

Congruente getallen

eerste versie studentencheck

Lotte Bruijnen, 4297652

Daan van Laar, 5518741

Suzanne Vincken, 4273338

Onder begeleiding van: Carel Faber, UU

10-12-2015

1 Inleiding

2 Begrippen

kwadraatvrij: [1] Een kwadraatvrij getal is een getal dat niet deelbaar is door een kwadraat groter dan 1. Waarbij een kwadraat een getal $k \in \mathbb{N}$ zodat $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$.

begrip: uitleg

begrip: uitleg

3 Stelligen

Theorem 1. [2] (Tunnell, 1983) *If n is a squarefree and odd (respectively, even) positive integer and n is the area of a right triangle with rational sides, then*

$$\#\{x, y, z \in \mathbb{Z} | n = 2x^2 + y^2 + 32z^2\} = \frac{1}{2} \#\{x, y, z \in \mathbb{Z} | n = 2x^2 + y^2 + 8z^2\} \quad (1)$$

(respectively,

$$\#\{x, y, z \in \mathbb{Z} | \frac{n}{2} = 4x^2 + y^2 + 32z^2\} = \frac{1}{2} \#\{x, y, z \in \mathbb{Z} | \frac{n}{2} = 4x^2 + y^2 + 8z^2\} \quad (2)$$

If the weak Birch-Swinnerton-Dyer conjecture is true for the elliptic curves $E_n : y^2 = x^3 - n^2x$, then, conversely, these equalities imply that n is a congruent number.

Defenitie 1. [3][p.3] *Een positief geheel getal N heet een congruent getal als er een rechthoekige driehoek bestaat met lengtes van zijden in $\mathbb{Q}_{>0}$ en met oppervlak gelijk aan $N \in \mathbb{Z}$. Noem de lengtes van de zijden $a, b, c \in \mathbb{Q}$; met behulp van de stelling van Pythagoras zien we:*

4 Elliptische krommen

Het volgende komt uit [2].

We weten nu dat een congruent getal n een geheel getal is als oppervlakte van een driehoek met rationale zijden. Als we nu willen kijken welke $n' \in \mathbb{N}$ congruente getallen zijn, moeten we heel \mathbb{N} door. Dit is niet te doen. Daarom willen we het aantal mogelijke waarden van n' beperken. We doen het volgende:

Neem een getal $r \in \mathbb{Q}$ en zeg r is congruent. Dan zijn $x, y, z \in \mathbb{Q}$ de zijden van de rechthoekige driehoek met oppervlakte r . We kunnen nu voor elke $r \neq 0$ een $s \in \mathbb{Q}$ vinden zodat $s^2 r$ een kwadraatvrij natuurlijk getal is.

Bewijs: We weten $r \in \mathbb{Q}$, dus r is te schrijven als: $r = \frac{p}{q}$. Neem nu een $s \in \mathbb{Q}$ zodat s^2 deelbaar is door q . **Nu geldt dat $s^2 r$ een kwadraatvrij getal.** ■

We weten nu dat $s^2 r$ een kwadraatvrij getal is. En we doen het volgende: neem de driehoek met zijden sx, sy, sz . De oppervlakte van deze driehoek is $s^2 r$. We kunnen nu zonder verlies van algemeenheid zeggen dat $s^2 r = n$. We kunnen dus ook aannemen dat n een congruent kwadraatvrij natuurlijk getal is.

We hebben hierboven gezien dat we de mogelijke waarden van n' hebben beperkt, omdat n' nu een kwadraatvrij getal is. Dus we kunnen nu al een stuk sneller door \mathbb{N} om te kijken welke getallen $n' \in \mathbb{N}$ congruent zijn. Sterker nog: er bestaat een algoritme die voor elke n' checkt of er een Pythagorees drietal bestaat zodat n' de oppervlakte is van deze driehoek (dus $n' = n$). Als n' congruent is, zet het algoritme deze in een lijst. Het probleem hierbij is dat we niet weten hoe lang we moeten zoeken naar een Pythagorees drietal die bij n' past. Dus als n' niet in de lijst staat, weten we niet of (1) n' geen congruent getal is of (2) dat het zoeken te lang duurde en het zoeken is afgebroken. Wat we dus eigenlijk willen is een gesloten formule vinden, zodat we makkelijk kunnen checken of n' een congruent getal is of niet.

Elliptische krommen zijn krommen die voldoen aan de vergelijking $y^2 = x^3 - N^2 x$.

Referenties

- [1] F. Beukers. Elementaire Getaltheorie, 2015. Utrecht. Verkregen op 08-12-2015 van <http://www.staff.science.uu.nl/~beuke106/getaltheorie/>.
- [2] Neal Koblitz. *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*. Springer-Verlag New York Inc., 1984.
- [3] Frans Oort. Congruente getallen, februari 2009. Urecht. Verkregen op 24-11-2015 van <http://www.staff.science.uu.nl/~oort0109/Kaleid-II-09-kortetekst.pdf>.