## Ejemplo. Estructura interna de una enana blanca

Consideramos un sistema en equilibrio hidrostático, con simetría esférica y con

$M = M(r)$

$\vec{v} = v_r \hat{r} = \text{constante}$

$\vec{f} = \rho \vec{g} = -\dfrac{G M(r)}{r^2} \rho \hat{r}$

Las ecuaciones de la hidrodinámica son

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{d}{dr}(\rho v_r) = 0$$

$$\frac{d\rho}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3}\right) = 0$$

$$\frac{3}{4\pi r^3}\frac{dM}{dr} + \frac{3M}{4\pi}\left(-\frac{3}{r^4}\right) = 0$$

$$\frac{3}{4\pi r^3}\frac{dM}{dr} = \frac{3}{r}\frac{M}{\frac{4\pi}{3} r^3}$$

$$\frac{3}{4\pi r^3}\frac{dM}{dr} = \frac{3}{r}\rho$$

$$\boxed{\frac{dM}{dr} = 4\pi \rho r^2}$$ Conservación de la masa

$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \vec{f} \qquad \text{(II)}$$

$$0 = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}$$

$$\frac{dP}{dr}\hat{r} = \rho \vec{g}$$

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{G M(r)}{r^2}\rho}$$ Equilibrio Hidrostático

La conservación de energía es una identidad:

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon + P\right)\vec{v}\right] = \vec{f}\cdot\vec{v} \qquad (\mathrm{III})$$

$$\frac{d}{dr}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon + P\right)v_r\right] = \rho g v_r$$

$$\frac{1}{2}v^2\frac{d\rho}{dr} + \varepsilon\frac{d\rho}{dr} + \frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}$$

$$\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon\right)\frac{d\rho}{dr} + \underbrace{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}}_{(\mathrm{II})}$$

$$(\mathrm{I}) \quad \frac{d\rho}{dr} = 0$$

La última ecuación es la politrópica:

$$\boxed{P = K\rho^\gamma}$$ Ecuación de Estado.

---

Ecuaciones de Estructura para una Enana Blanca

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dr} = 4\pi\rho r^2 & \text{Conservación de la masa} \\ \dfrac{dP}{dr} = -\dfrac{GM(r)}{r^2}\rho & \text{Equilibrio Hidrostático} \\ P = K\rho^\gamma & \text{Ecuación de Estado.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 1{,}244\times 10^{15}\times(0.5)^\gamma \text{ dinas cm}^{-2}\,(g^{-1}\,\text{cm}^3)^\gamma \\ \gamma = \dfrac{4}{3} \quad \text{(Fluido relativista completamente degenerado)} \end{cases}$$

Condiciones de frontera: $\rho_c = \rho\big|_{r=0} \approx 10^{10}\ g\ cm^{-3}$ (en el centro)

$$P\big|_{r=R_*} \longrightarrow 10^{-10}P_c \qquad \text{(en la superficie)}$$

Objetivo: - Encontrar $\rho(r)$, $P(r)$ y $M(r)$
- Encontrar $R_*$ (Limite de Chandrasekhar)