РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Л.А. Грюнвальд
(Иркутск; *lfb_ o@yahoo.co.uk*)

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, u — неизвестная, а f — заданная функции аргумента $t \geq 0$ со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим уравнение

$$Bu - \mathscr{I}^{\alpha}_{0+}(Au) = f, \tag{1}$$

с правосторонним оператором Римана–Лиувилля дробного интегрирования порядка α [1]

$$\mathscr{I}^{\alpha}_{0+} v = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds,$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера аргумента $0 < \alpha < 1$, B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $D(B) \subseteq D(A)$ и $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$. Оператор B фредгольмов, т. е. $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$ и $\overline{R(B)} = R(B)$.

Теорема 1. *Пусть $N(B) = \varnothing$ и $f(t) \in C([0; +\infty); E_2)$, тогда уравнение (1) имеет единственное непрерывное на луче $[0; +\infty)$ решение вида*

$$u(t) = B^{-1}\left(f(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial E_\alpha\big((t-s)^\alpha A B^{-1}\big)}{\partial t} f(s) ds \right),$$

где $E_\alpha(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k\alpha+1)}$ — функция Миттаг-Леффлера.

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B)$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис в $N(B^*)$. Будем предполагать, что фредгольмов оператор B имеет полный A-жорданов набор $\{\varphi_i^{(j)},\, j=\overline{1,p_i},\, i=\overline{1,n}\}$. В этом случае, как известно из [2], оператор B^* тоже имеет полный A^*-жорданов набор $\{\psi_i^{(j)},\, j=\overline{1,p_i},\, i=\overline{1,n}\}$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\langle f(t),\psi_i^{(j)}\rangle \in C_{[0;+\infty)}^{[(p_i+1-j)\alpha]+1},\; j=\overline{1,p_i},\; i=\overline{1,n},$$

тогда, если при всех $j=\overline{1,p_i}$, $i=\overline{1,n}$ выполняются условия

$$\langle f(0),\psi_i^{(j)}\rangle^{(k-1)}=0,\; k=\overline{1,[(p_i+1-j)\alpha]+1}, \tag{2}$$

то уравнение (1) имеет единственное непрерывное на луче $[0;+\infty)$ решение вида

$$u(t)=\Gamma\Bigg((\mathbb{I}_2-\tilde{Q})f(t)+\int\limits_0^t \frac{\partial E_\alpha\big((t-s)^\alpha A\Gamma\big)}{\partial t}(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})f(s)ds\Bigg)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\mathscr{D}^{(p_i-k+2-j)\alpha}\langle f(t),\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(k)},$$

где Γ — регуляризатор Треногина, $\mathbb{I}_2$ — тождественный оператор на E_2, $\tilde{Q}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$ — проектор.

Правосторонний оператор Римана–Лиувилля дробного дифференцирования порядка $\beta>0$ [1] на классе функций $g(t)\in C_{[0;+\infty)}^{[\beta]+1}$ задается следующим образом:

$$\mathscr{D}_{0+}^{\beta}g=\sum_{k=1}^{[\beta]+1}\frac{g^{(k-1)}(0)}{\Gamma(k-\beta)\,t^{\beta-k+1}}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\{\beta\})}\int\limits_0^t (t-s)^{-\{\beta\}}g^{([\beta]+1)}(s)ds.$$

Теорема 3. *Если в теореме 2 не выполняются условия разрешимости (2), то уравнение (1) имеет единственное непрерывное на интервале* $(0; +\infty)$ *решение вида*

$$u(t) = \Gamma\left((\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) f(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial E_\alpha\big((t-s)^\alpha A\Gamma\big)}{\partial t} (\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) f(s) ds \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i+1-k} \left[\sum_{m=1}^{[\beta_i(k;\,j)]+1} \frac{\langle f(0), \psi_i^{(j)} \rangle^{(m-1)}}{\Gamma(m - \beta_i(k;\,j))\, t^{\beta_i(k;\,j)-m+1}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{-\{\beta_i(k;\,j)\}} \langle f(s), \psi_i^{(j)} \rangle^{([\beta_i(k;\,j)]+1)}}{\Gamma(1 - \{\beta_i(k;\,j)\})} ds \right] \varphi_i^{(k)},$$

которое имеет особенность типа полюса порядка $p\alpha$. *Здесь* $\beta_i(k;\,j) = (p_i - k + 2 - j)\alpha$ *и* $p = \max\{p_i\}$.

Как показано в [3], решение вырожденного уравнения

$$Bu - k * (Au) = f,$$

с аналитическим в точке $t = 0$ ядром $k : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, при отказе от условий его разрешимости является сингулярным распределением. Оказалось, если вырожденное уравнение имеет еще и “плохое“ ядро, например слабосингулярное, как в (1), то ситуация неожиданно улучшается, а именно, в этом случае решение сохраняется в классе “обычных“ функций.

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. М.: Наука и техника, 1987. 688 с.

2. *Вайнберг М.М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.

3. *Орлов С. С.* О порядке сингулярности обобщенного решения интегрального уравнения Вольтерра типа свертки в банаховых пространствах. Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2014. Т. 10. С. 76–92.