Отражение на семействе гипербол

А. Н. Турашова, А. В. Хмельницкая
(Зеленодольск; *annaturaszowa@gmail.com*)

Рассмотрим частицу, движущуюся в центрально симметричном поле по гиперболе. Допуская отражение на следе частицы по правилам геометрической оптики, мы определим кривую, состоящую из точек отражения луча, идущего из точки S в точку P на семействе гипербол, задаваемых общей формулой $y = \frac{a}{c} + c$, где $a > 0$, a – константа, c – параметр, определяющий конкретную кривую семейства. Ось OY является общей асимптотой этого семейства.

Для простоты описания точку источника S совместим с началом координат точкой 0.

Точка приёмника p имеет координаты $(0; p)$.

Закон отражения гласит: падающий и отражённый лучи лежат в одной плоскости с нормалью к отражающей поверхности в точке падения, и эта нормаль делит угол между лучами на две равные части.

Обозначим касательный вектор к кривой через
$\vec{\tau} = \{1, y'_k\}$, в нашем случае $\vec{\tau} = \{1, -\frac{a}{x^2}\}$.

Построим нормаль $\vec{N}$ к $\vec{\tau}$ в точке M, используя вектор $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$ и $\overrightarrow{PM} = \{x - p, y\}$:

$$\vec{N} = \frac{1}{|\overrightarrow{OM}|}\overrightarrow{OM} + \frac{1}{|\overrightarrow{PM}|}\overrightarrow{PM}$$

Тогда условие $(\vec{\tau}, \vec{N}) = 0$ выражает закон отражения в точке M для луча, идущего из начала координат и попадающего в точку P.

В координатах на плоскости из него получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2}\left(p - x + \frac{ay}{x^2}\right) = \sqrt{(p - x)^2 + y^2}\left(x - \frac{ay}{x^2}\right)$$

— это соотношение определяет искомую кривую.

Заметим, что множество касательных векторов $\{\vec{\tau}_x\}$ для каждого фиксированного x и любого y (а в случае пространства и любого z) состоит из параллельных векторов. Используя это свойство для изучения кривой отражения было получено утверждение, носящее общий характер:

Теорема 1. *Пусть даны две точки S и P и несрединная прямая L, перпендикулярная к отрезку SP. Пусть так же дан несобственный пучок прямых, непараллельных отрезку SP и L. Существует не более трёх точек пересечения пучка с L — M_i, в которых углы, образуемые отрезками SM_i и M_iP с L, равны.*

Приведённая теорема объясняет появление при определённых соотношениях между a и p несвязанного с кривой овала в четвёртой четверти на плоскости и несвязанного с поверхностью эллипсоидального тела в случае трёх измерений. Для трёхмерного случая поверхность отражения задаётся соотношением:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(p-x+\frac{ay}{x^2}\right)=\sqrt{(p-x)^2+y^2+z^2}\left(x-\frac{ay}{x^2}\right)$$

Поведение кривых, полученных сечением плоскостью $z=z_0$, позволило определить вид поверхности.

Ниже для иллюстрации приводятся сечения $z=0$:

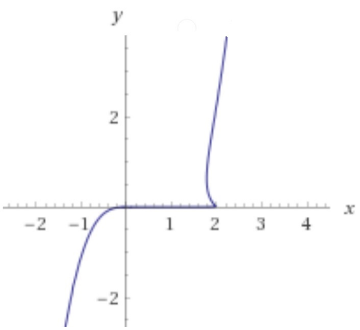

Рис.1

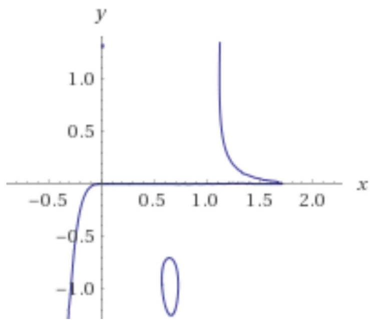

Рис.2

На левом рисунке кривая при $a = 2$, $p = 2$, на рисунке справа кривая состоит из двух несвязанных частей при $a = \frac{1}{13}$ и $p = 2$.

Литература

1. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. — 129 с.

2. *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и их особенности. М.: Мир, 1988. — 262 с.