аналогично, каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), ..., g(N), \ldots\}$ можно сопоставить вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$$

Символом $y(t) = y[t]$ обозначим вектор-функцию $y(t) = y([t]), t \in [-1, \infty)$. Символом $g[t]$ обозначим вектор-функцию $g(t) = g([t])$, $t \in [0, \infty)$.

Множество таких вектор-функций $y[\cdot]$ обозначим символом ℓ_0. Множество таких вектор-функций $g[\cdot]$ обозначим символом ℓ. Обозначим $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1]$ при $t \geq 1$, $(\Delta y)(t) = y(t) = y[t] = y(0)$ при $t \in [0, 1)$

Запишем ЛГФДСП в виде

$$\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f,$$

$$\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \tag{1}$$

Здесь и ниже R^n — пространство векторов $\alpha = \{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $||\alpha||_{R^n}$. Пусть пространство L локально суммируемых $f : [0,\infty) \to R^n$ с полунормами $||f||_{L[0,T]} = \int_0^T ||f(t)||_{R^n}\,dt$ для всех $T > 0$. Пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x : [0,\infty) \to R^n$ с полунормами $||x||_{D[0,T]} = ||\dot{x}||_{L[0,T]} + ||x(0)||_{R^n}$ для всех $T > 0$. L_∞ — банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [0,\infty) \to R^n$ с нормой $||z||_{L_\infty} = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t\geq 0} ||z(t)||_{R^n}$.

Пусть пространство ℓ вектор-функций

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

с полунормами $||g||_{\ell_T} = \sum\limits_{i=0}^{T} ||g_i||_{R^n}$ для всех $T \geq 0$.

Пространство ℓ_0 вектор-функций $y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$ с полунормами $||y||_{\ell_{0T}} = \sum\limits_{i=-1}^{T} ||y_i||_{R^n}$ для всех $T \geq -1$.

Операторы $\mathcal{L}_{11}, F_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}, F_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21}, F_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22}, F_{22} : \ell_0 \to \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Пусть модельное уравнений $\mathcal{L}_{11}x = z$ и банахово пространство B с элементами из пространства L ($B \subset L$ и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений вида

$$x(t) = (\mathcal{C}_{11}z)(t) + (\mathcal{X}_{11}\alpha)(t) = \int\limits_0^t C_{11}(t,s)z(s)\,ds + X_{11}(t)\alpha$$

$(\alpha \in R^n, \quad z \in B)$.

Норму в пространстве $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ можно ввести равенством $||x||_{D(\mathcal{L}_{11},B)} = ||\mathcal{L}_{11}x||_B + ||x(0)||_{R^n}$.

Предположим, что оператор $\mathcal{C}_{11}$ непрерывно действует из пространства B в пространство B, и оператор $\mathcal{X}_{11}$ действует из пространства R^n в пространство B. Это условие эквивалентно тому, что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ линейно изоморфно пространству С.Л.Соболева $W_B^{(1)}[0, \infty)$ с обычной нормой $||x||_{W_B^{(1)}[0,\infty)} = ||\dot{x}||_B + ||x||_B$.

Дальше будем это пространство обозначать как W_B. При этом, $W_B \subset D$, и это вложение непрерывно.

Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : W_B \to B$ W_B-устойчиво тогда и только тогда, если оно сильно B-устойчиво. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ сильно B-устойчиво, если для любого $z \in B$ каждое решение x этого уравнения обладает свойством: $x \in B$ и $\dot{x} \in B$.

1.Сведение к ЛФДУП

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \ell$ принадлежит пространству ℓ_0 и представляется формулой Коши: $y[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum\limits_{s=0}^{t} C_{22}[t, s]\, g[s]$.

Поставим задачу: пусть $g \in M \subset \ell$, где M — банахово пространство, и тогда будет $y \in M_0 \subset \ell_0$, где M_0 — банахово пространство, причем M_0 изоморфно M.

Обозначим $(\mathcal{C}_{22}g)[t] = \sum\limits_{s=0}^{t} C_{22}[t, s]\, g[s]$, $(\mathcal{Y}_{22} \ \ y(-1))[t] = Y_{22}[t]y(-1)$.

Тогда каждое решение y второго уравнение в (1) имеет вид: $y = -\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x + Y_{22}y(-1) + \mathcal{C}_{22}g$.

Подставим в первое уравнения в (1):

$$\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) + \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}g = f,$$

$$\mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x = f_1 = f - \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}g.$$

Введем обозначение $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}$, тогда первое уравнения в (1) примет вид $\mathcal{L}_1 x = f_1$.

Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L}_1 : W_B^0 \to B$ вольтеррово обратим, где $W_B^0 = \{x \in W_B : x(0) = 0\}$, то есть, когда задача для уравнения $\mathcal{L}_1 x = f_1$ обладает свойством: при любом $f_1 \in B$ ее решения $x \in W_B$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in B \times M$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times M_0$.

2.Сведение к ЛРУП

Для уравнения (1) будем пользоваться такими обозначениями, которые приняты в пункте 1.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{11} x = f$ для $f \in B$ (B непрерывно вложено в L) принадлежит пространству W_B и представляется формулой Коши $x = X_{11}x(0) + \mathcal{C}_{11} f$.

Из первого уравнения в (1) найдем $x : x = -\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12} y + X_{11}x(0) + \mathcal{C}_{11} f$.

Подставим во второе уравнения в (1):

$$\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = -\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + \mathcal{L}_{21}X_{11}x(0) + \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}f + \mathcal{L}_{22}y = g,$$

$$-\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + \mathcal{L}_{22}y = g_1 = g - \mathcal{L}_{21}X_{11}x(0) - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}f.$$

Введем обозначение $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}$, тогда второе уравнения в (1) примем вид $\mathcal{L}_2 y = g_1$.

Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L}_2 : M_0 \to M$ вольтеррово обратим, то есть, когда задача для уравнения $\mathcal{L}_2 y = g_1$ при любом $g_1 \in M$ ее решения $y \in M_0$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in B \times M$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times M_0$.

3.Достаточное условие устойчивости

Рассмотрим **пример**. Пусть линейные оператора определены равенствами:

$\mathcal{L}_{11}\{x_1, x_2\}_1 = \dot{x}_1 + a_{11}x_{1\tau_{11}} + a_{12}x_{2\tau_{12}}$,

$\mathcal{L}_{12}\{y_1, y_2\}_1 = b_{11}y_{1\delta_{11}} + b_{12}y_{2\delta_{12}}$,
$\mathcal{L}_{11}\{x_1, x_2\}_2 = \dot{x}_2 + a_{21}x_{1\tau_{21}} + a_{22}x_{2\tau_{22}}$,
$\mathcal{L}_{12}\{y_1, y_2\}_2 = b_{21}y_{1\delta_{21}} + b_{22}y_{2\delta_{22}}$,
$\mathcal{L}_{21}\{x_1, x_2\}_1 = c_{11}x_{1\rho_{11}} + c_{12}x_{2\rho_{12}}$,
$\mathcal{L}_{22}\{y_1, y_2\}_1 = x_1 - d_{11}x_{1\theta_{11}} - d_{12}x_{2\theta_{12}}$,
$\mathcal{L}_{21}\{x_1, x_2\}_2 = c_{21}x_{1\rho_{21}} + c_{22}x_{2\rho_{22}}$,
$\mathcal{L}_{22}\{y_1, y_2\}_2 = x_2 - d_{21}x_{1\theta_{21}} - d_{22}x_{2\theta_{22}}$,
где $x_{1\tau_{11}}(t) = x_1(t - \tau_{11})$, если $t \geq 0$, $x_{1\tau_{11}}(t) = 0$, если $t < 0$. Аналогичные определения верны для остальных суперпозиций.

Обозначим:

$$\ell_{\infty 0} = \{y \in \ell_0 : \ ||y||_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1,0,1,\cdots} |y(k)| < +\infty\},$$

$$\ell_{\infty} = \{g \in \ell : \ ||g||_{\ell_{\infty}} = \sup_{k=0,1,\cdots} |g(k)| < +\infty\}.$$

Будем изучать вопрос, когда для нашего уравнения при любом $\{f, g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ его решения $\{x, y\} \in W_B \times \ell_{0\infty}$. Для этого надо найти вольтерровую обратимость оператора $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21} : W^0_{L_\infty} \to L_\infty$. Или, для этого надо найти вольтерровую обратимость оператора $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12} : \ell^0_{0\infty} \to \ell_\infty$.

Для этого оценить норму $||\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}||_{W_{L_\infty} \to W_{L_\infty}}$ или норму $||\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}||_{\ell_{0\infty} \to \ell_{0\infty}}$.

Оценим нормы: $||\mathcal{L}_{21}||_{W_{L_\infty} \to \ell_\infty}$, $||\mathcal{C}_{22}||_{\ell_\infty \to \ell_{0\infty}}$, $||\mathcal{L}_{12}||_{\ell_{0\infty} \to L_\infty}$, $||\mathcal{C}_{11}||_{L_\infty \to W_{L_\infty}}$.

Справедливы оценки норм:

$$||\mathcal{L}_{21}||_{W_{L_\infty} \to \ell_\infty} \leq \left| \begin{array}{cc} |c_{11}| & |c_{12}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| \end{array} \right|_{R^n},$$

$$||\mathcal{C}_{22}||_{\ell_\infty \to \ell_{0\infty}} \leq \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{1-d_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-d_{11}} \end{array} \right|_{R^n},$$

$$||\mathcal{L}_{12}||_{\ell_{0\infty}\to L_\infty} \le \left| \begin{array}{cc} |b_{11}| & |b_{12}| \\ |b_{21}| & |b_{22}| \end{array} \right|_{R^n},$$

$$||\mathcal{C}_{11}||_{L_\infty\to W_{L_\infty}} \le \left| \begin{array}{cc} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{array} \right|_{R^n}.$$

Здесь, для простоты взяли $d_{12} = 0$ и $d_{21} = 0$, $|d_{11}| < 1$ и $|d_{22}| < 1$. Обозначили $\sigma_{ij} = \sup\limits_{t\ge 0} \int\limits_0^t |C_{11ij}(t,s)|\, ds < \infty$, $i, j = 1, 2$.

Для нашего уравнения при любом $\{f, g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ его решения $\{x, y\} \in W_B \times \ell_{0\infty}$, если выполнено неравенство

$$\left| \begin{array}{cc} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{array} \right|_{R^n} \times \left| \begin{array}{cc} |b_{11}| & |b_{12}| \\ |b_{21}| & |b_{22}| \end{array} \right|_{R^n} \times$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{1}{1-d_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-d_{11}} \end{array} \right|_{R^n} \times \left| \begin{array}{cc} |c_{11}| & |c_{12}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| \end{array} \right|_{R^n} < 1.$$

Литература

1. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”. 2013. Т. 13, № 4. С. 34–37.

2. *Симонов П.М.* Устойчивость линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) // Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естест. и техн. науки. 2013. Т. 18, вып. 5. С. 2670–2672.

3. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II. // Вестник РАЕН. Темат. номер “Дифференциальные уравнения”. 2014. Т. 14, № 5. С. 38–45.

4. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием // Динамика систем и процессы управления: Труды международной конференции, посв. 90-летию со

дня рождения акад. Н.Н. Красовского. Екатеринбург, Россия, 15–20 сентября 2014 г. Изд-во УМЦ УПИ, 2015. С. 243–250.

5. *Симонов П.М.* К вопросу об устойчивости линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естест. и техн. науки. 2015. Т. 20, вып. 5. С. 1428–1436.

6. *Симонов П.М.* Об устойчивости линейных гибридных функционально-дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. Ижевск: Изд-во УдГУ, 2015. Вып. 2 (46). С. 184–192.

7. *Андрианов Д.Л., Арбузов В.О., Ивлиев С.В., Максимов В.П., Симонов П.М.* Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // Вестник Пермского университета. Серия: "Экономика" = Perm University Herald. Economy. 2015. № 4 (27). С. 8–32.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БИЛЛИАРДОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ ДУГАМИ СОФОКУСНЫХ КВАДРИК НА ПЛОСКОСТИ МИНКОВСКОГО, В ПОЛЕ С ГУКОВСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ[29]

А.И. Скворцов
(Москва; *anton.skvortsov.1996@yandex.ru*)

Математический биллиард - это движение материальной точки на плоскости в области, ограниченной кусочно-гладкой кривой. Многочисленные результаты в области исследования теории биллиардов были получены в работах В.В. Ведюшкиной и А.Т. Фоменко [2, 3, 4].

[29]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

В настоящей работе рассматриваются биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского, в поле с гуковским потенциалом. В частности, в ходе исследований было получено доказательство интегрируемости по Лиувиллю систем такого рода. Также проводится исследование топологии возникающих в данной задаче слоений Лиувилля [1].

В данном случае семейство софокусных квадрик задаётся следующим уравнением:

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1,$$

где $a > b > 0$, λ - параметр квадрики. Отметим также, что при $-b < \lambda < a$ квадрика является эллипсом, при $\lambda < -b$ квадрика является гиперболой с действительной осью Ox, а при $\lambda > a$ квадрика является гиперболой с действительной осью Oy. Далее в систему добавляется гуковский потенциал с коэффициентом k, действующий на материальную точку.

Рассмотрим фазовое пространство $M^4 = \{x, y, \dot{x}, \dot{y}\}$, где (x, y) - декартовы координаты материальной точки в биллиарде, $(\dot{x}, \dot{y})$ - соответствующие координаты вектора скорости. При отражении точки от границы биллиарда вектора скорости до и после соответствующего отражения отождествляются по стандартному закону. Далее введём на многообразии M^4 симплектическую структуру ω, заданную следующей матрицей $\Omega = (\omega_{ij})$:

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Также определим стандартную скобку Пуассона.

Теорема 1. *Биллиард, ограниченный дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского, в поле с гуковским потенциалом является интегрируемым по Лиувиллю. Интегралами являются следующие функции:*

$$H = \frac{k(x^2 - y^2)}{2} + \frac{\dot{x}^2 - \dot{y}^2}{2},$$

$$G = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} - \frac{(x\dot{y} - \dot{x}y)^2}{ab} - k(1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}).$$

При этом симпликтическая структура задаётся вышеуказанной матрицей (ω_{ij}).

Для дальнейшего анализа целесообразно перейти к эллиптическим координатам. В таких координатах интеграл H запишется в следующем виде:

$$H = \frac{k}{2}(a-b) - \frac{k}{2}(\lambda_1+\lambda_2) + \frac{2(a-\lambda_1)(b+\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_1^2 + \frac{2(a-\lambda_2)(b+\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}\mu_2^2,$$

где μ_1, μ_2 - сопряжённые импульсы.

Также благодаря методу, описанному В.В. Козловым в [5], был найден дополняющий его интеграл F:

$$F = 2(a-\lambda_1)(b+\lambda_1)\mu_1^2 - \frac{k\lambda_1^2}{2} - H\lambda_1.$$

Теорема 2. *Дополняющий интеграл F также может иметь следующий вид:*

$$F = 2(a-\lambda_2)(b+\lambda_2)\mu_2^2 - \frac{k\lambda_2^2}{2} - H\lambda_2.$$

Далее проводится анализ образа отображения момента.

В ходе данной работы также были построены бифуркационные диаграммы, были получены соответствующие молекулы.

Литература

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том I. — Ижевск: РХД, 1999.

2. *Фокичева В.В., Фоменко А.Т.* "Интегрируемые биллиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела". Доклады РАН, серия: математика, **465**, №2, 2015, 150-153.

3. *Fokicheva V.V., Fomenko A.T.* "Billiard Systems as the Models for the Rigid Body Dynamics". *Studies in Systems, Decision and Control*, Advances in Dynamical Systems and Control, **69**, 13–32.

4. *Ведюшкина (Фокичева) В.В., Фоменко А.Т.* "Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы". Известия РАН, серия: математика, **81**, №4, 2017, 20-67.

5. *Козлов В.В.* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде. //Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1 1995.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМОГО УРАВНЕНИЯ ПФАФФА

Г.К. Соколова
(Иркутск; *98gal@mail.ru*)

Заметка посвящена изучению проблемы существования периодических решений уравнения Пфаффа и построению множества периодов этого решения. Рассмотрим уравнение

$$f_1(\bar{r})dx_1 + f_2(\bar{r})dx_2 + \ldots + f_n(\bar{r})dx_n = 0, \qquad (1)$$

где функции $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по совокупности переменных $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$. Известно, что, если уравнение (1) удовлетворяет условиям *полной интегрируемости*

$$\partial_{x_j} f_i(\bar{r}) = \partial_{x_i} f_j(\bar{r}), \quad i, j = 1, 2, \ldots,\ n, \tag{2}$$

то оно является уравнением в полных дифференциалах, и его общий интеграл имеет вид

$$u(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{0}^{x_i} f_i(0,\ 0, \ldots,\ t,\ x_{i+1}, \ldots,\ x_n) dt + C. \tag{3}$$

Определение. *Функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ будем называть периодической с периодом $\bar{T}$, если существует ненулевой вектор $\bar{T} \in \mathbb{R}^n$ такой, что для всех $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $f(\bar{r}+\bar{T}) = f(\bar{r})$. Период $\bar{T}_0$, наименьшего модуля, сонаправленный с вектором $\bar{T}$, назовем основным периодом функции f в данном направлении $\bar{\mathcal{T}}$, где $\bar{T} = |\bar{T}| \cdot \bar{\mathcal{T}}$.*

В статье [1] показано, что неособенной линейной заменой аргумента $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ периодическую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с решёткой периодов, порождённой векторами $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \ldots, \bar{T}_m$, можно преобразовать к периодической функции по любым m переменным с основными периодами $|\bar{T}_1|, |\bar{T}_2|, \ldots, |\bar{T}_m|$. Т. е. всякую периодическую функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ можно считать периодической по первым m переменным.

Предположим, что общим интегралом (3) уравнения (1) является периодическая по всем переменным $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ функция $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. В этом случае, с учётом условия (2), функции $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ также являются периодическими, а множествами P_{f_i} их периодов — решётки, порождённые векторами $\bar{T}_{i1},\ \bar{T}_{i2}, \ldots,\ \bar{T}_{in}$ и имеющие непустое пересечение. Здесь и далее $\bar{T}_{ij} = T_{ij}\bar{\mathrm{e}}_j,\ i,\ j = 1, 2, \ldots, n$, система векторов $\{\bar{\mathrm{e}}_j\}_{j=1}^{n}$ задаёт классический базис Гамеля в $\mathbb{R}^n$.

Ранее проблема существования периодических решений уравнения (1) в условиях (2) его полной интегрируемости изучалась в статье [2], где доказан критерий периодичности общего интеграла (3) с периодом $\bar{T} = T_1\bar{\mathrm{e}}_1 + T_2\bar{\mathrm{e}}_2 + \ldots + T_n\bar{\mathrm{e}}_n$. В данной работе сформулирован критерий периодичности общего интеграла по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и указано множество периодов. Приведём некоторые вспомогательные утверждения, доказанные в [3].

Теорема 1. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна по переменной x_i и T_i-периодическая по этой переменной, тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_0^{x_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, \ldots, x_n)dt = S_{T_i}[f]x_i + \varepsilon_i(\bar{r}), \qquad (4)$$

где $S_{T_i}[f] = \frac{1}{T_i}\int\limits_0^{T_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, \ldots, x_n)dt$ означает среднее значение функции f по переменной x_i на отрезке $[0, T_i]$, функция $\varepsilon_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — T_i-периодическая по переменной x_i.

Заметим, что если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна по переменной x_i, то $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет непрерывную частную производную по этой переменной и удовлетворяет равенству $\partial_{x_i}\varepsilon = f(\bar{r}) - S_{T_i}[f]$, с условием $\varepsilon(\bar{r})|_{x_i=0} = 0$. Однозначная разрешимость данной задачи гарантирует единственность представления (4). Функция $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ наследует основной период функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по переменной x_i. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функции $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\partial_{x_j} f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ первого порядка такие, что выполнено условие (2); пусть также функции $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ являются периодическими с решётками периодов P_{f_i}, которые порождены векторами вида $\bar{T}_{ij} = T_{ij}\bar{\mathrm{e}}_j$, где $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для того, чтобы общий интеграл (3) уравнения Пфаффа (1) был функцией, периодической по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, необходимо и* *достаточно, чтобы* $\mathrm{P}_{f_1} \cap \mathrm{P}_{f_2} \cap \ldots \cap \mathrm{P}_{f_n} \neq \varnothing$, *и для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$ *выполнялись равенства*

$$\int\limits_0^{T_i} f_i(0, \ldots, 0, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)dt = 0.$$

При этом множеством периодов этой функции является $\mathrm{P}_u = \mathrm{P}_{f_1} \cap \mathrm{P}_{f_2} \cap \ldots \cap \mathrm{P}_{f_n}$.

Литература

1. *Orlov S. S., Sokolova G. K.* Periodic function of several real variables // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2018. Т. 25, № 1. С. 50–51.

2. *Тажимуратов И.* О периодических решениях одной системы уравнений в частных производных первого порядка. Математические заметки. 1981. Т. 30, № 3. С. 363–369.

3. *Соколова Г. К.* Периодические функции нескольких переменных: элементы теории и приложения // Сборник трудов XVI Междунар. конф. студентов, аспирантов и молодых учёных "Перспективы развития фундаментальных наук". В 7 томах. Том 3. Математика. Томск: Изд-во ТПУ, 2019. С. 28–30.

О БИФУРКАЦИЯХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ КАПИЛЛЯРНОСТИ

Л.В. Стенюхин

(Воронеж; *stenyuhin@mail.ru*)

Рассмотрим основной энергетический функционал задачи

$$E(u) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dx + \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\Omega} \Upsilon \rho u\, dx + \lambda \int\limits_{\Omega} u\, dx. \qquad (1)$$

Его первое слагаемое является функционалом площади. Пусть u_0 – экстремаль (1). Близкие к u_0 поверхности будем задавать в системе координат нормального расслоения к u_0. Это приведет к одному скалярному уравнению для близкой поверхности:

$$\left(\frac{\delta S}{\delta u}(u_0 + \eta\bar{n}), \bar{n}\right) = 0,$$

или

$$\frac{\delta S}{\delta \eta}(\eta) = 0, \qquad (2)$$

где $\frac{\delta S}{\delta u}$ – функциональная производная функционала площади, $\bar{n}$ – нормаль к поверхности u_0. Из уравнения (2) определяется нормальная координата $\eta = \eta(x, y)$.

Теорема 1. *Функционал площади близких к u_0 поверхностей $S(\eta)$ и его оператор Эйлера $\frac{\delta S}{\delta \eta}(\eta)$ имеет следующую аналитическую структуру*

$$S(\eta) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dxdy, \qquad (3)$$

$$\frac{\delta S}{\delta u}(\eta) = E^3(EG - F^2)^{-\frac{3}{2}}(A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G). \qquad (4)$$

Здесь E, G, F – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности,

$$A = \sum_{p=1}^{6} a_{ijk}\eta_x^i\eta_x^j\eta^k + 1, \;\; B = \sum_{p=1}^{6} b_{ijk}\eta_x^i\eta_y^j\eta^k,$$

$$C = \sum_{p=1}^{6} c_{ijk}\eta_y^i\eta_y^j\eta^k + 1, \;\; G = \sum_{p=2}^{7} g_{ijk}\eta_x^i\eta_y^j\eta^k + g\eta,$$

где i, j, k – целые неотрицательные числа, $p = i + j + k$. Все коэффициенты $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, g_{ijk}, g$ – являются аналитическими функциями и находятся по формулам, подобным следующей

$$g = (\bar{n}, \bar{n}_{xx} + \bar{n}_{yy}) + \frac{4}{E}\left[(\bar{n}, u_{xx})^2 + (\bar{n}, u_{yy})^2\right]. \qquad (5)$$

Линейная часть оператора $A\eta_{xx} - 2B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + G$ равна

$$\Delta\eta + g\eta, \tag{6}$$

где Δ – лапласиан.

Линейная часть первой вариации равна

$$L\eta = E^3(EG - F^2)^{-\frac{3}{2}}(\Delta\eta + g\eta) + (\frac{\Upsilon\rho}{\sigma} + \lambda)\eta,$$

где g определена равенством (5). Соотношение $\frac{\Upsilon\rho}{\sigma}$ определяет число Бонда, $B = \frac{\Upsilon\rho}{\sigma}$. Поэтому линеаризованная задача имеет вид

$$\begin{cases} \Delta\eta + (g + E^{-3}(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}(B + \lambda))\eta - 0, \\ \eta \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Линейный оператор (7) действует из $W_2^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и самосопряжён в $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.

Пусть поверхность капли $u(x,y) = (u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y))$ задана в конформных координатах, $E = G, F = 0$. Тогда функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям $u_x^2 = u_y^2$, $u_x u_y = 0$. В этом случае функционал энергии имеет вид

$$E(u) = \int\limits_\Omega \frac{E+G}{2}\,dx + \int\limits_\Omega Bu\,dx + \lambda\int\limits_\Omega u\,dx. \tag{8}$$

Первая вариация функционала равна

$$\frac{\delta E}{\delta u}(\eta) = \Delta\eta + (B + \lambda)\eta.$$

Получаем задачу

$$\begin{cases} \Delta\eta + (B + \lambda)\eta - 0, \\ \eta \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Теорема 2. *Собственные значения оператора* $\Delta + B + \lambda$ *задачи (9) являются* $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n + B + \lambda$, *где* λ_n *– собственные значения оператора* Δ *с нулевым граничным условием.*

Литература

1. *Стенюхин Л.В.* Бифуркационный анализ задачи капиллярности с круговой симметрией // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. Том 7, №3, 2014. С. 77 – 83.

О ЛИНЕАРИЗАТОРЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

Л.И. Сухочева
(Воронеж; *l.suhocheva@yandex.ru*)

Объектом нашего рассмотрения являются квадратичные операторные пучки:

$$L = \lambda^2 I + \lambda B + C. \tag{1}$$

Один из подходов изучения спектральных свойств операторных пучков состоит в том, чтобы поставить пучку L в соответствие оператор X, такой что существует взаимно-однозначное соответствие между спектром пучка L и спектром оператора X и по жордановым цепочкам оператора X можно построить жордановы цепочки пучка L и наоборот. В этом случае говорят, что оператор X является линеаризатором пучка L.

М.Г. Крейн и Г. Лангер были одними из первых, кто предложил изучать спектральные свойства квадратичных операторных пучков вида (1), где B - ограниченный самосопряженный оператор, C - положительный компактный оператор в гильбертовом пространстве H, используя ассоциированный оператор $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & C^{1/2} \\ -C^{1/2} & -B \end{smallmatrix}\right)$.

Пусть пучок (1) является гиперболическим, т.е. $(Bf,f)^2 - 4(If,f)(Cf,f) > 0$ (для всех $f \neq 0$).Тогда существует $\alpha > 0$, такое что оператор $X + \alpha I$ является равномерно положительным в пространстве Крейна $\tilde{H} = H_+ \oplus H_-$, $H_+ = \binom{x}{0}$, $H_- = \binom{0}{y}$, $[.,.] = (J.,.)$, $J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$. Обозначим $X + I = A$.

Теорема. *Пусть A - произвольный равномерно положительный оператор в пространстве Крейна $\tilde{H} = H_+ \oplus H_-$, тогда существует $\alpha > 0$, такое что оператор $A - \alpha I$ будет подобен линеаризатору некоторого гиперболического пучка тогда и только тогда, когда $\dim H_+ = \dim H_-$. В этом случае $\alpha > \max\{\lambda | \lambda \in \sigma(A)\}$.*

КЛАССИФИКАЦИЯ ЧАСТИЧНО СИММЕТРИЧНЫХ АТОМОВ[30]

В.А.Трифонова
(Москва; *trifonovaviktoriya2012@yandex.ru*)

Понятие атома для целей гамильтоновой и симплектической геометрии и топологии было введено А.Т. Фоменко и использовалось для лиувиллевой классификации интегрируемых гамильтоновых систем.

Симметрии атомов отражают дискретные симметрии соответствующих динамических систем, так что для анализа важной является задача описания классов атомов, обладающих заданной группой симметрии. Ранее был получен ряд классификационных результатов, в которых входит описание максимально симметричных атомов, имеющих максимально возможный набор симметрий. Задача классификации максимально симметричных атомов является довольно сложной и может быть решена только для отдельных семейств атомов (атомы малой сложности, атомы малого

[30]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

рода), либо атомов, обладающих некоторым специальным свойством.

В настоящей работе рассматриваются высотные атомы с группой симметрий, транзитивной на кольцах одного цвета (белого). Для таких атомов удалось получить полное описание: предъявлено 22 бесконечные серии.

Пусть M^2 - гладкое компактное двумерное многообразие, $f : M^2 \to \mathbb{R}$ - функция Морса на M^2 и $\{x \in M^2 \colon f(x) = k\}$, $k \in \mathbb{R}$, - ее особый уровень. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ не содержит особых точек, кроме лежащих на особом уровне $\{f = k\}$.

Определение. *Атомом* называется пара $(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k$ с указанием вложения графа $f^{-1}(k)$ в поверхность $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$, где граф $f^{-1}(k)$ предполагается конечным и связным. Если на поверхности $f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$ фиксирована ориентация, то соответствующий атом называется *ориентированным.* Граф $f^{-1}(k)$ называется остовом атома. Два атома (соответственно ориентированных атома) считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм пар, который переводит поверхность в поверхность (сохраняя ориентацию, если поверхность ориентирована), остов в остов, а функцию переводит в функцию. Будем говорить, что атом $(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]), f^{-1}(k)$ *порожден* функцией f.

Определение. Назовем атом, порожденный функцией f, *высотным*, если существует такое вложение $g \colon f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]) \to \mathbb{R}^3$, что $f(p) = z(g(p))$ для каждой точки $p \in f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon])$, где z — стандартная координата в пространстве $\mathbb{R}^3$, т.е. z — функция высоты на $g(f^{-1}([k-\varepsilon, k+\varepsilon]))$.

Определение. Эквивалентным образом атом можно задать как "оснащенную пару"$(P^2, K)^\#$, где P^2 – компактная поверхность с краем, K – непустой конечный связный граф, вложенный в P^2 и имеющий вершины степени 4, причем множество $P^2 \setminus K$ является несвязным объединением колец $S^1 \times (0,1]$, $S^1 \times \{1\} \subset \partial P^2$, и множество колец разбито на два подмножества (белые и черные кольца) таким образом, что к каждому ребру графа K примыкают ровно одно белое кольцо и ровно одно черное кольцо. Указанное разбиение колец на белые и черные называется *оснащением* пары (P^2, K), и оснащенная пара обозначается через $(P^2, K)^{\#}$. Две оснащенные пары считаются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм пар, сохраняющий ориентацию поверхностей и раскраску колец.

Далее под атомом будем понимать оснащенную пару $(P^2, K)^{\#}$ с фиксированной ориентацией на поверхности P^2.

Атом может быть определен также как f-граф, что в свою очередь дает нам возможность работать с атомами как с комбинаторными объектами.

Определение. Конечный связный граф G, некоторые ребра которого ориентированы, назовем *f-графом*, если все его вершины имеют степень 3, причем к каждой его вершине примыкают ровно два ориентированных полуребра, из которых одно входит в вершину, а другое выходит из нее. Отметим, что вершина может быть началом и концом одного и того же ориентированного ребра. Каждое неориентированное ребро в f-графе, концы которого лежат на одном ориентированном цикле, будем называть *хордой.*

Определение. *Симметрией атома* называется изоморфизм атома на себя, рассматриваемый с точностью до изотопии. Будем говорить, что высотный атом является *частично симметричным*, если для любых двух колец белого цвета u, v указанного оснащения найдется симметрия атома ϕ, такая, что $\phi(u) = v$.

Обозначим через P множество, состоящее из следующих графов: одна вершина, одно ребро, простой цикл, сети правильных призм и антипризм, Платоновых и Архимедовых тел (исключая ромбоусеченный икосододекаэдр и усеченный кубоктаэдр).

Оказывается, что любой частично симметричный атом изоморфен ровно одному из атомов, чьи f-графы получаются из графов множества P заменой вершины графа на ориентированный цикл и добавлением кратных неориентированных ребер и хорд "особым образом".

Литература

1. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы, т. 1, // Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет 444 с., (1999).

2. *Herbert Fleischner, Wilfried Inrih.* Transitive planar graphs, Mathematica slovaca, 1979, Vol.29

ДЕЙСТВИЕ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ[31]

Н.И. Трусова
(Липецк; *trusova.nat@gmail.com*)

Рассмотрим матричный оператор $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}$, где операторы A_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$ с частными интегралами определяются равенствами

$$A_{ij} = C_{ij} + L_{ij} + M_{ij} + N_{ij}, \quad i, j = 1, ..., n,$$

а операторы $C_{ij}, L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}$ задаются следующим образом

$$(C_{ij}x_j)(t, s) = c_{ij}(t, s)x_j(t, s),$$

$$(L_{ij}x_j)(t, s) = \int\limits_T l_{ij}(t, s, \tau)x_j(\tau, s)d\tau,$$

[31]Работа поддержана РФФИ (проект № 19-41-480002).

$$(M_{ij}x_j)(t,s) = \int\limits_S m_{ij}(t,s,\sigma)x_j(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(N_{ij}x_j)(t,s) = \int\int\limits_D n_{ij}(t,s,\tau,\sigma)x_j(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

где $T = [a,b]$, $S = [c,d]$, $t,\tau \in T$, $s,\sigma \in S$, $D = T \times S$, c_{ij}, l_{ij}, m_{ij} и n_{ij} $(i,j = 1,...,n)$ — вещественные функции.

Пусть $C(D)$ — пространство непрерывных на D функций с супремум нормой, где $x_j \in C(D)$ $(j = 1,\ldots,n)$ и $S(D)$ — пространство измеримых и почти всюду конечных на D функций со значениями в R.

Отметим, что $C(D)$ – банахово пространство, а $S(D)$ – полное метрическое пространство, сходимость в котором совпадает со сходимостью по мере. Имеет место непрерывное вложение $C(D) \subset S(D)$. Справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы оператор A действовал в $C(D)$ необходимо и достаточно, чтобы операторы A_{ij} $(i,j = 1,...,n)$ действовали в $C(D)$. При этом оператор A является непрерывным.*

Для операторов с частными интегралами справедлив аналог теоремы С. Банаха о непрерывности интегрального оператора.

Теорема 2. *Если оператор A действует из $C(D)$ в $C(D)$, то он непрерывен.*

Рассмотрим достаточные условия действия оператора A в $C(D)$. Эти условия являются и условиями непрерывности оператора A в $C(D)$ в силу теоремы 2.

Определенная на $D \times \Omega$, где $\Omega \in \{[a,b],[c,d],D\}$, измеримая функция $a(t,s,\omega)$ называется L_1 — непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при

$|t-t'|<\delta, |s-s'|<\delta$ справедливо равенсто

$$\int\limits_{\Omega} |a(t,s,\omega)-a(t',s',\omega)|d\omega<\varepsilon$$

и L_1 — ограниченной, если найдется такое число B, что для любой точки $(t,s)\in D$

$$\int\limits_{\Omega} |a(t,s,\omega)|d\omega\leq B.$$

Теорема 3. *Пусть функции l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} L_1 — непрерывны и L_1 — ограничены. Тогда оператор A действует в $C(D)$ и непрерывен.*

Работа поддержана РФФИ (проект № 19-41-480002).

Литература

1. *Калитвин А.С.* Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252 с.

2. *Калитвин А.С., Фролова Е.В.* Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. Липецк: ООО "Оперативная полиграфия 2015. — 195 с.

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ ТЯЖЕЛЫХ СТЕРЖНЕЙ

Н.Б. Ускова, А.Н. Шелковой

(Воронеж; *nat-uskova@mail.ru, shelkovoj.aleksandr@mail.ru*)

Пусть $L_2[0,1]$ - гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида

$$(x,y)=\int\limits_0^1 x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau.$$

Через $W_2^2[0,1]$ обозначим пространство Соболева

$$\{x \in L_2[0,1] : x' \text{ абсолютно непрерывна}, \ x'' \in L_2[0,1]\}.$$

В диссертации [1] рассматривались спектральные свойства интегро-дифференциального оператора

$$\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1],$$

порождаемого интегро-дифференциальным выражением вида

$$(\mathcal{L}x)(t) = -\ddot{x}(t) - [\dot{x}(0)a_0(t) - \dot{x}(1)a_1(t)] - \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds \quad (1)$$

с вырожденным ядром $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(t)q_i(s), \ p_i, q_i \in L_2[0,1]$, с областью определения $D(\mathcal{L}) = \{x \in W_2^2[0,1], \ x(0) = x(1) = 0\}$ и краевыми условиями $x(0) = x(1) = 0$. Методом исследования является метод подобных операторов, развиваемый в работах Баскакова А.Г. (см. [2]) и используемый в спектральном анализе дифференциальных операторов [3-6] и смежных вопросах [7]. Одним из примеров, где возникают операторы типа (1), является задача о продольном изгибе тяжелых стержней (см. [8]). Определение критической нагрузки P при продольном изгибе шарнирно опертого с обоих концов, вертикально расположенного стержня длины l постоянного сечения при учете его собственного веса приводит к задаче на собственные значения

$$y^{IV} - \varepsilon(xy')' = -\lambda y'', \ y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0. \quad (2)$$

В пространстве $L_2[0,l]$ введем оператор $Ay = y''$ с областью определения $D(A)$, определяемой краевыми условиями

$y(0) = y(l) = 0$, тогда $A^2y = y^{IV}$. Дифференциальное уравнение в задаче (2) приобретет вид: $A^2y - \varepsilon(xy')' = -\lambda Ay$. Применив к обеим частям оператор A^{-1}, получим краевую задачу $Ay - \varepsilon A^{-1}xAy - \varepsilon A^{-1}xAy' = -\lambda y$, $y(0) = y(l) = 0$. Оператор A^{-1} имеет вид: $(A^{-1}y)(x) = \int\limits_0^l K(x,s)y(s)ds$, где $K(x,s) = G(x,s)$ - функция Грина для краевой задачи $y'' = 0$, $y(0) = y(l) = 0$. Известно, (см., например, [9]), что в данном случае $G(x,s) = x(s-l)/l$, если $0 \leq s < x$, и $G(x,s) = s(x-l)/l$, если $x \leq s \leq l$. Непосредственные вычисления приводят исходное дифференциальное уравнение в задаче (5) к операторному уравнению $Ly = -\lambda y$, где

$$(Ly)(x) = y''(x) + \varepsilon xy(x) - \varepsilon l(x-l)y'(l) +$$

$$+\varepsilon \left(\int\limits_x^l y(s)ds - x\int\limits_0^l y(s)ds \right) /l.$$

К данному оператору применим метод подобных операторов, то есть оператор L можно представить в виде $A - B$, где $Ay)(x) = y''(x)$ - невозмущенный оператор, а

$$(By)(x) = \varepsilon \left(l(x-l)y'(l) - xy - \left(\int\limits_x^l y(s)ds - x\int\limits_0^l y(s)ds \right) /l \right)$$

- возмущение.

Литература

1. *Шелковой А.Н.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями: дисс. канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2004. 144 с.

2. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. 165 с.

3. *Шелковой А.Н.* Оценки собственных значений и собственных функций одного дифференциального оператора с

нелокальными краевыми условиями // Вестник факультета прикладной математики и механики. - 2000. - Вып. 2. - С. 226-235.

4. *Шелковой А.Н.* Метод подобных операторов в исследовании интегро-дифференциальных операторов с квадратично суммируемым ядром // Вопросы науки. - 2016. - Т. 2. - С. 68-80.

5. *Шелковой А.Н.* Спектральные свойства дифференциальных операторов, определяемых нелокальными краевыми условиями // Вопросы науки. - 2016. - Т. 3. - С. 83-90.

6. *Шелковой А.Н.* Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка, определяемого нелокальными краевыми условиями // Математическая физика и компьютерное моделирование. - 2018. - Т. 21. - № 3. - С. 18-33.

7. *Ускова Н.Б., Шелковой А.Н.* Об одной задаче о продольном изгибе тяжелых стержней // Физико-математическ—ое моделирование систем: материалы XVIII Междунар. семинара. - 2018. - Ч. 2. - С. 159-164.

8. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 504 с.

9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. СПб.: Лань, 2003. 576 с.

МАРК АЛЕКСАНДРОВИЧ КРАСНОСЕЛЬСКИЙ — ВЫДАЮЩИЙСЯ ПРОФЕССОР И ЛЮБИМЫЙ ПЕДАГОГ

О.Ф. Ускова
(Воронеж; *sunny.uskova@list.ru*)

Знаменитому ученому и педагогу, профессору Красносельскому Марку Александровичу принадлежат многочисленные работы в различных областях математики:

- теории функций вещественных переменных;

- теории дифференциальных уравнений;
- теории интегральных уравнений;
- функциональному анализу;
- топологии;
- численным методам;
- приближенным методам.

Марк Александрович родился на Украине 27 апреля 1920 года в Староконстантиновке Хмельницкой области. В 1942 году он успешно окончил Объединенный украинский университет, в 1951 защитил докторскую диссертацию физико-математических наук. В Воронежском государственном университете М.А. Красносельский плодотворно работал с 1952 по 1969 год заведующим кафедрой функционального анализа математико-механического факультета, где успешно руководил защитой кандидатских диссертаций своих аспирантов. Вместе с профессорами ВГУ В.И. Соболевым и С.Г. Крейном Марк Александрович создал ставшую хорошо известной не только в нашей стране, но и за рубежом, школу функционального анализа [1].

До настоящего времени пользуются популярностью монографии и учебники М.А. Красносельского, изданные в центральных издательствах:

- "Приближенное решение операторных уравнений" (Москва, 1969, совместно с Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицким, В.Я. Стеценко);
- "Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений" (Москва, 1956);

- "Выпуклые функции и пространства Орлича" (Москва, 1958, совместно с Я.Б. Рутицким);
- "Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений" (Москва, 1965);
- "Положительные решения операторных уравнений" (Москва, 1962);
- "Векторные поля на плоскости" (Москва, 1963, совместно с коллективом авторов);
- "Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций" (Москва, 1966, совместно с коллективом авторов).

Марк Александрович лично в моей жизни сыграл важную, никем не превзойденную, роль. Моя первая встреча с Красносельским М.А. состоялась в сентябре 1957 года, когда он начал читать лекции по математическому анализу для студентов 2 курса физико-математического факультета Воронежского государственного педагогического института, где я училась. Его лекции стали для нас образцом лекций по математическим дисциплинам, эталоном тщательной подготовленности, доступности, идейной ясности. Марк Александрович проводил в течение года консультации один раз в неделю и коллоквиумы 2-3 раза в семестр. Благодаря такой организации учебного процесса существенно повысилась успеваемость, ответственность и интерес студентов к математическому анализу.

Марк Александрович был для нас яркой личностью, талантливым организатором и очень заботливым человеком, не раз выручавшим своих студентов. Он несколько раз посещал студенческие вечера и обратил внимание, что его студентки не умеют танцевать вальс. Чтобы помочь таким студенткам, Красносельский М.А. договорился с директором

Воронежского музыкального театра и нам выделили (бесплатного для нас) тренера, который приезжал в пединститут еженедельно в течение двух месяцев и мы стали танцевать на студенческих вечерах.

Марк Александрович всегда интересовался жизнью своих учеников, помогал решать возникшие проблемы. Он способствовал переводу студентов нашей группы после окончания 2 курса пединститута на математико-механический факультет ВГУ. Чтобы перевести нас не на второй курс (с потерей года обучения), а на третий, Марк Александрович организовал наше обучение в течение июня-августа 1958 года, когда нам читались лекции, проводились практические занятия, зачеты, экзамены.

Марк Александрович Красносельский был нашим настоящим кумиром. Он один из тех преподавателей, с которыми любой студент мог быть самим собой. В течение всех лет обучения мы чувствовали его поддержку. Он разрешал любому студенту нашей группы заниматься в своей профессорской домашней библиотеке, а после окончания Первомайской демонстрации приглашал к себе домой на чай. Несколько раз Марк Александрович вместе со своими аспирантами приходил на встречи вузовских баскетбольных команд. В составе сборной ВГУ по баскетболу я тогда играла и хорошо помню, когда он наградил нашу команду за победу большим тортом.

Только благодаря Красносельскому М.А. студенты нашей группы проходили в 1960 году производственную практику в Московском государственном университете, когда в ВГУ не было современной вычислительной техники.

Литература

1. *Ускова О.Ф.* Учитель в науке и жизни. Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Материалы второй международной молодежной

научной школы "Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы". Воронеж: Научная книга, 2018, № 8. - 364 с. С. 324–325.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПЕРВОКУРСНИКОВ ПО ИНФОРМАТИКЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЮ

О.Ф. Ускова
(Воронеж; *sunny.uskova@list.ru*)

Роль информационных технологий практически во всех сферах профессиональной деятельности способствует повышению значимости курса "Информатика и программирование", изучение которого начинается на первом курсе факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета (ПММ ВГУ).

Изучение информатики и программирования первокурсниками факультета ПММ ВГУ начинается со структурного программирования на языке C++. Для методической поддержки практических и лабораторных занятий на кафедре математического обеспечения факультета ПММ разработан задачник-практикум [1]. Основная цель этого учебного пособия — придать курсу программирования научно-обоснованный базис, сформировать на его основе определенную культуру разработки программ, структурировать соответствующим образом учебный процесс. Задачник- практикум состоит из 12 глав, каждая из которых содержит несколько разделов: контрольные вопросы, задачи с решениями, тренировочные задания, указания к решению, задания для самостоятельного решения.

Учитывая особенности специальностей, по которым на факультете ПММ обучаются студенты, достаточное количество заданий задачника-практикума [1] содержат математические алгоритмы.

Приведем несколько примеров таких заданий для первого семестра студентов 1 курса.

1. Вычислите приближенное значение $\int x^2\,dx$ на отрезке $[a, b]$, используя формулу прямоугольников, если известно, что отрезок $[a, b]$ разбит на n частей.

2. Пусть даны координаты трех точек на плоскости. Если они могут быть вершинами треугольника, определите его вид (прямоугольный, тупоугольный, остроугольный). Вычислите длины его высот и напечатайте их в порядке убывания.

3. При некоторых заданных x, N и E, определяемых вводом, вычислите
а) сумму N слагаемых заданного вида;
б) сумму тех слагаемых, которые по абсолютной величине больше E. Вычисление второй суммы выполните для двух значений E, отличающихся на порядок, при этом определите количество слагаемых, включенных в сумму, вычисляемую для каждого значения E. Сравните результаты со значением функции, для которой данная сумма определяет приближенное значение при x, лежащем в интервале $(-R, R)$, вычисленным с помощью встроенных функций компилятора.

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

если $R = \infty$.

4. Составить программу нахождения корня $x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2.5 = 0$ методом деления отрезка $[0.4, 1]$ пополам с точностью $E = 10^{-5}$.

5. Для заданных чисел a и p вычислить $x = \sqrt[p]{a}$ по ре-

куррентному соотношению (формула Ньютона)

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}[(p-1)x_n + a/x_n^{p-1}]; \quad x_0 = a.$$

Сколько итераций надо выполнить, чтобы для заданной погрешности E выполнялось соотношение $|x_{n+1} - x_n| < E$?

Решая подобные задачи, первокурсники должны овладеть навыками проектирования действий, направленных на решение какой-либо проблемы или на достижение какой-либо цели — основными этапами решения задач с помощью ЭВМ.

Заметим в заключение, что в нашей стране в 1951 году в числе первых разработчиков (с С.А. Авраменко и С.А. Богомолец) прикладной компьютерной программы для решения дифференциальной краевой задачи второго порядка

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

был математик с мировым именем Селим Григорьевич Крейн [2]. В 60-70 годы прошлого века С.Г. Крейн, заслуженный деятель науки, лауреат Государственной премии Украины плодотворно работал в Воронежском государственном университете заведующим кафедрой уравнений в частных производных, воспитал несколько поколений математиков -профессионалов. С.Г. Крейн был руководителем моей дипломной работы, одной из первых в ВГУ дипломных работ по программированию.

Литература

1. *Ускова О.Ф., Каплиева Н.А., Горбенко О.Д.* Начала структурного программирования на языке С++: задачник-практикум. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. - 261 с.

2. *Ускова О.Ф., Каплиева Н.А., Горбенко О.Д.* Российской информатике 70 лет. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов

Международной научной конференции. Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2018. - 1672 с. С. 1416–1418.

ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ КОС И ИНВАРИАНТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[32]

Д.А. Федосеев
(Москва; *denfedex@yandex.ru*)

Классическая группа кос — один из давно изучаемых и хорошо известных объектов маломерной топологии, наряду с классическими узлами. Существуют различные обобщения групп кос (например, виртуальные косы, которые точнее было бы называть “косами с виртуальными перекрестками”, свободные косы). Изучаются так же и некоторые важные частные случаи групп кос (самым ярким из них является группа *крашеных кос*, то есть кос, которым отвечает тождественная подстановка).

Особый интерес косы представляют, поскольку тесно связаны с динамическими системами движения набора из n точек по двумерной плоскости. В частности, сама группа двумерных кос рассматриваться как фундаментальная группа пространства конфигураций из n различных точек. При этом образующие группы — перекрестки нитей — отвечают моментам времени, в которые у пары точек совпадают координаты по оси OY.

Естественным образом возникла идея обобщить изучаемые системы в следующем смысле: рассматривать движение объектов по некоторому конфигурационному пространству, причем потребовать, чтобы все “вырождения” системы (то есть моменты времени, в которые изучаемые объекты были не в общем положении) удовлетворяли бы некоторому “хорошему” свойству коразмерности 1, зависящему от

[32]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

$k < n$ точек. В этих терминах классические косы отвечали бы свойству коразмерности 1, зависящему от двух точек: "$y-$координаты двух точек совпали".

Данная идея оказалась плодотворной и привела к построению В.О. Мантуровым теории *обобщенных свободных* $k-$*кос* или, иначе, *теории групп* G_n^k [1].

Более точно, группа свободных $k-$кос определяется следующим образом. Рассмотрим множество $\bar{n} = \{1, \ldots, n\}$. Образующие группы G_n^k находятся во взаимно-однозначном соответствии с неупорядоченными $k-$элементными подмножествами множества $\bar{n}$. Обозначим их через a_m, где m — неупорядоченный $k-$мультииндекс, то есть $m \subset \bar{n}$, $|m| = k$.

Группа G_n^k получается из свободной группы, порожденной образующими a_m, факторизацией по следующим соотношениям:

1. $a_m a_{m'} = a_{m'} a_m$ для любых мультииндексов m, m', для которых $Card(m \cap m') < k - 1$ (соотношение *дальней коммутативности*);

2. $a_m^2 = 1$ для всех мультииндексов m;

3. для каждого $(k+1)$-элементного набора U индексов $u_1, \ldots, u_{k+1} \in \{1, \ldots, n\}$ рассмотрим $k+1$ множество $m^j = U \setminus \{u_j\}, j = 1, \ldots, k+1$. С каждым набором U сопоставим *тетраэдральное* соотношение

$$a_{m^1} \cdot a_{m^2} \cdots a_{m^{k+1}} = a_{m^{k+1}} \cdots a_{m^2} \cdot a_{m^1}.$$

Само построение группы G_n^k приводит к следующему принципу:

если динамическая система движения n точек удовлетворяет некоторому хорошему свойству коразмерности 1, зависящему от k точек, данная *система обладает инвариантами со значениями в группе G_n^k.*

Разумеется, мало построить инварианты некоторой динамики. Важно, чтобы эти инварианты можно было посчитать и различить между собой. Эти вопросы в случае групп G_n^k в настоящее время активно изучаются. В частности, следующие результаты были получены автором совместно с В.О. Мантуровым и А.Б Карповым [2, 3]:

Теорема 1. *Для группы G_4^3 алгоритмически разрешимы проблемы равенства и сопряженности.*

Теорема 2. *Для группы G_5^4 алгоритмически разрешима проблема равенства.*

Аналогичные теоремы для случая групп G_{k+1}^k для $k > 4$ в настоящее время не доказаны, хотя у авторов есть основания полагать, что они справедливы. Продвижения в этом вопросе были бы крайне важны для теории инвариантов динамических систем описанного типа.

Литература

1. *V. O. Manturov*, Non–Reidemeister knot theory and its applications in dynamical systems, geometry and topology, preprint: http:// arxiv.org/abs/1501.05208

2. *D.A. Fedoseev, A.B. Karpov, V.O. Manturov*, Word and Conjugacy Problems in Groups G_{k+1}^k; preprint: https://arxiv.org /abs/1906.04916; accepted for publishing by Lobachevskii Journal of Mathematics.

3. *Vassily O. Manturov, Denis A. Fedoseev, Seongjeong Kim, Igor M. Nikonov*, On Groups G_n^k and Γ_n^k: A Study of Manifolds, Dynamics, and Invariants, submitted to Bulletin of Mathematical Sciences, preprint: https://arxiv.org/abs/1905.08049

УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-ФРЕДГОЛЬМА СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ЭВОЛЮЦИОННОГО

ТИПА[33]

Е.В. Фролова
(Липецк; *lsnn48@mail.ru*)

Контактные задачи теории упругости при учёте износа шероховатых поверхностей взаимодействующих тел, а также ряд смешанных задач для многослойных вязкоупругих оснований, когда относительная толщина и относительная жёсткость верхнего слоя достаточны малы, приводятся к исследованию интегрального уравнения Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами

$$\lambda x(t,s) + (Kx)(t,s) + (Nx)(t,s) = g(t,s). \qquad (1)$$

В статье рассматривается уравнение (1) для случая

$$(Kx)(t,s) \equiv (Lx)(t,s) + (Mx)(t,s) =$$

$$= \int_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_{-1}^1 m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$(Nx)(t,s) = \int_0^t \int_{-1}^1 n(t,\tau)m(s-\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau,$$

где $\lambda > 0$ – безразмерный параметр, имеющий механический смысл, функция $g(t,s)$ имеет вид $g(t,s) = g_1(t)+sg_2(t)+f(s)$, $g_1, g_2 \in C([0,a])$, а f – заданная функция из $L^2([-1;1])$, причем ядро $l(t,\tau)$ – непрерывная функция, ядро $m(s,\sigma)$ таково, что оператор M действует из $L^2([-1,1])$ в $C([-1,1])$, а в $L^2([-1,1])$ является самосопряженным компактным оператором, $n(t,\tau) = l(t,\tau)$ – непрерывная функция.

При сделанных предположениях оператор $L\bar{\otimes}I$ имеет равный нулю спектральный радиус, т.е. $r(L\bar{\otimes}I) = r(L) = 0$ и $\sigma(L\bar{\otimes}I) = \{0\}$. Кроме того, $\sigma(M)$ состоит из нуля и не более

[33]Работа поддержана РФФИ (проект №19-41-480002).

чем счетного множества собственных чисел, т.е. M – оператор с чисто точечным спектром, причем все собственные функции оператора M непрерывны.

Рассмотрим некоторые свойства точечного спектра оператора $K+N$, структуру его собственных функций, а также условия разрешимости уравнения (1) в случае, когда $\lambda \neq 0$ совпадает с одним из собственных чисел оператора $K+N$.

Оператор $K+N$ можно записать в виде $K+N = L\bar{\otimes}I + I\bar{\otimes}M + L\bar{\otimes}M$. Известно, что $\sigma(K+N) = \sigma(M)$. Так как $\sigma(L) = \{0\}$, то если $\sigma_p(L)$ не пуст, имеем: $\sigma_p(K) = \sigma_p(M)$ и $\sigma_p(N) = \sigma_p(L) = \{0\}$.

Так как $\sigma(K+N) = \sigma(M)$, то спектр оператора $K+N$ состоит из нуля и не более чем счетного числа собственных чисел. Если теперь $0 \in \sigma_p(M)$, то $0 \in \sigma_p(K+N)$, если $0 \notin \sigma_p(M)$, то $0 \notin \sigma_p(K+N)$. Таким образом, $\sigma_p(K+N) = \sigma_p(M)$. Поэтому справедлива

Теорема 1. *Пусть $l(t,\tau)$ непрерывная функция, $n(t,\tau) = l(t,\tau)$ и оператор M действует из $L^2([-1,1])$ в $C([-1,1])$ и в $L^2([-1,1])$ является компактным самосопряженным оператором и пусть $\sigma_p(L)$ в $C([0,a])$ не пуст. Тогда не пуст точечный спектр оператора $K+N$ в $C(D)$ и $\sigma_p(K+N) = \sigma_p(M)$.*

Пусть, далее, $\sigma_p(L)$ не пуст. Тогда для любого $\lambda_i \neq 0$ и $\lambda_i \in \sigma_p(K+N)$ $(i = 1,2,\ldots)$ $\lambda_i = \beta_i$, где $\beta_i \in \sigma_p(M)$ $(i = 1,2,\ldots)$ и верна

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Собственные функции оператора $K+N$, соответствующие собственному числу $\lambda_p = \beta_p \neq 0$, $\beta_p \neq -1$, находятся в множестве $X(\lambda_p) \cap C(D)$, где $X(\lambda_p)$ – подпространство, образованное линейными комбинациями функций $\varphi(t)\psi(s)$, где $\varphi \in KerL$, $\psi \in Ker(\lambda_p I - M)$, а собственные функции оператора $K+N$, соответствующие собственному числу $\lambda_p = \beta_p = -1$ находятся в множестве $X(\lambda_p)$, где $X(\lambda_p)$ –*

подпространство, порождаемое линейными комбинациями функций $\varphi(t)\psi(s)$, *где* $\varphi \in C([0,a])\backslash\{0\}$, $\psi \in Ker(\lambda_p I - M)$.

Рассмотрим условия разрешимости уравнения (1) в случае, когда $\lambda \neq 0$ попадает в точечный спектр оператора $K+N$. Используя представление $x^0(t,s) = \sum_{i,j=1}^{\infty} x_{ij}\varphi_i(t)\psi_j(s)$ элементов пространства $L^2(D)$, где x_{ij} – коэффициенты Фурье, а x^0 – собственная функция оператора K, соответствующая собственному числу β_p, получим

$$(\lambda-\beta_j)\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}\varphi_i(t)-(1+\beta_j)\int_0^t l(t,\tau)\sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}\varphi_i(\tau)\,d\tau = \sum_{i=1}^{\infty} f_{ij}\varphi_i(t).$$

Используя равенства $f(t,s) = \sum_{i,j=1}^{\infty} f_{ij}\varphi_i(t)\psi_j(s)$, где f_{ij} — коэффициенты Фурье функции $f(t,s)$, $f_j(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{ij}\varphi_i(t)$ и вводя обозначения $y_j(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}\varphi_i(t)$, получим

$$(\lambda-\beta_j)y_j(t) - (1+\beta_j)\int_0^t l(t,\tau)y_j(\tau)\,d\tau = f_j(t) \ (j = 1,2,\ldots). \tag{2}$$

Пусть $\lambda \neq 0$ совпадает с собственным числом λ_p кратности n. Тогда все уравнения, для которых $j \notin \{p, p+1, \ldots, p+n\}$ однозначно разрешимы для любых $f_j(t) \in C([0,a])$. Следовательно, система (2) и уравнение (1) имеют решения точно в случае, когда разрешимы уравнения

$$(1+\beta_j)\int_0^t l(t,\tau)y(\tau)\,d\tau = f_j(t), \quad (j = p, p+1, \ldots, p+n). \tag{3}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть* l, m, n *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и* $\lambda \neq 0$ *совпадает с собственным числом* $\lambda_p = \beta_p$ *кратности* n. *Тогда уравнение* (1) *разрешимо тогда, когда разрешимы уравнения* (3).

ИНТЕГРАЛЫ ОТ ЦЕЛЫХ, МЕРОМОРФНЫХ И СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ЛУЧУ[34]

Б.Н. Хабибуллин
(Уфа; *khabib-bulat@mail.ru*)

В теории роста целых и мероморфных функций f на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ нередко возникала необходимость в оценках интегралов с подынтегральным выражением

$$\mathsf{M}_{\ln^+|f|}(r), \quad \text{где } \mathsf{M}_u(r) := \sup_{|z|=r} u(z),\ u^+ := \max\{0.u\},$$

возможно, дополненным некоторой весовой функцией-множителем. Такие оценки относительно множества интегрирования можно отнести к одному из следующих двух типов: по интервалам или дугам на луче или окружности или же по малым подмножествам на таких интервалах или дугах. Среди исходных результатов первого типа —

Теорема Р. Неванлинны ([1], [2; гл. 1, теорема 7.2]). *Для мероморфной функции f на $\mathbb{C}$ с характеристикой Неванлинны T_f и для числа $k>1$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{r}\int_1^r \mathsf{M}_{\ln^+|f|}(t)\mathrm{d}t \le C(k)T_f(kr,f), \quad r\ge 1,$$

где число $C(k)>1$ зависит только от k.

Истоки второго типа оценок — лемма Эдрея – Фукса о малых дугах [3; **2**, лемма III, **9**], [2; гл. 1, теоремы 7.3, 7.4], а также приведённая в [4] без доказательства

Лемма Гришина – Содина о малых интервалах([4; лемма 3.1]). *Пусть в условиях Теоремы Р. Неванлинны λ — линейная мера Лебега на вещественной оси $\mathbb{R}$ и $E\subset[1,r]\subset$*

[34]Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

$\mathbb{R}$ — *λ-измеримое подмножество. Тогда*

$$\frac{1}{r}\int_E \mathsf{M}_{\ln^+|f|}(t)\,\mathrm{d}t \le A\frac{k}{k-1}\Big(\frac{\lambda(E)}{r}\ln\frac{2r}{\lambda(E)}\Big)T_f(kr),$$

где A — абсолютная постоянная.

Версия леммы Гришина – Содина о малых интервалах для *субгармонических функций конечного порядка* —
Теорема Гришина – Малютиной о малых интервалах ([5; теорема 8]). *Пусть $v \not\equiv -\infty$ — субгармоническая функция уточнённого порядка ρ и $E \subset [1, R]$ — λ-измеримое множество. Тогда для некоторого числа M, не зависящего от r, θ, E, имеет место неравенство*

$$\int_E \big|v(te^{i\theta})\big|\mathrm{d}t \le M\frac{\lambda(E)}{r}\ln\frac{4r}{\lambda(E)}\, r^{\rho(r)+1}.$$

Для λ-измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ и $p \in [1, +\infty]$ через $L^p(E)$ обозначаем *L^p-пространство* функций $f\colon E \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{L^p(E)} := \Big(\int_E |f|^p\,\mathrm{d}\lambda\Big)^{1/p}$ при $p < +\infty$ и с нормой *существенная верхняя грань* $\operatorname*{ess\,sup}_E |f|$ на E при $p = +\infty$.

Существенное обобщение и развитие Теоремы Гришина – Малютиной о малых интервалах уже при $p = +\infty$ —
Теорема о малых интервалах с весом. *При любом значении $p \in (1, +\infty]$ и при значении q, определяемом из равенства $1/p + 1/q = 1$, для любого числа $k > 1$ существует такое число $A_p(k) \ge 1$, что для любого числа $R > 0$, для любого λ-измеримого множества $E \subset [0, R]$, для любой функции $g \in L^p(E)$ и для любой субгармонической функции v со значением $v(0) \ge 0$ имеет место неравенство*

$$\int_E \mathsf{M}_{|v|} g\,\mathrm{d}\lambda \le A_p(k)\mathsf{M}_v(kR)\|g\|_{L^p(E)}\big(\lambda(E)\big)^{1/q}\ln\frac{e^q R}{\lambda(E)}.$$

Из Теоремы о малых интервалах с весом уже при $p = +\infty$, $g \equiv 1$ и $v := \ln|f|$ из известных вариантов определения характеристики Неванлинны и её взаимосвязей с другими характеристиками роста мероморфных функций легко получаются Теорема Р. Неванлинны и Лемма Гришина – Содина о малых интервалах. Более того, равномерный характер оценки в ней позволяет получить многомерные версии Теоремы о малых интервалах с весом для разностей плюрисубгармонических функций в $\mathbb{C}^n$ и для мероморфных функций в $\mathbb{C}^n$.

Версия Теоремы о малых интервалах с весом для случая $p = +\infty$ направлена в печать [6]. Её варианты с $p \in (1, +\infty]$ и с применениями к плюрисубгармоническим и мероморфным функциям в $\mathbb{C}^n$, а также к разностям субгармонических функций в $\mathbb{R}^n$ готовятся для отправки в печать.

Литература

1. *Nevanlinna R.* Le théoremè de Picard – Borel et la théorie des fonctions méromorphes Paris: Gauthier-Villars, 1929, Pp. 171.

2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970, 591 с.

3. *Edrei A., Fuchs W. H. J.* Bounds for number of deficient values of certain classes of meromorphic functions // Proc. London Math. Soc. 1962, V. 12, P. 315–344 .

4. *Гришин А. Ф., Содин М. Л.* Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения Харьков: Вища школа, 1988, вып. 50, С. 47–61.

5. Гришин А. Ф., Малютина Т. И., Новые формулы для индикаторов субгармонических функций // Матем. физ., анал., геом. 2005, Т. 12, вып. 1, С. 25–72.

6. *Габдрахманова Л. А., Хабибуллин Б. Н.* Одна теорема

о малых интервалах для субгармонических функций // Известия вузов. Математика, 2020 (направлено в печать).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРУБЫХ МОЛЕКУЛ, СОСТОЯЩИХ ИЗ АТОМОВ БЕЗ ЗВЕЗДОЧЕК ИНТЕГРИРУЕМЫМИИ БИЛЛИАРДАМИ[35]

И.С. Харчева
(Москва; *irina.harcheva1@yandex.ru*)

Определение 1. Рассмотрим некоторую компактную область Ω в плоскости с кусочно-гладкой границей и углами излома $\pi/2$. Пусть материальная точка движется по прямой с постоянной скоростью внутри этой области Ω и отражается о гладкую часть границы $\partial\Omega$ без потери скорости и естественным образом: угол падения равен углу отражения. В остальных случаях движение этой материальной точки определяется по непрерывности. Тогда *биллиардом* в области Ω называется динамическая система, описываемая движением этой материальной точки.

Эта динамика задает гамильтонову систему на кокасательном расслоении к области Ω. У динамической системы биллиарда есть один первый интеграл – гамильтониан, равный половине квадрата модуля вектора скорости. Значит, биллиард является гамильтоновой динамической системой с двумя степенями свободы. Из теории гамильтоновых систем следует, что для интегрируемости биллиарда необходим еще один первый интеграл. В общем случае, для произвольной области Ω его может не существовать. Но если подобрать "хорошую" область Ω, то можно найти функцию, которая будет первым интегралом.

[35]Исследование выполнено в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2554.2020.1).

Важным классом интегрируемых биллиардов является биллиард в области Ω, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол. Оказывается, в таком биллиарде вектор скорости материальной точки на протяжении всей траектории будет направлен по касательной к каустике – фиксированной квадрике, софокусной с семейством. Поэтому у такой системы появляется еще один интеграл, независимый с предыдущим – параметр квадрики Λ. Это означает, что динамическая система биллиарда в такой области будет интегрируема по Лиувиллю. Ее интегрируемость была показана в работе В. В. Козлова, Д. В. Трещёва [1].

Расширим постановку биллиардной задачи. Пусть дано n областей $\Omega_1, ..., \Omega_n$ с кусочно-гладкой границей. Пусть граница этих областей содержит одну и ту же кривую l. Припишем к этой дуге перестановку σ из n элементов. Тогда можно определить более сложный биллиард в объединении областей $\cup_{i=1}^{n}\Omega_i$ следующим образом: материальная точка отражается обычным образом от границ, отличных от l, и переходит с одной области на другую по перестановке σ, достигая кривой l. Заметим, что общих граничных кривых у областей может быть несколько: $l_1, l_2, ..., l_k$. Ко всем им можно приписать перестановки $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ и рассмотреть биллиард, в котором материальная точка будет переходить с листа на лист на дугах $l_1, l_2, ..., l_k$ по перестановкам $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ соответственно. Такие биллиарды будем называть *биллиардными книжками*, а области Ω_i, из которых состоит биллиардная книжка – *листами*. В частном случае, когда $n = 2$ такие биллиарды называются топологическими. Топологические биллиарды были полностью классифицированы в работе В.В. Фокичевой [2]. В этой работе было обнаружено, что многие известные и важные интегрируемые системы с двумя степенями свободы моделируются топологическими биллиардами с точностью до лиувиллевой эквивалентности. То есть их инварианты Фоменко-Цишанга (см. [3]) совпадают. В связи с этим А.Т. Фоменко предложил следующую гипотезу:

Гипотеза. (А.Т. Фоменко) *Биллиардными книжками можно моделировать:*

Гипотеза А. все 3-атомы;

Гипотеза B. все грубые молекулы;

Гипотеза C. все меченые молекулы.

Теорема 1. (Ведюшкина-Харчева) *Гипотеза Фоменко А верна, а именно, для любого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится биллиардная книжка, такая что в её изоэнергетической поверхности слоение Лиувилля прообраза окрестности особого значения интеграла Λ, отвечающего траекториям, направленным к или от одного из фокусов, послойно гомеоморфно данному атому.*

Теорема 2. (Ведюшкина-Харчева) *Любая грубая молекула, состоящая из атомов без звездочек, моделируется биллиардными книжками. Более точно: по любой грубой молекуле, состоящей из атомов без звездочек, алгоритмически строится биллиардная книжка с каноническим квадратичным интегралом Λ, отвечающим параметру каустики, такая что грубая молекула, соответствующая этой системе изоморфна заданной изначально грубой молекуле.*

Литература

1. *Козлов В. В., Трещёв Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 408 с.

2. *Фокичева В. В.* Топологическая классификация биллиардов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик. Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 10. С. 127–176.

3. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, том

1. Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 1999.

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СРЕДНИХ НЕЧЕТКО-СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В.Л. Хацкевич
(Воронеж; *vlkhats@mail.ru*)

Объектом настоящего исследования являются нечетко-случайные величины. Нечеткие множества как предмет рассмотрения введены в пионерской работе Заде [1]. С этого момента и по настоящее время они активно исследуются и находят важное приложение в различных прикладных областях (финансовая математика, теория принятия решений, мягкие вычисления и др.). В частности, много работ посвящено изучению нечетко-случайных величин, т.е. случайных величин, множествами значений которых являются нечеткие числа. Из последних работ укажем работы [2] и [3]. В литературе рассматриваются различные определения нечетко-случайных чисел и нечетко-случайных величин. Ниже мы используем терминологию, принятую в работах [2] и [3].

Как известно, математическое ожидание EX случайной величины X минимизирует среднеквадратическое отклонение $E(X-a)^2$ по всем действительным $a \in R$, т.е.

$$E(X - E(X))^2 \leq E(X-a)^2 \quad (\forall a \in R). \tag{1}$$

В данной работе рассматриваются нечетко-случайные величины $\tilde{X}$, для которых областью J возможных значений являются нечеткие числа. Устанавливаются экстремальные свойства вида (1). Кроме того, рассматриваются оптимальные линейные регрессии нечетко-случайных величин. В литературе рассматриваются различные аспекты нечетких линейных регрессий. Мы рассматриваем случай четких (числовых) коэффициентов (ср. [4], [5]). На этом пути получен результат об оптимальной в среднеквадратичном нечеткой регрессии. Установлено, что оптимальная регрессия обладает максимальной корреляцией с прогнозируемой нечетко-случайной величиной. Приведем необходимые термины и обозначения.

Множество $\tilde{z} \subseteq R^2$, лежащее в полосе $0 \leq \eta \leq 1$, называется нечетким числом, если существуют монотонные, непрерывные слева функции $z^L : [0,1] \to R$ и $z^R : [0,1] \to R$, где z^L не убывает, z^R не возрастает, причем $z^L(1) \leq z^R(1)$ такие, что для любого $\eta_0 \in [0,1]$ пересечение множества $\tilde{z}$ с прямой $\eta = \eta_0$ представляет собой множество

$$\{(\xi, \eta) : z^L(\eta_0) \leq \xi \leq z^R(\eta_0), \eta = \eta_0\}.$$

Функции $z^L(\eta)$ и $z^R(\eta)$ называются, соответственно, левым и правым индексом нечеткого числа $\tilde{z}$.

Пусть (Ω, Σ, P) - вероятностное пространство, где Ω - множество элементарных событий, Σ- σ-алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω, P - вероятностная мера.

Измеримое отображение $\tilde{X} : \Omega \to J$ называется нечетко-случайной величиной, если при любом $\omega \in \Omega$ множество $\tilde{X}(\omega)$ является нечетким числом.

Индексы нечеткого числа $\tilde{X}(\omega)$ будем обозначать $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$. Функции $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$ называются, соответственно, левым индексом и правым индексом нечетко-случайной величины $\tilde{X}(\omega)$.

Скалярным произведением $\left\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \right\rangle_\omega$ нечетко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ называется величина

$$\left\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \right\rangle_\omega = 0.25 \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega (X^L(\omega, \eta) +$$

$$+ X^R(\omega, \eta))(Y^L(\omega, \eta) + Y^R(\omega, \eta)) dP d\eta,$$

а полунормой $||\tilde{X}||_\omega = \left\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \right\rangle_\omega^{1/2}$.

Положим

$$x^L(\eta) = \int\limits_\Omega \tilde{X}^L(\omega,\eta)dP, \quad x^R(\eta) = \int\limits_\Omega \tilde{X}^R(\omega,\eta)dP. \qquad (2)$$

Нечетким ожиданием нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ называется нечеткое число $\tilde{x}$ с левым индексом $x^L(\eta)$ и правым индексом $x^R(\eta)$, определяемыми формулами (2). Ожиданием $E(\tilde{X})$ нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ называется число, определяемое формулой

$$E\tilde{X} = 0.5 \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega (X^L(\omega,\eta) + X^R(\omega,\eta))dPd\eta.$$

Ковариацией $Cov(\tilde{X},\tilde{Y})$ нечетко-случайных величин $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ называется выражение

$$Cov(\tilde{X},\tilde{Y}) = 0.25 \int\limits_0^1 \int\limits_\Omega (X^L(\omega,\eta) + X^R(\omega,\eta) - x^L(\omega,\eta) -$$

$$-x^R(\omega,\eta))(Y^L(\omega,\eta) + Y^R(\omega,\eta) - y^L(\omega,\eta) - y^R(\omega,\eta))dPd\eta.,$$

где $x^L(\omega,\eta)$ и $x^R(\omega,\eta)$ определяются формулами (2) и аналогично $y^L(\omega,\eta)$ и $y^R(\omega,\eta)$.

Дисперсией $Var(\tilde{X})$ нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ называется $Cov(\tilde{X},\tilde{X})$.

Теорема 1. *Для заданной нечетко-случайной величины $\tilde{X}(\omega)$ минимум выражения $||\tilde{X}-a||_\omega$ по всем действительным числам a достигается при $a_0 = E(\tilde{X})$, т.е.*

$$||\tilde{X} - E(\tilde{X})||_\omega \le ||\tilde{X} - a||_\omega \quad (\forall a \in R). \qquad (3)$$

Теорема 2. *Для заданной нечетко-случайной величины* $\tilde{X}$ *минимум выражения* $||\tilde{X}-\tilde{a}||_\omega$ *по всем нечетким числам* $\tilde{a}$ *достигается при* $\tilde{a}_0 = \tilde{x}$ *нечетком ожидании случайной величины* $\tilde{X}$, *т.е.*

$$||\tilde{X} - \tilde{x}||_\omega \leq ||\tilde{X} - \tilde{a})||_\omega \quad (\forall \tilde{a} \in J). \tag{4}$$

Формулы (3), (4) обобщают свойство (1).

Рассмотрим прогнозируемую нечетко-случайную величину $\tilde{Y}$ и попарно независимые прогнозирующие нечетко-случайные величины $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n$. Исследуем вопрос об аппроксимации случайной величины $\tilde{Y}$ линейными комбинациями вида $\tilde{a} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{X}_i$, где α_i - вещественные числа, а $\tilde{a}$ - нечеткое число. Точнее, задача состоит в подборе вещественных коэффициентов α_i и нечеткого числа $\tilde{a}$ так, чтобы ошибка $||\tilde{Y} - \tilde{a} - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{X}_i||_\omega^2$ была минимальной.

В дальнейшем будем предполагать выполненымии условия:

1) рассматриваемые нечетко-случайные величины $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ имеют ограниченные по абсолютной величине индексы.

2) все нечеткие ожидания нечетко-случайных величин $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ совпадают. $\tilde{y} = \tilde{x}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Теорема 3. *Пусть для заданной нечетко-случайной величины* $\tilde{Y}$ *и системы попарно независимых нечетко-случайных величин* $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, ..., \tilde{X}_n$ *выполнены условия 1), 2). Тогда оптимальной в среднеквадратичном смысле линейной несмещенной оценкой нечетко-случайной величины* $\tilde{Y}$ *по системе* $X_1, X_2, ..., X_n$ *вида* $\tilde{y} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (\tilde{X}_i - \tilde{y})$ *является оценка*

$$\hat{Y} = \tilde{y} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{Var(\tilde{X}_i)}} Cov(\tilde{Y}_i, \tilde{X}_i)(\tilde{X}_i - \tilde{y}), \tag{5}$$

где $\tilde{y}$ - общее нечеткое ожидание нечетко-случайных величин $\tilde{Y}$ и $\tilde{X}_i$. На $\hat{Y}$ достигается минимум выражения $||\tilde{Y} - \tilde{y} - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\tilde{X}_i - \tilde{y})||_{\omega}^2$ по всем действительным α_i.

Определим коэффициент корреляции между нечетко - случайными величинами $\tilde{Y}$ $\tilde{Z}$ равенством

$$\rho[\tilde{X}, \tilde{Z}] = \frac{Cov(\tilde{X}, \tilde{Z})}{\sigma(\tilde{Y})\sigma(\tilde{Z})},$$

где $\sigma^2(\tilde{Y}) = Var(\tilde{Y})$, $\sigma^2(\tilde{Z}) = Var(\tilde{Z})$.

Теорема 4. *Оценка $\hat{Y}$, определяемая формулой (5), обладает наибольшим коэффициентом корреляции с $\tilde{Y}$ по сравнению с другими оценками вида $\tilde{W}_n = \tilde{y} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(\tilde{X}_i - \tilde{y})$ с произвольными вещественными коэффициентами α_i. Т.е. для коэффициентов корреляции выполнено неравенство $\rho[\tilde{W}_n, \tilde{Y}] \geq \rho[\hat{Y}, \tilde{Y}]$.*

Литература

1. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8, p. 338 - 353

2. *Feng Y,. Hu. L., Shu H.* The variance and covariance of fuzzy random variables. Fuzzy Systems, 2001, 120, p. 487-497

3. *Шведов А.С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин. Прикладная эконометрика, 2016, т. 42. с. 121-138

4. *Bargelia A., Pedrycz W., Nakashima T.* Multiple Regression with Fuzzy Data, Fuzzy Sets and Systems, 2007, pp. 2169 - 2188

5. *Colubi A.* Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applica analysis of fuzzy-and real-valued data. Fuzzy Sets and sytems, 2009, 344-356

НЕПРЕРЫВНАЯ ВЫБОРКА ИЗ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ЧЕБЫШЕВСКОГО

ПРОЕКТОРА В $C(Q)$[36]

И.Г. Царьков

(Москва; *tsar@mech.math.msu.su*)

Путь $p : [0,1] \to X$ (непрерывное отображение) в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ называется монотонным, если для любого функционала $x^* \in \operatorname{extr} S^*$ функция $x^*(p(t))$ является монотонной. Геометрически это означает, что поверхности уровня этого функционала (т.е. соответствующие гиперплоскости) этот путь пересекает один раз или по следу некоторого его подпути. Множество M называется монотонно линейно связным, если любые две точки этого множества можно соединить монотонным путем, след которого лежит в M. В пространстве X для непустого множества $V \subset X$ и непустого ограниченного множества $M \subset X$ через $r_V(M)$ обозначим относительный чебышевский радиус, т.е. величину $\inf\{r \geqslant 0 \mid M \subset B(x,r), x \in V\}$. Через $Z_V^\varepsilon(M)$ обозначим множество почти чебышевских центров: $\{x \in V \mid M \subset B(x, r_V(M) + \varepsilon)\}$.

Теорема 1. *Пусть X – линейное нормированное пространство, $V \subset X$ – монотонно линейное связное ограниченно компактное непустое множество. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная выборка из отображения $Z_V^\varepsilon(\cdot)$.*

А.Р. Алимов [1], [2] доказал, что в пространстве c_0 всякое солнце является монотонно линейно связным. Также им доказано [2], что в $C(Q)$ (Q – метрический компакт) всякое строгое солнце является монотонно линейно связным.

Следствие 1. *Пусть $X = C(Q)$ (Q – метрический компакт), $V \subset X$ – ограниченно компактное строгое солнце. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная выборка из отображения $Z_V^\varepsilon(\cdot)$.*

---

[36]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332-а

Аналогичный результат верен для случая пространства c_0.

Литература

1. *Алимов А.Р.* Связность солнц в пространстве c_0 // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 4. — С. 3–18.

2. *Алимов А.Р.* Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ // Матем. сб. — 2006. — Т. 197, № 9. — С. 3–18.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

М.В. Шамолин

(Москва; *shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@gmail.com*)

Дать общее определение динамической системы с диссипацией довольно затруднительно. В каждом конкретном случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определенные коэффициенты в уравнениях указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на ее подкачку. Последнее приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), являющимися гладкими функциями [1–3].

Как только в системе обнаруживаются притягивающие или отталкивающие предельные множества, необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве первых интегралов.

Показана интегрируемость некоторых классов однородных динамических систем нечетного (третьего, пятого, седьмого и девятого) порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к четномерным (соответственно, одномерным, двумерным, трехмерным и четырехмерным) многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Приведем примеры систем третьего порядка. Пусть v, α, z — фазовые переменные в гладкой динамической системе, правые части которой — однородные полиномы степени по переменным v, z с коэффициентами, зависящими от α. Тогда, выбирая в качестве новой независимой переменной величину q ($dq = vdt$, $d/dq =<'>$, $v \neq 0$), а также новую фазовую переменную Z по формуле $z = Zv$, рассматриваемую систему можно переписать в следующем виде:

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \alpha' = g(\alpha) + h(\alpha)Z + i(\alpha)Z^2, \\ Z' = d(\alpha) + e(\alpha)Z + f(\alpha)Z^2 - Z\Psi(\alpha, Z), \end{gathered} \tag{2}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = a(\alpha) + b(\alpha)Z + c(\alpha)Z^2,$$

при этом уравнение (1) на v отделяется, что дает возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы (2) с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$. Особняком стоит случай, когда выполнены тождества

$$d(\alpha) \equiv e(\alpha) \equiv f(\alpha) \equiv 0. \tag{3}$$

При этом остальные функции $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$, $g(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$, вообще говоря, не равны тождественно нулю. Тогда система (1), (2) имеет естественный аналитический первый интеграл

$$\Phi_1(v; Z) = z = vZ = C_1 = \text{const}. \tag{4}$$

Для полной интегрируемости системы (1), (2) при условии (3) нужно найти еще один первый интеграл, независимый с (4). Если выполнены следующие условия

$$a(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i^2(\alpha)}c(\alpha), b(\alpha) = \frac{h(\alpha)}{i(\alpha)}c(\alpha),\ g(\alpha) = \frac{h^2(\alpha)}{i(\alpha)},$$

где $c(\alpha)$, $h(\alpha)$, $i(\alpha)$ — произвольные гладкие функции на своей области определения, то система (1), (2) при условии (3) имеет два гладких первых интеграла, а именно, (4), а также

$$\Phi_0(v;Z;\alpha) = v^2(\gamma(\alpha) + \epsilon(\alpha)Z) = C_0 = \text{const},$$

где функции $\gamma(\alpha)$ и $\epsilon(\alpha)$ имеют вид

$$\gamma(\alpha) = \gamma_0 \exp\left[-2\int_{\alpha_0}^{\alpha} \tfrac{c(\xi)}{i(\xi)} d\xi\right],$$
$$\epsilon(\alpha) = \epsilon_0 \exp\left[-\int_{\alpha_0}^{\alpha} \tfrac{c(\xi)}{i(\xi)} d\xi\right],\ \gamma_0 = \gamma(\alpha_0),\ \epsilon_0 = \epsilon(\alpha_0).$$

Внутреннее силовое поле (зависящее от трех произвольных гладких функций $c(\alpha)$, $h(\alpha)$ и $i(\alpha)$) в системе (1), (2) при условии (3) не нарушает консервативности системы. Ограничимся важным частным случаем системы (1), (2).

Как представительницу систем вида (1), (2) при условии (3) будем рассматривать следующую систему третьего порядка

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \\ Z' &= -Z\Psi(\alpha, Z), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha),\ \tilde{\delta}(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha},$$

$b_0 \geq 0$ — параметр, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как систему при отсутствии внешнего поля сил. Система (5), (6) имеет два гладких первых интеграла:

$$\Phi_0(v;Z;\alpha) = v^2(1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const},$$
$$\Phi_1(v;Z) = vZ = C_1 = \text{const}.$$

Другими словами, независимая подсистема (6) на многообразии $N^2\{Z;\alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида

$$\Phi(Z;\alpha) = \frac{1 - 2b_0 Z\delta(\alpha)}{Z^2} = C = \text{const},$$

который не имеет существенно особых точек. В силу последнего, подсистема (6) не имеет притягивающих или отталкивающих предельных множеств, позволяющих говорить о наличии в системе диссипации того или иного знака.

Итак, внутреннее силовое поле (зависящее от $b_0 > 0$) в системе (5), (6) не нарушает консервативности системы.

Добавляя следующим образом в систему (5), (6) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при наличии внутреннего ($b_0 > 0$):

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha), \\ Z' &= F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{aligned} \tag{8}$$

создается впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b_0 = 0$, т.е. при отсутствии внутреннего поля). Консервативность “подтвердилась” бы наличием в системе двух гладких первых интегралов.

Действительно, при некотором естественном условии у системы (7), (8) существует гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const}, \ \frac{dF_1(\alpha)}{d\alpha} = 2F(\alpha),$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет.

Если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (7), (8) имеет два независимых (один, вообще говоря, трансцендентный и один гладкий) первых интеграла:

$$\Phi_0(v; Z; \alpha) =$$
$$= v^2 \left(1 - b_0 Z\delta(\alpha) - b_0(Z^2 + \delta^2(\alpha)) \arctan \tfrac{\delta(\alpha)}{Z}\right) = C_0 = \text{const},$$

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + \delta^2(\alpha)) = C_1 = \text{const}.$$

Более того, как видно из вида предъявленных первых интегралов, притягивающее множество рассматриваемой системы (7), (8) может быть найдено из системы равенств $Z = \delta(\alpha) = 0$.

Модифицируем далее систему (7), (8), при наличии двух ключевых параметров $b_0, b_1 \geq 0$, введя внешнее силовое поле. Получим систему

$$v' = v\Psi(\alpha, Z), \tag{9}$$

$$\begin{array}{c} \alpha' = -Z + b_0 Z^2 \delta(\alpha) + b_1 F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{array} \tag{10}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b_0 Z^2 \tilde{\delta}(\alpha) + b_1 F(\alpha)\delta(\alpha), \;\; \tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\tilde{\delta}(\alpha)},$$

$\mu = \mathrm{const}$. Коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b_0, а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1.

Только что мы ввели такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z' системы (7), (8), и убедились, что полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b_0 = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^1\{Z; \alpha\}$ примет вид (9), (10). Как будет показано далее, только что было введено диссипативное силовое поле с помощью унимодулярного преобразования.

Если выполнено условие $F(\alpha) = \delta(\alpha)\tilde{\delta}(\alpha)$, то система (9), (10) обладает полным набором — двумя (одним гладким и одним, вообще говоря, трансцендентным) интегралами.

Литература

1. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела

в неконсервативном поле сил / М. В. Шамолин // Итоги науки и техники. Сер. “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”. — Т. 125. — М.: ВИНИТИ, 2013. — С. 5–254.

2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия / М. В. Шамолин // Доклады РАН. — 2017. — Т. 477. — № 2. — С. 168–172.

3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия / М. В. Шамолин // Доклады РАН. — 2018. — Т. 479. — № 3. — С. 270–276.

К ПРОДОЛЖЕНИЮ РОСТКОВ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[37]

Н.А. Шананин
(Москва; *nashananin@inbox.ru*)

Статья содержит описание некоторых свойств ростков гладких решений квазилинейных уравнений вида

$$(P(u) =)u_t + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t,x,u,u_x)\ D^\alpha u = f(t,x,u,u_x), \qquad (1)$$

где $(t,x) = (t,x_1,\ldots,x_n) \in \Omega \subseteq \mathcal{R}^{n+1}$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1,\ldots,n$, $u_x = (u_{x_1},\ldots,u_{x_1})$, $a_\alpha(t,x,\zeta) \in C^\infty(\Omega \times \mathcal{C}^{n+1})$ и $f_\alpha(t,x,\zeta) \in C^\infty(\Omega \times \mathcal{C}^{n+1})$. Операторам дифференцирования D_j поставим в соответствие вес 1, а оператору D_t – вес 2. Пусть $v(t,x) \in C^\infty(V)$, где $V \subset \Omega$. Тогда в обозначениях и

[37]Публикация была подготовлена по проекту № 2 в рамках договора пожертвования от 01 марта 2019 г. № 1154

терминах статьи [1] взвешенный главный символ на функции v имеет вид:

$$p_{v,2}(t,x;\tau,\xi) = i\tau + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(t,x,v(t,x),v_x(t,x))\ \xi^\alpha,$$

где $\tau \in \mathcal{R}$ и $\xi \in \mathcal{R}^n$, и, поскольку минимальный вес оператора однократного дифференцирования равен 1, совпадает с пучком старших символов $\mathcal{H}_v(t,x;\tau,\xi,h)$, определенным на $v(x)$. Мы говорим, что росток $u_{(t^0,x^0)}$ в точке $x^0 \in \Omega$ удовлетворяет уравнению (1) и писать $(P(u)-f(u))_{(t^0,x^0)} \cong 0$, если для любой бесконечно дифференцируемой функции $u(t,x)$, представляющей росток, найдется такая окрестность точки (t^0,x^0), в которой функция $u(t,x)$ является локальным решением уравнения. Мы говорим, что уравнение (1) является квазиэллиптическим на ростке $u_{(t^0,x^0)}$, если для любой представляющей росток функции $u(t,x)$ найдется такая окрестность U точки (t^0,x^0), в которой из равенства $p_{u,2}(t,x;\tau,\xi) = 0$ при любых $(t,x) \in U$ следует, что $\tau = 0$ и $\xi = 0$. Две гиперповерхности Γ_1 и Γ_2 называют эквивалентными в точке (t^0,x^0), если найдется окрестность V этой точки, такая, что $\Gamma_1 \cap V = \Gamma_2 \cap V$. Класс эквивалентных в точке (t^0,x^0) гиперповерхностей называют ростком гиперповерхности. Росток гиперповерхности $\Gamma_{(t^0,x^0)}$ назовем нехарактеристическим для оператора P на функции v, если $p_{v,2}(t^0,x^0;0,\varphi_x(t^0,x^0)) \neq 0$ для некоторой (а значит и любой) гиперповерхности $\Gamma = \{\ (t,x) \in U|\ \varphi(t,x) = 0, d\varphi \neq 0\}$, представляющей росток $\Gamma_{(t^0,x^0)}$. Если уравнение (1) является квазиэллиптическим на функции v в точке (t^0,x^0), то росток гиперповерхности в точке (t^0,x^0) является нехарактеристическим, если и только если вектор конормали (τ,ξ) в этой точке к представителям ростка удовлетворяет условию: $\xi \neq 0$. Говорят, что сужения ростков функций $u_{(t^0,x^0)}$ и $w_{(t^0,x^0)}$ на росток гиперповерхности $\Gamma_{(t^0,x^0)}$ равны и писать $u_{\Gamma_{(t^0,x^0)}} \cong w_{\Gamma_{(t^0,x^0)}}$, если для некоторых представителей ростков $u(t,x)$ и $w(t,x)$ и некотрого представителя Γ ростка гиперповерхности (а, следовательно, и для любых) найдётся такая окрестность V точки (t^0,x^0), что $(u-w)|_{\Gamma\cap V}=0$. Ростки решений квазиэллиптических на "фоновом решении" уравнений вида (1) однозначно определяются сужениями на нехарактеристические гиперповерности:

Теорема 1. *Предположим, что ростки функций* $v_{(t^0,x^0)}$ *и* $w_{(t^0,x^0)}$ *удовлетворяют уравнению* $(P(u)-f(u))_{(t^0,x^0)}\cong 0$, *причем уравнение является квазиэллиптическим на ростке* $v_{(t^0,x^0)}$ *и, кроме того, на нехарактеристическом на* $v_{(t^0,x^0)}$ *ростке гиперповерхности* $\Gamma_{(t^0,x^0)}$ *выполняются равенства* $v_{\Gamma_{(t^0,x^0)}}\cong w_{\Gamma_{(t^0,x^0)}}$ *и* $(D_ju)_{\Gamma_{(t^0,x^0)}}\cong(D_jw)_{\Gamma_{(t^0,x^0)}}$ *при* $j=1,\ldots,n$. *Тогда* $v_{(t^0,x^0)}\cong w_{(t^0,x^0)}$.

Доказательство. Предположим, что $n>1$ и ковектор $(0,\eta)\in T^*_{(t^0,x^0)}(\Omega)\setminus 0$. Возьмем произвольную функцию $v(x)$, представляющую росток $v_{(t^0,x^0)}$. Отметим, что множество ковекторов $\mathcal{M}_{(0,\eta)}=\{(\tau,\xi)\in T^*_{(t^0,x^0)}(\Omega)\mid(\tau,\xi)\not\parallel(0,\eta)\}$ при $n>1$ является связным. Вследствие квазиэллиптичности на $v_{(t^0,x^0)}$ многочлен $p_{v,2}(t^0,x^0;\tau,z\eta+\xi)$ по переменной $z\in\mathcal{C}$ не имеет вещественных корней. Нетрудно проверить, что из того, что число z^0 является коренем многочлена для ковектора $(\tau,\xi)\in\mathcal{M}_{(0,\eta)}$, следует, что число $(-z^0)$ является коренем многочлена для ковектора $(\tau,-\xi)\in\mathcal{M}_{(0,\eta)}$. Отсюда и из непрерывной зависимости корней вытекает, что для каждой неколлинеарной пары ковекторов $(0,\eta)$ и (τ,ξ) характеристический многочлен имеет два простых корня, мнимые части которых противоположны по знаку. Отсюда вытекает, что для каждой неколлинеарной пары ковекторов $(0,\eta^0)$ и (τ^0,ξ^0) существует окрестность $W\subset\Omega\times\mathcal{R}^n\times\mathcal{R}^{n+1}$ точки $(t^0,x^0,\eta^0,\tau^0,\xi^0)$, в которой характеристическое уравнение

$$p_{v,2}(t,x;\tau,z\eta+\xi)=0,\ z\in\mathcal{C},$$

имеет ровно два простых комплексных корня, причем мнимая часть каждого из корней отлична от нуля. При $n=1$

указанное свойство корней очевидно. Теперь утверждение доказываемой теоремы следует из теоремы 1 статьи [1].

Рассмотрим вопрос об однозначном продолжении ростков решений уравнений вида (1) вдоль кривых. Пусть $\gamma = \{(t^0, x(s)) \mid s \in (0,1)\}$ – непрерывный путь, содержащийся в слое $\Omega \cap \{t = t^0\}$. Мы говорим, что функция u удовлетворяет уравнению (1) вдоль кривой γ, если функция $u(t,x)$ определена и бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности пути γ и в каждой точке $(t^0, x) \in \gamma$ удовлетворяет равенству $(P(u) - f(u))_{(t^0,x)} \cong 0$.

Теорема 2. *Предположим, что функции v и w удовлетворяют уравнению (1) вдоль кривой γ и уравнение является квазиэллиптическим на ростках $v_{(t^0,x)}$ для всех $(t^0, x) \in \gamma$. Тогда из $v_{(t^0,x^0)} \cong w_{(t^0,x^0)}$ в точке $(t^0, x^0) \in \gamma$ следует $v_{(t^0,x)} \cong w_{(t^0,x)}$ во всех точках $(t^0, x) \in \gamma$.*

Доказательство. Пусть (t^0, x^1) – произвольная точка пути γ. Тогда найдется окрестность U части пути, соединяющей точки (t^0, x^0) и (t^0, x^1), в которой функции v и $w \in C^\infty(U)$, удовлетворяют уравнению (1) в каждой точке и уравнение является квазиэллиптическим на v. Теперь из полученных при доказательстве теоремы 1 свойств корней характеристического уравнения и теоремы 3 статьи [1] следует, что $v_{(t^0,x)} \cong w_{(t^0,x)}$ во всех точках (t^0, x) связной компоненты слоя $U \cap \{t = t^0\}$ и, в частности, $v_{(t^0,x^1)} \cong w_{(t^0,x^1)}$.

Пусть Ω_1 и Ω_2 – два открытых подмножества в Ω. Будем говорить, что отображение $g : C^\infty(\Omega_1) \to C^\infty(\Omega_2)$ сохраняет решения уравнения (1), если из того, что $u(t,x) \in C^\infty(\Omega_1)$ является решением уравнения на множестве Ω_1, следует, что $g \circ u = g(u)(t,x) \in C^\infty(\Omega_2)$ и является решением на Ω_2. Пусть $(t^0, x^0) \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Мы говорим, что функция $v(t,x) \in C^\infty(\Omega_1)$ g-инвариантна в (t^0, x^0), если $g \circ v|_{(t^0,x^0)} \cong v|_{(t^0,x^0)}$. Из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Предположим, что отображение g сохра-*

няет решения уравнения (1), функция $v \in C^\infty(\Omega_1)$ удовлетворяют уравнению вдоль пути $\gamma \subset \Omega_1` \cap \Omega_2 \cap \{t = t^0\}$, причем уравнение является квазиэллиптическим на ростках $v_{(t^0,x)}$ для всех $(t^0, x) \in \gamma$. Тогда из $g \circ v_{(t^0,x^0)} \cong v_{(t^0,x^0)}$ в точке $(t^0, x^0) \in \gamma$ следует $g \circ v_{(t^0,x)} \cong v_{(t^0,x)}$ во всех точках $(t^0, x) \in \gamma$.

Литература

1. *Шананин Н.А.* О слоевой структуре множеств симметрийной инвариантности решений квазилинейных уравнений. Матем. заметки, 88:6, 2010, 924-934.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ВЫРОЖДЕНИЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[38]

В.В. Шеметова, С.С. Орлов

(Иркутск; *valentina501@mail.ru, orlov_sergey@inbox.ru*)

Пусть E_1 и E_2 — вещественные банаховы пространства, $u : \mathbb{R} \to E_1$ и $f : \mathbb{R} \to E_2$ — искомая и заданная функции. Рассмотрим класс линейных дифференциальных уравнений

$$Bu'(t) = Au(t) + \alpha Au(t - h) + f(t), \;\; t > 0, \qquad (1)$$

где B и A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2 такие, что $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$ и $D(B) \subseteq D(A)$, параметр $\alpha \neq 0$. Предполагается, что оператор B *фредгольмов*, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$. Зададим естественное для уравнений с отклоняющимся аргументом начальное условие вида

$$u(t) = \omega(t), \; -h \le t \le 0, \qquad (2)$$

[38]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (научные проекты № 18-01-00643 А и № 18-51-54001 Вьет_а) и Иркутского государственного университета (индивидуальный исследовательский грант № 091-19-212).

где $h > 0$ — заданное число, функция $\omega(t) \in C\left(\left[-h; 0\right], E_1\right)$ известна и задает решение уравнения (1) на промежутке $[-h; 0]$. *Классическим* решением начальной задачи (1), (2) назовем функцию $u(t) \in C\left(\left[-h; +\infty\right), E_1\right) \cap C^1\left(\left(0; +\infty\right), E_1\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию (2).

Осуществим продолжение классического решения нулем на интервал $(-\infty; -h)$ следующим образом:

$$\tilde{u}(t) = \omega(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) + u(t)\theta(t).$$

Тогда в классе $K'_+(E_1)$ распределений с ограниченным слева носителем начальная задача (1), (2) имеет вид уравнения

$$\big(B\delta'(t) - A\delta(t) - \alpha A\delta(t-h)\big) * \tilde{u}(t) = \tilde{g}(t), \tag{3}$$

с правой частью $\tilde{g}(t) \in K'_+(E_2)$ такой, что

$$\tilde{g}(t) = f(t)\theta(t) + B\delta'(t) * \omega(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big) +$$

$$+ B\omega(0)\delta(t) - A\omega(t)\big(\theta(t+h) - \theta(t)\big).$$

Здесь и далее δ — функция Дирака, θ — функция Хевисайда. Нетрудно показать, что распределение

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{g}(t)$$

является единственным решением уравнения (3) в классе $K'_+(E_1)$ (*обобщенным* решением начальной задачи (1), (2)), где обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}(t)$ при произвольных $v(t) \in K'_+(E_2)$ и $w(t) \in K'_+(E_1)$ удовлетворяет равенствам

$$\big(B\delta'(t) - A\delta(t) - \alpha A\delta(t-h)\big) * \mathcal{E}(t) * v(t) = v(t),$$

$$\mathcal{E}(t) * \big(B\delta'(t) - A\delta(t) - \alpha A\delta(t-h)\big) * w(t) = w(t),$$

и называется *фундаментальной оператор-функцией* [1] или фундаментальным решением абстрактного функционально-дифференциального оператора $B\delta'(t) - A\delta(t) - \alpha A\delta(t-h)$.

Пусть n — размерность $N(B)$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B^*)$, а $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset E_1^*$ и $\{z_i\}_{i=1}^n \subset E_2$ — биортогональные им системы элементов, т. е.

$$\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \langle z_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}, \; i, \; j = 1, \ldots, n.$$

Введем ограниченный оператор $\Gamma : E_2 \to D(B)$ вида

$$\Gamma = \tilde{B}^{-1} = \left(B + \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle \, z_i \right)^{-1},$$

называемый *оператором Треногина — Шмидта*, элементы $\varphi_i^{(j)} \in E_1$ и $\psi_i^{(j)} \in E_2^*$, где $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p_i$, которые составляют *A-жорданов набор* оператора B и *A^*-жорданов набор* оператора B^* соответственно [2], проектор $\tilde{Q}$ вида

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)}.$$

Теорема. *Пусть линейный оператор B фредгольмов и имеет полный A-жорданов набор, тогда фундаментальное решение абстрактного функционально-дифференциального оператора $B\delta'(t) - A\delta(t) - \alpha A\delta(t-h)$ имеет вид*

$$\mathcal{E}(t) = \Gamma e^{A\Gamma t}(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})\theta(t) +$$

$$+\Gamma \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t-kh)^k}{k!} \alpha^k (A\Gamma)^k e^{A\Gamma(t-kh)}(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})\theta(t-kh) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k-j+2)} \delta^{(k-1)}(t) * \mu^k(t),$$

где $\mathbb{I}_1$ и $\mathbb{I}_2$ — тождественные операторы в E_1 и E_2, степень обобщенной функции

$$\mu(t) = \delta(t) + \sum_{l=1}^{+\infty} (-\alpha)^l \delta(t - lh)$$

понимается в смысле операции свертки.

Справедливо равенство $(\delta(t)+\alpha\delta(t-h))*\mu(t)=\delta(t)$, т.е. распределение $\mu(t)\in\mathcal{D}_+$ является обратным элементом к $\big(\delta(t)+\alpha\delta(t-h)\big)\in\mathcal{D}'_+$ в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$.

Литература

1. *Sidorov N. et al.* Lyapunov — Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 568 p.

2. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.

ON GUIDING POTENTIALS AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF TRAJECTORIES FOR RANDOM DIFFERENTIAL INCLUSIONS

Y.E. Bezmelnitsyna

(Voronezh; *bezmelnicyna@inbox.ru*)

In the recent years the sphere of applications of the method of guiding functions which is due to M.A. Krasnoselskii and A.I. Perov (see, e.g., [8] and also [3, 5] and their references) has been extended to the study of qualitative behavior of solutions of differential equations and inclusions of various types, covering, in particular, their asymptotics (see, e.g., [2, 6, 7, 9, 10]).

In the present paper we define a random nonsmooth guiding potential for random differential inclusions and apply it to the study of the asymptotic behavior of solutions for such inclusions.

In what follows we will use some known notions and notations from the theory of multimaps (see, e.g., [3, 5]).

Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be metric spaces. By the symbols $P(Y), C(Y)$ and $K(Y)$ we denote the collections of all nonempty, closed and, respectively, compact subsets of the space Y. If Y is a normed space, $Kv(Y)$ denote the collections of all nonempty convex compact subsets of Y.

Definition 1. A multimap $F : X \to P(Y)$ is called *upper semicontinuous (u.s.c.)* at the point $x \in X$ if for each open set $V \subset Y$ such that $F(x) \subset V$ there exists $\delta > 0$ such that $d_X(x, x') < \delta$ implies $F(x') \subset V$. A multimap $F : X \to P(Y)$ is called u.s.c. if it is u.s.c. at each point $x \in X$.

Let I be a closed subset of $\mathbb{R}$ with the Lebesgue measure.

Definition 2. A multifunction $F : I \to K(Y)$ is called *measurable* if, for each open subset $W \subset Y$, its pre-image $F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$ is the measurable subset of$I$.

Let (Ω, Σ, μ) be a complete probability space.

Definition 3. (see [1]). Multimap $\mathcal{F}\colon \Omega \times X \to C(Y)$ is called a *random multioperator* if it is product-measurable, i.e. measurable w.r.t. $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$, where $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ is the smallest σ-algebra on $\Omega \times X$ which contains all the sets $A \times B$, where $A \in \Sigma$ and $B \in \mathbb{B}(X)$ and $\mathbb{B}(X)$ denotes the Borel σ-algebra on X. If, moreover, $\mathcal{F}(\omega, \cdot)\colon X \to C(Y)$ is u.s.c. for all $\omega \in \Omega$, then $\mathcal{F}$ is called a *random u-multioperator*.

We consider the following Cauchy problem for a random differential inclusion of the form:

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega, t, x(\omega, t)), \tag{1}$$

under assumptions that the random u-multioperator $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ satisfies the sublinear growth condition:
there exists a function $\alpha : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ such that (i) for each $\omega \in \Omega$ a function $\alpha(\cdot, t)$ is measurable, (ii) a function $\alpha(\omega, \cdot)$ is locally integrable, and we have for each $\omega \in \Omega$

$$\|\mathcal{F}(\omega, t, x)\| \le \alpha(\omega, t)(1 + \|x\|) \text{ for a.e. } t \in \mathbb{R};\ x \in \mathbb{R}^n.$$

By a *solution of inclusion (1) on* $\mathbb{R}$ we mean a function $x : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, such that (j) $x(\cdot, t)$ is measurable for a.e. $t \in \mathbb{R}$; (jj) $x(\omega, \cdot)$ is absolutely continuous for each $\omega \in \Omega$; satisfying for each $\omega \in \Omega$ inclusion (1) for a.e. $t \in \mathbb{R}$ and the initial condition at almost every point

$$x(\omega, 0) = x_0. \tag{2}$$

Let us recall some notions of non-smooth analysis (see [4]).

Let V be a locally Lipschitz function on the space $\mathbb{R}^n$. For $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{R}^n$ *the Clarke generalized derivative* $V^0(x_0;\nu)$ at x_0 along the direction ν is given by the formula

$$V^0(x_0;\nu) = \overline{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0+}}} \frac{V(x+t\nu) - V(x)}{t},$$

where $x \in \mathbb{R}^n$. Then *the Clarke generalized gradient* $\partial V(x)$ of the function V at the point x_0 is defined in the following way:

$$\partial V(x_0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \langle x, \nu \rangle \le V^0(x_0;\nu) \quad \text{for all } \ \nu \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Recall (see, e.g., [4]) that a locally Lipschitz function $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called *regular* if for each $x \in \mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{R}^n$ there exists the derivative along the direction $V'(x,\nu)$ and it coincides with $V^0(x,\nu)$. It is known that convex functions are regular.

Definition 4. A map $V \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called a *random nonsmooth potential* if the following two conditions are satisfied: (i) $V(\cdot, x) \colon \Omega \to \mathbb{R}$ is measurable for every $x \in \mathbb{R}^n$; (ii) $V(\omega, \cdot) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a regular function for every $\omega \in \Omega$. Denote by $\mathfrak{V}$ the collection of all random nonsmooth potentials $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ such that for each $\omega \in \Omega$ the coercivity condition $\lim_{\|x\| \to +\infty} V(\omega, x) = -\infty$ holds true.

Notice that, given a function $V \in \mathfrak{V}$, for each $r > 0$ and $\omega \in \Omega$ there exists $k_\omega(r) > r$ such that if $\alpha_r(\omega) := \inf\{V(\omega, x), \|x\| \le r\}$, then for each $\omega \in \Omega$ we have $V(\omega, x) < \alpha_r(\omega), \ \|x\| \ge k_\omega(r)$.

Now, let $g : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ be a given function such that (j) $g(\cdot, t)$ is measurable for a.e. $t \in \mathbb{R}_+$; (jj) $g(\omega, \cdot)$ is absolutely continuous; (jjj) $\inf\{g(\omega, t) : \ \omega \in \Omega, \ t \in \mathbb{R}\} \ge 1$.

Definition 5. A random nonsmooth potential $V \in \mathfrak{V}$ is called a *random nonsmooth guiding potential for inclusion (1) along the function* g if for each $\omega \in \Omega$ there exists $r_0(\omega) > 0$ such that $g(\omega, t)\|x\| \geq r_0(\omega),\ t \in \mathbb{R}$ implies for each $\omega \in \Omega$

$$\langle v, g'(\omega, t)x + g(\omega, t)y\rangle \geq 0, \quad \text{if } t > 0;$$

$$\langle v, g'(\omega, t)x + g(\omega, t)y\rangle \leq 0, \quad \text{if } t < 0;$$

for each $y \in F(\omega, t, x),\ v \in \partial V(g(\omega, t)x)$.

Theorem 1. If $V \in \mathfrak{V}$ is a random nonsmooth guiding potential for inclusion (1) along the function g then each solution of Cauchy problem (1), (2) satisfies the estimate

$$\|x(\omega, t)\| \leq k_V(\omega) \cdot \frac{1}{g(\omega, t)}, \quad \omega \in \Omega,\ t \in \mathbb{R},\ k_V(\omega) > 0.$$

Bibliography

1. *Andres J., Górniewicz L.* Random topological degree and random differential inclusions. Topol. Meth. Nonl. Anal. 40 (2012), 337–358.

2. *Avramescu C.* Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations and generalized guiding functions. Electronic J. of Qualitive Theory of Differ. Equ. 13 (2003), 1-9.

3. *Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V.* Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions - 2nd ed. Moscow: Librokom, 2011.

4. *Clarke F.H.* Optimization and Nonsmooth Analysis - 2nd ed. Classics in Applied Mathematics, 5. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia: PA, 1990.

5.*Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings - 2nd ed. Berlin: Springer, 2006.

6. *Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C.* On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions. Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. 34 (2014), 219–227.

7. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* On asymptotic behavior of solutions of differential inclusions and the method of guiding functions. Differential Equations. 51 (2015), 711–716.

8. *Krasnosel'skii M.A.* The Operator of Translation Along the Trajectories of Differential Equations. Translations of Mathematical Monographs - Vol. 19. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1968.

9. *Obukhovskii V., Kamenskii M., Kornev S., Liou Y.-C.* On asymptotics of solutions for a class of differential inclusions with a regular right-hand part. Journal of Nonlinear and Convex Analysis. 18 (2017), no. 5, 967–975.

10. *Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C.* Nonsmooth integral guiding potentials and asymptotic behavior of solutions for inclusions with causal multioperators. Optimization (2019)

ON PERIODIC SOLUTIONS OF RANDOM FUNCTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSIONS

E.N. Getmanova
(Воронеж; *ekaterina_getmanova@bk.ru*)

Let us mention that the method of guiding functions was developed by Krasnoselskii and Perov (see, e.g., [14]) for the investigation of periodic oscillations in dynamical systems governed by differential equations. The notion of guiding function was generalized in several directions (see, e.g., [1, 2, 4-13]).

Based on the approach given in [1] we present the notion of nonsmooth random generalized integral guiding functions and use those to prove some existence results of random solutions to periodic problem of random functional differential inclusion.

In what follows we will use some known notions and notations from the theory of multimaps (see, e.g., [2, 4]).

Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be metric spaces. By the symbols $P(Y)$, $C(Y)$ and $K(Y)$ we denote the collections of all nonempty, closed and, respectively, compact subsets of the space Y. If Y

is a normed space, $Kv(Y)$ denote the collections of all nonempty convex compact subsets of Y.

Definition 1. A multimap $F : X \to P(Y)$ is called *upper semicontinuous (u.s.c.)* at the point $x \in X$ if for each open set $V \subset Y$ such that $F(x) \subset V$ there exists $\delta > 0$ such that $d_X(x, x') < \delta$ implies $F(x') \subset V$. A multimap $F : X \to P(Y)$ is called u.s.c. if it is u.s.c. at each point $x \in X$.

Let I be a closed subset of $\mathbb{R}$ with the Lebesgue measure.

Definition 2. A multifunction $F : I \to K(Y)$ is called *measurable* if, for each open subset $W \subset Y$, its pre-image $F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$ is the measurable subset of$I$.

Let (Ω, Σ, μ) be a complete probability space and $I = [0, T]$.

Definition 3. (see [1]). Multimap $\mathcal{F}\colon \Omega \times X \to C(Y)$ is called a *random multioperator* if it is product-measurable, i.e. measurable w.r.t. $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$, where $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ is the smallest σ-algebra on $\Omega \times X$ which contains all the sets $A \times B$, where $A \in \Sigma$ and $B \in \mathbb{B}(X)$ and $\mathbb{B}(X)$ denotes the Borel σ-algebra on X. If, moreover, $\mathcal{F}(\omega, \cdot)\colon X \to C(Y)$ is u.s.c. for all $\omega \in \Omega$, then $\mathcal{F}$ is called a *random u-multioperator*.

For $\tau > 0$ we denote by the symbol $\mathcal{C}$ the space $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ of continuous functions $x : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ with norma $\|x\| = \sup_{t\in[-\tau,0]} \|x(t)\|$. For $x(\cdot) \in C([-\tau, T]; \mathbb{R}^n)$, the symbol $x_t \in \mathcal{C}$ denotes the function defined as $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

We consider the periodic problem for a random functional differential inclusion of the following form:

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}\big(\omega, t, x_t\big), \tag{1}$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \tag{2}$$

where the multimap $\mathcal{F}\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathcal{C} \multimap \mathbb{R}^n$ satisfies conditions:

$(\mathcal{F}_t)$ multifunction $\mathcal{F}$ is a T-periodic in the second argument;

$(\mathcal{F}1)$ $\mathcal{F}\colon \Omega \times I \times \mathcal{C} \to Kv(\mathbb{R}^n)$ is a random u-multioperator;

$(\mathcal{F}2)$ there exists a function $c : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ such that (i) for each $\omega \in \Omega$ a function $c(\cdot, t)$ is measurable, (ii) a function $c(\omega, \cdot)$

is locally integrable, and we have for each $\omega \in \Omega$ $\|\mathcal{F}(\omega,t,\phi)\| := \sup\{|z| \colon z \in \mathcal{F}(\omega,t,\phi)\} \le c(\omega,t)(1+|\phi|)$.
From ($\mathcal{F}1$)-($\mathcal{F}2$) it follows that the superposition multioperator $\mathcal{P}_{\mathcal{F}} \colon \Omega \times C(I,\mathbb{R}^n) \to P(L^2(I,\mathbb{R}^n))$, $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega,x) = \{f \in L^2(I,\mathbb{R}^n) \colon f(s) \in \mathcal{F}(\omega,s,x(s)), \text{for a.e. } s \in I\}$ is well defined.

By a *random solution* of problem (1), (2) we mean a function $\xi \colon \Omega \times I \to \mathbb{R}^n$ such that

(i) the map $\omega \in \Omega \to \xi(\omega,\cdot) \in C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$ is measurable;

(ii) for each $\omega \in \Omega$ absolutely continuous function $\xi(\omega,\cdot) \in C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$ satisfies (1), (2) for a.e. $t \in [-\tau,T]$.

Let us recall some notions of nonsmooth analysis (see [3]).

Let V be a locally Lipschitz function on the space $\mathbb{R}^n$. For $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{R}^n$ *the Clarke generalized derivative* $V^0(x_0;\nu)$ at x_0 along the direction ν is given by the formula $V^0(x_0;\nu) = \overline{\lim\limits_{x\to x_0, t\to 0+}} \frac{V(x+t\nu)-V(x)}{t}$, where $x \in \mathbb{R}^n$. Then *the Clarke generalized gradient* $\partial V(x)$ of the function V at the point x_0 is defined as $\partial V(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,\nu\rangle \le V^0(x_0;\nu) \text{ for all } \nu \in \mathbb{R}^n\}$. Recall that a locally Lipschitz function $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called *regular* if for each $x \in \mathbb{R}^n$ and $\nu \in \mathbb{R}^n$ there exists the derivative along the direction $V'(x,\nu)$ and it coincides with $V^0(x,\nu)$.

Definition 4. A map $V \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called a *random nonsmooth potential* if the following two conditions are satisfied: (i) $V(\cdot,x) \colon \Omega \to \mathbb{R}$ is measurable for every $x \in \mathbb{R}^n$; (ii) $V(\omega,\cdot) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is a locally Lipschitz for every $\omega \in \Omega$.

Definition 5. A random nonsmooth potential $V \colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is said to be a *random nonsmooth generalized integral guiding function* for inclusion (1) if the following conditions hold: (i) there exists $R_0 > 0$ such that $0 \notin \partial V(\omega,x)$ for all $(\omega,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \colon |z| \ge R_0$; (ii) the function $V(\omega,\cdot)$ is regular for every $\omega \in \Omega$; (iii) there exists $N > 0$ such that for all $\omega \in \Omega$ from $x \in C(I,\mathbb{R}^n)$ with $\|x\|_2 \ge N$, it follows that $\int_0^T \langle \upsilon(t), f(t)\rangle dt \ge 0$ for all $\upsilon \in \mathcal{P}_{\partial V}(\omega,x)$ and for all $f \in \mathcal{P}_F(\omega,x)$.

Theorem 1. Let conditions $(\mathcal{F}_t), (\mathcal{F}1), (\mathcal{F}2)$ hold. If there exists a regular random nonsmooth generalized integral guiding function for inclusion (1) such that $\lim_{\|x\|\to+\infty} V(\omega, x) = +\infty$, then problem (1), (2) has a random solution.

Bibliography

1. *Andres J., Górniewicz L.* Random topological degree and random differential inclusions. Topol. Meth. Nonl. Anal. 40 (2012), 337–358.

2. *Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V.* Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions - 2nd ed. Moscow: Librokom, 2011.

3. *Clarke F.H.* Optimization and Nonsmooth Analysis - 2nd ed. Classics in Applied Mathematics, 5. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia: PA, 1990.

4. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings - 2nd ed. Berlin: Springer, 2006.

5. *Kornev S.V.* On the method of multivalent guiding functions to the periodic problem of differential inclusions. Autom. Remote Control. 64 (2003), 409–419.

6. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* On nonsmooth multivalent guiding functions. Differ. Equ. 39 (2003), 1578–1584.

7. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* On some developments of the method of integral guiding functions. Funct. Differ. Equ. 12 (2005), 303–310.

8. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* Non-smooth guiding potentials in problems on forced oscillations. Autom. Remote Control. 68 (2007), 1–8.

9. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* On localization of the guiding function method in the periodic problem of differential inclusions. Russian Mathematics (Iz. VUZ). 5 (2009), 23–32.

10. *Kornev S.V.* Nonsmooth integral directing functions in the problems of forced oscillations. Autom. Remote Control. 76 (2015), 1541–1550.

11. *Kornev S.V.* Multivalent guiding function in a problem

on existence of periodic solutions of some classes of differential inclusions. Russian Mathematics (Iz. VUZ). 11 (2016), 14–26.

12. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V., Zecca P.* On the method of generalized integral guiding functions in the periodic problem of functional differential inclusions. Differ. Uravn. 52 (2016), no. 10, 1335—1344.

13. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V., Zecca P.* Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators. Appl. Anal. 96 (2017), issue 3, 418–428.

14. *Krasnosel'skii M.A.* The Operator of Translation Along the Trajectories of Differential Equations. Translations of Mathematical Monographs - Vol. 19. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1968.

APPROXIMATION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES[39]

S. Piskarev
(Москва; *piskarev@gmail.com*)

In this talk we have a deal with the well-posedness and approximation for nonhomogeneous fractional differential equations in Banach spaces E:

$$(\mathbf{D}_t^\alpha u)(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0, T]; \quad u(0) = x,$$

where $\mathbf{D}_t^\alpha$ is the Caputo-Dzhrbashyan derivative $0 < \alpha < 1$. Follow [1] we get the necessary and sufficient condition for the well-posedness of nonhomogeneous fractional Cauchy problems in the spaces $C_0^\beta([0, T]; E)$. Then by using implicit difference scheme and explicit difference scheme, we deal with the full discretization of the solutions of nonhomogeneous fractional

[39]This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (Grant Nos. 20-51-50002 and 20-01-00015).

differential equations in time variables and the same way as in [2] we get the stability of the schemes and the order of convergence.

We discuss also discretization of semilinear problem.

Bibliography

1. *Krein S.* Linear differential equations in Banach space. M.: Nauka, 1987. 408 c.

2. *R. Liu, Miao Li, S. Piskarev.* The Order of Convergence of Difference Schemes for Fractional Equations. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **38** (6) (2017), 754—769.

Оглавление