Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Материалы
Международной конференции
Воронежская зимняя математическая школа

(28 января – 2 февраля 2021 г.)

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2021

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

С56 **Современные методы теории функций и смежные проблемы** : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2021 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. — 333 с.
ISBN 978-5-9273-3153-6

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова и Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН. Тематика охватывает широкий спектр проблем теории функций и функционального анализа, качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, оптимального граничного управления, математического моделирования и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средней школе и вузах.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9273-3153-6

Содержание

Contents

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.Э. Абдурагимов (Махачкала, ДГУ)
gusen_e@mail.ru

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + f\left(t, (Tx)(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \; x(1) = 0, \tag{2}$$

где $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна, возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Теорема 1. *Предположим, что* $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ *— положительный на конусе* $\tilde{K}$ *[1] оператор и выполнено условие*

$$\psi(u) \leqslant f(t,u) \leqslant bu^{p/q},$$

где $p > q > 1$, $b > 0$, $1 < q < \infty$, $\psi(u)$ *— такая неотрицательная неубывающая функция, что* $\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{u} = \infty$

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы 1 краевая задача (1)-(2) имеет единственное положительное решение, если*

$$\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}}\gamma < 4,$$

где $\theta(t) \equiv f'_u\left(t, \sigma\left(T1\right)(t)\right)$, $\sigma = \left(\dfrac{1}{b\gamma^{\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{q}{p-q}}$, γ *— норма оператора* $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ *и* $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

Литература

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений / М.А. Красносельский. — М. : Физматгиз, 1962. — 396 с.

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

А.Ш. Адхамова (Москва, РУДН)
ami_adhamova@mail.ru

В работе [1] Н. Н. Красовский сформулировал и изучил задачу об успокоении системы с последействием, описываемой дифференциально-разностным уравнением запаздывающего типа. А. Л. Скубачевский в работе [2] обобщил задачу Н. Н. Красовского на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием. В статье [3] рассматривается модель с постоянными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. В статьях [4], [5] была исследована задача об успокоении системы с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями.

Рассмотрим линейную нестационарную систему управления, описываемую системой дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau)+\sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau)=u(t), \quad 0<t, \qquad (1)$$

$y(t)=(y_1(t),\dots,y_n(t))^T, u(t)=(u_1(t),\dots,u_n(t))$,

где $A_m(t)$ — $n\times n$ матрица с элементами, которые являются функциями из $C^1(\mathbb{R}), B_m(t)$ — $n\times n$ матрица с элементами, которые являются функциями из $C(\mathbb{R}), A_m=\{a_{ij}(t)\}_{i,j=1\dots n}$, $B_m=\{b_{ij}(t)\}_{i,j=1\dots n}$, запаздывание $\tau>0$ — константа и $u(t)$ — вектор-функция управления.

Предыстория системы опеределяется начальным условием:

$$y(t)=\varphi(t),\ t\in[-M\tau,0], \qquad (2)$$

где $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))$ заданная вектор-функция.

Мы рассмотрим задачу о приведении системы (1)—(2) в положение равновесия. Найдем такое управление $u(t),\ 0<t<T$, что:

$$y(t)=0,\ t\in[T-M\tau,T], \qquad (3)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

где $T \geqslant (M+1)\tau$.

Из всевозможных управлений будем искать управление, доставляющее минимум функционалу:

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала энергии

$$J(y) = \int_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m(t) y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) y(t - m\tau) \right|^2 dt \to min \tag{4}$$

с краевыми условиями (2) - (3).

В работе была установлена связь между связь между вариационной задачей для нелокальных функционалов, описывающих многомерную систему управления с последействиями, и соответствующей краевой задачей для систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка, доказана однозначная разрешимость вариационной и краевой задач и гладкость обобщенного решения краевой задачи.

Литература

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. / Н.Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с.

2. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. / A.L. Skubachevskii — Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997. — 298 p.

3. Adkhamova A.S, Skubachevskii A.L. Damping Problem for Multidimensional Control System with Delays / A.S. Adkhamova, A.L. Skubachevskii // Distributed Computer and Communication Networks. — 2016. — P. 612-623.

4. Адхамова А.Ш., А.Л. Скубачевский, Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием / А.Ш. Адхамова, А.Л. Скубачевский // Современная математика. Фундаментальные направления. — РУДН, М., 2019. — Т. 65, № 4. — С. 547-–556.

5. Адхамова А.Ш., А.Л. Скубачевский, Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа / А.Ш. Адхамова, А.Л. Скубачевский // Доклады академии наук. — 2020. — Т. 490. — С. 81–84.

О НАИЛУЧШИХ n–ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев (Нур-Султан, Казахстанский филиал МГУ)
akishev_g@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m–мерное евклидово пространство точек $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{I}^m = [0,1]^m$ — m–мерный куб и $\mathbb{T}^m = 2\pi\mathbb{I}^m$. Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех вещественнозначных измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$, которые имеют 2π–период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left\{ \frac{\tau}{p} \int\limits_0^1 \big(f^*(t)\big)^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}}, \; 1 < p < \infty, 1 \leqslant \tau < \infty,$$

конечна, где $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$, $\overline{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [1], с. 213–216).

Введем обозначения $a_{\overline{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle \overline{n}, 2\pi\overline{x}\rangle}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}$ и $\langle \overline{y}, \overline{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$;

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle \overline{n}, 2\pi\overline{x}\rangle},$$

где

$$\rho(\overline{s}) = \left\{ \overline{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad [2^{s_j-1}] \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m \right\},$$

$[a]$—целая часть числа a, $\overline{s} = (s_1, ..., s_m)$, $s_j = 0, 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим величину $e_n(f)_{p,\tau}$ — наилучшее n–членное тригонометрическое приближение функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $n \in N$.

Для функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ положим

$$f_{l,\overline{r}}(\overline{x}) = \sum_{l \leqslant \langle \overline{s}, \overline{\gamma}\rangle < l+1} \delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}),$$

где $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\gamma_1 = \ldots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant \gamma_m$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$.

---

[1] Работа выполнена в рамках грантового финансирования МОН РК (Проект AP08855579).

Рассмотрим класс

$$W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau} = \{f \in L_1(\mathbb{T}^m): \ \|f_{l,\overline{r}}\|_{q,\tau} \leqslant 2^{-la}\overline{l}^{(\nu-1)b}\},$$

где число $a > 0$, $b \in (-\infty, +\infty)$, $\overline{l} = \max\{1, l\}$. Введем обозначение

$$\|f\|_{W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau}} = \sup_{l \in \mathbb{Z}_+} \|f_{l,\overline{r}}\|_{q,\tau} 2^{la}\overline{l}^{-(\nu-1)b}, 1 < q, \tau < \infty.$$

В случае $\tau = q$ точные по порядку оценки наилучших n–членных тригонометрических приближений функций из класса $W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau}$ в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < q \leqslant p < \infty$ установил В.Н. Темляков [2], [3].

Для класса $W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau_1}$ положим

$$e_n(W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2} = \sup_{f \in W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau_1}} e_n(f)_{p,\tau_2}, \ 1 < q, p, \tau_1, \tau_2 < \infty.$$

В докладе будут представлены следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $1 < q < p < 2$ *и* $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$ *и* $b \in \mathbb{R}$.

1. Если $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ *и* $1 < \tau_1 < \tau_2 \leqslant 2$, *то*

$$e_n(W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2} \leqslant C n^{-(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log_2 n)^{(\nu-1)(a+b+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}.$$

2. Если $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < a < \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ *и* $1 < \tau_1 < \tau_2 \leqslant 2$, *то*

$$e_n(W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2} \asymp n^{-(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log_2 n)^{(\nu-1)b}.$$

3. Если $a = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}$ *и* $1 < \tau_1 < \tau_2 \leqslant 2$, $b + 1/(\nu-1)\tau_2 > 0$, *то*

$$e_n(W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2} \asymp n^{-(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2})}(\log_2 n)^{(\nu-1)b}(\log_2 \log_2 n)^{\frac{1}{\tau_1}}.$$

4. Если $a > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ *и* $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$, $2 < \tau_1 < \infty$, *то*

$$e_n(W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2} \leqslant C n^{-(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log_2 n)^{(\nu-1)(a+b+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}.$$

Теорема 2. *Пусть* $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots r_m$, $1 < q \leqslant 2 < p < \infty$, $1 < \tau_1 \leqslant \tau_2 < \infty$, $(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p\tau_1} - \frac{1}{q\tau_2})\tau_2^{'} < a < \frac{1}{q}$, $\tau_2^{'} = \frac{\tau_2}{\tau_2-1}$ *и* $b \in \mathbb{R}$.

Если $1 < q < 2$, *то*

$$e_n(W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2}$$

$$\asymp n^{-\frac{p}{2}(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log_2 n)^{(\nu-1)\frac{p}{\tau_2'}(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log_2 n)^{(\nu-1)(b+\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}.$$

Если $q = 2 < p < \infty$ *и* $2 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \infty$, *то*

$$e_n(W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2}$$

$$\leqslant Cn^{-\frac{p}{2}(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}(\log_2 n)^{(\nu-1)\frac{p}{\tau_2'}(a+\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}(\log_2 n)^{(\nu-1)b+\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_1}}.$$

Теорема 3. *Пусть* $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots r_m$, $1 < q \leqslant 2 < p < \infty$, $1 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$, *и* $b \in \mathbb{R}$.

Если $a = \frac{1}{q}$, *то*

$$e_n(W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2} \asymp n^{-\frac{1}{2}}(\log_2 n)^{(\nu-1)(b+1-\frac{1}{\tau_1})+1}.$$

Если $a > \frac{1}{q}$, *то*

$$e_n(W^{a,b,\overline{r}}_{q,\tau_1})_{p,\tau_2} \leqslant Cn^{-(a+\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}(\log_2 n)^{(\nu-1)(a+b-\frac{1}{q})+\frac{1}{\tau_1'}}.$$

В утверждениях теорем 1–3 натуральное число $n > n_0$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$ и положительные числа C не зависят от n.

В случае $\tau_1 = q$, $\tau_2 = p$ и $r_1 = \ldots = r_m$ из пунктов 1–3 теоремы 1 следует теорема 1.3 в [3], а из теорем 2 и 3 получим соответствующие оценки в теореме 3.2 и теореме 3.5 [3].

Литература

1. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах /И. Стейн, Г. Вейс. — М. : Мир, 1974. — 333 с.

2. Темляков В.Н. Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости / В.Н. Темляков // Мат.сб. — 2015. — Т.206, № 11. — С. 131–160.

3. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness /V. N. Temlyakov // Constr. approx. — 2015. — Vol.45, № 3. — P. 467–495.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

З.С. Алиев, Я.Т. Мехралиев, Э.Г. Юсифова (Баку, БГУ, ИММ НАН Азербайджана)

z_ aliyev@mail.ru, elmi.haciyeva79@mail.ru, yashar_ aze@mail.ru

Пусть $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < 1,\, 0 < t < T\}$, где T — некоторое фиксированное положительное число. В области Q_T рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка

$$u_{ttt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \qquad (1)$$

Для уравнения (1) поставим следующую обратную задачу(см. [1]): найти функции $u = u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$, $a = a(t)$, $t \in [0,T]$, связанные уравнением (1) и такие, что для функции $u(x,t)$ выполняются начальные (интегральные) условия

$$u(x,0) = \varphi_0(x) + \int\limits_0^T p_0(t)\, u(x,t)\, dt,$$
$$u_t(x,T) = \varphi_1(x) + \int\limits_0^T p_1(t)\, u(x,t)\, dt,$$
$$u_{tt}(x,0) = \varphi_2(x) + \int\limits_0^T p_2(t)\, u(x,t)\, dt,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

граничные условия

$$u_x(0,t) = u(1,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

и условия переопределения

$$u(0,t) + \int_0^1 q(x)\, u(x,t)\, dx = h(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где $f(x,t), (x,t) \in \overline{Q}_T$, $\varphi_i(x)$, $x \in [0,1]$, $p_i(t)$, $i = 0,\,1,\,2$, $h(t)$, $t \in [0,T]$ и $q(x)$, $x \in [0,1]$ —заданные функций.

Рассматриваемая обратная задача формулируется как вспомогательная обратная задача, которая, в свою очередь, сводится к операторному уравнению в заданном банаховом пространстве с помощью методов спектрального анализа. Затем с помощью принципа сжатых отображений доказывается существование и единственность решения этого операторного уравнения, которое является классическим решением основной обратной краевой задачи.

Литература

2. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи / А.И. Кожанов //Ж. вычисл. матем. и матем. физ.. — 2004. — Т. 44, № 4. — С. 694–716.

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СО СПРЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

З.С. Алиев, К.Ф. Абдуллаева (Баку, БГУ; Сумгаит СГУ)
z_ aliyev@mail.ru, konul.abdullayeva.15@mail.ru

Раасмотрим следующую спектральную задачу

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\, x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \tag{2}$$

$$(a\lambda + b)y'(1) - (c\lambda + d)\, y''(1) = 0, \tag{3}$$

$$y(1)\cos\delta - T\, y(1)\sin\delta = 0, \tag{4}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $Ty \equiv y''' - qy'$, q — абсолютно непрерывная функция на промежутке $[0,1]$, a, b, c, d, δ —действительные постоянные такие, что $c \neq 0$, $bc - ad > 0$ и $\delta \in [\pi/2, \pi]$.

Задача (1)-(4) рассматривалась в [1], где в частности доказано, что собственные значения этой задачи являются действительными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\lambda_k > 0$ при $k \geqslant 3 + \operatorname{sgn} c$. Пусть $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система собственных функций соответствующая системе собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (1)-(4). В [1] установлено также, что если r — произвольное фиксированное натуральное число, то система $\{y_k(x)\}_{k=1,\, k\neq r}^{\infty}$ образует базис в пространстве

$L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, причем при $p = 2$ этот базис является безусловным базисом. При этом система $\{u_k(x)\}_{k=1,\,k\neq r}^{\infty}$, сопряженная к системе $\{y_k(x)\}_{k=1,\,k\neq r}^{\infty}$, определяется соотношением

$$u_k(x) = \sigma_k^{-1}\left\{y_k(x) - m_k m_r^{-1} y_r(x)\right\}, k \in \mathbb{N},\, k \neq r,$$

где $m_k = a y_k'(1) - c y_k''(1) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Наряду с задачей (1)-(4) расмотрим задачу (1), (2), (4) и $y'(1) = 0$ все собственные значения которого являются действительными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность, в силу теоремы [2, теорема 4].

Пусть $f(x) \in C[0,1]$. Предположим, что разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ по системе сосбтвенных функций задачи (1), (2), (4) и $y'(1) = 0$ равномерно сходится на отрезке $[0,1]$.

Основным результатом настоящей заметки является следующая

Теорема 1. *Пусть r — произвольное фиксированное натуральное число. Если $\int\limits_0^1 f(x)y_r(x)dx \neq 0$, либо $\int\limits_0^1 f(x)y_r(x)dx = 0$ и $d \neq 0$, то ряд Фурье*

$$f(x) = \sum_{k=1,\,k\neq r,\,l}^{\infty} (f, u_k) y_k(x), \tag{5}$$

функции $f(x)$ по системе $\{y_k(x)\}_{k=1,\,k\neq r}^{\infty}$ сходится равномерно на отрезке $[0,1]$; если $\int\limits_0^1 f(x)y_r(x)dx = 0$ и $d = 0$, то ряд (5) сходится равномерно на отрезке $[0,\tau]$ для любого $\tau \in (0,1)$.

Литература

1. Алиев З.С. Базисные свойства в L_p систем корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничных условиях / З.С. Алиев // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 6. — С. 766–777.

2. Kerimov N.B. On oscillation properties of the eigenfunctions of a fourth order differential operator / N.B. Kerimov, Z.S. Aliyev // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics. — 2005. — V. 25, No. 6. — P. 63–76.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ФИНАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА[1]

М. Алмохамед, И.В. Тихонов (Москва, МПГУ и ВМК МГУ)
mssrmtz@gmail.com, ivtikh@mail.ru

В комплексном банаховом пространстве E возьмем линейный замкнутый оператор A с областью определения $D(A)$ (не обязательно плотной в E). Зафиксируем число $T > 0$ и на отрезке $[0,T]$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$u''(t) = Au(t) + g, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

с неизвестным элементом $g \in E$. Для одновременного нахождения функции $u\colon [0,T] \to E$ и элемента g добавим условия

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \alpha\, u(T) + \beta\, u'(T) = u_2, \tag{2}$$

где $u_0, u_1, u_2 \in E$ и $\alpha,\, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Последнее условие в (2) будем называть *финальным переопределением третьего рода*. Поставленная задача (1), (2) относится к *обратным задачам* (см. [1, гл. 8]).

Пару $(u(t), g)$ называем *решением* указанной обратной задачи, если $u \in C^2([0,T], E)$, $u(t) \in D(A)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $g \in E$, и все соотношения (1), (2) выполнены. Для согласования требований будем считать, что $u_0 \in D(A)$.

Предположим что обратная задача (1), (2) с некоторыми элементами u_0, u_1, u_2 разрешима. Поставим вопрос о единственности решения. Он сводится к вопросу об отсутствии нетривиальных решений у однородной обратной задачи с условиями

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad \alpha\, u(T) + \beta\, u'(T) = 0. \tag{3}$$

Как обычно, *тривиальным решением* обратной задачи (1), (3) считаем пару $u(t) \equiv 0$, $g = 0$. Методика исследования подобных обратных задач была разработана ранее в работах [2]–[5]. Применим тот же подход к менее изученной задаче (1), (3).

Составляя по схеме работы [3] операционный аналог обратной задачи (1), (3), приходим к характеристической функции

$$L(\lambda) = L(\lambda;\, T, \alpha, \beta) \;\equiv\; \alpha\, \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,T - 1}{\lambda} + \beta\, \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,T}{\sqrt{\lambda}}\,. \tag{4}$$

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18–01–00236).

Эта элементарная целая функция переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет порядок $\rho = 1/2$ и бесконечное множество нулей

$$\Lambda = \Lambda(T, \alpha, \beta) \equiv \{\, \lambda \in \mathbb{C} \colon L(\lambda) = 0 \,\}. \tag{5}$$

Используя подходящие приемы из теории целых функций [6, отд. 4], можем установить следующий критерий единственности решения исследуемой обратной задачи.

Теорема 1. *Для того чтобы обратная задача* (1), (3) *имела только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль из множества* (5) *не являлся собственным значением оператора* A.

Для применения критерия на практике полезна дополнительная информация о нулях из множества (5). Заметим, что функция (4) допускает альтернативное представление

$$L(\lambda) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2}\,\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2} + \beta\,\mathrm{ch}\,\frac{\sqrt{\lambda}\,T}{2}\right). \tag{6}$$

Отсюда следует, что при любом выборе значений $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ характеристическая функция (4) имеет универсальную серию нулей

$$\lambda_k^{(1)} = -4k^2\pi^2/T^2, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

отвечающих «внешнему» сомножителю в формуле (6). Нули второго сомножителя — «в скобках» — образуют другую бесконечную серию

$$\lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(2)}(T, \alpha, \beta), \qquad k \in J, \tag{8}$$

с подходящей нумерацией $J = J(T, \alpha, \beta) \subset \mathbb{Z}$. Значения (8) не представимы в столь явном виде, как (7), но выражаются через корни трансцендентного уравнения $\mathrm{th}\, z = -hz$, где $z \equiv \sqrt{\lambda}\,T/2$ — новая переменная, а $h \equiv 2\beta/(\alpha T)$ — числовой коэффициент. Элементарные рассуждения позволяют оценить нули из серии (8) и доказать, например, такие утверждения

- при $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ все нули в (8) являются вещественными;
- при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ все нули в (8) являются отрицательными;
- значение $\lambda = 0$ попадает в серию (8) только при $\alpha T + 2\beta = 0$.

Используя теорему 1 и информацию о нулях (7), (8), устанавливаем теперь такой результат.

Теорема 2. *Пусть A — линейный замкнутый оператор в E без собственных значений на луче $(-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$. Тогда однородная обратная задача* (1), (3) *при любом выборе значений $\alpha > 0$, $\beta > 0$ имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.*

Наряду с теоремой 2, можно указать много других, более тонких достаточных признаков единственности решения, действующих для поставленной обратной задачи с финальным переопределением третьего рода.

Литература

1. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — N.Y., Basel: Marcel Dekker, 2000. — 744 p.

2. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 8. — С. 1132–1133.

3. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг–Леффлера // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 5. — С. 637–644.

4. Алмохамед М. Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2019, № 3. — С. 50–58.

5. Тихонов И. В., Алмохамед М. Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения высокого порядка в банаховом пространстве // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена. — 2019. — С. 91–95.

6. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Часть вторая. — М.: Наука, 1978. — 432 с.

ГЛОБАЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ ОТ БЕСКОНЕЧНОСТИ В НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Х.А. Асадов (Баку, БГУ, Азербайджан)
xaqani314@mail.ru

Рассмотрим следующую нелинейную задачу на собственные значения

$$(py'')'' - (qy')' = \lambda r y + h(x, y, y', y'', y''', \lambda), \ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$\begin{array}{l} y'(0)\cos\alpha - (py'')(0)\sin\alpha = 0, \\ y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \\ y'(1)\cos\gamma + (py'')(1)\sin\gamma = 0, \\ (a\lambda + b)y(1) - (c\lambda + d)Ty(1) = 0, \end{array} \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ — спектральный параметр, $Ty \equiv y''' - qy'$, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — положительные и непрерывные на отрезке $[0,1]$ функций, $p(x)$ имеет абсолютную непрерывную производную, $q(x)$ — абсолютно непрерывна на отрезке $[0,1]$, α, β, γ, a, b, c, d — действительные постоянные такие, что α, β, $\gamma \in [0, \pi/2]$, $bc - ad > 0$. Нелинейный член h имеет форму $h = f + g$, где функции f, $g \in C([0,\pi] \times \mathbb{R}^5)$ и удовлетворяют условиям: существуют положительные числа M и τ такие, что

$$\left|\frac{f(x,y,s,v,w,\lambda)}{y}\right| \leqslant M, \ x \in [0,1], \, (y,s,v,w) \in \mathbb{R}^4,$$

$$|y| + |s| + |v| + |w| \ \geqslant \tau, \, u \neq 0, \, \lambda \in \mathbb{R};$$

$$g(x,y,s,v,w,\lambda) = o\left(|y| + |s| + |v| + |w|\right)$$

при $|y| + |s| + |v| + |w| \to \infty$ равномерно по $x \in [0,1]$ и $\lambda \in \Lambda$ для каждого ограниченного промежутка $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

В силу [1, теорема 2.2] собственные значения линейной задачи, полученной из (1)-(2) при $h \equiv 0$, являются вещественными и простыми, и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\lambda_k > 0$ при $k \geqslant 2$.

Пусть $E = C^3[0,1] \cap \{y\,:\, y(0) = y'(0) = y(1)\cos\delta - Ty(1)\sin\delta = 0\}$ — банахово пространство с нормой $||y||_3 = \sum_{i=0}^{3} ||y^{(i)}||_\infty$. Через $\mathcal{S}_k^\nu$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu \in \{+\,,\,-\}$, обозначим множество функций из E, которые обладают осцилляционными свойствами собственных функций (и их производных) задачи (1)-(2) при $h \equiv 0$ (см. [2]).

Всюду в дальнейшем будем предпологать, что $\lambda_1 > 0$.

Пусть $J_k = [\lambda_k - M/r_0, \lambda_k - M/r_0]$, где $r_0 = \min\{r(x)\,:\, x \in [0,1]\}$. В случае, когда f и g удовлетворяют условиям (3) и (4) при $|y| + |s| + |v| + |w| \leqslant \tau$ и $|y| + |s| + |v| + |w| \to 0$, соответствено, в [2] доказано, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $\nu \in \{+\,,\,-\}$ существует неограниченная компонента $\mathcal{C}_k^\nu$ множества решений задачи (1)-(2) такая, что $J_k \times \{0\} \subset \mathcal{C}_k^\nu \subset \mathbb{R} \times \mathcal{S}_k^\nu$.

Пусть B_k^ν — множество асимптотических точек бифуркации задачи (1), (2).

Лемма 1. *Справедливы соотношения: (а) $B_k^\nu \neq \varnothing$; (б) $B_k^\nu \subset (J_k \times \{\infty\})$.*

Если $(\lambda, \infty) \in B_k^\nu$, то через $\mathcal{D}_{k,\lambda}^\nu$ обозначим компоненту множества решений задачи (1)-(2), которая ответвляется от точки (λ, ∞). Пусть $\mathcal{D}_k^\nu = (J_k \times \{\infty\}) \cup \bigcup_{(\lambda,\infty)\in B_k^\nu} \mathcal{D}_{k,\lambda}^\nu$.

Теорема 1. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $\nu \in \{+\,,\,-\}$ имеет место одно из следующих утверждений:*

(а) существует $(k', \nu') \neq (k, \nu)$ такая, что $\mathcal{D}_k^\nu$ пересекает $J_{k'} \times \{\infty\}$ по множеству $\mathbb{R} \times \mathcal{S}_{k'}^{\nu'}$;

(б) существует $\tilde\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $\mathcal{D}_k^\nu \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = (\tilde\lambda, 0)$;

(в) проекция множества $\mathcal{D}_k^\nu$ на $\mathbb{R} \times \{0\}$ неограничена.

Литература

1. Керимов Н.Б. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии / Н.Б. Керимов, З.С. Алиев // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 7. — С. 886–895.

2. Aliyev Z.S. Global bifurcation from zero in some fourth-order nonlinear eigenvalue problems / Z.S. Aliyev, X.A. Asadov // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2020. — doi.org/10.1007/s40840-020-00989-6.

ОПТИМАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ НА ДВОИЧНЫХ ГРАФАХ[1]

В.С. Асташонок, М.Г. Плотников (Вологда, ВоГУ)
astashonok1998@gmail.com, mgplotnikov@gmail.com

Рассмотрим следующую конструкцию. Фиксируем натуральное M. На множестве $\mathbb{Z}(2^M) := \{0, \ldots, 2^M - 1\}$ введем операцию двоичного сложения $\oplus$: если $m, n \in \mathbb{N}(2^M)$, то $m \oplus n = \sum_{k=0}^{M-1} |m_k - n_k|\, 2^k$,

$$m = \sum_{k=0}^{M-1} m_k 2^k, \quad n = \sum_{k=0}^{M-1} n_k 2^k \qquad (m_k,\, n_k = 0 \vee 1).$$

$\mathbb{Z}(2^M)$ является абелевой группой относительно $\oplus$. Множества

$$\mathbb{Z}(2^M) \supset \mathbb{Z}(2^{M-1}) \supset \ldots \supset \mathbb{Z}(2^1) \supset \mathbb{Z}(2^0)$$

образуют решетку подгрупп $\mathbb{Z}(2^M)$. На $\mathbb{Z}(2^M)$ можно ввести (атомарную) меру Хаара μ,

$$\mu(A) = \frac{\#A}{2^M}, \quad A \subset \mathbb{Z}(2^M).$$

Здесь $\#A$ означает мощность множества A.

Семейство смежных классов $n \oplus \mathbb{Z}(2^l)$, где $0 \leqslant l \leqslant M$, $n \in \mathbb{Z}(2^M)$, $n = 0 \pmod{2^l}$, можно отождествить со множеством вершин некоторого полного двоичного дерева. Его $(M-l)$-ый ярус образуют смежные классы вида $n \oplus \mathbb{Z}(2^l)$ с различными допустимыми n, а каждое ребро соединяет вершины вида $A = n \oplus \mathbb{Z}(2^l)$ и $B = q \oplus \mathbb{Z}(2^{l+1})$ такие, что $A \subset B$.

Рассмотрим линейное пространство функций (векторов) $f\colon\ \mathbb{Z}(2^M) \to \mathbb{C}$, которое можно отождествить с $\mathbb{C}^{2^M}$, полагая

$$f = \left(f(0), \ldots, f(2^M - 1)\right).$$

Пусть $\widehat{f} = \left(\widehat{f}(0), \ldots, \widehat{f}(2^M - 1)\right)$ означает *дискретное преобразование Уолша* функции f (см. [1]). Рассмотрим (выпуклые) множества

$$B_{M,q,C} := \left\{ f \in \mathbb{C}^{2^M} :\ \|\widehat{f}\|_q := \left(\sum\nolimits_{n=0}^{2^M-1} |\widehat{f}(n)|^q \right)^{1/q} \leqslant C \right\}.$$

---

[1] Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №20-01-00584).

Следуя общей конструкции А.Н. Колмогорова (см., напр., [2]), поставим следующую (модельную) оптимизационную задачу.

Задача 1. *Пусть задано целые положительные $m < M$, а также числа $C > 0$ и $1 \leqslant q < \infty$. Возьмем произвольное множество $S \subset \mathbb{Z}(2^M)$ мощности 2^m и рассмотрим линейные функционалы L и L_S, действующие на пространстве $\mathbb{C}^{2^M}$ следующим образом:*

$$L(f) = \overline{f}_{\mathbb{Z}(2^M)} = \int\limits_{\mathbb{Z}(2^M)} f\,d\mu; \qquad L_S(f) = \overline{f}_S = 2^{M-m}\int\limits_S f\,d\mu.$$

Здесь $\overline{f}_A$ означает среднее значение функции f на множестве A.

Каждый выбор множества S задает приближенное восстановление функционала L на основе информации о функционале L_S с помощью метода $L(f) \approx L_S(f)$. Погрешность метода определим так:

$$R(S) = \sup\left\{|L(f) - L_S(f)\} : f \in B_{M,q,C}\right\}.$$

Необходимо определить оптимальный из указанных методов, т.е. найти $S^* \subset \mathbb{Z}(2^M)$ такое, что

$$R(S^*) = \inf_{S^* \subset \mathbb{Z}(2^M)} R(S).$$

Решение задачи 1 дает следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых допустимых m, M, C и q все множества S^*, на которых достигается оптимальное решение задачи 1, имеют вид*

$$S^* = S^*(r) = \{n \in \mathbb{Z}(2^m)\colon\ n = r \pmod{2^{M-m}}\}, \quad r \in \mathbb{Z}(2^m).$$

Рассматривается и более общий случай, когда при определении функционала $L(f)$ вместо $\mathbb{Z}(2^M)$ рассматривается усреднение по некоторому смежному классу $n \oplus \mathbb{Z}(2^l)$ с $1 \leqslant l \leqslant M$, а множества S берутся такими, что $S \subset (n \oplus \mathbb{Z}(2^l))$ и $\#S = 2^m$ с $0 \leqslant m \leqslant l - 1$.

Литература

1. Голубов Б.И. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применение / Б.И. Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов. — М. : Наука, 1987. — 344 с.

2. Боянов Б.Д. Оптимальные квадратурные формулы / Б.Д. Боянов // УМН. — 2005. — Т. 60, № 6. — С. 1035–1055.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1]

С.Н. Асхабов (Грозный, ЧГПУ, ЧГУ)

askhabov@yandex.ru

В данной работе изучаются краевые задачи для различных классов нелинейных уравнений, содержащих операторы вида

$$(Tu)(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{u'(s)ds}{s-x}, \quad (Hu)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(s)\cdot \operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds\,,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Применяя метод максимальных монотонных операторов [1], при достаточно легко обозримых ограничениях на нелинейность доказаны теоремы о существовании и единственности решения в вещественных пространствах Лебега.

Пусть $1 < p < \infty$ и $p' = p/(p-1)$. Обозначим через $L_p(\varrho)$ множество всех измеримых по Лебегу на отрезке $[-1,1]$ функций таких, что $\int\limits_{-1}^{1}\varrho(x)\cdot|u(x)|^p dx < \infty$, где вес $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Известно, что сопряженным с $L_p(\varrho)$ является пространство $L_{p'}(\sigma)$, где $\sigma(x) = (1-x^2)^{(p'-1)/2}$ [2, 3]. Множество всех неотрицательных функций из $L_p(\varrho)$ обозначим через $L_p^+(\varrho)$.

В работе [2, с. 258] доказано, что оператор T с областью определения $D(T) = \{u \in L_p(\varrho) : u(x)$ абсолютно непрерывна, $u' \in L_{p'}(\sigma)$ и $u(\pm 1) = 0\}$ является максимальным монотонным оператором, действующим из $D(T) \subset L_p(\varrho)$ в $L_{p'}(\sigma)$.

Пусть функция $F(x,u)$ определена при $x \in [-1,1]$, $u \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом $u \in \mathbb{R}$ и непрерывна по u для почти всех $x \in [-1,1]$.

Теорема 1. *Пусть $p \geqslant 2$, $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ и $f(x) \in L_p(\varrho)$. Если для почти всех $x \in [-1,1]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия:*

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-200001) и публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611, по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи».

1) $|F(x,u)| \leqslant g(x) + d_1 \cdot \left(\varrho^{-1}(x)\,|u|\right)^{1/(p-1)}$, *где* $g(x) \in L_p^+(\varrho^{-1})$, $d_1 > 0$;
2) $F(x,u)$ *не убывает по* u *почти при каждом* $x \in [-1,1]$;
3) $F(x,u)\cdot u \geqslant d_2\cdot\left(\varrho^{-1}(x)\,|u|\right)^{1/(p-1)}|u| - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(-1,1)$, $d_2 > 0$,
то краевая задача

$$\lambda \cdot F(x, u'(x)) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u(s)}{s-x}\,ds = f(x), \tag{1}$$

$$u(-1) = u(1) = 0, \tag{2}$$

имеет единственное решение $u(x) \in L_p(\varrho)$ *с* $u'(x) \in L_{p'}(\sigma)$.

Теорема 2. *Пусть* $p \geqslant 2$, $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, *функция* $f(x) \in L_p(\varrho)$ *определена в точках* ± 1 *и* $f'(x) \in L_{p'}(\sigma)$. *Если для почти всех* $x \in [-1,1]$ *и всех* $u \in \mathbb{R}$ *выполняются условия 1)—3) теоремы 1, причем в условии 1)* $g(\pm 1) = 0$, *а в условии 2)* $F(x,u)$ *строго возрастает по* u, *то краевая задача*

$$u(x) + \lambda \cdot F\left(x, -\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{[b(s)\cdot u(s)]'\,ds}{s-x}\right) = f(x), \tag{3}$$

$$u(-1) = f(-1), \quad u(1) = f(1), \tag{4}$$

имеет единственное решение $u(x) \in L_p(\varrho)$ *с* $u'(x) \in L_{p'}(\sigma)$.

Аналогичные результаты справедливы для уравнений с ядром Гильберта в $L_p \equiv L_p(-\pi,\pi)$ [5]. Кроме того, доказывается следующая теорема для уравнения типа Гаммерштейна в классе

$$\Omega_p = \left\{ u(x):\ u(x) \in AC, u'(x) \in L_{p'},\ u(\pm\pi) = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} u(x)dx = 0 \right\},$$

где AC есть множество всех абсолютно непрерывных функций.

Теорема 3. *Пусть* $p \geqslant 2$ *и* $f(x) \in \Omega_p$. *Если для почти всех* $x \in [-\pi,\pi]$ *и всех* $u \in \mathbb{R}$ *выполняются условия:*
4) $|F(x,u)| \leqslant g(x) + d_3 \cdot |u|^{1/(p-1)}$, *где* $g(x) \in L_p^+$, $d_3 > 0$;
5) $F(x,u)$ *не убывает по* u;

6) $F(x,u)\cdot u \geqslant d_4\cdot |u|^{p/(p-1)} - D(x)$*, где* $D(x)\in L_1^+$, $d_4>0$,
то краевая задача

$$u(x)-\lambda\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi} F\big[s,u'(s)\big]\cdot \mathrm{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds = f(x) \qquad (5)$$

$$u(-\pi)=u(\pi)=0, \qquad (6)$$

имеет единственное решение $u(x)\in\Omega_p$.

Теоремы 1—3 можно обобщить на случай соответствующих систем уравнений с ядрами Коши и Гильберта [6], а также рассмотреть дробные интегро-дифференциальные уравнения [7].

Литература

1. Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас — М. : Мир, 1978. — 336 с.

2. Асхабов С.Н. Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с произвольным параметром / С.Н. Асхабов // Матем. заметки. — 2018. — Т. 103, № 1. — С. 20–26.

3. Askhabov S.N. Nonlinear singular integral equations in Lebesgue spaces / S.N. Askhabov // J. Math. Sciences. — 2011. — V. 173, № 2. — P. 155–171.

4. Wolfersdorf L.v. Monotonicity methods for nonlinear singular integral and integro-differential equations / L.v. Wolfersdorf // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1983. — V. 63, № 6. — P. 249–259.

5. Асхабов С.Н. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с ядром Гильберта и монотонной нелинейностью / С.Н. Асхабов // Владикавказский матем. журнал — 2017. — Т. 19, № 3. — С. 11–20.

6. Асхабов С.Н. Применение метода монотонных операторов к некоторым классам нелинейных сингулярных интегральных уравнений и их системам в $L_{p,n}(\rho)$ / С.Н. Асхабов // Деп. в ВИНИТИ 12.02.1981, № 684-81. — С. 1–28.

7. Илолов М.И. Дробные линейные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в банаховых пространствах / М.И. Илолов // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2019. — Т. 179. — С. 58–64.

ОРБИТЫ РАЗЛОЖИМЫХ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ С su(2)-КОМПОНЕНТОЙ[1]

А.В. Атанов (Воронеж, ВГУ)
atanov.cs@gmail.com

Многие 7-мерные вещественные алгебры, и в том числе разложимые, могут иметь в качестве орбит в комплексном пространстве $\mathbb{C}^4$ лишь вырожденные по Леви голоморфно однородные гиперповерхности (см. [1]). Одной из причин этого является наличие в них «больших» по размерности абелевых идеалов.

Ниже обсуждаются 7-мерные разложимые алгебры Ли, содержащие лишь трехмерный абелев идеал. Они задаются как суммы

$$\mathfrak{g}_k = \mathfrak{su}(2) + \mathfrak{h}_k, \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Коммутационные соотношения в 4-мерных алгебрах $\mathfrak{h}_k$ представлены в таблице (см. также [2]):

Алгебры	$[e_1, e_3]$	$[e_1, e_4]$	$[e_2, e_3]$	$[e_2, e_4]$	$[e_3, e_4]$
$\mathfrak{h}_1$		$2e_1$	e_1	e_2	$e_2 + e_3$
$\mathfrak{h}_2$		$(h+1)e_1$	e_1	e_2	he_3
$\mathfrak{h}_3$		$2pe_1$	e_1	$pe_2 - e_3$	$e_2 + pe_3$
$\mathfrak{h}_4$	e_1	$-e_2$	e_2	e_1	

Везде в таблице $|h| \leqslant 1, p \geqslant 0$.

Утверждение 1. *Пусть M — вещественно-аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^4$, а $g(M)$ — 7-мерная алгебра касательных голоморфных векторных полей на M, имеющая вблизи некоторой точки поверхности M полный ранг. Если $g(M)$ имеет структуру $\mathfrak{g}_1$, то M вырождена по Леви.*

У трех остальных алгебр $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$ имеются невырожденные по Леви несферические орбиты. Ниже приводятся отдельные примеры таких поверхностей. Автором получены многопараметрические возмущения этих примеров, которые имеют гораздо более сложные уравнения, но остаются невырожденными однородными гиперповерхностями в $\mathbb{C}^4$.

Утверждение 2. *Следующие невырожденные по Леви голоморфно однородные гиперповерхности в $\mathbb{C}^4$ имеют 7-мерные ал-*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

гебры касательных векторных полей со структурами $\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4$ *соответственно:*

$$\mathfrak{g}_2: \quad y_4 = y_2(y_1 + \ln y_2 + Ay_2 \ln(\mathrm{ch}(y_3)), A \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
$$\mathfrak{g}_3: \quad y_4 = \ln(y_1 - y_2^2) + \ln(\mathrm{ch}\, y_3)$$
$$\mathfrak{g}_4: \quad x_1 y_2 + y_1 y_4 = |z_1|^2(1 + \ln(\mathrm{ch}\, y_3)).$$

Можно отметить, что два первых приведенных уравнения описывают трубчатые гиперповерхности, хотя первоначальная структура соответствующих алгебр не предполагала такого свойства их орбит. При этом, например, несферическую поверхность, отвечающую $\mathfrak{g}_3$, можно рассматривать как возмущение известной сферической трубки $v = \ln(x_1 - x_2^2)$ в $\mathbb{C}^3$.

Поверхность, отвечающая алгебре $\mathfrak{g}_4$, и её возмущения не являются трубчатыми, однако возможность их голоморфной эквивалентности каким-либо трубкам требует дополнительного изучения. Представляет также интерес вопрос об аффинной однородности полученных поверхностей, однако в настоящее время нет полных списков даже аффинно однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{R}^4$ (см. [3]).

Литература

1. Лобода А.В. О вырожденности орбит разложимых алгебр Ли / А.В. Лобода // Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2020»: сборник тезисов (г. Уфа, 11-14 ноября 2020 г). — Уфа: Аэтерна, 2020. — С. 117–119.

2. Акопян Р.С. Невырожденные орбиты в $\mathbb{C}^4$ разложимых 7-мерных алгебр Ли / Р.С. Акопян, А.В. Атанов // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа. Понтрягинские чтения – XXXI». — Воронеж, 2020. — С. 30–32.

3. Eastwood M. G. Homogeneous Hypersurfaces with Isotropy in Affine Four-Space / M.G. Eastwood, V.V. Ezhov // Труды МИАН. — 2001. — Т. 235. — С. 57–70.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МОЙСИЛА-ТЕОДОРЕСКУ

Ю.В. Афанасенкова, Ю.А. Гладышев (Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского)
dvoryanchikova_y@mail.ru

Способ построения решений линейных дифференциальных уравнений, названный методом обобщенных степеней (ОС), был развит первоначально Л. Берсом для случая одного независимого переменного [1]. В работах автора [2] он был обобщен для случая нескольких независимых переменных. В данном сообщении показано его применение для построения решений известной системы Мойсила-Теодореску [2] (далее М-Т).

В работе проведен переход от записи системы М-Т в кватерционной форме к матричной форме. Чтобы удовлетворить требованиям допустимости применения ОС, введена так называемая присоединенная система и получена пара коммутирующих операторов D_1, D_2. Указаны правые обратные операторы I_1, I_2, а также проекционные операторы P_1, P_2. Достигнутое выполнение всех требований необходимых для построения бинарных ОС позволяет записать

$$X_1^{(\rho)} X_2^{(q)} C = \rho! q! I_1^{\rho} I_2^{q} C,$$

где C - обобщенная константа определяемая требованиями

$$D_1 C = D_2 C = 0$$

Далее по стандартной схеме [2] приведем симметризованные бинарные ОС вида $\bar{Z}^m Z^n C$

Последовательность степеней вида $Z^n C$ дает базисное решение системы М-Т в матричной форме. При выполнении условия по компанентной сходимости ряда

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} Z^i C_i$$

определяет регулярную по терминологию [2,4] решения системы М-Т. Приведенные частные примеры и указано на возможность обобщения результатов.

Литература

1. Bers L. On a class of functions defined by partial differential equations. Transactions of the American Mathematical Society. 56, №1,1944;

2. *Гладышев Ю.А.* Метод обобщенных степеней Берса и его приложения в математической физике, Калуга, 2011;

3. G.C. Moisil, Sur les quaternions monogenes. Bull. Sci. Math. 55. 1931;

4. Гладышев Ю.А., Лашкарева Е.А. Об использовании аппарата обобщенных степеней Берса при построении решений краевых задач теории переноса методом Фурье // Вестник Калужского университета. 2018. №3. с.53-57.

МОДЕЛЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ДИССИПАТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Е. С. Барановский, М. А. Артемов (Воронеж, ВГУ)
esbaranovskii@gmail.com

Рассматривается математическая модель, описывающая стационарное однонаправленное течение неравномерно нагретой вязкой жидкости между двумя плоскостями $z = -h$ и $z = h$. Вязкость считается зависящей от температуры. Предполагается, что течение обусловлено действием постоянного перепада давления $\frac{\partial p}{\partial x} = -\xi$, $\xi > 0$. Уравнения движения и энергии имеют вид

$$-\big(\mu[T(z)]u'(z)\big)' = \xi, \quad z \in [-h, h], \tag{1}$$

$$-kT''(z) = \mu[T(z)](u'(z))^2 + \omega(z), \quad z \in [-h, h], \tag{2}$$

где u — скорость течения жидкости вдоль оси x; T — температура в канале; $\mu[T]$ — функция вязкости; ω — интенсивность внешних тепловых источников; k — коэффициент теплопроводности, $k > 0$. Символ $'$ обозначает производную по z.

На стенках канала выполнены условия прилипания

$$u(h) = u(-h) = 0, \tag{3}$$

а для температуры заданы краевые условия третьего рода

$$kT'(h) = -\beta T(h), \quad kT'(-h) = \beta T(-h), \tag{4}$$

где β — коэффициент теплообмена, $\beta > 0$.

Неизвестными в системе (1)–(4) являются скорость u и температура T, а остальные величины и функции считаются заданными.

Предположим, что:

(i) функция $\omega\colon [-h,h] \to \mathbb{R}$ является четной и принадлежит пространству Лебега $L^2(-h,h)$;

(ii) функция $\mu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна;

(iii) существуют константы μ_0 и μ_1 такие, что выполнено неравенство $0 < \mu_0 \leqslant \mu(s) \leqslant \mu_1$ для всякого $s \in \mathbb{R}$.

Пусть $H^1[-h,h]$ — пространство Соболева. Введем два подпространства:

$$H^1_{even}[-h,h] \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi \in H^1[-h,h] : \ \psi(-z) = \psi(z)\ \forall z \in [-h,h]\},$$
$$H^1_{0,even}[-h,h] \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi \in H^1_{even}[-h,h] : \quad \psi(-h) = \psi(h) = 0\}.$$

Определение. *Слабым решением* задачи (1)–(4) назовем пару функций $(u,T) \in H^1_{0,even}[-h,h] \times H^1_{even}[-h,h]$ такую, что

$$\int_{-h}^{h} \mu[T(z)]u'(z)v'(z)\,dz = \xi \int_{-h}^{h} v(z)\,dz,$$
$$k\int_{-h}^{h} T'(z)S'(z)dz + 2\beta T(h)S(h) = \int_{-h}^{h} \{\mu[T(z)](u'(z))^2 + \omega(z)\}S(z)dz$$

для любых пробных функций $v \in H^1_{0,even}[-h,h]$ и $S \in H^1_{even}[-h,h]$.

Сформулируем теперь основные результаты настоящей работы. Обозначим через $\overline{f}_h$ среднее значение функции $f\colon [-h,h] \to \mathbb{R}$, т. е.

$$\overline{f}_h \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(z)\,dz.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* (i)–(iii). *Тогда*

- *задача* (1)–(4) *имеет по крайней мере одно слабое решение;*
- *если пара* (u,T) *— слабое решение задачи* (1)–(4), *то температура на стенках канала* $z = \pm h$ *может быть вычислена по формуле* $T(\pm h) = (\xi\overline{u}_h + \overline{\omega}_h)h\beta^{-1}$.

Замечание. В [1, 2] рассматриваются трехмерные нелинейные задачи о протекании несжимаемой вязкой жидкости через ограниченную локально-липшицеву область с учетом зависимости вязкости от температуры.

Литература

1. Baranovskii E.S. Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow / E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, M.A. Artemov // Fluids. — 2019. — V. 4, № 3. — Article ID 133.

2. Барановский Е.С. О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область / Е.С. Барановский, А.А. Домнич // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 3. — С. 317–327.

О СГЛАЖИВАНИИ ПОТЕНЦИАЛА ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА[1]

А.Г. Баскаков, И.А. Криштал, Н.Б. Ускова (Воронеж, ВГУ, Де-Калб, Университет Северного Иллинойса, Воронеж, ВГТУ)
anatbaskakov@yandex.ru, ikrishtal@niu.edu, nat-uskova@mail.ru

При изучении задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка иногда бывает полезно исходный оператор преобразованием подобия перевести в оператор с более удобным для дальнейшего исследования потенциалом. В некоторых классах задач при выполнении определенных условий удается неавтономную задачу свести к автономной.

В качестве примера приведем следующую теорему. В ее формулировке X — комплексное банахово пространство, и $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов на X.

Теорема 1. *Оператор* $(\mathfrak{L}x)(t) = \frac{dx}{dt} - v(t)x(t)$, *действующий в банаховом пространстве векторнозначных функций* $L_p(\mathbb{R}, X)$, $1 \leqslant p < \infty$, *с существенно ограниченной функцией* $v \in L_\infty(\mathbb{R}, \operatorname{End} X)$, *подобен оператору* $(\mathfrak{L}_0 x)(t) = \frac{dx}{dt} - v_0(t)x(t)$, *где* $v_0 \in L_\infty(\mathbb{R}, \operatorname{End} X)$ *является сужением целой функции экспоненциального типа.*

Аналогичный результат имеет имеет место если, например, оператор $\mathfrak{L}$ действует в пространстве периодических функций и функция v — существенно ограниченная периодическая функция того

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

же периода. При этом, если норма функции v достаточно мала, то функция v_0 — постоянная.

Теорема 1 доказывается с помощью метода подобных операторов в модификации, отличной от традиционной [1]. При этом не предполагается дискретности спектра невозмущенного оператора, роста лакун между спектральными компонентами или даже их наличие, что требуется в обычной схеме метода подобных операторов.

Литература

1. Baskakov A.G. Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova // J. Math. Anal. Appl. — 2019. — V. 477. — P. 930–960.

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФЕ[1]

Д.В. Белова, М.Ш. Бурлуцкая (Воронеж, ВГУ)

dianabelova123@yandex.ru, bmsh2001@mail.ru

Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения на простейшим геометрическом графе, состоящем из двух ребер-колец, касающихся в одной точке (узле графа):

$$\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - q_j(x)u_j(x,t) + f_j(x,t), \tag{1}$$

$$(j = 1,2), \qquad (x,t) \in Q = [0,1] \times \in [0,+\infty),$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = u_2(1,t), \tag{2}$$

$$u'_{1x}(0,t) - u'_{1x}(1,t) + u'_{2x}0,t) - u'_{2x}(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$\begin{array}{ll} u_1(x,0) = \varphi_1(x), & u_2(x,0) = \varphi_2(x), \\ u'_{1t}(x,0) = \psi_1(x), & u'_{2t}(x,0) = \psi_1(x). \end{array} \tag{4}$$

Результаты о классических решениях задачи (1)–(4) при $f_j(x,t) = 0$, $\psi_j(x) \equiv 0$ получены в [1]–[2]. Развивая резольвентный подход и используя технику, предложенную А.П. Хромовым в [3–5], опирающуюся на идеи по ускорению сходимости рядов и привлечение расходящихся рядов, эти результаты можно усилить.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-11-00197, выполняемый в Воронежском госуниверситете)

Будем предполагать, что все функции, входящие в (1)–(4) комплекснозначные, $q_j, \varphi_j, \psi_j \in L[0,1]$, $f_j(x,t) \in L(Q_T)$, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$, при любом $T > 0$.

Как и в [4–5] возьмем формальное решение по методу Фурье задачи (1)–(4) в виде:

$$u(x,t) = Z(x,t,\varphi) + \int_0^t Z(x,\tau,\psi)\,d\tau + \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} Z(x,\eta,f(\cdot,\tau))\,d\eta, \quad (5)$$

где $Z(x,t,\varphi)$ есть формальное решение задачи (1)–(4) при $\psi_j(x) = f_j(x,t) = 0$, которую будем обозначать задачей (A). Согласно (5) сначала следует изучить задачу (A) при различных $\varphi_j(x)$.

Исследуя задачу (A), как и в [4-5], придем к ряду

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,t),$$

где $A_0(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\Phi}(x+t) + \widetilde{\Phi}(x-t)]$,
$A_n(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{F}_{n-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \ \ n \geqslant 1$,
$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ (T — знак транспонирования),
$F_n(x,t) = -\mathrm{diag}\,(q_1(x), q_2(x))\,A_n(x,t)$ при $x \in [0,1]$, а через $\widetilde{F}$ обозначено продолжение функции $F = (F_1, F_2)^T$ с отрезка $[0,1]$ на всю ось с помощью соотношений:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_1(-x) &= \tfrac{1}{2}[\widetilde{F}_1(1-x) + \widetilde{F}_2(1-x) - \widetilde{F}_1(x) + \widetilde{F}_2(x)],\\
\widetilde{F}_2(-x) &= \tfrac{1}{2}[\widetilde{F}_1(1-x) + \widetilde{F}_2(1-x) + \widetilde{F}_1(x) - \widetilde{F}_2(x)],\\
\widetilde{F}_1(1+x) &= \tfrac{1}{2}[\widetilde{F}_1(x) - \widetilde{F}_1(1-x) + \widetilde{F}_2(x) + \widetilde{F}_2(1-x)],\\
\widetilde{F}_2(1+x) &= \tfrac{1}{2}[\widetilde{F}_1(x) + \widetilde{F}_1(1-x) + \widetilde{F}_2(x) - \widetilde{F}_2(1-x)].
\end{aligned}$$

Используя расходящиеся ряды в понимании Эйлера, получаем, что $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T с экспоненциальной скоростью, и считаем $A(x,t)$ решением задачи (A) при любых q_j, $\varphi_j \in L[0,1]$. В случае дополнительных условий из [1, 2] $A(x,t)$ является классическим решением. Кроме того, $A(x,t)$ обладает свойством обобщенного решения, понимаемого как предел классических.

Литература

1. Бурлуцкая М.Ш. Метод Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения на графе / М.Ш. Бурлуцкая // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 465, № 5. — С. 519–522.

2. Burlutskaya M. On a resolvent approach in a mixed problem for the wave equation on a graph / M. Burlutskaya // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 72. — P. 37–44.

3. Хромов А.П. О классическом решении смешанной задачи для однородного вол-нового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью / А.П. Хромов // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2019. — Т. 19, вып. 3. — С. 280–288.

4. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов : Изд-во ООО «Научная книга», 2020. — С. 433–439.

5. Корнев В.В. Расходящиеся ряды и обобщенное решение одной смешанной задачи для волнового уравнения / В.В. Корнев, А.П. Хромов // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции : Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения–XXXI». — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. — С. 113–117.

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ КРАЕВЫМИ И ВНЕШНИМИ КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В КЛАССЕ φ — ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

К.А.Близнюк, Е.А.Мазепа (Волгоград, ВолГУ)
bliznjukka@volsu.ru

В данной работе исследуются вопросы взаимосвязи разрешимости краевых задач уравнения Пуассона

$$\Delta u = g(x), \tag{1}$$

где функция $g(x) \in C^{0,\alpha}(B)$, для любого подмножества $B \subset\subset M$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Определение 1. Пусть $\varphi \in C(M \backslash B)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} ||\varphi||_{C(M\backslash B_k)} = 0$. Будем говорить, что непрерывные функции f_1 и f_2 φ–эквивалентны на M, если существует константа $C > 0$ такая, что $|f_1(x) - f_2(x)| \leqslant C \cdot \varphi(x)$, для любого $x \in M \backslash B$.

Класс таких функций обозначим $[f]^\varphi$.

Теорема. *Пусть M – произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие, $B \subset M$ произвольное связное компактное подмножество, ∂B – гладкое подмногообразие, $f \in C(M)$. Следующие условия эквивалентны:*

1. На $M \backslash B$ для каждой функции $\Phi \in C(\partial B)$ существует решение u_0 уравнения (1) такое, что $u_0 \in [f]^\varphi$, $u_0|_{\partial B} = \Phi$.

2. На M существует решение u уравнения (1) такое, что $u \in [f]^\varphi$.

Аналогичные задачи для однородных эллиптических уравнений рассматривались ранее в работе [1].

Литература

1. Мазепа Е.А. Краевые задачи для стационарного уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях /Е.А. Мазепа // Сиб. матем. журнал., — 2002. —Т. 43, № 3. —С. 591–599.

2. Мазепа Е.А. О разрешимости краевых задач для уравнения Пуассона на некомпактных римановых многообразиях /Е.А. Мазепа // Матем. физика и компьютер. моделирование., —2017. —Т. 20, № 3. —С. 136–147.

АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ ДИСКРЕТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МЕТОДОМ ДРОБНЫХ МОМЕНТОВ

Н.М. Близняков, В.М. Вахтель, Д.Е. Костомаха, В.А. Работкин (Воронеж, Воронежский государственный университет)

bliznyakov@vsu.ru, vakhtel@phys.vsu.ru

При статистическом анализе данных, если вид закона распределения дискретной случайной величины (СВ) — $k_j = 0; 1; \ldots$ и случайного вектора $v(\cdot) = (v_0, \ldots, v_l)$; $v_j = v_j$ $(k = j)$ известен, то вектор параметров θ функции распределения $F(k|\theta)$ можно оценить, используя несколько первых целых эмпирических моментов распределения на основе метода моментов. Если же вид $F(k|\theta)$ не задан, то, как известно [1], совокупность всех целочисленных моментов $\mu(r)$ как теоретических, так и тем более эмпирических, не всегда позволяет однозначно установить функцию $F(k|\theta)$. Задача определения $F(k|\theta)$ методом моментов существенно усложняется в условиях случайных выборок малого объёма $n \leqslant 10$, $\sum\limits_{j=0}^{l} \nu = n$.

С увеличением порядка $r = 1, 2, \ldots$ целых центральных эмпирических моментов $\widetilde{\mu}(r) = \sum\limits_{j=0}^{l} (k_j - \bar{k})^r \cdot \nu_j/n$ распределения СВ k значительно возрастает разброс моментов. В интервале порядка $r = 1, \ldots, 5$, так как $\mu(r = 0) = 1$, $\mu(r = 1) = 0$, практически значимыми являются только эмпирические центральные моменты с $r = 2, 3, 4, 5$, которые флуктуируют при $n \leqslant 10$ более чем на 30%. Поэтому при анализе распределений ограничиваются моментами не более четвертого порядка, что не позволяет при $n \leqslant 10$ определить вид $F(k|\theta)$ и оценить параметры θ.

Анализ однородности выборок и согласия эмпирических распределений $\widetilde{F}(k|\theta)$ или случайных векторов $v = (v_0, \ldots, v_l)$ предполагаемой модели распределения $F(k|\theta)$ на основе известных характеризаций или критериев согласия, например хи – квадрат, индекса рассеяния при $n \leqslant 10$ не эффективен.

В работе рассмотрена методика статистического анализа случайных векторов $v(\cdot)$ выборок малого объёма $n \leqslant 10$ дискретных случайных величин $k_j = 0, 1, \ldots$ на примере распределения Пуассона $Po(k|\lambda) = \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!}$, при малых значениях параметра $\lambda = \overline{k} < 5$.

Известно [2, 3], что, кроме степенных моментов целого порядка $r = 1, 2, \ldots$, в теории проблемы моментов определены дробные абсолютные моменты $|\mu(s)|$, $s = r + \beta$, $r = 0, 1, 2, \ldots$; $0 < \beta < 1$ и комплексные моменты $\mu(s) = Re(\mu(s)) + i \cdot Im(\mu(s))$; $i = \sqrt{-1}$.

Если порядок комплексных моментов находится в интервале $1 < S = r + \beta < 5$, то можно определить число коррелированных моментов равным $N = r \cdot 1/\beta$; например, $N = 16$ при $r = 4$; $\beta = 0.25$.

Центральные дробные моменты, например пуассоновской СВ k, являются периодической функцией S, мнимая составляющая которой $Im(\mu(s))$ имеет вид $Im(\mu(s)) = c \cdot d^{b \cdot \Delta S} \sin S\pi$; $\Delta S = S - S_0$; $S_0 > 0$; где c и b зависят от параметра распределения λ, комбинаторики компонент случайного вектора $v = (v_0, \ldots, v_l)$, $\sum\limits_{j=0}^{l} v_j = n$ имеющего полиномиальное распределение, а константа $d = 10$ или, например e.

Для выборочного среднего значения вектора $\overline{k}(v) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{l} v_j k_j$; $k+j = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо $\widetilde{k} < 1$, $b < 0$; $\widetilde{k} > 1$, $b > 0$; $\widetilde{k} \cong 1$, $b = 0$. Периодические экстремумы $im(\mu(s))$ при $\beta = 0.5$ позволяют оценить соответствие вектора $v = (v_0, \ldots, v_l)$ распределению $Po(k|\lambda)$ и однородность совокупности векторов $\{v(\cdot)\}$ образующих по комбинаторике компонент v_j, например v_0, v_1 подмножество в виде пика эмпирических частот в распределении скалярного произведения – индикатора $ID(\cdot) = v \cdot a = v_0 a_0 + \ldots + v_l a_l$ случайного вектора $v(\cdot)$ и неслучайного вектора $a = (a_0, \ldots, a_l)$, где $a_j \in Z$ [4]. Компоненты a_j вектора a не имеют общих делителей для однозначности идентификации $v(\cdot)$ по соответствующему индикатору $ID(\cdot)$ так как система уравнений

$$v_0 + \ldots + v_j + \ldots + v_l = n,$$

$$a_0 v_0 + \ldots + a_j v_j + \ldots + a_l v_l = ID(\cdot),$$

имеет единственное целочисленное решение. На множестве $ID(\cdot)$ может быть определена мера $M_i = M(ID(\cdot)_i)$ реализующая многомодульное распределение из последовательности подмножеств – пиков, образованных векторами $v(\cdot)$, родственными по комбинаторике компонент v_j. Каждому подмножеству $ID(\cdot)$, образующего пик, соответствует подмножество из, рассмотренных функций дробных моментов $\widetilde{\mu}(v(\cdot), S)$.

Литература

1. Ширляев А. Н. Вероятность, М.: Наука, 1980, 576 с.

2. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М.: Наука, 1997.

3. Учайкин В. В. Успехи физических наук, 2003г., т. 173, №8, 847с.

4. Babenko A. G., Vakhtel V. M., Rabotkin V. A. Distribution of empirical distribution of radiation flux particle counts. Nucleus – 2019, LXIX International conference, Book of abstracts. Dubna. 2019. p. 330.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Н.П. Бондаренко (Саратов, СГУ; Самара, Самарский университет)
bondarenkonp@info.sgu.ru

Обозначим через $L = L(\sigma, T_1, T_2, H)$ краевую задачу

$$-(Y^{[1]}(x))' - \sigma(x)Y^{[1]}(x) - \sigma^2(x)Y(x) = \lambda Y(x), \tag{1}$$

$$T_1 Y^{[1]}(0) - T_1^{\perp} Y(0) = 0, \quad T_2(Y^{[1]}(\pi) - HY(\pi)) - T_2^{\perp} Y(\pi) = 0,$$

где $Y(x)$ — вектор-функция размера m, $\sigma(x)$ — матричная функция размера $(m \times m)$ с элементами из класса $L_2(0, \pi)$, $\sigma(x) = (\sigma(x))^*$ п.в. на $(0, \pi)$, $Y^{[1]}(x) := Y'(x) - \sigma(x)Y(x)$ — квазипроизводная, λ — спектральный параметр, T_j, $T_j^{\perp}$ и H — $(m \times m)$-матрицы, T_j — матрицы ортопроекторов: $T_j = T_j^* = T_j^2$, $T_j^{\perp} = I - T_j$, $j = 1, 2$, I — единичная матрица, $H = H^* = T_2 H T_2$. Уравнение (1) эквивалентно матричному уравнению Штурма-Лиувилля

$$-Y''(x) + Q(x)Y(x) = \lambda Y(x)$$

с сингулярным потенциалом $Q(x) = \sigma'(x)$ с элементами из класса $W_2^{-1}(0, \pi)$.

Исследована **обратная задача**, состоящая в восстановлении коэффициентов $\sigma(x)$, T_1, T_2 и H краевой задачи L по ее спектральным данным — собственным значениям и весовым матрицам. Получены теорема единственности и конструктивный алгоритм решения обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости (см. [1]).

Литература

1. Bondarenko N.P. Inverse problem solution and spectral data characterization for the matrix Sturm-Liouville operator with singular potential [Электронный ресурс] / Н.П. Бондаренко — Cornell University Library, 2020. — URL: https://arxiv.org/abs/2007.07299 (дата обращения: 03.11.2020).

---

[1] Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-00009).

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВТОРЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ[1]

Е.А. Бородина, С.А. Шабров, М.Б. Давыдова, Э.Ю. Курклинская (Воронеж; Воронежский государственный университет инженерных технологий;
Воронежский государственный университет)
eaborodina@inbox.ru, shabrov_s_a@math.vsu.ru, mbd@vsu.ru

В этой работе получены достаточные условия существования вторых решений у нелинейной математической модели шестого порядка с негладкими решениями. Мы рассматриваем случай, когда граничная задача гарантированно имеет одно решение, и исследуем вопрос о наличии еще одного. Используя точечный подход Ю. В. Покорного, показавший свою эффективность при анализе моделей второго и четвертого порядков, получены достаточные условия существования второго решения для модели шестого порядка с производными по мере.

Изучаемая нелинейная математическая модель, реализуется в виде граничной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + (ru''_{xx})''_{x\mu} - (gu'_x)'_\mu + Q'_\mu u = f(x,u); \\ u(0) = u(\ell) = 0; \\ -\left(pu'''_{xx\mu}\right)(0) + \gamma_1 u''_{xx}(0) = 0; \\ \left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(0) - ru''_{xx}(0) + \gamma_2 u'_x(0) = 0; \\ \left(pu'''_{xx\mu}\right)(\ell) + \gamma_4 u''_{xx}(\ell) = 0; \\ -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(\ell) + ru''_{xx}(\ell) + \gamma_5 u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

с производными по мере. При этом основное внимание уделяется случаю, когда модель (1) заведомо имеет одно известное решение и стоит вопрос о существовании другого. Известное решение, без ограничения общности, мы будем считать нулевым, так как можно сделать функциональную замену, осуществляющую сдвиг этого решения в нуль.

Решение (1) мы будем искать в классе E — дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, у которых: $u''_{xx}(x)$ — μ–аб-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РНФ (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском госуниверсите.

солютно непрерывна на $[0,\ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$. В точках ξ, принадлежащих множеству точек разрыва $\sigma(x)$, уравнение в (1) понимается как равенство

$$-\Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi)-\Delta(ru'_x)(\xi)+\Delta\left(gu''_{xx}\right)'_x(\xi)+u(\xi)\Delta Q(\xi)=f(\xi,u(\xi)),$$

где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ.

Уравнение из (1) задано почти всюду (по мере σ) на следующем расширении отрезка $[0;\ell]$. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На $J_\sigma = [0;\ell]\setminus S(\sigma)$ зададим метрику $\varrho(x;y)=|\sigma(x)-\sigma(y)|$. Полученное метрическое пространство $(J_\sigma;\sigma)$ не является полным. Стандартное пополнение приводит (с точностью до изоморфизма) к множеству $\overline{[0;\ell]}_S$, в котором каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменена на пару собственных значений $\xi-0$, $\xi+0$, которые ранее были предельными. Индуцируя упорядоченность с исходного множества, придем к неравенствам $x<\xi-0<\xi+0<y$ для всех x,y для которых выполнялись неравенства $x<\xi<y$ в исходном отрезке.

Функцию $v(x)$ в точках $\xi-0$ и $\xi+0$ множества $\overline{[0;\ell]}_S$ определим предельными значениями. Для определенной таким образом функции сохраним прежнее обозначение. Определенная на этом множестве функция становится непрерывной в смысле метрики $\varrho(x;y)$.

Объединение $\overline{[0;\ell]}_S$ и $S(\sigma)$ нам дает множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi\in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$. Мы считаем, что уравнение задано именно на этом множестве.

Будем предполагать, что функции $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$ и $Q(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$, $\min\limits_{x\in\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}} p(x)>0$, $Q(x)$ не убывает, а $F(x,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори:

- $f(x,u)$ при почти всех x (относительно μ-меры) определена и непрерывна по u;
- функция $f(x,u)$ измерима по x при каждом u;
- $|f(x,u)|\leqslant m(x)$, где $m(x)$ — μ-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$.

Будем говорить, что однородное уравнение

$$-\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu}+\left(ru''_{xx}\right)''_{x\mu}-\left(gu'_x\right)'_\mu+Q'_\mu u=0$$

не осциллирует на $[0;\ell]$, если любое его нетривиальное решение имеет не более пяти нулей с учетом кратности.

Через K обозначим конус неотрицательных на $[0;\ell]$ функций.

Доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *оператор суперпозиции, порождаемый функцией $f(x,u)$, непрерывно действует из $C[0;\ell]$ в $L_{p,\sigma}[0;\ell]$;*

2) $f(x,u) \geqslant 0$ *для всех* $x \in [0;\ell]$ *и* $u \geqslant 0$*;*

3) *однородное уравнение* $Lu = 0$ *не осциллирует на* $\overline{[0;\ell]}_\sigma$*;*

4) *при некотором* $R > 0$ *и любом* $\lambda \in (0;1)$ *дифференциальная модель*

$$\begin{cases} Lu = \lambda f(x,u), \\ u(0) = u(\ell) = 0; \\ -\left(pu'''_{xx\mu}\right)(0) + \gamma_1 u''_{xx}(0) = 0; \\ \left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(0) - ru''_{xx}(0) + \gamma_2 u'_x(0) = 0; \\ \left(pu'''_{xx\mu}\right)(\ell) + \gamma_4 u''_{xx}(\ell) = 0; \\ -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(\ell) + ru''_{xx}(\ell) + \gamma_5 u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

не имеет решений $u(x)$ *таких, что*

$$\sup_{x\in(0;\ell)} \frac{u(x)}{u_0(x)} \geqslant R, \tag{3}$$

где $u_0(x) = x\cdot(\ell - x)$.

Тогда задача (1) *имеет хотя бы одно решение в* K.

Условия теоремы естественно проверять при достаточно больших R. Поэтому конкретизация её условий мы можем проводить в терминах асимптотических свойств функции $f(x,u)$.

Литература

1. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

4. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

5. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

6. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

7. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

8. Шабров С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

9. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

10. Баев, А. Д. Дифференциал Стилтьеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 627–629.

11. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

12. Бородина, Е. А. Об одной граничной задаче шестого порядка с сильной нелинейностью / Е. А. Бородина, Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 65–69.

13. О числе решений нелинейной граничной задачи четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Е. А. Бородина,

Ф. В. Голованева, М. Б. Давыдова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2019. — № 3. — С. 93–100.

14. Дифференциал Стилтьеса в импульсных нелинейных задачах / А. Д. Баев, Д. А. Чечин, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 490, № 1. — С. 9–12.

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

М.Н. Ботороева, О.С. Будникова, С.С. Орлов (Иркутск, ИГУ)

masha888888@mail.ru, osbud@mail.ru, orlov_ sergey@inbox.ru

Пусть $\mathbb{R}^{n\times n}$ — вещественное линейное пространство квадратных матриц порядка n и $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ — компакт из точек $(t,s) \in [0;\,1]\times[0;\,t]$. Рассмотрим *интегро-алгебраическое уравнение* (ИАУ) вида

$$A(t)u(t) - \int\limits_0^t H(t,s)u(s)\,ds = f(t),\ t \in [0;\,1], \tag{1}$$

с искомой вектор-функцией $u:\ [0;\,1] \to \mathbb{R}^n$ и с заданными оператор-функциями $A:\ [0;\,1] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $H:\ \Delta \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и вектор-функцией $f:\ [0;\,1] \to \mathbb{R}^n$, причем $A(t) \neq \mathbb{O}_n$ и $\det A(t) = 0$ для всех $t \in [0;\,1]$, где $\mathbb{O}_n$ — нуль-матрица порядка n. В развернутой форме ИАУ (1) является линейной системой, которая содержит взаимно связанные алгебраические уравнения и интегральные уравнения Вольтерры первого и второго рода, что оправдывает название этого объекта. В данном докладе планируется изложить результаты исследования разрешимости и качественных свойств решений ИАУ (1) с ядрами

$$H(t,s) = s^{-a}K(t,s),\ H(t,s) = (t-s)^{-a}K(t,s),\ a \in (0;\,1),$$

имеющими слабые степенные особенности на границах $s = 0$ и $s = t$ компакта Δ, где оператор-функция $K:\ \Delta \to \mathbb{R}^{n\times n}$ предполагается по крайней мере непрерывной на Δ по совокупности переменных. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1] и [2].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ВАНТ (проект № 20-51-54003 Вьет_а).

Литература

1. Bulatov M.V. Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations / M.V. Bulatov, P.M. Lima, E.B. Weinmüller // Cent. Eur. J. Math. — 2014. — Vol. 12, No. 2. — P. 308–321.

2. Булатов М.В. Численное решение интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в ядре k-шаговыми методами / М.В. Булатов, О.С. Будникова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия Математика. — 2015. — Т. 13. — С. 3–15.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОТИВООПУХОЛЕВОЙ ТЕРАПИИ, ОСНОВАННОЙ НА ИНЪЕКЦИЯХ ДК И АНТИ-PD-L1[1]

А.С. Братусь, М.К. Чаудхари, А.М. Котюков (Москва, МИИТ, МГУ, РУДН, ИПУ РАН)

alexander.bratus@yandex.ru

Вакцина против рака - это особая форма иммунотерапии, которая направлена на усиление собственного иммунного ответа пациента на опухолевые клетки. Такая вакцина разрабатывается для конкретного пациента и своего типа опухоли. Проблемы с разработкой эффективной вакцины против рака вызваны несколькими причинами, такими как изменчивость пациентов, неоднородность многих заболеваний и сложность иммунного ответа.

Перспективный иммунотерапевтический подход к лечению нескольких типов рака включает использование дендритных клеток (ДК). ДК являются частью адаптивного иммунного ответа и функционируют как антигенпрезентирующие клетки. Незрелые ДК получают из костного мозга и располагаются в периферической ткани. После того, как они вступили в контакт с патогеном, ДК начинают созревать и мигрировать в лимфоидные органы, где они стимулируют клеточную дифференциацию и созревание цитотоксических Т-лимфоцитов (ЦТЛ). Несколько активированных ЦТЛ впоследствии мигрируют в проблемную ткань и образуют часть адаптивного иммунного ответа, в то время как другие становятся клетками памяти, способными быстро реагировать на провокацию второго патогена. Другая иммунотерапия рака включает

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 21-51-10006 и № 20-04-60157).

моноклональные антитела анти-PD-L1, которые применяются как самостоятельно, так и в сочетании с другими методами лечения.
Рецепторы PD-1 на активных Т-клетках широко изучаются в связи с их ролью в регуляции активности Т-клеток. Они связываются с лигандом PD-L1, создавая естественный путь, который блокирует активность Т-клеток и способствует профилактике аутоиммунитета. Исследования показывают, что некоторые опухолевые клетки экспрессируют PD-L1. Это позволяет им использовать преимущества иммунной регуляции PD-1 / PD-L1 и уклониться от ответа Т-клеток. Анти-PD-L1 связывается с лигандом PD-L1 и блокирует путь, позволяя Т-клетке различать опухолевую клетку.
В работе рассматривается модель, разработанная в [1] и [2], которая основана на модели активации иммунной системы и опухолево-иммунных взаимодействий, вулючающая уравнения задержки [3]. В [1] и [2] используются экспериментальные данные, которые представлены в [5]. В [1] разработана математическая модель, которая описывает динамику адаптивного ответа на аутологичную вакцину против цельноклеточного рака. В этой статье были исключены уравнения с запаздыванием из [3] и [4]. Эти модели содержат уравнения запаздывания для описания периода синаптического соединения. В [2] были разработаны независимые модели двух методов терапии с помощью ДК, методы лечения были адаптированы к экспериментальным данным и представлена окончательная информативная модель комбинированной терапии. Было показано, что модель, рассмотренная в этой статье, является гибкой и позволяет отслеживать иммунную кинетику как мышей, так и людей. Кроме того, было получено несколько параметров моделирования для различных типов рака, которые имеют наибольшее влияние на размер опухоли на ранних стадиях заболевания.
В статье ставится задача оптимального управления. Для модели с параметрами из [1] и [2] изучается влияние инъекции постоянного тока и анти-PD-L1 на опухоль. Проверяется возможность предотвращения роста опухоли с помощью периодических инъекций.

Литература

1. Kose E., Moore S., Ofodile C., Radunskaya A., Swanson E.R., Zollinger E. Immuno-kinetics of immunotherapy: dosing with DCs / E. Kose., S. Moore, C. Ofodile, A. Radunskaya, E.R. Swanson,

E. Zollinger // Letters in Biomathematics —2017. — Vol. 4, No. 1. — P. 39–58. DOI:10.1080/23737867.2017.1289129

2. Radunskaya A., Kim R., Woods II T. Mathematical Modeling of Tumor Immune Interactions: A Closer Look at the Role of a PD-L1 Inhibitor in Cancer Immunotherapy / A. Radunskaya, R. Kim, T. Woods II // Spora: A Journal of Biomathematics —2018. —Vol. 4, No.1. —P. 25–41. DOI: http://doi.org/10.30707/SPORA4.1Radunskaya

3. de Pillis L., Gallegos A., Radunskaya A. A model of dendritic cell therapy for melanoma / L. de Pillis, A. Gallegos, A. Radunskaya // Frontiers in Oncology —2013 —Vol. 3. —P. 1–14.

4. Ludewig B., Krebs P., Junt T., Metters H., Ford N.J., Anderson R.M., Bocharov G. Determining control parameters for dendritic cell-cytotoxic T lymphocyte interaction / B. Ludewig, P. Krebs, T. Junt, H. Metters, N.J. Ford, R.M. Anderson, G. Bocharov // European Journal of Immunology —2004 —Vol. 34. — P. 2407–2418.

5. Sagiv-Bar I., Kohrt H.E.K., Czerwinski D.K., Ng P.P., Chang B.Y., Levy R. Therapeutic antitumor immunity by checkpoint blockade is enhanced by ibrutinib, an inhibitor of both BTK and ITK / I. Sagiv-Bar, H.E.K. Kohrt, D.K. Czerwinski, P.P. Ng, B.Y. Chang, R. Levy // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America —2015 —Vol. 112, No. 9. —P. E966–E972.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

М.В. Булатов, Л.С. Соловарова (Иркутск, ИДСТУ СО РАН)
mvbul@icc.ru, soleilu@mail.ru

В докладе рассмотрена задача

$$A(t)x^{''}(t) + B(t)x^{'}(t) + C(t)x(t) = f(t),\ t \in [0,1],$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, x^{'}(t)|_{t=0} = x_0^{'},$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-29-10019, 20-51-S52003 МНТ-а).

где $A(t), B(t), C(t)$ – $(n \times n)$-матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ – заданная и искомая n-мерные вектор-функции, соответственно, $x_0, x_0^{'} \in R^n$. Здесь и далее предполагается, что $detA(t) \equiv 0$. Такие системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями второго порядка(ДАУ2). В исследованиях на предмет существования единственного решения таких задач большую роль играют матричные полиномы [1].

Для ДАУ2 предложены многошаговые разностные схемы. Проведены анализ устойчивости таких схем и расчеты модельного примера.

Литература

1. Булатов М.В. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка /М.В. Булатов, Минг-Гонг Ли // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 10. —С. 1299–1306.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ И ИХ ОПТИМИЗАЦИЯ[1]

Е.В. Булинская (Москва, МГУ)
ebulinsk@yandex.ru

Риск - это ключевое слово во всех исследованиях, связанных со страхованием. Как известно, риск возникает в тех случаях, когда заранее неясно, будет ли исход благоприятным или неблагоприятным. Все риски делятся на чистые и спекулятивные. Первые приводят к потерям (ущербу), а вторые могут повлечь не только потери, но и доход (прибыль). Спекулятивные риски изучает финансовая математика. Чистые риски, которыми занимается актуарная математика, делятся на физические, вызванные природными явлениями или деятельностью человека, и моральные, обусловленные нечестным или недобросовестным поведением застрахованных. Для их исследования требуются различные математические методы, называемые в совокупности «актуарные науки» (см. [1]). Методы разделения и перераспределения риска были известны еще во втором тысячелетии до нашей эры. Однако актуарные науки возникли значительно позднее, в 17-м веке. История их развития насчитывает

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00487).

4 периода (детерминистический, стохастический, финансовый и современный). Отметим, что стохастический период знаменит созданием теории коллективного риска (классическая модель Крамера-Лундберга и ее многочисленные модификации). Современный период характеризуется рассмотрением сложных систем, переплетением актуарных и финансовых проблем, унификацией стоимостного и надежностного подходов и применением мощного математического аппарата (см. [2]). Пристальное внимание в последнее десятилетие уделяется дискретным моделям, так как они позволяют получать решения в явном виде, а во многих ситуациях более точно отражают суть происходящих процессов. С другой стороны, они могут служить хорошим приближением для процессов с непрерывным временем (см. [3]). Поэтому в докладе будет рассмотрен ряд моделей с непрерывным и дискретным временем.

Основная цель риск-менеджмента (или принятия решений в условиях неопределенности) — это оптимизация функционирования исследуемой системы, позволяющая минимизировать, а в лучшем случае вовсе исключить возникающий риск. Существует целый ряд оптимизационных критериев и различные классы допустимых управлений. Так, возможно управлять выбором выплачиваемых дивидендов, видом договора перестрахования, инвестициями, банковскими займами и др.

Приведем для примера один из простейших результатов для модели с дискретным временем, банковскими займами и пропорциональным перестрахованием. Предположим, требования на возмещение убытков описываются последовательностью независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин с конечным средним. Страховщик передает в перестрахование долю θ поступивших требований, а после перестрахования получает премию M. Кроме того, в начале каждого периода (год, месяц, день) он может брать заем по некоторой процентной ставке. Если имеющихся средств недостаточно, возможен экстренный заем с повышенной ставкой. Задача заключается в выборе оптимальной политики займов, т.е. минимизирующей дополнительные ожидаемые издержки. Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Оптимальная политика займов характеризуется неубывающей последовательностью критических уровней y_n таких, что на первом шаге n-шагового процесса, если начальный капитал x меньше y_n, то его надо увеличить с помощью займа до y_n. В противном случае заем не нужен.*

Для данной модели установлено предельное поведение капитала при бесконечном увеличении горизонта планирования, асимптотически оптимальное управление, а также устойчивость к малым флуктуациям параметров и возмущениям распределений. Аналогичные проблемы исследованы и для других моделей.

Литература

1. Булинская Е.В. Теория риска и перестрахование / Е.В. Булинская. — М. : Мэйлер, 2008. — 190 с.

2. Bulinskaya E. New Research Directions in Modern Actuarial Sciences / E. Bulinskaya // Modern problems of stochastic analysis and statistics - selected contributions in honor of Valentin Konakov, ed. V.Panov. — Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 208, 2017. — P. 349–408.

3. Dickson D.C.M. Some optimal dividends problems / D.C.M. Dickson, H. Waters // ASTIN Bulletin — 2004. — V. 34. — P. 49–74.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ГЛОБАЛЬНО НЕЛОКАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЗАМОРОЖЕННЫМ АРГУМЕНТОМ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ ПО СПЕКТРУ[1]

С.А. Бутерин (Саратов, СГУ)
buterinsa@info.sgu.ru

Рассмотрим нелокальный оператор Штурма—Лиувилля вида

$$\ell y = -y''(x) + q(x)y(a), \quad 0 < x < 1, \quad y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(1) = 0 \qquad (1)$$

с комплексным потенциалом $q(x) \in L_2(0,1)$, $\alpha, \beta \in \{0,1\}$ и $a \in [0,1]$. Известно, что возможность однозначно восстановить $q(x)$ по спектру ℓ зависит от трех параметров a, α и β. В [1] получено полное описание всех возможных случаев для $a \in \mathbb{Q}$, тогда как для $a \notin \mathbb{Q}$ однозначность имеет место при любых α и β [2]. Оператор с замороженным аргументом ℓ относится к так называемым нагруженным дифференциальным операторам, имеющим ряд приложений [3].

В [4] исследовались свойства спектра и регуляризованные следы аналогичных операторов, заданных на графах типа звезды:

$$-y_j''(x) + q_j(x)y_j(a_j) = \lambda y_j(x), \;\; 0 < x < 1, \;\; j = \overline{1,m}, \;\; m \geqslant 2, \qquad (2)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70005).

$$y_1(0) = y_j(0), \;\; j = \overline{2,m}, \quad \sum_{j=1}^{m} y_j'(0) = 0, \tag{3}$$

$$y_j^{(\alpha_j)}(1) = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{4}$$

с комплексными $q_j(x) \in W_2^1[0,1]$, $a_j \in (0,\pi)$, $\alpha_j \in \{0,1\}$, $j = \overline{1,m}$. Причем в [4] значения всех α_j предполагались одинаковыми.

Краевую задачу (2)—(4) можно отнести к *локально* нелокальному случаю, поскольку замороженный аргумент a_j на каждом j-ом ребре графа не влияет на решение уравнений на остальных ребрах.

С точки зрения приложений, например, в процессах с обратной связью естественно рассмотреть *глобально* нелокальный случай:

$$-y_j''(x) + q_j(x)y_1(a) = \lambda y_j(x), \;\; 0 < x < 1, \;\; j = \overline{1,m}, \;\; m \geqslant 2, \tag{5}$$

с единственным замороженным аргументом, без ущерба для общности принадлежащим первому ребру, но влияющим на весь граф.

Заметим, что оператор, соответствующий задаче (3)—(5), при $m = 2$ является оператором вида (1). Рассмотрим *обратную задачу*: по спектру краевой задачи (3)—(5) найти функции $q_j(x)$, $j = \overline{1,m}$. Для краткости ограничимся простейшим случаем, отличным от (1), т.е. $m = 3$, а спектр занумеруем по асимптотике: $\{\lambda_{n,\nu}\}_{n\geqslant 1, \nu=\overline{1,3}}$. Обозначим одним и тем же символом $\{\varkappa_n\}$ различные элементы l_2.

Теорема 1. *Пусть $a = 0$ и все $\alpha_j = 0$. Тогда спектр имеет вид*

$$\lambda_{n,1} = \lambda_{n,2} = (\pi n)^2, \quad \lambda_{n,3} = \left(\pi\left(n - \frac{1}{2}\right) + \frac{\varkappa_n}{n}\right)^2. \tag{6}$$

Обратно, для любых чисел вида (6) существует единственная комплексная функция $q(x) \in L_2(0,1)$, такая что $\{\lambda_{n,\nu}\}_{n\geqslant 1, \nu=\overline{1,3}}$ является спектром краевой задачи (3)—(5) со всевозможными потенциалами $q_j(x) \in L_2(0,1)$, $j = \overline{1,3}$, сумма которых равна $q(x)$.

Итак, в условиях теоремы 1 задание спектра может определить потенциал полностью лишь на одном ребре, а две трети спектра *вырождаются*, т.е. не несут информацию о потенциалах. Аналогично при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $\alpha_3 = 1$ вырождается только треть спектра, а однозначно определяются уже две функции: $q_1(x) + q_2(x)$ и $q_3(x)$.

Выбрав другое a, можно восстановить и все потенциалы.

Теорема 2. *Пусть $a = 1$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$. Тогда*

$$\lambda_{n,1} = \left(\pi\left(n - \frac{1}{2}\right) + \frac{\varkappa_n}{n}\right)^2, \; \lambda_{n,\nu} = \left(\pi(n + 2 - \nu) + (-1)^\nu \alpha + \frac{\varkappa_n}{n}\right)^2,$$

где $\nu = 2, 3$ *и* $2\alpha = \arccos(1/3)$. *Кроме того, для любых чисел такого вида существуют единственные потенциалы* $q_j(x) \in L_2(0,1)$, $j = \overline{1,3}$, *такие что* $\{\lambda_{n,\nu}\}_{n\geqslant 1, \nu=\overline{1,3}}$ *является спектром (3)—(5).*

Аналогичные результаты можно получить и для других $a \in \mathbb{Q}$. Для иррациональных a имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ *и* $\alpha_3 = 1$, *но* $a \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ *и*

$$\cos\frac{2\pi n}{1-a} \neq -\frac{1}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда задание спектра однозначно определяет все $q_j(x)$, $j = \overline{1,3}$.

Таким образом, однозначная разрешимость обратной задачи может достигаться выбором положения точки a и краевых условий. Возможность восстановить оператор по спектру является новым качеством в теории обратных задач для операторов на графах. Например, для восстановления классического оператора Штурма—Лиувилля на графе-дереве нужно задавать m спектров специально подобранных краевых задач, где m — число граничных вершин [5].

Аналогичные глобально нелокальные операторы с замороженным аргументом можно задать на любом геометрическом графе, включая графы с циклами. В связи с этим приобретает интерес задача отыскания таких положений точки a, а также краевых условий в граничных вершинах, при которых будет иметь место однозначная разрешимость обратной задачи, а также задача описания изоспектральных потенциалов, когда ее нет. При этом очевидно, что для более сложных графов и, в частности, для графа-звезды с более чем тремя ребрами для достижения однозначной разрешимости обратной задачи необходимо вовлекать и другие типы краевых условий, такие как условия Робена с разными коэффициентами.

В заключение отметим, что в [6] рассматривалась аналогичная обратная задача для графа типа звезды, но со специальным нелокальным условием Кирхгофа, обеспечивающим самосопряженность оператора. Однако такое рассмотрение не обнаруживает возможности однозначного восстановления оператора по спектру.

Литература

1. Buterin S., Kuznetsova M. On the inverse problem for Sturm—Liouville-type operators with frozen argument: rational case, Comp. Appl. Math. (2020) 39:5, 15pp.

2. Wang Y.P., Zhang M., Zhao W., Wei X. Reconstruction for Sturm—Liouville operators with frozen argument for irrational cases, Appl. Math. Lett. 111 (2021) 106590.

3. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение / А.М. Нахушев. — М. : Наука, 2012. — 232 с.

4. Hu Y.-T., Huang Z.-Y., Yang C.-F. Traces for Sturm—Liouville operators with frozen argument on star graphs, Results Math. (2020) 75:37, 9pp.

5. Yurko V.A. Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs, Inverse Problems 21 (2005) 1075–1086.

6. Nizhnik L.P. Inverse eigenvalue problems for nonlocal Sturm—Liouville operators on a star graph, Methods Funct. Anal. Topol. 18 (2012) 68—78.

РАЗРЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

А.П. Бырдин, А.А. Сидоренко, О.А. Соколова (Воронеж, ВГТУ)

sidorenko6302@mail.ru, sokolovaoa203@mail.ru

Рассмотрим метод построения обратного соотношения для реологических уравнений, обобщающих закон Гука на случай нелинейной наследственно-упругой однородной и изотропной среды, наследственные свойства которой определяются нелинейными аналитическими функционалами:

$$\frac{P}{3}\sigma_i(t) = \lambda\hat{\Lambda}\theta(t) + 2\mu\hat{G}\varepsilon_i(t), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

$$P = \frac{P_0}{K}, \quad P_0 = \max|\sigma_i|, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{3K}, \quad \mu = \frac{\mu_0}{3K}, \quad \sigma_i = \frac{\sigma_i^{(0)}}{P_0},$$

где $\sigma_i^{(0)}$ — нормальные напряжения, ε_i и θ — компоненты деформации и объемная деформация, λ_0 и μ_0 —- параметры Ламе, K — модуль объемного сжатия, $\hat{\Lambda}$ и $\hat{G}$ — нелинейные аналитические функционалы, представленные рядами Вольтерра-Фреше

$$\hat{F}u = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n u, \qquad \hat{F}_n u = \int \overset{\infty}{\underset{0}{\cdots}} \int F_n(t_1, \ldots, t_n) \prod_{m=1}^{n} u(t - t_k) dt_k, \tag{2}$$

Λ_1 и $G_1(t)$ аддитивно содержат δ-функцию и регулярную часть. Поскольку касательные напряжения σ_{ij} определяются одним нелинейным функционалом от деформаций сдвига, обращение этих соотношений получим методом, развитым в [1].

В качестве начального приближения $\varepsilon_i^{(1)}$ к решению системы (1) возьмем точное решение уравнений при $\hat{G}_n = 0\,(n \geqslant 2)$, полученное методом рядов Вольтерра. Применяя затем процесс итераций, получим ($\varepsilon_i^{(0)} = 0$):

$$\varepsilon_1^{(k+1)}(t) = \frac{1}{3}\hat{R}\left[P\sigma_0 - 2\mu \sum_{n=2,i=1}^{\infty,3} \left(\hat{G}_n \varepsilon_i^{(k)}\right)\right] + \frac{P_0}{2\mu_0}\hat{G}_1^{-1}\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} -$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(2\hat{G}_{n1}\varepsilon_1^{(k)} - \sum_{i=2}^{3}\hat{G}_{n1}\varepsilon_i^{(k)}\right), \quad \hat{G}_{n1} = \hat{G}_1^{-1}\hat{G}_n, \tag{3}$$

$$\varepsilon_1^{(k+1)}(t) = \varepsilon_1^{(k+1)} \cdot \frac{P_0}{2\mu_0}\hat{G}_1^{-1}(\sigma_1 - \sigma_i) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\hat{G}_{n1}\varepsilon_1^{(k)} - \hat{G}_{n1}\varepsilon_i^{k}\right), (i = 2, 3),$$

$$\hat{R} = \left(3\lambda\hat{\Lambda} + 2\mu\hat{G}_1\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\hat{R}_n, \quad \sigma_0(t) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$

где ядра нелинейных функционалов $\hat{R}_n$ определяются из рекуррентных соотношений через ядра функционалов $\hat{\Lambda}$ и $\hat{G}_1$.

Литература

1. Бырдин А.П. Метод рядов Вольтерра в динамических задачах нелинейной наследственной упругости / А.П. Бырдин, М.И. Розовский // Изв. АН Арм. ССР. — 1985. — Т. 38, № 5. — С. 49–56.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ[1]

Д.В. Валовик, Г.В. Чалышов (Пенза, ПГУ)
dvalovik@mail.ru, 19gordey99@gmail.com

Пусть функции $P(x;\lambda), Q(x;\lambda)$ полдожительны и непрерывны при $(x,\lambda) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ и $P(x;\lambda)$ непрерывно дифференцируема при $x \in [0,1]$. Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля для уравнения

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-71-10015).

$\big(P(x,\lambda)y'(x)\big)' + Q(x,\lambda)y(x) = 0$, где $x \in [0,1]$, а $y|_{x=0} = y|_{x=1} = 0$. Будем предполагать, что справедливы оценки

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\min\limits_{x\in\bar{\mathrm{x}}} P(x,\lambda)}{\max\limits_{x\in\bar{\mathrm{x}}} Q(x,\lambda)} = O(\lambda^{-2a_1}), \quad \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\max\limits_{x\in\bar{\mathrm{x}}} P(x,\lambda)}{\min\limits_{x\in\bar{\mathrm{x}}} Q(x,\lambda)} = O(\lambda^{-2a_2}),$$

где a_1, a_2 – вещественные постоянные и $a_1 \geqslant a_2 > 0$. Несмотря на то что такой задачей занимались многие исследователи [1, 2], она попрежнему представляет интерес. В настоящей работе используется математический аппарат, основанный на введении интегральной характеристической функции [3].

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Сформулированная задача Штурма – Лиувилля имеет бесконечное число собственных значений $\lambda = \widetilde{\lambda}_n$ с точкой накопления на бесконечности; при этом для достаточно больших номеров n справедливы оценка $(\pi n)^{a_2} - \Delta \leqslant \widetilde{\lambda}_{n-1} \leqslant (\pi n)^{a_1} + \Delta$, где $\Delta > 0$ – произвольная постоянная, и, в случае $a_1 = a_2 = a > 0$, оценка $\widetilde{\lambda}_{n-1} = O(n^a)$, где коэффициент при главном члене асимптотики равен π^a.*

Литература

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1 / Дж. Сансоне. — М. :ИЛ, 1953. — 348 с.

2. Mennicken R., Schmid H., Shkalikov A.A. On the eigenvalue accumulation of Sturm-Liouville problems depending nonlinearly on the spectral parameter // Math. Nachr. — 1998. — Vol. 189 — P. 157–170.

3. Валовик Д.В. Об интегральной характеристической функции задачи Штурма-Лиувилля // Матем. сб. — 2020. — Том 211. — № 11 — С. 41–53.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ[1]

В.Б. Васильев (Белгород, НИУ БелГУ)
vbv57@inbox.ru

Основной объект исследования в этой работе – модельное уравнение вида

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in C, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FZWG-2020-0029).

где псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1 \leqslant |A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \leqslant c_2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

де C – выпуклый конус в пространстве $\mathbb{R}^m$, не содержащий целой прямой.

Для исследования разрешимости этого уравнения автор использовал концепцию волновой факторизации эллиптического символа [1], и с ее помощью получил явные конструкции решений для уравнения и связанных с ним некоторых краевых задач в конусе. Были рассмотрен случаи различных конусов и разные типы граничных условий. Однако все конусы имеют определенные размеры (параметры), которые при стремлении к своим предельным значениям превращают конус в другой, иногда меньшей размерности. Так, например, двумерный конус $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1, a > 0\}$ при $a \to 0$ превращается в полуплоскость $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$, а при $a \to \infty$ – в луч $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0, x_2 > 0\}$. В трехмерном пространстве для конуса $C_+^{ab} == \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 > a|x_1| + b|x_2|, a, b > 0\}$ гораздо больше возможностей для «вырождения», параметры a, b могут стремится к 0 или ∞ независимо друг от друга.

Если рассматривать уравнение (1) во внешности конуса C_+^{ab}

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{C_+^{ab}},$$

то при наличии волновой факторизации [1] символа $A(\xi)$ с индексом æ таким, что $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$, можно сконструировать единственное решение этого уравнения в пространстве $H^s(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{C_+^{ab}})$ при дополнительном интегральном условии

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2, x_3) dx_3 = g(x_1, x_2),$$

где $g(x_1, x_2)$ – заданная функция. Оказалось, что решение может иметь предел при $a \to \infty$ или $b \to \infty$ только если граничная функция g удовлетворяет некоторому функционально-интегральному уравнению.

Некоторые варианты предельных переходов рассмотрены в [2,3].

Литература

1. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи / В.Б. Васильев. — М. : КомКнига, 2-е изд., 2010. — 135 с.

2. Vasilyev V.B. On certain 3-dimensional limit boundary value problems / V.B. Vasilyev // Lobachevskii J. Math. — 2020. — V. 31, No 5. — P. 917–925.

3. Kutaiba Sh. On solutions of certain limit boundary value problems /Sh. Kutaiba, V. Vasilyev // AIP Conf. Proc.– 2020. — V. 2293. — P. 110006.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ[1]

В.Б. Васильев, А.А. Ходырева (Белгород, НИУ БелГУ)
711012@bsu.edu.ru

Мы изучаем дискретные аппроксимации для эллиптического псевдодифференциального уравнения

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \tag{1}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$ порядка $\alpha \in \mathbb{R}$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leqslant |A(\xi)| \leqslant c_2(1+|\xi|)^\alpha,$$

C— выпуклый конус в пространстве $\mathbb{R}^2$, не содержащий целой прямой.

Если символ допускает волновую факторизацию относительно конуса C с индексом æ, то при $|æ - s| < 1/2$ уравнение (1) однозначно разрешимо в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(C)$. Для построения дискретных решений рассматривается дискретный аналог [1] уравнения (1)

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m \cap C, \quad h > 0 \tag{2}$$

в дискретных аналогах пространств $H^s(C)$

Вопросы разрешимости дискретного уравнения (2) исследовались в работах [1,2] , некоторые свойства дискретного оператора

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FZWG-2020-0029).

описаны в [3]. Однако в зависимости от индекса периодической волновой факторизации [1] уравнение может иметь более одного решения, и тогда приходится к уравнению (2) добавлять дискретные граничные условия. Такая дискретная краевая задача служит аппроксимационной моделью для исходной непрерывной краевой задачи, и условия ее разрешимости аналогичны условиям разрешимости непрерывной задачи, что позволяет для малых h сравнивать дискретные и непрерывные решения.

Литература

1. Vasilyev V.B. The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, and discrete pseudo-differential operators / V.B. Vasilyev // AIP Conf. Proc. — 2017. — V. 1863. — P. 140014.

2. Васильев В.Б. Операторы и уравнения: дискретное и непрерывное / В.Б. Васильев // Итоги науки и техники. Современные математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2019. — Т. 160. — С. 18–27.

3. Васильев В.Б. О некоторых свойствах дискретных операторов / В.Б. Васильев, А.А. Ходырева // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского.. — Казань : Изд-во Академии наук РТ. — 2019. — Т. 58. — С. 43-46.

О ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

В.Б. Васильев, Н.В. Эберлейн (Белгород, НИУ БелГУ)
649377@bsu.edu.ru

Пусть плоский сектор имеет вид $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > a|x_1|, \ a > 0\}$, A – эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1 \leqslant |A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \leqslant c_2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Рассмотрим задачу нахождения нетривиальной пары функций $u_+ \in H^{s_1}(C_+^a), u_- \in H^{s_2}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a})$ из соответствующих пространств Соболева–Слободецкого [1], удовлетворяющих следующим уравнениям

$$(Au_+)(x) = 0, \quad x \in C_+^a,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FZWG-2020-0029).

$$(Av_-)(x) = 0), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{C_+^a},$$

и условий, при которых такая пара может быть определена единственным образом.

Если предположить, что символ допускает волновую факторизацию относительно конуса с индексом æ, то сразу можно заключить, что при

$$|æ - s| < 1/2$$

имеется только тривиальное решение. Мы рассматриваем случай $æ - s = 1 + \delta, |\delta| < 1/2$ и подбираем различные типы дополнительных условий на пары , при которых такая пара может быть однозначно определена. Некоторые варианты условий рассматривались в [2,3], здесь мы вводим в рассмотрение некоторое интегральное условие на искомые функции.

Так, в частности, при дополнительном условии

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2) dx_2 = g(x_1),$$

где g – заданная функция, и линейному соотношению, связывающему граничные значения u_+, u_- на ∂C_+^a, вопрос об однозначной разрешимости сформулированной задачи сопряжения сводится к однозначной разрешимости полученной системы линейных интегральных уравнений. Эта система строится по элементам волновой факторизации и коэффициентам линейного соотношения граничных значений $u_\pm$.

Литература

1. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи / В.Б. Васильев. — М. : КомКнига, 2010. — 135 с.

2. Vasilyev V.B. On some transmission problems in a plane corner / V.B. Vasilyev // Tatra Mt. Math. Publ. — 2015. — V. 63. — P. 291–301.

3. Васильев В.Б. О разрешимости некоторых интегро-дифференциальных уравнений / В.Б. Васильев, Н.В. Эберлейн // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского.. — Казань : Изд-во Академии наук РТ. — 2019. — Т. 58. — С. 46-48.

ПОПЕРЕЧНИКИ ПО КОЛМОГОРОВУ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ШАРОВ[1]

А.А. Васильева (Москва, МГУ)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Для $1 \leqslant p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ обозначим через l_p^m пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_{l_p^m} = \left(\sum\limits_{j=1}^m |x_j|^p\right)^{1/p}$, через B_p^m — единичный шар в l_p^m. При $p = \infty$ в качестве нормы берется $\|(x_1, \ldots, x_m)\|_{l_\infty^m} = \max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\}$.

Задача о колмогоровских поперечниках $d_n(B_p^m, l_q^m)$ изучалась в работах А. Пича, М.И. Стесина, Б.С. Кашина, Е.Д. Глускина, А.Ю. Гарнаева [1]–[7]. В работе Э.М. Галеева [8] были получены порядковые оценки поперечников для пересечения произвольного множества шаров, но для случая $m = 2n$.

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p_1 < p_0 \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leqslant m/2$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Обозначим $d_n = d_n(B_{p_0}^m \cap k^{1/p_1 - 1/p_0} B_{p_1}^m, l_q^m)$.*

Пусть $1 \leqslant p_1 < 2 < p_0 < q < \infty$. Тогда

$$d_n \underset{p_0, p_1, q}{\asymp} \begin{cases} 1, \quad n \leqslant m^{2/q}, \\ (n^{-1/2} m^{1/q})^{\frac{1/p_0 - 1/q}{1/2 - 1/q}}, \quad m^{\frac{2}{q}} \leqslant n \leqslant k^{1-\frac{2}{q}} m^{\frac{2}{q}}, \\ k^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p_0}} n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}}, \quad k^{1-\frac{2}{q}} m^{\frac{2}{q}} \leqslant n \leqslant m/2. \end{cases}$$

Пусть $2 \leqslant p_1 < p_0 < q < \infty$. Тогда

$$d_n \underset{p_0, p_1, q}{\asymp} \begin{cases} 1, \quad n \leqslant m^{2/q}, \\ (n^{-1/2} m^{1/q})^{\frac{1/p_0 - 1/q}{1/2 - 1/q}}, \quad m^{\frac{2}{q}} \leqslant n \leqslant k^{1-\frac{2}{q}} m^{\frac{2}{q}}, \\ k^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}} \left(n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1/p_1 - 1/q}{1/2 - 1/q}}, \quad k^{1-\frac{2}{q}} m^{\frac{2}{q}} \leqslant n \leqslant m/2. \end{cases}$$

Пусть $2 \leqslant p_1 \leqslant q \leqslant p_0$. Тогда

$$d_n \underset{p_0, p_1, q}{\asymp} \begin{cases} k^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p_0}}, \quad n \leqslant k^{1-\frac{2}{q}} m^{\frac{2}{q}}, \\ k^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}} \left(n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1/p_1 - 1/q}{1/2 - 1/q}}, \quad k^{1-\frac{2}{q}} m^{\frac{2}{q}} \leqslant n \leqslant m/2. \end{cases}$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332).

Пусть $1 \leqslant p_1 < 2 < q \leqslant p_0$. *Тогда*

$$d_n \underset{p_0,p_1,q}{\asymp} \begin{cases} k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_0}}, & n \leqslant k^{1-\frac{2}{q}} m^{\frac{2}{q}}, \\ k^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p_0}} n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}}, & k^{1-\frac{2}{q}} m^{\frac{2}{q}} \leqslant n \leqslant m/2. \end{cases}$$

Пусть $q \leqslant 2$, $1 \leqslant p_1 < q \leqslant p_0$. *Тогда*

$$d_n \underset{p_0,p_1,q}{\asymp} k^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_0}}.$$

Пусть $1 \leqslant q \leqslant p_1 < p_0 \leqslant \infty$. *Тогда*

$$d_n \underset{p_0,p_1,q}{\asymp} k^{1/p_1-1/p_0} m^{1/q-1/p_1}.$$

Литература

1. Pietsch A. s-numbers of operators in Banach space / A. Pietsch // Studia Math. — 1974. — V. 51. — P. 201–223.

2. Стесин М.И. Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций / М.И. Стесин // ДАН СССР. — 1975. — Т. 220, № 6. — С. 1278–1281.

3. Кашин Б.С. О поперечниках октаэдров / Б.С. Кашин // УМН. — 1975. — Т. 30, № 4(184). — С. 251–252.

4. Кашин Б.С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций / Б.С. Кашин // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1977. — Т. 41, № 2. — С. 334–351.

5. Глускин Е.Д. О некоторых конечномерных задачах теории поперечников / Е.Д. Глускин // Вестн. ЛГУ — 1981. — Т. 13. — С. 5–10.

6. Глускин Е.Д. Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств / Е.Д. Глускин // Мат. сборник — 1983. — Т. 120 (162), № 2. — С. 180–189.

7. Гарнаев А.Ю., Глускин Е.Д. О поперечниках евклидового шара / А.Ю. Гарнаев, Е.Д. Глускин // ДАН СССР. — 1984. — Т. 277, № 5. — С. 1048–1052.

8. Галеев Э.М. Поперечники по Колмогорову пересечения классов периодических функций и конечномерных множеств / Э.М. Галеев // Матем. заметки. — 1981. — Т. 29, № 5. — С. 749–760.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ[1]

П.А. Вельмисов, А.В. Анкилов (Ульяновск, УлГТУ)
velmisov@ulstu.ru

В работе представлены математические модели одного класса аэрогидроупругих систем – вибрационных устройств, предназначенных для интенсификации некоторых технологических процессов, в частности, вибросмесителей, которые предназначены для размешивания неоднородной суспензии с целью подготовки однородной среды. Исследуется динамическая устойчивость составных частей этих устройств – упругих элементов, представляющих собой деформируемые пластины. Работа является продолжением исследований, представленных в [1]. Принятые в работе определения устойчивости упругого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову.

Вибросмеситель представляет собой проточный канал с деформируемыми элементами, которые могут располагаться как на стенках канала, так и внутри него. Количество и места расположения элементов произвольные. Внутри канала протекает дозвуковой поток идеальной сжимаемой или несжимаемой среды. Аэрогидродинамическая нагрузка на элементы определяется на основе линейной теории движения жидкости и газа. Для исследования динамики упругих элементов используются либо линейные уравнения, описывающие поперечные колебания упругих неоднородных пластин, либо нелинейные уравнения, описывающие продольно-поперечные колебания этих пластин. Сформулированы линейные и нелинейные начально-краевые задачи для систем уравнений в частных производных. На основе построенных функционалов типа Ляпунова для указанных систем, соответствующих начально-краевым задачам, получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на параметры конструкций.

Литература

1. Анкилов А.В. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости / А.В. Анкилов , П.А. Вельмисов. — Ульяновск: УлГТУ, 2019. — 201 с.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-730015).

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ КОВАРИАНТНЫЕ В $\mathbb{R}^3$ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Ю.П. Вирченко, А.Э. Новосельцева (Белгород, БелГУ)
virch@bsu.edu.ru

В работе дается описание класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ всех гиперболических квазилинейных дифференциальных уравнений $\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \mathsf{L}[\boldsymbol{u}]$ дивергентного типа с частными производными первого порядка, которому подчиняется зависящие от параметра t векторные поля $\boldsymbol{u}(t)$ на $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u}(t) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$.

На нелинейные дифференциальные операторы $\mathsf{L}[\boldsymbol{u}]$, определяющие уравнения из класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$, помимо свойства дивергентности накладываются ограничения: инвариантность относительно трансляций по параметру t (времени), инвариантность относительно трансляций пространства $\mathbb{R}^3$, а также ковариантность относительно группы $\mathbb{O}_3$ вращений этого пространства (см. [1]).

Иными словами дается описание класса всех систем из трех квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка порядка дивергентного типа для функций $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) = \langle u_1(t,\boldsymbol{x}), u_2(t,\boldsymbol{x}), u_3(t,\boldsymbol{x})\rangle$, $\boldsymbol{x} = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$, у которых дифференциальные операторы обладают указанными свойствами.

Описание класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ основано: во-первых, на дивергентности действия дифференциального оператора $\mathsf{L}[\boldsymbol{u}] = \langle \mathsf{L}_1[\boldsymbol{u}], \mathsf{L}_2[\boldsymbol{u}], \mathsf{L}_3[\boldsymbol{u}]\rangle$ так, что $\mathsf{L}_j = \nabla_k S_{jk}[\boldsymbol{u}]$; описании класса всех тензор-функций на основе целого рационального базиса δ_{jk}, $u_j u_k$ и единственного инварианта $\boldsymbol{u}^2$ и выделении среди всех уравнений с тензор-функциями $S_{jk}[\boldsymbol{u}]$ таких, которые приводят к гиперболичности уравнения. Последнее достигается посредством доказанного утверждения о совпадении для рассматриваемых систем уравнений понятий гиперболичности и гиперболичности по Фридрихсу (см. [2]).

Теорема 1. *Для того чтобы дифференциальное уравнение класса $\mathfrak{K}_1(\mathbb{R}^3)$ было уравнением гиперболического типа необходимо и достаточно, чтобы оно было гиперболическим по Фридрихсу.*

Литература

1. Mac-Connell A.J. Application of tensor analysis / A.J. Mac-Connell. — New York : Dover Publications, 1957. — 412 p.

2. Годунов С.К. Уравнения математической физики / С.К. Годунов — М. : Наука, 1979. — 392 с.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ[1]

В.В. Власов (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики)
victor.vlasov@math.msu.ru

Изучаются асимптотические и качественные свойства решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1] и имеют ряд других важных приложений.

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений, получены результаты о структуре и локализации их спектра (см. [1]–[4]).

На этой основе установлены результаты о существовании сильных и обобщенных решений этих уравнений, а также получены результаты о представлении решений в виде суммы слагаемых, отвечающих вещественной и невещественной частям спектра упомянутых оператор-функций (см. [1]–[4]).

Для широкого класса ядер интегральных операторов установлены также результаты о существовании и единственности классических решений указанных уравнений, полученные на основе подхода, связанного с применением терии полугрупп (см. [5]).

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ №20-01-00288.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

Литература

1. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений / В.В. Власов, Н.А. Раутиан. — М.: МАКС Пресс, 2016. —488 с.

2. Vlasov V.V., Rautian N.A. Well-posedness and spectral analysis of integrodifferential equations arising in viscoelasticity theory / V.V. Vlasov, N.A. Rautian // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — V. 233, № 4. — P. 555–577.

3. Власов В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости / В.В. Власов, Н.А. Раутиан // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 574–587.

4. Vlasov V.V., Rautian N.A. A Study of Operator Models Arising in Problems of Hereditary Mechanics / V.V. Vlasov, N.A. Rautian // Journal of Mathematical Sciences (N. Y.). —2020. — V. 244, № 2. — P. 170–182.

5. Власов В.В., Раутиан Н.А. О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями / В.В. Власов, Н.А. Раутиан // Дифференциальные уравнения. — 2020. —Т. 56, № 8. —С. 1122–1126.

О СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С НИЛЬПОТЕНТНОЙ ПОЛУГРУППОЙ[1]

Ву Нгуен Шон Тунг, И.В. Тихонов

(Ханой, ВНУ Университет Науки; Москва, ВМК МГУ)

vnsontung@mail.ru, ivtikh@mail.ru

В банаховом пространстве E на отрезке $[0,T] \subset \mathbb{R}$ рассмотрим абстрактную задачу Коши для эволюционного уравнения специального вида:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A) \subset E$, порождающий в E полугруппу $U(t)$ класса C_0 (см. [1], [2]). Элемент u_0 задан в $D(A)$. Неоднородное слагаемое из

[1] This research is funded by the VNU University of Science, Vietnam National University, Hanoi, under project number TN.20.01.

дифференциального уравнения есть произведение скалярной функции $\varphi(t)$ на элемент $g \in E$.

Предположим, что элемент $g \in E$ неизвестен. Для его нахождения добавим к задаче (1) финальное переопределение вида

$$u(T) = u_1 \tag{2}$$

с заданным элементом $u_1 \in D(A)$. Задача (1), (2) для пары $(u(t), g)$ относится к числу *обратных задач* (см. [3]). Ряд общих исследований, связанных с задачами того же типа, что и (1), (2), представлен в работах [4], [5]. Введем сейчас более специальные предположения, позволяющие получить для (1), (2) не только вполне законченные результаты, но и конструктивные методы решения.

Предположение I. Полугруппа $U(t)$ является *нильпотентной*, т. е.

$$U(t) = 0, \quad t \geqslant t_0 > 0, \tag{3}$$

с фиксированным значением $t_0 > 0$ (см. [6], [7]).

Предположение II. Скалярная функция $\varphi(t)$ является *кусочно постоянной* на $[0, T]$, т. е.

$$\varphi(t) = \begin{cases} \alpha_1, & \tau_0 \leqslant t < \tau_1, \\ \alpha_2, & \tau_1 < t < \tau_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \alpha_p, & \tau_{p-1} < t \leqslant \tau_p. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, причем $\alpha_{j+1} \neq \alpha_j$ для $j = 1, \ldots, p-1$ и $\alpha_p \neq 0$. Значения $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{p-1}, \tau_p$ задают разбиение $[0, T]$ по правилу $0 \equiv \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{p-1} < \tau_p \equiv T$.

Согласно общей теории [1], [2] формальное решение задачи Коши (1) записывается через интеграл Дюамеля

$$u(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(t-s)\,\varphi(s) g\, ds, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

При $t = T$ получаем из (5) с учетом (2) соотношение

$$u_1 - U(T)u_0 = \int\limits_0^T U(T-s)\,\varphi(s) g\, ds = \int\limits_0^T U(s)\,\varphi(T-s) g\, ds. \tag{6}$$

Подставим в (6) значения (4) и придем к выражению

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \int\limits_{T-\tau_j}^{T-\tau_{j-1}} U(s)g\, ds = u_1 - U(T)u_0. \tag{7}$$

Это *операторное уравнение первого рода* относительного неизвестного элемента $g \in E$.

Обозначим $h = u_1 - U(T)u_0$ и подействуем на обе части (7) оператором $(-A)$, обратимым в силу предположения I. Используя стандартные формулы из теории полугрупп, получаем *операторное уравнение второго рода*

$$\beta g - Bg = -Ah, \tag{8}$$

где $\beta \equiv \alpha_p \neq 0$ (по условию), а оператор B имеет вид

$$B = \alpha_p\, U(T - \tau_{p-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \big(U(T - \tau_{j-1}) - U(T - \tau_j)\big). \tag{9}$$

Добавим в (9) нулевое слагаемое $\big(-\alpha_0 U(T)\big)$ со значением $\alpha_0 = 0$ и применим преобразование Абеля. Придем к выражению

$$B = \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k-1})\, U(T - \tau_{k-1}). \tag{10}$$

Такой оператор B и все его степени B^n элементарно вычисляются на практике.

Более того, в силу предположения I оператор B оказывается нильпотентным, и $B^n = 0$ при всех показателях $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $n \geqslant t_0/(T - \tau_{p-1})$, где значение $t_0 > 0$ — то же, что и в формуле (3). Поэтому решение уравнения (8) однозначно восстанавливается по формуле

$$g = \sum_{n=0}^{N_0} \frac{1}{\beta^{n+1}}\, B^n(-Ah), \qquad N_0 \equiv \left\lceil \frac{t_0}{T - \tau_{p-1}} \right\rceil - 1, \tag{11}$$

за конечное число итераций. Поясним, что в записи значения N_0 использован так называемый *потолок*, т. е. наименьшее целое число, большее или равное $t_0/(T - \tau_{p-1})$.

Теорема. *Пусть выполнены предположения* I *и* II. *Тогда обратная задача* (1), (2) *при любом выборе элементов* $u_0, u_1 \in D(A)$ *имеет и притом единственное решение* $(u(t), g)$ *с функцией* $u(t)$ *из формулы* (5) *и элементом* g *из формулы* (11), *где* $h = u_1 - U(T)u_0$, $\beta \equiv \alpha_p \neq 0$, *а* B *—нильпотентный оператор* (10).

Отметим еще, что степени оператора B можно вычислять в виде

$$B^n = \sum_{\substack{j_1 \geqslant 0, \, \dots \, , \, j_p \geqslant 0, \\ j_1 + \, \dots \, + j_p = n}} M_n^{j_1, \, \dots \, , \, j_p} \; U\left(nT - \sum_{k=1}^{p} j_k \, \tau_{k-1}\right) \qquad (12)$$

с числовыми коэффициентами

$$M_n^{j_1, \, \dots \, , \, j_p} = \frac{n!}{j_1! \, \dots \, j_p!} \prod_{k=1}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k-1})^{j_k}. \qquad (13)$$

Формулы (12), (13) предложил Б. Кабдуали при рассмотрении идейно близкой нелокальной задачи, исследованной им по схеме [8].

Полученные результаты можно применять к обратным задачам для уравнения переноса, взятого в ограниченной области и без интеграла столкновений. Чтобы не затруднять изложение громоздкими техническими деталями, связанными с многомерным случаем (см. [9]), приведем простой модельный пример.

Поставим обратную задачу для одномерного уравнения простого переноса

$$\begin{cases} u_t + a u_x = \varphi(t) g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, T) = u_1(x), \end{cases} \qquad (14)$$

с неизвестными функциями $u = u(x, t)$ и $g(x)$. Значения $a > 0$, $l > 0$ и $T > 0$ считаем заданными. Обратную задачу (14) рассматриваем как простую модель к абстрактной задаче (1), (2) в банаховом пространстве $E = L^1[0, l]$. Оператор простого переноса $A = -a\, d/dx$ задан на области определения $D(A) = \{f \in AC[0, l]\colon\ f(0) = 0\}$. При этом A порождает нильпотентную полугруппу $U(t)$, действующую в пространстве $E = L^1[0, l]$ по правилу:

$$U(t) f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant at, \\ f(x - at), & at < x \leqslant l, \end{cases} \qquad (15)$$

с той оговоркой, что $U(t) \equiv 0$ при $t \geqslant l/a$. То есть полугруппа (15) является нильпотентной со значением $t_0 = l/a$ (см. формулу (3)).

Итак, для задачи (14) предположение I выполнено. Выберем теперь функцию $\varphi(t)$ вида (4) (как в предположении II). Тогда обратная задача (14) будет удовлетворять всем нужным условиям и допускать конструктивное решение согласно теореме, сформулированной выше.

Подобная схема применима и в более сложных многомерных ситуациях, причем основные формулы (10)–(13) легко реализуются на практике. Подчеркнем, что сами эти формулы являются точными и не дают никакой погрешности. Вернее, погрешность может возникать лишь по двум причинам: а) при численном моделировании действия полугруппы $U(t)$; б) при вычислении элемента Ah, нужного для формулы (11). Трудность здесь связана с тем, что оператор A является неограниченным, и вычисление Ah может оказаться неустойчивым по отношению к малым погрешностям, появившимся при нахождением $h = u_1 - U(T)u_0$.

Литература

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

2. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — N.Y.: Springer Verlag, 1983. — 280 p.

3. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — N.Y., Basel: Marcel Dekker, 2000. — 744 p.

4. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56, вып. 2. — С. 99–113.

5. Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг. Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 103–118.

6. Balakrishnan A. V. On superstability of semigroups // In: M.P. Polis et al (eds.). Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. CRC Research Notes in Mathematics. — Chapman and Hall: 1999. — P. 12–19.

7. Jian-Hua Chen, Wen-Ying Lu. Perturbation of nilpotent semigroups and application to heat exchanger equations // Applied Mathematics Letters. —2011. — Vol. 24, Iss. 10. — P. 1698–1701.

8. Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг. Разрешимость нелокальной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 4. — С. 490–510.

9. Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг. Формулы явного решения в модельной нелокальной задаче для уравнения простого переноса // Матем. заметки СВФУ. — 2017. — Т. 24, № 1. — С. 57–73.

АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С УЧЁТОМ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ[1]

Ю.Е. Гагарин, У.В. Никитенко, М.А. Степович (Калуга, КФ МГТУ им. Н. Э. Баумана),(Калуга, КФ МГТУ им. Н. Э. Баумана),(Калуга, КГУ им. К. Э. Циолковского)

gagarin_ye@bmstu.ru

При использовании байесовских сетей доверия оценивание апостериорных вероятностей исходных гипотез происходит при условии наблюдения отдельных свидетельств. При этом информация об отдельных свидетельствах может поступать не сразу, а постепенно. В этом случае возможно последовательное оценивание апостериорных вероятностей по мере поступления отдельных свидетельств. Вершинами в байесовской сети доверия являются события A_j, $j = \overline{1, M}$, для которых определены априорные вероятности $P(A_j)$. В результате наблюдений получаем отдельные свидетельства X_k, для которых определяются условные вероятности $P(X_k/A_j)$. По формуле Байеса можно найти апостериорные вероятности:

$$P(A_j/X_k) = \frac{P(X_k/A_j)P(A_j)}{\sum_{j=1}^{M} P(X_k/A_j)P(A_j)}.$$

Отдельные свидетельства X_k являются случайными величинами и для условных вероятностей $P(X_k/A_j)$ можно найти их интервальные оценки

$$P_H(X_k/A_j) \leqslant P(X_k/A_j) \leqslant P_B(X_k/A_j)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-03-00271, при финансовой поддержке РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

Предлагаемый алгоритм, учитывающий интервальные оценки условных и апостериорных вероятностей, позволяет повысить достоверность принятия решения в байесовских сетях доверия.

Литература

1. Gagarin Yu.E. Considering information uncertainty when assessing risk in bayesian belief network /Yu.E. Gagarin, U.V. Nikitenko, M.A. Stepovich //Journal of Physics: Conference Series. Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems — 2020 J. Phys.: Conf. Ser.1479 012054

2. Гагарин Ю.Е. Использование конфлюентного анализа для интервального оценивания функции Гаусса / Ю.Е. Гагарин, У.В. Никитенко, М. А. Степович // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2020. — С. 105–108.

О СХОДИМОСТИ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ[1]

В.В. Галатенко, Т.П. Лукашенко, В.А. Садовничий (Москва)

vgalat@imscs.msu.ru / lukashenko@mail.ru / info@rector.msu.ru

Орторекурсивные разложения как обобщение ортогональных разложений в ряды Фурье впервые появидись в 1999 году в [1,2]. Дадим их определение.

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность нормированных элементов H, f — разлагаемый элемент H.

Определение 1. *Орторекурсивное разложение* f по последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяется индуктивно через построение последовательностей остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и коэффициентов $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ разложения:

$$r_0 = f; \quad \hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n), \quad r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n \quad (n = 1,\, 2,\, 3\, \ldots).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ называется орторекурсивным разложением (орторекурсивным рядом Фурье) элемента f по $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

[1] Работа второго автора поддержена РФФИ в рамках научного проекта №20-01-00584

Легко видеть, что если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система, то коэффициенты $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются обычными коэффициентами Фурье, а орторекурсивный ряд Фурье — обычным рядом Фурье.

Для орторекурсивных разложений верны аналоги тождества Бесселя $\|r_N\|^2 = \left\|f - \sum\limits_{n=1}^{N} \hat{f}_n e_n\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{n=1}^{N} |\hat{f}_n|^2$ и неравенства Бесселя $\|f\|^2 \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2$, а аналог равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2$ имеет место тогда и только тогда, когда орторекурсивный ряд Фурье сходится к разлагаемому элементу.

Заметим, что если члены последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не задавать сразу, а выбирать очередной элемент e_n на n–ом шаге по какому-то правилу, то можно получить различные варианты так называемых „жадных“ разложений (алгоритмов). Но мы остановимся на разложениях по фиксированным системам. Отметим, что обобщениями таких разложений являются введенные соответственно в [3] и [4] разложения по последовательности систем и по последовательности подпространств.

В настоящее время известен целый ряд результатов о сходимости орторекурсивных разложений по норме, заданной скалярным произведением [5–7] (для функциональных систем это L^2–норма). В [5] рассматривалась сходимость и по другим L^p–нормам, а также сходимость почти всюду для систем нормированных характеристических функций промежутков.

Авторами получены результаты о сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по произвольным функциональным системам. Результаты формулируются в терминах множителей Вейля аналогично случаю ортогональных разложений [8, Гл. 9, § 1].

Определение 2. Неубывающая числовая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [1, \infty)$ называется *множителем Вейля* сходимости почти всюду орторекурсивного разложения по последовательности элементов $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$, если из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\hat{f}_n|^2$ следует сходимость п.в. орторекурсивного разложения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n(x)$.

Была обнаружена существенная разница результатов для орторекурсивных разложений, которые сходятся к разлагаемой функции по норме, и для тех, которые не сходятся по норме к разлагаемой функции. Для последних был получен следующий результат.

Условием на числовую последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, необходимым и достаточным для того чтобы эта последовательность была множителем Вейля сходимости п.в. орторекурсивного разложения по каждой нормированной системе, является сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n},$$

см. [9].

Условие сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ может быть существенно ослаблено, если ограничиться рассмотрением орторекурсивных разложений, сходящихся по норме к разлагаемой функции (что имеет место, в частности, для полных ортонормированных систем). Более конкретно, была получена следующая теорема [7].

Теорема. *Если орторекурсивное разложение функции $f(x) \in L^2(\Omega)$ по последовательности нормированных функций $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ в $L^2(\Omega)$ и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}|\hat{f}_n|^2,$$

то орторекурсивное разложение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n(x)$ сходится к $f(x)$ п.в. на Ω.

Таким образом, для орторекурсивных разложений, сходящихся по норме к разлагаемой функции, множителем Вейля является последовательность $\lambda_n = \sqrt{n}$. В последнее время удалось усилить этот результат. Доказано, что для орторекурсивных разложений, сходящихся по норме к разлагаемой функции, множителем Вейля является последовательность $\lambda_n = \sqrt[3]{n}$, т.е. в этом случае из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}|\hat{f}_n|^2,$$

следует сходимость орторекурсивного разложения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n(x)$ почти всюду на Ω к разлагаемой функции $f(x)$.

Вероятно и этот результат не является окончательным. Хорощо известно, что для общих ортогональных систем наилучшим множителем Вейля является последовательность $\ln^2 n$, см. [8, Гл. 9]. Она же является множителем Вейля и для ряда неортогональных систем, в частности фреймов, см. [11]. Какая последовательность является наилучшим множителем Вейля для сходящихся по норме орторекурсивных разложений неизвестно.

Литература

1. Лукашенко Т.П. Рекурсивные разложения, подобные ортогональным / Т.П. Лукашенко // VII междунар. конф. МАТЕМАТИКА. ЭКОНОМИКА. ЭКОЛОГИЯ. ОБРАЗОВАНИЕ. Международный симпозиум РЯДЫ ФУРЬЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ. 26 мая - 1 июня 1999г. Тезисы докладов. — Ростов-на-Дону: РГЭА, 1999. — С. 331.

2. Лукашенко Т.П. Об орторекурсивных разложениях по характеристическим функциям промежутков / Т.П. Лукашенко // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Матер. школы-конф., посв. 130-летию со дня рожд. Д.Ф.Егорова. — Казань: изд-во „Казанск. мат. об-во“, 1999. — С. 142–143.

3. Лукашенко Т.П., Садовничий В.А. О рекурсивных разложениях по цепочке систем / Т.П. Лукашенко, В.А. Садовничий // Доклады РАН. — 2009. — Т. 425, N6. С. 741–746.

4. Лукашенко Т.П., Садовничий В.А. Орторекурсивные разложения по подпространствам / Т.П. Лукашенко, В.А. Садовничий // Доклады РАН. — 2012. — Т. 445, N2. С. 135–138.

5. Лукашенко Т. П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам / Т. П. Лукашенко // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. I. Матем. Механ. — 2001. — № 1. — С. 6–10.

6. Кудрявцев А. Ю. О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам / А. Ю. Кудрявцев // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 707–720.

7. Политов А. В. Критерий сходимости орторекурсивных разложений в евклидовых пространствах / А. В. Политов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 4. — С. 637–640.

8. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды / Б. С. Кашин, А. А. Саакян. — М. : изд-во АФЦ, 1999. — 550 с.

9. Galatenko V. V., Lukashenko T. P. and Sadovnichiy V. A. Conver-gence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansions in Functional Systems / V. V. Galatenko, T. P. Lukashenko and V. A. Sadovnichiy // Advances in Dynamical Systems and Control.

Studies in Systems, Decision and Control. V. 69. Springer International Publishing Switzer-land. 2016. — P. 3–11.

10. Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А. Об условии сходимости почти всюду орторекурсивных разложений / В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. I. Матем. Механ. — 2016. — № 5. — С. 20–25.

11. Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А. Об условии сходимости почти всюду функционального ряда со слабым аналогом свойства ортонормированности / В. В. Галатенко, Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. I. Матем. Механ. — 2016. — № 22. — С. 18–24.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА И ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМ КОШИ-РИМАНА

Ю.А. Гладышев, Е.А. Лошкарева (Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского)
losh-elena@yandex.ru

Рассмотрим вопрос о выводе закона сохранения электрического заряда с помощью кватернионного формализма, предложенного автором раньше [1]

В сообщении построен оператор A, переводящий упорядоченный набор двух кватернионных функций χ, Ψ в набор μ, v так, что

$$(\mu, v) = A(\chi, \Psi).$$

Явный вид этого преобразования может быть записан как

$$\mu = D_1\chi - \Psi D_2, v = \chi\bar{D}_2 + \bar{D}_1\Psi,$$

где $\bar{D}_1, D_1, \bar{D}_2, D_2$ кватернионные операторы, записанные в переменных $x_1, x_2, x_3, y_0 = ict$. Условия, определяющие ядро этого оператора

$$A(\chi, \Psi) = 0,$$

могут быть интерпретированы как система дифференциальных уравнений электромагнитного поля Максвелла без зарядов и токов, определенных внешним образом [1]. В случае системы (1) кватернионные функции (μ, v) определены зарядами и токами, и система неоднородна.

Указан оператор $\tilde{A}$ названный присоединенным, который определяет функции χ, Ψ через кватернионные функции α, β

$$(\chi, \Psi) = \tilde{A}(\alpha, \beta)$$

Было показано (1) что α, β определяют поля электромагнитных потенциалов. Функции ξ, h из ядра этого оператора

$$\tilde{A}(\xi, h) = 0$$

определяют калибровочные преобразования потенциалов.

Основной результат работы состоит в получении из выражения

$$\tilde{A}(\mu, v) = \tilde{A}A(\chi, \Psi)$$

закона сохранения электрического заряда в виде уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + div\vec{j}_e = 0.$$

Литература

1. Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А., Об одной физической интепретации обобщенной системы Коши-Римана. // Сборник научных трудов международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". Воронеж, 2020.

ГРАНИЦЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КОНСТАНТЫ НИКОЛЬСКОГО В L^p С ВЕСОМ ГЕГЕНБАУЭРА[1]

Д.В. Горбачев, И.А. Мартьянов (Тула, ТулГУ)

dvgmail@mail.ru, martyanow.ivan@yandex.ru

Изучаются границы и асимптотическое поведение при $n \to \infty$ точной константы Никольского в неравенстве $\|P\|_\infty \leqslant \mathcal{C}_{p,\alpha}(n)\|P\|_p$ для алгебраических полиномов P степени не больше n в пространстве L^p на $[-1, 1]$ с алгебраическим весом Гегенбауэра $(1 - x^2)^\alpha$.

[1] Работа Д.В. Горбачева выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре. Исследование И.А. Мартьянова выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-90152).

Была известна асимптотика $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) \asymp n^{(2\alpha+2)/p}$. Мы доказываем, что при всех $p \geqslant 1$ и $\alpha \geqslant -1/2$

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) \sim \mathcal{L}_{p,\alpha} n^{(2\alpha+2)/p}, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}_{p,\alpha}$ — точная константа Никольского для целых функций экспоненциального типа не больше 1 в пространстве L^p на $\mathbb{R}$ со степенным весом $|x|^{2\alpha+1}$. В частных случаях асимптотика (1) доказана E. Levin и D. Lubinsky ($\alpha = -1/2$), M.I. Ganzburg ($\alpha = 0$).

Асимптотика (1) вытекает из следующих явных границ.

Теорема. *Для всех целых* $n \geqslant 0$

$$n^{(2\alpha+2)/p}\mathcal{L}_{p,\alpha} \leqslant \mathcal{C}_{p,\alpha}(n) \leqslant (n + \theta_{p,\alpha})^{(2\alpha+2)/p}\mathcal{L}_{p,\alpha},$$

где $\theta_{p,-1/2} = \lceil \frac{1}{p} \rceil$ *и* $\theta_{p,\alpha} = 2\lceil \frac{\alpha+3/2}{p} \rceil$ *при* $\alpha > -1/2$.

Для полуцелых $\alpha = d/2 - 1$ и $p \geqslant 1$ теорема позволяет уточнить границы многомерной константы константы Никольского для сферических полиномов в пространстве L^p на сфере $\mathbb{S}^d$ [1]. Доказательство теоремы см. в работе [2].

Литература

1. Dai F. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere / F. Dai, D. Gorbachev, S. Tikhonov // J. d'Anal. Math. — 2020. — V. 140, no. 1. — P. 161–185.

2. Горбачев Д.В. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра / Д.В. Горбачев, И.А. Мартьянов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 4. — С. 126–137.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФАХ

Е.И. Григорьева, М.Б. Давыдова, И.В. Колесникова (Воронеж, ВГУ)

elenabiryukova2010@yandex.ru, mbd@vsu.ru, kolinna@inbox.ru

Начиная с работ [1,2], где рассматривались вопросы об обращении интегральных операторов, ядра которых или их производные терпят разрывы на диагоналях и кодиагоналях, и обращение которых приводит к операторам с инволюцией, активно изучались спектральные свойства таких операторов, в том числе на геометрических графах. Установлено [3], что в случае дифференциальных операторов и уравнений первого порядка простейшим графом, для которого постановка задачи оказывается корректной, является граф, состоящий из двух ребер, одно из которых образует цикл. При этом регулярность краевых условий для рассматриваемых операторов имеет место только в том случае, когда на ребре, выходящем из цикла, задан оператор с инволюцией (так как в случае оператора дифференцирования краевые условия становятся нерегулярными). В частности, в [4] описывается класс интегральных операторов на таком графе, область значений которых удовлетворяет структуре графа, и обращение которых приводит к интегро-дифференциальным операторам, обобщающим уже изученные ранее, и допускающим получение достаточных условий равномерной сходимости ряда Фурье и теорем равносходимости разложений по системе с.п.ф. заданного оператора с тригонометрическим рядом Фурье.

В докладе будут представлены результаты о представлении ядра интегрального оператора с заданными свойствами, обобщающие результаты из [4].

Литература

1. Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях / А.П. Хромов // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, № 6. – С. 932–949.

2. Хромов А.П. Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования / А.П. Хромов // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: сборник статей. — М. : Изд-во АФЦ, — 1999. — С. 255–266.

3. Бурлуцкая М.Ш. Разложение по собственным функциям дифференциальных и функционально-дифференциальных операторов на геометрических графах: дисс. ...канд.физ.-мат. наук : 01.01.02 / М.Ш. Бурлуцкая. — Воронеж, 2007. — 146 с.

4. Бурлуцкая М.Ш. Теорема равносходимости для интегрального оператора на простейшем графе с циклом / М.Ш. Бурлуцкая // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. — 2008. — Т. 8, вып. 4. — С. 8–13.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ, НА ОДНОМ ИЗ КОНЦОВ КОТОРОГО СОСРЕДОТОЧЕНА ИНЕЦИОННАЯ НАГРУЗКА И ДЕЙСТВУЕТ СЛЕДЯЩАЯ СИЛА

С.Б. Гулиева (Гянджа, ГГУ, Азербайджан)
bakirovna89@mail.ru

Свободные изгибные колебания однородного стержня с постоянной жесткостью, в сечениях которого действует продольная сила, левый конец которой заделан, а правый конец подвергается действию следящей силы и на этом конце сосредоточен инерционный груз, описывают граничной задачей для дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа четвертого порядка (см. [1, с. 152-154]). Применением метода разделения переменных эта задача сводится к следующей спектральной задаче

$$\begin{gathered} y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\ x \in (0,1), \\ y(0) = y'(0) = y''(1) - c\lambda y'(1) = 0, \\ Ty(1) - d\lambda y(1) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

где q — положительная непрерывно-дифференцируемая функция на $[0,1]$, c, d — действительные постоянные, причем $c < 0$, $d < 0$.

Метод Фурье является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Обоснование этого метода в краевых задачах для уравнений в частных производных основывается на базисных свойствах систем корневых функций соответствующих спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Спектральные свойства задачи (1) при $b < 0$ детально исследована в [2].

Целью настоящей работы является изучение базисных свойств собственных функций задачи (1) в пространытве L_p, $1 < p < \infty$.

Теорема 1. *Спектр задачи (1) состоит из неограниченно возрастающей последовательности вещественных простых собственных значений* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$.

Пусть m, n, $m \neq n$, — произвольные фиксированные натуральные числа и

$$\Delta_{m,n} = \begin{vmatrix} y'_m(1) & y'_n(1) \\ y_m(1) & y_n(1) \end{vmatrix}.$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *Если $\Delta_{m,n} \neq 0$, то система $\{y_k(x)\}_{k=1,\, k\neq m,\, n}^{\infty}$ собственных функций задачи (1) образует базис в пространстве L_p, $1 < p < \infty$ (при $p = 2$ безусловный базис). Если $\Delta_{m,n} = 0$, то эта система неполна и не минимальна в L_p, $1 < p < \infty$.*

Литература

1. Артобелевский И.И. Вибрации в технике: Справочник в 6 томах, Колебания линейных систем, Т. 1 / И.И. Артобелевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Болотин, ... — М. : Машиностроение, 1978. — 352 с.

2. Aliyev Z.S. Properties of natural frequencies and harmonic bending vibrations of a rod at one end of which is concentrated inertial load / Z.S. Aliyev, S.B. Guliyeva // J. Differential Equations. — 2017. — V. 263, No. 9. — С. 5830–5845.

О НАПОЛНЕННОСТИ ПОДАЛГЕБРЫ АБСОЛЮТНО СУММИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Е.Ю. Гусева (Воронеж, ВГУ)

elena.guseva.01.06@gmail.com

Пусть X — банахово пространство, а X^* — его сопряженное. Символом $\mathbf{B}(X)$ будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в X. Оператор $A \in \mathbf{B}(X)$ называют *абсолютно суммирующим*, если существует такая константа $\sigma \geqslant 0$, что

$$\sum_{i=1}^{m} \|Ax_i\| \leqslant \sigma \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{m} |\langle x_i, a\rangle| :\ \|a\| \leqslant 1,\ a \in X^* \Big\}$$

для любого конечного семейства элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$. Множество всех абсолютно суммирующих операторов $A \in \mathbf{B}(X)$ обозначим символом $\mathbf{AS}(X)$. Положим

$$\|A\|_{\mathbf{AS}(X)} = \inf \sigma.$$

Известно, что $\mathbf{AS}(X)$ является идеалом в $\mathbf{B}(X)$.

Обозначим через $l_p = l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, пространства последовательностей $x_n \in X, n \in \mathbb{Z}^c$, ограниченных по обычным нормам.

Весом на группе $\mathbb{Z}^c$ называют функцию $g : \mathbb{Z}^c \to (0, +\infty)$. Рассматривается вес g, удовлетворяющий трем условиям: $g(0) = 1$; $g(m+n) \leqslant g(m)g(n)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln g(n)}{|n|} = 0$. *Пространством* $l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$ *с весом* g называют множество, состоящее из всевозможных семейств $a = \{a_m \in \mathbb{C} : m \in \mathbb{Z}^c\}$, для которых $\|a\|_{l_{1,g}} = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^c} g(m)\|a_m\| < \infty$.

Символом $\mathbf{s}_{1,g}\big(\mathbb{Z}^c, \mathbf{AS}(X)\big)$ обозначим множество всех операторов $T \in \mathbf{B}\big(l_p(\mathbb{Z}^c, X)\big)$ вида

$$(Tx)_k = \sum_{m\in\mathbb{Z}^c} b_{km} x_{k-m}, \qquad k \in \mathbb{Z}^c,$$

где $b_{km} \in \mathbf{AS}(X)$, причем $\|b_{km}\|_{\mathbf{AS}(X)} \leqslant \beta_m$ для некоторого $\beta \in l_{1,g}(\mathbb{Z}^c, \mathbb{C})$.

Теорема. *Пусть оператор* $\mathbf{1}+T : l_p(\mathbb{Z}^c, X) \to l_p(\mathbb{Z}^c, X)$, *где* $T \in \mathbf{AS}(X)$, *обратим (хотя бы при одном* $p \in [1, +\infty]$*). Тогда оператор* $\mathbf{1} + T$ *обратим при всех* $p \in [1, +\infty]$ *и обратный оператор имеет вид* $\mathbf{1} + S$, *где* $S \in \mathbf{AS}(X)$.

НЕРАВЕНСТВА СОБОЛЕВА И ПУАНКАРЕ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин, Л.О. Сарыбекова

(Almaty, Satbayev University)

o.m.penkin@gmail.com

1. Стратифицированные множества. Стратифицированное множество определяется как связное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, являющееся объединением конечного семейства S подмногообразий σ_{kj}, называемых далее стратами:

$$\Omega = \bigcup_{\sigma_{kj}\in S} \sigma_{kj}.$$

Каждая страта σ_{kj} имеет компактное замыкание в $\mathbb{R}^d$, первый индекс в обозначении страты указывает на ее размерность, а второй

— на номер страты при автономной нумерации страт размерности, указанной в первом индексе. Предполагается, что страты примыкают друг к другу по типу клеточного комплекса, т.е. граница каждой страты состоит из некоторых страт семейства S и каждое пересечение $\overline{\sigma}_{kl} \cap \overline{\sigma}_{mn}$ замыканий страт в $\mathbb{R}^d$ либо пусто, либо является объединением некоторых страт из S. Далее соотношение $\sigma_{kj} \succ \sigma_{ml}$ между двумя стратами означает, что $\sigma_{ml} \subset \partial\sigma_{kj}$; в этом случае мы говорим, что данные страты примыкают друг к другу. Страты должны примыкать друг к другу регулярно; подробности см. в [1,2].

Мера $\mu(\omega)$ подмножества $\omega \subset \Omega$ определяется формулой:

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj} \in S} \mu_k(\sigma_{kj} \cap \omega), \tag{1}$$

в которой μ_k обычная k-мерная мера Лебега на σ_{kj}. Интеграл Лебега μ-измеримой функции f по такой мере сводится к сумме:

$$\int\limits_{\omega} f\, d\mu = \sum_{\sigma_{kj} \in S} \int\limits_{\sigma_{kj} \cap \omega} f\, d\mu_k.$$

2. Пространства функций на стратифицированном множестве. Множество Ω предполагается представленным в виде объединения двух непересекающихся частей — Ω_0 и $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$. В качестве Ω_0 допустимо взять любое открытое связное подмножество Ω, состоящее из некоторых страт и такое, что замыкание Ω_0 совпадает с Ω. Здесь и далее все топологические понятия относятся к топологии на Ω, индуцированной стандартной топологией объемлющего пространства $\mathbb{R}^d$. Нетрудно заметить, что формально определенное нами подмножество $\partial\Omega_0$ является в указанной топологии границей Ω_0. Далее мы даем перечень необходимых нам пространств функций.

- $C(\Omega_0)$ — множество непрерывных функций $f : \Omega_0 \to \mathbb{R}$.
- $C_0(\Omega_0)$ — подмножество $C(\Omega_0)$, состоящее из функций с компактным носителем в Ω_0 (т.е. из функций, обращающихся в нуль вблизи границы $\partial\Omega_0$).
- $C^1(\Omega_0)$ — множество функций в $C(\Omega_0)$, имеющих непрерывно дифференцируемые сужения на каждую страту $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$

(сужение функции f на страту σ_{kj} обозначается далее как f_{kj}), при этом предполагается, градиент ∇f_{kj} допускает продолжение по непрерывности на каждую примыкающую к σ_{kj} страту $\sigma_{k-1,l} \subset \Omega_0$, размерность которой меньше в точности на единицу, если таковая вообще имеется.

- $C_0^1(\Omega_0) = C^1(\Omega_0) \cap C_0(\Omega_0)$.

- $C^2(\Omega_0)$ это подпространство $C^1(\Omega_0)$, состоящее из функций, сужения которых на каждую страту из Ω_0 дважды непрерывно дифференцируемы.

- $\overset{\circ}{W}{}_\mu^{1,p}(\Omega)$ (или $W_\mu^{1,p}(\Omega)$) — пространство Соболева по мере μ — определяется как пополнение пространства $C_0^1(\Omega_0)$ (соответственно $C^1(\Omega_0)$) по норме

$$\|u\|_{W_\mu^{1,p}} = \left(\int\limits_{\Omega_0} |u|^p \, d\mu + \int\limits_{\Omega_0} |\nabla u|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Формулировки основных неравенств. Показатели суммируемости в неравенстве Соболева определяются двумя числами, $d(\Omega)$ и $D(\Omega_0)$; один из вариантов неравенство Пуанкаре требует введения ещё одного числа; мы здесь на этом не останавливаемся (см. [1]) Первое из них, $d(\Omega)$, равно максимальной размерности страт в Ω. Перейдем к определению второго.

Пусть $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$. Из наших определений очевидным образом следует существование связной цепочки страт

$$\sigma_{k_1 j_1}, \sigma_{k_2 j_2}, \ldots, \sigma_{k_m j_m}, \tag{2}$$

удовлетворяющей следующим требованиям:

- $\sigma_{k_1 j_1} = \sigma_{kj}$;

- все страты, кроме последней, являются подмножествами Ω_0, в то время как $\sigma_{k_m j_m} \subset \partial\Omega_0$;

- для каждого индекса $i < m$ либо $\sigma_{k_i j_i} \succ \sigma_{k_{i+1} j_{i+1}}$, либо $\sigma_{k_{i+1} j_{i+1}} \succ \sigma_{k_i j_i}$.

Максимальное из всех чисел $|k_i - k_{i+1}|$ для данной цепочки назовем числом связности цепочки, а минимальное из чисел связности всех цепочек, соединяющих σ_{kj} с какой-либо граничной стратой, обозначим через $D(\sigma_{kj})$. Наконец, числом связности $D(\Omega_0)$ пары $\{\Omega_0, \partial\Omega_0\}$ назовем максимальное среди чисел $D(\sigma_{kj})$ по всем стратам σ_{kj} в Ω_0. В силу этого определения для каждой страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ существует связная цепочка, соединяющая ее с границей, число связности которой не превосходит $D(\Omega_0)$.

Следующая теорема даёт аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве.

Теорема 1. *Если* $D(\Omega_0) < p < d(\Omega)$ *и* $1 \leqslant q \leqslant \frac{pd(\Omega)}{d(\Omega)-p}$, *или* $p \geqslant d(\Omega)$ *и* $1 \leqslant q < \infty$, *то*

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla u|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(\Omega)$ *с независящей от* u *константой* C. *Кроме того, неравенство* (3) *выполняется в случае* $D(\Omega_0) = p = 1$ *и* $1 \leqslant q \leqslant \frac{d(\Omega)}{d(\Omega)-1}$.

Замечание. *В случае* $p > d(\Omega)$ *неравенство* (3) *выполняется при* $q = \infty$, *если левую часть неравенства понимать как существенный супремум относительно стратифицированной меры* μ.

Приведём один из вариантов (другой вариант можно найти в [1]) неравенства Пуанкаре.

Теорема 2. *Пусть* $p > D(\Omega_0)$ *и* $1 \leqslant q \leqslant \frac{pd(\Omega)}{d(\Omega)-p}$ *при* $p < d(\Omega)$, *и* $1 \leqslant q < \infty$ *при* $p \geqslant d(\Omega)$. *Пусть далее* $P: \ W^{1,p}_{\mu}(\Omega_0) \to \mathbb{R}$ — *непрерывный проектор на константы. Тогда*

$$\left(\int\limits_{\Omega_0} |u - P(u)|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int\limits_{\Omega_0} |\nabla u|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

для всех $u \in W^{1,p}_{\mu}(\Omega_0)$ *с независящей от* u *константой* C.

Кроме того, неравенство (4) *выполняется в случае* $D(\Omega_0) = p = 1$ *и* $1 \leqslant q \leqslant \frac{d(\Omega)}{d(\Omega)-1}$.

4. Приложение к p-лапласиану на стратифицированном множестве. Векторное поле $\vec{F}$ назовем касательным к Ω_0, если для любой страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и точки $X \in \sigma_{kj}$ имеем $F(X) \in T_X\sigma_{kj}$.

Здесь $T_X \sigma_{kj}$ — обозначение обычного касательного пространства к σ_{kj} в точке X.

По аналогии с классическим случаем мы определяем дивергенцию касательного векторного поля $\vec{F}$ в точке X, как плотность потока, порожденного этим полем, относительно стратифицированной меры μ.

Нетрудно показать, что для достаточно гладких полей дивергенция выражается следующей формулой (подробности можно найти в [3]):

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1,i} \succ \sigma_{kj}} F(X + 0 \cdot \nu_i) \cdot \nu_j. \tag{5}$$

Здесь ∇_k означает классическую k-мерную дивергенцию на σ_{kj} (так называемый первый дифференциальный параметр Бельтрами), $F(X + 0 \cdot \nu_i)$ — продолжение по непрерывности в точку X сужения $\vec{F}$ на страту $\sigma_{k+1,i}$, а $\vec{\nu}$ – единичная нормаль к σ_{kj} в точке X, направленная внутрь $\sigma_{k+1,i}$.

Как и в классическом случае в основу p–лапласиана определения кладется следующая вариационная задача:

$$\Phi(u) = \int\limits_{\Omega_0} |\nabla u|^p \, d\mu \longrightarrow \min,$$

в которой минимум разыскивается на множестве функций $C^1(\Omega_0)$, удовлетворяющих условию Дирихле $u\big|_{\partial\Omega_0} = \varphi$; мы обозначим это множество через $C^1_\varphi(\Omega_0)$. Для функции $u \in C^1_\varphi(\Omega_0)$ минимизирующей функционал, необходимо:

$$\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0, \tag{6}$$

$$u\big|_{\partial\Omega_0} = \varphi. \tag{7}$$

Оператор, стоящий справа в (6) естественно называть p-лапласианом; внешний значок ∇, разумеется, означает «стратифицированную» дивергенцию.

Под слабым решением задачи (6),(7) мы понимаем функцию u, удовлетворяющую при всех $h \in C^1_0(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega_0} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla h \, d\mu = 0 \tag{8}$$

и такую, что $u-\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_{\mu}(\Omega)$. Мы предполагаем, что φ принадлежит $W^{1,p}_{\mu}(\Omega)$.

Полученный нами аналог неравенства Соболева позволяет легко получить слабую разрешимость следующей краевой задачи с p–лапласианом:

Теорема 3. *В предположении* $p > D(\Omega_0)$ *задача* (6),(7) *слабо разрешима.*

В работе [1] даётся приложение неравенства Пуанкаре к p-лапласиану.

Литература

1. Даирбеков Н.С. Неравенство Пуанкаре и p-связность стратифицированного множества / Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин, Л.О. Сарыбекова // Сиб. Мат. Журнал. — 2018. — Т. 59, No 6. — С. 1291–1302.

2. Даирбеков Н.С. Аналог неравенство Соболева на стратифицированном множестве / Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин, Л.О. Сарыбекова // Алгебра и Анализ. — 2018. — Т. 30, No 5. — С. 149–158.

3. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный [и др.] — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

ОДНО СВОЙСТВО ФЕЙЕРОВСКОГО ТИПА ПРОИЗВОДНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Д.Я. Данченко (Владимир, ВлГУ)
vdanch2012@yandex.ru

При натуральном n положим $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k z^k$, $z, p_k \in \mathbb{C}$. Обозначим через $\mathcal{M} = \{\mu_1, \ldots, \mu_\mu\}$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, набор попарно различных натуральных чисел $1 \leqslant \mu_k \leqslant n$. Введем вещественные веса $\mathcal{V} := \{v_l\}$, $l \in \mathcal{M}$, и рассмотрим задачу о представлении взвешенных степеней многочлена в виде амплитудно-частотных операторов (введены в [1]):

$$\omega\, p_0 + \sum_{l\in\mathcal{M}} v_l p_l z^l = \sum_{j=1}^{n} X_j P_n\left(z e^{-i\lambda_j}\right), \quad \omega := \sum_{j=1}^{n} X_j, \tag{1}$$

где X_j, λ_j — искомые вещественные параметры. Задача (1) равносильна задаче дискретных моментов

$$X_1 z_1^l + \ldots + X_n z_n^l = \sigma_l, \qquad l = \overline{1, n}, \quad X_j \in \mathbb{R}, \quad z_j = e^{-i\lambda_j}, \quad (2)$$

с неизвестными вещественными X_j и λ_j, где выполнены условия

$$\sigma_l = v_l \quad \text{при} \quad l \in \mathcal{M}, \quad \sigma_l = 0 \quad \text{при} \quad l \notin \mathcal{M}.$$

По классической теореме Каратеодори система (2) всегда имеет (единственное) решение с условиями $X_j \geqslant 0$, $z_j = e^{i\lambda_j}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$. При анализе решений системы (2) важную роль играет матрица Теплица $G_{n+1}(\omega) = \{g_{m,j}\}$ порядка $n+1$ со следующей структурой: на главной диагонали находится переменная ω, а на параллельных ей диагоналях симметрично расположены нули и веса v_k, $k \in \mathcal{M}$, причем $g_{m,j} = v_k$ только при $|m-j| = k$ и $k \in \mathcal{M}$. Известно, что для решения задачи Каратеодори (т.е. при $X_j \geqslant 0$) значение параметра $\omega = X_1 + \ldots + X_n$ равно наибольшему корню $\omega_{\mathcal{M}}(n)$ определителя $\det G_{n+1}(\omega)$. Итак, справедливы равенства (1) с $\omega = \omega_{\mathcal{M}}(n) > 0$, $X_j \geqslant 0$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Например, при $\mathcal{M} = \{1, \ldots, n\}$ и $\mathcal{V} = \{v_k = k : k = 1, \ldots, n\}$ имеем

$$\omega_{\mathcal{M}}(n)\, p_0 + z P_n'(z) = \sum_{j=1}^{n} X_j P_n\left(z e^{-i\lambda_j}\right), \qquad \sum_{j=1}^{n} X_j = \omega_{\mathcal{M}}(n).$$

Отсюда получается

Теорема. *Пусть значения многочлена $w = P_n(z)$ $(p_0 \neq 0)$ в круге $|z| \leqslant 1$ лежат в некотором угле $\{w : |\arg w| \leqslant \alpha \leqslant \pi/2\}$. Тогда и значения функции $\omega_{\mathcal{M}}(n)\, p_0 + z P_n'(z)$ в круге $|z| \leqslant 1$ лежат в том же угле.*

Например, $\omega_{\mathcal{M}}(5) = 5.236\ldots$, $\omega_{\mathcal{M}}(10) = 20.431\ldots$. В общем случае можно получить оценку $\omega_{\mathcal{M}}(n) < n\,(n+1)\,/2$.

Литература

1. P. Chunaev. Approximation by amplitude and frequency operators / P. Chunaev, V. Danchenko // J. Approx. Theory. — 2016. — Vol. 207. — P. 1–31.

ОБРАТНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.М. Денисов (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова)
den@cs.msu.ru

Рассмотрим следующую задачу для функций $u(x,t)$ и $a(x,t)$

$$u_x + a_t = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$a_t = \gamma(t)(\varphi(t)u - a), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$a(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $Q_T = \{(x,t): \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Задачу (1)—(4) можно интерпретировать как математическую модель фильтрационного процесса, в котором свойства поглощающего вещества меняются со временем.

Сформулируем обратную задачу. Пусть функции $\mu(t)$ и $\psi(x)$ заданы, а функции $\gamma(t)$ и $\varphi(t)$ неизвестны. Требуется определить $\gamma(t)$, $\varphi(t)$, $u(x,t)$ и $a(x,t)$, если задана дополнительная информация об одной из компонент решения задачи (1)—(4)

$$u(l,t) = g(t), \quad u_x(l,t) = p(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Доклад посвящен доказательству теоремы существования и единственности решения обратной задачи. Доказательство основано на редукции обратной задачи к нелинейному операторному уравнению для одной из неизвестных функций, эквивалентному обратной задаче, и доказательстве существования и единственности решения этого операторного уравнения.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА НИКОЛЕТТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ[1]

А.Л. Джабраилов (Грозный, ЧГУ)
ahmed0065@mail.ru

Рассматривается задача о существовании решений системы ОДУ

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad x \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

удовлетворяющих условиям

$$y_i'(x_i) = y_{i0}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

типа Николетти относительно производных $y_i'(x_i)$ решений. Предполагается, что функции f_i непрерывны по совокупности аргументов в замкнутой области $D = \{x \in [a, b],\ |y_i| \leqslant d_i,\ i = \overline{1, n}\}$ и удовлетворяют условиям Липшица:

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, z_2, \dots, z_n)| \leqslant L_i \cdot \sum_{j=1}^{n} |y_i - z_i|.$$

Изучается также система нагруженных интегральных уравнений

$$y_i(x_i) = f_i^*(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) + \int_{x_i}^{x} f_i(x, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))dt$$

в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций $C^1(a, b)$ методами работ [1, 2].

Литература

1. Исраилов С.В., Юшаев С.С. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / С.В. Исраилов, С.С. Юшаев — Нальчик. : Издательский центр «Эльфа», 2004. — 445 с.

2. Исраилов С.В. Исследование нестандартных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений / С.В. Исраилов — Махачкала. : Издательство «АЛЕФ», 2014. — 440 с.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-200001) и публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611, по проекту «Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи».

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ

М.Т. Дженалиев, А.А. Асетов (Алматы, ИМММ; Караганда, КарГУ)
muvasharkhana@gmail.com

В области $Q = \{x,t|\ x \in (0,\varphi(t)),\ t \in (0,T)\}$ рассматривается начально-граничная задача для уравнения Бюргерса с нелинейными динамическими граничными условиями:

$$\partial_t u + u\partial_x u - \nu\partial_x^2 u = f, \tag{1}$$

$$\partial_t u + \frac{1}{3}u^2 - \nu\partial_x u\Big|_{x=0} = 0,\ \partial_t u - \frac{1}{3}u^2 - \nu\partial_x u\Big|_{x=\varphi(t)} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0,\ \ x \in (0,\varphi(0)), \tag{3}$$

$$\varphi(0) > 0,\ \varphi'(t) \geqslant 0\ \forall t \in (0,T). \tag{4}$$

Установлена следующая теорема.

Теорема. Граничная задача (1)—(4) имеет единственное решение

$$u \in H^{2,1}(Q) \equiv \left\{L_2(0,T;H^2(0,\varphi(t))) \cap H^1(0,T;L_2(0,\varphi(t)))\right\},$$
$$u(\varphi(t),t),\ u(0,t) \in H^1(0,T),$$

которое удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{H^{2,1}(Q)} + \|u(\varphi(t),t)\|_{H^1(0,T)} + \|u(0,t)\|_{H^1(0,T)} \leqslant K,$$

где $K = \mathrm{const} > 0$, которая зависит только от значения $\|f\|_{L_2(Q)}$, и $K = 0$ при $f \equiv 0,\ \{x,t\} \in Q$.

Доказательство теоремы основано на преобразовании начально-граничной задачи (1)—(4) в области с подвижной границей Q в задачу, поставленную в прямоугольной области. К последней применяется метод Фаэдо-Галеркина, основанный на построении неортогонального базиса и соответствующего ему биортогонального базиса.

Это исследование финансируется Комитетом науки МОН Республики Казахстан (Grant No. AP08855372, 2020-2022.)

К РЕШЕНИЮ ОДНОГО ОСОБОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА[1]

М.Т. Дженалиев, Н.К. Гульманов,
М.И. Рамазанов (Казахстан, Алматы, ИМММ;
Карагандинский университет им. Е.А.Букетова)
gulmanov.nurtay@gmail.com

При решении первой краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности в конусе [1] возникает необходимость решения следующего особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$\varphi(t) - \int\limits_0^t \mathcal{K}(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \qquad (1)$$

где

$$\mathcal{K}(t,\tau) = \exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\cdot\left\{\frac{1}{t-\tau}\cdot I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)^2}\cdot\left[I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)-I_1\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\right]\right\}.$$

Показано, что соответствующее однородное интегральное уравнение имеет ненулевое решение вида

$$\varphi^{(0)}(t) = \frac{C}{t}\cdot e^{-\frac{a^2\lambda_0^2}{t}}, \;\; C = const.$$

Построена резольвента и найдено общее решение интегрального уравнения (1).

Литература

1. Kharin S.N. Mathematical models of phenomena in electrical contacts: Monograph. / S.N. Kharin // A.P. Ershov Institute of Informatics system, Siberian Branch of RAS. —2017. — 193 p.

---

[1] Работа выполнена по грантам МОН РК: AP08956033, 2020-2021 и AP0885372, 2020-2022

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ, СИММЕТРИЧНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРЕМЕННОЙ ОСИ[1]

М.И. Дженалиев, С.А. Исаков,

Н.К. Гульманов (Казахстан, Алматы, ИМММ; Карагандинский университет им. Е.А.Букетова)

isagyndyk@mail.ru

Рассматривается следующая граничная задача:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = g(x,t), \quad \{x,t\} \in G = \{x,t : -t < x < t,\, t > 0\}; \tag{1}$$

$$-\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=-t} + \frac{d\widetilde{u}_1(t)}{dt} = G_1(t), \ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=t} + \frac{d\widetilde{u}_2(t)}{dt} = h_2(t), \tag{2}$$

где $\widetilde{u}_1(t) = u(-t,t)$, $\widetilde{u}_2(t) = u(t,t)$.

В работе [1] была установлена теорема об однозначности разрешимости рассматриваемой задачи в весовых гёльдеровских пространствах.

С помощью тепловых потенциалов задача (1)-(2) сводится к решению двух независимых особых интегральных уравнений Вольтерра:

$$\theta_{\pm}(t) - \int_0^t K_{\pm}(t,\tau)\,\theta_{\pm}(\tau)\,d\tau = f_{\pm}(t),\ t > 0.$$

Теорема 1. *Для любой правой части* $f(t) \in L_\infty\left(R_+;\, \sqrt{t}\exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\}\right)$ *и для данных функций* $g(x,t) \in W_\infty^{1,0}\left(G;\, \sqrt{t}\exp\left\{\frac{t}{4a^2}\right\}\right)$; $h_1(t) \in L_\infty\left(R_+;\, \sqrt{t}\right)$; $h_2(t) \in L_\infty\left(R_+;\, \sqrt{t}\right)$ *граничная задача (1)-(2) имеет общее решение* $u(x,t) \in L_\infty\left(G; \left(x + t^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right)$.

Литература

1. Солоников В.А. Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами. /В.А. Солоников, А. Фазано //Записки научных семинаров ПОМИ. —2000. —Т. 269. — С. 322–338.

[1] Работа выполнена по грантам МОН РК: AP08956033, 2020-2021 и AP0885372, 2020-2022

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ СОЛОННИКОВА-ФАЗАНО ПРИ ДВИЖЕНИИ ГРАНИЦЫ ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ЗАКОНУ $x = \gamma(t)$[1]

М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов, А.О.Танин (Казахстан, Алматы, ИММM; Карагандинский университет им. Е.А.Букетова)
ramamur@mail.ru

В работе исследуются вопросы разрешимости следующей граничной задачи [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad \{0 < x < \gamma(t), t > 0\}, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u_0(t), \quad \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\gamma(t)} = u_1(t), \tag{2}$$

где $\tilde{u}(t) = u(\gamma(t), t)$, $\gamma(0) = 0$, при $\gamma(t) = [t(1 + \alpha_0(t))]^{\omega}$, $\omega > 1/2$.

Функция $\gamma(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. асимптотика функции $\gamma(t)$ при $t \to 0$ и при $t \to \infty$ имеет вид t^{ω}, где $\omega > 1/2$;

2. начиная с некоторого момента времени t_1^* до момента времени t_2^* функция $\gamma(t)$ произвольна, строго монотонна и взаимнооднозначна, то есть существует обратное преобразование $\gamma^{-1}(t)$.

Теорема 1. *Для любой правой части и для данных функций из класса* $f(t) \in L_\infty\left(R_+; [\gamma(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}} \exp\left(\frac{\gamma(t)}{4a^2}\right)\right)$, $u_0(t) \in L_\infty\left(R_+; [\gamma(t)]^{\frac{\omega-3/2}{\omega}}\right)$, $u_1(t) \in L_\infty\left(R_+; [\gamma(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}}\right)$ *граничная задача (1) — (2) имеет общее решение* $u(x,t) \in L_\infty\left(G; (x + [\gamma(t)]^{\frac{3/2-\omega}{\omega}})^{-1}\right)$.

Литература

1. Солоников В.А. Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами. /В.А. Солоников, А. Фазано //Записки научных семинаров ПОМИ. —2000. —Т. 269. — С. 322–338.

[1] Работа выполнена по грантам МОН РК: AP08956033, 2020-2021 и AP0885372, 2020-2022

КРИТЕРИИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ В $L_p(\mathbb{R})$ ПРИ $1 < p < 2$

А.Е. Додонов (Владимир, ВлГУ)
art-dodonov@mail.ru

Рассмотрим в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$, ряд наипростейших дробей

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z_k = x_k + iy_k, \quad y_k \neq 0. \tag{1}$$

При $\alpha > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ обозначим $V_\alpha = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant \alpha |\operatorname{Re} z|\}$, $E_m = \{z : 2^m < \operatorname{Im} z \leqslant 2^{m+1}\}$ и $E_0 = \{z : 0 < \operatorname{Im} z \leqslant 2\}$.

Теорема. *Если $\{z_k\} \subset V_\alpha$, а n_m — число точек последовательности $\{z_k\}$, лежащих в E_m, то при $1 < p < 2$ сходимость ряда (1) в $L_p(\mathbb{R})$ равносильна любому из следующих утверждений:*

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{y_k + y_j} \right)^{p-1} \leqslant A(p, \{z_k\}) \quad \forall n;$$

$$2) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n_m}{2^{m(p-1)}} \sum_{s=0}^{m} n_s (n_m^{p-2} + n_s^{p-2}) < \infty;$$

$$3) \quad \widetilde{\sum}_{k=1}^{n} \left(\widetilde{\sum}_{j=k}^{n} \frac{1}{y_j} \right)^{p-1} \leqslant A(p, \{z_k\}) \quad \forall n,$$

знак $\widetilde{\sum}$ в 3) означает, что y_k занумерованы по возрастанию.

Такие критерии рассматривались также в [1, 2]. Критерий 3) ранее был доказан И.Р. Каюмовым в [3].

Литература

1. Додонов А.Е. О сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ / А.Е. Додонов // Пробл. мат. ан. — 2015. — Т. 82. — С. 83–87.

2. Додонов А.Е. О сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ / А.Е. Додонов // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы XII междунар. Казанской летн. научн. школы-конф. — Казань: Казан. мат. общ-во, 2015. — С. 178–180.

3. Каюмов И.Р. Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ / И.Р. Каюмов // Матем. сб. — 2011. — Т. 202, № 10. — С. 87–98.

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

А.Е. Додонов (Владимир, ВлГУ)
art-dodonov@mail.ru

В работах [1, 2] для решения задачи Коши для устойчивого линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} p_k y^{(k)} = 0, \quad y^{(k)}(0) = y_k, \quad p_n = 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{1}$$

была при $x > 0$ получена оценка $|y(x)| \leqslant n\|r\|x^{-1}$, где

$$\|r\| = \max_{t\in\mathbb{R}} \left| \operatorname{Im}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} \left(y_{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} p_{n-j} y_{k-1-j} \right) (it)^{n-k}}{(it)^n + p_{n-1}(it)^{n-1} + \ldots + p_0} \right) \right|.$$

Рассмотрим задачу Коши для однородного дифференциального уравнения Эйлера

$$\sum_{k=0}^{n} \hat{p}_k (t+\beta)^k \hat{y}^{(k)} = 0, \quad \hat{y}^{(k)}(1-\beta) = \hat{y}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Подстановкой $t + \beta = e^x$ задача (2) сводится к задаче (1). Значит, если полученное уравнение (1) устойчиво, для решения $\hat{y}(t)$ задачи (2) при $t > 1 - \beta$ имеет место оценка

$$|\hat{y}(t)| \leqslant \frac{n\|r\|}{\ln(t+\beta)}.$$

Литература

1. Данченко В.И. Оценки производных наипростейших дробей и другие вопросы / В.И. Данченко // Матем. сб. — 2006. — Т. 197. — Вып. 4 — С. 33–52.

2. Danchenko V.I. Estimates for exponential sums. Applications / V.I. Danchenko, A.E. Dodonov // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — Vol. 188. — № 3. — P. 197–206.

МЕТОД СИММЕТРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ О ПОЛИНОМАХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ[1]

В.Н. Дубинин (Владивосток, ИПМ ДВО РАН)
dubinin@iam.dvo.ru

Симметрия полинома Чебышева первого рода позволяет построить аналог круговой симметризации Полиа для конденсаторов, расположенных на римановых поверхностях [1]. Мы демонстрируем применение этой симметризации на примере решения расширенной версии известной задачи Эрдёша о максимуме модуля полинома на его связной лемнискате [2]. Данный подход распространяется на случай произвольных многолистных функций различных классов, включая классы рациональных функций. В докладе ограничимся оценкой модуля производной конечного произведения Бляшке [3].

Литература

1. Дубинин В.Н. Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях / В.Н. Дубинин // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 1. —С. 69–96.

2. Dubinin V.N. Distortion theorem for complex polynomials / V.N. Dubinin // Сиб. электрон. матем. изв. — 2018. — Т. 15. —С. 1410–1415.

3. Dubinin V.N. Distortion and Critical Values of the Finite Blaschke Product / V.N. Dubinin // Constructive Approximation. https://doi.org/10.1007/s00365-020-09518-x

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00018).

О РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ «ПРОСТОЙ» РАЦИОНАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПОВОРОТА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА[1]

А.Г. Елисеев, Т.А. Ратникова (Москва, НИУ «МЭИ»)
eliseevag@mpei.ru, ratnikovata@mpei.ru

В теории сингулярных возмущений дифференциальных уравнений особый интерес представляют задачи с нестабильным спектром предельного оператора. В данной работе методом регуляризации С.А. Ломова [1] строится регуляризованное асимптотическое решение для сингулярно возмущенной параболической краевой задачи на полуоси при наличии спектральной особенности в виде «простой» рациональной точки поворота у предельного оператора. Точка $\varepsilon = 0$ для сингулярно возмущенной задачи является особой в том смысле, что классические теоремы существования решения не имеют места в этой точке. Поэтому в решении таких задач возникают существенно особые сингулярности, описывающие не регулярную зависимость решения от ε. Описание этих сингулярностей представляет основную проблему метода регуляризации. В данной работе построены регуляризирующие функции, связанные с особенностями краевой сингулярно возмущенной параболической задачи на полуоси. Рассматривается задача

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(t)u = f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = \psi(t), \quad x \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

и выполнены условия:

1) $f(x,t) \in C^\infty([0,+\infty) \times [0,T])$;
2) $\psi(t) \in C^\infty[0,T]$;
3) $p(x) \geqslant p_0 > 0, \quad p(x) \in C^\infty[0,+\infty)$;
4) $q(t) = t^{m/n} b(t), \quad b(t) \in C^\infty[0,T], \quad \operatorname{Re} b(t) > 0$.

Для доказательства оценки остаточного асимптотического ряда на полуоси необходимы дополнительные условия:

5) $\exists M_1 > 0 \ \ |f(x,t)| < M_1$;
6) $p(x) < M_2(x^2 + 1)$;

[1] Результат Ратниковой Т.А. получен в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022)

7) $u(x,t) > -m(x^r+1), \quad m>0, \quad r>0.$

Сингулярно возмущенная задача возникает тогда, когда область определения исходного оператора, зависящего от ε, $\varepsilon \neq 0$ не совпадает с областью определения предельного оператора при $\varepsilon = 0$. При выполнении условий стабильности спектра предельного оператора в случае задачи Коши существенно особые сингулярности описываются в виде $e^{\varphi_i(t)/\varepsilon}$, $\varphi_i(t) = \int\limits_0^t \lambda_i(s)ds, \quad i=\overline{1,n}$, где $\lambda_i(t)$ — собственные значения предельного оператора, $\varphi_i(t)$ — гладкие (в общем случае комплекснозначные) функции.

В случае краевой параболической задачи с точечными особенностями спектра предельного оператора «простой» точкой поворота возникают новые сингулярности, связанные с проблемой, когда область значений предельного оператора не совпадает с областью значений исходного оператора. В случае задачи (1) регуляризирующие функции имеют вид:

$$e^{-Q_0^t/\varepsilon}, \quad Q_0^t = \int\limits_0^t q(s)ds;$$

$$\sigma_i(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t e^{-Q_s^t/\varepsilon} s^{\frac{i+1}{n}-1} ds, \quad i = \overline{0,(p-1)}, \quad p = m+n-1;$$

$$G(a(x,t),\varepsilon) = e^{-Q_0^t/\varepsilon} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\tau/(2\sqrt{t})}^{\infty} a\left(x, t - \frac{\tau^2}{4\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi \equiv$$

$$\equiv e^{-Q_0^t/\varepsilon} F(a(x,t),\varepsilon), \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{p(s)}}.$$

Оператор $F(\cdot)$ переводит любую гладкую функцию $a(x,t)$ в решение задачи

$$\begin{cases} F_t - F_{\tau\tau} = 0 \\ F(a(x,t))\big|_{t=0} = 0, \quad F(a(x,t))\big|_{\tau=0} = a(0,t). \end{cases}$$

Заметим, что $\varepsilon = 0$ для $F(a(x,t))$ после сужения на $\tau = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{p(s)}}$ является существенно особой. Решение задачи (1) ищется в виде

$$u(x,t,\tau,\varepsilon) =$$
$$= e^{-Q_0^t/\varepsilon} v(x,t,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{p-1} Z^i(x,t,\varepsilon)\sigma_i(t,\varepsilon) + G(a(x,t,\varepsilon)) + W(x,t,\varepsilon),$$

где функции v, Z^i, a, W — гладкие по x, t, степенным образом зависящие от ε. Главный член асимптотики решения задачи (1), используя свойства оператора F, можно представить в виде

$$u_{\text{гл}} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n}\right]} \left[\left(\frac{f^{(j)}(x,0)}{j!} - \sqrt[4]{\frac{p(x)}{p(0)}} \, \frac{f^{(j)}(0,0)}{j!} \right) \sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon) \right] -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{1}{\varepsilon} Q_0^t} a_{-1/2}(x,t) \sqrt{t} \sqrt[4]{p(x)} \cdot$$
$$\cdot \int\limits_0^x \sqrt[4]{p(s_1)}^3 \int\limits_0^\infty e^{-\xi^2} \int\limits_0^\xi a''_{-1}\left(s_1, t - \frac{s^2}{4\xi^2}\right) ds d\xi ds_1 +$$
$$+ e^{-\frac{1}{\varepsilon} Q_0^t} \varphi(x) + \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n}\right]} \frac{f_{xx}^{(j)}(x,0)}{j!} t^j \sigma_{n(j+1)-1}(t,\varepsilon) -$$
$$- \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{n}\right]+1} \frac{f_0^{(j)}(x,0)}{j!} \sigma_{n(j+1)-1-n\{\frac{m}{n}\}}(t,\varepsilon) + e^{-\frac{1}{\varepsilon} Q_0^t} a_0(x,t) + \underline{O}(\varepsilon^\infty),$$

где функции $a_1(x,t)$, $a_{-1/2}(x,t)$, $a_0(x,t)$, $g(x,t)$ находятся из итерационных задач при ε^{-1}, $\varepsilon^{-1/2}$, ε^0.

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. — М. : Наука, 1981. — 400 с.

2. Елисеев А.Г. Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии иррациональной простой точки поворота / А.Г. Елисеев // Дифф. ур. и проц. упр. — 2020. — № 2. — С. 15–32.

3. Ратникова Т.А. Singularly Perturbed Cauchy Problem for a Parabolic Equation with a Rational "Simple" Turning Point / Т.А. Ратникова // Axioms. — 2020. — № 9, 138. — doi:10.3390/axioms9040138.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЯДОВ ПУАССОНА В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕРЕГУЛЯРНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Д.П. Емельянов, И.С. Ломов (Москва, МГУ)
wpgrussia@gmail.com, lomov@cs.msu.ru

Рассмотрим в прямоугольнике $D = \{(x, y) : x \in (0, 1), y \in (0, b)\}$ краевую задачу для эллиптического уравнения:

$$\begin{cases} u''_{xx} + y^2 u''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, b) = 0, \quad |u(x, 0)| < +\infty. \end{cases} \tag{1}$$

Коэффициенты $a(z)$ и $c(z)$ при $z \in \mathbb{C}$ считаем аналитическими функциями в круге $U = \{z \in C : |z| < R\}$, где $R > b$, $y = \operatorname{Re} z$. Кроме того, $a(y) \geqslant 0$ и $c(y) \geqslant 0$ при $y \in [0, b]$; $c(0) = 0$; $f(x, y)$ при каждом фиксированном x аналитична по y при $y \in [0, b]$ и непрерывна по совокупности переменных в $\overline{D}$.

Методом спектрального выделения особенностей (см. работы [1, 2] и монографию [3, гл. X]) решение задачи (1) с нулевым коэффициентом $c(y)$ ранее было построено в виде ряда Пуассона. В работе [4] изучена задача (1) с ненулевым коэффициентом $c(y)$.

В данной работе применение функции Грина и ее оценки позволили ослабить полученные ранее условия сходимости построенного ряда, в том числе в случае наличия логарифмических особенностей.

Литература

1. Ломов И.С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений / И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 12. — С. 2079–2089.

2. Ломов И.С. Метод спектрального разделения переменных для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов / И.С. Ломов // Доклады РАН. — 2001. — Т. 376, № 5. — С. 593–596.

3. Ломов С.А. Основы математической теории пограничного слоя / С.А. Ломов, И.С. Ломов. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2011. — 456 с.

4. Емельянов Д.П. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами / Д.П. Емельянов, И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 1. — С. 45–58.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ УРАВНЕНИЯ В ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ[1]

М.Г. Ергалиев, А.К. Калибекова (Казахстан, Алматы, ИМММ)
ergaliev@math.kz

В области $G = \{(x,t)|0 < x < t,\, 0 < t < T\}$, $T < +\infty$ рассматривается неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(t)g(x),\ (x,t) \in G \tag{1}$$

с однородными условиями

$$u(x,t)|_{x=0} = 0,\ u(x,t)|_{x=t} = 0,\, 0 < t < T \tag{2}$$

и условием переопределения

$$\int_0^t u(x,t)dx = E(t),\ |E(t)| \geqslant \delta > 0,\ 0 < t < T, \tag{3}$$

где $g(x)$ и $E(t)$ — заданные функции.

Задача. Найти функции $f(t)$ и $u(x,t)$, удовлетворяющие уравнению (1) и условиям (2)—(3).

Литература

1. Дженалиев М.Т. Об одной однородной задаче для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области / Амангалиева М.М., Ахманова Д.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. // Сиб. мат. журн. — 2015. — Т. 56, № 6. — С. 1234—1248.

2. Jenaliev M.T. On the coefficient inverse problem of heat conduction in a degenerating domain / Jenaliyev M., Ramazanov M., Yergaliyev M. // Applicable analysis. — 2020. — V. 99, N 6. — P. 1026—1041.

3. Jenaliev M.T. On the coefficient inverse problem of heat conduction in a degenerating domain / Jenaliyev M., Ramazanov M., Yergaliyev M. // AIP conference proceedings. — 2018. — V. 1997, N 020018. — P. 1—4.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Grant No. AP08855372, 2020-2022.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ПОЛИДИСПЕРСНОЙ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ ПРИ ВЕТРОВОМ ПОДХВАТЕ С ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ[1]

А.В. Заборский, А. В. Нестеров (Обнинск, ООО НПП Радико;Москва, РЭУ им. Г.В.Плеханова)
alexander.zaborskiy@mail.ru; andrenesterov@yandex.ru

Простейшая математическая модель переноса полидисперсной примеси в атмосфере с учетом ветрового подхвата с подстилающей поверхности, полидисперсности примеси, процессов коагуляции и распыления при определенных дополнительных условиях может иметь вид

$$\varepsilon\left(\frac{\partial c_a}{\partial t}+V(z)\frac{\partial c_a}{\partial x}-w(p)\frac{\partial c_a}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}(K(z,p)\frac{\partial c_a}{\partial z})\right)=L_p c_a \qquad (1)$$

$$\epsilon\frac{\partial c_s}{\partial t}=(K(z,p)\frac{\partial c_a}{\partial z}+w(p)c_a)|_{z=0}, \qquad (2)$$

$$\epsilon\frac{\partial c_s}{\partial t}=\alpha(p)c_a|_{z=0}-\beta(p)c_s. \qquad (3)$$

Здесь $c_a(x,z,t,p), c_s(x,t,p)$ - концентрации примеси в атмосфере и на поверхности почвы (при $z=0$) соответственно, переменная p описывает дисперсность примеси. Линейный оператор L_p, действующий по переменной p и описывающий процессы коагуляции — распыления, имеет однократное нулевое собственное значение, что соответствует существованию равновесного распределения дисперсности примеси. $0<\epsilon<<1$ - малый положительный параметр. Система (1)-(3) дополняется соответствующими начальными условиями

$$c_a(x,z,0,p)=c_a^0(x,z,p), c_s(x,0,p)=c_s^0(x,p). \qquad (4)$$

Строится формальное асимптотическое разложение (ФАР) решения задачи (1)-(4) по степеням малого параметра, в виде [1]

[1] Работа поддержана грантом РЭУ им. Плеханова Г.В. по теме «Интеллектуальная система анализа спутниковых данных с целью прогнозирования экономических последствий динамики глобального распределения запасов питьевой воды и пожарной опасности» .

$$c_a(x,z,t,p,\epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (\bar{c}_{a,i}(x,z,t,p) + \Pi_{a,i}(x,z,\tau,p)), \tag{5}$$

$$c_s(x,z,t,p,\epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (\bar{c}_{s,i}(x,z,t,p) + \Pi_{s,i}(x,z,\tau,p)). \tag{6}$$

Здесь $\tau = t/\epsilon$. При наложении ряда условий на уравнения (1)-(3) получены задачи для определения всех членов ФАР (5)-(6). Отметим, что в [2] аналогичная задача решалась без учета дисперсности примеси, в [3] - близкая задача без учета второй (почвенной) компоненты.

Остаточный член оценен по невязке.

Литература

1. Васильева А. Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева , В.Ф. Бутузов — М. : Изд-во МГУ, 1978, —262 с.

2. Возженников О. И. О переносе примеси в атмосфере при ветровом подхвате с подстилающей поверхности / О.И. Возженников, А.В. Нестеров // Метеорология и гидрология. —1988 —№ 11, С. 63–70.

3. Заборский А.В. Асимптотическое разложение сингулярно возмущенного диференциально-операторного уравнения нелинейного уравнения с переменными коэффициентами. / А.В. Заборский , А.В. Нестеров // Математическое моделирование, —2016, —т.28, №1, —С. 117-131.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДВУМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1]

Н.В. Зайцева (Москва, МГУ)

zaitseva@cs.msu.ru

В полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b\, u(x-h,t), \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики МГУ.

где a, b, $h \neq 0$ — заданные вещественные числа.

Интерес к дифференциально-разностным уравнениям с частными производными возник при исследовании задач механики сплошных сред, задач нелинейной оптики (см., напр., работу [1] и имеющуюся в ней библиографию).

В данной работе для уравнения (1) доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполняется условие* $a^2\xi^2 - b\cos(h\xi) > 0$, *то функция*

$$G(x,t;\xi) := \sin\left(t\,\rho(\xi)\cos\varphi(\xi) + \varphi(\xi) + \xi x\right)e^{t\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)} +$$
$$+\sin\left(t\,\rho(\xi)\cos\varphi(\xi) - \varphi(\xi) - \xi x\right)e^{-t\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}$$

удовлетворяет уравнению (1) *при любых вещественных значениях параметра* ξ, *где*

$$\rho(\xi) := \left(a^4\xi^4 - 2a^2b\xi^2\cos(h\xi) + b^2\right)^{1/4},$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{b\sin(h\xi)}{a^2\xi^2 - b\cos(h\xi)}.$$

Литература

1. Муравник А.Б. Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики / А.Б. Муравник // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, вып. 5. — С. 747–762.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВЫЯСНЕНИЮ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ[1]

Е.В. Зарембо, В.Ю. Мартынова, М.А. Москалева
(Пенза, ПГУ)
y-tak@yandex.ru, lynxbax@mail.ru, m.a.moskaleva1@gmail.com

Задача P заключается в нахождении тех значений спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых существуют решения $u \equiv u(x;\lambda) \in C^2[0,1]$ уравнения

$$u'' = -\big(a - \lambda + \alpha f(u^2)\big)u,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-71-10015).

удовлетворяющие краевым условиям

$$u(0;\lambda)=0,\quad u'(0;\lambda)=A,\quad u(1;\lambda)=0,$$

где $a,\alpha,A>0$ – некоторые постоянные, $f\in C^1[0,+\infty)$ – монотонно возрастающая функция, такая что $f(u^2)=O(u^{2q})$ для достаточно больших u и $q>0$, $f(0)=0$ [1]. В работе предлагается подход к исследованию задачи P, основанный на использовании интегрального характеристического уравнения [1, 2].

Имеет место следующий результат

Теорема 1. *Задача P имеет бесконечно много отрицательных собственных значений $\lambda=\lambda_n$ с асимптотикой $\lambda_{n-1}=O^*(n^2)$.*

Теорема 2. *Задача P имеет бесконечно много положительных собственных значений $\lambda=\lambda_m$ с точкой накопления на бесконечности. При этом, для всех достаточно больших m справедлива асимптотика $\lambda_{m-1}=O^*(f_m)$, где $f_m=g^{-1}\big(\frac{q}{m(q+1)}\big)$ и g^{-1} – функция, обратная к $g(t)=t^{-1/2}\ln t$, а $\max_{x\in[0,1]}|u(x;\lambda_m)|=O(\lambda_m^{\frac{1}{2q}})$.*

Литература

1. Kurseeva V., Moskaleva M., Valovik D. Asymptotical analysis of a nonlinear Sturm–Liouville problem: Linearisable and non-linearisable solutions // Asymptotic Analysis. – 2020. – Vol. 119. – P. 39–59.

2. Валовик Д. В. Распространение электромагнитных волн в открытом плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой I: TE-волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2019. – Т. 59, № 5. – С. 838–858.

АЛЬФА–МОДЕЛЬ II КЛАССА ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ[1]

А.В. Звягин (Воронеж, ВГПУ)

zvyagin.a@mail.ru

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается следующая начально–краевая задача, являющаяся альфа–моделью II класса и описывающая движение растворов полимеров (см. [1]-[5]):

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial v}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}v_i\Delta u_i-\nu\Delta v-\mu\frac{\partial\Delta v}{\partial t}-2\mu\mathrm{Div}\Big(\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\Big)-$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-60014).

$$-2\mu \mathrm{Div}\big(\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\big) + \mathrm{grad}\ p = f; \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\ u = 0; \quad v = (I - \alpha^2\Delta)u; \qquad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x); \quad u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0; \quad \Delta u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \qquad (3)$$

Здесь $v(x,t)$ — вектор–функция скорости частицы жидкости в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t \in [0,T]$; $u(x,t)$ — вектор–функция модифицированной скорости движения частицы среды, определяемая вторым равенством из (2); p — функция давления в жидкости; f — плотность внешних сил; $\mathcal{E}$ — тензор скоростей деформации $\mathcal{E}(v) = \big(\mathcal{E}_{ij}(v)\big)$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$; W — тензор завихренности $W(v) = \big(W_{ij}(v)\big)$, $W_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$; W_ρ — сглаженный тензор завихренности. Символ Div M обозначающий дивергенцию тензора $M = (m_{ij})$, т.е. вектор Div $M = \big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial m_{1j}}{\partial x_j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial m_{nj}}{\partial x_j}\big)$.

Теорема 1. *Для любых $f \in L_2(0,T;V^{-1})$ и $u_0 \in V^1$ начально–краевая задача (1)–(3) имеет хотя бы одно слабое решение v, принадлежащее пространству*

$$E := \{u : u \in L_\infty(0,T;V^1) \cap L_2(0,T;V^2),\ u' \in L_2(0,T;V^{-2})\}.$$

Литература

1. Звягин А.В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа–модели Фойгта движения вязкоупругой среды / А.В. Звягин // Успехи математических наук. — 2019. — Т. 74., В. 3. — С. 189–190.

2. Звягин А.В. Исследование разрешимости термовязкоупругой модели движения растворов полимеров, удовлетворяющей принципу объективности / А.В. Звягин // Математические Заметки. — 2019. — Т. 105, В. 6. — С. 839–856.

3. Звягин А.В. Слабая разрешимость термовязкоупругой модели Кельвина–Фойгта / А.В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. — 2018. — № 3. — С. 91–95.

4. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для термовязкоупругой модели движения жидкости Фойгта / А.В. Звягин // Доклады Академии Наук. — 2016. — Т. 468, Н. 3. — С. 251–253.

5. Звягин А.В. Исследование разрешимости одной стационарной модели движения неньютоновой жидкости в неограниченной области / А.В. Звягин // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. — 2012. — № 2. — С. 118–121.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.П. Зубова, А.Х. Мохамад (Воронеж, ВГУ; Воронеж, ВГУ)
spzubova@mail.ru, abdulftah.hosni90@gmail.com

Рассматривается уравнение

$$A\frac{\partial u}{\partial t} = B\frac{\partial u}{\partial x} + Cu(t,x) + f(t,x), \tag{1}$$

где $A : E_1 \to E_2$, E_1, E_2 — банаховы пространства; A — линейный замкнутый фредгольмов оператор с нулевым индексом, $\overline{\operatorname{dom} A} = E_1$; B, $C \in L(E_1, E_2)$; $(t,x) \in T \times X, T = [0, t_k],\ X = [0, x_k]$; $f(t,x)$ — заданная достаточно гладкая вектор-функция со значениями в E_2; $u = u(t,x)$ искомая вектор-функция.

Ищется решение уравнения (1) с условиями

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x \in X, \quad u(t,0) = \psi(t),\ t \in T, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие вектор-функции со значениями в E_1.

Рассматривается регулярный случай, то есть случай существование оператора $(A - \lambda B)^{-1}$ при малых $|\lambda| \neq 0$. В таком случае оператор $(A - \lambda B)^{-1}A$ имеет число 0 нормальным собственным числом и при $C = 0$ уравнение (1) распадается на уравнения в подпространствах.

При $C \neq 0$ рассматривается случай $Q(A - \lambda B)^{-1}CP = 0$, где Q и P проекторы на Coker A и Ker$A$. Формулируются условия на оператор $P(A-\lambda B)^{-1}CP$, на гладкость $f(t,x)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$, позволяющие решить поставленную задачу при дополнительных условиях согласования для $\varphi(x)$ и $\psi(t)$.

Приводится пример решения задачи в пространстве l_2.

Литература

1. Zubova, S. P. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / S. P. Zubova// Вестник Воронежского гос.

ун-та. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 2. Июль-декабрь. – – С. 134-140.

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГУ; Воронеж, ВГЛТУ)
spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Рассматривается система

$$\frac{\partial x}{\partial t} = B\big(a(t,s)\frac{\partial x}{\partial s} + b(t,s)x(t,s)\big) + D\big(c(t,s)\frac{\partial u}{\partial s} + d(t,s)u(t,s)\big), \quad (1)$$

где $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $D : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$; $a(t,s)$, $b(t,s)$, $c(t,s)$, $d(t,s)$ — скалярные непрерывные функции; $a(t,s)$, $c(t,s) \neq 0, \forall (t,s) \in T \times S, T = [t_0, t_k], S = [s_0, s_k]$; $t_k, s_k < \infty$.

Ставится задача выявления условий полной управляемости системы (1), то есть условий существования управляющего воздействия $u(t,s)$, под действием которого система переводится из произвольного начального состояния $\alpha(s)$ в произвольное конечное состояние $\beta(s)$:

$$x(t_0,s) = \alpha(s), \quad x(t_k,s) = \beta(s).$$

Методом каскадной декомпозиции, разработанным в [1–3], доказывается

Теорема 1. *Система (1) полностью управляема в том и только том случае, когда выполняется условие Калмана*

$$\operatorname{rank}(D\, Bd\, \ldots B^{n-1}D) = n.$$

В качестве примера рассматриваются деформации поверхности $\{\big(x_1(t,s,\tau),\, x_2(t,s,\tau),\, \tau\big)\}$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, связанной соотношениями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = \dfrac{\partial x_1}{\partial s} + \dfrac{\partial x_2}{\partial s} + x_1(t,s,\tau) + x_2(t,s,\tau), \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial s} + u(t,s,\tau), \end{cases}$$

$t \in [0,1]$, $s \in [0, 2\pi]$, под воздействием внешней силы $u(t,s,\tau)$.

Требуется найти такое управление $u(t,s,\tau)$, при котором поверхность $\{\big(x_1(0,s,\tau),\, x_2(0,s,\tau),\, \tau\big)\} = \{(\tau cos\, s,\, \tau sin\, s,\, \tau)\}$ через единицу времени займет положение $\{(s,\, s,\, \tau)\}$, то есть требуется коническую поверхность над плоскостью $X_1 0 X_2$ деформировать в плоскость, перпендикулярную плоскости $X_1 0 X_2$.

Приводятся формулы для построения $u(t,s,\tau)$ и соответствующих $x_1(t,s,\tau)$, $x_2(t,s,\tau)$.

Литература

1. Zubova, S. P. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition / S. P. Zubova, E. V. Raetskaya// Automation and Remote Control. — 2017. — V. 78, № 7. — P. 1189–1202.

2. Zubova, S. P. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System / S. P. Zubova, E. V. Raetskaya// Automation and Remote Control. — 2018. — V. 79, № 5. — P. 774–791.

3. Zubova, S. P. Solution of Inverse Problems for Linear Dynamical Systems by the Cascade Method / S. P. Zubova // Doklady Mathematics, Pleiades Publishing,Ltd. — 2012. — V. 86, № 3. — P. 846–849.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЬЮ[1]

М.Ю. Игнатьев (Саратов, СГУ)

ignatievmu@sgu.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$y' = (\rho B + x^{-1} A + q(x))y \tag{1}$$

со спектральным параметром ρ, где A и B – постоянные $n \times n$, $n > 2$ матрицы, $q(\cdot)$ – внедиагональная матрица-функция, которую в дальнейшем будем называть *потенциалом.*

Относительно матриц A и B мы будем предполагать выполненными следующие условия.

Условие 1. *Матрица A внедиагональна. Собственные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^{n}$ матрицы A различны и удовлетворяют условию $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$, кроме того, $Re\mu_1 < Re\mu_2 < \cdots < Re\mu_n$, $Re\mu_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$.*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-01-00102, 20-31-70005).

Условие 2. *$B = diag(b_1, \ldots, b_n)$, элементы $b_1, \ldots, b_n$ – различные ненулевые комплексные числа, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и такие, что* $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j = 0$.

Обозначим через Σ объединение прямых вида:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{z : \mathrm{Re}(zb_j) = \mathrm{Re}(zb_k)\}.$$

Для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ существует перестановка $R_1, \ldots, R_n$ чисел $b_1, \ldots, b_n$ такая, что $\mathrm{Re}(R_1 z) < \mathrm{Re}(R_2 z) < \cdots < \mathrm{Re}(R_n z)$. Обозначим через $\mathfrak{f}$ матрицу перестановок такую, что $(R_1, \ldots, R_n) = (b_1, \ldots, b_n)\mathfrak{f}$. Через $\mathfrak{f}_k$ будет обозначаться k-й столбец матрицы $\mathfrak{f}$. Представим множество $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ в виде объединения непересекающихся открытых секторов $\mathcal{S}_\nu$ вида $\{z = r\exp(i\gamma), r \in (0,\infty), \gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)\}$. Предположим, что для каждого из секторов $\mathcal{S}_\nu$ выполнено условие информативности $I(\mathcal{S}_\nu)$ [1].

Будем говорить, что внедиагональная матрица-функция $q(\cdot) \in L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$ принадлежит классу G_0^p, если для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ характеристическая функция краевой задачи, порожденной системой (1) и условиями

$$y(x) = O(x^{\mu_k}), x \to 0,\ y(x) = o(\exp(\rho R_k x)), x \to \infty,$$

не обращается в нуль ни при каких ρ. Если $q(\cdot) \in G_0^p$, то при любом $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$ существует единственное решение $y(x), x \in (0,\infty)$ системы (1), обладающее свойствами:

$$y(x) = O(x^{\mu_k}), x \to 0,\ y(x) = \exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty.$$

Назовем такое решение k*-м решением типа Вейля* и обозначим его $\Psi_k(x,\rho)$. Определим матрицу $\Psi(x,\rho) := (\Psi_1(x,\rho), \ldots, \Psi_n(x,\rho))$.

Обозначим через Σ_ν открытый луч, разделяющий секторы $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$ (здесь предполагается, что нумерация секторов осуществляется в направлении против часовой стрелки и $\mathcal{S}_{N+1} := \mathcal{S}_1$). Для $\rho \in \Sigma_\nu$ определена единственная *матрица сопряжения* $v(\rho)$ такая, что $\Psi^+(x,\rho) = \Psi^-(x,\rho)v(\rho)$, где $\Psi^\pm(x,\rho) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \Psi(x, \rho \pm i\rho\varepsilon)$.

Теорема 1. *Предположим, что потенциалы $q(\cdot) \in G_0^p$ и $\tilde{q}(\cdot) \in G_0^p$, $p > 2$, таковы, что соответствующие им матрицы сопряжения $v(\rho)$ и $\tilde{v}(\rho)$ совпадают для всех $\rho \in \Sigma := \bigcup_{\nu=1}^{N} \Sigma_\nu$. Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ п.в.*

Таким образом, задание матрицы сопряжения однозначно определяет потенциал класса G_0^p.

Решение обратной задачи рассеяния, состоящей в восстановлении потенциала класса G_0^p по заданной матрице сопряжения, может быть найдено с помощью конструктивной процедуры, центральную роль в которой играет решение при каждом $x \in (0, \infty)$ некоторого линейного уравнения в пространстве $L_2(\Sigma)$.

Литература

1. Ignatiev M.Yu. On Weyl-type Solutions of Differential Systems with a Singularity. The Case of Discontinuous Potential /M.Yu. Ignatiev // Mathematical Notes. — 2020. — Vol. 108, — No. 6, pp. 814–826.

О РЕШЕНИЯХ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

М. Илолов, Дж.Ш. Рахматов (Таджикистан, Душанбе, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАНТ)
ilolov.mamadsho@gmail.com

При изучении динамических процессов и систем во фрактальных структурах в реологии, вязкоупругости, электрохимии, электромагнетизме и др. существенную роль играет аппарат дробного исчисления (см. напр. [1]). Очень часто динамика этих процессов зависит от неопределенных параметров и коэффициентов учитывающих влияние внешних сил. Именно поэтому в качестве моделей выступают дробные нечеткие дифференциальные уравнения дробного порядка. В этом направлении за последние годы появилось большое количество монографий и журнальных статей. Мы отметили лишь некоторые из них [2-4] нужные нам при формулировке наших результатов.

1. Обозначим через $\mathbb{E}$ пространства всех нечетких, выпуклых, непрерывных сверху, многозначных отображений $u : \mathbb{R} \to [0, 1]$ таких, что замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}, u(y) > \gamma\}$ компактно. Нулем в пространстве $\mathbb{E}$ является элемент вида

$$\tilde{O}(y) = \begin{cases} 1, \text{ если } y = 0 \\ 0, \text{ если } y \in \mathbb{R} - \{0\}. \end{cases}$$

Обозначим далее через $[u]^\alpha$ множество $\{y \in \mathbb{R} : u(y) > \alpha\}$ при $0 < \alpha \leqslant 1$ и замыкание $\{y \in \mathbb{R}; U(y) > 0\}$ при $\alpha = 0$.

Теперь определим метрику в пространстве $\mathbb{E}$ в виде $D : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to [0, +\infty)$, полагая

$$D(u, v) = \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

где h-растояние Хаусдорфа. Хорошо известно, что метрическое пространство $(\mathbb{E}, D)$ является полулинейным полным метрическим пространством [5].

2. Рассмотрим начальную задачу

$$(D^q_{a+}x)(t) = f[t, x(t)], q > 0 \tag{1}$$

с начальным условием

$$(D^{\alpha-k}_{a+}x)(a) = b_k, b_k \in R, k = 1, ..., n = -[-q], \tag{2}$$

где D^q_{a+} - дробная производная Римана-Лиувилля поряка $q, f : [a, b] \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$.

Определение 1. *Отображение $x : J \to \mathbb{E}, J \subset [a, b]$, называется решением задачи (1)-(2), если оно слабо непрерывно и удовлетворяет интегральному уравнению*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j}{\Gamma(q - j + 1)}(t - a)^{q-j} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int\limits_a^t \frac{f[s, y(s)]}{(t - s)^{1-q}} ds.$$

Теорема 1. *Пусть $k = -[-q]$. Пусть в области $Q = \{(t, x) : a \leqslant t \leqslant a + d_i, D(x, \max b_k) \leqslant d_2\}$ отображение $f : Q \to \mathbb{E}$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $f(\cdot, x)$ сильно измеримо по t при любом фиксированном x; 2) $f(t, \cdot)$ слабо непрерывно по x при почти всех t; 3) существует суммируемая функция $m(t)$ такая, что для почти всех t, x справедливо равенство*

$$D(f(t, x), \hat{0}) \leqslant m(t)$$

Тогда на отрезке $[a, a + d_3]$ существует решение задачи (1), (2), где $d_3 > 0$ такое, что $d_3 \leqslant d_1, \varphi(a + d_3) \leqslant d_3, \varphi(t) = \int\limits_a^t m(s)ds$.

Теорема 2. *Пусть $k = -[-q]$. Пусть в области $Q = \{(t, x) : a \leqslant t \leqslant a + d_1, x \in G \subset \mathbb{E}\}$ отображение $f(t, x)$ удовлетворяет* *условию Липшица по переменной x с постоянной $L > 0$. Тогда задача (1),(2) имеет единственное решение.*

Литература

1. Учайкин В.В. Метод дробных производных / В.В. Учайкин. — : Издательство «Артишок», 2008. — 512 с.

2. Kilbass A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A.A. Kilbass, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo // Elsevier Inc., Heidelberg, — 2006. — T. 59, 541 p. —

3. Agarval R.P., Lakshmikantham V., Nietto J.J. On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty / R.P. Agarval, V. Lakshmikantham, J.J. Nietto // — Nonlinear Analysis, 2010. —v. 72, —pp. 2859-2862.

4. Илолов М., Рахматов Дж.Ш. О начально-краевой задаче для нечеткого уравнения теплопроводности / М. Илолов,Дж.Ш. Рахматов // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Серия Математика. Информатика. Механика. — 2018. —N2 (123). — С. 71-75.

5. Плотников А.В., Скрипник Н.В. Дифференциальные уравнения с «четкой» и нечеткой многозначной правой частью. Ассимптотические методы / А.В. Плотников, Н.В. Скрипник // Одесса:. : Астропринт. — 2009. — 192 С.

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ[1]

К.Б. Иманбердиев, А.С. Касымбекова,
А.М. Аязбаева (Алматы, ИМММ, КазНУ имени аль-Фараби)
kanzharbek75ikb@gmail.com, kasar1337@gmail.com,
a_ ayazbaeva@mail.ru

Постановка задачи стабилизации. Пусть $\Omega = \{x, y : -\pi/2 < x, y < \pi/2\}$ область с границей $\partial\Omega$. В цилиндре $Q = \Omega \times \{t > 0\}$ с боковой поверхностью $\Sigma = \partial\Omega \times \{t > 0\}$ рассматривается граничная задача (ГЗ) для нагруженного уравнения теплопроводности

$$u_t - \Delta u + \alpha \cdot u_x(0, y, t) + \beta \cdot u_y(x, 0, t) = 0, \;\; \{x, y, t\} \in Q, \qquad (1)$$

[1] Это исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант № AP08855372, 2020-2022).

$$u(x,y,0)=u_0(x,y),\ \{x,y\}\in\Omega, \tag{2}$$

$$u(x,y,t)=p(x,y,t),\ \{x,y,t\}\in\Sigma, \tag{3}$$

где $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ заданные комплексные числа, $u_0(x,y)\in L_2(\Omega)$ заданная функция. Задача состоит в том, чтобы найти функцию $p(x,y,t)$ такую, чтобы решение ГЗ (1)–(3) удовлетворяло неравенству

$$\|u(x,y,t)\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C_0e^{-\sigma t},\ \sigma>0,\ t>0. \tag{4}$$

Здесь σ заданная константа и $C_0\geqslant\|u_0(x,y)\|_{L_2(\Omega)}$ произвольная ограниченная константа. Уравнение (1) называется нагруженным уравнением [1,2]. Отметим что, задача (1)–(4) с нагрузкой по нульмерным многообразиям (на множестве точек) была изучена в [3].

Литература

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения / А.М. Нахушев. — М. : Наука, 2012. — 232 с.

2. Jenaliyev M. On spectral problems for loaded two-dimension Laplace operator / M. Amangalieva, M. Jenaliyev, K. Imanberdiyev and M. Ramazanov // AIP Conference Proceedings — 2016. — 1759, — 020049. https://doi.org/10.1063/1.4959663.

3. Дженалиев М.Т. Стабилизация решения уравнения теплопроводности, нагруженного по нульмерным многообразиям, с помощью граничных управлений / М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов // Мат. журнал — 2015. — Т. 15, № 4. — С. 33–53.

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА[1]

Т.С. Индуцкая, В.В. Шеметова (Иркутск, ИГУ; Новосибирск, ИМ СО РАН)

indutskaya.tat@yandex.ru, valentina501@mail.ru

Пусть E — банаховое пространство, $A:\ E\to E$ — ограниченный линейный оператор, $u,\ v:\ [0;\,T]\to E$ и $f,\ g:\ [0;\,T]\to E$ — искомые и заданные функции соответственно аргумента $t\in\mathbb{R}$. Рассмотрим задачу типа Коши

$$^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}u-Au=f;\quad \mathcal{D}^{\alpha-i}_{0+}u(t)\big|_{t=0}=u_{[\alpha]+1-i},\ i=1,\dots,[\alpha]+1, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ВАНТ (проект № 20-51-54003), а также РФФИ (проект № 18-01-00643).

и задачу Коши

$$
{}^{GC}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}v - Av = g; \quad v^{[\alpha]-i}(0) = v_{[\alpha]-i}, \ i = 1, \ldots, [\alpha]. \tag{2}
$$

Здесь введены обозначения производных Римана – Лиувилля

$$
{}^{RL}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}u = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}}\int\limits_0^t (t-s)^{-\{\alpha\}}u(s)\,ds,
$$

и Герасимова – Капуто

$$
{}^{GC}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}v = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\int\limits_0^t (t-s)^{-\{\alpha\}}v^{([\alpha]+1)}(s)\,ds,
$$

порядка $\alpha > 0$ функций u и v. Интеграл понимается по Бохнеру, а $[\alpha] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant \alpha\}$, $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$. В докладе планируется изложить результаты исследования однозначной разрешимости и свойств решений начальных задач (1) и (2). Методы исследования основаны на идеях теории обобщенных функций (распределений) Соболева – Шварца со значениями в банаховом пространстве [1] и концепции фундаментального решения.

Литература

1. Sidorov N. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 548 p.

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА[1]

Н.Ж. Кажкенова, Н.Т. Орумбаева (Караганда,
Карагандинский университет имени академика Е.А.Букетова)
OrumbayevaN@mail.ru

На $\Omega = [X_0, X] \times [0, T]$, $X_0 > 0$ рассмотрим уравнение вида

$$
\frac{\partial w}{\partial x} = w\frac{\partial w}{\partial t} + \varphi\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{1}{x^2}\psi(t),
$$

[1] Это исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Grant No. AP08955795, 2020-2022.).

$$w\,(x,0) = 0, \quad \alpha w''_{xt}\,(x,0) = \beta w''_{xt}\,(x,T)\,,$$

где $,\varphi \neq 0$, α, β – const, $\psi\,(t)$- функция непрерывная на $[0,T]$. При $\frac{1}{x^2}\psi(t) = 0$ получим уравнение Бенджамина-Бона-Махони. С помощью замены $w\,(x,\ t) = \frac{u(t)}{x}$ рассматриваемая задача сводится к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Далее, вводя дополнительные функции полученную задачу сводим к многоточечной задаче, состоящей из краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка и функционального соотношения. При установлении условий разрешимости краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения использован метод параметризации [1]. В работе [2] метод параметризации был применен для решения периодической краевой задачи системы гиперболических уравнений. Применение данного метода позволило предложить алгоритмы нахождения приближенного решения исследуемой задачи и доказать его сходимость.

Литература

1. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения / Д.С. Джумабаев // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1989. — Т. 29:2. — С. 50–66.

2. Orumbayeva N.T. On solvability of non-linear semi-periodic boundary-value problem for system of hyperbolic equations / N.T. Orumbayeva // Russian Mathematics. — 2016. — V. 60. — Issue 9. — C. 23–37.

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСТВА[1]

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина (Нижний Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Математический центр, ИПФ РАН)
kalinmm@yandex.ru

Большинство существующих моделей электрических атмосферных явлений направлены на поиск распределения квазистационарной плотности тока и электрического поля в атмосфере с учетом

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-77-10061).

их генераторов [1]. При использовании нерелятивистского электрического приближения для системы уравнения Максвелла возникающие при этом задачи, как правило, относятся к неклассическим задачам математической физики [2].

Вместо нерелятивистского электрического приближения для описания квазистационарных полей в атмосфере может применяться более общее квазистационарное приближение для системы уравнений Максвелла, основанное на ортогональном разложении векторных полей на потенциальную и вихревую составляющие [3].

В работе на основе развитых подходов к изучению квазистационарных электромагнитных полей [3] приводятся и анализируются новые постановки задач, возникающие в теории атмосферного электричества.

Литература

1. Мареев Е.А. Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи / Е.А. Мареев // Успехи физических наук. —2010. — Т. 180. № 5. —С. 527–534.

2. Kalinin A.V., Slyunyaev N.N. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit / A.V. Kalinin, N.N. Slyunyaev // J. Math. Anal. Appl. — 2017. — V. 450, № 1. — P. 112–136.

3. Калинин А.В., Тюхтина А.А. Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах / А.В. Калинин, А.А. Тюхтина // Журнал выч. мат. и мат. физики. —2020. —Т. 60, № 8. — С. 121–134.

О ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД[1]

В.А. Калитвин (Липецк, ЛГПУ
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
kalitvin@gmail.com

К уравнениям Вольтерра с частными интегралами приводятся различные задачи механики сплошных сред [1-3].

В пространстве $C(D)$ непрерывных на $D = [a, b] \times [c, d]$ функций рассматривается линейное уравнение Вольтерра с частными инте-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

гралами

$$x(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+\int_a^t\int_c^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s), (t,s) \in D \equiv (Kx)(t,s) + f(t,s),$$

где l, m, n, f — заданные непрерывные на $D \times T$, $D \times S$, $D \times T \times S$, D соответственно функции,

$$T = \{\tau : a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b\}, S = \{\sigma : c \leqslant \sigma \leqslant s \leqslant d\}.$$

Это уравнение обобщает интегральные уравнения, к которым приводятся задача о деформации упругой пластинки и отдельные задачи теории тонких упругих оболочек [2]. Хорошо известно, что оператор K непрерывен в $C(D)$ и его спектральный радиус равен нулю [1-3]. Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение и оно может быть найдено методом последовательных приближений. Однако, использование данного метода приводит к громоздким вычислениям и возникает необходимость в разработке алгоритмов и программ для численного решения уравнений этого вида. Заметим, что оператор K в исходном уравнении не является вполне непрерывным оператором в пространстве $C(D)$ при непрерывной, ненулевой функции $l(t,s,\tau)$ или $m(t,s,\sigma)$. Поэтому применение для уравнения Вольтерра с частными интегралами схем численного решения, аналогичных алгоритмам решения обычных интегральных уравнений Вольтерра, требует обоснования сходимости.

Далее приводится алгоритм численного решения исходного уравнения, основанный на применением квадратурных и кубатурной формул, изучается сходимость вычислительных процессов, приводятся результаты вычислений для контрольных примеров.

Отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разобъем на части точками

$$t_p = a + ph \ (p = 0,1,\ldots,P,\ a + Ph \leqslant b < (P+1)h),$$

$$s_q = c + qg \ (q = 0,1,\ldots,Q,\ c + Qg \leqslant d < (Q+1)g)$$

соответственно. Полагая $t = t_p$, $s = s_q$ и применяя формулы

$$\int_a^{t_p} l(t_p,s_q,\tau)x(\tau,s_q)d\tau = h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{pqi}x(t_i,s_q) + r_{pq}^l,$$

$$\int_c^{s_q} m(t_p, s_q, \sigma)x(t_p, \sigma)d\sigma = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{pqj} x(t_p, s_j) + r_{pq}^m,$$

$$\int_a^{t_p}\int_c^{s_q} n(t_p, s_q, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma = hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \gamma_{pqij} n_{pqij} x(t_i, s_j) + r_{pq}^n,$$

где $l_{pqi} = l(t_p, s_q, t_i)$, $m_{pqj} = m(t_p, s_q, s_j)$, $n_{pqij} = n(t_p, s_q, t_i, s_j)$, а r_{pq}^l, r_{pq}^m и r_{pq}^n — остатки квадратурных и кубатурной формул, получим после отбрасывания остатков систему уравнений для приближенных значений x_{p0}, x_{0q}, x_{pq} функции x в точках (t_p, s_0), (t_0, s_q), (t_p, s_q) $(p = 1, \ldots, P; q = 1, \ldots, Q)$. Пусть δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} — погрешности в уравнениях с x_{p0}, x_{0q}, x_{pq}. Тогда

$$x_{00} = f(a, c),$$

$$x_{p0} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{p0i} x_{i0} + f_{p0} + \delta_{p0},\ x_{0q} = g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{0qj} x_{0j} + f_{0q} + \delta_{0q},$$

$$x_{pq} = h\sum_{i=0}^{p} \alpha_{pi} l_{pqi} x_{iq} + g\sum_{j=0}^{q} \beta_{jq} m_{pqj} x_{p_j} + hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \gamma_{pqij} n_{pqij} x_{ij} + f_{pq} + \delta_{pq}$$

$$(p = 1, \ldots, P; q = 1, \ldots, Q),$$

где $f_{p0} = f(t_p, s_0)$, $f_{0q} = f(t_0, s_q)$, $f_{pq} = f(t_p, s_q)$.

Теорема. *Пусть функции l, m, n и f непрерывны на множествах $D \times T$, $D \times S$, $D \times T \times S$, D и выполнены условия:*

r_{pq}^l, r_{pq}^m и r_{pq}^n стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$;

существуют такие числа A, B, C, что

$$|\alpha_{pi}| \leqslant A < \infty,\ |\beta_{jq}| \leqslant B < \infty,\ |\gamma_{pqij}| \leqslant C < \infty;$$

погрешности δ_{p0}, δ_{0q}, δ_{pq} стремятся к нулю равномерно относительно p, q при $h, g \to 0$.

Тогда при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} может быть найдено из последней системы, причем для любого заданного $\epsilon > 0$ найдутся такие h_0 и g_0, что при $h < h_0$ и $g < g_0$ будут выполняться неравенства

$$|x_{pq} - x(t_p, s_q)| < \epsilon\ (p = 0, 1, \ldots, P; q = 0, 1, \ldots, Q),$$

причем

$$h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l(t,s,t_i)x_{iq}+g\sum_{j=0}^{q}\beta_{jq}m(t,s,s_j)x_{pj}+$$

$$+hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}\gamma_{pqij}n(t,s,t_i,s_j)x_{ij}+f(t,s)$$

равномерно сходится на D *к решению* $x(t,s)$ *при* $h\to 0,\ g\to 0.$

С использованием данной схемы спроектирована и разработана программа на языке программирования Python и библиотеки PyQT [4]. С применением созданной программы были проведены численные расчеты для контрольных примеров.

Контрольный пример 1.

$$x(t,s)=\int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+$$

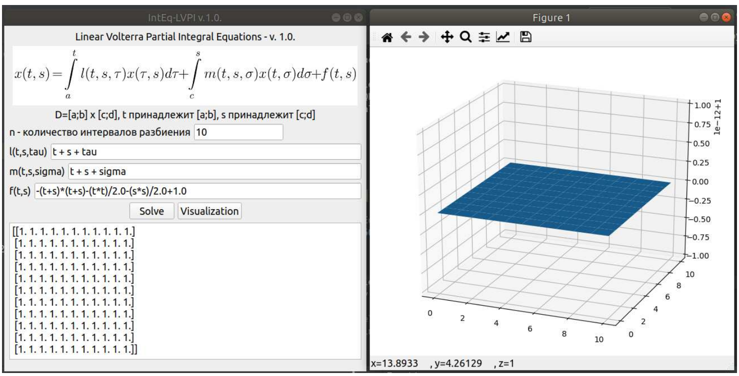
$$+\int_a^t\int_c^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s).$$

$$l(t,s,\tau)=t+s+\tau,\ \ m(t,s,\sigma)=t+s+\sigma, n(t,s,\tau,\sigma)=0,$$

$$f(t,s)=1-(t+s)^2-\frac{t^2}{2}-\frac{s^2}{2},$$

$$D=[0;1]\times[0;1].\ \text{Точное решение}\ x(t,s)=1.$$

Результаты вычислений представлены на рисунке



Контрольный пример 2.

$$x(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

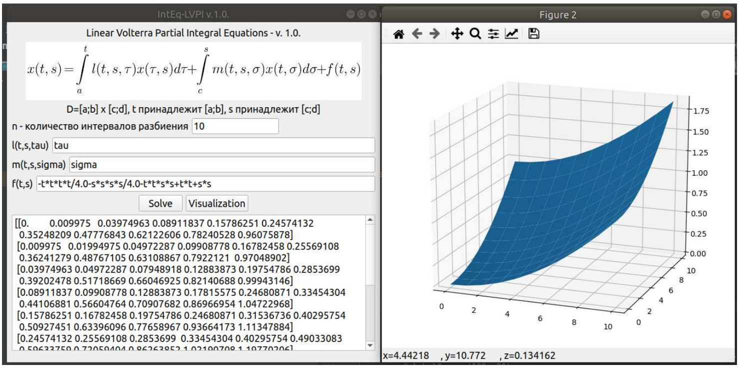
$$+ \int_a^t \int_c^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s).$$

$$l(t,s,\tau) = \tau,\ \ m(t,s,\sigma) = \sigma, n(t,s,\tau,\sigma) = 0,$$

$$f(t,s) = -\frac{t^4}{4} - \frac{s^4}{4} - t^2 \cdot s^2 + t^2 + s^2,$$

$$D = [0;1] \times [0;1]. \text{ Точное решение } x(t,s) = t^2 + s^2.$$

Результаты вычислений представлены на рисунке



Проведенные вычислительные эксперименты показывают достаточно хорошие результаты.

Литература

1. Appell J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations /J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. —New York : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. —Воронеж : ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

3. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. —Липецк : ЛГПУ, 2006. —177 с.

4. Калитвин В.А. О разработке приложения для численного решения уравнений Вольтерра с частными интегралами / В.А. Калитвин //Актуальные проблемы естественных, математических, технических наук и их преподавания : сборник научных трудов. — Липецк : ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, 2020. — С. 121–126.

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТРИЧНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ[1]

В.В. Калманович, А.А. Картанов (Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского)
v572264@yandex.ru

Ранее нами был предложен метод решения задачи теплопроводности в многослойной среде с идеальным контактом между слоями [1], [2], основанный на совместном использовании матричного метода, метода обобщенных степеней Берса [3] и метода Фурье. Такой подход в единой аналитической форме позволяет получить решение для процессов в многослойных средах со сдвиговой, осевой или центральной симметрией с любым конечным числом слоев. В данной работе показана возможность использования такого метода для решения задачи теплопроводности при неидеальном контакте слоев.

Литература

1. Калманович В.В. Об использовании метода Фурье для решения одной нестационарной задачи теплопроводности в многослойной среде / В.В. Калманович, Ю.А. Гладышев // Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения — XXXI. — Воронеж : Воронежский государственный университет, 2020. — С. 106–107.

2. Гладышев Ю.А. О применении матричного метода для математического моделирования процессов теплопереноса / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, М.А. Степович // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й между-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-03-00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

народной Саратовской зимней школы. — Саратов : Научная книга, 2020. — С. 118–121.

3. Гладышев Ю.А. Приложение методов аппарата Берса к задачам процессов переноса в многослойной среде / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, М.А. Степович // Вестник Калужского университета. — 2015. — № 3. — С. 5–10.

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ МЛАДШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ[1]

В.Л. Камынин (Москва, НИЯУ МИФИ)
vlkamynin2008@yandex.ru

Изучается однозначная разрешимость обратной задачи в $Q \equiv [0,T] \times [0,l]$ для параболического уравнения

$$\rho(t,x)u_t - u_{xx} + b(t,x)u_x + c(t,x)u + \gamma(x)u = f(t,x), \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u(t,0) = \mu_1(t), \quad u(t,l) = \mu_2(t), \qquad (2)$$

и дополнительным условием интегрального наблюдения

$$\int_0^T u(t,x)\chi(t)\,dt = \varphi(x), \qquad (3)$$

а также однозначная разрешимость обратной задачи для параболического уравнения

$$u_t - a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(t,x)u + \gamma(x)u = f(t,x), \qquad (4)$$

с условиями (2),(3). В рассматриваемых задачах неизвестной является пара $\{u(t,x), \gamma(x)\}$, функция $\gamma(x)$ — неотрицательна и ограничена, уравнения (1) и (4) предполагаются вырождающимися:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентноспособности НИЯУ МИФИ проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013 (проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013).

в уравнении (1) $0 \leqslant \rho(t,x) \leqslant \rho_1,\ 1/\rho \in L_q(Q), q > 1$, в уравнении (4) $0 \leqslant a(x) \leqslant a_1,\ 1/a_1 \in L_q((0,l), q > 1$.

Для обеих задач установлены достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решения. Приведены примеры, для которых применимы доказанные теоремы.

ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ НОРМАМИ[1]

А.И. Козко (Москва, МГУ, Моск. центр фунд. и прикл. матем.)
prozerpi@yahoo.co.uk

В работе изучаются прямые и обратные теоремы теории приближения в пространствах с несимметричной нормой. Несимметричные нормы изучались в работах Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянова [1], А.И. Козко [2]-[4], А. -Р. К. Рамазанова, Б. М. Ибрагимовой [5], Бабенко В.Ф. и многих других. Ссылки на литературу см. в работах [6]-[8]. В этих работах рассматривались различные вопросы теории приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом.

Одно из важнейших наблюдений состоит в том, что односторонние приближения являются частным случаем несимметричных приближений со знакочувствительными весами, т.е. являются некоторым "мостиком"между приближениями в одностороним случае и в случае классических L_p - пространств.

Разбираются различные модули гладкости, исследуются их основные свойства. Рассматриваются аналоги прямых и обратных теорем теории приближения для несимметричных пространств со знакочувствительным весом.

Литература

1. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности / Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов // Изв. РАН. Сер. матем. — 1998. — Т. 62, № 6. —С. 59–102.

2. Козко А. И. Аналоги неравенств Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой / А. И. Козко // Математические заметки. — 1997. — Т. 61, № 5. — С. 687–699.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332-а).

3. Козко А. И. Дробные производные и неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой / А. И. Козко // Изв. РАН. Сер. матем. — 1998. — Т. 62, № 6. — С. 125–142.

4. Козко А. И. Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой / А. И. Козко // Матем. сб. — 1998. — Т. 189, — № 9. — С. 85–106.

5. Рамазанов А.-Р. К., Ибрагимова Б. М. Несимметричный интегральный модуль непрерывности и аналог первой теоремы Джексона /А.-Р. К. Рамазанов, Б. М. Ибрагимова // Вестник ДГУ. — 2010. — № 6. — С. 51–54.

6. Козко А. И. Полнота ортогональных систем в несимметричных пространствах со знакочувствительным весом / А. И. Козко // Современная математика и ее приложения. — 2005. — Т. 24, — С. 135–147.

7. Козко А. И. О порядке наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом на классах дифференцируемых функций / А. И. Козко // Изв. РАН. Сер. матем. — 2002. — Т. 66, № 1. С. 103–132.

8. S. Cobzaş Functional analysis in asymmetric normed spaces / Basel: Birkhäuser/ Springer, — 2013. — 219 p.

КЛАСС МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ КВАЗИРЕШЕНИЙ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

М.М. Кокурин (Йошкар-Ола, МарГУ)
kokurin@nextmail.ru

Дано нелинейное операторное уравнение $F(x) = f$ относительно $x \in H_1$, где $f \in H_2$ и $F : H_1 \to H_2$ — дифференцируемый по Фреше оператор в гильбертовых пространствах H_1, H_2. Поставим задачу приближённого нахождения квазирешения данного уравнения, т.е. элемента $x^* \in H_1$, доставляющего локальный минимум функционалу $\|F(x) - f\|_{H_2}$. Потребуем, чтобы производная Фреше оператора F удовлетворяла условию Липшица в окрестности квазирешения x^*, оператор $F'(x^*)$ был ненулевым и имел замкнутый образ, а искомое квазирешение удовлетворяло условию истокопредставимости $x^* - \xi = F'^*(x^*)w$, $w \in H_2$ с известным элементом $\xi \in H_1$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20085).

Пусть вместо точного элемента $f \in H_2$ известно его приближение f_δ, $\|f_\delta - f\|_{H_2} \leqslant \delta$ с уровнем погрешности $\delta > 0$.

Для нахождения квазирешения предлагается использовать итеративно регуляризованные методы типа Гаусса–Ньютона, имеющие вид

$$x_{n+1} = \xi - \Theta([F'^*(x_n)F'(x_n)]^2, \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n)\cdot$$
$$\cdot F'^*(x_n)[F(x_n) - f_\delta - F'(x_n)(x_n - \xi)].$$

Здесь используется язык исчисления самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. На порождающую функцию $\Theta(\lambda, \alpha)$ накладывается ряд ограничений, которым, в частности, удовлетворяет функция $\Theta(\lambda, \alpha) = (\lambda + \alpha)^{-1}$. Последовательность параметров $\{\alpha_n\}$ должна удовлетворять условиям

$$0 < \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n, \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} < \infty, \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

При выполнении ряда дополнительных условий технического характера доказана сходимость последовательности приближений $\{x_n\}$ к квазирешению x^*, получена оценка погрешности. Методы описанного класса применены к задаче восстановления коэффициентов эпидемиологической модели и к задаче ЯМР–спектроскопии.

ПОЛНОТА АСИММЕТРИЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

М.Ю. Кокурин (Йошкар–Ола, МарГУ)
kokurinm@yandex.ru

Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ — семейства гармонических функций из $C^2(\overline{D})$, D–ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Рассматривается вопрос о том, в каких случаях семейство $\pi(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \{u_1u_2 : u_j \in \mathcal{H}_j, j = 1, 2\}$ образует полную систему в $L_2(D)$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{L}$ — прямая в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{L} \cap \overline{D} = \varnothing$. Тогда линейные комбинации функций семейства $\pi(\mathcal{H}_1^*, \mathcal{H}_2^*)$, $\mathcal{H}_1^* = \{u \in C^2(\overline{D}) : \Delta u = 0$ в $D\}$, $\mathcal{H}_2^* = \{|x - z|^{2-n} : z \in \mathcal{L}\}$ плотны в $L_2(D)$.*

Утверждение теоремы допускает обобщения на уравнения вида $\Delta u - k^2 u = 0$, $\kappa \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20–11–20085).

Волновое поле $u(x,t) = u_y(x,t)$, возбуждаемое в момент $t = 0$ источником в точке $y \in Y$, определяется решением задачи

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t) - \delta(x-y)g(t),\ x \in \mathbb{R}^3,\ t \geqslant 0$$

с нулевыми начальными условиями. Пусть $c(x) \equiv c_0$ вне априори заданной ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ с известной c_0, $c(x)$ при $x \in D$ неизвестны, $c \in C(\overline{D})$. В обратной задаче по измерениям усредненного рассеянного поля $\int_0^\infty t^2 u_y(x;t)dt = h(x,y)$ для $x \in X$, $y \in Y$, $(X \cup Y) \cap \overline{D} = \varnothing$ требуется определить $c(x)$, $x \in D$. Здесь X и Y — многообразия, на которых размещены детекторы рассеянного поля и его источники. С использованием Теоремы 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть* Π, L *– произвольные плоскость и прямая в* $\mathbb{R}^3$ *такие, что* $(\Pi \cup L) \cap \overline{D} = \varnothing$*;* X *и* Y *– открытая область в* Π *и открытый интервал в* L *соответственно,* $\overline{X} \cap \overline{Y} = \varnothing$*. Тогда функция* $c(x)$ *однозначно определяется данными наблюдения* $\{h(x,y) : x \in X, y \in Y\}$.

Теорема 2 допускает обобщение на схемы зондирования, в которых измеряется усредненное поле $\int_0^\infty P_n(t) u_y(x,t)dt$, где P_n — полином степени $2 \leqslant n \leqslant 4$.

О РАВНОСУММИРУЕМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ КРАТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Б.В. Коноплев (Саратов, СГУ)
borikon@bk.ru

Рассмотрим m-кратный ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами, где $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормированная в пространстве Лебега $L^2_\mu(\Omega)$ система комплекснозначных функций над пространством $\big(\Omega, \Sigma, \mu\big)$ со счетно-аддитивной не обязательно конечной мерой μ.

Пусть система ограниченных в $\mathbb{R}^m$ множеств $\{\mathcal{D}_N\}_{N=0}^\infty$ такая, что $O \in \mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ содержит точки ± 1 на осях,

$$\mathcal{D}_N \subset \mathcal{D}_{N+1}, \qquad \mathbb{Z}^m \subset \bigcup_{N=0}^\infty \mathcal{D}_N.$$

Назовем такую систему суммирующей. Сходимость ряда (1) по этой системе будем понимать как существование при данном $x \in \Omega$ предела

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n\in\mathcal{D}_N} a_n\varphi_n(x).$$

Лемма. *Пусть две суммирующие системы множеств* $\{\mathcal{D}_N\}_{N=0}^{\infty}$ *и* $\{\mathcal{F}_N\}_{N=0}^{\infty}$ *обладают свойством*

$$\mathcal{F}_N \subset \mathcal{D}_N \subset \mathcal{F}_{N+1}, \quad N = \overline{0,\infty}.$$

Тогда для любого кратного ортогонального ряда (1) с коэффициентами, суммируемыми в квадрате, почти всюду на Ω

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n\in\mathcal{D}_N} a_n\varphi_n(x) - \sum_{n\in\mathcal{F}_N} a_n\varphi_n(x) \right) = 0.$$

Пусть теперь $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченное звездное тело, т.е. ограниченная область (замкнутая область), обладающая свойством лучистости относительно начала координат:

$$\forall d \in \bar{\mathcal{D}} \quad [O,d) \subset \mathcal{D}.$$

Считаем, что точки ± 1 на осях принадлежат $\mathcal{D}$. Рассмотрим систему гомотетий $\mathcal{D}$ с центром O: $\{N\mathcal{D}\}_{N=0}^{\infty}$. Здесь $0\mathcal{D} = \{O\}$, $1\mathcal{D} = \mathcal{D}$. Это суммирующая система. Под частичными суммами ряда (1) будем понимать

$$S_N(x) = \sum_{n\in N\mathcal{D}} a_n\varphi_n(x),$$

а под

$$\sigma_N^{\alpha}(x) = \frac{1}{A_N^{\alpha}} \sum_{k=0}^{N} A_{N-k}^{\alpha-1} S_k(x), \quad \text{где} \quad A_N^{\alpha} = \binom{N+\alpha}{N},$$

— средние Чезаро этих частичных сумм.

Под (C,α) суммируемостью ряда (1) по гомотетиям $\mathcal{D}$ при данном $x \in \Omega$ будем понимать существование предела

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N^{\alpha}(x).$$

Теорема 1. *Для любого кратного ортогонального ряда (1) с коэффициентами, суммируемыми в квадрате, и любых двух ограниченных звездных тел* $\mathcal{D}, \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^m$*, ряд почти всюду на* Ω *либо* *одновременно $(C, \alpha > 0)$ суммируется по гомотетиям $\mathcal{D}$ и $\mathcal{F}$, либо одновременно не обладает этим свойством.*

Теорема 1, в частности, справедлива для частичных сумм по шарам и кубам.

Следствие. *Кратный тригонометрический ряд*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} c_n e^{i(n,x)}, \quad \text{где} \quad x \in T_m = [0, 2\pi)^m,$$

с коэффициентами, суммируемыми в квадрате, почти всюду по мере Лебега на T_m $(C, \alpha > 0)$ суммируется по гомотетиям любого ограниченного звездного тела.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ПРОИЗВОДНЫЕ

В.В. Корнев, В.П. Курдюмов, А.П. Хромов (Саратов, СГУ)
KhromovAP@info.sgu.ru

Данная работа продолжает исследования [1-6] формального решения методом Фурье, базирующиеся на использовании расходящихся рядов в понимании Эйлера [7]. Рассмотрим смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t),\ x, t \in [0,1]\times[0,\infty); \tag{1}$$

$$U_1(u(\cdot,t)) = u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0; \tag{2}$$

$$U_2(u(\cdot,t)) = u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0; \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u'_t(x,0) = 0, \tag{4}$$

где $q(x), \varphi(x) \in L[0,1]$, α_i, β_i, $i = 1,2$ — произвольные комплексные числа, $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\beta_1| + |\beta_2| > 0$.

Формальное решение по методу Фурье возьмем в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\, d\lambda, \tag{5}$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $U_j(y) = 0$, $j = 1, 2$, E — единичный оператор, λ — спектральный параметр, $\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Re}\rho \geqslant 0$, γ_n — образ в λ–плоскости окружности $\widetilde{\gamma}_n = \{\rho \,|\, |\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, r достаточно велико и фиксировано, n_0 — такой номер, что при $n \geqslant n_0$ контуры γ_n не пересекаются, и все γ_n при $n \geqslant n_0$ находятся вне круга $|\lambda| = r$.

Применим к ряду (5) ту же технику использования расходящихся рядов, что и в [1-2]. Используя идею А.Н. Крылова об ускорении сходимости рядов, представим ряд (5) в виде

$$u(x,t) = u_{01}(x,t) + u_1(x,t), \tag{6}$$

где $u_{01}(x,t)$ есть ряд (5), в котором R_λ заменено на $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ (L_0 есть L при $q(x) = 0$).

В случае классического решения задачи (1)–(4) ряд $u_{01}(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ при каждом фиксированном t, и его сумма есть

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)], \tag{7}$$

где $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$, а ее продолжение на $[0, +\infty)$ определяется следующим образом.

Теорема 1. *Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $U_j(\varphi) = 0$, $j = 1, 2$, то справедлива формула:*

$$\begin{gathered}(\widetilde{\varphi}(-x), \widetilde{\varphi}(1+x))^T = (\widetilde{\varphi}(x), \widetilde{\varphi}(1-x))^T + \\ +2M\int_0^x e^{M(x-t)}(\widetilde{\varphi}(t), \widetilde{\varphi}(1-t))^T dt\end{gathered} \tag{8}$$

при $x \in [0, +\infty)$, где $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}$, T — знак транспонирования.

Будем теперь рассматривать формулу (8), считая, что $\varphi(x) \in L[0,1]$. Она дает однозначное продолжение функции $\varphi(x) \in L[0,1]$ на всю ось $(-\infty, +\infty)$. Ряд $u_{01}(x,t)$ теперь, вообще говоря, расходится, но мы будем считать его формальным решением задачи (1)–(4) при $q(x) = 0$, понимаемой чисто формально.

Второму слагаемому в (6) соответствует также обобщенная задача

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x,t) + f_0(x,t), \tag{9}$$

$$x,t \in [0,1] \times [0,\infty);$$

$$U_j(u_1(\cdot,t)) = 0,\ j=1,2; \tag{10}$$

$$u_1(x,0) = u'_{1_t}(x,0) = 0, \tag{11}$$

где $f_0(x,t) = -q(x)a_0(x,t)$, а $a_0(x,t)$ выражается по формуле (7) при $(x,t) \in (-\infty,+\infty) \times [0,+\infty)$.

Формальное решение по методу Фурье задачи (9)–(11) есть

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\int\limits_0^t R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\,d\lambda, \tag{12}$$

где $R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f_0(x,\tau)$ по переменной x (τ — параметр).

Заменим теперь ряд $u_1(x,t)$ из (6) на ряд (12). Подобно (6) представим ряд (12) в виде

$$u_1(x,t) = u_{02}(x,t) + u_2(x,t),$$

где $u_{02}(x,t)$ есть ряд (12), в котором R_λ заменена на R^0_λ. Имеем

$$u_{02}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau))\,d\eta,$$

где $Z_0(x,\eta;f_0(\cdot,\tau))$ есть ряд, аналогичный ряду $Z_0(x,t;\varphi)$ формального решения задачи (1)–(4) при $q(x)=0$. Для ряда $u_{02}(x,t)$ получаем сумму

$$u_{02}(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau}\left[\widetilde{f}_0(x+\eta,\tau) + \widetilde{f}_0(x-\eta,\tau)\right]\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}_0(\eta,\tau)\,d\eta,$$

где $\widetilde{f}_0(\eta,\tau)$ есть продолжение по η по теореме 1 функции $f_0(\eta,\tau) = -q(\eta)u_{01}(\eta,\tau)$.

Продолжая этот процесс, придем к ряду

$$A(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x,t),$$

где

$$a_m(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{f}_{m-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \quad m \geqslant 1,$$

$$f_m(x,t) = -q(x)a_m(x,t),$$

и $a_0(x,t)$ есть $u_{01}(x,t)$.

Теорема 2. *Ряд $A(x,t)$ при $(x,t) \in Q_T = [0,1]\times[0,T]$ сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью в Q_T при любом $T > 0$.*

Ряд $A(x,t)$ считаем решением обобщенной смешанной задачи (1)–(4). В случае, когда $\varphi(x)$ из теоремы 1, $A(x,t)$ является классическим решением задачи (1)–(4).

Литература

1. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии / А.П. Хромов // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции : Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения–XXX». — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 291–300.

2. Хромов А.П. О классическом решении смешанной задачи для однородного вол-нового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью / А.П. Хромов // Известия Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2019. — Т. 19, вып. 3. — С. 280–288.

3. Хромов А.П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения / А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: Изд-во ООО «Научная книга», 2020. — С. 433–439.

4. Курдюмов В.П. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью и однопорядковыми граничными условиями с производной / В.П. Курдюмов, А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: Изд-во ООО «Научная книга», 2020. — С. 225–228.

5. Ломов И.С. Метод А. П. Хромова решения смешанной задачи для гиперболического уравнения. Обобщенная формула Даламбера / И.С. Ломов // Современные проблемы теории функций и их

приложения : Материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: Изд-во ООО «Научная книга», 2020. — С. 231–236.

6. Корнев В.В. Расходящиеся ряды и обобщенное решение одной смешанной задачи для волнового уравнения / В.В. Корнев, А.П. Хромов // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции : Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения–XXXI». — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. — С. 113–117.

7. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. — М. Л. : ГИТТЛ, 1949. — 580 с.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ БЕСКОНЕЧНОСТИ. ПРОБЛЕММА ПУАНКАРЕ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

М.В. Коровина (Москва, МГУ)
betelgeuser@yandex.ru

Одной из фундаментальных задач аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами является задача посторения асимптотик их решений в окрестности иррегулярных особых точек. Эта задача была сформулирована Пуанкаре в работах [1], [2]. Пуанкаре рассматривал случай, когда иррегулярной особой точкой является бесконечность.

Ранее эту задачу о построении асимптотик решений в окрестности бесконечности рассматривал Томэ в работе [3], где он показал, что в частном случае асимптотики решения рассматриваемой задачи представимы в виде выражения, которое содержит формальный, вообще говоря, расходящийся степенной ряд. В работах Пуанкаре было доказано, что полученные расходящиеся ряды являются асимптотическими рядами и была сформулирована идея о том, что для суммирования полученных асимптотических рядов может быть использовано интегральное преобразование, в частном случае это могло быть преобразование Лапласа. С помощью этого интегрального преобразования, была предпринята попытка построения равномерных асимптотик этой задачи. Однако интегральное преобразование Лапласа применимо только в некоторых частных случаях. Поэтому задача построения асимптотик для дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности, которая была сформулирована Пуанкаре, до сих пор в общем случае не решена. Именно решению этой задачи для широкого класса дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами и посвящена данная работа. В данной работе идея применения интегрального преобразования для суммирования асимптотического ряда, и тем самым построения равномерной асимптотики решения, развивается с помощью применения к этой задаче интегрального преобразования Лапласа Бореля.

А именно рассматривается уравнение с голоморфными коэффициентами

$$\begin{array}{l} \left(\frac{d}{dx}\right)^n u\left(x\right) + a_{n-1}\left(x\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u\left(x\right) + ... \\ + a_i\left(x\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u\left(x\right) + ... + a_0\left(x\right) u\left(x\right) = 0 \end{array} \tag{1}$$

Коэффициенты $a_i\left(x\right), i = 0, 1, ..., n-1$ являются функциями голоморфыми на бесконечности. Это означает, что существуют такая внешность круга $|x| > R$, что функции $a_i\left(x\right), i = 0, 1...n-1$ разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды $a_i\left(x\right) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{a_i^j}{x^j}$. Целью нашего исследования является построение асимптотик решения уравнения (1) при $x \to \infty$.

Бесконечность, вообще говоря, является иррегулярной особой точкой уравнения (1). В частном случае, когда она является регулярной особой точкой, задача построения асимптотик решений является решенной. Как известно асимптотики в окрестности регулярных особых точек являются конормальными (см. например [4]), а именно имеет вид $\sum\limits_{j} x^{s_j} \sum\limits_{i=0}^{k} a_i^j \ln^i x$, где a_i^j, s_j – некоторые комплексные числа. Здесь k – некоторое натуральное число.

Задача построения асимптотики решения в окрестности бесконечности, путем замены $x = \frac{1}{r}$, сводится к задаче о построении асимптотики решения в окрестности нуля для линейного дифференциального уравнения с особенностью типа клюва 2-го порядка. А именно, уравнение (1) можно переписть в виде

$$H\left(r, -r^2 \frac{d}{dr}\right) u = 0 \tag{2}$$

Где

$$\hat{H} = H\left(r, -r^2 \tfrac{d}{dr}\right) = \left(-r^2 \tfrac{d}{dr}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\left(r\right)\left(-r^2 \tfrac{d}{dr}\right)^i$$

Основной символ $H_0(p)$ оператора $\hat{H}$ равен $H_0(p) = H\left(0, p\right)$.

В статье [5] построены равномерные асимптотики для частного случая этой задачи, а именно для случая, когда основной символ $H_0(p)$ оператора $\hat{H}$ имеет простые корни.

Далее этот частный случай для систем линейных дифференциальных уравнений рассматриваются например, в таких классических книгах как [6], [7], [8] и многих других работах.

В этих работах построены асимптотические разложения решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, они были получены в виде произведений соответствующих экспонент на расходящиеся степенные ряды, а именно

$$u = \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i/r} r^{\sigma_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_i^k r^k \tag{3}$$

где α_i, $i = 1, ..., n$ – корни полинома $H_0\left(p\right)$ и σ_i и a_i^k – некоторые комплексные числа. Однако вопрос об интерпретации полученных расходящихся рядов был оставлен открытым, иными словами регулярный метод суммирования этих расходящихся рядов отсутствовал. Будем называть такие асимптотики нефуксовыми асимптотиками.

Аппарат для интерпретации и построения асимптотических разложений вида (3), основанный на преобразовании Лапласа-Бореля, называется *ресургентным анализом.* Основная идея ресургентного анализа заключается в том, что формальные преобразования Бореля $\tilde{u}_1(p)$, $\tilde{u}_2(p)$ ... представляют собой степенные ряды по двойственной переменной p, сходящиеся в окрестности точек $p = \lambda_j$. Обратное преобразование Бореля при этом дает регулярный способ суммирования рядов (3). Однако, при этом необходимо доказать бесконечную продолжимость функций $\tilde{u}_j(p)$, то есть продолжимость вдоль любого пути на римановой поверхности $\tilde{u}_j(p)$, не проходящего через некоторое дискретное множество, зависящее от функции (точное определение понятия бесконечной продолжимости дано ниже). Доказательство этого факта, как правило, представляло большую трудность при применении ресургентного анализа к построению асимптотик решений дифференциальных уравнений. Для уравнений с вырождениями, доказательство бесконечной продолжимости получено в работах В. Шаталова и М. Коровиной [9], [10], [11]. Этот результат позволяет применять методы ресургентного анализа к построению асимптотик решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами.

Благодаря этому результату в работах [11], [12] были построены равномерные асимптотики решений для случая, когда корни старшего символа $H_0(p) = H(0, p)$ имеют первый порядок.

Для решения проблемы кратных корней в последние годы был создан метод повторного квантования [13]. Этот метод применяется в том случае, когда интегро-дифференциальное уравнение в двойственном пространстве не решается методом последовательных приближений и сводится, в свою очередь, к уравнению с вырождениями типа клюва.

Мы рассмотрим случай, когда основной символ дифференциального оператора имеет один корень. Без ограничения общности будем считать, что этот корень находится в нуле. В этом случае коэффициенты уравнения (2) представимы в виде $a_i(r) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_i^j r^j$. Пусть первые $l_i - 1$ коэффициенты степенного ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_i^j r^j, i = 0, ..., n$ равны нулю, то есть левая часть уравнения (2) представима в виде суммы слагаемых вида $\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n$ и $\left(\sum\limits_{j=l_i}^{\infty} a_i^j r^j\right)\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i$, $i = 0, ..., n-1$. Выберем среди этих слагаемых те для которых число $h = l_i + i$ минимально и в соответствующих степенных рядах обозначим коэффициент при минимальной степени r через $\tilde{a}_i, i = 0, ..., k$.

$$\begin{gathered}\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^n u + \tilde{a}_0 r^m \left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^k u + \tilde{a}_1 r^{m+1}\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-1} u + \\ \tilde{a}_2 r^{m+2}\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^{k-2} u + ... + \tilde{a}_k r^{m+k} u + \\ + \sum_{j=1}^{h} r^j \sum\nolimits_{i=h_j}^{n-1} a_j^i(r)\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i u + \\ r^{h+1} \sum_{i=0}^{n-1} a^i(r)\left(-r^2 \frac{d}{dr}\right)^i u = 0\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\tilde{a}_0 \neq 0$, через $a_j^i(r)$ обозначены соответствующие голоморфные функции. Числа h_j и j выбраны так, что бы выполнялось неравенство $h_j + j > m + k$. Назовем $h = m + k$ индексом сингулярности уравнения (2). Будем называть члены вида $a_j^i r^j \left(r^2 \frac{d}{dr}\right)^i$ при условии, что $j + i > h$ младшими членами уравнения (4). В работе [14] построены асимптотики решения уравнения (4) в случае, когда индекс сингулярности равен $k+1$, иными словами рассмотрен случай, когда $m = 1$. В этой работе мы обобщим этот результат. Разделим уравнения вида (5) на два типа. К первому типу отнесем те уравнения для которых для всех младших членов выполнено неравенство

$$h_i + i - h > (m-i)\,\frac{n-k-m}{m} \tag{5}$$

А ко второму остальные уравнения. Заметим, что к уравнениям первого типа относятся все уравнения до 5-го порядка включительно. Проблема построения асимптотик для уравнений 1-го типа решена в работе [15].

Пусть основной символ дифференциального оператора имеет один корень, тогда верна

Теорема. *Пусть $h_i + i - h > (m-i)\frac{n-k-m}{m}$, тогда любая асимптотика решения уравнения (1) в пространстве функций экспоненциального роста в окрестности бесконечности имеет вид*

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{n-k} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \alpha_i^j x^{\frac{i}{n-k}}\right) x^{\sigma_j} \sum_{l}^{\infty} A_l^j x^{-\frac{l}{n-k}}$$
$$+ \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i},$$

где α_{n-k-m}^j, $j = 1, ..., n-k$ корни полинома $p^{n-k} + \left(\frac{n-k}{n-k-m}\right)^{n-k} a_0$.

Пусть $h_i + i - h < (m-i)\frac{n-k-m}{m}$, тогда любая асимптотика решения имеет вид

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{\nu} \exp\left(\sum_{l=1}^{n-k-m-\beta_1} \beta_l^j x^{\frac{j}{n-k-m-\beta_1+i}}\right) x^{o_j^1} \sum_{j=0}^{\infty} A_i^j x^{-\frac{j}{n-k-m-\beta_1+i}} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{\beta_1+m-i} \exp\left(\sum_{t=1}^{\beta_1} \alpha_t^j x^{\frac{t}{m-i+\beta_1}}\right) x^{\sigma_j^2} \sum_{l=1}^{\infty} B_t^j x^{-\frac{l}{m-i+\beta_1}} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i},$$

Здесь введены обозначения:$v = n-k+i-m-\beta_1$, $\beta^j_{n-k-m-\beta_1}, j = 1,...,v$ - *являются корнями полинома* $p^v + c$, *где* $c = b_1\left(\frac{v}{v-i}\right)^v$. $\alpha^j_{\beta_1}, j = 1,...,m-i+\beta_1$ - *корни полинома* $a_0 + b_1\left(\frac{1}{d-1}\right)^{i-m-\beta_1} p^{-i+m+\beta_1}$. *Через* $A^j_i, B^j_i.\sigma^1_j, \sigma^2_j, b^j_i$, k_0 *обозначены некоторые числа,* $\sum\limits_{t=0}^{\infty} A^j_t x^t$, $\sum\limits_{t=0}^{\infty} B^j_t x^t$ – *асимптотические ряды.*

О том, как обобщить результат, полученный для однородного главного символа на произвольный главный символ можно прочитать в работе [15].

Литература

1. Poincare H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires / H. Poincare //Acta math. — 1886. — v. 8. — p. 295-344.

2. Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре / Анри Пуанкаре. — М. : Наука, 1974.

3. Thome L.W. Zur Theorie der linearen differentialgelichungen / L.W. Thome //Journal fur die reine und angewandte Mathematik. — 1872.

4. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях / В.А. Кондратьев // Докл. АН СССР. — 153:1 — 1963. — С. 27–29.

5. Sternberg W. Uber die asymptotische Integration von Differencialgleichungen / W. Sternberg // — Verlag von Julius Spriger, Berlin, 1920.

6. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции / Ф. Олвер. Пер. с англ. под ред. А. П. Прудникова. — М. : Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит, 1990. — 528 с.

7. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. — М.: Мир, 1964. — 477 с.

8. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. — М. : Иностранная литература, 1958. — 475 с.

9. Коровина М.В. Существование ресургентного решения для уравнений с вырождением высших порядков / М.В. Коровина // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 3. — С. 349–357.

10. Коровина М. В.Дифференциальные уравнения с вырождением / М.В. Коровина, В.Е.Шаталов // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 437, № 1. — С. 16–19.

11. Коровина М.В. Дифференциальные уравнения с вырождением и ресургентный анализ / М.В. Коровина, В.Е. Шаталов // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 9. — С. 1259–1277.

12. Коровина М.В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями / М.В. Коровина // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 437, № 3. — С. 302–304.

13. Коровина М. В. Метод повторного квантования и его применения к построению асимптотик решений уравнений с вырождениями / М.В. Коровина // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 1. — С. 60–77.

14. Korovina M.V. Application of the repeated quantization method to the problem of making asymptotic solutions of equations with holomorphic coefficients / М.В. Коровина // International Journal of Open Information Technologies. — 2019. — Vol. 7, no. 9. — P. 14–22.

15. Korovina M. Asymptotics of solutions of linear differential equations with holomorphic coefficients in the neighborhood of an infinitely distant point / M. Korovina // Mathematics. — 2020. — Vol. 8, no. 12. — P. 2249.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПРИСОЕДИНЁННЫМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ[1]

Л.Н. Коронова, Д.М. Коростелева, С.И. Соловьёв (Казань, КФУ, КГЭУ)
lyubov.koronova.kpfu@mail.ru

Исследуются поперечные собственные колебания струны с присоединённым осциллятором. Для нахождения частот и амплитуд собственных колебаний системы формулируется функционально-алгебраическая задача на собственные значения. Установлено, что задача имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений отвечает полная

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-41-160029, 20-08-01154).

ортонормированная система собственных элементов. Исследуются предельные свойства собственных значений и собственных элементов при изменении параметров присоединённого осциллятора. Исходная задача аппроксимируется сеточной схемой метода конечных разностей на равномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных элементов в зависимости от шага сетки. Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3]. Результаты работы могут быть применены при исследовании и решении более сложных и важных прикладных задач расчёта собственных колебаний балок, пластин и оболочек с присоединёнными осцилляторами.

Литература

1. Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.

2. Соловьёв С.И. Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 937–950.

3. Соловьёв С.И. Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 418–432.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПРИСОЕДИНЁННЫМ РЕЗОНАТОРОМ[1]

Д.М. Коростелева, А.А. Самсонов, Л.Н. Коронова, С.И. Соловьёв (Казань, КФУ, КГЭУ)
diana.korosteleva.kpfu@mail.ru

Изучается дифференциальная задача на собственные значения второго порядка, моделирующая продольные собственные колебания упругого стержня с присоединённым к торцу механическим резонатором. Задача имеет возрастающую последовательность положительных простых собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений отвечает полная ортонормированная система собственных функций. Исследуются асимптотические свойства собственных значений и

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-41-160029, 20-08-01154).

собственных функций при неограниченном увеличении параметров присоединённого механического резонатора. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется сеточной схемой метода конечных разностей на равномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных функций в зависимости от шага сетки. Проведённые исследования развивают и обобщают результаты работ [1, 2]. Полученные выводы могут быть применены при исследовании и решении более сложных и важных прикладных задач расчёта собственных колебаний балок, пластин и оболочек с присоединёнными резонаторами.

Литература

1. Самсонов А.А. Асимптотические свойства задачи о собственных колебаниях стержня с присоединённым грузом / А.А. Самсонов, С.И. Соловьёв, Д.М. Коростелева // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. — 2020. — Т. 162, кн. 1. — С. 52—65.

2. Соловьёв С.И. Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 418–432.

О РАЗРЕШИМОСТИ ДРОБНО-НАГРУЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ[1]

М.Т. Космакова, Л.Ж. Касымова (Караганда, КарУ им. Е.А. Букетова, КарТУ)

svetlanamir578@gmail.com, l.kasymova2017@mail.ru

Введение

Исследование по дробным дифференциальным уравнениям активно проводилось как в предыдущие десятилетия, так и сейчас интерес к этой области продолжает расти. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и приложениями аппарата дробного интегрирования и дифференцирования в различных областях науки. Также важным разделом в теории дифференциальных уравнений являются нагруженные уравнения, в котором нагруженное слагаемое содержит дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор, включающий операцию взятия следа от искомой функции на

[1] Это исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Grant № AP08955795, 2020-2021.)

многообразиях размерности, меньшей размерности области определения искомой функции [1]. Интерес представляют краевые задачи для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности, когда нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной. В работе [2] нагруженное слагаемое - след производной дробного порядка на многообразии $x = t$, а именно, нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной Римана-Лиувилля. Возникающее сингулярное интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при определенных значениях порядка дробной производной. В работах [3–4] нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной Капуто по временной переменной и пространственной переменной, и порядок производной в нагруженном слагаемом меньше порядка дифференциальной части.

В данной работе исследуется краевая задача для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности (нагруженное слагаемое уравнения представлено в виде дробной производной Лиувилля, нагрузка движется по произвольному закону). Поставленная задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ядром, содержащим специальную функцию, а именно, вырожденную гипергеометрическую функцию Трикоми. Также исследованы предельные случаи порядка дробной производной слагаемого с нагрузкой в уравнении, и показана непрерывность по порядку дробной производной. Установлена разрешимость интегрального уравнения в классе непрерывных функций в зависимости от характера нагрузки при малых значениях времени.

Постановка задачи

Итак, в области: $Q = \{(x,\, t)\,|\ x > 0,\ t > 0\}$ рассматривается задача

$$u_t - u_{xx} + \lambda \left\{ {}_rD^{\beta}_{0,\,t}\, u(x,\, t) \right\}\Big|_{x=\gamma(t)} = f(x,\, t), \tag{1}$$

$$u(x,\, 0) = 0;\ u(0,\, t) = 0, \tag{2}$$

где λ — комплексный параметр, ${}_rD^{\beta}_{0,\,t}\, u(x,\, t)$ — дробная производная Римана-Лиувилля порядка β, $0 < \beta < 1$, $\gamma(t)$ — непрерывная возрастающая функция, $\gamma(0) = 0$.

Задача исследуется в классе непрерывных функций.

Сведение задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

Введя обозначение

$$\mu(t) = \left\{ {}_rD^{\beta}_{0,\,t}\, u(x,\, t) \right\}\Big|_{x=\gamma(t)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \frac{u(x,\, \tau)}{(t-\tau)^{\beta}}\, d\tau \right\} \Bigg|_{x=\gamma(t)}, \tag{3}$$

обращая дифференциальную часть задачи (1) — (2) и действуя оператором дробного дифференцирования по формуле (3) на полученное представление, получим получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t K_{\beta}(t,\tau)\, \mu(\tau)\, d\tau = f_2(t), \tag{4}$$

где

$$K_{\beta}(t,\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)\ (t-\tau)^{\beta}} -$$

$$- \frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\beta+1/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)} \right) \Psi\left(1-\beta,\ \frac{3}{2};\ \frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)} \right), \tag{5}$$

$$f_2(t) = \left\{ {}_r D_{0,\ t}^{\beta}\, f_1(x,\, t) \right\} \Big|_{x=\gamma(t)},$$

где

$$f_1(x,t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau)\, f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau.$$

Здесь:

$$G(x,\, \xi,\, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\, t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t} \right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t} \right) \right\}$$

— функция Грина, $\Psi(a,b;y)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми, которую можно представить в виде интеграла [5; стр. 365, формула 72.2(7)]

$$\Psi(a,b;y) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} \xi^{a-1} (1+\xi)^{b-a-1} \cdot e^{-y\xi} d\xi$$

Предельные случаи порядка дробной производной

При $\beta = 0$ и $\beta = 1$ задача, полученная из (1) — (2), сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ядрами:

$$K_0(t,\tau) = erf\left(\frac{\gamma(t)}{2\sqrt{t-\tau}} \right),$$

$$K_1(t,\tau) = -\frac{\gamma(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma^2(t)}{4(t-\tau)}\right)$$

соответственно.

Учитываем, что [6; стр. 6, формула (1.7')] при $\beta = 1$ (3) представляет обычную производную,

Заметим, что этот же результат можно получить взятием пределов от (5)

$$\lim_{\beta\to 0+0} K_\beta(t,\tau), \quad \lim_{\beta\to 1-0} K_\beta(t,\tau).$$

Лемма. *Для краевой задачи (1) — (2) имеет место непрерывность по порядку β производной нагруженного слагаемого в уравнении (1).*

Исследование ядра интегрального уравнения. Основной результат

Ядро (5) интегрального уравнения (4) имеет особенности при $\tau = t$ и $t = 0$. Непосредственное исследование ядра (5) затруднительно, так как ядро содержит вырожденную гипергеометрическую функцию Трикоми. Найдем

$$\int_0^t K_\beta(t,\tau)\,d\tau$$

и исследуем поведение полученной функции при малых значениях t. Пусть $\gamma(t) \sim t^\omega$, $\omega \geqslant 0$ при $t \to 0+0$. Тогда

$$\int_0^t K_\beta(t,\tau)\,d\tau = \frac{t^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} -$$

$$-\frac{2^{\frac{1}{2}-\beta}}{\sqrt{\pi}} \cdot t^{1-2\beta-\omega} \exp\left(-\frac{1}{8}t^{2\omega-1}\right) \cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t^{\omega-\frac{1}{2}}\right), \qquad (6)$$

где $D_\nu(z)$ — функция параболического цилиндра.

Возможны случаи (при $0 \leqslant \beta < 1$):

1) $2\omega - 1 > 0$. Тогда $1 - 2\beta - \omega < \frac{1}{2}$.

При $1 - 2\beta - \omega \geqslant 0$ имеем:

$$\lim_{t\to 0} \int_0^t K_\beta(t,\tau)\,d\tau = 0.$$

Ядро интегрального уравнения (4) имеет слабую особенность, т.е. методом последовательных приближений можно найти его единственное решение.

При $1 - 2\beta - \omega < 0$ имеем

$$\lim_{t \to 0} \int_0^t K_\beta(t, \tau)\, d\tau = \infty.$$

Поэтому интегральное уравнение (4) не разрешимо методом последовательных приближений. Можно показать, что соответствующее однородное уравнение при некоторых значениях параметра λ будет иметь ненулевые решения

При $\beta = 1$ имеем

$$\lim_{t \to 0} \int_0^t K_1(t, \tau)\, d\tau = 0.$$

2) $2\omega - 1 < 0$. Тогда [7; стр.1079, формула 9.246(1)] в силу асимптотического разложения функции $D_\nu(z)$ при больших z для $0 \leqslant \beta < 1$ из (6) получим

$$\lim_{t \to 0} \int_0^t K_\beta(t, \tau)\, d\tau = 0.$$

При $\beta = 1$ имеем

$$\lim_{t \to 0} \int_0^t K_1(t, \tau)\, d\tau = 1.$$

Литература

1. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов. — Алматы : Гылым, 2010. —334 с.

2. Искаков С.А., Рамазанов М.И., Иванов И.А. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка. II / С.А. Искаков, М.И. Рамазанов, И.А. Иванов // Вестник Караганд. ун-та. Сер. : Математика. — 2015. — № 2 (78). — С. 25–30.

3. Kosmakova M.T., Kasymova L.Zh. To solving the heat equation with fractional load / M.T. Kosmakova, L.Zh. Kasymova // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. — 2019. — Vol. 104, No. 4. DOI: 10.26577/JMMCS-2019-4-m6

4. Рамазанов М.И., Kosmakova M.T., Kasymova L.Zh. On a Problem of Heat Equation with Fractional Load /М.И. Рамазанов, M.T. Kosmakova, L.Zh. Kasymova // Lobachevskii Journal of Mathematics — 2020. — Vol. 41, No. 9. — P. 1873—1885. DOI: 10.1134/S199508022009022X

5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т 3. Специальные функции. Дополнительные главы / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. — М. : Физматлит, 2003. 2-е изд., испр. —668 с.

6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.

7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — М. : Физматгиз, 1963. — 982 с.

ОБ ОЦЕНКАХ ОСТАТКОВ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков (Москва, НИЯУ МИФИ)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

Рассматривается семейство числовых рядов, включающее обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ с натуральным показателем $p > 1$. Ставится вопрос об асимптотическом поведении остатков таких рядов, возникший (в частных случаях) в работе [1]. Характер полученных результатов продемонстрируем на примере величины $R(N,\, p) \equiv \sum_{n=N}^{\infty} 1/n^p$.

Теорема 1. *Для любого $s \in \mathbb{N}$ справедливы интегральное представление*

$$R(N,\, s) \,\equiv\, \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^{s+1}} = \frac{1}{s!} \int\limits_{0}^{+\infty} \tau^s \, \frac{e^{-N\tau}}{1-e^{-\tau}}\, d\tau, \quad N \in \mathbb{N},$$

и разложение в асимптотический по параметру $2N-1 \to \infty$ ряд

$$R(N,\, s) \,\cong\, \frac{2^s}{s(2N-1)^s} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{2k}-2)\, C_{2k+s-1}^{s-1}\, B_{2k}}{(2N-1)^{2k}}\right)$$

с биномиальными коэффициентами C_{2k+s-1}^{s-1} и классическими числами Бернулли B_{2k}.

Отметим, что при фиксированных s, N выписанный в теореме 1 асимптотический ряд расходится.

Теорема 2. *Для любых $s, N, M \in \mathbb{N}$ верны оценки*

$$R(N,\, s) < \frac{2^s}{s(2N-1)^s}\left(1-\sum_{k=1}^{2M}\frac{(2^{2k}-2)\, C_{2k+s-1}^{s-1}\, B_{2k}}{(2N-1)^{2k}}\right),$$

$$R(N,\, s) > \frac{2^s}{s(2N-1)^s}\left(1-\sum_{k=1}^{2M-1}\frac{(2^{2k}-2)\, C_{2k+s-1}^{s-1}\, B_{2k}}{(2N-1)^{2k}}\right),$$

показывающие, что остаток $R(N,\, s)$ обвертывается своим асимптотическим рядом.

Доказаны аналоги теорем 1, 2 для остатков числовых рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^p}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^p}.$$

Подробное изложение результатов дано в недавней работе [2].

Литература

1. Borwein J.M. Pi, Euler Numbers and Asymptotic Expansions / J.M. Borwein, P.B. Borwein, K. Dilcher // Amer. Math. Monthly. — 1989. — V. 96, № 8. — P. 681–687.

2. Костин А.Б. Асимптотическое поведение остатков числовых рядов специального вида / А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков // Проблемы матемтатического анализа. — 2020. — Вып. 107. — С. 39–58.

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

В.А. Костин (Воронеж, ВГУ)
vlkostin@mail.ru

Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ вектор с направляющими косинусами $\cos\alpha_i = \frac{a_i}{|a|}$, $|a|^2 = \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2$, и $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ дважды дифференцируемая в R^n функция

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^2 \varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 \varphi(x). \qquad (1)$$

Ставится задача о корректной разрешимости уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |a| \left(\frac{\partial}{\partial a} \right)^2 \varphi(x) \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{3}$$

Теорема. Задача Коши (2)–(3) корректно разрешима в пространстве $C(\overline{R_n})$ ограниченных и равномерно непрерывных функций с нормой $\|\varphi\|_C = \sup\limits_{x \in R^n} |\varphi|$ и её решение имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{s^2}{4t} \right) \varphi(x_1 + a_1 s, \ldots, x_n + a_n s) ds = U(t)\varphi(x) \tag{4}$$

где $U(t)$ – новый класс полугрупп, отличный от класса полугрупп Гаусса-Вейерштрасса, при этом справедлива оценка

$$\|u\|_C \leqslant \|\varphi\|_C. \tag{5}$$

Литература

1. Костин В.А. Операторные косинус-функции и граничные задачи / В.А. Костин, Д.В. Костин, А.В. Костин // ДАН. — 2019. — Т. 486, №5. — С. 531–536.

ЗАДАЧА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ И КРАЕВЫМ УСЛОВИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СУБДИФФУЗИИ

В.А. Костин, Алкади Хамса Мохамад (Воронеж, ВГУ)
vlkostin@mail.ru

Рассматривается задача отыскания решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha}, \quad x > 0,\, t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

где $\frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha}$ – дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$ для $t \in (-\infty, \infty)$, $u(t,x)$ удовлетворяет условиям

$$u(t, 0) = \varphi(t), \tag{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} |u(t,x)| = 0, \tag{3}$$

где $\varphi(t)$ – периодическая функция с рядом Фурье

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left[\frac{2\pi n}{T}(t-\delta_n^0)\right]. \tag{4}$$

Теорема. Если в условии (3) $\varphi(t)$ – периодическая функция вида (4), то задача (1)-(2)-(3) имеет единственное решение, и оно представимо в виде

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x),$$

где

$$u_n(t,x) = A_n \exp(-\cos\frac{\alpha\pi}{4}\omega_n^{\alpha/2}x)\cos(sin\frac{\alpha\pi}{4}\omega_n^{\alpha/2}x - \omega_n t + \omega_n\delta_n^0).$$

Литература

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, М.: Наука, 1966.— 724 с.

2. Учайкин В.В. Методы дробных производных/ В.В. Учайкин, Ульяновск, Изд. «Логос», 2002.— 512 с.

ЗАДАЧА О РАСЧЕТЕ АНТЕННЫ С ДИАГРАММОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ С ИМПУЛЬСОМ МАКСВЕЛЛА–ФЕЙЕРА

Д.В. Костин, М.Ю. Прицепов, А.А. Уткин (Воронеж, ВГУ)
dvk605@mail.ru

Рассматривается интегральное уравнение прямолинейной антенны

$$f(\Theta) = \int_{-a}^{a} e^{-k\xi\cos\Theta} e^{i\psi(\xi)}\rho(\xi), d\xi,\ 0 < \Theta < \pi, \tag{1}$$

означающее, что антенна расположена на сегменте $[-a,a]$, называемой апертурой антенны, $\rho(\xi)$— амплитудное распределение на этом сегменте, $\psi(\xi)$— фазовое распределение, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ— волновое число [1].

Функция $f(\Theta)$, называемая диаграммой направленности антенны (ДН).

Теорема. Диаграмма направленности вида

$$R_{n,a,N} = \rho_n(z) A_{n,a}(z),$$

где

$$\rho_n(z) = \sum_{m=1}^{n} (n+1-m) \cos mz$$

импульс Максвелла–Фейера, а

$$A_{n,a}(z) = \left(\frac{\sin az}{z} \right)^n, \; a > 0, \; z \in [-\pi, \pi]$$

стабилизирующий множитель Суетина, является теоретически допустимой. И решение уравнения Максвелла (1) имеет вид

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} R_{n,a} z(z) dz.$$

Литература

1. Суетин П.К. Начала математической теории антенн/ П.К. Суетин, М.: Изд. Инсвязь, 2008, 228 с.

2. Костин В.А. Многочлены Максвелла–Фейера и оптимизационный полигармонический импульс / В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.В. Сапронов // ДАН, 2012, Т. 445, N3, с. 271–273.

3. Костин В.А. Диаграмма направленности Фейера для линейной антенны и решение задачи амплитудно-фазового синтеза / В.А. Костин, Д.В. Костин, А.В. Костин // Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5 №2. —С. 211-217.

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАБОТЫ ИМПУЛЬСНОГО ПОГРУЖАТЕЛЯ[1]

Т.И. Костина, А.В. Журба, А.С. Мызников, С.Д. Бабошин (Воронеж, ВГПУ, ВГТУ, ВГУ)
tata_sti@rambler.ru, av.zhurba.93@gmail.com

Тема описания математической модели и оптимизации работы вдавливающих устройств, описанных в [1], была представлена в [2], [3]. В настоящее время на основе теоретических результатов строится программная реализация алгоритмов работы изделий и верификации математических моделей с результатами натурных испытаний. Данная работа посвящена описанию процесса построения программного обеспечения компьютерного эксперимента.

В [1] было получено дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее модель погружения сваи:

$$m\ddot{x} = F_{\text{вс}} + mg + S_{\text{пс}}h_i(x(t),\rho) + Px(t)f_i(\psi) \tag{1}$$

Для решения уравнения можно применить разностную аппроксимацию:

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} + \frac{h^2}{m}\left(F_{\text{вс}} + mg + S_{\text{пс}}h_i(x(t),\rho) + Px(t)f_i(\psi)\right) \tag{2}$$

Полученное рекуррентное равенство позволяет рассчитать численно текущее значение функции x в зависимости от значения на предыдущем шаге. В рассматриваемой модели вынуждающая сила $F_{\text{вс}}$ определяется многочленом Максвелла-Фейера [2]. Предполагается, что в начальный момент времени свая неподвижна, а глубина погружения равна 0, то есть $x_0 = x_1 = 0$.

На языке программирования Python была разработана программа, реализующая алгоритм нахождения решения уравнения (2). Результатом служат численные характеристики параметров погружения, а также их графическое представление (Рис. 1).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009)

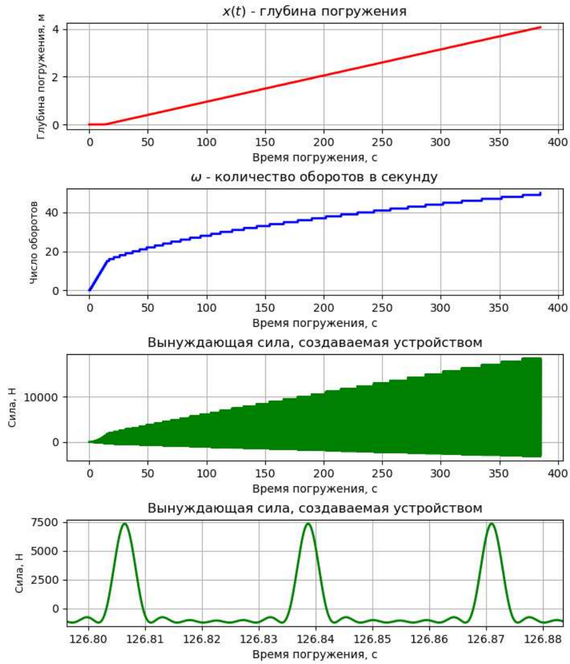


Рис. 1. Погружение сваи в песчаный грунт

Литература

1. Цейтлин М.Г. Вибрационная техника и технология в свайных и буровых работах / М.Г. Цейтлин, В.В. Верстов, Г.Г. Азбелев. — Л. : Стройиздат, 1987. — 262 с.

2. Костин В.А. Многочлены Максвелла-Фейера и оптимизация полигармонических импульсов / В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // ДАН. — 2012. — Т. 455, №3. — С. 271–273.

3. Костин Д.В. Численное моделирование процесса погружения сваи / Д.В. Костин, Т.И. Костина, С.Д. Бабошин // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2019 г.). — 2019. — С. 173–174.

4. Kostina T.I. Simulation of Pulse Immersion Operation in White Noise Field Conditions / T.I. Kostina, S.D. Baboshin, A.V. Zhurba, Raynaud de Fitte P // Solid State Technology — 2020. — Vol. 63, No. 5, 6028–6036

РЕАЛИЗАЦИЯ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ПОИСКА ТОЧЕК СОВПАДЕНИЯ ДВУХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

А.М. Котюков (Москва, ИПУ РАН)
amkotyukov@mail.ru

Осуществлена программная реализация итерационного процесса поиска точек совпадения в метрическом пространстве для двух отображений. А именно, для произвольных метрических пространств X, Y и для двух отображений Φ и Ψ, действующих из X в Y, первое из которых является β-липшицевым, а второе — α-накрывающим, и для произвольной точки $x_0 \in X$ мы можем построить такую последовательность неотрицательных чисел $\{\delta_i\}$ и последовательность точек $\{x_i\}$, что для $i = 0, 1, ...$ будут выполнены следуюшие соотношения:

$$\rho_Y(\Psi(x_{i+1}), \Phi(x_i)) \leqslant \delta_i \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)),$$

$$\rho_X(x_{i+1}, x_i) \leqslant \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)).$$

Данный итерационный процесс был построен в [1] и [2], однако в данных работах отсутствует способ нахождения новой точки на каждой итерации. За основу такого алгоритма был взят метод Хука-Дживса (также известный как алгоритм Нелдера-Мида). Проведены численные эксперименты для одномерного, двумерного, трехмерного случаев. Полученные результаты показывают хорошую сходимость алгоритма. Исследован вопрос о выборе единого δ для всех x_i, а также вопрос зацикливания алгоритма.

Литература

1. Арутюнов А.В. Итерационный метод нахождения точек совпадения двух отображений / А.В. Арутюнов. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012. — Т. 52, № 11. — С. 1947-1950.

2. Арутюнов А.В. Точки совпадения двух отображений / А.В. Арутюнов // Функциональный анализ и его приложения. — 2014. — Т. 48, Вып. 1. —С. 89–93.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20131).

О МОДЕЛИРОВАНИИ ИЗМЕНЕНИЙ ЯЗЫКА

А.А. Кретов[1], **М.В. Половинкина**[2], **И.П. Половинкин**[1], **М.В. Ломец** ([1]Воронеж, ВГУ; [2]Воронеж, ВГУИТ)
polovinkin@yandex.ru

Рассматриваются диффузионные модели изменения языка.

Первая из моделей представляет собой начально-краевую задачу для уравнения Хотеллинга $\partial L/\partial t = A(L_c - L)L + B\Delta L$, где $L = L(x_1, x_2, t)$ есть размер словаря в точке (x_1, x_2) в момент t, $L_c > 0$ — теоретический супремум словаря, $A, B > 0$. Эта модель описывает изменение размера словаря естественного языка с течением времени под воздействием собственно его развития и диффузионного проникновения. Она является модификацией логистической модели развития словаря, описанной в [1].

Другая модель описывает процесс взаимодействия носителей двух языков. Пусть $u_j = u_j(x_1, x_2, t)$, $j = 1, 2$, суть численности (в условных единицах) групп носителей двух языков (наречий, диалектов), проживающих на общей территории. Предполагается, что вторая группа обладает "агрессивностью": за счет влияния участников второй группы возможен переход из первой группы во вторую. На изменения численностей групп влияют также миграции населения. В первом приближении указанный процесс может быть описан следующей начально-краевой задачей:

$$\partial u_1/\partial t = \mu u_1(u_1 - \alpha)(1 - u_1) - u_1 u_2 + \vartheta_1 \Delta u_1,$$

$$\partial u_2/\partial t = -\beta(b - u_1)u_2 + \vartheta_2 \Delta u_2,\ x \in \Omega,\ t > 0,$$

$$u_j|_{t=0} = \varphi_j(x_1, x_2),\ (\theta_j u_j + \psi_j \partial u_j/\partial \nu)|_\Gamma = \zeta_j(x_1, x_2),\ j = 1, 2,$$

где Ω — ограниченная область на плоскости с кусочно гладкой границей Γ, ν — единичный вектор внешней нормали к границе Γ, $\mu > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b > 0$, $\theta_j \psi_j \geqslant 0$, $\theta_j^2 + \psi_j^2 > 0$, $\vartheta_j > 0$ (при $\vartheta_j = 0$ см. [2]), $j = 1, 2$.

Литература

1. Тулдава Ю.А. Проблемы и методы квантитативно-системного исследования лексики / Ю.А. Тулдава. — Таллин : Валгус, 1987. — 204 с.

2. Колпак Е.П. Математическая модель возникновения культурных центров и течений в живописи / Е.П. Колпак, А.В. Гаврилова // Молодой ученый. — 2019. — № 22 (260). — С. 1–17.

К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ КОРРЕКЦИИ ОШИБОК В МАССИВАХ ДАННЫХ

С.Е. Кривобокова (Воронеж, ВИ МВД России)
fedyaevasvetlana20@gmail.com

Код с исправлением ошибок – это схема кодирования, которая передает сообщения в виде символов таким образом, что сообщение может быть восстановлено, даже если некоторые символы ошибочно искажены.

Они используются практически во всех случаях передачи сообщений, особенно в хранилищах данных, где помехоустойчивые коды защищают от повреждения данных.

В [1] представлена классификация основных видов помехоустойчивых кодов, которые применяются в декодерах различных сфер деятельности.

Коды исправления ошибок также можно разделить на коды, исправляющие как одиночные ошибки, так и пакеты ошибок. Ошибки называются одиночными, каждая пара которых разделена не менее чем на n символов. Ошибки могут быть сгруппированы, и это приводит к возникновению пакетов. Эффективным методом уменьшения влияния ошибок пакетов является перемешивание, когда символы перед передачей переставляются в заданном порядке, а на приемной стороне восстанавливается порядок выполнения их последовательности, то есть выполняется обратное перемещение. В результате на возможные ошибки пакета преобразуются в независимые группы случаев ошибки, что повышает эффективность кодирования с исправлением ошибок.

Таким образом, при большом количестве помехоустойчивых кодов необходимо изначально создать модель помехоустойчивого кодирования. На основе моделирования выбрать эффективный помехоустойчивый код для недопущения ошибок при реализации кодирующего устройства.

Литература

1. Федяева С.Е. Обоснование необходимости моделирования процессов коррекции в массивах данных // Охрана, безопасность, связь. – 2020. – № 5-2. – С. 110 – 113.

2. .Думачев В.Н. Теория информации и кодирования: учебное пособие / В.Н. Думачев : Воронежский институт МВД России. – Воронеж, 2012. – 199 с.

К ВОПРОСУ О ДОПОЛНЕНИИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ ПОСТРОЕНИЯ ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ ТОЧЕК

С.Е. Кривобокова, А.В. Родин (Воронеж, ВИ МВД России)
fedyaevasvetlana20@gmail.com

Для решения экстремальных задач, связанных с выбором комплекта многопараметрических приборов желательно получить обобщенную характеристику комплекта. Для определения надежности комплекта мы используем алгоритм, связанный с функцией Харрингтона [1]. Надежность прибора напрямую связана с его ценой. В то же время желательно получить не самый дорогой по стоимости комплект. При этом поддерживая высокий уровень надежности комплекта. Так как факторы –цена и характеристика надежности комплекта противоположно направлены, то для решения задачи строится множество Парето. В данной ситуации – это выпуклая вверх оболочка точек на плоскости с координатами (цена, надежность).

При анализе известных методов построения выпуклой оболочки точек было замечено, что для задач различного характера в основном применяются 2 метода – алгоритмы Джарвиса и Грэхема. Для задач, где множество точек равномерно распределены по области между осями координат, целесообразно применить алгоритм Джарвиса. В случае сосредоточения точек вблизи осей координат – алгоритм Грэхема.

Литература

Федорченко С.Г., Федорченко Г.С. Интегральная мера оценки состояния энергетической безопасности / Problem Energetic Regional. – 2014. – С.1-16.

Петров Н.Н. Введение в выпуклый анализ : учеб. пособие / Н.Н. Петров. – Ижевск, 2009. – 166 с.

КРИТЕРИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ ИНВАРИАНТНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ[1]

О.А. Кривошеева (Уфа, БашГУ)
kriolesya2006@yandex.ru

Пусть $H(D)$ — пространство функций аналитических в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ с топологией равномерной сходимости на компактах $K \subset D$, и $W \subset H(D)$ — нетривиальное (т.е. $W \neq \{0\}, H(D)$) замкнутое подпространство, которое инвариантно относительно оператора дифференцирования. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k ($|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$) является кратным спектром оператора дифференцирования в подпространстве W. Тогда $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n e^{\lambda_k z}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}$ — семейство его собственных и присоединенных функций в W.

Основной задачей в теории инвариантных подпространств является проблема фундаментального принципа, т.е. представления произвольной функции из W при помощи ряда по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Говорят, что в подпространстве W со спектром $\{\lambda_k, n_k\}$ справедлив фундаментальный принцип, если любой функции $g \in W$ верно представление

$$g(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad z \in D, \tag{1}$$

причем ряд сходится равномерно на компактах из D. Эта задача носит название проблемы фундаментального принципа. В этой работе представлено полное решение проблемы фундаментального принципа для инвариантных подпространств в полуплоскости.

Для формулировки результата, в котором решается эта задача, нам понадобятся некоторые понятия. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $n(r,\Lambda)$ — число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в открытый круг $B(0,r)$, и

$$\overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке конкурса "Молодая математика России"

- верхняя плотность последовательности Λ.

Следуя работе [1], положим ($B(z,r)$ — открытый круг с центром z и радиуса r)

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{|\lambda_m|},$$

$$q_\Lambda^m(\lambda,\delta) = \prod_{\lambda_k\in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|),k\neq m} \left(\frac{\lambda_m-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}, \quad m\geqslant 1.$$

Величина S_Λ схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна.

Пусть $a,\varphi\in\mathbb{R}$. Рассмотрим полуплоскость

$$\Pi(a,\varphi) = \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a\}.$$

Положим

$$S_\Lambda(\varphi) = \min_{\{\lambda_{k(j)}\}} \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{j\to\infty} \frac{\ln|q_\Lambda^{k(j)}(\lambda_{k(j)},\delta)|}{|\lambda_{k(j)}|},$$

$$q_\Lambda^k(z,\delta) = \prod_{\lambda_\nu\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|),\nu\neq k} \left(\frac{z-\lambda_\nu}{3\delta|\lambda_\nu|}\right)^{n_\nu},$$

где минимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}| \to e^{-i\varphi}$, $j\to\infty$.

Теорема. *Пусть $a,\varphi\in\mathbb{R}$, W — замкнутое инвариантное подпространство в $H(\Pi(a,\varphi))$ со спектром $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$, $\overline{n}(\Lambda)<+\infty$. Следующие утверждения эквивалентны.*

1) Каждая функция $g\in W$ раскладывается в ряд (1), сходящийся равномерно на компактах в $\Pi(a,\varphi)$.

2) $S_\Lambda(\varphi)=0$ и $S_\Lambda>-\infty$.

Литература

1. Кривошеев А.С. Фундаментальный принцип для инвари антных подпространств в выпуклых областях / А.С. Кривошеев// Изв РАН. Сер. мат. — 2004. — Т. 68, № 2. — С. 71–136.

ОДНА ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ВЫБРОСАМИ ПРИ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ[1]

К.Н. Кудрявцев, П.К. Симаков (Челябинск, ЮУрГУ(НИУ))
kudrkn@gmail.com

В докладе рассматривается двухуровневая иерархическая система. Нижний уровень иерархии образует предприятие, реализующее продукцию на внешнем рынке, цены на котором формируются согласно модели олигополии Курно. В то же время, себестоимость производимой продукции включает в себя затраты на работу очистных сооружений. Стремясь увеличить прибыль, предприятия может временно отключать очистные сооружения, снижая тем самым себестоимость произведенной продукции и одновременно увеличивая объем вредных выбросов. Оценка ущерба, наносимого окружающей среде деятельностью предприятия, пропорциональна квадрату времени τ, на которое были отключены очистные сооружения, и для любого фиксированного значения τ представляет собой нечеткое число с трапецеидальной функцией принадлежности.

На верхнем уровне иерархии действует управляющий орган, целью которого является, во-первых, увеличение получаемых с предприятия налогов (сумма налога на прибыль и экологического налога), во-вторых, уменьшение ущерба окружающей среде.

В качестве математической модели описанного взаимодействия рассматривается иерархическая игра двух лиц при нечеткой информации, в которой стратегией игрока верхнего уровня является выбор ставки экологического налога, пропорционального τ, стратегией игрока нижнего уровня — выбор τ.

При исследовании модели использованы подходы из [1,2].

Литература

1. Kudryavtsev K.N. A Bimatrix Game with Fuzzy Payoffs and Crisp Game / K.N. Kudryavtsev, I.S. Stabulit, V.I. Ukhobotov // CEUR Workshop Proceedings. — 2017. — vol. 1987. — pp. 343–349.

2. Ukhobotov V.I. On Decision Making under Fuzzy Information about an Uncontrolled Factor / V.I. Ukhobotov, I.S. Stabulit, K.N. Kudryavtsev // Procedia Computer Science. — 2019. — vol. 150. — pp. 524-531.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740027).

МОДЕЛЬ ДЕЛОВОГО ЦИКЛА КЕЙНСА И ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ[1]

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Д.Г. Фролов
(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г.Демидова)
anat_kulikov@mail.ru, kulikov_d_a@mail.ru, supfro@yandex.ru

После выхода монографии Дж. Кейнса стало возможным появление математических моделей, анализ которых дает возможность объяснить наличие циклов в рыночной экономике. Эти модели приведены, например, в [1-3]. В работах Т. Пу было акцентировано внимание на необходимость учета пространственных факторов при анализе экономической динамики. В одном из вариантов постановки задачи приходим к необходимости анализа краевой задачи

$$u_t = \frac{y}{u} - \gamma + d_1 u_{xx},\ y_t = \frac{y^2}{u} - uy + d_2 y_{xx}, \tag{1}$$

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0,\ y_x(t,0) = y_x(t,\pi) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\gamma, d_1, d_2 > 0, x \in [0,\pi], y(t,x)$ – нормированная величина дохода соответствующей экономики, $u(t,x)$ – нормированная величина процентной ставки кредита. Краевая задача (1), (2) имеет пространственно однородное состояние равновесия $S_0 :\ u = \gamma, y = \gamma^2$. В докладе предполагается дать анализ окрестности состояния равновесия S_0. В частности, привести достаточные условия, реализация которых приводит к появлению: 1) пространственно однородных t периодических решений; 2) пространственно неоднородных состояний равновесия; 3) пространственно неоднородных циклов; 4) более структурно сложных паттернов.

Литература

1. Puu T. Nonlinear economic dynamics / T. Puu. — Berlin-Heidelberg. : Springer-Verlag, 1993. — 222 p.

2. Zhang W. B. Synergetic Economics / W. B. Zhang. — Berlin-Heidelberg. : Springer-Verlag, 1991. — 246 p.

3. Kulikov A. N. Synchronization of fluctuations in the interaction of economies within the framework of the Keynes's business cycle model / A. N. Kulikov, D.A. Kulikov, M.A. Radin // Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Science (in appear 2021).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00672).

БИФУРКАЦИИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОВОРОТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО АРГУМЕНТА И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

В.А. Куликов (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
kulikov7677@gmail.com

Для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$u_t(\rho,\varphi,t)+u(\rho,\varphi,t)=D\Delta_{\rho\varphi}u(\rho,\varphi,t)+K(1+\gamma cos(u_\theta(\rho,\varphi,t-T))) \tag{1}$$

относительно функции $u(\rho,\varphi,t+s)$, заданной в полярных координатах $0\leqslant\rho\leqslant R, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ $(R>0)$ и $t\geqslant 0, -T\leqslant s\leqslant 0$ $(T>0)$, в котором $\Delta_{\rho\varphi}$ - оператор Лапласа, $u_\theta(\rho,\varphi,t)\equiv u(\rho,(\varphi+\theta)mod(2\pi),t)$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$ – оператор поворота пространственного аргумента, D,K – положительные постоянные, $0<\gamma<1$, в области $\bar{K}_R\times\mathbb{R}^+$, где круг $\bar{K}_R=\{(\rho,\varphi):0\leqslant\rho\leqslant R, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$, $\mathbb{R}^+=\{t:0\leqslant t<\infty\}$, рассматривается начально-краевая задача

$$u_\rho(R,\varphi,t)=0,\quad u(\rho,0,t)=u(\rho,2\pi,t),\quad u_\varphi(\rho,0,t)=u_\varphi(\rho,2\pi,t),$$

$$u(\rho,\varphi,t+s)|_{t=0}=u_0(\rho,\varphi,s)\in H_0(K_R;-T,0),$$

где $H_0(K_R;-T,0)$ пространство начальных условий.

В работе исследована динамика однородных состояний равновесия и их устойчивость в зависимости от параметров уравнения (1). В плоскости основных параметров управления (коэффициента усиления K и угла поворота θ) с использованием метода D-разбиений построены области устойчивости (неустойчивости) однородных состояний равновесия. Исследована динамика областей устойчивости в зависимости от параметров и возможные механизмы потери устойчивости однородными состояниями равновесия. С использованием метода центральных многообразий и теории бифуркаций исследованы возможные бифуркации пространственно неоднородных автоколебательных решений, а также их устойчивость. Изучена динамика таких решений в окрестности границы области устойчивости в плоскости управляющих параметров.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19 31 90133).

ГЛОБАЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ИНДИФИНИТНЫМ ВЕСОМ И СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

У.В. Курбанова (Гянджа, ГГУ)

ulya1812dok2@mail.ru

Рассматривается нелинейная задача Штурма-Лиувилля

$$\ell y \equiv -(p\,(x)\,y')' + q(x)y = \lambda r(x)\,y + \tau(x, y, y', \lambda),\; x \in (0, 1), \qquad (1)$$

$$b_0 y(0) = d_0 p(0)y'(0),\; (a_1\lambda + b_1)y(1) = p(1)y'(1), \qquad (2)$$

где

(i) $p \in C^1[0, 1]$, q, $r \in C[0, 1]$, $p > 0$, $q \geqslant 0$ и r меняет знак на $[0, 1]$;

(ii) b_0, d_0, a_1, b_1 — действительные постоянные такие, что $|b_0| + |d_0| > 0$, $b_0\, d_0 \geqslant 0$, и если $b_0 = 0$, то $q \not\equiv 0$ и $a_1 > 0$, $b_1 \leqslant 0$;

(iii) $\tau = f + g$, причем $f, g \in C\left([0, 1] \times \mathbb{R}^3\right)$ и удовлетворяют условиям:

$$uf(x, u, s, 0) \leqslant 0,\; ug(x, u, s, 0) \leqslant 0,\; (x, u, s) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2;$$

существует число $K > 0$ такое, что

$$\left|\frac{f(x, u, s, \lambda)}{u}\right| \leqslant K,\; (x, u, s, \lambda) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^3,\; 0 < |u| \leqslant 1,\; |s| \leqslant 1;$$

для каждого ограниченного промежутка $\Lambda \subset \mathbb{R}$,

$$g(x, u, s, \lambda) = o\,(|u| + |s|)$$

при $|u| + |s| \to 0$ равномерно по $(x, \lambda) \in [0, 1] \times \Lambda$.

Известно (см. [1, теорема 3.2]), что спектр линейной задачи Штур-ма-Лиувилля

$$(\ell y)(x) = \lambda r(x)y(x),\; x \in (0, 1),$$
$$b_0 y(0) = d_0 p(0)y'(0),\; (a_1\lambda + b_1)y(1) = p(1)y'(1).$$

является дискретным и состоит их двух неограниченных последовательностей простых вещественных собственных значений $\lambda_n^{\pm}$, $n = 1,\, 2,\, \ldots$, таких, что

$$0 < \lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \;\ldots\; < \lambda_n^+ < \;\ldots\;,$$

$$0 > \lambda_1^- > \lambda_2^- > \ldots > \lambda_n^- > \ldots .$$

Кроме того, при каждом $n \in \mathbb{N}$ и каждом $\sigma \in \{+\,,\,-\}$ собственная функция $y_n^\sigma(x)$, соответствующая собственному значению λ_n^σ, имеет $n-1$ простых нулей в интервале $(0,1)$.

Пусть

$$J_n^+ = [\lambda_n^+, \lambda_n^+ + h_n^+],\ J_n^- = [\lambda_n^- - h_n^-, \lambda_n^-],$$

где $h_n^+ = K\lambda_n^+/\lambda_1$, $h_n^- = K\lambda_n^-/\lambda_1$, а $\lambda_1 > 0$ — первое собственное значение оператора A определенного в [1, § 2].

Введем следующие обозначения: $BC_0 = \{y : b_0 y(0) - d_0 y'(0) = 0\}$ и $BC_1^\lambda = \{y : (a_1\lambda + b_1)y(1) - p\,(1)y'(1) = 0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $E = C^1[0,1] \cap BC_0$ — банахово пространство с обычной нормой $||y||_1 = \max\limits_{x\in[0,1]} |y(x)| + \max\limits_{x\in[0,1]} |y'(x)|$.

Если $\lambda \in \mathbb{R}$ фиксировано, то через $S_{n,\,\lambda}^{\sigma,\,\nu}$, $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \{+\,,\,-\}$ и $\nu \in \{+\,,\,-\}$ обозначим множество функций $y \in E$ удовлетворяющих следующим условиям: (i) $y \in BC_1^\lambda$; (ii) $y(x)$ имеет $n-1$ простых нулей в $(0,1)$; (iii) $\sigma \int\limits_0^1 r(x)y^2(x)dx + a_1 y^2(1) > 0$; (iv) $\lim\limits_{x\to 0+} \nu y(x) = 1$. Далее, для каждого $n \in \mathbb{N}$, каждого $\sigma \in \{+\,,\,-\}$ и каждого $\nu \in \{+\,,\,-\}$ множество $S_n^{\sigma,\nu}$ определим следующим образом:

$$S_n^{\sigma,\,\nu} = \bigcup_{\lambda\in R^\sigma} S_{n,\,\lambda}^{\sigma,\,\nu}.$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$, каждого $\sigma \in \{+\,,\,-\}$ и каждого $\nu \in \{+\,,\,-\}$ существует компонента $\mathcal{D}_n^{\sigma,\,\nu}$ множества решений задачи (1)-(2), которая содержит $J_n^{\sigma,\,\nu} \times \{0\}$, содержится в $(\mathbb{R}^\sigma \times S_n^{\sigma,\,\nu}) \cup (J_n^{\sigma,\,\nu} \times \{0\})$ и неограничена в $\mathbb{R} \times E$.*

Литература

1. Binding P.A. Left definite Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions / P.A. Binding, B.A. Watson, P.J. Browne // Diff. Int. Equat. — 1999. — V. 12, No. 2. — C. 167–182.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВИБРАЦИЙ СОСТАВНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

К.О. Левинская, Д.М. Коростелева, С.И. Соловьёв (Казань, КФУ, КГЭУ)

kseniya.levinskaya.kpfu@mail.ru

Исследуются поперечные собственные колебания механической системы, составленной из двух струн, расположенных одна над другой и соединённых упругой пружиной. Для нахождения частот и амплитуд собственных колебаний составной механической системы формулируется задача на собственные значения для системы дифференциальных уравнений второго порядка. Установлено, что задача имеет возрастающую последовательность положительных собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений отвечает полная ортонормированная система собственных элементов. Исследуются предельные свойства собственных значений и собственных элементов при изменении коэффициента жёсткости пружины. Исходная задача аппроксимируется сеточной схемой метода конечных разностей на равномерной сетке. Устанавливаются оценки погрешности приближённых собственных значений и собственных элементов в зависимости от шага сетки. Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3]. Результаты работы могут быть применены при исследовании вибрации сложных механических конструкций, составленных из балок, пластин и оболочек.

Литература

1. Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.

2. Самсонов А.А. Асимптотические свойства задачи о собственных колебаниях стержня с присоединённым грузом / А.А. Самсонов, С.И. Соловьёв, Д.М. Коростелева // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2020. — Т. 162, кн. 1. — С. 52—65.

3. Соловьёв С.И. Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 418–432.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-41-160029, 20-08-01154).

О ГЛАДКОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

В.В. Лийко (Москва, РУДН)
vikalijko@gmail.com

Задачи Дирихле, Неймана, и общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений рассматривались в работах [1]-[4]. В настоящей работе для эллиптических дифференциально-разностных уравнений рассматриваются смешанные краевые задачи. Такие задачи возникают при исследовании упругих деформаций многослойных пластин с гофрированным наполнителем [5].

Пусть область $Q = (0,d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$, и $G = (a,b)$, если $n = 2$. Не ограничивая общности, будем считать, что $d = k + \theta$, где $0 < \theta \leqslant 1$.

Рассмотрим разностный оператор

$$(Ru)(x) = \sum_{i=-k}^{k} a_i u(x_1 + i, x_2, \dots, x_n), \tag{1}$$

где $a_i \in \mathbb{C}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предполагаем, что $u(x) = 0$ при $x \notin Q$.

Рассмотрим сильно эллиптическое дифференциально-разностное уравнение

$$-\Delta R_Q u(x) = f(x) \quad (x \in Q) \tag{2}$$

со смешанными краевыми условиями

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_1=d} = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial Q} = 0 \tag{3}$$

где $f \in L_2(Q)$, ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q.

Определение 1. Функцию u назовем обобщенным решением смешанной краевой задачи (2)-(3), если $u \in W_2^1(Q)$, $u|_{x_1=0} =$

[1] Работа выполнена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ (гранта № 20-01-00288).

$u|_{x_1=d} = 0$, и интегральное тождество

$$\int\limits_Q \nabla(Ru)\nabla\overline{v}\,dx = \int\limits_Q f\overline{v}\,dx \tag{4}$$

выполняется для всех $v \in W_2^1(Q)$ таких, что $v|_{x_1=0} = v|_{x_1=d} = 0$.

Справедлива следующая теорема о гладкости обобщенных решений краевой задаи (2)-(3):

Теорема 1. Пусть u — обобщенное решение краевой задачи (2)-(3). Тогда

1) $Ru \in W_2^2(Q)$;

2) Если $\theta = 1$, то $u \in W_2^2(Q_{1l})$ $(l = 1, \ldots, k+1)$; и если $0 < \theta < 1$, то $u \in W_2^2(Q_{1l})$ $(l = 1, \ldots, k+1)$ и $u \in W_2^2(Q_{2l})$ $(l = 1, \ldots, k)$. Здесь $Q_{1l} = (l-1; l-1+\theta) \times G$ $(l = 1, \ldots, k+1)$, $Q_{2l} = (l-1+\theta; l) \times G$ $(l = 1, \ldots, k)$.

Литература

1. Skubachevskii A.L. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations / A.L. Skubachevskii // J. Diffe-rential Equations. —1986. — 63:3. — C. 332–361.

2. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. / A.L. Skubchevskii. — Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997. — 298 p.

3. Скубачевский А.Л., Цветков Е.Л. Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений / А.Л. Скубачевский, Е.Л. Цветков // Дифференц. уравнения. — 1989. — 25:10. — C. 1766–1776.

4. Скубачевский А.Л., Цветков Е.Л. Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений / А.Л. Скубачевский, Е.Л. Цветков // Тр. С.-Петербург. мат. о-ва. — 1998. — 5. — C. 223–288.

5. Onanov G.G., Tsvetkov E.L. On the mininum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory / G.G. Onanov, E.L. Tsvetkov // Russian J. Math. Phys. — 1995. — 3:4. — C. 491–500.

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ НОРМЫ В L_2[1]

И.В. Лимонова (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
limonova_irina@rambler.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – компактное подмножество, X_N – N-мерное подпространство действительного пространства $L_2(\Omega, \mu)$. Говорят, что X_N допускает точную теорему дискретизации типа Марцинкевича с весами, если существует множество точек $\{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ и множество весов $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$, что для любой функции $f \in X_N$ выполнено равенство

$$\int\limits_\Omega f^2 d\mu = \sum_{j=1}^m \lambda_j f(\xi^j)^2. \tag{1}$$

Пишут $X_N \in \mathcal{M}^w(m, 2, 0)$. Если подпространство X_N допускает равенство (1) с положительными весами, пишут $X_N \in \mathcal{M}^w_+(m, 2, 0)$.

Для вещественного подпространства $X_N \subset L_2(\Omega, \mu)$ определим

$$m(X_N, w) := \min\{m : X_N \in \mathcal{M}^w(m, 2, 0)\}.$$

В работе [1] была сформулирована следующая гипотеза. Пусть $m = m(X_N, w)$, и пусть $\{\xi^j\}$, $\{\lambda_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, таковы, что для любого $f \in X_N$ выполнено равенство (1). Тогда $\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$. В докладе будет приведен Пример 1, показывающий, что гипотеза неверна, а также другой пример, опровергающий некоторые естественные модификации выдвинутой гипотезы.

Пример 1 *Существует подпространство X_2, обладающее следующими свойствами:* а) $m(X_2, w) = 3$; б) при $\xi^1 = -1/2$, $\xi^2 = 1/8$, $\xi^3 = 5/8$, $\lambda_1 = -3/2 < 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1/2$ для любой функции $f \in X_2$ выполнено (1); в) $X_2 \in \mathcal{M}^w_+(3, 2, 0)$.

Во второй части доклада речь пойдет о Теореме 1 — основном результате работы [2]. Нам потребуется

Условие E. Ортонормированная система функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^N$, определённых на Ω, удовлетворяет условию E с константой t, если для каждого $x \in \Omega$

$$\sum_{i=1}^N |u_i(x)|^2 \leqslant N t^2.$$

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ (проект № 14.W03.31.0031).

Теорема 1 *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *— компакт с вероятностной мерой* μ. *Пусть* $\{u_i(x)\}_{i=1}^N$ *— ортонормированная в* $L_2(\Omega, \mu)$ *(действительная или комплексная) система, удовлетворяющая условию E. Тогда существует такая абсолютная константа* C_1, *что найдётся множество* $\{\xi^j\}_{j=1}^m \subset \Omega$ *мощности* $m \leqslant C_1 t^2 N$ *со следующим свойством: для каждого* $f = \sum_{i=1}^N c_i u_i$ *выполняются неравенства*

$$C_2\|f\|_2^2 \leqslant \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |f(\xi^j)|^2 \leqslant C_3 t^2 \|f\|_2^2,$$

где C_2 *и* C_3 *— абсолютные положительные константы.*

Литература

1. Дай Ф., Примак А., Темляков В.Н., Тихонов С.Ю. Дискретизация интегральной нормы и близкие задачи // Успехи мат. наук. —2019. — Т. 74, №4(448). —С.3–58.

2. Limonova I., Temlyakov V. On sampling discretiation in L_2 // arXiv:2009.10789 [math.FA]

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА РИМАНА

В.Л. Литвинов (Москва, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;
Сызрань, Самарский государственный технический университет, филиал в г. Сызрань
vladlitvinov@rambler.ru

Метод Римана рассматривается применительно к решению задачи, описывающей свободные продольные колебания неограниченного неоднородного стержня. Математическая постановка задачи включает дифференциальное уравнение в частных производных относительно искомой функции смещения и неоднородные начальные условия. Решение производится в безразмерных переменных в аналитическом виде. Получено сравнительно простое выражение для продольных колебаний неоднородного стержня, что позволяет использовать полученные результаты для анализа колебаний одномерных неоднородных технических объектов.

1. Введение

Одномерные неоднородные системы широко распространены в технике: канаты грузоподъемных установок [1], гибкие звенья передач [2, 3], стержни твердого топлива [1], бурильные колонны и т.д. Наличие неоднородностей связано с переменной скоростью распространения волн в механических объектах и вызывает значительные затруднения при описании таких систем.

В данной статье используя метод Римана [4] находится аналитическое решение задачи о продольных колебаниях неограниченного неоднородного стержня.

2. Постановка задачи

Дифференциальное уравнение, описывающее продольные колебания неограниченного неоднородного стержня, имеет вид [1, 4]:

$$U_{tt}(x,t) - a^2(x,t)U_{xx}(x,t) = 0. \tag{1}$$

Начальные условия

$$U(x,1) = f(x); \tag{2}$$
$$U_t(x,1) = F(x). \tag{3}$$

В задаче (1)–(3) обозначено: $U(x,t)$ — продольное смещение точки стержня с координатой x в момент времени t; $a(x,t) = x/t$ — переменная скорость распространения продольных волн в стержне.

Введем в задачу (1)–(3) новые переменные:

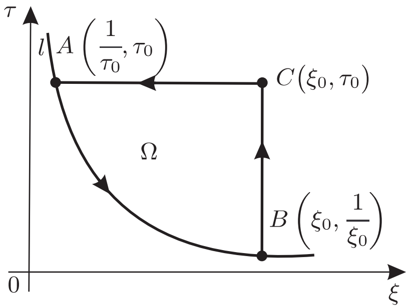
$$\xi = xt; \quad \tau = \frac{t}{x}.$$

Прямая $t = 1$ в новых переменных будет иметь вид равнобочной гиперболы (см. рисунок).

На рисунке обозначено: $C\big(\xi_0, \tau_0\big)$ — фиксированная точка; Ω — область, ограниченная контуром, состоящим из дуги AB кривой l и двух характеристик CA и BC, параллельных осям координат.

После преобразований получим

$$U_{\xi\tau}(\xi,\tau) - \frac{1}{2\xi}U_{\tau}(\xi,\tau) = 0. \tag{4}$$



Начальные условия

$$U_\xi\Big|_{\xi\tau=1} = \frac{1}{2}f'(\xi) + \frac{1}{2\xi}F(\xi); \tag{5}$$

$$U_\tau\Big|_{\xi\tau=1} = -\frac{\xi^2}{2}f'(\xi) + \frac{\xi}{2}F(\xi); \tag{6}$$

$$U\Big|_{\xi\tau=1} = f(\xi). \tag{7}$$

3. Решение задачи

Для решения задачи (4)–(7) используем метод Римана [4]. Формула Римана для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$U\big(\xi_0,\tau_0\big) = \frac{\big(U(\xi,\tau)V(\xi,\tau)\big)_B + \big(U(\xi,\tau)V(\xi,\tau)\big)_A}{2} +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{AB}\Big(\big(V(\xi,\tau)U_\xi(\xi,\tau) - U(\xi,\tau)V_\xi(\xi,\tau) - V(\xi,\tau)U_\xi(\xi,\tau)/\xi\big)\,d\xi -$$
$$-\big(V(\xi,\tau)U_\tau(\xi,\tau) - U(\xi,\tau)V_\tau(\xi,\tau)\big)d\tau\Big)\,. \tag{8}$$

Согласно указанному методу функция Римана $V\big(\xi;\tau;\xi_0,\tau_0\big)$ должна удовлетворять уравнению, сопряженному (4)

$$V_{\xi\tau}(\xi,\tau) + \frac{1}{2\xi}V_\tau(\xi,\tau) = 0 \tag{9}$$

и условиям

$$V\big(\xi,\tau_0;\xi_0,\tau_0\big) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}}; \tag{10}$$

$$V\big(\xi,\tau;\xi_0,\tau_0\big) = 1 \tag{11}$$

на характеристиках CA и BC соответственно.

Из (9), (10) и (11) следует, что функция Римана имеет вид:

$$V\big(\xi,\tau;\xi_0,\tau_0\big)=\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}}. \tag{12}$$

Подставляя (5)–(7) и (12) в формулу (8) получим:

$$U(\xi,\tau)=\frac{1}{2}\left(f(\xi)+\sqrt{\xi\tau}f\left(\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\sqrt{\xi}}{2}\int\limits_{\xi}^{\frac{1}{\tau}}\frac{f(\xi)-2F(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi\right). \tag{13}$$

При выводе (13) учтено, что

$$U(B)=f\big(\xi_0\big);\quad U(A)=f\left(\frac{1}{\tau_0}\right);\quad V(B)=1;\quad V(A)=\sqrt{\xi_0\tau_0}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(xt)+tf\left(\frac{x}{t}\right)+\frac{\sqrt{xt}}{2}\int\limits_{xt}^{\frac{x}{t}}\frac{f(z)-2F(z)}{z^{3/2}}dz\right). \tag{14}$$

4. Заключение

В случае однородного стержня решение (14) совпадает с классическим, что говорит о корректности полученных результатов.

Применение метода Римана позволило получить сравнительно простое выражение для продольных колебаний неоднородного стержня, что позволяет использовать полученные результаты для анализа колебаний одномерных неоднородных технических объектов.

Литература

1. В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов, Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей: монография, СамГТУ, Самара. (2020).

2. В. Л. Литвинов, В. Н. Анисимов, “Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах”, Изв. РАН. Сер. мех. тв. тела, No. 2, 70–77 (2018).

3. В. Л. Литвинов, “Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений”, Тр. ин-та мат. и мех. УрОРАН, 26, No. 2, 188–199 (2020).

4. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, Уравнения в частных производных математической физики, Высшая школа, М. (1970).

ФОРМИРОВАНИЕ У СТАРШИХ ШКОЛЬНИКОВ ЦЕЛОСТНОЙ КАРТИНЫ МИРА В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.И. Лобанова (Зеленокумск, МУДО «ЦВР»)
lobantchik@yandex.ru

Актуальность исследования вытекает из необходимости формирования у школьников целостной картины мира, которое, в свою очередь, лежит в основе их личностного становления. Такое формирование невозможно осуществлять только в рамках базового образования, характеризующегося наличием отдельных дисциплин, не всегда в достаточной мере согласующихся между собой. Решение данной проблемы видится в подключении возможностей дополнительного образования, в рамках которого различные форматы описания окружающего мира могут быть соотнесены между собой, обеспечивая целостное представление о нем [1]. Применительно к обучению математике содержательную базу для установления взаимосвязи предметного содержания с фактами и закономерностями реального мира могут представлять элементы теории дифференциальных уравнений, являющихся моделями многих природных явлений и процессов [2], [3]. В соответствии со сказанным, целью настоящего исследования является разработка и апробация теоретических предпосылок и методических условий эффективного изучения элементов теории дифференциальных уравнений как средства формирования целостной картины мира на основе практико-ориентированного подхода. При определении условий эффективного изучения материала по теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования школьников следует предотвратить опасность неоправданного дубляжа вузовского курса, обеспечить учебно-поисковую активность старшеклассников. Результатом исследования на данном этапе является разработка методики обучения старших школьников решению задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, которые рассматриваются как полигон для развития представлений о единстве и взаимосвязанности всех компонентов окружающей действительности. При этом «опережающая» демонстрация возможностей математических методов исследования естественнонаучных и прикладных проблем при сохранении логической структуры и строгости изложения материала позволяет оценивать аппарат решения дифференциальных уравнений как естественное средство системного изучения реального мира. Разработанная методика обучения старших школьников решению задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, вносит определённый вклад в методику обучения подростков математическим разделам в системе дополнительного образования и способствует формированию целостной картины мира.

Литература

1. Lobanova N.I., Ammosova N.V., Rodionov M.A., Akimova I.V., Puchcov N.P. Elements of the theory of differential equations as a means of forming ideas about a holistic picture of the world among senior students / N.I. Lobanova, N.V. Ammosova, M.A. Rodionov, I.V. Akimova, N.P. Puchkov // International Congress on Academic Research in Society, Technology and Culture / «European Proceedings of Social and Behavioural Sciences EpSBS» (Великобритания). Web of Science Core Collection. — 2020. — Т. 92. — С. 3082–3099.

2. Лобанова Н.И., Аммосова Н.В. Лабораторно-практические работы и экскурсии для старшеклассников в системе дополнительного математического образования / Н.И. Лобанова, Н.В. Аммосова // Современные наукоёмкие технологии. — 2020. — № 11-1. — С. 152–160.

3. Лобанова Н.И. Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования / Н.И. Лобанова // Интернет-журнал «Мир науки» (серия Педагогика и психология). — 2016. — Т. 4, № 6. — С. 1—9.

ОБ УНИТАРНО-ИНВАРИАНТНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНАХ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ[1]

А.В. Лобода, Б.М. Даринский, Д.В.Козориз (Воронеж, ВГУ)

lobvgasu@yandex.ru

В задаче описания голоморфно однородных Леви-невырожденных вещественных гиперповерхностей пространств $\mathbb{C}^{n+1}$ $(n \geqslant 2)$ важную роль играют тейлоровские слагаемые 2-й и 4-й степеней из их нормальных уравнений (см. [1])

$$M = \{v =< z, z > + \sum_{k,l \geqslant 2, m \geqslant 0} N_{klm}(z, \bar{z}) u^m\}. \qquad (1)$$

В частности, при положительно определенной форме Леви

$$< z, z > = |z_1|^2 + ... + |z_n|^2$$

представляют интерес линейные преобразования, сохраняющие эту форму и многочлен N_{220} из (1), являющийся гармоническим в соответствии с [1]. При $n = 2$ такие многочлены и сохраняющие их унитарные преобразования полностью описаны в [2]; при $n = 3$ имеется (см. [3]) оценка размерности $\dim G \leqslant 5$ для связных замкнутых подгрупп группы $U(3)$.

Теорема 1. *Унитарными преобразованиями пространства $\mathbb{C}^3$ любой ненулевой гармонический многочлен $N_{22}(z, \bar{z})$, инвариантный относительно m-мерной подгруппы $U(3)$ $(m = 5, 4, 3)$, можно привести (с точностью до умножения на вещественную константу), соответственно, к одному из трех следующих видов:*

$$N^{(1)} = 6|z_1|^4 - 12|z_1|^2(|z_2|^2 + |z_3|^2) + 2(|z_2|^2 + |z_3|^2)^2, \qquad (2)$$

$$N^{(2)} = (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)^2 - 2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\overline{(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)}, \qquad (3)$$

$$N^{(3)} = \lambda_1(|z_2|^4 - 4|z_2|^2|z_3|^2 + |z_3|^4) + \lambda_2(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_3|^2 + |z_3|^4) +$$
$$+ \lambda_3(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4). \qquad (4)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497).

Замечание. В случае $(\lambda_j : \lambda_k : \lambda_l) = (-1 : 3 : 3)$ многочлен $N^{(3)}$ пропорционален $N^{(1)}$, инвариантному относительно 5-мерной группы.

Предложение. *С точностью до унитарных подобий в группе U_3 существует лишь две двумерные подгруппы ($r_1, r_2 \in \mathbb{R}$)*

$$G_2^{(1)} = \left\{ e^{ir_1} \begin{pmatrix} e^{ir_2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, G_2^{(2)} = \left\{ e^{ir_1} \begin{pmatrix} e^{ir_2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ir_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

инвариантные гармонические многочлены которых не сводятся к многочленам (2) - (4) с «богатыми» группами.

Теорема 2. *Множества ненулевых гармонических многочленов, сохраняемых в точности 2-мерными группами $G_2^{(1)}$ и $G_2^{(2)}$, сводятся унитарными преобразованиями, соответственно, к 8-параметрическому и 4-параметрическому семействам, каждое из которых является возмущением семейства многочленов $N^{(3)}$.*

В частности, группе $G_2^{(2)}$ соответствует семейство

$$N^{(3)} + \lambda_4(z_1 z_2 \bar{z}_3^2 + z_3^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2), \ \lambda_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

а возмущение $N^{(3)}$ любыми многочленами вида

$$Re(\mu_1 z_2 \bar{z}_3)(|z_2|^2 - |z_3|^2) + Re(\mu_2 z_2 \bar{z}_3)(|z_2|^2 + |z_3|^2 - 4|z_1|^2) + Re(\mu_3 z_2^2 \bar{z}_3^2)$$

с ненулевыми наборами комплексных коэффициентов (μ_1, μ_2, μ_3) является инвариантным для группы $G_2^{(1)}$.

Заявленные результаты получены за счет изучения (27×9)-матрицы, описывающей представления алгебр Ли, отвечающих подгруппам $U(3)$, в 27-мерном пространстве вещественных гармонических полиномов бистепени (2,2) от трех комплексных переменных. Необходимые вычисления реализованы в пакете Maple.

Литература

1. Chern S.S. Real Hypersurfaces in complex manifolds / S.S. Chern, J.K. Moser // Acta Mathematica. —1974. — V. 133, № 1. — P. 219–271.

2. Ежов В.В. Каноническая форма многочлена 4-го порядка в нормальном уравнении вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ / В.В. Ежов, А.В. Лобода, Г. Шмальц // Математические заметки. — 1999. — Т. 66, № 4. — С. 624–626.

3. Isaev A.V. On Chern-Moser normal forms of strongly pseudoconvex hypersurfaces with high-dimensional stability group / A.V. Isaev // Pacific Journal of Mathematics. — 2008. — V. 235, № 2. — P. 235–244.

РЕШЕНИЕ И КРИТЕРИЙ КОРРЕКТНОСТИ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ $a(x,t)$

Ф.Е. Ломовцев (Минск, БГУ)
lomovcev@bsu.by

В первой четверти плосости $G_\infty = [0,\infty[\times[0,\infty[$ изучена задача:

$$u_{tt} - a^2(x,t)u_{xx} - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t - a(x,t)a_x(x,t)u_x = f(x,t); \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x > 0; \quad (2) \quad u(0,t) = \mu(t),\ t > 0. \ (3)$$

Уравнения $dx-(-1)^i a(x,t)dt = 0$ дают характеристики $g_i(x,t) = C_i$. Если $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, то они строго: убывают при $i = 1$ и возрастают при $i = 2$. Поэтому $y_i = g_i(x,t)$ имеют обратные $x = h_i\{y_i,t\}$, $t = h^{(i)}[x,y_i]$. Если $a \in C^2(G_\infty)$, то $g_i,\ h_i,\ h^{(i)} \in C^2, i = 1,2$.

Теорема. *Задача (1)–(3) корректна по Адамару для* $u \in C^2(G_\infty)$ *если и только, если* $f \in C(G_\infty)$, $\varphi \in C^2(R_+)$, $\psi \in C^1(R_+)$, $\mu \in C^2(R_+)$, $R_+ = [0,\infty[$, $\varphi(0) = \mu(0)$, $\psi(0) = \mu'(0)$, $a^2(0,0)\varphi''(0) + +f(0,0) + \{a_t(0,0)/a(0,0)\}\psi(0) + a_x(0,0)a(0,0)\varphi'(0) = \mu''(0)$,

$$\int_0^t f\big(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau\big)\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\,d\tau \in C^1(G_\infty),\ i = 1,\ 2.$$

В $G_- = \{(x,t) \in G_\infty : g_2(x,t) < g_2(0,0)\}$ *её решение – формула Даламбера из [1] и в* $G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : g_2(x,t) \geqslant g_2(0,0)\}$ *формула*

$$u_+(x,t) = \big[\varphi(h_1\{g_1(x,t),0\}) - \varphi\big(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\}\big)\big]/2 +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,\,g_2(x,t)]),\,0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu,0)}d\nu + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}dsd\tau +$$

$$+\mu(h^{(2)}[0,g_2(x,t)]) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,\,g_2(x,t)]} \int\limits_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,\,g_2(x,t)]),\tau\}}^{h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \frac{f(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}dsd\tau.$$

Литература

1. Барановская С.Н. О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения / С.Н. Барановская // Автор. дис. ... кан-та физ.-мат. наук (01.01.02). Минск, БГУ. — 1992. — 13 с.

ГЛАДКИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко (Минск, БГУ)
lomovcev@bsu.by,tatsianashlapakova@gmail.com

В первой четверти плоскости G_∞ решена и изучена корректность по Адамару характеристической начально-граничной задачи:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ a > 0,\ (x,t) \in G_\infty, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x),\ \ u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x),\ x > 0, \tag{2}$$

$$[\alpha(t)u_t(x,t) + \beta(t)u_x(x,t) + \gamma(t)u(x,t)]|_{x=0} = \mu(t),\ t > 0, \tag{3}$$

где множество $G_\infty = [0, +\infty)\times[0, +\infty)$ и коэффициент $\beta(t) = a\alpha(t)$.

Пусть $C^k(\Omega)$ — множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве Ω плоскости R^2 и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ — множество всех непрерывных функций на Ω. Характеристика $x = at$ делит первую четверть плоскости G_∞ на два множества $G_- = \{(x,t) \in G_\infty : x > at > 0\}$, $G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : 0 \leqslant x \leqslant at\}$.

Определение 1. Если существует конечный предел выражения

$$K_m(x) \equiv \beta(0) \sum_{j=0}^{m-1} a^j \left. \frac{\partial^{m-1} f(x,t)}{\partial x^j \partial t^{m-j-1}}\right|_{t=0},\ m \geqslant 2,$$

при $x = 0$ по всем функциям $f \in C^m(G_\infty)$, которые в соответствующем банаховом пространстве $\widehat{C}^{m-2}(G^T)$ сходятся к менее гладким функциям $f \in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющим (4) и

$$\beta(t) \left[\frac{\partial^m}{\partial t^m} \left(\int\limits_0^t f(a(t-\tau),\tau) d\tau \right) \right] \in C[0,+\infty),$$

то этот предел $K_m(0)$ называется *критериальным значением* старших производных порядка $m-1$ от правой части f уравнения (1) в условии согласования (6) при $l = m$ для этих целых $m \geqslant 2$.

Теорема 1. *Пусть в характеристическом режиме (3) (т.е. при $\beta(t) = a\alpha(t)$) коэффициенты $\beta, \gamma \in C^m(R_+)$, $m \geqslant 2$, $t \in R_+ =$*

$[0,+\infty)$. *Смешанная задача (1)—(3) в* $G_\infty = [0,+\infty)\times[0,+\infty)$ *имеет единственное и устойчивое по* f, φ, ψ, μ *гладкое решение* $u \in C^m(G_\infty)$, $m \geqslant 2$, *тогда и только тогда, когда выполняются следующие требования гладкости и условия согласования:*

$$f \in C^{m-2}(G_\infty),\ \varphi \in C^m(R_+),\ \psi \in C^{m-1}(R_+),\ \mu \in C^m(R_+),$$

$$F_p(x,t) \equiv \int_0^t f\left(\left|x+(-1)^p a(t-\tau)\right|,\tau\right)d\tau \in C^{m-1}(C_\infty), p=1,\,2, \tag{4}$$

$$\beta(t)\varphi^{(m+1)}(at),\ \beta(t)\psi^{(m)}(at) \in C(R_+),$$

$$\sum_{j=0}^{l}\frac{l!}{j!(l-j)!}\left\{\beta^{(l-j)}(0)\left[aP'_j(0)+P_{j+1}(0)\right]+a\gamma^{(l-j)}(0)P_j(0)\right\}=$$

$$=a\mu^{(l)}(0),\ l=\overline{0,m-1}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=0}^{m-1}\frac{m!}{j!(m-j)!}\left\{\beta^{(m-j)}(0)\left[aP'_j(0)+P_{j+1}(0)\right]+a\gamma^{(m-j)}(0)P_j(0)\right\}+$$

$$+K_m(0)+\beta(0)\left[a^{m+1}\varphi^{(m+1)}(0)+a^m\psi^{(m)}(0)\right]+a\gamma(0)P_m(0)=$$

$$a\mu^{(m)}(0),\ m\geqslant 2. \tag{6}$$

Этим её гладким решением $u \in C^m(G_\infty)$ *соответственно на* G_- *и* G_+ *является функция*

$$u_-(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)ds\,d\tau,\ \ (x,t)\in G_-,$$

$$u_+(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(|s|,\tau)ds\,d\tau+\left(a\gamma\left(t-\frac{x}{a}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times \left\{ a\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)-\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)[a\varphi'(at-x)+\psi(at-x)]-\right.$$

$$\left. -\beta\left(t-\frac{x}{a}\right)\int\limits_0^{t-x/a} f(a(t-\tau)-x,\tau)d\tau \right\} -$$

$$-\frac{1}{a}\int\limits_0^{t-x/a}\int\limits_0^{a(t-\tau)-x} f(s,\tau)ds\,d\tau,\ \ (x,t)\in G_+.$$

В определении 1 банахово пространство $\widehat{C}^{m-2}(G^T)$ имеет норму

$$\|f\|_{\widehat{C}^{m-2}(G^T)}=\max_{(x,t)\in G^T}\left(\sum_{0\leqslant i+j\leqslant m-2}\left|\partial_x^i\partial_t^j f(x,t)\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{2}\sum_{0\leqslant i+j\leqslant m-1}\left|\partial_x^i\partial_t^j F_p(x,t)\right|+\left|\beta(t)\frac{\partial^m F_2(0,t)}{\partial t^m}\right|\right),\ \forall T>0,$$

$$\partial_x^i\partial_t^j=\partial^{i+j}/\partial_x^i\partial_t^j$$

где множества $G^T=\{(x,t)\in G_\infty: 0\leqslant x+at\leqslant 2aT,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$.

В условиях согласования (5), (6) теоремы 1 функции

$$P_0(x)=\varphi(x),\ P_q(x)=\sum_{m=0}^{(q-2)/2}a^{2m}\frac{\partial^{q-2}f(x,t)}{\partial x^{2m}\partial t^{q-2-2m}}\bigg|_{t=0}+a^q\varphi^{(q)}(x),$$

если q — четное, $q\geqslant 2$,

$$P_1(x)=\psi(x),\ P_q(x)=\sum_{m=0}^{(q-3)/2}a^{2m}\frac{\partial^{q-2}f(x,t)}{\partial x^{2m}\partial t^{q-2-2m}}\bigg|_{t=0}+a^{q-1}\psi^{(q-1)}(x),$$

если q — нечетное, $q\geqslant 3$,

$P_q'(0)$ — значения первой производной по x от $P_q(x)$ при $x=0$,

$\beta^{(l-j)}(0)$, $\gamma^{(l-j)}(0)$, $\mu^{(l)}(0)$ — значения соответственно производных по t порядков $l-j$ и l от функций β, γ, μ при $t=0$.

Следствие 1. *Если правая часть f уравнения (1) зависит только от x или t и $f\in C^{m-2}(R_+)$ по t или x, то теорема 1 верна без интегральных требований гладкости (4) на f [2].*

Следствие 2. *Теорема 1 при $\alpha = \beta = 0$ даёт формулу решения и критерий корректности первой смешанной задачи для уравнения (1) в классе гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$, $m \geqslant 2$.*

Замечание 1. Если f зависит от x и t, то в требованиях (4) теоремы 1 принадлежность интегралов множеству $C^{m-1}(C_\infty)$ от функции $f \in C^{m-2}(C_\infty)$ эквивалентна их принадлежности множествам $C^{(m-1,0)}(C_\infty)$ или $C^{(0,m-1)}(C_\infty)$, где $C^{(m-1,0)}(\Omega)$ и $C^{(0,m-1)}(\Omega)$ — соответственно множества непрерывно дифференцируемых $m-1$ раз по x, непрерывных по t и непрерывных по x, непрерывно дифференцируемых $m-1$ раз по t функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$.

Замечание 2. Случай достаточных условий корректности теоремы 1 для всех чётных $m = 2, 4, 6, \ldots,$ обоснован в статье [1], в которой критериальными значениями $K_m(0)$ в (6) служат числа

$$\beta(0) \sum_{j=0}^{m-1} a^j f^{(j,\, m-1-j)}(0,t)\Big|_{t=0} = \sqrt{a^2+1}\,\beta(0)\times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\sum_{s=0}^{(m-2)/2} a^{2s} f^{(2s,\, m-2-2s)}(0,0) \right), \; m = 2, 4, 6, \ldots, \qquad (7)$$

где символом $\partial \left(\sum\right)/\partial \vec{v}$ обозначено значение производной по вектору $\vec{v} = \{a, 1\}$ от указанной в (7) суммы частных производных порядка $m-2$ от функции $f \in C^{m-2}(G_\infty)$ при $x = 0$ и $t = 0$.

Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах / Ф.Е. Ломовцев, Т.С. Точко // Веснік Гродзенскага дзяржаунага універсітэта імя Янкі Купалы. Сер. : Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2019. — № 2. — С. 56–75.

2. Новиков Е.Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косой производными: Автореф. дис. … кан-та физ.-мат. наук/ ИМ НАН РБ. —Минск, 2017. —25 с.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА МОДЕЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

А.Г. Лосев, Е.А. Мазепа (Волгоград, ИМИТ ВолГУ)
allosev59@gmail.com, elena.mazepa@volsu.ru

Рассмотри модельное многообразие $M_g = B \cup D$, где B — некоторый предкомпакт с непустой внутренностью, а D изометрична $[r_0, +\infty) \times S$ (где $r_0 > 0$ и S — замкнутое риманово многообразие без края) с метрикой $ds^2 = dr^2 + g^2(r)\, d\theta^2$. Здесь $g(r) > 0$ — гладкая на $[r_0, +\infty)$ функция, а $d\theta^2$ — метрика на S.

Будем рассматривать на M_g уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(x), \tag{1}$$

где на D выполнено $f(x) = f(r,\theta)$, $f \in G^{\left[\frac{3n}{2}\right]+2}(M_g)$ и

$$G^p(M_g) = \left\{ f \in C(M_g) : \forall r \in [r_0; +\infty)\, f(r,\theta) \in C^p(S^{n-1}) \right\}.$$

Обозначим также

$$h(r) = \int\limits_r^\infty g^{1-n}(t) \left(\int\limits_{r_0}^t \left(\frac{1}{g^2(\xi)} + \varphi_0(\xi) + \varphi_{m_1}(\xi) \right) g^{n-1}(\xi) d\xi \right) dt, \text{ где}$$

$$\varphi_0(r) = ||f(r,\theta)||_{L^1(S)}, \varphi_{m_1}(r) = ||\Delta_\theta^{m_1} f(r,\theta)||_{L^2(S)} \text{ и } m_1 = \left[\frac{3n}{4}\right] + 1.$$

В работе получена следующая асимптотическая оценка решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Теорема *Пусть на D выполнено условие $h(r_0) < \infty$. Тогда для любых функций $\Phi(\theta) \in C^{2m_1}(S)$ и $\Psi(\theta) \in C^{2m_1}(S)$ на D существует единственное решение $u(r,\theta)$ уравнения (1) такое, что $u(r_0,\theta) = \Psi(\theta)$ и для любых (r,θ) при $r > r_0$ выполнено*

$$|u(r,\theta) - \Phi(\theta)| \leqslant C h(r),$$

где константа $C > 0$ не зависит от (r,θ).

---

[1] Работа выполнена частично при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (гос. задание № 0633-2020-0003).

ДЕРЕВЬЯ И ГРАФЫ В ВЕЙВЛЕТ АНАЛИЗЕ НА НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ

С.Ф. Лукомский (Саратов, СГУ)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

Нульмерные группы

Мы будем обсуждать следующий вопрос: как построить ступенчатую масштабирующую функцию, которая порождаем КМА (не обязательно ортогональный) на нульмерной группе (группе Виленкина, произведении групп Виленкина, аддитивной группе локального поля с положительной характеристикой, аддитивной группе поля p-адических чисел). Случай локального поля нулевой характеристики обсуждать не будем.

Пусть p-простое, $(G, \dot{+})$ локально компактная нульмерная абелева группа, $(G_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ основная цепочка подгрупп с условиями

$$G_{n+1} \subset G_n,\ \sharp(G_n/G_{n+1}) = p, \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} G_n = G,\ \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} G_n = \{0\}.$$

Пусть $g_n \in G_{n-1} \setminus G_n$ – базисная система, т.е. $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n g_n,\ \ x_n \in GF(p),\quad \mathcal{A}$ – оператор растяжения, т.е. $\mathcal{A}x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n g_{n-1},\ H_0 = \{a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\dots a_{-s}g_{-s};\, s \in \mathbb{N}\}$ – множество сдвигов. Если операция сложения в G удовлетворяет условию $pg_n = g_{n+1}$, то G есть аддитивная группа поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, если $pg_n = 0$, то это группа Виленкина. Элемент x отождествим с последовательностью $x = (..., 0, x_n, x_{n+1}, ...)$. Тогда $g_n = (..., 0_{n-1}, 1_n, 0_{n+1}, ...)$.

Аннуляторы $G_n^\perp$ образуют базу топологии в группе характеров $X,\ G_n^\perp \subset G_{n+1}^\perp,\ \sharp G_{n+1}^\perp/G_n^\perp = p$. Пусть далее (χ, x) – значение характера χ на элементе $x,\ r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$ – функции Радемахера. В любой группе $r_n(g_n) = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. В поле $\mathbb{Q}_p:\ r_n(g_m) = e^{\frac{2\pi i}{p^{n-m+1}}}$. В группе Виленкина $r_n(g_m) = 1$ при $n \neq m$. Оператор растяжения в X определяется равенством $(\chi\mathcal{A}, x) = (\chi, \mathcal{A}x)$. Функция φ называют масштабирующей, если для ее преобразования Фурье справедливо равенство $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}), m_0 \in L_2$. m_0 называется маской.

Построение масштабируюших функций в группе Виленкина

Пусть G группа Виленкина. Элемент $x \in G$ записываем в виде $x = (..., 0_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ...)$, $x_j = 0, ..., p-1$, базисный элемент $g_n = (..., 0_{n-1}, 1_n, 0_{n+1})$, $pg_n = 0$, $G_n = \{x = (..., 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...)\}$. Аннулятор $G_n^{\perp} = \{\chi = (..., \alpha_{n-1}, \alpha_n, 0, 0, ...)\}$, функция Радемахера $r_n = (..., 0_{n-1}, 1_n, 0, 0, ...)$. Каждый характер χ есть произведение функций Радемахера $\chi = \prod_{k=-\infty}^{n} r_k^{\alpha_k}$. Поэтому $(\chi, x) = e^{\frac{2\pi i}{p} \sum \alpha_k x_k}$.

Обозначим $\mathfrak{D}_{G_M}(G_{-N})$, $M, N \in \mathbb{N}$ множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе G_M с носителем $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K_{-N}$. Аналогично определяется $\mathfrak{D}_{G^{\perp}_{-N}}({G_M}^{\perp})$.

Известно [1], что если функция $\varphi \in \mathfrak{D}_{K_M}(K_{-N})$ масштабирующая с маской m_0 и система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))$ есть система Рисса с границами A и B,то для любых $\chi \in G_0^{\perp}$ $\frac{A}{B} \leqslant \sum_{\alpha \in GF(p)} |m_0(\chi r_0^{\alpha})|^2 \leqslant \frac{B}{A}$. Это необходимое условие для системы Рисса, которое не является достаточным. Мы укажем класс Φ масштабирующих функций, для которых это условие является достаточным.

Определение 1. *Пусть N - натуральное число, p - простое. Под N-валидным деревом мы будем понимать дерево, ориентированное от листа к корню и удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) Корень и все вершины вплоть до N-го уровня имеют значение равное нулю.

(ii) Любой путь $(\alpha_k \to \alpha_{k+1} \to \cdots \to \alpha_{k+N-1})$ длины $N-1$ присутствует в дереве ровно один раз. Здесь $\alpha_i = \overline{0, p-1}$.

1)По дереву T строим дерево $\tilde{T}$. Заменяем последовательность из N нулей, заканчивающуюся корнем на вершину $(0_N, 0_{N-1}, \ldots, 0_1)$. Все вершины $(N+1)$-го уровня дерева T теперь связаны с этой вершиной в дереве $\tilde{T}$. Она является корнем дерева $\tilde{T}$. Без изменения связей, переобозначаем остальные вершины. Если в дереве T с вершины α_N начинался путь из N элементов в направлении к корню

$$\alpha_N \to \alpha_{N-1} \to \cdots \to \alpha_1,$$

то в новом дереве $\tilde{T}$ данная вершина будет иметь значение равное N-мерному вектору $(\alpha_N, \alpha_{N-1}, \ldots, \alpha_1)$. В силу N-валидности дерева T каждому такому вектору в дереве $\tilde{T}$ соответствует единственная вершина.

2)Теперь по дереву $\tilde{T}$ строим граф Г. Каждую вершину $\overline{\alpha}_N = (\alpha_N, \alpha_{N-1}, \ldots, \alpha_1)$ дерева $\tilde{T}$ свяжем со всеми вершинами низшего уровня, имеющими вид $(\alpha_{N-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0)$. Вершины, с которыми вершина $\overline{\alpha}_N$ связана, будем обозначать $(\alpha_{N-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0^*)$.
3)Пусть $\lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0} = |m_0(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})|^2$. Если вершина $(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \ldots, \alpha_{-1})$ в графе Г связана с вершинами $(\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2} \ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0^*)$, то значения маски определяем так, чтобы $\sum\limits_{\alpha_0 \in \{\alpha_0^*\}} \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0} > 0$ и $\lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0} = 0$ для всех $\alpha_0 \notin \{\alpha_0^*\}$. Также, определим $m_0(G_{-N}^{\perp}) = 1$, откуда следует, что $\lambda_{0,0,\ldots,0} = 1$. Определим маску m_0 на $G_1^{\perp}$ равенствами

$$m_0(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0}) = \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0}$$

и продолжим ее вне $G_1^{\perp}$ периодически. Обозначим через Φ совокупность всех масштабирующих функций, преобразование Фурье которых имеет такую маску.

Теорема 2.1.[3] Пусть $\varphi \in \Phi$ и m_0 – соответствующая маска. Система сдвигов $\varphi(x \dot{-} h)_{h \in H_0}$ есть система Рисса т.и т.т. когда существует $A \geqslant 1$ такое, что для любых $\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \ldots, \alpha_{-1} \in GF(p)$,

$$\frac{1}{A} \leqslant \sum_{\alpha_0 \in GF(p)} |m_0(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})|^2 \leqslant A.$$

Масштабирующие функции в поле $\mathbb{Q}_p$

В работе [2] указан критерий, при котором ступенчатая функция φ порождает КМА и приведен пример. Одно из условий в этом критерии – функция φ должна быть масштабирующей. Но нет общего алгоритма построения масштабирующих функции. В докладе мы приведем такой алгоритм.
Обозначим $H_0^{(s)} = \{a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots a_{-s}g_{-s}\}$, $s \in \mathbb{N}$ Если $\varphi \in \mathcal{D}_{G_M}(G_{-N})$ и удовлетворяет масштабирующему уравнению $\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$, то оно имеет вид $\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$, или иначе $\hat{\varphi}(\chi) = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) \sum_h \overline{(\chi, \mathcal{A}^{-1}h)} \beta_h = \hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}) m_0(\chi)$. Т.о. мы должны найти маску m_0 такую, что $\prod_{k \in \mathbb{N}_0} m_0(\chi\mathcal{A}^{-k})) = 0$ на множестве $G_{M+1}^{\perp} \setminus G_M^{\perp}$. Для m_0 справедливо представление

$$m_0(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) = \sum_{a_{-1} \ldots a_{-N-1}} \beta_{a_{-1} \ldots a_{-N-1}} q_m^n \qquad (3.1)$$

где $$n = a_{-1}p^N + a_{-2}p^{N-1} + ... + a_{-N-1},$$

$$m = \alpha_{-N} + \alpha_{-N+1}p + ... + \alpha_{M-1}p^{N+M-1},$$

$$q_m = e^{-\frac{2\pi i}{p^{N+1}}(\alpha_{-N}p^N + \alpha_{-N+1}p^{N-1} + ... + \frac{\alpha_{M-1}}{p^{M-1}})},$$

$$\beta_n = \beta_{a_{-1}...a_{-N-1}}, \quad B = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{p^{N+1}-1})^T.$$

Если обозначить

$$\lambda_m = m_0(G^{\perp}_{-N} r_{-N}^{\alpha_{-N}} ... r_0^{\alpha_0} ... r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}), \quad \Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{p_{M+N}-1})^T,$$

то (3.1) есть система линейных уравнений $(q_m^n)B = \Lambda$. Мы должны найти те λ_m, при которых система $(q_m^n)B = \Lambda$ имеет решение такое, что $\hat{\varphi} = 0$ вне $G_M^{\perp}$. Если из этой системы выбрать p^{N+1} уравнений, то получим систему с определителем Вандермонда. Поэтому осталось указать принцип, по которому надо выбирать уравнения.

Для этого построим дерево T следующим образом. При каждом $m \in \mathbb{N} : p^{M+N} \leqslant m \leqslant p^{N+M+1} - 1$ строим ветвь

$$\lambda_m \to \lambda_{m \text{ div } p} \to ... \to \lambda_{m \text{ div } p^{\nu}} \to ... \to \lambda_{m \text{ div } p^{M+N}} \to \lambda_0 = 1$$

дерева T высоты $M + N$, в которой λ_0 – корень, λ_m– лист. На каждой ветви выберем по одному узлу и поместим туда нуль.

Теорема 3.1. *1)Если количество выбранных узлов $\leqslant p^{N+1} - 1$, то соответствующие нулевые значения λ_j определяют маску масштабирующей функции.*

2)Если количество узлов $\geqslant p^{N+1}$, то соответствующие нулевые значения λ_j не определяют маску масштабирующей функции.

Литература

1.Фарков Ю.А. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп / Ю.А.Фарков // Матем. заметки — 2007. — Т. 82, № 6, — С. 934-952.

2. Albeverio S. p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames / S. Albeverio, S.Evdokimov, M.Skopina // Fourier Anal. Appl. — 2010. — V. 16, № 5. — P. 693-714.

3. Berdnikov G. S., Lukomskii S F.. Discrete orthogonal and Riesz refinable functions on local fields of positive characteristic / G. S. Berdnikov, S F. Lukomskii // European Journal of Mathematics. — 2020. — V. 6, № 4. — P. 1505-1522.

ЗНАМЕНАТЕЛЬ ФРЕДГОЛЬМА ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В $\mathbb{R}_2$[1]

Л.Н. Ляхов, А.И. Иноземцев (Воронеж, ВГУ; Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
levnlya@mail.ru, inozemcev.a.i@gmail.com

Рассматриваются частно-интегральные уравнения Фредгольма

$$\varphi(x_1,x_2)=\lambda\int\limits_{a_1}^{b_1}k_1(x_1,x_2;t_1)\varphi(t_1,x_2)\,dt_1+f(x_1,x_2), \tag{1}$$

$$\varphi(x_1,x_2)=\lambda\int\limits_{a_1}^{b_1}k_2(x_1,x_2;t_2)\varphi(x_1,t_2)\,dt_2+f(x_1,x_2),$$

решения которых можно получить методом последовательных приближений. Далее приводятся результаты исследования только для уравнения (1). Как следует из результатов [1], решение имеет вид

$\varphi(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)+\lambda\int_{a_1}^{b_1}r_1(x_1,x_2;t_1;\lambda)\,f(t_1,x_2)\,dt_1,$
где резольвента

$$r_1(x_1,x_2;t_1;\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}k_1^{(j+1)}(x_1,x_2;t_1)\lambda^j \tag{2}$$

определена через посредство итерированных ядер

$k_1^{(m)}(x_1,x_2;t_1)=\int_{a_1}^{b_1}k_1^{(m-1)}(x_1,x_2;\tau)k_1(\tau,x_2;t_1)\,d\tau,$
причем

$r_1(x_1,x_2;t_1;\lambda)=$

$$=k_1(x_1,x_2;t_1)+\lambda\int\limits_{a_1}^{b_1}k_1(\tau,x_2;t_1)\,r_1(x_1,x_2;\tau;\lambda)\,d\tau. \tag{3}$$

Работа содержит условия, при которых резольвента $r_1(x_1,x_2;t_1;\lambda)$ ядра $k_1(x_1,x_2;t_1)$ может быть аналитически продолжена на всю плоскость комплексного переменного λ так, что ее особыми точками могут быть только полюса. Для этого

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

строится целая функция $\mathcal{D}(\lambda, t_1)$ (знаменатель Фредгольма) в виде абсолютно сходящегося ряда

$$\mathcal{D}(\lambda, t_1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n(t_1), \tag{4}$$

где

$$d_n(t_1) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_1}^{b_1} \begin{vmatrix} k_1(s_1, s_1; t_1) & \dots & k_1(s_1, s_n; t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1(s_n, s_1; t_1) & \dots & k_1(s_n, s_n; t_1) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_n,$$

причем $r_1(x_1, x_2; t_1; \lambda)\mathcal{D}(\lambda, t_1) = \mathcal{D}(x_1, x_2; t_1; \lambda)$, а $\mathcal{D}(x_1, x_2; t_1; \lambda)$ — целая функция. Перемножая ряды (2) и (4) получим

$$\mathcal{D}(x_1, x_2; t_1; \lambda) = d_0(x_1, x_2; t_1) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tfrac{\lambda^n}{n!} d_n(x_1, x_2; t_1),$$

где $d_0(x_1, x_2; t_1) = k_1(x_1, x_2; t_1)$,

$$d_n(x_1, x_2; t_1) =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_1}^{b_1} \begin{vmatrix} k_1(x_1, x_2; t_1) & \dots & k_1(x_1, s_n; t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1(s_n, x_2; t_1) & \dots & k_1(s_n, s_n; t_1) \end{vmatrix} ds_1 \dots ds_n$$

и выполняется рекуррентное соотношение

$$d_n(x_1, x_2; t_1) = k_1(x_1, x_2; t_1) d_n(t_1) - n \int_{a_1}^{b_1} k_1(x_1, \tau; t_1) d_{n-1}(\tau, x_2; t_1)\, d\tau.$$

Умножая (3) на $\mathcal{D}(\lambda, t_1)$ получим

$$\mathcal{D}(x_1, x_2; t_1; \lambda) = k_1(x_1, x_2; t_1)\mathcal{D}(\lambda, t_1) + \lambda \int_{a_1}^{b_1} k_1(x_1, \tau; t_1)\mathcal{D}(x_1, x_2; \tau; \lambda)\, d\tau.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Если λ не является корнем $\mathcal{D}(\lambda, t_1)$ (не является характеристическим значением уравнения (1)), то частно-интегральное уравнение Фредгольма (1) при любом $f(x_1, x_2)$ имеет единственное решение $\varphi(x_1, x_2)$, где $r_1(x_1, x_2; t_1; \lambda) = \frac{\mathcal{D}(x_1, x_2; t_1; \lambda)}{\mathcal{D}(\lambda, t_1)}$.*

Литература

1. Lyakhov L.N., Inozemtsev A.I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two-dimensional Case / Л.Н. Ляхов, А.И. Иноземцев // Jornal Of Mathematical Sciences. – Springer. – 2020. – Vol. 247. – № 6. – P. 888-892.

ОБОБЩЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОГРАНИЧЕННОСТИ ДЕЙСТВИЯ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Л.Н. Ляхов, Н.И. Трусова (Воронеж, ВГУ, Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
levnlya@mail.ru, trusova.nat@gmail.com

В работе [1] линейный частно-интегральный оператор (ЛЧИ-оператор) в $\mathbb{R}_2$ изучался в виде

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + K_{1,2}\,, \tag{1}$$

где $K_0 \ : \ K_0 u = k_0(x)\,u(x)$ — оператор умножения на функцию, $K_{1,2}$ — интегральный оператор: $(K_{1,2}u)(x){=}\int\limits_D k_{1,2}(x;t)u(t_1,t_2)dt_1dt_2$, а частно-интегральные операторы заданы выражениями

$$(K_1 u)(x) = \int\limits_{D_1} k_1(x;t_1)u(t_1,x_2)dt_1, \quad D_1 = (a_1,b_1)\,,$$

$$(K_2 u)(x) = \int\limits_{D_2} k_2(x;t_2)u(x_1,t_2)dt_2, \quad D_2 = (a_2,b_2)\,.$$

Особенность операторов K_1 и K_2 заключается в требовании различных свойств по разным направлениям аргумента ядра k_i оператора и функции u. Наиболее удобным оказалось требование непрерывности как ядер операторов, так и функций, к которым оператор (1) применяется. В этом случае ЛЧИ-оператор типа (1) изучался многими авторами. Наиболее значимые результаты приведены в книгах [1] и [2].

В этой работе мы приведем результаты исследований действия (1) в классах функций с разными свойствами по разным направлениям аргумента.

Через $C(D_{\overline{\alpha}}; L_p(D_\alpha))$ обозначим пространство непрерывных функций со значениями в лебеговом классе функций с нормой (см. [3])

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-41-480002).

$\|u\|_{C(D_{\overline{\alpha}};\, L_p(D_\alpha))} = \sup\limits_{x_{\overline{\alpha}}\in\overline{D_{\overline{\alpha}}}} \left(\int\limits_{D_\alpha} |u(x_{\overline{\alpha}}, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{1/p}$, где α, $\overline{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1,2,3,4)$, при этом полагаем, что индексам $\alpha = 3$ и $\alpha = 4$ отвечают переменные t_1 и t_2, которые меняются в том же прямоугольнике $D_1 \times D_2$ соответственно. Пусть p, q — взаимно сопряженные числа, $p \geqslant 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; пусть $CL_p = C(D_2;\, L_p(D_1))$ и конечны следующие нормы ядер операторов, составляющих ЛЧИ-оператор (1)

$$\|k_0\|_{CL_{pq}(D_1)} = \sup_{x_2\in\overline{D_2}} \left[\int\limits_{D_1} |\, k_0(x_1, x_2)|^{pq}\, dx_1 \right]^{\frac{1}{pq}} < \infty\,,$$

$$\|k_1\|_{CL_{(q,pq)}(D_3,D_1)} = \sup_{x_2\in\overline{D_2}} \left(\int\limits_{D_1} \left[\int\limits_{D_3} |\, k_1(x; t_1)|^q\, dt_1 \right]^{\frac{pq}{q}} dx_1 \right)^{\frac{1}{pq}} < \infty\,,$$

$$\|k_2\|_{CL_{(q,pq)}(D_4,D_1)} = \sup_{x_2\in\overline{D_2}} \left(\int\limits_{D_1} \left[\int\limits_{D_4} |\, k_2(x; t_2)|^q\, dt_2 \right]^{\frac{pq}{q}} dx_1 \right)^{\frac{1}{pq}} < \infty,$$

$$\|k_{1,2}\|_{CL_{(p;q)}(D_1;D)} = \sup_{x_2\in\overline{D_2}} \left(\int\limits_{D} \left\| k_{1,2}(x_1; t) \right\|^q_{L_p(D_1)} dt_1 dt_2 \right)^{\frac{1}{q}} < \infty\,.$$

Введем пространство функций

$$\mathcal{K}(D) = \left\{ CL_{p^2}(D_1) \cup CL_p(D_3) \cup L_{(p,p^2)}(D_4, D_1) \cup L_p(D) \right\},$$

$$\|u\|_{\mathcal{K}(D)} =$$

$$= \max\left\{ \|u\|_{CL_{p^2}(D_1)},\ \|u\|_{CL_p(D_3)}, \|u\|_{L_{(p,p^2)}(D_4,D_1)},\ \|u\|_{L_p(D)} \right\} < \infty.$$

Теорема 1. *Оператор K непрерывен из $\mathcal{K}(D)$ в CL_p.*

Из вложений

$$C(D) \longmapsto C\left(D_2; L_{p^2}(D_1)\right) \longmapsto C\left(D_2; L_p(D_1)\right) \longmapsto \mathcal{K}(D)$$

следует, что все результаты о действии ЛЧИ-оператора в пространствах непрерывных функций, доказанные в [1],[2], являются частными случаями теоремы 1.

Литература

1. Appell J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. — New York : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.p.

2. Калитвин А.С. Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория / А.С. Калитвин, Е.В. Фролова. — Липецк : ЛГПУ, 2004. — 195 с.

3. Бессов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бессов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. — М. : Наука, 1975. — 478 с.

4. Ляхов Л.Н. Ограниченность операторов с частными интегралами со смешанной нормой. I / Л.Н. Ляхов, Н.И. Трусова // Челябинский физико-математических журнал. — 2020. — Т. 5, вып. 1. — С. 22 – 31.

МНОГОПЕРИОДНАЯ ЗАДАЧА ТРАНСПОРТИРОВКИ ГРУЗОВ[1]

О.А. Малафеев, Н.Д. Рединских (Санкт-Петербург, СПбГУ)
o.malafeev@spbu.ru

В работе формализуется и исследуется задача перевозки груза группой перевозчиков из начального в конечный пункт. В распоряжении каждого перевозчика имеется тот или иной вид транспорта. Множество возможных маршрутов перевозок представляют собой сеть, каждое ребро которой — возможный способ перевозки (перевозка авиатранспортом, железнодорожным транспортом, автотранспортом). Выбор ребра сети перевозчиками для транспортировки груза зависит от стоимости перевозки груза на заданном ребре сети, длительности перевозки по выбранному ребру сети и расстояния от начальной до конечной точки перевозки груза. Общий маршрут перевозки груза из начального в конечный пункт определяется перевозчиками на основе принципа оптимальности — компромиссное решение. Процесс перевозки груза — многоэтапный и представлен в виде древовидного графа $G = G(V, E)$, где $V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — множество вершин графа, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ — множество ребер графа. Вершина v_0 графа G соответствует начальному моменту времени транспортировки груза из начального пункта перевозки. Каждому последующему этапу такого процесса соответствует момент времени (вершина графа G), в который должен начаться следующий этап перевозка груза на выбранном ребре сети. Каждому ребру E графа G сопоставляется доход, получаемый перевозчиками при транспортировке груза по этому ребру. Каждый перевозчик стремится максимизировать свой доход выбором маршрута, в качестве которого принимается компромиссное решение. В работе решен иллюстративный пример.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00796).

Литература

1. Kolokoltsov V.N., Malafeyev O.A., Understanding game theory. 2nd Edition — World Scientific Publ. 2020. — 394 p.

2. Малафеев О.А., Рединских Н.Д. Многоэтапный аукцион инвестиционных проектов второй цены/ В книге: Современные методы теории функций и смежные проблемы. — 2019. — С. 190—191.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ДИВИЗОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ[1]

К.Г. Малютин, М.В. Кабанко (Курск, КГУ)
malyutinkg@gmail.com, kabankom@mail.ru

В представленном исследовании мы находим критерий интерполяционности дивизора D в пространстве $[\rho,\infty]^+$, $\rho>1$ в случае кратных узлов в терминах неванлинновской меры, определяемой узлами интерполяции.

По дивизору D определим неванлинновскую меру $\mu(G) := \mu_D(G) := \sum\limits_{a_n\in G} q_n\sin\theta_n$ и семейство функций $\widetilde{\Phi}_z^+(\alpha)=\mu(C(z,\alpha|z|)\setminus a_n)$, $\alpha>0$, где a_n есть точка, ближайшая к точке z (если таких точек несколько, то, для определенности, берем точку a_n, с наибольшим $\sin\theta_n$).

Теорема 1. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

1) *Дивизор D является интерполяционным дивизором в пространстве $[\rho,\infty]^+$.*

2) *Справедливо условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q_n\sin(\arg a_n)}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}<\infty$ и для любого числа $\delta>0$ справедливы соотношения*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{\ln r}\ln\left[\sin\theta\int\limits_0^\delta\frac{\widetilde{\Phi}_z^+(\alpha)\,d\alpha}{\alpha(\alpha+\sin\theta)^2}\right]\leqslant\rho,\quad z=re^{i\theta}\,,$$

$$\sup_{r\to\infty}\frac{1}{\ln(r+2)}\ln\left[\sin\theta\int\limits_0^\delta\frac{\widetilde{\Phi}_z^+(\alpha)\,d\alpha}{\alpha(\alpha+\sin\theta)^2}\right]<\infty\,.$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00236).

Литература

1. Малютин К.Г. Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа / К.Г. Малютин // Матем. сб. — 1993. — Т. 184, № 2. — С. 115–150.

2. Малютин К.Г. Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций нулевого порядка в полуплоскости. / К.Г. Малютин, О.А. Боженко // Уфимский математический журнал. — 2013. — Т. 6, № 1 — С. 18–29.

БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА ПОДСИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Г.Т. Мамедова (Гянджа, ГГУ, Азербайджан)
gunaymamedova614@gmail.com

В настоящей заметке рассматривается спектральная задача

$$\ell(y)(x) \equiv y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y''(0) = 0, \tag{2}$$

$$Ty(0) - a\lambda y(0) = 0, \tag{3}$$

$$y'(1)\cos\gamma + y''(1)\sin\gamma = 0, \tag{4}$$

$$Ty(1) - c\lambda y(1) = 0, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $Ty \equiv y''' - qy'$, $q \in AC[0,1]$, γ, a, $c \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $c < 0$ и $\gamma \in [0, \pi/2]$.

Задача (1)-(5) возникает при разделении переменных в динамической краевой задаче, описывающей малые изгибные колебания однородного стержня, на левом конце которого сосредоточена масса, а правый конец упруго закреплен на пружинке, препятствующей его повороту и на этом конце действует следящая сила (см. напр., [1, 2]).

В данной работе изучены структура корневых подпространств и осцилляционные свойства собственных, найдены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, исследованы базисные свойства корневых функций в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, задачи (1)-(5).

Теорема 1. *Для каждого $\gamma \in [0, \pi/2]$ собственные значения задачи (1)-(5) являются вещественными, простыми, за исключением случая $a = c - 1$ (в этом случае собственное значение $\lambda = 0$ является двукратным), и образуют неограниченно неубывающую последовательность $\{\lambda_k(\gamma)\}_{k=1}^{\infty}$ такую,что*

$$\lambda_1(\gamma) < 0 = \lambda_2(\gamma) < \lambda_3(\gamma) < \ldots < \lambda_k(\gamma) < \ldots$$

при $a < c - 1$,

$$\lambda_1(\gamma) = \lambda_2(\gamma) = 0 < \lambda_3(\gamma) < \ldots < \lambda_k(\gamma) < \ldots,$$

при $a = c - 1$,

$$\lambda_1(\gamma) = 0 < \lambda_2(\gamma) < \lambda_3(\gamma) < \ldots < \lambda_k(\gamma) < \ldots .$$

при $a > c - 1$. Собственная функция $y_{k,\gamma}(x)$, соответствующая собственному значению $\lambda_k(\gamma)$, при $k \geqslant 3$ имеет в точности $k - 2$ простых нулей в интервале $(0, 1)$; кроме того, функции $y_{1,\gamma}(x)$ и $y_{2,\gamma}(x)$ не имеют нулей в $(0, 1)$ в случае $a > c-1$, функция $y_{1,\gamma}(x)$ не имеет нулей в $(0, 1)$ в случае $a = c-1$, функция $y_{2,\gamma}(x)$ не имеет нулей в $(0, 1)$, а число нулей функции $y_{1,\gamma}(x)$ в $(0, 1)$ может быть произвольным в случае $a < c - 1$.

Пусть $\nu_\gamma = (3 + \mathrm{sgn}\gamma)/4,\ \tilde{\nu}_\gamma = \nu_\gamma + 1,\ \gamma \in [0,\ \pi/2]$.

Теорема 2. *Справедливы следующие асимптотические формулы*

$$\sqrt[4]{\lambda_k(\gamma)} = (k - \tilde{\nu}_\gamma)\,\pi + O\left(k^{-1}\right),$$

$$y_{k,\gamma}(x) = \sin\,(k - \tilde{\nu}_\gamma)\,\pi x +$$

$$(1 - \mathrm{sgn}\gamma)(-1)^k \left(\sqrt{2}\right)^{-1} e^{(k - \tilde{\nu}_\gamma)\pi(x-1)} + O\left(k^{-1}\right),$$

где второе соотношение выполняется равномерно по $x \in [\,0, 1]$.

С использованием теорем 1, 2 и [2, теорема 4.2] устанавливаются достаточные условия для базисности подсистем корневых функций задачи (1)-(5).

Теорема 3. *Пусть r, l $(r < l)$ — произвольные фиксированные целые неотрицательные числа. Тогда система $\{y_{k,\gamma}(x)\}_{k=1,\,k\neq r,\,l}^{\infty}$ корневых функций задачи (1)-(5) в случаях: (i) r, $l \geqslant 3$ и имеют разные четности; (ii) $a > c - 1$, $r = 1$ либо $r = 2$, и l является нечетным; (iii) $a < c-1$, $r = 1$, число нулей функции $y_{1,\gamma}(x)$ в $(0, 1)$ и l имеют разные четности; (iv) $a \leqslant c - 1$, $r = 2$ и l является* *нечетным, образует базис в пространстве* $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, *причем безусловный базис в* $L_2(0,1)$.

Литература

1. Артобелевский И.И. Вибрации в технике: Справочник в 6 томах, Колебания линейных систем, Т. 1 / И.И. Артобелевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Болотин, ... — М. : Машиностроение, 1978. — 352 с.

2. Aliyev Z.S. Some properties of eigenfunctions for the equation of vibrating beam with a spectral parameter in the boundary conditions / Z.S. Aliyev, G.T. Mamedova // J. Differential Equations. — 2020. — V. 269, No. 5. — С. 1383–1400.

О БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

М.М. Мамедова (Баку, БГУ, Азербайджан)

memmedova.mesume@inbox.ru

Рассмотрим следующую одномерную систему Дирака

$$Bw'(x) - P(x)w(x) = \lambda w(x),\ 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$\vartheta(0)\cos\alpha + u(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$(\lambda\cos\beta + a)\,\vartheta(\pi) + (\lambda\sin\beta + b)\,u\,(\pi) = 0, \tag{3}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ P(x) = \begin{pmatrix} p\,(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix},\ w(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix},$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $p\,(x),\ r(x) \in C\,([0,\pi];\mathbb{R}))$, α, β, a, b — действительные постоянные такие, что $0 \leqslant \alpha, \beta < \pi$, $\sin\alpha\cos\beta \neq 0$, $\cos\alpha\sin\beta \neq 0$ и

$$\sigma = a\sin\beta - b\cos\beta > 0.$$

Расположение собственных значений на вещественной оси, структуры корневых подпространств и осцилляционные свойства собственных вектор-функций задачи (1)-(3) изучались в [1], где в частности, было доказано, что собственные значения задачи (1)-(2) являются вещественными, простыми и могут быть пронумерованы в порядке возрастания, принимая значения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\ldots < \lambda_{-k} < \ldots < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \lambda_k < \ldots .$$

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $w_k(x) = \begin{pmatrix} u_k(x) \\ v_k(x) \end{pmatrix}$, система собственных вектор-функций, отвечающей системе собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (1)-(3). Известно [1, теорема 1.1, (ii)] (см. также [3, лемма 5]), что система $\{w_k(x)_{k=1}^{\infty}\}$ при $a = b = 0$ образует безусловный базис (базис Рисса) в пространстве $L^2\left([0,\pi];\mathbb{R}^2\right)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть m — произвольное фиксированное целое число. Тогда система $\{w_k(x)\}_{k=1,\,k\neq m}^{\infty}$ образует безусловный базис в $L^2\left([0,\pi];\mathbb{R}^2\right)$.*

Литература

1. Aliyev Z.S. Oscillation properties for the Dirac equation with spectral parameter in the boundary condition / Z.S. Aliyev, P.R. Manafova // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. — 2020. — V. 43, No. 2. — P. 1449–1463.

2. Trooshin I. Riesz basis of root vectors of a nonsymmetric system of first-order ordinary differential operators and application to inverse eigenvalue problems / I. Trooshin, M. Yamamoto // Indiana Univ. Math. J. — 2001. — V. 80, No. 1-2. — P. 19–51.

3. Djakov P. Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions / P. Djakov, B. Mityagin // Indiana Univ. Math. J. — 2012. — V. 61, No. 1. — P. 359–398.

ОБ ОЦЕНКЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ L^p-КОНСТАНТЫ НИКОЛЬСКОГО[1]

И.А. Мартьянов (Тула, ТулГУ)

martyanow.ivan@yandex.ru

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество алгебраических полиномов степени не выше n, $\mathcal{E}$ — множество целых функций экспоненциального типа не

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-90152).

больше 1, $M_p(n) = \sup\limits_{P\in\mathcal{P}_n\setminus\{0\}} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_p}$ — алгебраическая константа Никольского в пространстве $L^p([-1,1])$, $N_p = \sup\limits_{F\in(\mathcal{E}\cap L^p_{|x|}(\mathbb{R}))\setminus\{0\}} \frac{\|F\|_\infty}{\|F\|_p}$ — константа Никольского в пространстве L^p на оси $\mathbb{R}$ с весом $|x|$.

Теорема ([1]). *Пусть $p > 0$, $\theta_p = 2\lceil\frac{3/2}{p}\rceil$. Тогда для всех целых $n \geqslant 0$*

$$n^{2/p}N_p \leqslant M_p(n) \leqslant (n+\theta_p)^{2/p}N_p.$$

Ранее нами было доказано, что $(n+1)^2N_1 \leqslant M_1(n) \leqslant (n+2)^2N_1$ и $N_1 \approx 0.141$. Из теоремы вытекает асимптотика $M_p(n) \sim n^{2/p}N_p$, $n \to \infty$, доказанная M.I. Ganzburg.

Известна оценка $N_p \leqslant (p+1)^{1/p}$, точная при $p = \infty$. С помощью теоремы доказывается [1], что при больших p имеем $M_p(1)3^{-2/p} \leqslant N_p \leqslant M_p(1)$, где $M_p(1) \sim \big(\frac{p+1}{(1+\frac{\ln 2p}{2p})(1+\frac{1}{2p})}\big)^{1/p}$.

Литература

1. Горбачев Д.В. Границы полиномиальных констант Никольского в L^p с весом Гегенбауэра / Д.В. Горбачев, И.А. Мартьянов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 4. — С. 126–137.

БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ГАРМОНИК ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ НА ОДНОМ ИЗ КОНЦОВ КОТОРОЙ СОСРЕДОТОЧЕНА ИНЕРЦИОННАЯ МАССА

В.А. Мехрабов (Баку, БГУ, Азербайджан)

v-mekhrabov@mail.ru

Изгибные колебания однородной балки Эйлера-Бернулли, в сечениях которой действует продольная сила, на правом конце сосредоточен инерционный груз, а левый конец либо свободен, либо свободно опирается, сводится к следующей спектральной задаче

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y''(0) = 0,\ y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \tag{2}$$

$$y''(1) - b\lambda y'(1) = 0,\ Ty(1) - c\lambda y(1) = 0, \tag{3}$$

при $\beta = 0$ и $\beta = \pi/2$ соответственно (см. [1]). Здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $Ty \equiv y''' - qy'$, q — положительная абсолютно непрерывная функция на $[0,1]$, β, b, c — действительные постоянные, причем $\beta \in [0,\pi/2]$, $b > 0$ и $c > 0$.

Теорема 1. *Собственные значения краевой задачи (1)-(3) при $\beta \in [0,\pi/2)$ являются действительными простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_k(\beta)\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что*

$$\lambda_1(\beta) < 0 < \lambda_2(\beta) < \ \ldots \ < \lambda_k(\beta) < \ \ldots\ ,$$

а при $\beta = \pi/2$ являются действительными простыми, за исключением случая $c = 1$, при котором собственное значение $\lambda = 0$ является двухкратным, и образуют неограниченно неубывающую последовательность $\{\lambda_k(\pi/2)\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\lambda_1(\pi/2) < 0 = \lambda_2(\pi/2) < \lambda_3(\pi/2) < \ \ldots \ < \lambda_k(\pi/2) < \ \ldots$$

в случае $c < 1$,

$$0 = \lambda_1(\pi/2) = \lambda_2(\pi/2) < \lambda_3(\pi/2) < \ \ldots \ < \lambda_k(\pi/2) < \ \ldots$$

в случае $c = 1$,

$$0 = \lambda_1(\pi/2) < \lambda_2(\pi/2) < \lambda_3(\pi/2) < \ \ldots \ < \lambda_k(\pi/2) < \ \ldots$$

в случае $c > 1$.

Пусть $\{y_{k,\,\beta}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система корневых функций, соответствующей системе собственных значений $\{\lambda_k(\beta)\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (1)-(2).

Следуя соответствующим рассуждениям приведенным в [2, § 5] можно установить необходимое и достаточное условие для базисности системы $\{y_{k,\,\beta}(x)\}_{k=1,\,k\neq r,\,l}^{\infty}$, где r, $l\,(r \neq l)$ — произвольнse фиксированные натуральные числа. В частности, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть l — произвольное фиксированное натуральное число. Если выполняется одно из следующих условий (i) $c < 1$, $r = 2$ и $l \neq 2$; (ii) $c = 1$, $r = 2$ и $l \geqslant 3$; (iii) $c > 1$, $r = 1$ и $l \geqslant 2$, то система $\{y_{k,\,\pi/2}(x)\}_{k=1,\,k\neq r,\,l}^{\infty}$ образует базис в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, причем в $L_2(0,1)$ этот базис является безусловным базисом.*

Литература

1. Артобелевский И.И. Вибрации в технике: Справочник в 6 томах, Колебания линейных систем, Т. 1 / И.И. Артобелевский, А.Н. Боголюбов, В.В. Болотин, ... — М. : Машиностроение, 1978. — 352 с.

2. Алиев З.С. О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях / З.С. Алиев, Н.Б. Керимов, В.А. Мехрабов // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 2. — С. 147–161.

О ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ [1]

К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова (Москва, МГУ; Архангельск, САФУ)

mirzoev.karahan@mail.ru, t.Safonova@narfu.ru

Нами предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов получить интегральное представление сумм некоторых рядов и специальных функций. Сформулируем одну из теорем, справедлвость которой можно установить этим методом.

Теорема. *Пусть* ${}_{p+1}F_p$ *- обобщённая гипергеометрическая функция и* $-1 < a < 1$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2-a^2}=\frac{\pi}{4\cos(a\pi/2)}{}_3F_2\left(\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;1\right),$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)((2k-1)^2-a^2)}=$$

$$=\frac{\pi\operatorname{tg}(a\pi/2)}{4a}{}_3F_2\left(\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2},1;1\right)-$$

$$-\frac{1}{4}{}_4F_3\left(1-\frac{a}{2},1+\frac{a}{2},1,1;\frac{3}{2},\frac{3}{2},2;1\right),$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2-a^2}=\frac{a\pi}{2\sin(a\pi)}{}_3F_2\left(1-a,1+a,\frac{1}{2};\frac{3}{2},2;1\right),$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k^2-a^2)}=\frac{\ln 2}{a^2}-\frac{\pi\operatorname{ctg}(a\pi)}{2a}{}_3F_2\left(1-a,1+a,\frac{1}{2};\frac{3}{2},2;1\right)-$$

$$-{}_4F_3(1-a,1+a,1,1;\frac{3}{2},2,2;1)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20261).

В докладе будут обсуждаться доказательство этой теоремы и следствия из неё.

О ЗАДАЧЕ ДАРБУ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова (Самара, Самарский государственный технический университет, Елабуга, Елабужский институт Казанского федерального университета)
miro73@mail.ru

Система уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n)u_k + f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

исследовалась многими авторами (см., например, [1]). Система (1) представляет интерес, в частности, с точки зрения применения получаемых результатов к изучению важных в теоретическом и практическом отношении дифференциальных уравнений смешанного типа. В работе [2] предложен вариант метода Римана для гиперболических систем дифференциальных уравнений, в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. Решение задачи Дарбу для системы (1) с двумя независимыми переменными построено в терминах матрицы Римана-Адамара в статье [3].

Здесь для системы вида (1) с тремя независимыми переменными предложен метод решения задачи Дарбу, являющийся определенным развитием метода Римана, который естественно назвать методом Римана-Адамара. Методом интегральных уравнений доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу. Построено решение задачи Дарбу в терминах матрицы, аналогичной матрице Римана — Адамара, которая использовалась в работе [3].

Литература

1. Чекмарев Т.В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 9. — С. 1614–1622.

2. Миронова Л.Б. О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками // Изв. вузов. Математика. — 2006. — № 1. — С. 34–39.

3. Mironova L.B. Boundary-value Problems with Data on Characteristics for Hyperbolic Systems of Equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, No. 3. — P. 400–406.

ОДНИН АНАЛОГ ОБРАЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ С.Л. СОБОЛЕВА[1]

В.Р. Мисюк (Гродно, ГрГУ)
misiuk@grsu.by

Пространства С.Л. Соболева хорошо известны и достаточно глубоко изучены. Определим их. Через $C^s(D)$,$s \in \mathbb{N}$ обозначим множество функций, определённых на $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и имеющих s-ю непрерывную производную, $C^0(D) := C(D)$. Тогда $W_p^s(D)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $s \in \mathbb{N}$ – множество функций $f \in C^{s-1}(D)$ таких, что $f^{(s-1)}$ абсолютно непрерывны на D и $f^{(s)} \in L_p(D)$. В этом случае $W_p^s(D)$ называют *пространством С.Л. Соболева.* Теорема вложения С.Л. Соболева [1] утверждает, что $W_q^1(D) \subset L_p(D)$, где $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$.

Имеет место следующий аналог обращения этой теоремы, дополняющий ранее известные результаты

Теорема 1. *Пусть $p > 2$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$. Тогда для любой рациональной функции r степени не выше n с полюсами во внешности круга D*

$$\|r\|_{W_q^1(D)} \leqslant c\sqrt{n}\|r\|_{L_p(D)} ,$$

где $c > 0$ и зависит лишь от p.

Отметим, что это соотношение является точным в смысле входящих в него параметров p и n. Именно, точность относительно роста множителя $\sqrt{n}$ легко подтверждается на примере функций $r(z) = z^n$, $n = 1, 2, \dots$. Квазинорму $\|r\|_{W_q^1}$ нельзя заменить соответственно квазинормой $\|r\|_{W_u^1}$ и ни при каких $u > q$. В этом можно убедиться на примере простейшей рациональной функции $r(z) = (z_0 - z)^{-1}$, при $|z_0| > 1$.

Литература

1.Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. — М. : Наука, 1988. — 333 с.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке поддержке ГПНИ «Конвергенция-2020» .

О ВЗАИМОСВЯЗИ СТРУКТУРЫ СЕМЕЙСТВА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ОПЕРАТОРАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ В НЁМ

Е.Л. Мягченкова, М.В. Кабанко (Курск, КГУ)
lena.4755@mail.ru, kabankom@mail.ru

Рассмотрим гильбертову пару $\{l_2(\omega), l_2(\omega^{-1})\}$, где $\omega_j = 2^{-2^j}$. Как известно любое весовое пространство $l_2(\omega) = \{\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} | \{\omega_j \xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_2\}$ изометрично пространству l_2, где изометрия устанавливается с помощью мультипликатора $M_\omega : \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \to \{\omega_j \xi_j\}_{j=1}^{\infty}$.

В итоге при действии оператора T в паре $\{l_2(\omega), l_2(\omega^{-1})\}$ элементы его матрицы будут удовлетворять условиям $|a_{ij}| \leqslant \|A\|_{B(\overline{H})} 2^{-|i-j|}$

Далее рассмотрим другую гильбертову пару $\{l_2(u), l_2(v)\}$, где веса распределены следующим образом: $u_{2n-1} = 2^{2^{2n-1}}$, $u_{2n} = 2^{2^{2n}}$, $u_{2n+1} = 2^{-2^{2n+1}}$, $u_{2n+2} = 2^{-2^{2n+2}}$ и $v_{2n-1} = 2^{-2^{2n-1}}$, $v_{2n} = 2^{-2^{2n}}$, $v_{2n+1} = 2^{2^{2n+1}}$, $v_{2n+2} = 2^{2^{2n+2}}$.

Пусть теперь оператор T действует не только в четырех рассмотренных выше пространствах, но и в пространстве (не замкнутом)

$$N = \{\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_2(2^{2^j}) | \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j = 0\}.$$

Теорема 1. *Оператор T представим в виде суммы скалярного оператора и оператора B, отображающего сумму пространств в пересечение.*

Литература

1. Кабанко М.В. Алгебра операторов, действующих в гильбертовой паре / М.В. Кабанко // Труды математического факультета ВГУ — 2001. — № 6. — С. 54–61.

2. Кабанко М.В. О некоторых представлениях алгебры операторов в гильбертовой паре. / М.В. Кабанко, В.И. Овчинников // Труды математического факультета ВГУ — 2001. — № 5. — С. 32–40.

3. Davidson K. Nest algebras. Tringular forms for operator algebras on Hilbert space / K. Davidson. — Harlow. : Longman Sci. and Tech., 1988. — 411 pp.

О ДЕСКРИПТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ НЕКОТОРЫХ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ОБОБЩЕНИЙ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

К.М. Нараленков (Москва, МГИМО)
naralenkov@gmail.com

Мы рассматриваем дескриптивный подход к векторнозначным интегралам Мак-Шейна и Хенстока, базирующимся на *римановых* суммах, то есть изучаем как интеграл Хенстока расширяет интеграл Мак-Шейна в терминах свойств неопределённого интеграла. Напомним, что для числовых функций неопределённый интеграл Мак-Шейна, эквивалентный интегралу Лебега, является AC функцией, в то время как неопределённый интеграл Хенстока, эквивалентный узкому интегралу Данжуа, является ACG_* функцией (оба неопределённых интеграла дифференцируемы к интегранду почти всюду). Поскольку в любом бесконечномерном пространстве значений существуют неопределённые интегралы Петтиса нигде слабо не дифференцируемые [1] (тем не менее, интегралы Мак-Шейна и Петтиса эквивалентны в классе измеримых по Бохнеру функций), нет надежды получить аналоги упомянутых выше дескриптивных характеристик для векторнозначных интегралов Хенстока и Мак-Шейна, используя методы теории действительных функций. В настоящей работе мы изучаем векторнозначные интегралы Мак-Шейна и Хенстока в классе *измеримых по Риману* функций, который является естественным для интегралов риманового типа [3], [4].

Пусть X — действительное банахово пространство и $[a,b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. На протяжении всей работы I и E будут обозначать произвольный невырожденный подотрезок и произвольное измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[a,b]$ соответственно. Если $F : [a,b] \to X$, то $\Delta F(I)$ обозначает *приращение* F на I. Положительная функция на E будет называться *масштабом* на множестве E. Наконец, μ обозначает меру Лебега на действительной оси.

Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a,b]$ есть конечный набор $\{(I_k,t_k)\}_{k=1}^K$ пар отрезок-точка такой, что отрезки $\{I_k\}_{k=1}^K$ попарно не перекрываются и $t_k \in [a,b]$ для каждого k. Частичное разбиение Мак-Шейна отрезка $[a,b]$ называется *частичным разбиением Хенстока* отрезка $[a,b]$ если $t_k \in I_k$ для всех k. Частичное разбиение Мак-Шейна (Хенстока) отрезка $[a, b]$ называется *разбиением Мак-Шейна (Хенстока)* отрезка $[a, b]$ если его отрезки *покрывают* отрезок $[a, b]$.

Определение 1. Функция $f : [a, b] \to X$ называется *интегрируемой по Мак-Шейну (Хенстоку)* на $[a, b]$, с *интегралом Мак-Шейна (Хенстока)* $w \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется масштаб δ на $[a, b]$ такой, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} f(t_k)\mu(I_k) - w \right\| < \varepsilon$$

верно для всякого разбиения Мак-Шейна (Хенстока) $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^{K}$ отрезка $[a, b]$ с условием $I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k))$ для всех k.

Определение 2. Функция $f : [a, b] \to X$ $\mathcal{M}$-*интегрируема* ($\mathcal{H}$-*интегрируема*) на $[a, b]$ если она интегрируема по Мак-Шейну (Хенстоку) на $[a, b]$ и каждому $\varepsilon > 0$ в определении интеграла Мак-Шейна (Хенстока) функции f по $[a, b]$ соответствует *измеримый* масштаб δ. Функция f $\mathcal{M}$-*интегрируема* ($\mathcal{H}$-*интегрируема*) на множестве E если функция $f \cdot \chi_E$, где χ_E обозначает *характеристическую функцию* множества E, $\mathcal{M}$-*интегрируема* ($\mathcal{H}$-*интегрируема*) на $[a, b]$.

Определение 3. Функция $f : E \to X$ называется *измеримой по Риману* на E если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество $F \subset E$, удовлетворяющее условию $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$, и положительное число δ такие, что неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{K} \{f(t_k) - f(t'_k)\} \cdot \mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

верно для всякого конечного набора $\{I_k\}_{k=1}^{K}$ попарно неперекрывающихся отрезков с условием $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant K} \mu(I_k) < \delta$ и для всех $t_k, t'_k \in I_k \cap F$.

Все $\mathcal{H}$-интегрируемые функции обязательно измеримы по Риману, более того, интеграл Мак-Шейна (Хенстока) оказывается эквивалентен $\mathcal{M}$-интегралу ($\mathcal{H}$-интегралу) для измеримых по Риману функций [3].

Определение 4. Функция $F : [a, b] \to X$ есть AC_* *(*AC^*_δ*)* на E если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ ($\eta > 0$ и измеримый масштаб δ на E) такое, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{K} \Delta F(I_k)\right\| < \varepsilon$$

верно для каждого конечного набора попарно неперекрывающихся отрезков $\{I_k\}_{k=1}^K$ (частичного разбиения Хенстока $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^K$ отрезка $[a,b]$) с условием $\partial I_k \cap E \neq \varnothing$ ($t_k \in \partial I_k \cap E$, $I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta(t_k))$) для всех k и $\sum\limits_{k=1}^{K} \mu(I_k) < \eta$. F есть ACG_* (ACG_δ^*) на E если E может быть представлено как счётное объединение множеств, на каждом из которых F есть AC_* (AC_δ^*).

Теорема 1. *Если функция $F : [a,b] \to X$ есть AC_δ^* on E, то для каждого $\sigma > 0$ найдется замкнутое множество $P \subset E$ такое, что $\mu(E \setminus P) < \sigma$ и F есть AC_* P.*

Следствие 1. *Если функция $F : [a,b] \to X$ есть ACG_δ^* на E, то найдется возрастающая последовательность $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ замкнутых подмножеств E такая, что $\mu\Big(E \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n\Big) = 0$ и F есть AC_* на P_n при всех n.*

Теорема 2. *Пусть функция $f : [a,b] \to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a,b]$ и $F : [a,b] \to X$ есть неопределённый интеграл Хенстока функции f. Если F есть AC_* на непустом замкнутом множестве P, то f $\mathcal{M}$-интегрируема на P.*

Теорема 3. *Пусть функция $f : [a,b] \to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a,b]$ и $F : [a,b] \to X$ есть неопределённый интеграл Хенстока функции f. Если f $\mathcal{M}$-интегрируема на непустом измеримом по Лебегу множестве E, то F есть AC_δ^* на E.*

Следствие 2. *Если функция $f : [a,b] \to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a,b]$, то её неопределённый интеграл Хенстока есть ACG_δ^* на $[a,b]$.*

Следствие 3. *Если функция $f : [a,b] \to X$ $\mathcal{H}$-интегрируема на $[a,b]$, то существует возрастающая последовательность замкнутых подмножеств $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ отрезка $[a,b]$ такая, что $\mu\Big([a,b] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n\Big) = 0$ и её неопределённый интеграл Хенстока есть AC_* на P_n при всех n.*

Отметим, что существуют $\mathcal{H}$-интегрируемая на отрезке функция со значениями в пространстве c_0 не интегрируемая по Мак-Шейну ни на каком невырожденном подотрезке [2]. Следовательно, неопределённый интеграл Хенстока такой функции не является функцией ACG_*.

Литература

1. Dilworth S. J. Nowhere weak differentiability of the Pettis integral / S.J. Dilworth, M. Girardi // Quaestiones Math. — 1995. — Vol. 18, No. 4. — Pp. 365–380.

2. Naralenkov K. M. A Henstock-Kurzweil integrable vector-valued function which is not McShane integrable on any portion / K.M. Naralenkov // Quaestiones Math. — 2012. — Vol. 35, No. 1. — Pp. 11–21.

3. Naralenkov K. M. A Lusin type measurability property for vector-valued functions / K.M. Naralenkov // J. Math. Anal. Appl. — 2014. — Vol. 417, No. 1. — Pp. 293–307.

4. Caponetti D. On the integration of Riemann-measurable vector-valued functions / D. Caponetti, V. Marraffa, K. Naralenkov // Monatshefte Math. — 2017. — Vol. 182, No. 3. — Pp. 513–536.

ГЛОБАЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЙ ИЗ БЕСКОНЕЧНОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ИНДЕФИНИТНОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Л.В. Насирова (Сумгаит, СГУ, Азербайджан)
leyla.ashurova25@gmail.com

Рассмотрим нелинейную уравнению Штурма-Лиувилля

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda\rho(x)y + f(x, y, y', \lambda),\ x \in (0, 1), \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\alpha_0 y(0) - \beta_0 y'(0) = 0,\ \alpha_1 y(1) + \beta_1 y'(1) = 0, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ — спектральный параметр, $p \in C^1([0, 1]; (0, +\infty))$, $q \in C([0, 1]; [0, +\infty))$, $r \in C([0, 1]; \mathbb{R})$, $\mathrm{meas}\,\{x \in [0, 1] : \sigma\rho(x) > 0\} > 0$, $\sigma \in \{+, -\}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0$ и $\alpha_i\beta_i \geqslant 0$, $i = 0, 1$, а $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ удовлетворяет условиям:

$$uf(x, u, s, \lambda) \leqslant 0,\ (x, u, s, \lambda) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^3;$$

существуют число $M > 0$ и достаточно большое число $\tau_0 > 0$ такие, что

$$\left|\frac{f(x,u,s,\lambda)}{u}\right| \leqslant M,\ (x,u,s,\lambda) \in [0,1]\times\mathbb{R}^3, u \neq 0, |u|+|s| \geqslant \tau_0. \quad (3)$$

Пусть $E = C^1[0,1] \cap \{y : \alpha_0 y(0) - \beta_0 y'(0) = 0, \alpha_1 y(1) + \beta_1 y'(1) = 0\}$ — банахово пространство с нормой $||u||_1 = ||u||_\infty + ||u'||_\infty$, где $||u||_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)|$, и

$$S^{\nu}_{k,\,\sigma} = \{y \in E : \exists\, x_i \in (0,1),\, i = 1,\, 2,\, \ldots k-1,\, y(x_i) = 0;$$
$$\sigma \int\limits_0^1 \rho(x) y^2(x) dx > 0; \lim_{x\to 0+} \nu\, \mathrm{sgn} y(x) = 1\},\, k \in \mathbb{N},\, \sigma,\, \nu \in \{+\,,\, -\}.$$

Известно [1, § 10.6.1], что собственные значения линейной спектральной задачи

$$\begin{gathered} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda \rho(x) y,\ x \in (0,1), \\ \alpha_0 y(0) - \beta_0 y'(0) = 0,\ \alpha_1 y(1) + \beta_1 y'(1) = 0, \end{gathered} \quad (4)$$

являются вещественными, простыми и образуют две неограниченные последовательности $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ такие, что

$$\ldots < \lambda_k^- < \ldots < \lambda_2^- < \lambda_1^- < 0 < \lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \ldots < \lambda_k^+ < \ldots .$$

Пусть $\{\lambda^+_{k,\,M}\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda^-_{k,\,M}\}_{k=1}^\infty$ — последовательности положительных и отрицательных собственных значений, соответственно, линейной задачи полученной из (4) заменой $q(x)$ на $q(x) + M$.

Обозначим:

$$I_k^+ = [\lambda_k^+,\, \lambda_{k,M}^+],\ \ I_k^- = [\lambda_{k,M}^-,\, \lambda_k^-],\, k \in \mathbb{N}.$$

В случае, когда условие (3) выполняется при $|u| + |s| \geqslant \tau_0^{-1}$ глобальная бифуркация решений из нуля задачи (1)-(2) исследована в [2]. В этой работе доказано, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $\sigma \in \{+\,,\, -\}$ из отрезка $I_k^\sigma \times \{0\}$ ответвляется пара неограниченных континуумов множества решений задачи (1)-(2) обладающих обычными узловыми свойствами.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$, каждого $\sigma \in \{+\,,\, -\}$ и каждого $\nu \in \{+\,,\, -\}$ существует компонента $\mathcal{T}^\nu_{k,\,\sigma}$ множества решений* *задачи (1)-(2) содержащая* $I_k^\sigma \times \{\infty\}$ *и окрестность* Q_k^σ *отрезка* $I_k^\sigma \times \{\infty\}$ *такие, что (а)* $(\mathcal{T}_{k,\sigma}^{\nu} \cap Q_k^\sigma) \subset (\mathbb{R}^\sigma \times S_{k,\sigma}^{\nu})$*; (б)* $\mathcal{T}_{k,\sigma}^{\nu} \backslash Q_k^\sigma$ *либо пересекает* $I_{k'}^\sigma \times \{\infty\}$ *по множеству* $(\mathbb{R}^\sigma \times S_{k',\sigma}^{\nu'})$ *при некотором* $(k', \nu') \neq (k, \nu)$*, либо пересекает* $\mathbb{R} \times \{0\}$ *при некотором* $\lambda \in \mathbb{R}$*, либо имеет неограниченную проекцию на* $\mathbb{R} \times \{0\}$*.*

Литература

1. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. — Х. : ГНТИ, 1939. — 719 с.

2. Nasirova L.V. Global bifurcation from intervals of solutions of nonlinear Sturm-Liouville problems with indefinite weight / L.V. Nasirova // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics. — 2019. — V. 39, № 4. — С. 148–154.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИНИЙ УРОВНЯ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ТОРЕ[1]

С.Р. Насыров (Казань, КФУ)

semen.nasyrov@yandex.ru

В теории приближений аналитических функций рациональными важную роль играют диагональные аппроксимации Эрмита-Паде II. При этом, большой интерес представляет приближение многозначных аналитических (мероморфных) функций, в частности, функций, которые аналитически продолжимы вдоль любого пути на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, не проходящего через конечное число точек. Часто такие функции заданы на компактной $(m+1)$-листной римановой поверхности $\mathcal{R}$, разветвленно накрывающей $\overline{\mathbb{C}}$. Важно изучить максимальные области на плоскости, в которых рациональные аппроксиманты сходятся к приближаемым функциям.

Наттолл [1] предположил, что максимальные области сходимости связаны с разложением $\mathcal{R}$ на листы, которое индуцировано некоторым абелевым интегралом. Этот абелев интеграл обладает свойством: его действительная часть $U(z)$ является однозначной гармонической функцией на $\mathcal{R}$, имеющей конечное число особенностей логарифмического типа в точках $P_0, P_1, \ldots, P_m$ римановой поверхности $\mathcal{R}$, которые расположены над бесконечно удаленной,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проект № 18-41-160003).

причем $U(z) \sim m \log |z|$ при $z \to P_0$ и $U(z) \sim -\log |z|$ при $z \to P_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Ясно, что функция $U(z)$ определяется по римановой поверхности $\mathcal{R}$ однозначно, с точностью до аддитивной константы.

Функция $U(z)$ определяет разложение поверхности $\mathcal{R}$ на листы, т. е. однолистные области, ограниченные кусочно гладкими кривыми, следующим образом. Обозначим через p проекцию $\mathcal{R}$ на $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $z \in \mathbb{C}$ — точка, у которой прообраз $p^{-1}(z)$ содержит $(m+1)$ точку $Q_0(z)$, $Q_1(z), \ldots, Q_m(z)$, т. е. z не является проекцией точки ветвления поверхности $\mathcal{R}$. Нумерацию точек $Q_0(z)$, $Q_1(z), \ldots, Q_m(z)$ выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$U(Q_0(z)) \geqslant U(Q_1(z)) \geqslant \ldots \geqslant U(Q_m(z)).$$

Тогда точки $Q_0(z)$ образуют нулевой лист поверхности $\mathcal{R}$, точки $Q_1(z)$ — первый, ..., точки $Q_m(z)$ — m-й. Будем называть описанное разбиение на листы разложением Наттолла. Заметим, что в точках, где в указанных неравенствах достигаются знаки равенства, нумерация определяется неоднозначно. Однако в силу свойств гармонических функций такие равенства могут выполняться только на кусочно-гладких кривых (линиях склейки листов).

Согласно гипотезе Наттолла точки z, для которых выполняется равенство $U(Q_0(z)) = U(Q_1(z))$, т. е. проекции на $\mathbb{C}$ линий склейки нулевого и первого листов разложения Наттолла, притягивают полюса рациональных аппроксимантов Эрмита-Паде.

Даже в случае небольших значений m изучение разложений Наттолла и описание геометрических характеристик линий склейки листов сталкиваются с серьезными трудностями. В статье А.И. Аптекарева и Д.Н. Тулякова [2] рассмотрен случай, когда $\mathcal{R}$ является трехлистной поверхностью (т. е. $m = 2$) с точками ветвления, расположенными над тремя попарно различными точками z_1, z_2 и $z_3 \in \mathbb{C}$. Ясно, что в этом случае $\mathcal{R}$ является поверхностью рода один или комплексным тором.

Дифференциально-геометрическая структура листов в разложении Наттолла существенно зависит от геометрических свойства треугольника Δ с вершинами z_1, z_2 и z_3. В [2] подробно изучен случай, когда треугольник Δ близок к правильному.

Мы исследуем проблему в общем случае. Поскольку у комплексный тор как риманова поверхность имеет параболический тип, его универсальное накрытие совпадает с конечной комплексной плоскостью. Используя это, с помощью аппарата эллиптических функций Вейерштрасса мы строим соответствующий абелев интеграл на универсальном накрытии и описываем дифференциально-топологическую структуру множеств, соответствующих листам Наттолла на этом накрытии.

Далее мы описываем листы Наттолла на трехлистном торе, а также дифференциально-топологическую структуру линий склейки листов и их проекции на комплексную плоскость. Эта структура определяется нулевой линией уровня некоторой гармонической функции V на универсальном накрытии. При этом, V зависит от комплексного параметра α, характеризующего геометрию треугольника Δ, т. е. при описании разложений Наттолла, отвечающих всем возможным тройкам точек z_1, z_2 и z_3, мы исследуем нулевые множества семейства двоякопериодических гармонических функций V_α.

Нами показано, что структура листов Наттолла существенно зависит от того, является ли треугольник Δ правильным, равнобедренным с углом при вершине, большем или меньшем $\pi/3$, неравнобедренным невырожденным или вырожденным (вершины z_1, z_2 и z_3 располагаются на одной прямой). Во всех случаях дано полное описание листов Наттолла, их линий склейки и соответствующих проекций.

Литература

1. Nuttall J. Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials. — J. Approx. Theory. — 1984. — Vol. 42. — No. 4. — P. — 299–386.

2. Аптекарев А.И., Туляков Д.Н. Абелев интеграл Наттолла на римановой поверхности кубического корня многочлена третьей степени. — Изв. РАН. Сер. матем. — 2016. — Т. 80. — № 6. — С. 5–42.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ ВАЛЬРАСА-ЭВАНСА-САМУЭЛЬСОНА

С.О. Никаноров (Москва, ИПУ РАН)
nikanorovso@yandex.ru

Получены достаточные условия существования и устойчивости положения равновесия в модели Вальраса-Эванса-Самуэльсона. Под математической моделью рынка в модели Вальрас-Эванса-Самуэль-сона будем понимать набор векторов, которые описывают объем товаров, приобретаемых потребителем вне зависимости от бюджета, бюджет потребителя, значение цены в начальной точке, естественные ограничения на время и цены, скорость изменения цен на товары. Для получения достаточных условий существования положения равновесия в данной модели были применены результаты теории накрывающих отображений, а так же теорема о существовании локальных решений дифференциальных уравнений. Данный подход может быть применен для исследования положения равновесия в других динамических моделях с непрерывным временем.

Литература

1. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г. «Равновесные цены как точка совпадения двух отображений». //Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013 г. — Т. 53, №2.

2. Павлова Н.Г. «Исследование экономических моделей методами теории накрывающих отображений» //Вестник российских университетов. Математика. — 2013. — № 5–2.

3. N. G. Pavlova, «Applications of the Theory of Covering Maps to the Study of Dynamic Models of Economic Processes with Continuous Time» //Mathematical Analysis With Applications (CONCORD-90, Ekaterinburg, Russia 2018), Springer Proc. in Math. & Stat., 318, Springer, — 2020 — , 123–129

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ПОМЕХОЙ С ОДНОТИПНЫМИ ВЕКТОГРАММАМИ И ВЫПУКЛОЙ ЦЕЛЬЮ[1]

С.А. Никитина, В.И. Ухоботов (Челябинск, ЧелГУ)
nikitina@csu.ru, ukh@csu.ru

Пусть задан управляемый процесс

$$z(k+1) = z(k) - a(k)u + v(k)v,$$

где $z \in \mathbb{R}^n, a(k) \geqslant 0, b(k) \geqslant 0, k = 0, \dots, p$. Здесь $u \in X$ — значение управления, $v \in X$ — значение помехи, $X \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым и замкнутым. Задано выпуклое замкнутое множество $Z \subset \mathbb{R}^n$. Цель выбора управления $u \in X$ заключается в осуществлении включения

$$z(p) \in Z$$

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740027

при любой допустимой реализации помехи.

Введем оператор T_t, который каждому числу $t = 0, \ldots, p-1$ и каждому множеству $Y \subset R^n$ ставит в соответствие множество $T_t(Y)$. Оператор T_t запишется $T_t(Y) = (Y + a(t)X) \overset{*}{-} b(t)X$, где $A \overset{*}{-} B$ — это геометрическая разность [1] множеств A и B из $\mathbb{R}^n$.

Обозначим $\Omega_m = T_m(T_{m+1}(\ldots T_{p-1}(Z)\ldots)),\ m = 0, ..., p-1$.

Показано, что

$$\Omega_m = Z \overset{*}{-} \beta(m)X + \alpha(m)X,$$

где

$$\begin{gathered}\alpha(m) = \max_{m \leqslant s \leqslant p-1} \left\{\sum_{i=m}^{s} (a(i) - b(i))\right\},\\ \beta(m) = \max_{m \leqslant s \leqslant p-1} \left\{\sum_{i=s}^{p-1} (b(i) - a(i))\right\}.\end{gathered}$$

Аналогичные результаты для непрерывной задачи получены в [2].

Литература

1.Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх.1. / Л.С. Понтрягин //Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 174, № 6. —С. 1278–1280.

2. Ухоботов В.И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью / В.И. Ухоботов // Труды ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 5. —С. 196–204.

СИМПЛЕКСЫ В РАВНОУГОЛЬНЫХ ЖЕСТКИХ ФРЕЙМАХ[1]

С.Я. Новиков (Самара, Самарский университет)
mostvil53@gmail.com

Равноугольный жесткий фрейм (РЖФ) $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ в $\mathbb{R}^d$ $(n \geqslant d)$ — это равномерный жесткий фрейм, для которого существует $w \geqslant 0$ такое что $|\langle\varphi_j, \varphi_{j'}\rangle|^2 = w$ для всех $j \neq j'$.

В докладе будет представлен обзор двух направлений исследований РЖФ: определение границ спарков РЖФ, то есть наименьшего количества линейно зависимых векторов РЖФ, и вопрос о существовании правильного симплекса из векторов фрейма. В рамках

[1] Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1488/1.

этих направлений будут получены условия равенства в неравенстве Уэлча (Welch), показаны связь между RIP-свойством и спарком РЖФ, и возможности использования техники дополнений Наймарка в построении правильных симплексов из векторов фрейма.

Показана связь равенства в нижней оценке спарка и наличием симплекса внутри РЖФ. Рассмотрены примеры: РЖФ в $\mathbb{R}^5$ с 10 векторами, спарк которого равен 4, и содержащего симплекс; РЖФ в $\mathbb{R}^3$ с 6 векторами, полным спарком, равным 4, но не содержащего симплексов. Доказано необходимое условие существования РЖФ с полным спарком в $\mathbb{R}^d$ с числом векторов бОльшим, чем $d+1$: количество векторов такого фрейма должно быть равно $2d$.

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ СИНУС-РЯДОВ[1]

К.А. Оганесян (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
oganchris@gmail.com

Более ста лет назад был получен уже ставший классическим результат о равномерной сходимости синус-рядов с монотонными коэффициентами (см. [1]):

Теорема A (Chaundy, Jolliffe). *Если неотрицательная последовательность* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *не возрастает, то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ *сходится равномерно на* $\mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда* $c_k k \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Известно много обобщений этого критерия на последовательности из более широких классов, самые общие из которых можно найти в [2].

Далее естественным образом встает вопрос: а какие условия были бы необходимыми и достаточными для равномерной сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k^{\alpha} x, \quad c_k \searrow 0, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$? Случаи $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 2$ рассмотрены в [3], где показано, что условие $c_k k \to 0$ является необходимым и достаточным для равномерной сходимости ряда (1) на отрезке $[0, \pi]$ при $\alpha = 1/2$, а при $\alpha = 2$ необходимым и достаточным является условие $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.

[1] Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (грант № 19-8-2-28-1)

Мы покажем, что имеет место

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ *неотрицательна и не возрастает. Тогда*

(a) если α *— четное натуральное число, то ряд (1) сходится в точке* $\pi/2$ *или в точке* $2\pi/3$ *только тогда, когда* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$*;*

(b) если α *— нечетное натуральное число, а* $f(k)$ *— нечетный многочлен степени* α *с рациональными коэффициентами, то для равномерной сходимости ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin f(k)x$ *на* $\mathbb{R}$ *достаточно, чтобы* $c_k k \to 0$ *при* $k \to \infty$*;*

(c) если $\alpha \in (0, 2)$*, то для равномерной сходимости ряда (1) на любом ограниченном подмножестве* $\mathbb{R}$ *достаточно, чтобы* $c_k k \to 0$ *при* $k \to \infty$*.*

Пункты (a) и (b) остаются справедливыми, если условие монотонности $\{c_k\}$ *ослабить до принадлежности классу* $RBVS$*.*

Здесь под классом RBVS мы подразумеваем класс последовательностей, удовлетворяющих следующим условиям:

$$c_k \to 0 \text{ при } k \to \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=l}^{\infty} |c_k - c_{k+1}| \leqslant V c_l$$

для всех l, где V зависит только от $\{c_k\}$.

Теорема 1 представляет собой содержательную часть критерия равномерной сходимости ряда (1).

Литература

1. Chaundy T.W., Jolliffe A.E. The uniform convergence of a certain class of trigonometric series / T.W. Chaundy, A.E. Jolliffe // Proc. London Math. Soc. — 1916. — № 15, P. 214–216.

2. Dyachenko M., Mukanov A., Tikhonov S. Uniform convergence of trigonometric series with general monotone coefficients /M. Dyachenko, A. Mukanov, S. Tikhonov // Canad. J. Math. — 2019, — V. 71, № 6, P. 1445–1463.

3. Kęska S. On the uniform convergence of sine series with square root / S. Kęska // J. Func. Sp. — 2019. P 1–11.

АППРОКСИМАЦИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ В УСРЕДНЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

С.Е. Пастухова (Москва, МИРЭА – Российский технологический университет)
pas-se@ya.ru

Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 2)$ дивергентный эллиптический оператор

$$A_\varepsilon = \sum_{i,j,s,t} D_{ij} a_{ijst}(x/\varepsilon) D_{st}, \quad D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \varepsilon \in (0,1), \qquad (1)$$

где $a(x)=\{a_{ijst}(x)\}$, $1 \leqslant i,j,s,t \leqslant d$, есть 1-периодический (с ячейкой периодичности $Y=[0,1)^d$) измеримый вещественнозначный тензор четвёртого порядка, подчиненный условиям симметрии и эллиптичности:(i) $a_{jist}=a_{ijst}=a_{stij}$; (ii) $\lambda \xi \cdot \xi \leqslant a(\cdot)\xi \cdot \xi \leqslant \lambda^{-1} \xi \cdot \xi$ для дюбой симметрической матрицы $\xi=\{\xi_{ij}\}$, где $\lambda > 0$. Усредненный оператор $\hat{A}$ того же типа, $\hat{A} = \sum_{i,j,s,t} D_{ij} \hat{a}_{ijst} D_{st}$, но с постоянными коэффициентами, которые определяются через решения вспомогательной задачи на ячейке периодичности Y. Оператор вида (1) возникает в теории упругости на тонких пластинах, изготовленных из периодических композитов, когда линейный размер периода мал и стремится к нулю. Для приложений важны эффективное описание такого рода неоднородных сред с помощью усредненных операторов, а также оценка погрешности усреденения, справедливая при минимальных предположениях о регулярности данных задачи (например, коэффициентов оператора и правой часть в уравнении).

Найдена [1-2] аппроксимация $(A_\varepsilon+1)^{-1}=(\hat{A}+1)^{-1}+\varepsilon^2 K(\varepsilon)+O(\varepsilon)$ в операторной $(L^2(\mathbb{R}^d) \to H^2(\mathbb{R}^d))$-норме с некоторым корректором $\varepsilon^2 K(\varepsilon)$, который можно опустить, если аппроксимацию того же порядка малости ε искать в более слабой операторной $(L^2 \to L^2)$-норме, что является простым следствием свойства корректора: $\|K(\varepsilon)\|_{L^2 \to L^2} \leqslant c$ равномерно по ε. Более скрупулёзный анализ [3-4] показал, что

$$\|(A_\varepsilon + 1)^{-1} - (\hat{A} + 1)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\varepsilon^2, \quad c = const(d, \lambda). \quad (2)$$

Для оператора (1) без условия симметрии (i) на тензор $a(x)$ аппроксимация резольвенты того же порядка берётся с корректором: $(A_\varepsilon + 1)^{-1}=(\hat{A} + 1)^{-1}+\varepsilon K_1+O(\varepsilon^2)$ в операторной $(L^2 \to L^2)$-норме.

Корректоры $K(\varepsilon)$ и K_1 в указанных аппроксимациях определяются по формулам, в которых задействованы решения упомянутой выше задачи на ячейке. В [4] эти результаты обобщены на случай однородных (включающих только старшую часть) эллиптических операторов произвольного четного порядка $2m \geqslant 4$.

В [5] изучена другая математическая модель тонких пластин — с сингулярно возмущенными операторами. Примером служит оператор $L_\varepsilon = \varepsilon^2\Delta^2 + A_\varepsilon$, полученный из эллиптического оператора второго порядка $A_\varepsilon = -\,div(a(x/\varepsilon)\nabla)$ с ε-периодическими коэффициентами добавлением билапласиана Δ^2 с множителем ε^2. Эффективное описание этой модели, в том числе аппроксимация резольвенты $(L_\varepsilon + 1)^{-1}$, напоминает усреднение операторов второго порядка с той лишь разницей, что задача на ячейке имеет оператор четвертого порядка.

Литература

1. Pastukhova S. E. Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators / S.E. Pastukhova // Applicable Analysis. — 2016. — V. 95. — P. 1449–1466.

2. Пастухова С. Е. Операторные оценки усреднения для эллиптических уравнений четвертого порядка / С.Е. Пастухова // Алгебра и анализ. — 2016. — Т. 28, вып. 2. — С. 204—226.

3. Pastukhova S. E. L^2-approximation of resolvent in homogenization of higher order elliptic operators / S.E. Pastukhova // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — V. 251, № 6. — P. 902—925.

4. Пастухова С. Е. L^2-аппроксимация резольвенты в усреднении эллиптических операторов четвертого порядка / С.Е. Пастухова // Мат. сборник. — 2021. — Т. 212, вып. 1. — С. 1—24.

5. Pastukhova S.E. Homogenization estimates for singularly perturbed operators / S.E. Pastukhova // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — V. 251, № 5. — P. 724—747.

НЕРАВЕНСТВО ЛАНДАУ – КОЛМОГОРОВА НА ОСИ С ОДНОСТОРОННИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА СТАРШУЮ ПРОИЗВОДНУЮ[1]

Н.С. Паюченко (Екатеринбург, УрФУ)
aueiyo@gmail.com

Изучается неравенство Ландау – Колмогорова в пространствах L_2, L_1, L_∞ на оси для положительной срезки второй производной. Через $\mathcal{W}$ обозначим множество функций $y \in L_1(\mathbb{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $y' \in L_2(\mathbb{R})$ и таких, что положительная срезка второй производной $y''_+ = (y'')_+ \in L_\infty(\mathbb{R})$. Целью работы является получение наименьшей константы K_+ в неравенстве

$$\|y'\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant K_+ \sqrt{\|y\|_{L_1(\mathbb{R})} \|y''_+\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}, \quad y \in \mathcal{W}. \tag{1}$$

Основные результаты сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 1. *Для всех функций $y \in \mathcal{W}$ выполняется неравенство*

$$\|y'\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sqrt{\|y\|_{L_1(\mathbb{R})} \|y''_+\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}. \tag{2}$$

Константа $K_+ = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ является наименьшей возможной.

Пусть $\mathcal{U}$ — класс функций, определенных на отрезке $[0,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную и удовлетворяющих свойствам $u''(x) \geqslant 0$, $u'(0) = 0$, $u(1/2) = 0$.

Теорема 2. *Для всех функций $u \in \mathcal{U}$ выполняется неравенство*

$$\int_0^1 (u')^2 dx \leqslant \frac{8}{3} \|u''\|_{L_\infty[0,1]} \int_0^1 |u| dx.$$

Константа $8/3$ является наименьшей возможной. С точностью до мультипликативной константы единственной экстремальной функцией является многочлен $y = 4x^2 - 1$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90124).

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ХАРТРИ ВБЛИЗИ ЛОКАЛЬНОГО МАКСИМУМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В СПЕКТРАЛЬНОМ КЛАСТЕРЕ[1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ ВШЭ, НИУ МЭИ)
pereskokov62@mail.ru

Рассматривается задача на собственные значения для нелинейного оператора Хартри в $L^2(\mathbb{R}^2)$ [1]

$$(\mathbf{H_0} - \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \ln|q - q'| \mid \psi(q') \mid^2 dq')\psi = \lambda\psi,$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1,$$

где оператор

$$\mathbf{H_0} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\right) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

является двумерным осциллятором, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

В работе найдена серия асимптотических собственных значений вблизи локальных максимумов собственных значений в спектральных кластерах, которые образуются около уровней энергии невозмущенного оператора:

$$\lambda_{n,m}(\varepsilon) = n+1-\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{n+1}{2}-\frac{7\varepsilon\zeta(3)}{2\pi^2}-\left(m^2-\frac{1}{2}\right)\frac{\varepsilon}{\pi^2 n^2}\ln\frac{1}{\varepsilon}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$n \to \infty$. Здесь n имеет порядок ε^{-1}, числа $m = 0, 2, 4, \ldots$, если n — четное, и $m = 1, 3, 5, \ldots$, если n — нечетное. Иррациональное число $\zeta(3) \approx 1,20205$ является значением дзета-функции Римана $\zeta = \zeta(s)$. Отметим, что эта серия описывает расщепление спектра оператора Хартри и содержит члены до третьего порядка по ε.

Литература

1. Перескоков А.В. Квазиклассическая асимптотика спектра двумерного оператора Хартри вблизи локального максимума собственных значений в спектральном кластере / А.В. Перескоков // ТМФ. — 2020. — Т. 205, № 3. — С. 467–483.

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2020-0022).

МОНОТОННАЯ СХОДИМОСТЬ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ОТРЕЗКЕ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

М.А. Петросова, И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков
(Москва, МПГУ, МГУ имени М. В. Ломоносова, НИЯУ МИФИ)
petrosova05@mail.ru, ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Давно известно (см. [1]–[3]), что сходимость полиномов Бернштейна приобретает дополнительные свойства *монотонности* для порождающих функций с определенным характером выпуклости. Особую роль при этом играют ограничения типа *кусочной линейности*, иногда налагаемые на порождающую функцию (см. [2], [4]–[6]). Обычно эти вопросы обсуждаются на стандартном отрезке $[0,1]$. При другом выборе отрезка $[a,b]$ возникают новые комбинаторные соотношения, связанные с арифметической природой возможных точек излома и их сочетанием с границами отрезка (см. [7]). Дополним сейчас результаты [7], охарактеризовав монотонную сходимость полиномов Бернштейна на произвольном отрезке с целочисленными границами.

Для функции $f \in C[a,b]$ на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ полиномы Бернштейна определяют формулой

$$B_n(f,x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{(b-a)k}{n} + a\right) C_n^k \, (x-a)^k \, (b-x)^{n-k} \quad (1)$$

при $n \in \mathbb{N}$, где C_n^k — биномиальные коэффициенты. Положим

$$a, b \in \mathbb{Z}, \quad a < b, \quad l \equiv b - a, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Пусть также функция $f \in C[a,b]$ *выпукла вниз* на $[a,b]$, т. е.

$$f\bigl(\lambda x + (1-\lambda)y\bigr) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \;\; x, y \in [0,1], \;\; \lambda \in [0,1]. \quad (3)$$

Тогда, как следует из теоремы Темпла–Арамэ–Авербах (см. [1]–[3]; см. также [6, § 7] и [8, гл. 10, § 4]), справедливо соотношение

$$B_n(f,x) \geqslant B_{n+1}(f,x) \geqslant f(x), \quad x \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Поскольку $B_n(f,a) = f(a)$ и $B_n(f,b) = f(b)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то вид возможных уточнений в двойном неравенстве (4) представляет интерес лишь на интервале (a,b).

Поставим такой вопрос: для каких номеров $n \in \mathbb{N}$ и в каких точках $x \in (a, b)$ в соотношении (4) при условиях (2), (3) возможен знак равенства? Для полного ответа надо выделить три случая.

Случай 1. Функция $f(x)$ является линейной на $[a, b]$, т. е.

$$f(x) = \alpha x + \beta, \quad x \in [a, b], \tag{5}$$

с коэффициентами $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Это особая вырожденная ситуация.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

- $f(x)$ *имеет вид* (5),
- $B_n(f, x) = B_{n+1}(f, x) = f(x)$ *при всех* $x \in [a, b]$ *и* $n \in \mathbb{N}$,
- $B_1(f, x) = B_2(f, x)$ *для функции* $f(x)$ *с условием* (3).

В случае, когда выпуклая вниз функция $f(x)$ не представима в виде (5), т. е. не является линейной на $[a, b]$, имеем соотношение

$$B_n(f, x) > f(x), \quad x \in (a, b), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Иначе говоря, для всех выпуклых вниз функций, кроме линейных, полиномы Бернштейна (1) располагаются на (a, b) строго выше, чем $f(x)$, и правое неравенство в (4) можно далее не обсуждать. Результаты данного пункта не требуют ограничений (2) и будут справедливы на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Но затем условия (2) становятся существенными.

Случай 2. В условиях (2), (3) функция $f(x)$ является кусочно линейной на $[a, b]$ с рациональными абсциссами точек излома, т. е.

$$f(x) = \alpha x + \beta + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j \, |q_j x - p_j|, \quad x \in [a, b], \tag{7}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\gamma_j > 0$ при $j = 1, \ldots, r$. Считаем, что абсциссы точек излома функции (7) записаны в виде несократимых дробей

$$x_j = p_j / q_j, \quad \text{НОД}(p_j, q_j) = 1, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{8}$$

где

$$p_j \in \mathbb{Z}, \quad q_j \in \mathbb{N}, \quad a q_j < p_j < b q_j, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Обозначим через $q \equiv \text{НОК}\,(q_1, \ldots, q_r)$ общий знаменатель дробей (8). Напомним также, что $l \equiv b - a$.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x)$ *представима в виде* (7) *на отрезке* $[a, b]$ *с условиями* (2). *Определим значение* $d \in \mathbb{N},\ d \geqslant q$, *по формуле*

$$d = \frac{lq}{\text{НОД}\,(l,\, p_1 - aq_1,\, \ldots\,,\, p_r - aq_r)}\,. \tag{9}$$

Тогда

$$B_{dm}(f, x) = B_{dm+1}(f, x), \quad x \in [a, b], \quad m \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

и

$$B_n(f, x) > B_{n+1}(f, x), \quad x \in (a, b), \tag{11}$$

для всех номеров $n \in \mathbb{N}$, *не учтенных в* (10).

Соотношение (10), означающее тождественное совпадение полиномов $B_{dm}(f, x)$ и $B_{dm+1}(f, x)$, называют еще *правилом склеивания* (подробнее см. [6], [7], [9]). Это основной результат теории, уточняющий, вместе с (6), исходное неравенство (4). Завершает картину следующий случай «общего положения».

Случай 3. Рассматриваем все оставшиеся варианты $f \in C[a, b]$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (2), (3) *и функция* $f(x)$ *не подпадает под случаи* 1 *и* 2. *Тогда при всех номерах* $n \in \mathbb{N}$ *для полиномов Бернштейна* (1) *выполнено соотношение* (11).

Указанные случаи исчерпывают все возможности для уточнения знаков в неравенстве (4).

При использовании отмеченных соображений для кусочно линейных порождающих функций (7) основную роль играет анализ значения d из формулы (9). Его вычисление зависит как от состава дробей (8), так и от выбора отрезка $[a, b]$.

Например, в случае отрезка $[a, a + 1]$, когда $a \in \mathbb{Z}$ и $l = 1$, очевидно имеем $d = q \equiv \text{НОК}\,(q_1, \ldots\,, q_r)$, и правило склеивания принимает вид $B_{qm}(f, x) = B_{qm+1}(f, x)$ при всех $m \in \mathbb{N}$ (см. также [6]).

В случае симметричного отрезка $[-1, 1]$, когда $a = -1$ и $l = 2$, возникают две возможности: либо $d = q$, если все числа p_j, q_j являются нечетными; либо $d = 2q$, если среди чисел p_j, q_j есть хотя бы одно четное число. В итоге из формулы (10) получаем правило склеивания, установленное ранее в работе [9]. Перечисленные выше результаты уточняют формулировки [9] относительно монотонной сходимости полиномов Бернштейна при выборе выпуклых порождающих функций $f \in C[-1, 1]$.

Литература

1. Temple W.B. Stieltjes integral representation of convex functions // Duke Mathematical Journal. — 1954. — V. 21, № 3. — P. 527–531.

2. Schoenberg I.J. On variation diminishing approximation methods // On Numerical Approximation. Proc. of a Symposium conducted by the Math. Research Center US Army, University of Wisconsin, Madison, April 21–23, 1958. Ed.: R. E. Langer. — Madison: University of Wisconsin Press, 1959. — P. 249–274.

3. Aramă O. Proprietăţi privind monotonia şirului polinoamelor de interpolare ale lui S.N.Bernstein şi aplicarea lor la studiul aproximării funcţiilor // Studii şi cercetări de Matematică (Cluj). — 1957. — T. 8, № 3–4. — P. 195–210.

4. Passow E. Some unusual Bernstein polynomials // Approximation Theory IV: Proc. of the International Symposium on Approximation Theory Held at Texas A&M University, College Station, Texas, on January 10–14, 1983. Ed.: C. K. Chui, Larry L. Schumaker, J. D. Ward. — N. Y., London: Academic Press, 1983. — P. 649–652.

5. Passow E. Deficient Bernstein polynomials // J. of Approximation Theory. —1989. — V. 59, № 3. — P. 282–285.

6. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8. Ч. 1. Исследования по математическому анализу. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. — С. 126–175.

7. Петросова М.А., Тихонов И.В., Шерстюков В.Б. Точный закон регулярного попарного совпадения для полиномов Бернштейна на произвольном отрезке // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 16. Материалы XVI Международной научной конференции. — Смоленск: СмолГУ, 2015. — С. 195–197.

8. DeVore R.A., Lorentz G.G. Constructive Approximation. — Berlin, Heidelberg, N.Y.: Springer–Verlag, 1993. — x+450 p.

9. Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. Правило склеивания для полиномов Бернштейна на симметричном отрезке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15. Вып. 3. — С. 288–300.

МНОГООБРАЗИЕ БЕТЕ-ДУНКЛА ВЕСА m

К.О. Политов, С.П. Хэкало (Коломна, ГСГУ)
mr.politov.k@gmail.com

Дифференциально-разностные операторы Дункла рационального типа введены в работе [1]. Они находят применение в различных разделах математики (см. обзор [2] и цитируемую там литературу).

В работе [3] введены «универсальные» операторы Дункла, связанные с гамильтонианами моделей Калоджеро. В работе [4] изучены многообразия, на которых «универсальные» операторы Дункла сохраняют свойства операторов рационального типа.

В [5] введены естественные обобщения операторов рационального типа, названные операторами Дункла-Дарбу (по аналогии с работой [6]). Там же введено и описано многообразие Бете-Дункла (веса 0), ассоциированное с операторами Дункла-Дарбу.

Пусть s_α, где $\alpha \in \mathbb{R}^n$ — отражение в $\mathbb{R}^n$

$$s_\alpha x = x - 2\frac{(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь и далее $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим также через s_α оператор отражения относительно гиперплоскости, ортогональной вектору α, заданный на функциях правилом $s_\alpha f(x) = f(s_\alpha x)$.

Пусть $\mathcal{R}$ — система корней в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}_+$ — её положительная часть; k_α — целозначная функция на $\mathcal{R}$, инвариантная относительно отражений: $k_{s_\beta \alpha} = k_\alpha, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}$; $L_k(t)$ — вещественнозначная нечетная функция на $\mathbb{R}$, зависящая от целочисленного параметра k.

Оператор Дункла-Дарбу на $\mathbb{R}^n$ имеет вид [5]

$$\nabla_\xi = \partial_\xi - \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_+} (\alpha,\xi) L_{k_\alpha}\left((\alpha,x)\right) s_\alpha,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Определение. Многообразием M^m_{BD} Бете-Дункла веса $m \in \mathbb{Z}_+$, ассоциированным с оператором Дункла-Дарбу, называется множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, таких что $\forall p = \overline{0,m}$ и $\forall (\xi_1, ..., \xi_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ имеет место равенство

$$\sum_{\substack{\alpha,\beta \in \mathcal{R}_+,\\ \alpha \neq \beta}} (\alpha,\beta) D^p_\xi \left[L_{k_\alpha}((\alpha,x)) L_{k_\beta}((\beta,x)) \right] s_\beta s_\alpha = 0,$$

где

$$D_\xi^p = \begin{cases} 1, p = 0, \\ \prod\limits_{i=1}^{p} \partial_{\xi_i}, p > 0. \end{cases}$$

Предложение. *Имеют место соотношения*

$$[\nabla_\xi, \nabla_\eta]|_{M^0_{BD}} = 0,$$

$$[\nabla_\xi, \nabla_\eta]|_{M^1_{BD}} = [\nabla_\xi, \nabla_\eta \nabla_\zeta]|_{M^1_{BD}} = 0, \ \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

Гипотеза. *Имеет место коммутационное соотношение*

$$\left[\nabla_\xi, \nabla_{\eta_1} \nabla_{\eta_2} ... \nabla_{\eta_{m+1}}\right]\big|_{M^m_{BD}} = 0.$$

Литература

1. Dunkl C.F. Differential-difference operators associated to reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc. —1989. — T. 311, № 1. — C. 167–183.

2. Берест Ю.Ю. Принцип Гюйгенса и интегрируемость / Ю.Ю. Берест, А.П. Веселов // Успехи мат. наук. 1994. — Т. 49, № 6. — С. 5–77.

3. Golubeva V. A. Heisenberg-Weyl operator algebras associated to the models of Calogero-Sutherland type and isomorphism of rational and trigonometric models / V.A. Golubeva, V.P. Leksin // J. Math. Sci. — 2000. — T. 98, № 3. — C. 291–318.

4. Мещеряков В. В. Дифференциально-разностные операторы. Свойства, приложения, обобщения / В.В. Мещеряков. — Saarbrucken, Germany : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010. — 140 с.

5. Политов К.О. Многообразия Бете и Дункла, ассоциированные с операторами Дункла-Дарбу / К.О. Политов// Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ - XXX. 2019 — Воронеж : ВГУ, 2019. — С. 70–71.

6. Хэкало С.П. Дифференциально-разностные операторы Дункла–Дарбу / С.П. Хэкало// Изв. РАН. Сер. матем. 2017. — Т. 81, № 1 — С. 161–182.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДИФФУЗИОННО–ЛОГИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

М.В. Половинкина (Воронеж, ВГУИТ)
polovinkina-marina@yandex.ru

Рассматривается краевая задача

$$\partial u_s/\partial t = \vartheta_s \Delta u_s + F_s(u), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \ t > 0,$$

$$(\mu_s u_s + \eta_s \, \partial u_s/\partial \nu)|_{x\in\partial\Omega} = 0,$$

где Ω — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и диаметром d, ν — единичный вектор нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω, $\mu_s^2 + \eta_s^2 > 0$, $\mu_s \geqslant 0$, $\eta_s \geqslant 0$, $\mu_s = const$, $\eta_s = const$, $u = (u_1(x,t), \dots, u_m(x,t))$, $\vartheta_s \geqslant 0$, $F_s(0) = 0$, $s = 1, \dots, m$, Δ — оператор Лапласа. Отрицательная определенность квадратичной формы

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} A_{sk} \, u_k u_s \,,$$

где $A_{sk} = \Theta_{sk} - \delta_{ks}\vartheta_s/d^2$, $\Theta_{sk} = (b_{sk} + b_{ks})/2$, $b_{sk} = \partial F_s(0)/\partial u_k$, $s, k = 1, \dots, m$, является достаточным условием устойчивости тривиального решения рассматриваемой задачи. Иногда этот результат улучшает условие устойчивости тривиального решения по сравнению с системой без диффузионных членов (при $\vartheta_s = 0$, $s = 1, \dots, m$).

Рассмотрим в качестве примера систему, которая в бездиффузионном варианте давно является одним из основных инструментов в математической экологии, генетике и математической теории отбора и эволюции [1]:

$$\partial u_s/\partial t = \left(\varphi_s - \sum_{j=1}^{m} \varphi_j u_j \right) u_s + \vartheta_s \Delta u_s, \ s = 1, \dots, m.$$

Условие $\varphi_s < \vartheta_s/d^2$, $s = 1, \dots, m$, достаточно для устойчивости тривиального решения этой системы. При $\vartheta_s > 0$, $s = 1, \dots, m$, то есть в случае диффузионной модели с распределенными параметрами, это условие выполнено для областей с небольшим диаметром. В случае системы с сосредоточенными параметрами при $\vartheta_s = 0$, $\varphi_s > 0$, $s = 1, \dots, m$, тривиальное решение неустойчиво.

Литература

1. Karev G.P. Replicator Equations and the Principle of Minimal Production of Information / G.P. Karev // Bulletin of Mathematical Biology. — 2010. — № 72. — P. 1124–1142.

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Н.В. Попов (Москва, МГУ, Моск. центр фунд. и прикл. матем.)
popov.niikita@gmail.com

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi; \pi]$ – тор, $L_p(\mathbb{T})$, $p \geqslant 1$ — пространство суммируемых в p-ой степени функций с нормой

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}. \tag{1}$$

Рассмотрим функционал $\| \cdot \|_p$ для $0 \leqslant p \leqslant +\infty$. При $0 < p < +\infty$ считаем, что он определён формулой (1). Для крайних p полагаем

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_C = \max_{x \in \mathbb{T}} |f(t)|,$$
$$\|f\|_0 = \lim_{p \to 0+} \|f\|_p = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(t)| \, dt \right).$$

Ниже мы будем рассматривать данный функционал на пространстве тригонометрических полиномов.

Исследуется задача о нахождении наилучшей константы $\varkappa(\alpha, n, p)$ в неравенстве

$$\|D^\alpha t_n\|_p \leqslant \varkappa(\alpha, n, p) \, \|t_n\|_p, \quad p \in [0, \infty],$$

где D^α — оператор дробно-линейного дифференцирования для $\alpha \geqslant 0$. Исследовалась величина

$$\varkappa(\alpha, n, p) = \sup_{t_n \in \tau_n, t_n \not\equiv 0} \frac{\|D^\alpha t_n\|_p}{\|t_n\|_p}.$$

Данная величина исследовалась во многих работах в более общем виде, отметим некоторые последнии работы [3] —[5].

Основные результаты

Определение. *Определим класс функций Арестова.* Будем писать $\varphi \in A$, если $\varphi \in AC[a, b], \forall [a, b] \subset (0, \infty)$, и $\varphi(s), s \cdot \varphi'(s)$ — неубывающие функции.

Рассмотрим наименьшую положительную константу $\tilde{\varkappa} = \tilde{\varkappa}(\alpha, n, \varphi)$ для которой справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|D^{\alpha} t_n(x)|)dx \leqslant \int_{\mathbb{T}} \varphi(\tilde{\varkappa} \cdot |t_n(x)|)dx.$$

Теорема. *Пусть* $\varphi \in A$, $t \in T_n$. *При* $n = 1$ *выполнено* $\tilde{\varkappa}(\alpha, 1, \varphi) = 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. *При* $n =$ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 *для любого* $\alpha \in \{1, 2, \ldots, 2n-3\} \cup [2n-2, \infty)$, $p \in [0; +\infty]$ *справедливо* $\tilde{\varkappa}(\alpha, n, \varphi) = n^{\alpha}$.

Следствие. *Пусть либо* $n = 1$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$, *либо* $n =$ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 *и* $\alpha \in \{1, 2, \ldots, 2n-3\} \cup [2n-2, \infty)$. *Тогда справедливо* $\|D^{\alpha} t_n\|_p \leqslant n^{\alpha} \|t_n\|_p$, $p \in [0, \infty]$.

Данный результат согласуется с работой [5], в которой получены следующие оценки: $\varkappa(\alpha, 2, 0) = 2^{\alpha}$, для $\alpha = \{1\} \cup [2, \infty)$ и $\varkappa(\alpha, 2, 0) > 2^{\alpha}$, для $\alpha = [0; 1) \cup (1; 2)$.

Автором ранее анонсировался результат при $n =$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 в работе [6], а также при $n =$ 1, 2, 3, 4, 5 в работе [7].

Литература

1. Арестов В. В. О неравенствах С.Н.Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов / В.В. Арестов // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 246, № 6. — С. 1289–1292.

2. Арестов В. В. Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных / В.В. Арестов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Том 45, вып. 1. — С. 3—22

3. Kozko A. I. The exact constants in the Bernstein-Zygmund-Szego inequalities with fractional derivatives and the Jackson-Nikolskii inequality for trigonometric polynomials / A. I. Kozko // East J. Approx. — 1998. — Vol. 4, №3. — P. 391–416.

4. Козко А. И. О неравенстве Арестова–Бернштейна–Сеге для тригонометрических полиномов /А.И. Козко // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. — С. 150–153.

5. Арестов В. В., Глазырина П. Ю., Неравенство Бернштейна–Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов /В.В. Арестов, П.Ю. Глазырина // Тр. ИММ УрО РАН. — 2014. — Том 20, № 1. — С. 17–31

6. Попов Н. В. О неравенстве С.Н.Бернштейна /Н.В. Попов // В сборнике: Современные проблемы теории функций и их приложения.. Материалы 19 Международной Саратовской зимней школы, посвящённой 90-летию со дня рождения академика П.Л.Ульянова. Саратов: ООО Изд-во "Научная книга". — 2018. — С. 380

7. Попов Н. В. О неравенстве для дробных производных /Н.В. Попов // В сборнике: Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа. 26 января - 1 февраля 2017. Издательский дом ВГУ, Воронеж. — 2017. — С. 168–169

МЕТОД МОМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С.С. Постнов (Москва, ИПУ РАН)

postnov.sergey@inbox.ru

В работе рассматриваются системы, задаваемые уравнением:

$$ {}_0D_t^{\sigma} q(t) = \lambda q(t) + u(t), \tag{1}$$

где $q(t)$ — состояние системы, $u(t)$ — управление, а оператор дробного дифференцирования ${}_0D_t^{\sigma}$ может пониматься как оператор Сайго ${}_0^SD_t^{\alpha,\beta,\gamma}$ [1], Гринько ${}_0^GD_t^{\alpha,\beta,\gamma}$ [2] или Прабхакара ${}_0^PD_{\rho,\omega}^{\gamma,\alpha,\nu}$ [3]. Ядра первых двух операторов содержат гипергеометрическую функцию, а ядро последнего — функцию Миттаг-Леффлера. Полагается $u(t) \in L_p(0,T)$, $p > 1$.

Как в [4] рассматривается l-проблема моментов и анализируются условия её постановки и разрешимости.

Теорема 1. *l-проблема моментов для системы (1), может быть поставлена и является разрешимой при выполнении условия: $\alpha > 1/p$.*

В случаях, когда справедлива теорема 1 решение l-проблемы моментов строится аналитически.

Литература

1. Dutta B.K. On the existence and uniqueness of solutions of a class of initial value problems of fractional order / B.K. Dutta, L.K. Arora // Math. Sci. — 2013. — Vol. 7, Paper 17 (12 pages).

2. Гринько А.П. Операторы дробного интегродифференцирования с гипергеометрической функцией Куммера в ядре /

А.П. Гринько // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2011. — Т. 19, № 1. —С. 22–31.

3. Garra R. Hilfer–Prabhakar derivatives and some applications / R. Garra, R. Gorenflo, F. Polito, Z. Tomovski // Appl. Math. Comput. — 2014. — Vol. 242. — P. 576–589.

4. Постнов С.С. Задачи оптимального управления для систем, моделируемых уравнениями дробного порядка с многопараметрическими производными / С.С. Постнов // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов : ООО изд-во «Научная книга», 2020. — С. 335–339.

ОЦЕНКИ ЭНЕРГИИ ГРИНА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Е.Г. Прилепкина (Владивосток, ИПМ ДВО РАН)
pril-elena@yandex.ru

Задачам оптимизации различных видов энергий дискретного заряда посвящено большое количество работ (см., например, библиографию в [1]). В настоящем докладе мы обсуждаем точные оценки энергии Грина дискретного заряда точек, расположенных на некоторых окружностях, относительно области вращения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$. Пусть область $B \subset \mathbb{R}^d$ имеет функцию Грина $g_B(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ для оператора Лапласа, исчезающую на границе области и с полюсом в точке $\mathbf{x}_0 \in B$. Далее, пусть $X = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^n$— множество различных точек B, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$— произвольный дискретный заряд (набор вещественных чисел), имеющий значения δ_k в точках $\mathbf{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Энергия Грина данного заряда относительно области B определяется как $E(X, \Delta, B) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \delta_k \delta_l g_B(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)$. В отличие от предшествующих работ мы изучаем заряды как одного, так и разных знаков. Нами установлено, что при определенном выборе заряда симметричная конфигурация точек может давать как максимум, так и минимум энергии Грина. Предельные случаи приводят к некоторым неравенствам для $(d-2)$– энергии Рисса. В доказательствах используются диссимметризация, метод экстремальных метрик и асимптотические формулы емкости вырождаю-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00018).

щегося конденсатора. Доклад основан на результатах совместной работы автора с В.Н. Дубининым [2].

Литература

1. Dubinin V. N. Green energy and extremal decompositions / V.N. Dubinin // Пробл. анал. Issues Anal. — 2019. — Т. 8, № 3. — С. 38—44.

2. Dubinin V. N., Prilepkina E. G. Optimal Green energy points on the circles in d-space / V.N. Dubinin, E.G. Prilepkina // https://arxiv.org/abs/2003.12750. — 2020.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА В (B)–ПРОСТРАНСТВАХ

А.И. Прилепко (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
prilepko.ai@yandex.ru

Исследованы задача наблюдения как задача для операторного уравнения первого рода в (B)–пространстве и сопряженная к ней задача управления. Эти задачи рассматриваются в вещественных рефлексивных и строго выпуклых (B)–пространствах. В задаче наблюдения требуется получить оценку снизу для оператора или обратное неравенство наблюдаемости [1]. В задаче управления при заданной ненулевой правой части требуется найти решение (или управление). Минимальное по норме управление называется оптимальным управлением. Для исследования указанных задач предложен BUME метод и метод нелинейных монотонных отображений; получен принцип максимума [2].

Основной результат: обратное неравенство наблюдаемости эквивалентно существованию и единственности решения специальной обратной задачи управления, что эквивалентно существованию единственного оптимального управления с оценкой.

В качестве примера указанные выше задачи рассматриваются для уравнений математической физики и обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$.

Литература

1. Lions J.-L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed parameter systems / J.L. Lions // SIAM Rev. — 1988. — V. 30. — P. 1–64.

2. Прилепко А.И. Задачи управления и наблюдения в банаховых пространствах. Оптимальное управление и принцип максимума. Применение для ОДУ в $\mathbb{R}^n$ / А.И. Прилепко // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 12. — С. 1683–1692.

ВТОРАЯ СТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ СМО С ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА

Д.Б. Прокопьева, Р.П. Шепелева, Н.И. Головко (Владивосток, ДВФУ)
prokopievad@yandex.ru, shepeleva.rp@dvfu.ru, golovko.ni@dvfu.ru

Построение моделей систем массового обслуживания (СМО) и расчет их эффективности является актуальной задачей. Статистический анализ потоков заявок, поступающих на web-серверы, показывает диффузионный характер изменения интенсивности входного пуассоновского потока [1]. В данной работе исследуется система массового обслуживания с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором и экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток, интенсивность которого λ изменяется на промежутке $[\alpha, \beta]$ и представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$, коэффициентом диффузии b и упругими границами α, β.

Обозначим через $\hat{\lambda}$ интенсивность входного потока в стационарном режиме. Пусть $q_k(x)dx = \mathsf{P}\{\hat{\nu} = k, x \leqslant \hat{\lambda} < x + dx\}$, где $q_k(x)$ — стационарные характеристики числа заявок, $\hat{\nu}$ — число заявок в СМО в стационарном режиме, $k \geqslant 0$; $f(x)dx = \mathsf{P}\{x \leqslant \hat{\lambda} < x + dx\}$, $f(x)$ — стационарная плотность интенсивности входного потока, $x \in [\alpha, \beta]$. Интегралы $\int_\alpha^\beta q_k(x)dx = p_k$, $k \geqslant 0$, представляют собой стационарное распределение числа заявок. Функции $f(x)$, $q_k(x)$ рассматриваем в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^2[\alpha, \beta]$.

В [2] показано, что функции $q_k(x), k \geqslant 0$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, которую назовем первой моделью стационарной СМО:

$$-xq_0(x) + \mu q_1(x) + \frac{b}{2} q_0''(x) = 0, \tag{1}$$

$$xq_{k-1}(x) - (x+\mu)\, q_k(x) + \mu q_{k+1}(x) + \frac{b}{2} q_k''(x) = 0,\ k \geqslant 1, \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$q_k'(\alpha) = 0, \quad q_k'(\beta) = 0, \quad k \geqslant 0, \tag{3}$$

и условием нормировки $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k(x) = f(x)$. Обозначим новые неизвестные функции через $g_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} q_k(x)$, $n \geqslant 0$. В результате ∞-го числа раз суммирования уравнений в (2), (3) по k, где $n+1 \leqslant k \leqslant \infty$, каждый раз при фиксированном параметре $n \geqslant 0$, получим вторую модель стационарной СМО относительно $g_n(x)$:

$$-xg_0(x) + \mu g_1(x) + \frac{b}{2} g_0''(x) = \mu g_0 - xf(x), \quad \alpha < x < \beta, n = 0, \tag{4}$$

$$xg_{n-1}(x) - (x+\mu)\, g_n(x) + \mu g_{n+1}(x) + \frac{b}{2} g_n''(x) = 0,\ n \geqslant 1, \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$g_n'(x_i) = 0, \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, n \geqslant 0. \tag{6}$$

Введем производящую функцию

$$F(x,z) = \sum_{n \geqslant 0} g_n(x) z^n, |z| \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из уравнений (4) – (6) следуют теоремы.

Теорема 1. *Производящая функция $F(x,z)$ удовлетворяет следующей краевой задаче*

$$F(x,z)\left[xz^2 - (x+\mu)z + \mu\right] + \frac{b}{2} z F_{xx}''(x,z) = \mu g_0(x) - xzf(x)$$

с краевыми условиями $F_x'(\alpha,z) = 0$, $F_x'(\beta,z) = 0$.

Обозначим $\bar{\lambda} = \int_\alpha^\beta xf(x)dx$ – среднее значение интенсивности входного потока в стационарном режиме.

Теорема 2. *Условие $\bar{\lambda} < \mu$ является необходимым условием существования решения второй модели стационарной СМО и неотрицательности характеристик $g_n(x), n \geqslant 0$.*

Литература

1. Головко, Н. И. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / Н. И. Головко, В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2008. — Т. XI, № 2 (34). — С. 50–64.

2. Прокопьева, Д.Б. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Известия КГТУ. — 2017. — № 46. — С. 184–193.

О ПОСТРОЕНИИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

К.А. Раецкий (Воронеж, ВГУ)

kraetsky@mail.ru

Рассматривается динамическая система

$$\dot{x}(t) = Bx(t) + Du(t), \tag{1}$$

где $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $D : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, t_k]$, $x(t)$ — вектор-функция состояния динамической системы, $u(t)$ — управляющая вектор-функция.

Управление в виде обратной связи — это зависимость $u(t) = Kx(t), \quad K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Вопрос управления динамической системой обратной связью — один из важнейших вопросов управления динамической системой.

Особое место в решении таких задач занимают результаты Ижевской математической школы под руководством проф. Тонкова Е.Л. В частности, учениками этой школы доказано существование такой обратной связи, что матрица $B + DK$ имеет любые наперед заданные собственные числа. Это так называемое управление назначенным спектром. Решение задач управления назначенным спектром актуально, например, при решении задач стабилизации движения, в том случае, когда разность между реальным состоянием системы и программным состоянием должна стремиться с течением времени к нулю. В этом случае спектр матрицы $B + DK$ для системы, составленной для разности состояний, должен лежать в левой половине комплексной плоскости.

Как правило, задачи управления обратной связью решаются приближенными методами.

В докладе будет описан метод построения матрицы K такой,что матрица $B + DK$ обладает заданными свойствами.

Литература

1. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели / П. Д. Крутько. — М. : Наука, 1987. — 304 с.

2. Раецкий К. А Об одном методе моделирования движения линейной стационарной динамической системы /К. А. Раецкий // Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции ВВМШ «Понтрягинские чтения — XXX» (3–9 мая 2019 г.)— Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 236–237.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДАЕМЫХ ВОЛЬТЕРРОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИМИ[1]

Н.А. Раутиан (Москва, МГУ имени М.В.Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики)
nadezhda.rautian@math.msu.ru

Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения. Приводится метод сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. При определенных предположениях о ядрах интегральных операторов доказывается существование сжимающей и экспоненциально устойчивой полугруппы.

На основе полученных результатов установлена корректная разрешимость исходной начальной задачи для вольтеррова интегро-дифференциального уравнения, с соответсвующими оценками решения. Приводятся примеры применения полученных результатов к интегро-дифференциальным уравнениям с ядрами интегральных операторов, представимых суммами убывающих экспонент или дробно-экспоненциальных функций (функций Работнова) с положительными коэффициентами. (см. [1]–[4]).

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

Литература

1. Власов В.В., Раутиан Н.А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений / В.В. Власов, Н.А. Раутиан. — М.: МАКС Пресс, 2016. —488 с.

2. Vlasov V.V., Rautian N.A. A Study of Operator Models Arising in Problems of Hereditary Mechanics / V.V. Vlasov, N.A. Rautian // Journal of Mathematical Sciences (N. Y.). —2020. — V. 244, № 2. — P. 170–182.

3. Власов В.В., Раутиан Н.А. О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями / В.В. Власов, Н.А. Раутиан // Дифференциальные уравнения. — 2020. —Т. 56, № 8. —С. 1122–1126.

4. Раутиан Н.А. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями /Н.А. Раутиан // Дифференциальные уравнения. —2020. —Т.56, № 9. —С. 1226–1244.

О ПРОИЗВЕДЕНИИ $l_{s,r}$-ЯДЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

О.И. Рейнов (Санкт-Петербург, СПГУ)
orein51@mail.ru

Оператор $T : X \to Y$ в банаховых пространствах называется $l_{s,r}$-*ядерным* ($0 < s < 1, 0 < r \leqslant \infty$ или $s = 1, 0 < r \leqslant 1$), если он представим в виде $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x'_n, x\rangle y_n$ для $x \in X$, где $(x'_k) \subset X^*, (y_k) \subset Y$, $||x'_n||, ||y_n|| \leqslant 1, (a_n) \in l_{s,r}$, где $l_{s,r}$ — пространство Лоренца. Мы используем обозначение $N_{s,r}(X, Y)$ для линейного пространства всех таких операторов и $\nu_{s,r}(T)$ для соответствующей квазинормы $\inf ||(a_n)||_{l_{s,r}}$.

Результаты, приводимые ниже, возникли благодаря следующему вопросу Б.С. Митягина (ср. [1]): верно ли, что произведение двух ядерных операторов в банаховых пространствах факторизуется через ядерный оператор в гильбертовом пространстве? Как установлено в [1], ответ отрицателен. Ниже мы рассматриваем аналогичный вопрос для произведений нескольких $l_{s,r}$-ядерных операторов, приводим *точный* результат для этих случаев и формулируем одно важное применение в теории распределений собственных чисел ядерных операторов.

Ниже через $S_{p,q}$ обозначается класс операторов фон Неймана-Шаттена в гильбертовом пространстве, сингулярные числа которых лежат в пространстве Лоренца $l_{p,q}$.

Оператор $T : X \to Y$ *факторизуется через оператор* из $S_{p,q}$ (*через $S_{p,q}$-оператор*), если существуют гильбертово пространство H и такие операторы $A \in L(X,H)$, $U \in S_{p,q}(H)$ и $B \in L(H,Y)$, что $T = BUA$. В этом случае мы полагаем $\gamma_{S_{p,q}}(T) = \inf ||A||\, \sigma_p(U)\, ||B||$, где инфимум берется по всем возможным факторизациям оператора T через оператор из $S_{p,q}$.

Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Если $X_1, X_2, \dots, X_{m+1}$ — банаховы пространства, $0 < r_k \leqslant s_k \leqslant 1$ и $T_k \in N_{s_k,r_k}(X_k, X_{k+1})$ для $k = 1, 2, \dots, m$, то произведение $T := T_m T_{m-1} \cdots T_1$ факторизуется через оператор из $S_{s,r}$, где $1/s = 1/s_1 + 1/s_2 + \cdots + 1/s_m - (m+1)/2$ и $1/r = 1/r_1 + 1/r_2 + \cdots + 1/r_m - (m+1)/2$. Более того, $\gamma_{S_{s,r}}(T) \leqslant \prod_{k=1}^{m} \nu_{s_k,r_k}(T_k)$.*

Теорема 2. *Утверждение теоремы 1 точно для любого количества операторов и для любого набора чисел $0 < r_k \leqslant s_k \leqslant 1$.*

В качестве следствия этих теорем приведем результат о распределении собственных чисел ядерных операторов в одном важном случае.

Теорема 3. *В условиях теоремы 1, пусть $\lambda := (\lambda_k(T))$ есть последовательность всех собственых чисел оператора T, взятых с учетом кратностей. Если $s_k = r_k, k = 1, 2, \dots, m$, то $\lambda \in l_q$, где $1/q = 1/r_1 + 1/r_2 + \cdots + 1/r_m - m/2$, причем $(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^q)^{1/q} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \nu_{r_k}(T_k)$. Это утверждение точно для любого количества операторов и для любого набора чисел $0 < r_k = s_k \leqslant 1$.*

Теоремы 1 и 2 для случая r-ядерных операторов (т.е. для $s_k = r_k$ при всех k) были впервые установлены в [2]. Терема 3 для случая $m = 1$ была получена в [3].

Литература

1. Рейнов О.И. О произведении ядерных операторов / О.И. Рейнов // Функц. анализ и его прил. — 2017. — Т. 51, № 4. — С. 90–91.

2. Рейнов О.И. О произведении s-ядерных операторов / О.И. Рейнов // Матем. заметки — 2020. — Т. 107, № 2. — С. 311–316.

3. Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires / A. Grothendieck. — Mem. Amer. Math. Soc., 1955.

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ lcACs-СТРУКТУР

А.Р. Рустанов, С.В. Харитонова (Москва, ИФО НИУ МГСУ; Оренбург, ОГУ)
aligadzhi@yandex.ru; hcb@yandex.ru

Почти контактная метрическая структура на многообразии называется локально конформно почти косимплектической (lcACs) структурой, если сужение данной структуры на некоторую окрестность произвольной точки этого многообразия допускает конформное преобразорвание в почти косимплектическую структуру [1].

Тензор Нейнхейса структурного эндоморфизма Φ почти контактного метричского многообразия для любых векторных полей X, Y имеет вид [2]

$$N_\Phi = \frac{1}{4}\left([\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X,Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]\right).$$

Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N_\Phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$ [2].

Почти контактная метрическая структура является интегрируемой тогда и только тогда, когда $N_\Phi = 0$ [3].

Задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров:

$$N^{(1))}(X,Y) = N_\Phi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi,$$
$$N^{(2)}(X,Y) = (\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) - (\mathcal{L}_{\Phi Y}\eta)(X),$$
$$N^{(3)}(X) = (\mathcal{L}_\xi\Phi)(X),\ N^{(4)}(X) = (\mathcal{L}_\xi\eta)(X),\ \forall X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

где $\mathcal{L}_X Y$ — оператор дифференцирования Ли.

Обозначим H — почти эрмитову структуру, индуцируемую на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения lcACs-структуры S.

Теорема 1. *Для lcACs-многообразий справедливы следующие утверждения:*

1) S — интегрируема, тогда H — структура класса W_4;

2) S — нормальна, тогда H — келерова структура;

3) $N^{(2)} = 0$ на S, тогда H — почти келерова структура;

4) $N^{(3)} = 0$ на S, тогда H — структура $W_2 \oplus W_4$;

5) $N^{(4)} = 0$ на S, тогда H — почти келерова структура.

Теорема 2. *Если на lcACs-структуре* $N^{(2)} = 0$, *то конформное преобразование является тривиальным.*

Теорема 3. *lcACs-структура является вполне интегрируемой, если* $N^{(4)} = 0$.

Литература

1. Vaisman I. Conformal changes of almost contact metric manifolds / I. Vaisman //Lecture Notes in Math. —1980. —V. 792. — P.435–443.

2. Goldberg S. Integrability of almost cosymplectic structures / S. Goldberg, K. Yano // Pasific J. Math. — 1969. — V. 31, № 2. — P. 373–382.

3. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное / В.Ф. Кириченко. — Одесса: Печатный дом, 2013. —458 с.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ НЕРЕГУЛЯРНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)
RykhlovVS@yandex.ru

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ краевую задачу для пучка $L(\lambda)$ обыкновенных дифференциальных операторов 2-го порядка

$$\ell(y,\lambda) := y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0, \tag{2}$$

где $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$.

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического многочлена пучка и пусть выполняются условия

$$0 < \omega_1 < \omega_2, \quad 2\omega_1 < \omega_2. \tag{3}$$

Решается задача нахождения условий, при которых имеет место двукратная разложимость по собственным функциям этого пучка при условии его нерегулярности по Биркгофу (см. [1,2]). Аналогичные задачи рассматривалась в [3,4], но при других краевых условиях.

Обозначим для краткости $\tau = \omega_2/\omega_1$, $\alpha_x = 1-(1-x)/\tau$, $\beta_x = \tau x$, $\gamma_x = x + 1 - 1/\tau$, $\tilde{\alpha}_x = 1 - \tau(1 - x)$, $\tilde{\beta}_x = x/\tau$, $\tilde{\gamma}_x = x - 1 + 1/\tau$, $\theta = 1/(\omega_2 - \omega_1)$, $d_x = d/dx$.

Характеристический определитель пучка имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2\bigl(-e^{\lambda\omega_1} + e^{\lambda\omega_2}\bigr), \tag{4}$$

то есть пучок является сильно нерегулярным и, как известно [5], система собственных функций (с.ф.) этого пучка не является двукратно полной в $L_2[0, 1]$.

Из (4) следует, что уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней $\lambda_k = (2k\pi i)/(\omega_2 - \omega_1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Обозначим $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ не является с.з..

Из формул для с.з. следует, что в комплексной плоскости существуют кусочно круговые контуры Γ_ν, отстоящие от чисел λ_k на расстояние не меньше некоторого фиксированного числа $\delta > 0$ и между соседними контурами лежит ровно одно число λ_k.

Линеаризуем задачу (1)–(2) точно так же, как и в [2], положив $z_0 = y$, $z_1 = \lambda z_0$. Тогда получим задачу уже для линейного оператора $\hat{L}$, но в пространстве вектор-функций (в.-ф.) для $z = (z_0, z_1)^T$: $\hat{L}z = \lambda z$, где

$$\hat{L}z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2}d_x \end{pmatrix} z,$$

$$D_{\hat{L}} = \left\{ \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \middle| z_0', z_1 \in L_1[0, 1],\ z_0(0) = 0,\ z_0(1) = 0 \right\}.$$

Очевидно, с.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора $\hat{L}$ совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ (см. [1, с. 102]) совпадает с системой собственных в.-ф. оператора $\hat{L}$.

Хорошо известно, что $\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f\, d\lambda$, где $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda\hat{E})^{-1}$, есть частичная сумма разложений в.-ф. $f := (f_0, f_1)^T$ в биортогональный ряд Фурье по собственным в.-ф. оператора $\hat{L}$, соответствующим с.з., которые попали внутрь контура Γ_ν. Пусть $\bigl(\hat{L} - \lambda\hat{E}\bigr)^{-1} f = \bigl(z_0(x, \lambda; f), z_1(x, \lambda; f)\bigr)^T$ и $I_{i\nu}(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} z_i(x, \lambda; f)\, d\lambda$, $i = 0, 1$.

Пусть $F_1(x) := \int_0^x f_1(t)\, dt$. Обозначим

$$H_1(x, F_1) := -2F_1(x) + F_1(\alpha_x) + F_1(\beta_x) - F_1(\gamma_x) + \\ + F_1(\tilde{\alpha}_x) + F_1(\tilde{\beta}_x) - F_1(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_2(x,f_0) := 2\omega_1 f_0(x) - \omega_2 f_0(\alpha_x) - \omega_1 f_0(\beta_x) + \omega_2 f_0(\gamma_x) - \\ - \omega_1 f_0(\tilde{\alpha}_x) - \omega_2 f_0(\tilde{\beta}_x) + \omega_2 f_0(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_3(x,f_1) := -\frac{2}{\omega_1} f_1(x) + \frac{1}{\omega_2} f_1(\alpha_x) + \frac{1}{\omega_1} f_1(\beta_x) - \frac{1}{\omega_2} f_1(\gamma_x) + \\ + \frac{1}{\omega_1} f_1(\tilde{\alpha}_x) + \frac{1}{\omega_2} f_1(\tilde{\beta}_x) - \frac{1}{\omega_2} f_1(\tilde{\gamma}_x),$$

$$H_4(x,f_0') := 2f_0'(x) - f_0'(\alpha_x) - f_0'(\beta_x) + f_0'(\gamma_x) - \\ - f_0'(\tilde{\alpha}_x) - f_0'(\tilde{\beta}_x) + f_0'(\tilde{\gamma}_x).$$

Теорема 1. *Если $f_0'', f_1' \in L_p[0,1]$, $p > 1$, выполняются условия (3) и $f_0(0) = f_0(1) = f_0'(0) = f_0'(1) = f_1(0) = f_1(1) = F(1) = 0$, то*

$$I_{0\nu}(x) = f_0(x) + p_2\theta H_1(x,F_1) + \theta H_2(x,f_0) + o(1) \text{ при } \nu \to \infty, \quad (5)$$

$$I_{1\nu}(x) = f_1(x) + p_2\theta H_3(x,f_1) + \theta H_4(x,f_0') + o(1) \text{ при } \nu \to \infty, \quad (6)$$

где $o(1) \rightrightarrows 0$ по $x \in [0,1]$. Функции, входящие в H_j в (5)–(6), считаются продолженными нулем, если их аргументы выходят за отрезок $[0,1]$.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Для того, чтобы имели место формулы*

$$I_{0\nu}(x) = f_0(x) + o(1), \qquad I_{1\nu}(x) = f_1(x) + o(1)$$

при $\nu \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы функции f_0, f_1 удовлетворяли системе уравнений:

$$\begin{cases} p_2 H_1(x,F_1) + \theta H_2(x,f_0) = 0, \\ p_2 H_3(x,f_1) + \theta H_2(x,f_0') = 0. \end{cases}$$

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

2. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях / А.А. Шкаликов // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. — М.: Изд-во Моск. ун-та. — 1983. — Т. 9. — С. 190–229.

3. Рыхлов В.С. Разложение по собственным функциям нерегулярного пучка дифференциальных операторов второго порядка с распадающимися краевыми условиями / В.С. Рыхлов // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019 — С. 240–242.

4. Рыхлов В.С. Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка /В.С.Рыхлов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, Вып. 1, Ч. 1. — С. 21–26.

5. Рыхлов В.С. О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов / В.С. Рыхлов // Известия вузов. Математика. — 1992. — № 3. — С. 35-44.

НЕКОММУТАТИВНАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, АССОЦИИРОВАННАЯ С МЕТАПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППОЙ[1]

А.Ю. Савин (Москва, РУДН)
antonsavin@mail.ru

Метаплектическая группа это двулистное накрытие симплектической группы. Она играет важную роль во многих областях математики и физики, см., например, [1]. В частности, она возникает при квантовании симплектической группы, т.е. когда мы симплектическим $2n \times 2n$ матрицам сопоставляем унитарные операторы в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n)$.

В данной работе определяется представление унитарной группы $U(n)$ метаплектическими операторами, действующими в $L^2(\mathbb{R}^n)$, и рассматривается операторная алгебра, порожденная операторами представления и псевдодифференциальными операторами из класса Шубина. Отметим, что наш класс метаплектических операторов порождается операторами сдвига, отвечающими ортогональным преобразования в $\mathbb{R}^n$, и дробными преобразованиями Фурье.

При некоторых условиях доказывается фредгольмовость элементов из этой алгебры и предъявляется формула индекса. Отметим, что алгебра символов таких операторов является сильно некоммутативной. Поэтому для получения формул индекса исполь-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00574).

зуются методы некоммутативной геометрии А. Конна. Доказательство теоремы об индексе основано на периодичности Ботта для подгрупп унитарной группы. Результаты получены в совместной работе с проф. Э.Шроэ (Ганновер, ФРГ).

Литература

1. Лере Ж. Лагранжев анализ и квантовая механика. Математическая структура, связанная с асимптотическими разложениями и индексом Маслова / Ж. Лере. — М. : Мир, 1981. — 260 с.

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА СОБОЛЕВА[1]

А.Ю. Савин, Е.Н. Семенова (Москва, РУДН)
antonsavin@mail.ru, semenova54380@gmail.com

Задачи Соболева – это граничные задачи, в которых условия ставятся на помногообразии произвольной размерности (см. [1], [2]). В докладе рассматривается задача Соболева вида

$$\begin{cases} Au = \lambda u, & \text{на } M \setminus X, \\ u = 0, & \text{на } X, \end{cases} \tag{1}$$

где $X \subset M$ — гладкое замкнутое подмногообразие в гладком замкнутом многообразии M, A — эллиптический дифференциальный симметрический оператор на M, λ — спектральный параметр. При этом первое уравнение выполняется вне подмногообразия, а второе уравнение выполняется на подмногообразии. Задачи такого типа возникают, например, при исследовании колебаний пластин, стержней и др. В этих случаях в качестве оператора A выступает квадрат оператора Лапласа.

Для ряда модельных примеров задач (1) мы реализуем задачу как симметрический неограниченный оператор, находим его сопряженный оператор, вычисляем индексы дефекта, указываем самосопряженное расширение, вычисляем асимптотику спектра.

Литература

1.Соболев С.Л., Об одной краевой задаче для полигармонического уравнения, // Матем. сб. — 1937. — Т. 2(44), № 3 — С. 465–499

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00574).

2. Стернин Б.Ю., Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности, // Тр. ММО. — 1966. — том 15. — С. 346–382

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА

Е.Х. Садекова (Москва, НИЯУ МИФИ)
EKSadekova@mephi.ru

При исследовании приближений ограниченных функций рациональными функциями в метрике Хаусдорфа можно использовать оценки для наилучшего равномерного приближения.

Фиксируем $r \in \mathbb{N}$ и отрезок $\Delta = [a, b]$. Пусть функция $f(x)$ определена на Δ и имеет на нем абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}(x)$ порядка $(r-1)$, а ее производная порядка r имеет ограниченную вариацию на Δ, т. е. $\operatorname*{Var}_{\Delta} f^{(r)} < \infty$.

Через R_n обозначим множество всех рациональных функций порядка $\leqslant n$, т. е. $t \in R_n$, если

$$t(x) = \frac{c_m x^m + ... + c_0}{d_k x^k + ... + d_0}, \qquad m \leqslant n,\ k \leqslant n.$$

Далее $R_n(f, \Delta)$ обозначает наименьшее уклонение функции $f(x)$ от рациональных функций $t \in R_n$ в смысле равномерной метрики на отрезке Δ. Именно,

$$R_n(f, \Delta) = \inf_{t \in R_n} \|f - t\|,$$

где $\|f - t\| = \sup\limits_{x \in \Delta} |f(x) - t(x)|$. Аналогичное наименьшее уклонение в смысле хаусдорфовой метрики для ограниченной функции обозначим символом $HR_n(f, \Delta)$.

Как показано в работах В. А. Попова [1], П. П. Петрушева [2], существует такая константа $D \geqslant 1$, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4r$, справедлива оценка

$$R_n(f, \Delta) \leqslant \frac{(D\,|\Delta|)^r}{n^{r+1}} \operatorname*{Var}_{\Delta} f^{(r)}, \tag{1}$$

где $|\Delta| = b - a$.

В работе Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова [3] введено понятие среднего модуля колебания

$$\Omega(f,\,\Delta;\,\delta) = \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{\Delta} \Omega\Big(f,\,(x-\delta/2,\,x+\delta/2)\cap\Delta\Big)\,dx, \quad \delta > 0,$$

где $\Omega(f,E) = \sup\limits_{x\in E} f(x) - \inf\limits_{x\in E} f(x)$. В терминах среднего модуля колебания П. П. Петрушевым [2] для хаусдорфова уклонения была доказана оценка

$$HR_n(f,\Delta_1) \leqslant \frac{(32eD)^2}{n}\ln\left(e + n\,\Omega\left(f,\Delta_1;\,\frac{1}{n}\right)\right), \qquad (2)$$

где $\Delta_1 = [0,1]$ и D — постоянная из формулы (1).

Основной результат нашей работы получен для любой ограниченной функции, на произвольном отрезке Δ и при всех натуральных значениях n. Он имеет следующий вид

$$HR_n(f,\Delta) \leqslant \frac{9eD\,|\Delta|}{n}\,\ln\left(e + \frac{n}{|\Delta|}\,\Omega\left(f,\Delta;\,\frac{|\Delta|}{n}\right)\right). \qquad (3)$$

Отметим, что при $\Delta = \Delta_1$ оценка (3) совпадает по порядку с оценкой (2), существенно улучшая последнюю с точки зрения выбора константы.

Литература

1. Popov V.A. Uniform rational approximation of the class and its applications / V.A. Popov // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1977. — T. 29, № 1-2. — P. 119–129.

2. Петрушев П.П. Наилучшие рациональные приближения в хаусдорфовой метрике / П.П. Петрушев // Сердика Българско математическо списание. — 1980. — Т. 6 — С. 29–41.

3. Долженко Е.П. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно монотонных (в частности, рациональных) функций / Е.П. Долженко, Е.А. Севастьянов // Матем. сб. — 1976. — Т. 101, № 4. — С. 508–541.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГУРСА[1]

Г.К. Соколова, С.С. Орлов (Иркутск, ИГУ)
98gal@mail.ru, orlov_ sergey@inbox.ru

В данной работе анализ периодичноских функций нескольких действительных переменных применяется к исследованию задачи

$$\partial_{x_1\ldots x_n} u(\bar r) = f(\bar r);\ \ u(\bar r)\big|_{x_i=0} = a_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n), \quad (1)$$

где $\bar r \in \mathbb{R}^n_+$ и $i = 1, 2, \ldots, n$. При $n = 2$ эта задача становится задачей с данными на характеристиках или задачей Гурса для простейшего уравнения гиперболического типа [1]. Решением задачи (1) назовем функцию $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, которая имеет непрерывную по совокупности переменных смешанную частную производную $\partial_{x_1\ldots x_n}$, обращает в тождество рассматриваемое уравнение и удовлетворяет условиям, заданным на координатных гиперплоскостях.

Функции $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ и $\partial_{x_1\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_n} a_i : \mathbb{R}^{n-1}_+ \to \mathbb{R}$ являются непрерывными по совокупности переменных за необходимостью. В этих предположениях и при выполнении условий $a_i|_{x_j=0} = a_j|_{x_i=0}$ сопряжения, задача (1) имеет единственное решение вида

$$u(\bar r) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \sum_{i=1}^{n-k} \sum_{i+1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} a_i\big|_{x_{i_1}=0,\ldots,x_{i_k}=0} + \\ + \int\limits_{P_{J_n}} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)\,dt_1 dt_2\ldots dt_1.$$

Здесь обозначено $a_i = a_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ для краткости записи. Эта формула получена интегрированием уравнения (1) по параллелепипеду $P = [0, x_1] \times \ldots \times [0, x_n]$.

В докладе планируется изложить результаты изучения вопроса существования периодических решений многомерной задачи типа Гурса (1) и построения множеств их периодов.

Литература

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Изд-во МГУ, 1999. — 798 с.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Иркутской области (проект № 20-41-385002 р_Наставник).

К ПРИБЛИЖЕННОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ ОДНОГО ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ГИЛЬБЕРТА

Ю.С. Солиев (Москва, МАДИ)
su1951@mail.ru

Рассмотрим интеграл

$$Af = A(f;x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(t) ctg^2 \frac{t-x}{2} dt, \qquad (1)$$

понимаемый в смысле конечной части по Адамару, где $f = f(x)$-2π-периодическая плотность интеграла.

Пусть $H_\alpha^{(r)}(M)$ $(r = 1, 2, ..., 0 < \alpha \leqslant 1)$-класс 2π-периодических функций $f(x)$, r-ые производные которых удовлетворяют условию Гельдера H_α с константой M.

Следуя [1], для $f(x) \in H_\alpha^{(r)}(M)$ положим

$$P_N f = P_N(f;x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(1 - \lambda_{k,\nu}^{(n)}\right)^{l+1}\right) \left(a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\right),$$

где $a_k^{(n)} = \frac{2}{N} \sum\limits_{j=1}^{N} f(x_j) \cos kx_j$,

$$b_k^{(n)} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \sin kx_j, \quad k = \overline{0, n-1,}$$

$$a_n^{(n)} = \left[\frac{N-1}{n}\right] \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \cos nx_j, b_n^{(n)} =$$

$$= \left[\frac{N-1}{n}\right] \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \sin nx_j,$$

$$x_k = x_k^{(N)} = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = \overline{1, N}, \ n = \left[\frac{N}{2}\right], \ N = 1, 2, ..., \ l = \left[\frac{r}{2}\right],$$

$[\sigma]$ —целая часть σ, $\nu = \overline{1,4}$, $\lambda_{k,1}^{(n)} = 1$; $\lambda_{k,2}^{(n)} = \cos\dfrac{k\pi}{N}$; $\lambda_{k,3}^{(n)} = \dfrac{k\pi}{2n+2} ctg \dfrac{k\pi}{2n+2}$; $\lambda_{k,4}^{(n)} = \dfrac{n-k+1}{n+2}\cos\dfrac{k\pi}{n+2} + \dfrac{\sin\frac{k+1}{n+2}\pi}{(n+2)\sin\frac{\pi}{n+2}}$, $k = \overline{1,n}$.

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом $P_N f = P_N(f;x)$ получим квадратурную формулу

$$Af = A(P_n f; x) + R_{n,\nu} f = -\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N} f\left(x_k\right) -$$

$$-\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(x_k\right) \sum_{j=1}^{n}{}' j\left(1-\left(1-\lambda_{j,\nu}^{(n)}\right)^{l+1}\right)\cos j\left(x-x_k\right) + R_{n,\nu} f, \quad (2)$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое, соответствующее значению $j = n$ при $N = 2n$ следует разделить на 2, а $R_{n,\nu} f$—остаточный член. С помощью результатов работ [1], [2] доказывается

Теорема. *Пусть* $f\left(x\right) \in H_\alpha^{(r)}\left(M\right)$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ r \geqslant 1)$. *Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (2) справедлива оценка*

$$\left\|R_{n,\nu} f\right\|_C = O\left(\frac{\ln N}{N^{r+\alpha-1}}\right), \quad N \geqslant 2,\ r \geqslant 1,\ \nu = \overline{1,4}.$$

Замечание. Аналогично [3] можно рассмотреть квадратурные формулы с кратными узлами.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б.Г. Габдулхаев. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1980. — 232 с.

2. Габдулхаев Б.Г. Аппроксимация в H-пространствах и приложения / Б.Г.Габдулхаев // ДАН СССР. – 1975. — т.223, №6. – С. 1293–1296.

3. Солиев Ю.С. Квадратурные формулы с кратными узлами для гиперсингулярного интеграла Гильберта / Ю.С. Солиев // Труды математического центра им. Н.И.Лобачевского. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы XIII-й междунар. школы-конференции. Казань: Казан. ун-т – 2017. – т. 54 – С.334–336.

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНО-ОПРЕДЕЛЁННОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА[1]

П.С. Соловьёв, К.О. Левинская, С.И. Соловьёв (Казань, КФУ)

pavel.solovev.kpfu@mail.ru

Изучается неотрицательно-определённая вариационная задача на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра в гильбертовом пространстве. Установлено существование собственных значений и соответствующих собственных элементов. Для этого вводится вспомогательная линейная параметрическая задача на собственные значения с фиксированным спектральным параметров в аргументах билинейных форм исходной нелинейной спектральной задачи. Эта задача имеет неубывающую последовательность положительных конечно-кратных собственных значений с предельной точкой на бесконечности. Последовательности собственных значений соответствует ортонормированная система собственных элементов. Изучаются свойства собственных значений и собственных функций параметрической задачи при изменении величины параметра. Задача вычисления собственного значения исходной задачи формулируется как задача решения характеристического уравнения, содержащего собственное значение параметрической задачи. Проводится исследование условий существования этого характеристического уравнения. Исходная дифференциальная задача на собственные значения аппроксимируется в конечномерном подпространстве гильбертова пространства. Исследуется сходимость и погрешность приближённых собственных значений и приближённых собственных элементов. Полученные результаты обобщают результаты работы [1].

Литература

1. Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-41-160029, 20-08-01154).

СИНГУЛЯРНЫЙ ОПЕРАТОР ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА С КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКОЙ НА ГРАНИЦАХ БЕСКОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА

В.В. Старинец (Москва, ВШПиМ МПУ)
vstarinets@mail.ru

1. Рассмотрим на интервале $(-\infty, +\infty)$ множество $K_{\mathsf{f}(\nu,\mu)}$ всех функций вида $p(x) = \beta^{(\nu,\mu)}(x)P(x)$, где $\beta^{(\nu,\mu)}(x) = (x^2+1)^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{\mu}{2}\operatorname{arctg} x}$ $(2\nu \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}; \mu \in \mathbb{R})$, $P(x)$ — всевозможные многочлены. В $K_{\mathsf{f}(\nu,\mu)}$ введем J-метрику $[p,q]_{(\nu,\mu)} = \operatorname{Reg}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\overline{q}(x)\,dx$, где регуляризация интеграла на $\pm\infty$ реализуется соотношениями

$$\operatorname{Reg}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\cdots\Big)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{N\to+\infty}\lim_{\alpha\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\cdots\Big)\tau_{\alpha,N}^{(\nu,\mu)}(x)\,dx\,,$$

$$\tau_{\alpha,N}^{(\nu,\mu)}(x) = \frac{\operatorname{ch}(\mu\operatorname{arctg} x)\,\tau_{\alpha,N}^{(+)(\nu,\mu)}(x) + \operatorname{sh}(\mu\operatorname{arctg} x)\,\tau_{\alpha,N}^{(-)(\nu,\mu)}(x)}{e^{\mu\operatorname{arctg} x}}\,,$$

$$\tau_{\alpha,N}^{(\pm)(\nu,\mu)}(x) = R_{-\nu-N-\frac14\mp\frac14}(1/\alpha x)\,,\quad R_\sigma(x) = \frac{\cos\big((2\sigma+1)\operatorname{arctg} x\big)}{-(1+x^{-2})^{-\sigma-\frac12}\sin\pi\sigma}$$

— функция-регуляризатор. Ортонормируя относительно индефинитной метрики последовательность элементов $\{x^n\beta^{(\nu,\mu)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, порождающую множество моментов $\dot\mu_n^{(\nu,\mu)} = [x^n\beta^{(\nu,\mu)}, \beta^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)}$:

$$\dot\mu_{2n}^{(\nu,\mu)} = \sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^{n-s}n!}{s!\,(n-s)!}\,H(-\nu-s-1/2;\mu)\quad(n\in\mathbb{Z}_+)\,,$$

$$\dot\mu_{2n+1}^{(\nu,\mu)} = \sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^{n-s+1}n!}{s!\,(n-s)!}\,\frac{\mu H(-\nu-s-1/2;\mu)}{2(\nu+s+1)}\quad(n\in\mathbb{Z}_+)\,,$$

получаем функции $\{p_n^{(\nu,\mu)}(x) = \beta^{(\nu,\mu)}(x)P_n^{(\nu,\mu)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ с соотношениями J-ортонормировки $[p_n^{(\nu,\mu)}, p_k^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)} = J_n^{(\nu,\mu)}\delta_{n,k}$; здесь

$$P_n^{(\nu,\mu)}(x) = P_{n,n}^{(\nu,\mu)}\sum_{s=0}^{n}\frac{n!\,x^s}{s!\,(n-s)!}\,\frac{\Gamma(2\nu+n+s+1)}{\Gamma(2\nu+2n+1)}\,Q_{n,n-s}^{(\nu,\mu)}\,,$$

где $Q_{n,k}^{(\nu,\mu)}$ подчиняются рекуррентному соотношению $Q_{n,k+1}^{(\nu,\mu)} = \mu Q_{n,k}^{(\nu,\mu)} + k(2\nu+2n-k+1)Q_{n,k-1}^{(\nu,\mu)}$ ($k \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$; $Q_{n,0}^{(\nu,\mu)} = 1$; $Q_{n,-1}^{(\nu,\mu)} = 0$),

а $$P_{n,n}^{(\nu,\mu)} = \sqrt{\frac{|\Gamma(2\nu+2n+1)|}{n!\,|\Gamma(2\nu+n+1)|\cdot|H(-\nu-n-1/2;\mu)|}}\,,$$

— многочлены ([1],§4.7.10), выражающиеся через гипергеометрическую функцию соотношением $P_n^{(\nu,\mu)}(x) = P_{n,n}^{(\nu,\mu)}\,2^n i^n \times$

$$\times\frac{\Gamma(2\nu+n+1)\,\Gamma(\nu+n+1-\frac{i\mu}{2})}{\Gamma(2\nu+2n+1)\,\Gamma(\nu+1-\frac{i\mu}{2})}\,F(-n, 2\nu+n+1, \nu+1-\tfrac{i\mu}{2}; \tfrac{1+ix}{2})$$

и удовлетворяющие уравнению ([1], §4.7.9)

$$(x^2+1)P_n^{(\nu,\mu)\prime\prime}(x) + \big((2\nu+2)x+\mu\big)P_n^{(\nu,\mu)\prime}(x) = n(2\nu+n+1)P_n^{(\nu,\mu)}(x)\,,$$

а $J_n^{(\nu,\mu)} = (-1)^n \mathrm{sgn}\Big(\frac{H(\nu-n-1/2;\mu)}{\Gamma(2\nu+n+1)\Gamma(2\nu+2n+1)}\Big)$ отражает индефинитность метрики с учетом того, что для функции ([1], §4.7.4)

$$H(\sigma;\mu) = \mathrm{Reg}\int_0^1 x^{\sigma-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{ch}(\mu\arccos\sqrt{x})\,dx$$

имеют место соотношения:

$$H(\sigma;\mu) = H(\sigma+m+1;\mu)\prod_{s=0}^{m}\frac{\frac{\mu^2}{4}+\big(\sigma+s+\frac{1}{2}\big)^2}{(\sigma+s)\big(\sigma+s+\frac{1}{2}\big)} \quad (m\in\mathbb{Z}_+)\,;$$

$$H(\sigma;\mu) = H(\sigma;0)\Big(1+\frac{\mu^2}{4\sigma}+o(1/\sigma)\Big) \quad (\sigma\gg 1\,,\ \mu\in\mathbb{R})\,;$$

$$H(\sigma;\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{m}}\prod_{s=0}^{m}\frac{\frac{\mu^2}{4}+\big(\sigma+s+\frac{1}{2}\big)^2}{(\sigma+s)\big(\sigma+s+\frac{1}{2}\big)}\Big(1+O(1/m)\Big)$$

($|\sigma| < N < \infty\,; m \gg N \geqslant 1$) ; и для $m\gg 1$, $\alpha\in(0,1/2)\cap(1/2,1)$

$$H(-m+\alpha;\mu) = \frac{H(1+\alpha;\mu)}{\sqrt{m}}\,\frac{\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(-\alpha-1/2)}{|\Gamma(-\alpha-1/2+i\mu/2)|^2}\Big(1+O(1/m)\Big)\,.$$

Для полиномов $P_n^{(\nu,\mu)}(x)$ можно получить следующие асимптотические при $n\to\infty$ оценки. Для $x=0$ имеем:

$$|P_{2n}^{(\nu,\mu)}(0)| > C^{(\nu,\mu)} \quad (n\gg 1,\ 0 < C^{(\nu,\mu)} < \infty)\,, \tag{1}$$

$$|P_n^{(\nu,\mu)}(0)| < D^{(\nu,\mu)}(6/e)^n n^{n+\nu+1/2} \quad (n \gg 1,\ 0 < D^{(\nu,\mu)} < \infty)\,. \quad (2)$$

Для $x > 0$ $\big($[3], §2.3.2, (17)$\big)$ имеем: $(n \gg 1,\ 0 < |F^{(\nu,\mu)}(x)| < \infty)$

$$P_n^{(\nu,\mu)}(x) = F^{(\nu,\mu)}(x)\left(\sqrt{x^2+1} + |x|\right)^n \left(1 + O(1/n)\right). \quad (3)$$

2. В $K_{\mathsf{f}(\nu,\mu)}$ введем положительно определенное скалярное произведение $(p,q)_{(\nu,\mu)} = [p^J, q]_{(\nu,\mu)}$, где $p^J(x) = J^{(\nu,\mu)}p(x)$, $J^{(\nu,\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(\nu,\mu)}[\,\cdot\,, p_n^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)}$ — оператор инволюции. Пополняя множество $K_{\mathsf{f}(\nu,\mu)}$ относительно скалярного произведения $(\cdot\ ,\cdot)_{(\nu,\mu)}$, получаем пространство Крейна $K_{(\nu,\mu)} = \big\{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n p_n^{(\nu,\mu)}(x) : \sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2 < \infty\big\}$ $(f_n = J_n^{(\nu,\mu)}[f, p_n^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)})$. При этом выражение $I^{(\nu,\mu)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(\nu,\mu)\,J}[\,\cdot\,, p_n^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)}$ для тождественного оператора отражает свойство полноты множества элементов $\{p_n^{(\nu,\mu)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, составляющих базис в $K_{(\nu,\mu)}$ и удовлетворяющих уравнению

$$l^{(\nu,\mu)}\big(p_n^{(\nu,\mu)}(x)\big) = \lambda_n^{(\nu,\mu)} p_n^{(\nu,\mu)}(x)\,,\ \ \lambda_n^{(\nu,\mu)} = (\nu+n)(\nu+n+1)\,,$$

$$l^{(\nu,\mu)} = \partial\big(p(x)\partial\big) + q(x)\,,\ \ p(x) = (x^2+1)\,,\ \ q(x) = \frac{\nu^2 - \mu^2/4 - \mu\nu x}{x^2+1}\,.$$

В $K_{(\nu,\mu)}$ определим оператор $\mathfrak{N} = \sum_{k=0}^{\infty}(1+k)^k p_n^{(\nu,\mu)\,J}\,[\,\cdot\,, p_n^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)}$. Введем в $K_{\mathrm{f}(\nu,\mu)}$ счетную систему индефинитных метрик $[p,q]_n$ и положительно определенных скалярных произведений $(p,q)_n$ соотношениями $[p,q]_n = [\mathfrak{N}^n p, \mathfrak{N}^n q]_{(\nu,\mu)}$ и $(p,q)_n = (\mathfrak{N}^n p, \mathfrak{N}^n q)_{(\nu,\mu)}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Пополняя $K_{\mathrm{f}(\nu,\mu)}$ относительно скалярных произведений $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_n$, получаем цепочку J-пространств $K_n \subset K_{n-1}$ $(K_0 \equiv K_{(\nu,\mu)}$, $n \in \mathbb{Z})$, при этом для сопряженных пространств K_n и K_{-n} имеем: $|[\varphi, f]_0| \leqslant \|\varphi\|_n \|f\|_{-n}$, $|(\varphi, f)_0| \leqslant \|\varphi\|_n \|f\|_{-n}$ $(\varphi \in K_n,\ f \in K_{-n}$; $n \in \mathbb{Z}_+)$. Формы $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_n$ и $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ порождают оснащенное пространство $K^{\circ}_{(\nu,\mu)} \subset K_{(\nu,\mu)} \subset K'_{(\nu,\mu)}$, где $K^{\circ}_{(\nu,\mu)} = \cap_{n=1}^{\infty} K_n$ — ядерное счетно-крейново пространство (пространство основных функций), а $K'_{(\nu,\mu)} = \cup_{n=1}^{\infty} K_{-n}$ — соответствующее пространство функционалов на $K^{\circ}_{(\nu,\mu)}$ (пространство обобщенных функций).

Из асимптотических оценок (1)...(3) следует, что обобщенные функции

$$\delta_\lambda^{(\nu,\mu)}(x) \equiv \delta^{(\nu,\mu)}(\lambda; x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(\nu,\mu)J}(\lambda)\, p_n^{(\nu,\mu)}(x)$$

и $$\delta_\lambda^{(\nu,\mu)J}(x) \equiv \delta^{(\nu,\mu)J}(\lambda;x) = \textstyle\sum_{n=0}^\infty p_n^{(\nu,\mu)}(\lambda)\, p_n^{(\nu,\mu)}(x)$$

подчиняются соотношениям $\|\delta_\lambda^{(\nu,\mu)}\|_0 = \|\delta_\lambda^{(\nu,\mu)J}\|_0 = \infty$, $\|\delta_\lambda^{(\nu,\mu)}\|_{-n} = \|\delta_\lambda^{(\nu,\mu)J}\|_{-n} < \infty$ $(n \geqslant 2)$, т.е. $\delta_\lambda^{(\nu,\mu)}$, $\delta_\lambda^{(\nu,\mu)J} \in K_{-2} \setminus K_0$, и обладают для $\varphi(x) \in K_2 \supset K_{\mathrm{f}(\nu,\mu)}$ свойством

$$[\varphi, \delta_\lambda^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)} = \varphi(\lambda) \quad \text{и} \quad [\varphi, \delta_\lambda^{(\nu,\mu)J}]_{(\nu,\mu)} = \varphi^J(\lambda)\,,$$

порождающим (после расширения по непрерывности на $K_{(\nu,\mu)}$) операторы $I^{(\nu,\mu)}$ и $J^{(\nu,\mu)}$.

3. В пространстве $K_{(\nu,\mu)}$ рассмотрим оператор $X_{(\nu,\mu)}$ умножения на независимую переменную $X_{(\nu,\mu)} f(x) \overset{\text{def}}{=} x\, f(x)$. Можно показать, что $X_{(\nu,\mu)}$ — J-самосопряженный в $K_{(\nu,\mu)}$ оператор, обладающий полной системой обобщенных собственных векторов

$$\Delta_\lambda^{(\nu,\mu)}(x) = \sum_{n=0}^\infty P_n^{(\nu,\mu)J}(\lambda)\, p_n^{(\nu,\mu)}(x) \in K_{-2} \subset K'_{(\nu,\mu)}\,,$$

отвечающих точкам непрерывного спектра $\lambda \in (-\infty, +\infty)$:

$$\big(X_{(\nu,\mu)} - \lambda\, I\big)\Delta_\lambda^{(\nu,\mu)}(x) = 0\,,$$

для которых условия полноты и ортонормировки имеют вид соответственно

$$\operatorname{Reg}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\lambda^{(\nu,\mu)}(x)\, \Delta_\lambda^{(\nu,\mu)}(x')\, d\sigma_\lambda^{(\nu,\mu)} = \delta^{(\nu,\mu)}(x;x')$$

и $$[\Delta_\lambda^{(\nu,\mu)}, \Delta_{\lambda'}^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)} = \Delta_{\lambda,\lambda'}^{(\nu,\mu)}\,,$$

где $d\sigma_\lambda^{(\nu,\mu)} = \beta^{(\nu,\mu)\,2}(\lambda)\, d\lambda$, $\Delta_{\lambda,\lambda'}^{(\nu,\mu)} = \beta^{(\nu,\mu)}(\lambda)\, \beta^{(\nu,\mu)}(\lambda')\; \delta^{(\nu,\mu)}(\lambda;\lambda')$. Спектральное представление для оператора $X_{(\nu,\mu)}$ имеет вид

$$X_{(\nu,\mu)} = \operatorname{Reg}\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_\lambda^{X_{(\nu,\mu)}}, \quad dE_\lambda^{X_{(\nu,\mu)}} = \Delta_\lambda^{(\nu,\mu)}[\,\cdot\,, \Delta_\lambda^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)}\, d\sigma_\lambda^{(\nu,\mu)},$$

где $$E_\lambda^{X_{(\nu,\mu)}} = \operatorname{Reg}\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\lambda - t)\, \Delta_t^{(\nu,\mu)}(x)\, [\,\cdot\,, \Delta_t^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)}\, d\sigma_t^{(\nu,\mu)}$$

— спектральная функция оператора $X_{(\nu,\mu)}$, имеющая сингулярную критическую точку $\lambda=\pm\infty$, непосредственно связанную с сингулярной критической точкой $x=\pm\infty$ индефинитной метрики пространства $K_{(\nu,\mu)}$, и удовлетворяющая условиям:

1) $$E_\tau^{X_{(\nu,\mu)}}E_t^{X_{(\nu,\mu)}}=E_\lambda^{X_{(\nu,\mu)}}\quad\bigl(\lambda=\min\{\tau,t\}\bigr)\,;$$

2) $$s\text{-}\lim_{t\to\lambda-0}E_t^{X_{(\nu,\mu)}}=E_\lambda^{X_{(\nu,\mu)}}\quad\bigl(\lambda\in(-\infty,+\infty)\bigr)\,;$$

3) $$s\text{-}\lim_{t\to-\infty}E_t^{X_{(\nu,\mu)}}=\infty\,,\quad s\text{-}\lim_{t\to+\infty}E_t^{X_{(\nu,\mu)}}=\infty\,;$$

4) $$E_{-\infty}^{X_{(\nu,\mu)}}=0\,,\quad E_{+\infty}^{X_{(\nu,\mu)}}=I\,.$$

4. В $K_{(\nu,\mu)}$ рассмотрим дифференциальное выражение

$$l^{(\nu,\mu)}(y)=\bigl((x^2+1)y'\bigr)'+\frac{\nu^2-\mu^2/4-\mu\nu\,x}{x^2+1}\,y(x)\,.$$

Уравнение на собственные значения $l^{(\nu,\mu)}(y)=\lambda\,y$ после замены $y(x)=\beta^{(\nu,\mu)}(x)Y(x)$ переходит в уравнение $l_\circ^{(\nu,\mu)}(Y)=\lambda_\circ\,Y$ $\bigl(\lambda_\circ=$ $=\lambda-\nu(\nu+1)\bigr)$, где $l_\circ^{(\nu,\mu)}(Y)=(x^2+1)Y''(x)+\bigl(2(\nu+1)x+\mu\bigr)Y'(x)$, с двумя линейно независимыми (при $\lambda\neq-1/4$) решениями

$$Y_\pm^{(\nu,\mu)}(x)=\bigl(1+ix\bigr)^{\alpha_\pm}F\bigl(\alpha_\pm,\alpha_\pm-\gamma+1,\alpha_\pm-\alpha_\mp+1;\tfrac{2}{1+ix}\bigr)$$

$\bigl(\alpha_\pm=\nu+\frac12\pm\sqrt{\lambda+\frac14},\,\gamma=\nu+1-\frac{i\mu}{2}\bigr)$. Таким образом, соответствующие решения уравнения $l^{(\nu,\mu)}(y)=\lambda\,y$ имеют вид: $y_{\lambda,\pm}^{(\nu,\mu)}(x)=$

$$=(x^2+1)^{-\frac12(\frac12\pm\sqrt{\lambda+\frac14})}e^{(\frac{\mu}{2}-i\alpha_\pm)\operatorname{arctg}x}F\bigl(\alpha_\pm,\alpha_\pm-\gamma+1,\alpha_\pm-\alpha_\mp+1;\tfrac{2}{1+ix}\bigr).$$

На плотном в $K_{(\nu,\mu)}$ множестве $K_{\mathsf{f}(\nu,\mu)}$ дифференциальное выражение $l^{(\nu,\mu)}(y)$ порождает J-симметрический оператор $L_{\mathsf{f}(\nu,\mu)}$, т. к. для $y,z\in K_{\mathsf{f}(\nu,\mu)}$, ввиду того, что для всех $m\in\mathbb{Z}_+$

$$\lim_{N\to+\infty}\lim_{\alpha\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\bigl(\partial_x\tau_{\alpha,N}^{(+)(\nu,\mu)}(x)\bigr)\operatorname{ch}(\mu\operatorname{arctg}x)\,(x^2+1)^{\nu+1}x^{2m+1}dx=0,$$

$$\lim_{N\to+\infty}\lim_{\alpha\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\bigl(\partial_x\tau_{\alpha,N}^{(-)(\nu,\mu)}(x)\bigr)\operatorname{sh}(\mu\operatorname{arctg}x)\,(x^2+1)^{\nu+1}x^{2m}\,dx=0,$$

имеем $[l^{(\nu,\mu)}(y),z]_{(\nu,\mu)}-[y,l^{(\nu,\mu)}(z)]_{(\nu,\mu)}=\mathrm{Reg}\,\{y,z\}_{-\infty}^{+\infty}=0\,,$ где $\mathrm{Reg}\,\{y,z\}_{-\infty}^{+\infty}=-\lim\limits_{N\to+\infty}\lim\limits_{\alpha\to+0}\Big(\big[\tau_{\alpha,N}^{(\nu,\mu)}(x)\,(x^2+1)\big(y(x)\,\overset{\leftrightarrow}{\partial}_x\,\overline{z}(x)\big)\big]\big|_{-\infty}^{+\infty}\Big)\,.$

Очевидно, $K_{\mathsf{f}(\nu,\mu)}\subset D_{(\nu,\mu)}\subset K_{(\nu,\mu)}$, где

$$D_{(\nu,\mu)}=\Big\{y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}y_n\,p_n^{(\nu,\mu)}(x)\in K_{(\nu,\mu)}\ :\ \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n^{(\nu,\mu)}y_n|^2<\infty\Big\}\,.$$

Т.к. для $y,z\in D_{(\nu,\mu)}$, очевидно, $[l^{(\nu,\mu)}(y),z]_{(\nu,\mu)}-[y,l^{(\nu,\mu)}(z)]_{(\nu,\mu)}=0$, то оператор $L_{(\nu,\mu)}$, порождаемый на $D_{(\nu,\mu)}$ выражением $l^{(\nu,\mu)}(y)$, является замыканием оператора $L_{\mathsf{f}(\nu,\mu)}$. Поскольку для такого $\lambda\neq\overline{\lambda}$, что $\Re\sqrt{\lambda+1/4}\neq\nu+m+1/2\ (m\in\mathbb{Z})$, заведомо $y_{\lambda,\pm}^{(\nu,\mu)}(x)\notin K_{(\nu,\mu)}$, то индекс дефекта J-симметрического оператора $L_{(\nu,\mu)}$ равен (0;0), т. е. оператор $L_{(\nu,\mu)}$ является J-самосопряженным с областью определения $D_{(\nu,\mu)}$.

Собственные значения $\{\lambda_n^{(\nu,\mu)}\}_{n=0}^{\infty}$, соответствующие собственным функциям $\{p_n^{(\nu,\mu)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ из $K_{\mathsf{f}(\nu,\mu)}$ уравнения $l^{(\nu,\mu)}(y)=\lambda\,y$, составляют спектр оператора $L_{(\nu,\mu)}$. Спектральное представление оператора $L_{(\nu,\mu)}$ имеет вид

$$L_{(\nu,\mu)}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^{(\nu,\mu)}\,p_n^{(\nu,\mu)J}\,[\,\cdot\,,p_n^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\,dE_\lambda^{L_{(\nu,\mu)}}\,,$$

где $$E_\lambda^{L_{(\nu,\mu)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\theta(\lambda-\lambda_n^{(\nu,\mu)})\,p_n^{(\nu,\mu)J}\,[\,\cdot\,,p_n^{(\nu,\mu)}]_{(\nu,\mu)}$$

— спектральная функция оператора, имеющая только регулярные критические точки $\{\lambda_k^{(\nu,\mu)}\}_{k\in N_e^{(\nu,\mu)}}$ $(N_e^{(\nu,\mu)}=\{n\in\mathbb{Z}_+:\,J_n^{(\nu,\mu)}=-1\})$, отвечающие его эллиптическим собственным значениям.

Литература

1. Старинец В.В. Обобщенно классические ортогональные многочлены /В.В. Старинец. — М. : МГУП, 2000. — 462 с.

2. Старинец В.В. Сингулярные операторы Штурма—Лиувилля в пространствах с индефинитной метрикой /В.В. Старинец. — М. : МГУП, 2010. — Часть 1,2. — 504, 496 сс. (www.vladimirstarinets.com)

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. Наука, 1973. — Т. 1. — 294 с.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В МНОГОСЛОЙНОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ МАТЕРИАЛЕ[1]

М.А. Степович*, **В.В. Калманович****, **Е.В. Серегина***** (*, **Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского, ***МГТУ им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Калужский филиал)
**m.stepovich@rambler.ru, **v572264@yandex.ru, ***evfs@yandex.ru*

При моделировании процессов тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с твёрдым телом, одним из определяющих факторов при проведении расчётов является количественное описание потерь энергии электронами в мишени. В качестве одной из первых моделей, использованной при количественном решении такой задачи для однородного полубесконечного полупроводникового материала, была использована функция Гаусса [1–4]. Такая модель неплохо описывает взаимодействие электронов с лёгкими однородныи материалами, особенно при низких энергиях электронов [5]. Отметим также, что в таких случаях при решении практических задач возможно даже использование двумерной функции Гаусса [5, 6]. Однако на практике используются многослойные структуры конечной толщины, состоящие, как правило, из слоёв различных материалов. В этом случае количественное описание потерь энергии электронами в каждом из слоёв и решение соответствующих дифференциальных уравнений тепломассопереноса является весьма трудной задачей ввиду отсутствия теоретического описания процессов взаимодействия электронов с многослойной средой.

В настоящей работе рассмотрена математическая модель, описывающая взаимодействие широкого электронного пучка с n–слойной полупроводниковой мишенью толщины l [7, 8]. Для этого случая дифференциальное уравнение тепломассопереноса (1) с краевыми условиями для первого (2) и последнего, n–го слоя (3), описывающее диффузию неравновесных неосновных носителей заряда

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

(ННЗ), имеет вид:

$$\frac{d}{dz}\left(D^{(i)}(z)\,\frac{d\Delta p^{(i)}(z)}{dz}\right)-\frac{\Delta p^{(i)}(z)}{\tau^{(i)}(z)}=-\rho^{(i)}(z)\,,\;\; i=\overline{1,n}, \qquad (1)$$

$$D^{(1)}\;\left.\frac{d\Delta p^{(1)}(z)}{dz}\right|_{z=0}=\nu_s^{(1)}\Delta p^{(1)}(0)\,, \qquad (2)$$

$$D^{(n)}\;\left.\frac{d\Delta p^{(n)}(z)}{dz}\right|_{z=l}=-\nu_s^{(n)}\Delta p^{(n)}(l)\,. \qquad (3)$$

Здесь верхний индекс обозначает номер слоя, $\rho^{(i)}(z)$ — концентрация генерированных ННЗ в каждом слое до их диффузии в мишени [9], $\Delta p^{(i)}$ — искомое распределение ННЗ в каждом слое, $i=\overline{1,n}$, а параметры $D^{(i)}$, $\tau^{(i)}$, $\nu_s^{(1)}$, $\nu_s^{(n)}$ — постоянные, физический смысл которых описан в [6, 7].

Параметры, входящие в (1)–(3), обычно известны и задаются для каждого слоя моделируемой структуры. Основная проблема, к настоящему времени не имеющая точного количественного решения — корректное задание правой части дифференциального уравнения (1). В настоящей работе методами математического моделирования проведено изучение различных, в том числе численных, возможностей решения задачи (1)–(3) для различных полупроводниковых структур и при различном задании $\rho^{(i)}(z)$.

Задача (1)–(3) для произвольного количества слоёв решалась матричным методом [10-12], позволяющим получить решение в аналитическом виде. Также эта задача решалась численно, а в ряде случаев использовалась и численная реализация матричного метода [11, 13]. Получены результаты, позволяющие решать дифференциальные уравнения вида (1)–(3) для конкретных полупроводниковых структур.

Литература

1. Wittry D.B. Measurements of diffusion lengths in direct–gap semiconductors by electron beam excitation / D.B. Wittry, D.F. Kyser // J. Appl. Phys. — 1967. — Vol. 38, No. 1. — P. 375–382.

2. Конников С.Г. Электронно–зондовые методы исследования полупроводниковых материалов и приборов / С.Г. Конников, А.Ф. Сидоров. М.: Энергия, 1978. — 136 с.

3. Turtin D.V. Qualitative Analysis of a Class of Differential Equations of Heat and Mass Transfer in a Condensed Material / D.V. Turtin,

E.V. Seregina, M.A. Stepovich // Journal of Mathematical Sciences. — 2020. — Vol. 250, Issue 1. — P. 166–174.

4. Туртин Д.В. Об использовании преобразования Ханкеля при математическом моделировании катодолюминесценции в однородном полупроводниковом материале / Д.В. Туртин, М.А. Степович, В.В. Калманович // Таврический вестник информатики и математики. — 2020. — № 1 (46). — С. 92–107.

5. Stepovich M.A. On the qualitative characteristics of a two–dimensional mathematical model of diffusion of minority charge carriers generated by a low–energy electron beam in a homogeneous semiconductor material / M.A. Stepovich, D.V. Turtin, E.V. Seregina, A.N. Polyakov // Journal of Physics: Conf. Series. — 2019. — Vol. 1203. — 012095 (8 pp.).

6. Polyakov A.N. Qualitative properties of a mathematical model of the diffusion of excitons generated by electron probe in a homogeneous semiconductor material / A.N. Polyakov, A.N. Smirnova, M.A. Stepovich, D.V. Turtin // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — Vol. 39, No. 2. — P. 259-262.

7. Калманович В.В. Математическое моделирование явлений тепломассопереноса, обусловленных взаимодействием электронных пучков с многослойными планарными полупроводниковыми структурами / В.В. Калманович, Е.В. Серегина, М.А. Степович // Известия РАН. Серия физическая. — 2020. — Т. 84, № 7. — С. 1027–1033.

8. Серегина Е.В. О моделировании распределений неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком в многослойных планарных полупроводниковых структурах / Е.В. Серегина, В.В. Калманович, М.А. Степович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2020. — № 7. — С. 69–74.

9. Михеев Н.Н. Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом / Н.Н.Михеев, М.А. Степович // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 1996. — Т. 62, № 4. — С. 20–25.

10. Гладышев Ю.А. О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, М.А. Степович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2017. — № 10. — С. 105–110.

11. Серегина Е.В. Сравнительный анализ матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда в многослойной планарной полупроводниковой структуре / Е.В. Серегина, В.В. Калманович, М.А. Степович // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2019. — Т. 172. — С. 108–116.

12. Гладышев Ю.А. О применении матричного метода для математического моделирования процессов теплопереноса / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, М.А. Степович // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 20–й международной Саратовской зимней школы (Саратов, 28 января–1 февраля 2020 г.). — Саратов: ООО «Издательство «Научная книга», 2020. — С. 118–121.

13. Серегина Е.В. О моделировании распределений неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком в многослойных планарных полупроводниковых структурах / Е.В. Серегина, В.В. Калманович, М.А. Степович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2020. — № 7. — С. 69–74.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ВЫПУКЛОМ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ[1]

М.И. Сумин (Тамбов, ТГУ; Нижний Новгород, ННГУ)
m.sumin@mail.ru

При изучении задач оптимального управления возможны два существенно различных подхода к их постановкам. Первый из них связан с «идеальным» предположением точного задания исходных данных задач. Оно является одним из главных при получении привычных для теории оптимального управления классических условий оптимальности (КУО), составляющих основу всей этой теории.

При втором подходе к постановкам задач предполагается, что их исходные данные могут задаваться с погрешностями. Неточность в исходных данных характерна для задач оптимального управления, возникающих в различных естественнонаучных приложениях [1]. Главной отличительной особенностью второго подхода является необходимость учета свойств некорректности как «самих» за-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00199).

дач оптимального управления, так и соответствующих им принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) [1].

Говоря о некорректности КУО, мы имеем здесь в виду такие ее проявления как *неустойчивость* и *невыполнимость*. Мы говорим о *неустойчивости* КУО, если выделяемые ими в возмущенных задачах, «близких» к исходной (невозмущенной) задаче, элементы, формально удовлетворяющие КУО в этих возмущенных задачах, фактически не являются реальными приближениями к точному решению исходной задачи. В свою очередь, *невыполнимость* КУО в той или иной конкретной оптимизационной задаче мы понимаем как принципиальную невозможность записать их для этой задачи в той привычной (классической) форме, в которой принято записывать условия оптимальности в других задачах данного класса. Иллюстративные примеры неустойчивости и невыполнимости ПЛ и ПМП и соответствующие комментарии могут быть найдены в [1]. Указанные и многие подобные им примеры говорят о том, что КУО в каждой конкретной задаче оптимального управления, а говоря более общо, и в каждой задаче условной оптимизации, априори следует считать математическими объектами, которым в полной мере присущи, если не доказано обратное, проявления некорректности.

В докладе обсуждается как в выпуклых задачах оптимального управления можно преодолевать проблемы, связанные со свойствами некорректности ПЛ и ПМП посредством так называемой регуляризации последних. Для иллюстрации методов регуляризации КУО выбрана конкретная выпуклая задача оптимального управления для параболического уравнения с граничным управлением и операторным (то есть задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством. В продолжение линии работы [2], посвященной также регуляризации КУО в задаче оптимального управления с операторным ограничением-равенством, но в случае сосредоточенной управляемой системы, главное внимание в докладе уделяется вопросам получения для рассматриваемой оптимизационной задачи различных вариантов регуляризованных ПЛ и ПМП. Последние носят секвенциальный характер и формулируются в терминах обобщенных минимизирующих последовательностей — минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги. Основное предназначение регуляризованных ПЛ и ПМП — устойчивое генерирование МПР в задачах оптимального управления для целей их непосредственного практического устойчивого решения. В докладе показывается, что регуляризованные

КУО: 1) формулируются как теоремы существования МПР в исходной задаче с одновременным конструктивным представлением их конкретных представителей; 2) выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина; 3) являются секвенциальными обобщениями классических аналогов — своих предельных вариантов, сохраняя общую структуру последних; 4) «преодолевают» свойства некорректности КУО и представляют собою регуляризирующие алгоритмы для решения задач оптимального управления.

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах / М.И. Сумин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 279–296.

2. Сумин М.И. О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления / М.И. Сумин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2020. — Т. 26, № 2. — С. 252–269.

О «ПЕРЕХОДЕ» СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПУЧКА С ПАРАМЕТРОМ ЧЕРЕЗ МНИМУЮ ОСЬ

Л.И. Сухочева (Воронеж, Воронежский государственный технический университет)

l.suhocheva@ yandex.ru

В [1] при рассмотрении задачи о малых конвективных движениях жидкости в частично заполненном сосуде исследуются спектральные свойства квадратичного пучка с параметром

$$L(\lambda) = \lambda^2 A - \lambda(\varepsilon Q - I) + C, \tag{1}$$

где A, C, Q – самосопряженные вполне непрерывные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H. При этом предполагается, что A - положительный, C - неотрицательный операторы, ε - положительный параметр .

Из свойств операторов A, C, Q следует, что спектр пучка не более, чем счетен и имеет предельные точки $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Все точки спектра отличные от 0 и ∞ являются изолированными собственными значениями конечной алгебраической кратности [1]. Если $\varepsilon \leqslant 1/||Q||$, то все собственные значения пучка L лежат в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$. Если $\varepsilon > 1/||Q||$, то могут, вообще говоря, появится точки спектра пучка и в правой полуплоскости. В этом случае не более конечного числа собственных значений пучка может находиться в открытой правой полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Возникает вопрос: как с ростом ε собственные значения из левой полуплоскости переходят в правую.

Введем в пространстве H индефинитную метрику $[u, v] = ((\varepsilon Q - I)u, v)$.

Теорема. *Пусть операторы, определяющие пучок L, удовлетворяют перечисленным выше условиям и для любого $\varepsilon > 0$ $KerC$ является $\varepsilon Q - I$- отрицательным подпространством, тогда с ростом ε собственные значения пучка переходят из левой полуплоскости в правую, пересекая мнимую ось не в нуле.*

Литература

1. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи /Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М. : Наука, 1989. —416 с.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ОДНОРОДНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ МИШЕНЯХ[1]

Д.В. Туртин[*], **М.А. Степович**[**], **М.Н. Филиппов**[***] ([*]Иваново, ИФ РЭУ им. Г.В. Плеханова, [**]Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского, [***]Москва, ИОНХ им. Н.С. Курнакова)

[*]*turtin@mail.ru*, [**]*m.stepovich@rambler.ru*, [***]*fil@igic.ras.ru*

Ранее нами рассмотрена задача нагрева мишеней монохроматическим остро сфокусированным электронным пучком (электронным зондом) без учёта потерь энергии на тепловое излучение. Рассмотрение проведено для полупроводниковых [1–5] и металлических [6, 7] мишеней, находящихся в вакууме.

В настоящей работе рассмотрена модельная задача тепломассопереноса с учётом теплового излучения из мишени:

$$\Delta T\,(x,\ y,\ z) + \frac{1}{\lambda}\rho\,(x,\ y,\ z) = 0,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial z}+\sigma T^4=0.$$

Здесь электронный зонд падает в начало координат, причём ось OZ направлена навстречу зонду, а оси OX и OY лежат на поверхности однородной мишени, T — абсолютная температура мишени, λ — коэффициент теплопроводности, σ — постоянная Стефана–Больцмана и $\rho\left(x,\ y,\ z\right)$ — плотность мощности тепловых источников. Такая или подобная задачи в электроннозондовых технологиях ранее не рассматривались.

Проведена оценка нагрева мишени в рассматриваемом случае. Компьютерное моделирование выполнено для параметров мишеней, характерных для однородных полупроводниковых материалов.

Литература

1. Поляков А.Н. Трехмерная диффузия экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования / А.Н. Поляков, М.А. Степович, Д.В. Туртин // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2015. — № 12. — С. 48-52.

2. Кузин А.Ю. Тепловые эффекты при низковольтном электронно–зондовом рентгеноспектральном микроанализе с нанометровой локальностью / А.Ю. Кузин, М.А. Степович, В.Б. Митюхляев, П.А. Тодуа, М.Н. Филиппов // Измерительная техника. — 2016. — № 10. — С. 27-29.

3. Stepovich M.A. On one peculiarity of the model describing the interaction of the electron beam with the semiconductor surface / M.A. Stepovich, A.N. Amrastanov, E.V. Seregina, M.N. Filippov // Journal of Physics: Conf. Series. — 2018. — Vol. 955. — 012040.

4. Амрастанов А.Н. Оценка нагрева поверхности полупроводниковой мишени низкоэнергетичным электронным зондом / А.Н. Амрастанов, Е.В. Серегина, М.А. Степович, М.Н. Филиппов // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2018. — № 8. — С. 48-52.

5. Амрастанов А.Н. Об одной особенности моделирования нагрева полупроводниковой мишени электронным зондом / А.Н. Амрастанов, Е.В. Серегина, М.А. Степович // Известия РАН. Серия физическая. — 2018. — Т. 82, № 9. — С. 1304-1309.

6. Амрастанов А.Н. Оценка нагрева поверхности однородной металлической мишени электронным зондом / А.Н. Амрастанов, Е.В. Серегина, М.А. Степович // Известия РАН. Серия физическая. — 2019. — Т. 83, № 11. — С. 1455-1460.

7. Stepovich M.A. Assessment of the heating of conductive targets with an electron beam. Results of computational experiment / M.A. Stepovich, A.N. Amrastanov, E.V. Seregina, M.N. Filippov // Journal of Physics: Conf. Series. — 2019. — Vol. 1203. — P. 012042.

О ПОСТРОЕНИИ ОДНОЙ ФУНКЦИИ, ОГРАНИЧИВАЮЩЕЙ СПЕКТР

Д.Г. Усков (Воронеж, ВГУ)
uskov.dan@mail.ru

В [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $A : D(A) \subset H \to H$ — самосопряженный оператор, действующий в комплексном гильбертовом пространстве H, и оператор B принадлежит двустороннему идеалу операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(H)$. Тогда существует такая непрерывная вещественнозначная функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, что для всех $\lambda \in \sigma(A+B)$ имеет место неравенство $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant f(\operatorname{Re}\lambda)$.*

Из доказательства этой теоремы (см. [1]) вытекает алгоритм построения функции f. Пусть $P_n = P([-n,n],A)$ — спектральные проекторы, построенные по интервалу $[-n,n]$ и $B_n = B - P_nBP_n$. Тогда находим точки с координатами $(\pm(1+2\|B\|_2), 2\|B\|_2)$, $(\pm(n+2\|B\|_2), 3\|B_n\|_2)$ и соединяем их ломаной линией.

В работе строятся функции f для разных классов возмущенных самосопряженных операторов, к исследованию которых обычно применяется метод подобных операторов и сравниваются полученные результаты. Например, пусть $A : D(A) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ — самосопряженный оператор и оператор B задан своей матрицей в стандартном базисе пространства l_2, $B = (b_{ij})$, $i,j \in \mathbb{Z}$, где $b_{ij} = 1/i$, $i \neq 0$, $j \neq i \pm 1$, $i,j \in \mathbb{Z}$, и $b_{ij} = 0$ в противном случае. Такой пример, как модельный, используется в методе подобных операторов [2]. Очевидно, что $B \in \mathfrak{S}_2(l_2(\mathbb{Z}))$, $\|B\|_2 = \pi/\sqrt{3}$ и $\|B_n\|_2 \leqslant \sqrt{2}(2n^2 - 2n+1)^{1/2}/(n(n-1))$ при $n > 1$. Таким образом, для построения функции f строим точки с координатами $(\pm(1+2\pi/\sqrt{3}), 2\pi/\sqrt{3})$, $(\pm(n+2\pi/\sqrt{3}), 3\sqrt{2}(2n^2-2n+1)^{1/2}/(n(n-1)))$, $n > 1$, и соединяем их ломаной линией.

Литература

1. Baskakov A.G. Closed operator functional calculus in Banach modules and applications / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova // J. Math. Anal. Appl. — 2020. — V. 492, № 2. — 124473.

2. Баскаков А.Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры I / А.Г. Баскаков, И.А. Криштал, Н.Б. Ускова // Прикладная математика & Физика. — 2020. — Т. 52, № 3. — С. 185–194.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ЯЗЫКЕ С++

О.Ф. Ускова, Н.А. Каплиева (Воронеж, ВГУ)
sunny.uskova@list.ru

Для программной реализации математических алгоритмов в С++ предусмотрены перегруженные функции.

Приведем пример одного из заданий, которые рассматриваются на практических занятиях первокурсников факультета ПММ ВГУ по дисциплине «Информатика и программирование» [1].

При некоторых заданных x, N, e, определяемых вводом, вычислить: а) сумму N слагаемых заданного вида; б) сумму тех слагаемых, которые по абсолютной величине больше e.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (R = \infty).$$

Вычисление суммы для случая б) требуется выполнить для двух значений точности e, отличающихся на порядок и определить количество слагаемых, включенных в сумму.

Для решения сформулированной задачи необходимы две функции. Сигнатура первой функции (вариант а) имеет вид

```
float rsin(float x, int N);
```

Вторая (перегруженная) функция с тем же именем

```
float rsin(float x, float e, int &count);
```

вычисляет сумму ряда по тому же алгоритму Тейлора, что и функция части а), и возвращает в основную программу количество слагаемых в сумме `(int &count)`.

Мы полностью согласны с высказыванием профессора Никлауса Вирта, автора языка программирования Паскаль: «Ключ к тайнам компьютеров в гармонии математики, инженерии и программирования».

Литература

1. Ускова О.Ф. Информатика и программирование. Задачник-практикум по структурному программированию на языке С++ /

О.Ф. Ускова, Н.А. Каплиева, О.Д. Горбенко. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2020. — 279 с.

О КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

А.Д. Ушхо, В.Б. Тлячев, Д.С. Ушхо (Майкоп, АГУ)
tlyachev@adygnet.ru

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} a_{i,j}x^i y^j \equiv P_3(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} b_{i,j}x^i y^j \equiv Q_3(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{R}$, $(P_3, Q_3) = 1$.

Исследование систем вида (1) на плоскости относится к классической задаче качественной теории плоских полиномиальных дифференциальных систем, связанной с 16-й задачей Гильберта (см. [1] и цитированную там литературу).

Будем говорить, что система (1) записана в канонической форме, если $P_3(x,y) \equiv (a_1x + b_1y + c_1)P_2(x,y)$, $Q_3(x,y) \equiv (a_2x + b_2y + c_2)Q_2(x,y)$, где $P_2(x,y)$ и $Q_2(x,y)$ — многочлены второй степени, не обязательно неприводимые.

Каноническая форма записи позволяет полностью решить задачу нахождения координат всех состояний равновесия и существенно облегчает решение проблемы построения фазового портрета системы в целом.

Теорема. *Пусть система* (1) *имеет девять состояний равновесия в ограниченной части фазовой плоскости. Тогда существует невырожденное преобразование*

$$\begin{cases} x = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}, \\ y = \gamma\overline{x} + \delta\overline{y}, \end{cases}$$

приводящее эту систему к канонической форме.

Литература

1. Llibre J. On the centers of cubic polynomial differential systems with four invariant straight lines /J. Llibre // Topological Methods in Nonlinear Analysis. — 2020. — Vol. 55, № 2. — P. 387–402.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ КОШИ-РИМАНА С СИЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ

Ю.С. Федоров (Москва, НИУ "МЭИ")
fedorovys@mpei.ru

Пусть область D содержит точку $z = 0$ и ограничена простым гладким контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $D_0 = D \setminus \{0\}$, $D_\delta = D \cap \{|z| > \delta\}$ с малым $\delta > 0$.

В области D_0 рассмотрим следующую сингулярно возмущенного систему уравнений Коши-Римана с сильными особенностями в младшем коэффициенте:

$$\begin{cases} \varepsilon(x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}}\left[x\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+y\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]- \\ -2(a_1u_1(x,y)-a_2u_2(x,y))=2f_1(x,y), \\ \varepsilon(x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}}\left[y\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)-x\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]- \\ -2(a_2u_1(x,y)+2a_1u_2(x,y))=2f_2(x,y), \end{cases} \tag{1_0}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 \ll 1$, u_1, u_2-неизвестные, а a_1, a_2, f_1, f_2- известные вещественнозначные функции.

Пусть

$$\rho(z) = \bar{z}|z|^{n-1} = (x-iy)(x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}},\ n > 1,$$

используя $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$ — оператор Коши-Римана, с учетом $u = u_1 + iu_2$, $a = a_1 + ia_2$, $f(x,y) = f_1 + if_2$ записываем систему уравнений (1_0) в удобной форме для исследования, т.е. в комплексном виде:

$$\varepsilon\rho u_{\bar{z}} - au = f. \tag{1}$$

В данной работе алгоритмы метода регуляризации С.А. Ломова применяются для исследования уравнения (1), и решается задача типа Дирихле.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ—РИМАНА С ОСОБЕННОСТЬЮ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ

Ю.С. Федоров, А.М. Сергеева (Москва, НИУ "МЭИ"),(Москва, НИУ "МЭИ")
fedorovys@mpei.ru, hmelevs@ya.ru

ФИО на английском языке

Пусть область D содержит точку $z=0$ и ограничена простым гладким контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $D_0 = D \setminus \{0\}$, $D_\delta = D \cap \{|z| > \delta\}$ с малым $\delta > 0$.

В области D рассмотрим следующую сингулярно возмущенную систему уравнений Коши-Римана с сингулярным младшим коэффициентом:

$$\begin{cases} \varepsilon[x\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)] - 2(a_1u_1 - a_2u_2) = 2f_1, \\ \varepsilon[y\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) - x\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)] - 2(a_2u_1 + 2a_1u_2) = 2f_2, \end{cases} \tag{1_0}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 \ll 1$, и пусть для краткости $\rho(z) = \bar{z}$.

Используя $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$ — оператор Коши-Римана, с учетом $u = u_1 + iu_2$, $a = a_1 + ia_2$, $f(x,y) = f_1 + if_2$ записываем систему уравнений (1_0) в удобной форме для исследования, т.е. в комплексном виде:

$$\varepsilon\rho u_{\bar{z}} - au = f. \tag{1}$$

В данной работе алгоритмы метода регуляризации С.А. Ломова применяются для исследования уравнения (1), и решается задача типа Дирихле.

ТЕОРЕМА ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

В.В. Филатов (Волгоград, ВолГУ)
filatov@volsu.ru

Пусть M - произвольное некомпактное риманово многообразие с пустым краем, Δ - оператор Лапласа - Бельтрами, $g(x,\xi)$ - липшицева функция, определённая на $M \times \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям: $g(x,-\xi_1) = -g(x,\xi_1)$; $g(x,\xi_1) \geqslant g(x,\xi_2)$, $\forall \xi_1, \xi_2 : \xi_1 > \xi_2$. Рассмотрим решения полулинейного уравнения

$$Lu \equiv \Delta u - g(x,u) = 0. \tag{1}$$

на M. Вызывает интерес следующий вопрос: при каких условиях на M всякое ограниченное решение уравнения (1) есть тождественный ноль?

Пусть Ω - открытое подмножество M, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}-$ гладкое исчерпание M. Пусть u_k является решением следующей задачи Дирихле в $\Omega \cap B_k$ $\Delta u_k - g(x,u_k) = 0, u|_{\partial\Omega\cap B_k} = 0, u|_{\Omega\cap\partial B_k} = 1$.

Предельную функцию $u_\Omega = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, мы будем называть L - гармонической мерой множества Ω. В случае $\Omega = M$, функцию $L_M \equiv u_M$ называют функцией Лиувилля многообразия M.

Будем говорить, что многообразие M имеет L - параболический тип, если функция Лиувилля (см. [1]) $L_M \equiv 0$. В противном случае будем говорить, что M имеет L - гиперболический тип.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть M - многообразие L - параболического типа, тогда всякое ограниченное решение уравнения (1) есть тождественный ноль.*

Литература

1. Григорьян А.А., Лосев А.Г. О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях // Мат. физика и комп. моделирование — 2004. — Т.20, № 3. — С. 34–42.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90110).

О КОММУТАТИВНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р.Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

1. Результаты для линейных операторов в конечномерном пространстве (каждый такой оператор вполне определяется своей матрицей).

Пусть $M_n(\mathbb{C})$ — множество комплексных квадратных матриц порядка n; $GL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$, $D_n(\mathbb{C})$ — множество диагональных матриц из $M_n(\mathbb{C})$; $M_n^d(\mathbb{C})$ — множество диагонализуемых матриц из $M_n(\mathbb{C})$.

Теорема 1. *Пусть* $S \in GL(n,\mathbb{C})$, S *фиксирована; семейство* $P^n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ *коммутативно,* $P^n(\mathbb{C})$ *фиксировано. Тогда множество* $K^n_{S,P^n(\mathbb{C})}(\mathbb{C}) = \left\{A = SFS^{-1} : F \in P^n(\mathbb{C})\right\}$ *является коммутативным семейством матриц.*

Следствие 1. Пусть $S \in GL(n,\mathbb{C})$, S фиксирована. Тогда множество $K^n_{S,D_n(\mathbb{C})}(\mathbb{C}) = \left\{A = SFS^{-1} : F \in D_n(\mathbb{C})\right\}$ является коммутативным семейством матриц.

Следствие 2. Пусть $H \in M_n^d(\mathbb{C})$, H фиксирована. Тогда множество $K^n_{S_H,D_n(\mathbb{C})}(\mathbb{C}) = \left\{A = S_H F S_H^{-1} : F \in D_n(\mathbb{C})\right\}$, где S_H — трансформирующая матрица, осуществляющая диагонализацию матрицы H, является коммутативным семейством матриц, содержащим матрицу H.

2. Результаты для линейных операторов в банаховом пространстве.

Пусть E — банахово пространство; $\mathcal{L}(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве E; $G\mathcal{L}(E) = \left\{A \in \mathcal{L}(E) : \exists A^{-1} \in \mathcal{L}(E)\right\}$.

Теорема 2. *Пусть* $S \in G\mathcal{L}(E)$, S *фиксирован; семейство* $P \subset \mathcal{L}(E)$ *коммутативно,* P *фиксировано. Тогда множество* $K_{S,P} = \left\{A = SFS^{-1} : F \in P\right\}$ *является коммутативным семейством операторов.*

Пусть $\Phi(E)$ — пространство линейных операторов, действующих из E в E.

Лемма 1. *Пусть* $A, B \in \Phi(E)$; $BAx = ABx$, $x \in \Omega$, *где* $\Omega = D(AB) \cap D(BA)$; *существует* $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. *Тогда* $BA^{-1}y = A^{-1}By$, $y \in A(\Omega)$, *где* $A(\Omega) = \{y = Ax : x \in \Omega\}$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и, кроме того, существует* $B^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. *Тогда* $A^{-1}B^{-1}z = B^{-1}A^{-1}z$, $z \in B(A(\Omega))$, *где* $B(A(\Omega)) = \{z = By : y \in A(\Omega)\} = \{z = BAx : x \in \Omega\}$.

Пусть $A \in \Phi(E)$, $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A, $\Gamma_A(\lambda) = A - \lambda \mathrm{J}$.

Лемма 3. *Пусть* $A, B \in \Phi(E)$; $\rho(A) \neq \varnothing$; $BAx = ABx$, $x \in \Omega$. *Тогда* $BR_A(\lambda)y = R_A(\lambda)By$, $\lambda \in \rho(A)$, $y \in \Gamma_A(\lambda)(\Omega)$, *где* $\Gamma_A(\lambda)(\Omega) = \{y = \Gamma_A(\lambda)x : x \in \Omega\} = \{y = Ax - \lambda x : x \in \Omega\}$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3 и, кроме того,* $\rho(B) \neq \varnothing$. *Тогда* $R_A(\lambda)R_B(\mu)z = R_B(\mu)R_A(\lambda)z$, $\lambda \in \rho(A)$, $\mu \in \rho(B)$, $z \in \Gamma_B(\mu)\left(\Gamma_A(\lambda)(\Omega)\right)$, *где* $\Gamma_B(\mu)\left(\Gamma_A(\lambda)(\Omega)\right) =$
$\{z = \Gamma_B(\mu)y : y \in \Gamma_A(\lambda)(\Omega)\} = \{z = (B - \mu \mathrm{J})(A - \lambda \mathrm{J})x : x \in \Omega\}$.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВУЗЕ ОБУЧАЮЩИМСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ

И.И. Харламова (Волгоград,
Волгоградский институт управления – филиал РАНХиГС)
harlamova-ii@vlgr.ranepa.ru

Неотъемлемой частью современной высшей школы является инклюзивное образование обучающихся с ограниченными возможностями здоровья (далее – ОВЗ).

Для вузов это стало достаточно серьезным испытанием с точки зрения обеспечения доступности зданий, технической оснащенности, организации учебного процесса, обучения преподавательского состава и формирования методик преподавания обучающимся с ОВЗ.

В нашей стране есть уникальный в системе отечественной и мировой высшей школы опыт подготовки специалистов из числа инвалидов по слуху. МГТУ им. Н. Э. Баумана с 1934 года специализируется на работе с обучающимися с определенной нозологией нарушений, в вузе постепенно создавались соответствующие условия, формировались специальные методики обучения и сопровождения группы обучающихся с нарушениями слуха.

Но в большинстве вузов совсем другая ситуация, когда представлен весь спектр нозологий с единичными обучающимися по конкретному направлению подготовки. Т.е. практически каждый студент с ОВЗ является уникальным!

Основные проблемы и подходы к их решению:

1. Обучающиеся с ОВЗ не афишируют свои ограничения здоровья и чаще всего хотят учиться и учатся вместе с группой. Поэтому формулировки практических заданий, формы проведения лекций преподавателями адаптируются под них.

2. Не всегда присутствует однозначно положительное отношение сокурсников, чаще всего первокурсников, к обучающимся с ОВЗ, особенно если есть психофизические особенности. В этом случае нужна своевременная помощь профессиональных психологов для сплочения группы и взаимопомощи, а также ежедневное педагогическое мастерство преподавателей.

3. Домашние задания и дополнительный материал по дисциплинам требуют переработки с учетом особенностей, что позволяет лучше усвоить рассматриваемые темы.

Особенностью 2020 года стал переход на дистанционное обучение и, как следствие, размещение материала по дисциплинам в системе дистанционного обучения, что имеет несомненный плюс для более полного понимания и усвоения материала различными группами обучающихся.

Следует отметить, что очень многое зависит от условий, создаваемых вузом, и мастерства преподавателей для раскрытия потенциала обучающихся с ОВЗ, реализации в полной мере общечеловеческого права на образование и возможности дальнейшего трудоустройства.

О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ ВОРОНОГО

Ю.Х. Хасанов, М.М. Махамадиева (Душанбе, РТСУ)
yukhas60@mail.ru

Здесь, рассматривается суммирование рядов методом Вороного-Нерлунда, с помощью которого можно установить сходимость ряда и для расходящихся рядов. Дается основные определения о приближении периодических функции средними Вороного, а также о регулярности этого метода. Через наилучшие приближения тригонометрическими полиномами устанавливается оценка сверху отклонение функций от средних Вороного. Указывается, что метод, сохраняющий сходимость, будет регулярным тогда и только тогда, если начальный коэффициент как предел (при $n \to \infty$) отношение число p_n на сумму первых n элементов $S(p,n)$ существует.

Пусть измеримая и интегрируемая по Лебегу периода 2π функция $f(x)$ имеет ряд Фурье вида [1]

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k coskx + b_k sinkx,$$

где $a_0, a_k, b_k \ (k = 1, 2, \dots)$ — коэффициенты Фурье рассматриваемой функции.

Линейным оператором, или (W, p_n) — средними Вороного [2,с.60-61], называются средние вида

$$W_n(f; W; p_n) = \frac{1}{S(p,n)} \sum_{k=0}^{n} P_{n-k} S_k(f; x), \tag{1}$$

где $p_0 > 0, \ \ p_k \geqslant 0 \ \ (k = 1, 2, \dots), S(p,n) = p_0 + p_1 + \dots + p_n,$

$$S_k(f; x) = \sum_{v=0}^{k} A_v(x)$$

— частные суммы порядка k ряда Фурье функции $f(x)$. Средние, определенные формулой (1), называют суммирования рядов методом Вороного (Вороного - Нерлунда).

Известно, что [3,с.101] регулярности метода суммирования Вороного является условие

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{S(p,n)} = 0.$$

В работе [1] доказано, что если $p_v > p_{v+1} \to 0, \ \ S(p,v) \to \infty$, то для (W, p_n)- суммируемости ряд Фурье функции $f(x)$ в каждой ее точке непрерывности, необходимо и достаточно, чтобы последовательность чисел

$$\left\{ \frac{1}{S(p,n)} \sum_{v=1}^{n} \frac{S(p,v)}{v} \right\}$$

была ограниченной.

Из этой теоремы вытекает, что для непрерывной периода 2π функции $f(x)$ равномерно по x имеет место

$$\rho(f; x; W_n) = |f(x) - W_n(f; x; p_n)| \to 0 \ \ (n \to \infty). \tag{2}$$

Наряду с вышеприведенным результатом приводим следующее утверждение, в котором для каждого $n > 1$, содержится оценка сверху величины $\rho(f;x;W_n)$ через последовательность наилучших приближений функции в равномерной метрике.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — непрерывная, периодическая периода 2π функция и для этой функции и средние Вороного существует аппроксимация (2). Тогда имеет место следующая оценка*

$$\rho(f;x;W_n) \leqslant \frac{C}{S(p,n)} \sum_{v=0}^{m+1} \left\{ 2^v \sum_{k=2^v-1}^{2^{v+1}} p_{n-k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} E_{2^{v-1}}(f),$$

где

$$E_k(f) = \max_x |f(x) - T_k(x)|,$$

$T_k(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше k, осуществляющий наилучшее приближение функции $f(x)$ в равномерной метрике, $2^m \leqslant n \leqslant 2^{m+1}$, C — независимая константа.

Заметим, что аналогичные результаты для интегралов Фурье с множителями, получены в работах Л.Г. Бойцун [4]-[5].

Далее устанавливается теорема об абсолютной суммируемости степени p сопряженных рядов Фурье методом Вороного-Нерлунда.

Рассмотрим сопряженного ряда Фурье вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n cosnt - a_n sinnt$$

Введем обозначения

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)], \;\; R_n = \frac{(n+1)p_n}{P_n}, \;\; \tau = [\frac{1}{t}].$$

Теорема 2. *Если*

$$\int_0^x \frac{|\varphi'(t)|^p}{t^{p-1}} dt < \infty,$$

то сопряженный ряд Фурье функции $f(t)$ при $t = x$ будет $|W_n, p_n|_p$ - суммируем $(p \geqslant 1)$, где неотрицательная последовательность p_n удовлетворяет условиям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R_n - R_{n+1}| = O(1),$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p_k}{n^{1/p} P_{n-1}} = O(1).$$

Литература

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. — М. : ГИФМЛ, 1961. — 936 с.

2. Вороной Г.Ф. Расширение понятия о пределе суммы членов бесконечного ряда / Г.Ф. Вороной // Дневник XI-го съезда русских естествоиспытателей и врачей. С.-Петербург. — 1902. — С. 60–61.

3. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов / С.А. Барон . — Таллинн :Валгус, 1977. — 280 с.

4. Бойцун Л.Г. О суммировании тригонометрических интегралов Фурье методом Г.Ф.Вороного / Л.Г. Бойцун // Изв. вузов. Математика. — 1971. — № 10. — С. 16–23.

5. Бойцун Л.Г. Об абсолютной суммируемости сопряженных интегралов Фурье методом Г.Ф.Вороного / Л.Г. Бойцун // Изв. вузов. Математика. — 1967. — № 6. — С. 11–21.

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ И ИХ СИСТЕМ

В.Л. Хацкевич (Воронеж, ВУНЦ ВВС ВВА им. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина)
vlkhats@mail.ru

Одним из разделов бурно развивающейся теории нечетких множеств (см., напр., [1]) является теория нечетких чисел.

Ниже, под нечетким множеством A, заданным на универсальном пространстве X, будем понимать совокупность упорядоченных пар $(\mu_A(x), x)$, где функция принадлежности $\mu_A(x) : X \to [0, 1]$, определяет степень принадлежности $\forall x \in X$ множеству A.

Мы будем использовать следующее определение нечеткого (ср. [1] гл. 2-4). Нечетким числом $\tilde{z}$ называется нечеткое множество, универсальным множеством которого является множество действительных чисел, и которое дополнительно удовлетворяет следующим условиям: 1) носитель нечеткого числа - замкнутое и ограниченное (компактное) множество действительных чисел: $Supp(\tilde{z}) \subset R$; 2) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_{\tilde{z}}(x)$ выпукла; 3) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_{\tilde{z}}(x)$ нормальна; 4) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_{\tilde{z}}(x)$ полунепрерывна сверху.

Совокупность нечеткиз чисел обозначим J.

Как известно, интервалы α-уровня нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяются соотношениями

$$Z_\alpha = \{x|\mu_{\tilde{z}} \geqslant \alpha\} \ \ (\alpha \in (0,1]), Z_0 = supp(\tilde{z}).$$

Обозначим левую границу интервала Z_α через $z^-(\alpha)$, а правую - $z^+(\alpha)$.

Среднее значение нечеткого числа $\tilde{z}$, используя интервальное представление, можно определить следующим способом

$$m(\tilde{z}) = \frac{1}{2}\int_0^1 (z^-(\alpha) + z^+(\alpha))d\alpha. \tag{1}$$

Пусть $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ два нечетких числа. Зададим расстояние $\rho(\tilde{z},\tilde{u})$ между ними формулой

$$\rho(\tilde{z},\tilde{u}) = \left(\int_0^1 (z^-(\alpha) - u^-(\alpha))^2 + (z^+(\alpha) - u^+(\alpha))^2 d\alpha\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Здесь $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ - интервалы α-уровней нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$, соответственно.

Утверждение 1. *Среднее значение (1) нечеткого числа $\tilde{z}$ является единственным решением задачи*

$$\rho^2(\tilde{z},y) = \int_0^1 ((z^-(\alpha) - y)^2 + (z^+(\alpha) - y)^2)d\alpha \to \min \quad \forall y \in R.$$

Пусть заданы нечеткие числа $\tilde{z}_1$,..., $\tilde{z}_n$ и вещественные числа $\beta_i \geqslant 0$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^n \beta_i = 1$. Определим нечеткое среднее

$$\tilde{z}_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{z}_i. \tag{3}$$

Имеет место

Утверждение 2. *Среднее значение $m(\tilde{z}_{cp})$ нечеткого числа $\tilde{z}_{cp}$, определяемого формулой (3), является решением задачи*

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \rho^2(\tilde{z}_i, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int\limits_0^1 ((z_i^-(\alpha) - y)^2 + (z_i^+(\alpha) - y)^2) d\alpha \to \min \ (\forall y \in R),$$

где $z_i^-(\alpha)$ и $z_i^+(\alpha)$ - левые и правые индексы чисел $\tilde{z}_i$.

Кроме того, справедлива

Теорема 1. *Нечеткое среднее (3) является решением следующей задачи*

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int\limits_0^1 ((z_i^-(\alpha) - w^-(\alpha))^2 + (z_i^+(\alpha) - w^+(\alpha))^2) d\alpha \to \min \ \ (\forall \tilde{w} \in J),$$

причем единственным.

Как известно, расстояние Евклида между нечеткими числами $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ и $\mu_{\tilde{u}}(x)$ определяется равенством

$$d_E(\tilde{z}, \tilde{u}) = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu_{\tilde{z}}(x) - \mu_{\tilde{u}}(x))^2 dx \right)^{1/2}. \tag{4}$$

Выпуклой комбинацией нечетких чисел $\tilde{z}_i$ $i = 1, ..., n$ с функциями принадлежности $\mu_i(x)$ называют нечеткое число $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \mu_i(x)$. Здесь вещественные числа β_i таковы, что $\beta_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$.

Обозначим через $\Phi_{\text{пр}}$ совокупность функций принадлежности, удовлетворяющих условиям из определения нечеткого числа.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i d_E^2(\tilde{z}_i, \tilde{z}_\eta) \to \min \ \ (\eta \in \Phi_{\text{пр}}), \tag{5}$$

где $\tilde{z}_\eta$ - нечеткое число с функцией принадлежности $\eta(x)$, а расстояние d_E определяется формулой (4).

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть заданы нечеткие числа $\tilde{z}_i$ $(i = 1, ..., n)$ с функциями принадлежности $\mu_i(x)$. Тогда их выпуклая комбинация является решением экстремальной задачи (5), причем единственным.*

Средние значения нечетких чисел широко изучены в различных аспектах (см., напр., [2]-[4]). Однако, анонсируемые в настоящей работе результаты представляются новыми.

Литература

1. Пегат А. Нечеткое математическое моделирование и управление / А. Пегат. — М. : Бином. Лаборатория знаний, 2015. — 798 с.

2. D. Dubois, H. Prade The mean value of fuzzy number / Fuzzy sets and systems, 1987, pp. 279-300

3. Fuller R., Majlender P. On weighted possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers / Fuzzy sets and systems, 2003. Vol. 136, P. 363-374

4. Nguyen H. T., Wu B. Fundamentals of statistics with fuzzy data / H.T. Nguyen, B. Wu. — Berlin : Springer, 2006. — 204 p.

СОЛНЦА В ПРОСТРАНСТВАХ L^1 И $C(Q)$[1]

И.Г. Царьков (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова механико-математический факультет, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики)

tsar@mech.math.msu.su

Через $B(x,r)$ и $\mathring{B}(x,r)$ обозначим соответственно замкнутый и открытый шар в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ (в дальнейшем для краткости будем обозначать как X) с центром x радиуса r, т.е. соответственно множества $\{y \in X \mid \|y-x\| \leqslant r\}$ и $\{y \in X \mid \|y-x\| < r\}$. Для произвольного непустого множества M в некотором нормированном пространстве X через $\varrho(y, M)$ ($y \in X$, $M \subset X$) обозначим расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z\in M} \|z-y\|$.

Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y-x\| = \varrho(x, M)\}$.

Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая *точкой светимости*) такая, что $y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geqslant 0$. Если все точки из $X \setminus M$ являются точками солнечности, то множество M называют солнцем.

Путь $p : [0,1] \to X$ (непрерывное отображение) в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ называется монотонным, если

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332-а).

для любого функционала $x^* \in \operatorname{ext} S^*$ функция $x^*(p(t))$ является монотонной. Множество M называется монотонно линейно связным, если любые две точки этого множества можно соединить монотонным путем, след которого лежит в M.

Теорема 1. *Пусть K является солнцем в $L^1[0,1]$ и для некоторого шара $B(x_0, r_0)$ $(x_0 \in K, r_0 > 0)$ пересечение $K \cap B(x_0, r_0)$ компактно. Тогда K – ограниченно компактное выпуклое множество.*

Теорема 2. *Пусть $X = C(Q)$, M – ограниченно слабо компактное солнце в пространстве X. Тогда множество M является в $C(Q)$ монотонно линейно связным.*

СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТЫ С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА ГЛАДКОСТИ[1]

С.А. Чумаченко (Саратов, СГУ им.Н.Г.Чернышевского)
chumachenkosergei@gmail.com

Пусть $If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ $(x \in [0,1])$ – оператор интегрирования, $W_{2^n-1}(x) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ – функции Уолша, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

Определение 1. *Функцию*

$$\psi_{n,N}(x) = \begin{cases} Qn, NI^N W_{2^n-1}(x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

будем называть двоичным базисным сплайном n-й степени N-го порядка гладкости($N \leqslant n, N \in \mathbb{N}$), где $Q_{n,N}$ - нормирующий коэффициент в $C[0,1]$

В [1] было доказано, что система сжатий и сдвигов функции $\psi_{n,n}(x)$ является базисом в пространстве $C[0,1]$

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\psi_{n,n}(x) =$$
$$= \frac{1}{2^n}\psi_{n,n}(2x - 0) + \sum_{t=1}^{2^n-1} \frac{1}{2^{n-1}}\psi_{n,n}\left(2x - \frac{t}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}\psi_{n,n}(2x-1).$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

Лемма 1. *Пусть* $F(x) = \psi\left(\frac{x}{2^n}\right)$. *Определим преобразование Фурье равенством*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-2\pi i\omega x} dx.$$

Тогда

$$\hat{F}(\omega) = \frac{Q_{n,n}}{2} \left(\frac{1}{\pi i\omega}\right)^{n+1} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - e^{-2^k \pi i\omega}\right)$$

При $m \in \mathbb{Z}$ образуем подпространства $V_m = \overline{(2^{\frac{m}{2}} F(2^n x + k)_{k\in Z})}$

Определение 2. *Если выполнены условия (аксиомы)*

A1) $V_m \in V_{m+1}$,

A2) $\bigcup_{m\in Z} V_m = L_2(\mathbb{R})$,

A3) $\bigcap_{m\in Z} V_m = 0$,

то совокупность $(V_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ *называют обобщенным кратномасштабным анализом. Говорят также, что функция* φ *порождает обобщенный КМА.*

Теорема 2. *Совокупность* $(V_n)_{n\in Z}$ *образует обобщенный КМА.*

Замечание 1. Из леммы 1 видно, что КМА не является риссовским, так как не существует положительной константы, ограничивающей $\hat{F}$ снизу.

Определение 2.*Пусть* $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. *Выражение*

$$[f, g](\omega) \overset{df}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\omega + k) \overline{g(\omega + k)}$$

называют скобочным произведением.

Определение 3. *Пусть* $s > 0$. *Выражение*

$$W_2^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : ||f||_{W_2^s(\mathbb{R})} = ||\left(1 + |\cdot|\right)^s \hat{f}||_{L_2(\mathbb{R})} < +\infty \right\}$$

называют пространством Соболева.

Определение 4.*Пусть* $\varphi \in L_2(\mathbb{R}), \varphi_{m,k}(x) = 2^{\frac{m}{2}} \varphi(2^n x + k)$. *Оператор*

$$\beta_m : f \to \sum_{k\in Z} (f, \varphi_{n,k}) \varphi_{n,k}$$

называют квазиинтерполяционным оператором.

Определение 5.*Оператор* β_m *доставляет аппроксимацию порядка* $t \in \mathbb{R}_+$, *если* $||f - \beta_m f||_{L_2(\mathbb{R})} = O(2^{-mt})$.

Теорема 3. *Оператор β_m, построенный по функции $\varphi(x) = C_n F(x)$ доставляет аппроксимацию порядка 1.*

Литература

1. Чумаченко С.А. Гладкие аппроксимации в C[0,1] /С.А. Чумаченко //Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, —2020. — Т. 20, вып. 3. — С. 326–342.

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ РАДОНА–НИКОДИМА[1]

С.А. Шабров, О.М. Ильина, М.В. Шаброва, Ф.В. Голованева (Воронеж, Воронежский государственный университет)

shabrov_s_a@math.vsu.ru, olga-rodionova-rodionova, koshka445@mail.ru; gfainav@mail.ru

В этой работе метод разделения переменных применяется для нахождения точного решения математической модели шестого порядка с негладкими решениями. Возникающие трудности анализируются, в частности спектральную задачу, мы используем поточечный метод интерпретации решений, предложенный Ю. В. Покорный. Этот метод показал свою эффективность при построении точной параллели классической теории дифференциальных уравнений, включая осцилляционные теоремы как второго, так и четвертого порядка.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РНФ (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском госуниверсите.

Мы изучаем математическую модель, реализуемая в виде смешанной задачи

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma} - \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma} + \left(qu'_x\right)'_\sigma - uQ'_\sigma + f(x,t); \\ -\left(pu'''_{xx\mu}\right)(0,t) + \gamma_1 u''_{xx}(0,t) = 0; \\ \left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(0,t) - ru''_{xx}(0,t) + \gamma_2 u'_x(0,t) = 0; \\ -\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(0,t) + \left(ru''_{xx}\right)'_x(0,t) - gu'_x(0,t) + \gamma_3 u(0,t) = 0; \\ \left(pu'''_{xx\mu}\right)(\ell,t) + \gamma_4 u''_{xx}(\ell,t) = 0; \\ -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(\ell,t) + ru''_{xx}(\ell,t) + \gamma_5 u'_x(\ell,t) = 0; \\ \left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\ell,t) - \left(ru''_{xx}\right)'_x(\ell,t) + gu'_x(\ell,t) + \gamma_6 u(\ell,t) = 0; \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u_t(x,0) = \psi_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

которая возникает при описании малых поперечных вынужденных колебаний стержневой системы с внутренними особенностями и помещенной на двойное упругое основании с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости у решения.

Решение уравнения в (1) мы будем искать в классе E функций $u(x,t)$, каждая из которых при каждом фиксированном t является непрерывно дифференцируемой по x на $[0;\ell]$ функцией, производная $u'_x(x,t)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, вторая производная $u''_{xx}(x,t)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; третья производная $u'''_{xx\mu}(x,t)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение; квазипроизводная $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x,t)$ непрерывно дифференцируема на $[0;\ell]$; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x,t)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x,t)$ — σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; при каждом фиксированном x $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по t. При этом под решением математической модели (1) мы будем понимать функцию из класса E, удовлетворяющую граничным и начальным условиям из (1).

Уравнение

$$M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma} - \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma} + \left(qu'_x\right)'_\sigma - uQ'_\sigma + f(x,t)$$

задано почти всюду (по мере σ) на декартовом произведении расширения $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ отрезка $[0;\ell]$ и временного промежутка $[0;T]$. Множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ строится следующим образом. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На $J_\sigma = [0;\ell]\setminus S(\sigma)$ зададим метрику $\varrho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Полученное метрическое пространство

$(J_\sigma;\sigma)$ не является полным. Стандартное пополнение приводит (с точностью до изоморфизма) к множеству $\overline{[0;\ell]}_S$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на пару собственных значений $\xi - 0$, $\xi + 0$, которые ранее были предельными. Индуцируя упорядоченность с исходного множества, придем к неравенствам $x < \xi - 0 < \xi + 0 < y$ для всех x, y для которых выполнялись неравенства $x < \xi < y$ в исходном отрезке.

Функцию $v(x)$ в точках $\xi - 0$ и $\xi + 0$ множества $\overline{[0;\ell]}_S$ определим предельными значениями. Для определенной таким образом функции сохраним прежнее обозначение. Определенная на этом множестве функция становится непрерывной в смысле метрики $\varrho(x;y)$.

Объединение $\overline{[0;\ell]}_S$ и $S(\sigma)$ нам дает множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$. Мы считаем, что уравнение задано именно на этом множестве, причем в точках $\xi \in S(\sigma)$ само уравнение принимает вид

$$M'_\sigma(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t) = \Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi,t) - \Delta\left(ru''_{xx}\right)'_{x}(\xi,t) +$$

$$+\Delta\left(g(x)u'_x\right)(\xi,t) - u(\xi,t)\Delta Q(\xi),$$

где $\Delta v(\xi) = v(\xi+0) - v(\xi-0)$ — полный скачок функции $v(x)$ в точке ξ.

Рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{cases} LX \equiv -\left(pX'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma} + \left(rX''_{xx}\right)''_{x\sigma} - \left(qX'_x\right)'_\sigma + XQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma X(x); \\ \wp_1 X \equiv -\left(pX'''_{xx\mu}\right)(0) + \gamma_1 X''_{xx}(0) = 0; \\ \wp_2 X \equiv \left(pX'''_{xx\mu}\right)'_x(0) - rX''_{xx}(0) + \gamma_2 X'_x(0) = 0; \\ \wp_3 X \equiv -\left(pX'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(0) + \left(rX''_{xx}\right)'_x(0) - gX'_x(0) + \gamma_3 X(0) = 0; \\ \wp_4 X \equiv \left(pX'''_{xx\mu}\right)(\ell) + \gamma_4 X''_{xx}(\ell) = 0; \\ \wp_5 X \equiv -\left(pX'''_{xx\mu}\right)'_x(\ell) + rX''_{xx}(\ell) + \gamma_5 X'_x(\ell) = 0; \\ \wp_6 X \equiv \left(pX'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\ell) - \left(rX''_{xx}\right)'_x(\ell) + gX'_x(\ell) + \gamma_6 X(\ell) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

которая возникает при применении метода Фурье для нахождения решения (1). Здесь λ — спектральный параметр.

Пусть выполнены следующие условия:

1. $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ имеют конечное на $[0;\ell]$ изменение.

2. $\inf\limits_{x\in[0;\ell]} p(x) > 0$.

3. $r(x)$ и $g(x)$ абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$.

4. $Q(x)$ не убывает на $[0;\ell]$.

5. функция $\mu(x)$, порождающая на $[0;\ell]$ меру, строго возрастает на $[0;\ell]$.

При выполнении этих условий доказано, что спектр задачи (2) вещественен, состоит из собственных значений, геометрическая кратность каждого из них конечна, а алгебраическая — равна единице.

Теорема 1. *Пусть пусть выполнены условия 1–5; $\{\lambda_n\}$ — собственные значения задачи* (2)*, причем каждое из них записаны столько, какова их геометрическая кратность. Тогда, ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2/3+\delta}}$$

сходится при любом $\delta > 0$.

Доказанная теорема позволяет обосновать возможность применения метода разделения переменных.

Для удобства введем следующий класс функций: множество E_σ состоит из функций $X(x)$, каждая из которых непрерывно дифференцируема на $[0;\ell]$ функцией, производная $X'_x(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, вторая производная $X''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; третья производная $X'''_{xx\mu}(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение; квазипроизводная $\left(pX'''_{xx\mu}\right)(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0;\ell]$; $\left(pX'''_{xx\mu}\right)'_x(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pX'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$;

Получены достаточные условия применимости метода разделения переменных для нахождения точного решения задачи (1), причем полученный ряд можно дифференцировать по t дважды, и на $[0;\ell]$ шесть раз: сначала дважды по x, потом по μ, снова дважды по x, и затем по σ; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике $[0;\ell] \times [0;T]$.

Литература

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

4. Шабров, С. А. Качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка : математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров. — Саарбрюккен : Lap Lambert Academic Publishing, 2015. — 162 с.

5. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

6. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

7. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

8. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

9. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, № 4. — С. 13–17.

10. Давыдова, М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

11. Дифференциал Стилтьеса в импульсных задачах с разрывными решениями / М. Б. Давыдова, Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 428, № 5. — С. 595–597.

12. Зверева, М. Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями: качественная теория / М. Б. Зверева. — Саарбрюккен, 2012. — 112 с.

13. Покорный, Ю. В. О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Математика и механика сплошных сред. Спецвыпуск. Ростов-на-Дону. — 2004. — С. 186–190.

14. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

15. Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 3 (12). — С. 65–73.

16. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

17. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

18. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

ОБ АДАПТАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ[1]

С.А. Шабров, Д.А. Литвинов (Воронеж, Воронежский государственный университет, Воронежский государственный университет инженерных технологий)

shaspoteha@mail.ru, d77013378@yandex.ru

В этой работе метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения математической модели, описывающей малые вынужденные колебания натянутой сетки из струн. Отметим, что этот метод адаптирован для нахождения приближенных решений некоторых математических моделей второго, четвертого порядков с негладкими решениями ([1]–[7]).

Пусть Γ — геометрическая сеть из R^n, реализованная в виде открытого геометрического графа. Мы считаем, что Γ состоит из некоторого набора непересекающихся интервалов

$$\gamma_i = (a_i, b_i) = \{x = a_i + \lambda(b_i - a_i) : 0 < \lambda < 1\}, (i = 1, 2, \ldots, N),$$

называемых ребрами и некоторой совокупности их концов. Множество этих концов обозначается далее через $I(\Gamma)$, каждая его точка называется внутренней вершиной (узлом) графа Γ. Концы интервалов не включенных в $I(\Gamma)$, называются граничными вершинами Γ, их множество обозначается через $\partial\Gamma$. Объединение всех ребер обозначается через $R(\Gamma)$. Таким образом, $\Gamma = R(\Gamma) \cup I(\Gamma)$. Индуцируем на Γ топологию из R^n. Всюду далее, когда будет идти речь об открытых и замкнутых подмножествах Γ, будет иметься в виду именно топология. Такого рода сети (графы) возникают при описании самых разных топологических систем. Применяемая при этом стандартная теория графов подходит лишь тогда, когда ребра являются только символами связи между объектами, когда сами связи достаточно просты и в первую очередь важно, есть ли связь между данной парой объектов или нет. Интересующие нас системы в корне другие. В них ребра отвечают реальным одномерным континуумам, на которых возможна достаточно нетривиальная динамика, как в

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF–2020–0009), при финансовой поддержке РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта № 20–51–15003 НЦНИ–а.

упругих сетях, электрических цепях, в системах волноводов и в нейронных сетях. Для того, чтобы подчеркнуть значимость ребер мы далее постоянно употребляем слова «сеть» и «граф» как синонимы.

Под производной на графе $\frac{\partial u}{\partial \Gamma}$ мы понимаем обычную производную $u'_x(x)$, если x является внутренней точкой ребра и $\sum\limits_{i=1}^{N}(-1)^{\mu_i(a_k)}u_i(a_k)$, если x совпадает с одной из точек множества $I(\Gamma)$, где

$$\mu_i(\alpha_k)=\begin{cases} 1, \text{если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана к вершине } \alpha_k; \\ 0, \text{если ориентация на ребре } \gamma_i \text{ выбрана от вершины } \alpha_k. \end{cases}$$

Так же нам понадобится следующее обозначение

$$\nu(b_i) = \begin{cases} 1, \text{если ориентация выбрана от вершины } b_i \in \partial\Gamma; \\ 0, \text{если ориентация выбрана к вершине } b_i \in \partial\Gamma. \end{cases}$$

Пусть на каждом ребре γ_i графа задана возрастающая функция $\sigma_i(x)$ (в смысле ориентации ребра), порождающая на нем меру, которая соизмерима с наблюдаемым процессом. Каждой внутренней точке $a \in I(\Gamma)$ припишем ненулевую меру $\sigma\{a\}$. Интеграл по Γ зададим следующим образом

$$\int\limits_{\Gamma} u(x)\,d\Gamma = \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\gamma_i} u_i(x)\,d\sigma_i(x) + \sum_{a\in I(\Gamma)} u(a)\sigma\{a\},$$

где $u_i(x)$ — сужение $u(x)$ на i–ое ребро.

Рассмотрим следующую математическую модель

$$\begin{cases} M'_{\Gamma}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \Gamma}(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - u\frac{dq}{d\Gamma} + f(x;t)\ , \\ K_i u(b,t) + (-1)^{\nu(b)}p(b)u'_x(b,t)|_{b\in\partial\Gamma} = 0 \\ u(x,0) = \psi_0(x)\ ; \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x). \end{cases} \tag{1}$$

Эта модель возникает при описании малых поперечных вынужденных колебаний натянутой сетки из струн, расположенной вдоль графа Γ.

Здесь $p(x)$ — сила натяжения струны в точке $x \in R(\Gamma)$, $q(x)$ характеризует упругость струны в точке x, $f(x,t)$ — плотность внешней силы в точке x в момент времени t, $u(x,t)$ — отклонение точки x от положения равновесия в момент времени t, произошедший под воздействием силы $f(x,t)$, $K_i : i = \overline{1,r}$ — жесткости пружин, установленных в граничных точках b_i, $m(x)$ — функция, равная плотности струны в точке $x \in \Gamma \backslash I(\Gamma)$ и массе в точке $x \in I(\Gamma)$, $\psi_0(x)$ — отклонение точки x от положения равновесия в начальный момент времени, $\psi_1(x)$ — начальная скорость точки x.

Пусть ребра графа занумерованы некоторым способом. Каждое ребро графа разобьем на конечное число интервалов (здесь ребро рассматривается как отрезок, лежащий в R^n), точки разбиения обозначим через $\{x_j^i\}$, где i номер ребра, $j = \overline{1, N_i}$ — номер точки i-го ребра, где N_i — количество точек на i-ом ребре . Здесь $i = \overline{1, N}$, где N количество ребер графа. Без ограничения общности можно считать $\{x_j^i\}$ на каждом ребре занумерованы в порядке возрастания в смысле ориентации. Таким образом, $\{x_0^i\}$ и $\{x_{N_i}^i\}$ — начало и конец i-го ребра.

Введем следующие функции

$$\varphi_j^i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}^i}{x_j^i - x_{j-1}^i} \text{ для } x \in [x_{j-1}^i; x_j^i] \\ \frac{x - x_{j+1}^i}{x_{ij} - x_{j+1}^i} \text{ для } x \in [x_j^i; x_{j+1}^i] \\ 0 \text{ для остальных } x, j = \overline{1, N_i - 1}; \end{cases} \tag{2}$$

$$\overline{\varphi}_0^i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1^i}{x_0^i - x_1^i} \text{ для } x \in [x_0^i; x_1^i] \\ 0 \text{ для остальных } x; \end{cases} \tag{3}$$

$$\overline{\varphi}_{N_i}^i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N_i-1}^i}{x_{N_i}^i - x_{N_i-1}^i} \text{ для } x \in [x_{N_i-1}^i; x_{N_i}^i] \\ 0 \text{ для остальных } x. \end{cases} \tag{4}$$

Для каждой внутренней вершины $a_k \in I(\Gamma)$ введем два множества индексов ребер, которые примыкают к ней: первое множество $I_1(a_k)$ это множество индексов ребер, которое является началом ребра, а второе $I_2(a_k)$ — концом.

Введем теперь функцию

$$\varphi_{\alpha_k}(x) = \sum_{i \in I_1(\alpha_k)} \overline{\varphi}_0^i(x) + \sum_{i \in I_2(\alpha_k)} \overline{\varphi}_{N_i}^i(x).$$

Положим для каждой граничной точки b

$$\overline{\varphi}_b(x) = \begin{cases} \overline{\varphi}_0^{i_0}(x), \text{если ориентация выбрана от вершины } b \in \partial\Gamma; \\ \overline{\varphi}_{N_{i_0}}^{i_0}(x), \text{если ориентация выбрана к вершине } b, \end{cases}$$

где i_0 — номер ребра, для которого b является граничной вершиной.

Базисные функции, которые состоят из $\varphi_j^i(x)$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N_i - 1}$, $\varphi_{\alpha_k}(x)$, $\overline{\varphi}_b(x)$, занумеруем каким-либо способом.

Нетрудно видеть, что количество базисных функций равно

$$M = \sum_{i=1}^{N}(N_i - 1) + |I(\Gamma)| + |\partial\Gamma|,$$

где $|X|$ — мощность конечного множества X.

Обозначим занумерованные функции через $\varphi_k(x)$ $(k = \overline{1, M})$.

Вместо искомой функции $u(x,t)$ будем искать лишь ее значения в точках разбиения в определенные моменты времени. В связи с этим будем использовать в задаче (1) вместо $u(x,t)$ кусочно-непрерывную функцию

$$u_M(x,t) = \sum_{i=1}^{M} a_i(t)\varphi_i(x). \tag{5}$$

Доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть $M'_\Gamma(x) > 0, Q'_\Gamma(x) > 0, p(x) > 0$ на Γ и начальные условия таковы, что математическая модель (1) имеет единственное решение в классе E; $u(x,t)$ и $u_M(x,t)$ — точное и приближенное, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов, решения. Тогда, справедливо неравенство*

$$\max_t\{(w(\cdot,\ t); w(\cdot,\ t)) + [w(\cdot,\ t); w(\cdot,\ t)]\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{c}\cdot\sqrt{h}, \tag{6}$$

где $w(x,t) = u(x,t) - u_M(x,t)$, h — наибольшая из разностей $\Delta x_j^i = x_{j+1}^i - x_j^i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 0, 1, \ldots N_i - 1$.

Литература

1. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

2. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

3. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

4. Голованёва, Ф. В. Адаптация метода конечных элементов для одной математической модели второго порядка с негладкими решениями / Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров, М. Меач // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. — 2016. — № 1 (22). — С. 89–92.

5. Шабров С. А. Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Ф. В. Голованёва // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2017. — № 4. — С. 145–157.

6. Об адаптации метода конечных элементов для модели колебаний струны с разрывными решениями / Ж. И. Бахтина, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2018. — № 2. — С. 106–117.

7. Об адаптации метода конечных элементов для математической модели шестого порядка / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2018. — № 3. — С. 77–90.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ГЛАДКОМУ МНОГООБРАЗИЮ

М.В. Шамолин (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова)
shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Описание диссипации в динамической системе является довольно затруднительной задачей. Но это, к примеру, может быть сделано следующим образом: вполне определенные коэффициенты указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях — на подкачку энергии. Это приводит к потере классических первых интегралов (законов сохранения), глобально выражающихся через гладкие функции.

Топологическим препятствием к наличию в системе полного набора гладких первых интегралов являются притягивающие или отталкивающие предельные множества. При их обнаружении необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всем фазовом пространстве автономных первых интегралов [1].

При исследовании систем с диссипацией если и удается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле теории функций комплексного переменного) функциями (имеющими существенно особые точки). Поэтому результаты, полученные в данной работе, особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Отдельно отмечены важные частные случаи интегрируемости динамических систем на касательном расслоении к многомерной сфере. В динамике они соответствуют движению многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил, а, в случае двумерной сферы, — классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды [1, 2].

Данная тематика уже затрагивалась в ряде других работ автора (см., например, [3]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем, которые рассматриваются на касательном расслоении к конечномерному гладкому многообразию. При этом вводимые силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Работа также тесно связана с [4], где обсуждается связь тензорных инвариантов систем дифференциальных уравнений с проблемой их точного интегрирования, а также с [5], где рассматриваются динамические системы, которые описываются квазиоднородными системами дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями.

Литература

1. Шамолин М.В. Интегрируемые динамические системы с диссипацией. Кн. 1. Твердое тело в неконсервативном поле / М.В. Шамолин. — М. : ЛЕНАНД, 2019. — 456 с.

2. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Ма-

тематика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 491, № 1. — С. 95–101.

3. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией / М.В. Шамолин // Доклады РАН. — 2019. — Т. 485, № 5. — С. 583–587.

4. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи мат. наук. — 2019. — Т. 74, № 1. — С. 117–148.

5. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем / В.В. Козлов // Прикл. матем. и механ. — 2015. — Т. 79, № 3. — С. 307–316.

О ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)
nashananin@inbox.ru

Обозначим через $\mathcal{K}_x(P)$ ядро билинейной формы

$$\mathcal{B}_x(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial p_2}{\partial\xi_j}(x,\xi)\eta_j,$$

порожденной старшим символом $p_2(x,\xi)$ линейного дифференциального оператора

$$P=\sum_{|\alpha|\leqslant 2}a_\alpha(x)D^\alpha,\; D_k=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},\; i^2=-1,$$

определенного в открытом множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ и имеющего с C^∞-коэффициенты. Точки множества $(x,\mathcal{K}_x(P)\setminus\{0\})$ являются двукратными характеристическими точками оператора P. На ковекторах $\xi\in\mathcal{K}_x(P)$ инвариантно определен субглавный символ оператора: $p_{\mathrm{sub}}(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=1}a_\alpha(x)\xi^\alpha+\frac{i}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2p_2}{\partial x_l\partial\xi_l}(x,\xi)$ Будем говорить, что оператор P является *квазиэллиптическим*, если $p_2(x,\xi)+p_{\mathrm{sub}}(x,\eta)\neq 0$ при всех $(x,\xi,\eta)\in\Omega\times(T^*_x\Omega\setminus\mathcal{K}_x(P))\times\mathcal{K}_x(P)$. Если размерность ядра $\mathcal{K}_x(P)$ не зависит от выбора точки $x\in\Omega$, то отображение $x\to\mathcal{K}_x(P)$ порождает в касательном расслоении дифференциальную систему

$$\mathcal{L}(P)=\{(x,\tau)\in T\Omega\,|\,\xi(\tau)=0\,\forall\xi\in\mathcal{K}_x(P)\}.$$

Предположим, что

(1) ядро $\mathcal{K}_x(P)$ одномерно в каждой точке $x \in \Omega$;
(2) дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ инволютивна.

Теорема 1. *Если оператор P удовлетворяет условиям* (1) *и* (2) *и является квазиэллиптическим, то он является гипоэллиптическим на* Ω.

Говорят, что гиперповерхность S, определенная локально в окрестности U точки x^0 уравнением $\psi(x) = 0$ с отличным от нуля в каждой точки U дифференциалом, называется нехарактеристической для оператора P в точке x^0, если $p_2(x^0, d\psi(x^0)) \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть гиперповерхность S является нехарактеристической в точке x^0 для квазиэллиптического оператора P, удовлетворяющего условиям* (1) *и* (2), *и $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда из равенств $Pu^1(x) = Pu^2(x)$ в некоторой окрестности W точки x^0 и $u^1(x) = u^2(x)$ в $W \cap \{\psi(x) < 0\}$ следует равенство $u^1(x) = u^2(x)$ в некоторой окрестности точки x^0.*

Говорят, что ростки обобщенных функций $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ равны в точке $x^0 \in \Omega$ и пишут $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$, если существует открытая окрестность $V \subset \Omega$ этой точки, в которой $u^1(x) = u^2(x)$, то есть для любой основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ с носителем $\operatorname{supp} \varphi(x) \subset V$ выполняется равенство $\langle u^1, \varphi \rangle = \langle u^2, \varphi \rangle$. Если P удовлетворяет условиям (1) и (2), то для каждой точки $x^0 \in \Omega$ найдется максимальное связное интегральное подмногообразие $\mathcal{M}_{x^0}$ дифференциальной $\mathcal{L}(P)$, содержащее точку x^0. Пусть Υ – связное, непрерывно вложенное в Ω, k-мерное подмногообразие.

Теорема 3. *Пусть квазиэллиптический оператор P удовлетворяет условиям* (1) *и* (2), *$u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда из включения $x^0 \in \Upsilon \subset \mathcal{M}_{x^0}$, равенства ростков $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ в точке x^0 и равенств ростков $Pu^1_x \cong Pu^2_x$ при $x \in \Upsilon$ следует $u^1_x \cong u^2_x$ при $x \in \Upsilon$.*

Доказательства теорем, а также следствия из них можно найти в указанной ниже статье.

Литература

1. Шананин Н.А. Об однозначном продолжении решений квазиэллиптических уравнений второго порядка / Н.А. Шананин // Матем. заметки — 2020. — Т. 108, № 2. — С. 316–320.

МЕТОД ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

А.Н. Шелковой (Воронеж)
shelkovoj.aleksandr@mail.ru

Рассматривается дифференциальный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$ и порождаемый дифференциальным выражением $(\mathcal{L}y)(t) = -\ddot{y}(t) + y(t)$ и нелокальными краевыми условиями

$$y(0) = y(2\pi) + \int_0^{2\pi} a_0(t)y(t)dt; \; y(1) = \dot{y}(2\pi) + \int_0^{2\pi} a_1(t)y(t)dt.$$

Здесь a_0 и a_1 — функции из $L_2[0, 2\pi]$. Для исследования спектра оператора $\mathcal{L}$ рассмотрим сопряжённый ему оператор $\mathcal{L}^*$, который задаётся дифференциальным выражением

$$(L^*x)(t) = -\ddot{x}(t) + x(t) - [\dot{x}(2\pi)a_0(t) - x(2\pi)a_1(t)]$$

и краевыми условиями $x(0) = x(2\pi)$; $\dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$.

Методом подобных операторов получены оценки собственных значений, а также доказана сходимость спектральных разложений исследуемого класса операторов.

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 1987. — 164 с.

2. Шелковой А.Н. Оценки собственных значений и собственных функций одного дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями / А.Н. Шелковой // Вестник факультета прикладной математики и механики.— 2000. — № 2. — С. 226–235.

3. Шелковой А.Н. Спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка, определяемого нелокальными краевыми условиями / А.Н. Шелковой // Математическая физика и компьютерное моделирование.— 2018. — Т. 21, № 4. — С. 18–33.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДУБИНИНА ДЛЯ ВЕСОВОЙ ЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРА ХЕССЕ С A_1-ВЕСОМ МАКЕНХАУПТА

В.А. Шлык (Владивосток, ВФ РТА, ИПМ ДВО РАН)
shlykva@yandex.ru

Равенство p-емкости и p-модуля конденсатора с двумя пластинами для $p \in (1; +\infty)$ и его приложения достаточно полно изложены в литературе (см.,напр., [1]). В.Н. Дубинин [2, problem 2.1] поставил задачу о нахождении аналога упомянутого выше равенства в конформном случае, когда число пластин конденсатора конечно и больше двух. В [3] дано решение этой задачи в более общей постановке для весовой емкости конденсатора с A_p-весом Макенхаупта, где $p \in (1; +\infty)$. Ниже мы распространяем этот результат на случай весовой емкости конденсатора Хессе [4] с A_1-весом Макенхаупта [5].

Пусть Ω — открытое множество в R^n, $n \geqslant 2$, и $E_0, E_1, \ldots, E_m \subset \Omega$ — попарно непересекающиеся непустые компакты; $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m$ — попарно различные вещественные числа. Тогда тройку $\mathcal{K} = (\mathcal{E}, \Delta, \Omega)$, где $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i=0}^m$ и $\Delta = \{\delta_i\}_{i=0}^m$, назовем конденсатором Хессе на Ω. Множества E_i и $\Omega \setminus E$, где $E = \bigcup\limits_{i=0}^{m} E_i$, назовем соответственно пластинами и полем конденсатора $\mathcal{K}$. Величину $Cap\, \mathcal{K} = \inf\limits_u \int\limits_\Omega |\nabla u| \omega\, dx$ назовем $(1, \omega)$-емкостью конденсатора $\mathcal{K}$. Здесь инфимум берется по всем вещественнозначным функциям u, удовлетворяющим локально условию Липшица на Ω и равным δ_i в некоторой окрестности множества E_i, $i = 0, \ldots, m$; ω является A_1-весом Макенхаупта. С конденсатором $\mathcal{K}$ мы ассоциируем конфигурацию
$\alpha H = (\alpha_{01} H_{01}, \ldots, \alpha_{m-1,m} H_{m-1,m})$. Здесь H_{ij} — семейство всех локально спрямляемых кривых γ в $\Omega \setminus E$, которые соединяют множества E_i и E_j, $\alpha_{ij} = |\delta_i - \delta_j|$, $0 \leqslant i < j \leqslant m$. Определим $(1, \omega)$-модуль конфигурации αH, или, иначе, $(1, \omega)$-модуль конденсатора $\mathcal{K}$ как $m_{1,\omega}(\alpha H) = \inf \int\limits_\Omega \rho \omega\, dx$. Здесь инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : \Omega \to [0; +\infty]$ таким, что $\int\limits_\gamma \rho\, ds \geqslant \alpha_{ij}$ для всех $\gamma \in H_{ij}$, $0 \leqslant i < j \leqslant m$.

Теорема. *Если $\mathcal{K}$ — конденсатор Хессе, то*

$$C_1 m_{1,\omega}(\alpha H) \geqslant Cap\, \mathcal{K} \geqslant m_{1,\omega}(\alpha H).$$

Здесь C_1 — положительная постоянная, которая зависит только от A_1-веса ω. В случае $\omega \equiv 1$ постоянную C_1 можно положить равной 1.

Литература

1. Ohtsuka M. Extremal length and precise functions /M. Ohtsuka. — Tokyo. : Gakkotosho, 2003. — 343 p.

2. Dubinin V.N. Some unsolved problems about condenser capacity on the plane / V.N. Dubinin// Complex Analysis and Dynamical Systems, Trends in Math. — 2018. — P. 81–92.

3. Дымченко Ю.В. Об одной задаче Дубинина для емкости конденсатора с конечным числом пластин / Ю.В. Дымченко, В.А. Шлык // Мат. заметки. — 2018. — Т. 103, № 6. — С. 841–852.

4. Hesse J. A p-extremal length and p-capacity equality / J. Hesse//Arc. mat.. — 1975. —Vol.13, No.1. — P.131–144.

5. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions / B. Muckenhoupt// Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. —Vol.192. — P.207–226.

КРИТЕРИЙ УСТРАНИМЫХ МНОЖЕСТВ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА С A_1-ВЕСОМ МАКЕНХАУПТА

В.А. Шлык (Владивосток, ВФ РТА, ИПМ ДВО РАН)

shlykva@yandex.ru

Пусть Ω — открытое множество в R^n, $n \geqslant 2$; E — относительно замкнутое множество из Ω; w — A_1-вес Макенхаупта [1]. Обозначим через $L^1_{1,w}(\Omega)$ пространство всех вещественнозначных, локально суммируемых по мере Лебега m_n функций u в Ω, для которых существует обобщенный градиент ∇u и $\|u\|_{L^1_{1,w}(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\nabla u| w dx < \infty$.

Пусть F_0, F_1 — непересекающиеся компакты из $\bar{\Omega}$. Тогда тройку (F_0, F_1, Ω) назовем конденсатором на $\bar{\Omega}$ и величину $C(F_0, F_1, \Omega) = \inf \int\limits_{\Omega} |\nabla u| w dx$ — его $(1, w)$-емкостью. Здесь инфимум берется по всем функциям u таким, что $u|_{\Omega}$ удовлетворяет локально условию Липшица, $u = j$ в некоторой окрестности множества F_j, $j = 0, 1$. Определим $(1, w)$-модуль $M(F_0, F_1, \Omega)$ конденсатора (F_0, F_1, Ω) как $\inf \int\limits_{\Omega} \rho w \, dx$, где инфимум берется по всем борелевским функциям

$\rho : \Omega \to [0; +\infty]$, для которых $\int\limits_{\gamma} \rho\, ds \geqslant 1$ для всех локально спрямляемых кривых $\gamma \subset \Omega$, соединяющих F_0 и F_1. Если, по крайней мере, одно из множеств F_0, F_1 является пустым, то полагаем $C(F_0, F_1, \Omega) = M(F_0, F_1, \Omega) = 0$.

Пусть $\Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, n\}$ — координатный прямоугольник. Обозначим грани этого прямоугольника, параллельные гиперплоскости $x_i = 0$, через $\sigma_{0i} \subset \{x : x_i = a_i\}$ и $\sigma_{1i} \subset \{x : x_i = b_i\}$. Если $C(\sigma_{0i} \cap \overline{\Pi \setminus E}, \sigma_{1i} \cap \overline{\Pi \setminus E}, \Pi \setminus E) = C(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi)$, $i = 1, \ldots, n$, для всех координатных прямоугольников Π, $\bar{\Pi} \subset \Omega$, то E назовем $NC_{1,w}$-множеством в Ω.

Множество E, $m_n(E) = 0$, назовем устранимым для $L^1_{1,w}(\Omega)$, если любую функцию из $L^1_{1,w}(\Omega \setminus E)$ можно продолжить до функции из $L^1_{1,w}(\Omega)$.

Пусть теперь $m_n(E) = 0$. Для произвольного компакта $e \subset E$ положим $K_j(e, \Omega) = \{\Pi : dist(\sigma_{0j} \cup \sigma_{1j}, e) > 0, \bar{\Pi} \subset \Omega\}$, где $dist(\cdot, \cdot)$ — евклидово расстояние. Кроме того, пусть $\Pi_{j\delta} = \{x \in R^n : a_j < x_j < b_j, a_i + \delta < x_i < b_i - \delta, i \neq j\}$, где $0 < \delta < \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{b_i - a_i}{2}$. Если независимо от выбора $e \subset E$ оценка $C_1 M(\sigma_{0j}, \sigma_{1j}, \Pi \setminus e) \geqslant \lim\limits_{\delta \to 0} M(\sigma_{0j} \cap \overline{\Pi_{j\delta}}, \sigma_{1j} \cap \overline{\Pi_{j\delta}}, \Pi_{j\delta})$ справедлива для каждого $\Pi \in K_j(e, \Omega)$ и всех $j = 1, \ldots, n$, то E назовем $NED_{1,w}$-множеством в Ω. Здесь постоянная C_1 зависит только от A_1-веса w.

Теорема. *Следующие утверждения равносильны:*

1. *E — устранимое множество для $L^1_{1,w}(\Omega)$;*

2. *E является $NC_{1,w}$-множеством в Ω;*

3. *E является $NED_{1,w}$-множеством в Ω.*

Замечание. *При $1 < p < \infty$ и $w \equiv 1$ аналоги 1) и 2) были получены в [2], для $1 < p < \infty$ и $w \in A_p$ они были доказаны в [3].*

Литература

1. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions / B. Muckenhoupt// Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. —Vol. 192. — P. 207–226.

2. Vodop'yanov S.K. Criteria for the removability of sets in spaces of L^1_p, quasiconformal and quasi-isometric mappings//S.K. Vodop'yanov, V.M. Gol'dstein//Siberian. Math. J. —1977. —V. 18, No. 1. —P. 35–50.

3. Dymchenko Yu.V. Sufficiency of broken lines in the modulus method and removable sets/Yu.V. Dymchenko, V.A. Shlyk//Siberian. Math. J. —2010. —V. 51, No. 6. —P. 1028–1042.

СТЕПЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

М. А. Шубарин (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
mas102@mail.ru

В докладе предполагается дать обзор различных подходов к рассмотрению модельного класса пространств Кёте — степенных пространств Кёте, а так же некоторых обобщений этого класса.

Термин «степенное пространство» появился в работе Шагиняна Т. Б. [1].

Определение 1. Пространство Кёте $K(A)$ называют степенным пространствоом Кёте, если матрица Кёте $A = (a_{p,n})$ допускает представление $a_{p,n} = exp(h_p(n))$ в котором $a = (a_n)$ — произвольная положительная числовая последовательность, а семейство $h = h_p(\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\exists p_0 \forall q \varlimsup\limits_{n\to\infty}(h_q(n) - h_{p_0}(n)) < +\infty$,

2. $\forall p \exists s = s(p) \varliminf\limits_{n\to\infty}(h_s(n) - h_p(n)) > 0$.

Предполагается рассмотрение других подходов к определению степенного пространства Кёте, которые либо равносильны определению 1, либо почти эквивалентны.

Модельность класса степенных пространств состоит в том, что для пространств этого типа рассматривались все основные проблемы струтурной теории пространств Фреше:

описание (с точностью до изоморфизма) всех подпространств и факторпространсв;

изоморфная классификация пространств этого типа, т.е. нахождение необходимых (по возможности близких к достаточным) условий изоморфности пространсв этого типа;

нахождение условий существования топологического (абсолютного, безусловного) базиса;

проблема «единственности» абсоютного базиса в пространстве этого типа

ON ASYMPTOTIC OF SOLUTIONS FOR RANDOM DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH REGULAR RIGHT-HAND SIDES[1]

Yu.E. Bezmelnitsyna (Voronezh, VSPU)
bezmelnicyna@inbox.ru

Let (Ω, Σ, μ) be a complete probability space. Consider the Cauchy problem for a random differential inclusions of the form:

$$x'(\omega, t) \in R(\omega, t, x), \tag{1}$$

$$x(\omega, 0) = x_0(\omega), \tag{2}$$

for each $\omega \in \Omega$, where the right-hand side $R : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ is a random regular multioperator (see [1, 2]).

Definition 1. *A random nonsmooth potential V is called a random nonsmooth integral guiding potential for inclusion (1) along a given function g if there exists $r_{V_\omega} > g(0)\|x_0\|$ such that for every function x satisfying conditions (l) there exists a largest finite number $\tau_1 := \tau_1(\omega, x) > 0$ such that $g(\omega, t)\|x(\omega, t)\| \leqslant r_{V_\omega}$ for all $t \in [0, \tau_1)$; (ll) there exists a finite number $\tau_* := \tau_*(\omega, x) > \tau_1$ such that $g(\omega, \tau_*)\|x(\omega, \tau_*)\| = k_{V_\omega}$; ($lll$) $\|x'(\omega, t)\| \leqslant \|R(\omega, t, x)\|$ for a.e. $t \in \mathbb{R}_+$, we have $\int_{\tau_\sharp}^{\tau_*} \big\langle v(s), g'(\omega, s)x(\omega, s) + g(\omega, s)f(s)\big\rangle ds \geqslant 0$ for every locally summable selections $v(s) \in \partial V(g(\omega, s)x(\omega, s))$, $f(s) \in R(\omega, s, x)$, $\tau_\sharp := \sup\{\tau \in [\tau_1, \tau_*),\ \|g(\tau)x(\tau)\| = r_{V_\omega}\}$.*

Theorem 1. *If V is a random nonsmooth integral guiding potential for inclusion (1) along the function g then there exists at least one solution to Cauchy problem (1), (2) satisfying estimate*

$$\|x(t)\| \leqslant k_{V_\omega} \cdot \frac{1}{g(\omega, t)},\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Литература

1. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings — 2nd ed. — Berlin: Springer, 2006. —403 p.

[1] This work was supported by the State contract of the Russian Ministry of Science and Hight Education (FZGF-2020-0009).

2. Kornev S. V. Random nonsmooth integral guiding functions and asymptotic behavior of trajectories for random differential inclusions / S. V. Kornev, N. V. Loi, V. V. Obukhovskii, C.-F. Wen // J. of Nonlin. and Conv. Anal. — 2018. — V. 19, no. 3. — P. 493–500.

ON RANDOM NONSMOOTH INTEGRAL GUIDING FUNCTIONS[1]

E.N. Getmanova (Voronezh, VSPU)
ekaterina_ getmanova@bk.ru

For $\tau > 0$ we denote by the symbol $\mathcal{C}$ the space $C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$ of continuous functions $x : [-\tau,0] \to \mathbb{R}^n$ and let $I = [0,T]$, $T > 0$. For a function $x(\cdot) \in C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$, the symbol $x_t \in \mathcal{C}$ denotes the function defined as $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-\tau,0]$. Denote by C_T the space of continuous T-periodic functions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ with the norm $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$, by $\|x\|_2$ the norm of function x in the space L^2. Let (Ω,Σ,μ) be a complete probability space.

We consider the periodic problem for a random functional differential inclusion: $x'(\omega,t) \in \mathcal{F}\big(\omega,t,x_t\big)$, (1) $x(\omega,0) = x(\omega,T)$, (2)
for all $\omega \in \Omega$, where $\mathcal{F}\colon \Omega\times\mathbb{R}\times\mathcal{C} \to K(\mathbb{R}^n)$ is a random regular multioperator, satisfying the T-periodicity condition in the second argument and the sublinear growth type condition (see, e.g., [1]).

By *a random solution* of problem (1), (2) we mean a function $\xi\colon \Omega\times I \to \mathbb{R}^n$ such that: (i) the operator $\omega\in\Omega \to \xi(\omega,\cdot) \in C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$ is measurable; (ii) for each $\omega\in\Omega$ the absolutely continuous function $\xi(\omega,\cdot) \in C([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$ satisfies (1), (2).

Definition 1. A random nonsmooth potential $V\colon \Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is called a *random nonsmooth integral guiding function (IGF)* for inclusion (1) if there exists $N > 0$ such that for all $\omega\in\Omega$ and for all $x \in C_T$ with $\|x\|_2 \geqslant N$ we have $\int_0^T \big\langle v(s), f(s)\big\rangle ds > 0$ for all $v \in \mathcal{P}_{\partial V}(\omega,x)$, $f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega,x_s), \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega,x_t) = \{f \in L^2 : f(s) \in \mathcal{F}(\omega,s,x_s)\}$, $\mathcal{P}_{\partial V}(\omega,x) = \{v \in L^2\colon v(t) \in \partial V(\omega,x(t))\}$, the symbol $\partial V(\cdot)$ denotes the Clarke generalized gradient.

Theorem 1. *Let $V : \Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a random nonsmooth IGF for inclusion (1) such that $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} V(\omega,x) = \pm\infty$. Then problem (1), (2) has a random solution.*

[1] This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (FZGF-2020-0009).

References

1. Borisovich Yu.G. Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions / Yu.G. Borisovich, B.D. Gelman, A.D. Myshkis, V.V. Obukhovskii. — M. : Librocom, 2011.

GLOBAL BIFURCATION OF POSITIVE SOLUTIONS FROM INFINITY IN NONLINEAR ELLIPTIC PROBLEMS WITH INDEFINITE WEIGHT

Sh.M. Hasanova (Baku, IMM NAS Azerbaijan)
h.shanay87@mail.ru

We consider the following nonlinear eigenvalue problem

$$\begin{aligned} &Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu = \lambda a u + h(\cdot, u, \nabla u, \lambda) \text{ in } \Omega, \\ &u = 0 \text{ in } \partial\Omega, \end{aligned} \qquad (1)$$

where λ is a real parameter, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, with a smooth boundary $\partial\Omega$ and $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$. We suppose that the functions a_{ij}, c, a, h are real valued and $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $c \in C^0(\overline{\Omega})$, $c(x) \geqslant 0$, $x \in \overline{\Omega}$, and L is uniformly elliptic in $\overline{\Omega}$. Let $a(x) \in C(\overline{\Omega})$ is a sign-changing function. The nonlinear term h has a representation $h = f + g$, where f and g are real-valued continuous functions on $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ which satisfy the following conditions:

$$u\, h(x, u, v, \lambda) \leqslant 0 \text{ for any } (x, u, v, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,;$$

there exist $M > 0$ and sufficiently large $r_0 > 0$ such that

$$\left|\frac{f(x,u,v,\lambda)}{u}\right| \leqslant M, \; (x, u, v, \lambda) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

$$u \neq 0, \; |u| + |v| \geqslant r_0\,;$$

$$h(x, u, v, \lambda) = o(|u| + |v|) \text{ as } |u| + |v| \to \infty,$$

uniformly in $x \in \Omega$ and in $\lambda \in \Lambda$, for every bounded interval $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

The global bifurcation from zero of nontrivial solutions to problem (1)-(3) was studied in [1, 2]. In these papers, the authors proved the existence of two pairs of unbounded continua of solutions to this problem, bifurcating from points and intervals surrounding trivial solutions corres-ponding to the principal eigenvalues of the linear problem (1)-(3) with $h \equiv 0$, and contained in the classes of positive and negative functions.

Let $E = \{u \in C^{1,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) : u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ be the Banach space with the usual norm $||\cdot||_{C^{1,\alpha}}$, where $\alpha \in (0,1)$. For each $\nu \in \{+\,,\,-\}$ and $\sigma \in \{+\,,\,-\}$ let P^{ν}_{σ} is the set of functions $u \in E$ such that $\nu u > 0$ in Ω, $\nu\,\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ on $\partial\Omega$ and $\sigma \int\limits_{\Omega} au^2 dx > 0$, where $\frac{\partial u}{\partial n}$ is the outward normal derivative of u on $\partial\Omega$ (see [1]).

Lemma 1. *The set of asymptotic bifurcation points of problem (1)-(3) with respect to the set $\mathbb{R} \times P^{\nu}_{\sigma}$ is nonempty. If (λ, ∞) is a asymptotic bifurcation point of (1)-(3) with respect to the set $\mathbb{R} \times P^{\nu}_{\sigma}$, then $\lambda \in I^{\sigma}_1$, where $I^{+}_1 = [\lambda^{+}_1, \lambda^{+}_1 + a^{+}_1]$ and $I^{-}_1 = [\lambda^{-}_1 - a^{-}_1, \lambda^{-}_1]$, λ^{+}_1 and λ^{-}_1 are positive and negative principal eigenvalues of problem (1)-(3) with $h \equiv 0$ respectively, and*

$$a^{+}_1 = \frac{M \int\limits_{\Omega} (u^{+}_1(x))^2\, dx}{\int\limits_{\Omega} a(x)(u^{+}_1(x))^2\, dx}\,,\ a^{-}_1 = \frac{M \int\limits_{\Omega} (u^{-}_1(x))^2\, dx}{\int\limits_{\Omega} a(x)(u^{-}_1(x))^2\, dx}\,.$$

For each $\sigma \in \{+\,,\,-\}$ and each $\nu \in \{+\,,\,-\}$ we define the set $\tilde{\mathcal{B}}^{\nu}_{\sigma}$ to be the union of all the components of $\mathcal{B}^{\nu}_{\lambda,\,\sigma}$ of the set of nontrivial solutions emanating from bifurcation points $(\lambda, \infty) \in I^{\sigma}_1 \times \{\infty\}$ with respect to $\mathbb{R} \times P^{\nu}_{\sigma}$. Let $\mathcal{B}^{\nu}_{\sigma} = \tilde{\mathcal{B}}^{\nu}_{\sigma} \cup (I^{\sigma}_1 \times \{\infty\})$. It is obvious that the set $\mathcal{B}^{\nu}_{\sigma}$ is connected in $\mathbb{R} \times E$.

Theorem 1. *For each $\sigma \in \{+\,,\,-\}$ there exists a neighborhood $\mathcal{Q}^{\sigma}_1$ of $I^{\sigma}_1 \times \{\infty\}$ such that $\mathcal{B}^{\nu}_{\sigma} \backslash \mathcal{Q}^{\sigma}_1 \subset \mathbb{R}^{\sigma} \times P^{\nu}_{\sigma}$ and for the set $\mathcal{B}^{\nu}_{\sigma}$, $\nu \in \{+\,,\,-\}$, at least one of the following assertions holds: (i) $\mathcal{B}^{\nu}_{\sigma} \backslash \mathcal{Q}^{\sigma}_1$ meets $\mathbb{R}^{\sigma} \times \{0\}$ for some $\lambda \in \mathbb{R}^{\sigma}$; (ii) $\mathcal{B}^{\nu}_{\sigma} \backslash \mathcal{Q}^{\sigma}_1$ is unbounded in $\mathbb{R}^{\sigma} \times E$, where $\mathbb{R}^{\sigma} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \sigma x > 0\}$.*

References

1. Aliyev Z.S. Global bifurcation of positive solutions of semi-linear elliptic partial differential equations with indefinite weight / Z.S. Aliyev, Sh.M. Hasanova // Z. Anal. Anwend. — 2019. — V 38, No. 1. — P. 1–15.

2. Aliyev Z.S. Global bifurcation of positive solutions from zero in nonlinearizable elliptic problems with indefinite weight / Z.S. Aliyev, Sh.M. Hasanova // J. Math. Anal. Appl. — 2020. — V 491, No. 1. — P. 1–14.

THE LEVINSON FORMULA FOR A CLASS DIRAC EQUATIONS SYSTEM

Kh.R. Mamedov (Turkey, Mersin University)
hanlar@mersin.edu.tr, hanlar@yahoo.com

On the semi-infinite interval $[0,\infty)$, it is considered canonic Dirac differential equation systems

$$BY^{'}+mTY+\Omega(x)Y=\lambda Y \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$(\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2)y_1(0)-(\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2)y_2(0)=0 \tag{2}$$

where

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\quad \Omega(x)=\begin{bmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}.$$

$p(x), q(x)$ are real valued measurable functions, such that the condition

$$\int_0^\infty \|\Omega(x)\|dx<\infty$$

is satisfied for the Euclidean norm of the matrix function $\Omega(x)$, λ is spectral parameter, the coefficients $\alpha_j, \beta_j (j=0,1,2)$ are real numbers providing certain conditions and m states the mass.

In this study,the characteristics properties of the scattering data examined.In addition, to these we give the formula, called the Levinson-type formula, that expresses the relation between the incerment of the argument of scattering function and eigenvalues of boundary value problem.The inverse problem of scattering theory for system Dirac are considered in [1-3].

Литература

1. M. G. Gasymov, The inverse scattering problem for a system of Dirac equations of order $2n$, Trudy Moskov.Mat.Obs., vol 19, pages 41-112, 1968.

2. M. G. Gasymov and B.M.Levitan, The inverse problem for the Dirac system, Dokl.Akad.Nauk., SSSR, vol.167, pages 967-970, 1966.

3. A. Col, Kh. R. Mamedov, On an inverse scattering problem for a class of Dirac operators with spectral parameter in the boundary condition, J.Math.Annal., Appl., vol.393, pages 470-478, 2012.

GLOBAL BIFURCATION FROM INFINITY IN CERTAIN HALF-LINEARIZABLE STURM-LIOUVILLE PROBLEMS

G.M. Mamedova (Baku, Azerbaijan, BSU)
m.g.m.400@mail.ru

We consider the following half-linearizable Sturm-Liouville eigenvalue problem

$$-\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = \lambda r(x)y + h(x, y, y', \lambda),\ x \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$b_0 y(0) = d_0 y'(0), \tag{2}$$

$$(a_1\lambda + b_1)y(\pi) = (c_1\lambda + d_1)y'(\pi), \tag{3}$$

where λ is a real parameter, $p \in C^1[0, \pi]$, $q, r \in C^0[0, \pi]$ are real-valued functions, b_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1 are real numbers such that $|b_0| + |d_0| > 0$ and $a_1d_1 - b_1c_1 > 0$. Moreover, we also assume that p and r are strictly positive on $[0, \pi]$, and the nonlinear term h has a form $h = \alpha y^+ + \beta y^- + g$, where $\alpha, \beta \in C\,[0, \pi]$ are real-valued functions, $y^+ = \max\{y, 0\}$, $y^- = \max\{-y, 0\}$, and $g \in C\left([0, \pi] \times \mathbb{R}^3\right)$ is a real-valued function that satisfies the condition:

$$g(x, u, s, \lambda) = o(|u| + |s|) \text{ as } |u| + |s| \to +\infty,$$

uniformly in $x \in [0, \pi]$ and in $\lambda \in \Lambda$, for every bounded interval $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

We note that in the case when the nonlinear term g satisfies the condition $o(|u| + |s|)$ as $|u| + |s| \to 0$ problem (1)-(3) for $a_1 = c_1 = 0$ was investigated in [1], and for $|a_1| + |c_1| > 0$ in [2].

Let $E = C^1[0, \pi] \cap \{\, y : b_0 y(0) = d_0 y'(0)\}$ be a Banach space equipped with the usual norm $||y||_1 = \max\limits_{x\in[0,\pi]} |y(x)| + \max\limits_{x\in[0,\pi]} |y'(x)|$. By S_k^+ we denote the set of functions $y \in E$ which have exactly $k - 1$ simple nodal zeros in $(0, 1)$ and which are positive near $x = 0$, and set $S_k^- = -S_k^+$, and $S_k = S_k^+ \cup S_k^-$.

The half-linear Sturm-Liouville eigenvalue problem

$$\begin{gathered} -\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = \lambda r(x)y + \alpha(x)y^+ + \beta(x)y^-,\ x \in (0, \pi), \\ b_0 y(0) = d_0 y'(0), \\ (a_1\lambda + b_1)y(\pi) = (c_1\lambda + d_1)y'(\pi), \end{gathered} \tag{4}$$

in the case $|a_1|+|c_1|>0$ was investigated in [3], where the author shows that for each $\nu \in \{+,-\}$ there exists infinitely increasing sequence $\{\lambda_k^\nu\}_{k=1}^\infty$ of real and simple half-eigenvalues of this problem. The corresponding half-eigenfunctions $y_k^\nu(x)$, $k = 1\,2,\ldots,$ have the following properties: (i) $\nu y_k^\nu > 0$ in a deleted neighborhood of 0; (ii) if $c_1 = 0$, then function $y_k^\nu(x)$, $k \in \mathbb{N}$, has exactly $k-1$ simple nodal zeros in $(0,\pi)$; (iii) if $c_1 \neq 0$, then for each ν there exists $N_0^\nu \in \mathbb{N}$ such that $y_k^\nu(x)$ has exactly $k-1$ simple nodal zeros for $k \leqslant N_0^\nu$, and exactly $k-2$ simple nodal zeros for $k > N_0^\nu$ in the interval $(0,\pi)$.

For $c_1 = 0$ let $T_k^\nu = S_k^\nu$, $k \in \mathbb{N}$, and for $c_1 \neq 0$ let

$$T_k^\nu = \begin{cases} S_k^\nu, & \text{if } k \leqslant N_0, \\ S_{k-1}^\nu, & \text{if } k > N_0. \end{cases}$$

Лемма 1. *The following statements hold: the set of asymptotic bifurcation points of problem (1)-(3) with respect to* $\mathbb{R}\times S_k^\nu$ *is nonempty; (ii) if* $(\lambda,0)$ *is an asymptotic bifurcation point of (1)-(3) with respect to* $\mathbb{R}\times T_k^\nu$, $k \in \mathbb{N}$, *then* $\lambda = \lambda_k^\nu$ *for* $c_1 = 0$ *and* $c_1 \neq 0$, $k \neq N_0, N_0+1$, *and* $\lambda = \lambda_{N_0}$ *or* $\lambda = \lambda_{N_0+1}$ *for* $c_1 \neq 0$, $k = N_0$, N_0+1.

The main result of this work is the following theorem.

Теорема 1. *For each* $k \in \mathbb{N}$ *and each* $\nu \in \{+,-\}$ *there exist a continuum* C_k^ν *of solutions of problem (1)-(3), and a neighborhood* Q_k^ν *of the point* (λ_k^ν,∞) *such that* $(\lambda_k^\nu,\infty) \in C_k^\nu$, $(C_k^\nu \backslash Q_k^\nu) \subset (\mathbb{R}\times T_k^\nu)$ *and either* C_k^ν *meets* $(\lambda_{k'}^{\nu'},\infty)$ *with respect to* $\mathbb{R}\times T_{k'}^{\nu'}$ *for some* $(k',\nu') \neq (k,\nu)$, *or* C_k^ν *meets* $\mathbb{R}\times\{0\}$ *for some* $\lambda \in \mathbb{R}$, *or the projection of* C_k^ν *on* $\mathbb{R}\times\{0\}$ *is unbounded.*

References

1. Berestycki H. On some nonlinear Sturm-Liouville problems / H. Berestycki // J. Differential Equations. — 1977. — V. 26, No. 1. — P. 375-390.

2. Mamedova G.M. Global bifurcation for half-linearizable Sturm-Liouville problems with spectral parameter in the boundary condition / G.M Mamedova // Caspian J. Appl. Math., Ecol., Econ. — 2017. — V. 5, No. 2. — P. 74-83.

3. Browne P.J. A Prüfer approach to half-linear Sturm-Liouville problems / P.J. Browne // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1998. — V. 41, No. 3. — P. 573–583.

LOCATION OF EIGENVALUES AND STRUCTURES OF ROOT SUBSPACES OF SOME SPECTRAL PROBLEM WITH BOUNDARY CONDITIONS DEPENDING ON THE EIGENPARAMETER

F.M. Namazov (Baku, Baku State University, Azerbaijan)
faig-namazov@mail.ru

Consider the following spectral problem

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\ x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y''(0) = 0,\ y''(1) = 0, \tag{2}$$

$$Ty(0) - (a\lambda + b)\, y(0) = 0, \tag{3}$$

$$Ty(1) - (c\lambda - d)\, y(1) = 0, \tag{4}$$

where $\lambda \in \mathbb{C}$ is a spectral parameter, $Ty \equiv y''' - qy'$, $q(x)$ is a positive and absolutely continuous function on $[0,1]$, a, b, c and d are real constant such that $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$ and $d > 0$.

Problem (1)-(4) describes the bending vibrations of a homogeneous rod, in cross-sections of which the longitudinal force acts, at both ends of which elastically fixed loads are concentrated (see [1, pp. 152 -154]).

The spectral properties of problem (1)-(4) in the case $b = d = 0$ were considered in [2], where the general characteristics of the location of eigenvalues on the real axis, the structure of root subspaces, and oscillatory properties of all eigenvalues were studied. Moreover, sufficient conditions are established under which the subsystems of the root functions of this problem form a basis in the space $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$.

To study the basis properties in $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, of root functions of problem (1)-(4) we need to know the location of eigenvalues on the real axis (complex plane) and the structure of the root subspaces of this problem.. This note is just devoted to the study of these issues.

It follows [3, Theorem 4.1] that there exists $b_0 > 0$ such that for $b < b_0$ the eigenvalues μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, of the spectral problem (1)-(3) and $y(1) = 0$ are real and simple, and form an infinitely increasing sequence; in this case $\mu_1 < 0$ and $\mu_k > 0$ for $k \geqslant 2$.

By A_k, $k \in \mathbb{N}$, we denote the interval (μ_{k-1}, μ_k), where $\mu_0 = -\infty$.

Theorem 1. *If $b < b_0$, then one of the following statements holds:*

(i) all eigenvalues of problem (1)-(4) are real and simple; in this case either A_2 contains two eigenvalues, and A_k, $k = 1, 3, 4, \ldots,$ contains one eigenvalue, or A_2 contains no eigenvalues, but there exists a positive integer $m_1 \geqslant 3$ such that A_{m_1} contains three eigenvalues, and A_k, $k = 1, 3, \ldots, k \neq m_1$, contains one eigenvalue;

(ii) all eigenvalues of problem (1)-(4) are simple and real, with the exception of one pair of non-real complex conjugated eigenvalues;

(iii) all eigenvalues of problem (1)-(4) are real; in this case either A_2 contains one double eigenvalue, and A_k, $k = 1, 3, 4, \ldots,$ contains one eigenvalue, or A_2 contains no eigenvalues, and A_{m_1} contains algebraically three eigenvalues (either one double eigenvalue and one simple eigenvalue, or one triple eigenvalue), and A_k, $k = 1, 3, \ldots,$ $k \neq m_1$, contains one eigenvalue.

References

1. Artobelevskii I.I. Vibrations in technique: Handbook in 6 volumes, The vibrations of linear systems, I / I.I. Artobelevskii, A.N. Bogolyubov, B.B. Bolotin, ... — M. : Engineering Industry, 1978. — 352 p.

2. Aliyev Z.S. Spectral properties of the equation of a vibrating rod at both ends of which the masses are concentrated / Z.S. Aliyev, F.M. Namazov // Banach J. Math. Anal. — 2020. — V. 14, No. 2. — P. 585–606.

3. Aliev Z.S. Basis properties in L_p of systems of root functions of a spectral problem with spectral parameter in a boundary condition / Z.S. Aliyev //, Diff. Equat. — 2011. — V. 47, No. 6. — P. 766–777.

UNILATERAL GLOBAL BIFURCATION OF SOLUTIONS FROM INFINITY OF SOME NONLINEARIZABLE DIRAC PROBLEMS

H.Sh. Rzayeva (Baku, Azerbaijan National Academy of Sciences, Institute of Mathematics and Mechanics)
humay_rzayeva@bk.ru

We consider the following nonlinear Dirac system

$$\begin{aligned} &v' - p(x)u = \lambda u + g_1(x, u, v, \lambda)\, u, \\ &u' + r(x)v = -\lambda v - g_2(x, u, v, \lambda)\, v,\ \ x \in (0, \pi), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} v(0)\cos\alpha + u(0)\sin\alpha = 0, \\ v(\pi)\cos\beta + u(\pi)\sin\beta = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ is a spectral parameter, $p(x), r(x) \in C([0,\pi];\mathbb{R})$, α and β are real constants such that $0 \leqslant \alpha, \beta < \pi$. Moreover, for each $i \in \{1,2\}$ the function $g_i \in C\left([0,\pi] \times \mathbb{R}^3\,;\,\mathbb{R}\right)$ and satisfies the condition:

$$g_i(x,u,v,\lambda) \to 0 \text{ as } |u| + |v| \to \infty, \tag{1}$$

uniformly in $x \in [0,\pi]$ and in $\lambda \in \Lambda$, for every bounded interval $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

Let E be the Banach space $C\left([0,\pi];\mathbb{R}^2\right) \cap \{w = (u,v)^t : v(0)\cos\alpha + u(0)\sin\alpha = 0,\ v(\pi)\cos\beta + u(\pi)\sin\beta = 0\}$ with the norm $||w|| = \max\limits_{x\in[\,0,\pi]} |u(x)| + \max\limits_{x\in[\,0,\pi]} |v(x)|$.

By ν we denote an element of $\{+\,,\,-\}$ that is, either $\nu = +$ or $\nu = -$.

For each $k \in \mathbb{Z}$ and each ν let S_k^ν be the set of vector-functions $w \in E$ that have oscillatory properties of an eigenvector-function corresponding to the kth eigenvalue of the linear problem obtained from (1), (2) by setting $g_i \equiv 0$, $i = 1,2$ (see [1]).

Theorem 1. *For each $k \in \mathbb{Z}$ and each ν there exists a continuum $\mathfrak{L}_k^\nu$ of solutions to problem (1)-(2) which contains (λ_k, ∞) contained in $\mathbb{R} \times S_k^\nu$ and either is unbounded in $\mathbb{R} \times E$, or intersects the line $\mathbb{R} \times \{0\}$ at $(\lambda_k, 0)$.*

References

1. Rzayeva H.Sh. Global bifurcation from infinity in nonlinear one dimensional Dirac problems / H.Sh. Rzayeva // Proc. Inst. Math. Mech., Nat. Acad. Sci. Azerbaijan. — 2019. — V. 45, No. 1. — P. 146–154.

BOUNDEDNESS OF GENERALIZED RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL INTEGRAL OPERATOR IN WEIGHTED MORREY SPACES

M.A. Senouci (Moscow, S.M. Nikolskii Mathematical Institute, RUDN University)
senoucim@yandex.ru

The aim of this work is to establish the boundedness of the generalized Riemann-Liouville fractional integral operator in weighted Morrey spaces.

Definition 1. [1, 3] A function $f(t)$ is said to be in the $L_{p,k}[0,\infty)$ space if

$$L_{p,k}[0,\infty)$$

$$= \Big\{ f : \|f\|_{L_{p,k}[0,\infty)} = \left(\int_a^b |f(t)|^p t^k dt \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \infty, 1 \leqslant p < \infty, k \geqslant 0 \Big\}.$$

For $k = 0$,

$$L_p[0,\infty) = \Big\{ f : \|f\|_{L_p[0,\infty)} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \infty, 1 \leqslant p < \infty \Big\}.$$

Definition 2. [1, 3] Let $f \in L_{1,k}[0,\infty)$. The Generalized Riemann-Liouville fractional integral $I^{\alpha,k} f(x)$ of order $\alpha \geqslant 0$ and $k \geqslant 0$ is defined by

$$I^{\alpha,k} f(x) = \frac{(k+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^{k+1} - t^{k+1})^{\alpha-1} t^k f(t) dt,$$

$$I^{0,k} f(x) = f(x),$$

where Γ is the gamma function.

Definition 3. [2] Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a Lebesgue measurable set, $1 \leqslant p \leqslant \infty, 0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{n}{p}$. The weighted Morrey space $M^{\lambda}_{p,k}(\Omega)$, is the space of all functions f Lebesgue measurable on Ω for which

$$\|f\|_{M^{\lambda}_{p,k}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega, r > 0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_{p,k}(B(x,r) \bigcap \Omega)} < \infty. \tag{1}$$

If $\lambda = 0$, then

$$M^0_{p,k}(\Omega) = L_{p,k}(\Omega). \qquad (2)$$

If $\lambda = \dfrac{n}{p}$, then

$$M^{\frac{n}{p}}_{p,k}(\Omega) = L_{\infty,k}(\Omega). \qquad (3)$$

Theorem 1. *Let* $n = 1, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} < \alpha < 1,$ *and* $0 \leqslant \lambda, \mu \leqslant 1, 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{p}, 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{q}, 0 < T < \infty$. *Then* $I^{\alpha,k}$ *is bounded from* $M^{\lambda}_{p,k}(0,T)$ *to* $M^{\mu}_{q,k}(0,T)$.

References

1. Katugampola U.-N. Approach to a generalized fractional integral / U.-N. Katugampola — Applied Mathematicsand Computation, 2011. — V. 218(3), — 860-865.12.

2. Morrey C.B. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations / C.B. Morrey Amer. Math. Soc. —1938. —V. 43. — P. 126-166.

3. Yildirim H., Kirtay Z. Ostrowski inequality for generalized fractional integral and related inequalities / H. Yildirim, Z. Kirtay // Malaya Journal of Matematik, 2014. — V. 2 (3). — 322-329.11.

Именной указатель

Д

Е

Ж

З

И

К

Н а у ч н о е   и з д а н и е

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ**

**Материалы Международной конференции
Воронежская зимняя математическая школа**
(28 января – 2 февраля 2021 г.)

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал-макета *С. А. Шаброва*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60×84/16.
Усл. п.л. 19,4. Уч.–изд. л. 19,6. Тираж 200 экз. Заказ 30.

Издательский дом ВГУ
394018 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3