Las Ecuaciones de Maxwell

$\vec{E}$: Campo Electrico
$\vec{B}$: Campo Magnético
ρ_q : Densidad de carga eléctrica
$\vec{J}$: Densidad de corriente eléctrica

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Gauss)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \text{(No-monopolos)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Faraday)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(Ampere)}$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

ε_0 : Permitividad electrica del vacio
μ_0 : Permeabilidad magnética del vacio

Ley de Ohm

La dinámica de los campos en un fluido está ligada por la Ley de Ohm,

$$\vec{E}' = \eta_e\vec{J}$$

donde η_e es la resistividad eléctrica del fluido y $\vec{E}'$ es el campo eléctrico medido en un sistema que se mueve con velocidad $\vec{v}$ (i.e se mueve con el fluido)
Una Transformación de Lorentz permite relacionar $\vec{E}'$ con los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en el sistema de referencia estacionario,

$$\vec{E}' = \frac{\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ya que la MHD no se construirá en forma completamente relativista, se realizará la aproximación

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots$$

Así, se tendrá

$$\vec{E}' = (\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\cdots\right)$$

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

De esta manera, la ley de Ohm se convierte, a primer orden en $\frac{v^2}{c^2}$, en

$$\boxed{\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} = \eta_e \vec{J}}$$

Ley de Ampere Aproximada

Al igual que con la ley de Ohm, aproximaremos la ley de Ampere notando que

$$\frac{\left|\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right|}{|\vec{\nabla}\times\vec{B}|} \sim \frac{\frac{E_0\omega}{c^2}}{\frac{B_0}{L}} \sim \frac{V_0\omega L}{c^2} \sim \frac{V_0^2}{c^2} \ll 1$$

donde se ha considerado que en un modelo MHD ideal (con $\eta_e = 0$) la ley de Ohm establecería que $E_0 \sim V_0 B_0$

Además se han introducido las cantidades características

- L : Distancia macroscópicamente relevante más pequeña.
- ω : frecuencia característica

Movimiento de baja-frecuencia: $\frac{V_0^2}{c^2} \ll 1$

Con $V_0 \sim \omega L \longrightarrow \omega^2 \ll \frac{c^2}{L^2}$

De esta manera, la ley de Ampere se puede aproximar en la forma

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

Fuerza de Lorentz

La fuerza de Lorentz (por unidad de volumen) es

$$\vec{f}_L = \rho_q \vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}$$

Sin embargo es importante notar que

$$\frac{|\rho_q \vec{E}|}{|\vec{J}\times\vec{B}|} \sim \frac{\rho_q E_0}{J B_0} \sim \frac{\rho_q V_0}{J}$$

A partir de la ley de Gauss,

$$\rho_q = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

y de la ley de Ampere,

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

De esta forma

$$\frac{|\rho_q \vec{E}|}{|\vec{J} \times \vec{B}|} \sim \frac{\rho_q V_0}{J} \sim \frac{\frac{\varepsilon_0 E_0}{L}}{\frac{B_0}{\mu_0 L}} V_0 \sim \varepsilon_0 \mu_0 \frac{E_0}{B_0} V_0$$

$$\frac{|\rho_q \vec{E}|}{|\vec{J} \times \vec{B}|} \sim \frac{V_0^2}{c^2} \ll 1$$

A partir de esta relación, podemos despreciar el término $\rho_q \vec{E}$ en la fuerza de Lorentz en la MHD,

$$\boxed{\vec{f}_L \approx \vec{J} \times \vec{B}}$$

Ecuaciones de la MHD

Reuniendo toda la información que tenemos hasta este momento, las 16 ecuaciones de la MHD son

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\sigma + \vec{f} + \vec{J}\times\vec{B} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{v}) = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \vec{f}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad} + Q^{(vis)} + \eta_e J^2 \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_q}{\varepsilon_0} \quad (1) \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad (1) \qquad\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \quad (3)$$

$$\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} = \eta_e\vec{J} \qquad (3)$$

Las cantidades desconocidas son 29,

e (1)
ρ (1)
p (1)
$\vec{v}$ (3)
$\vec{E}$ (3)
$\vec{B}$ (3)
$\vec{J}$ (3)
ρ_q (1)
σ (9) $\longrightarrow$ $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ (6)
$\vec{q}$ (3)
η_e (1)
$\vec{F}_{rad}$ (3)
$Q^{(vis)}$ (1) $\longrightarrow$ $Q^{(vis)} = \sigma : \vec{\nabla}\vec{v}$ (0)

Al considerar la ley de Gauss en la forma

$$\rho_q = \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot(\eta_e\vec{J} - \vec{v}\times\vec{B})$$

se define la densidad de carga eléctrica completamente y evitamos una variable.

También es posible combinar la ley de Faraday, Ohm y Ampere para eliminar $\vec{E}$ y $\vec{J}$ de las ecuaciones,

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(\eta_e \vec{J} - \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{v}\times\vec{B} - \frac{\eta_e}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

Finalmente, la MHD estará descrita por 9 ecuaciones

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\sigma + \vec{f} + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{v}) = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \vec{f}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_{rad} + \sigma:\vec{\nabla}\vec{v} + \eta_e J^2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{v}\times\vec{B} - \frac{\eta_e}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (1)$$

para encontrar 22 variables.

e (1)
ρ (1)
p (1)
$\vec{v}$ (3)
$\vec{B}$ (3)
σ (6)
$\vec{q}$ (3)
η_e (1)
$\vec{F}_{rad}$ (3)

Esto quiere decir que hacen falta 13 ecuaciones para cerrar el sistema.