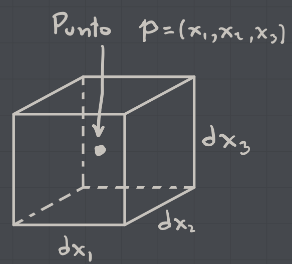


$\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$
$dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$

Existen dos enfoques para analizar este elemento infinitesimal.

- Enfoque Euleriano:
  El elemento de volumen está fijo en el espacio en el sistema de referencia del laboratorio.

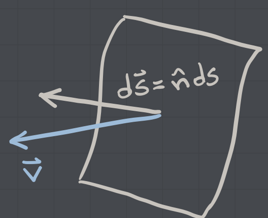
- Enfoque Lagrangiano:
  La superficie del elemento de volumen se mueve junto con el fluido (co-móvil) en el sistema de referencia del fluido.

En el enfoque Euleriano:

El punto p es el centroide del elemento. Los lados del elemento están fijos en el espacio. El fluido puede ingresar y salir de este elemento a través de su superficie.

$$M = \int \rho\, dV = \int \rho(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

$\frac{dM}{dt}$: Cambio de masa en el interior del elemento. Si no existen fuentes o sumideros dentro del elemento, este termino tiene la información del flujo entrante/saliente.



$\vec{v}$: velocidad del fluido

$d\vec{s}$: elemento de superficie
Apunta hacia el exterior del elemento

$\rho\vec{v}$: Flujo de masa (masa por unidad de area por unidad de tiempo)

$\rho\vec{v}\cdot d\vec{s}$: Masa por unidad de tiempo cruzando $d\vec{s}$

La razón total de flujo de masa saliendo del elemento será

$$\sum_{\text{caras}} \rho\vec{v}\cdot d\vec{s} \longrightarrow \oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{s} = -\frac{dM}{dt}$$

donde S denota la superficie total que encierra a dV y el signo menos indica que el flujo sale del elemento.

De esta forma se tiene

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = -\oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{s}$$

En el enfoque Euleriano las superficies (y el volumen) están fijos y por ello la derivada temporal puede ingresar en la integral,

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV = -\oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{s}$$

y utilizando el teorema de Gauss,

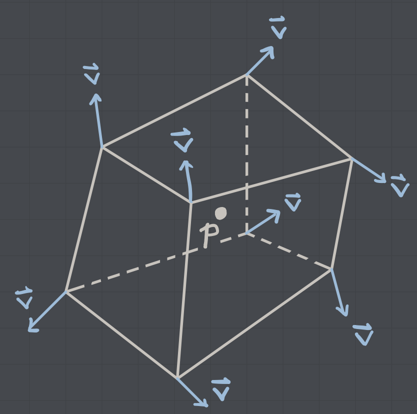
$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV = -\int_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\, dV$$

$$\int_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\right] dV = 0$$

Ya que esta expresión es válida para cualquier volumen, se obtiene la ecuación de continuidad, que expresa la conservación de la masa en el enfoque Euleriano,

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0}$$

En el enfoque Lagrangiano:



$$P = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

Cada punto de la superficie se mueve con la velocidad local del fluido.

No hay flujo a través de las superficies. $\longrightarrow$ La masa dentro del elemento es constante!

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

Sin embargo, el volumen del elemento va cambiando.

$$\frac{dM}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}\int \rho \, dV = \frac{d}{dt}\int \rho(t, x_1, x_2, x_3) \, \delta x_1(t) \, \delta x_2(t) \, \delta x_3(t)$$

donde se ha introducido el símbolo δ para denotar los cambios infinitesimales en las coordenadas espaciales.

El cambio en las coordenadas espaciales viene dado por la velocidad del fluido:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i$$

De esta forma,

$$\int \left[\frac{d\rho}{dt} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 + \rho \frac{d}{dt}(\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3) \right] = 0$$

$$\int \left[\frac{d\rho}{dt} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 + \rho \frac{d(\delta x_1)}{dt} \delta x_2 \delta x_3 + \rho \, \delta x_1 \frac{d(\delta x_2)}{dt} \delta x_3 + \rho \, \delta x_1 \delta x_2 \frac{d(\delta x_3)}{dt} \right] = 0$$

Sin embargo, $\quad \frac{d(\delta x_i)}{dt} = \delta\left(\frac{dx_i}{dt}\right) = \delta v_i \quad$, con lo que se tiene

$$\int \left[\frac{d\rho}{dt} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 + \rho \, \delta v_i \, \delta x_2 \delta x_3 + \rho \, \delta x_1 \delta v_2 \delta x_3 + \rho \, \delta x_1 \delta x_2 \delta v_3 \right] = 0$$

$$\int \left[\frac{d\rho}{dt} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 + \rho \, \delta x_1 \delta x_2 \delta_3 \left(\frac{\delta v_1}{\delta x_1} + \frac{\delta v_2}{\delta x_2} + \frac{\delta v_3}{\delta x_3} \right) \right] = 0$$

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxx}}_{\vec\nabla\cdot\vec v}$$

$$\iint \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\vec\nabla\cdot\vec v \right] \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 = 0$$

$$\iint \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\vec\nabla\cdot\vec v \right] dV = 0$$

Ya que esta expresión es válida para cualquier volumen, se obtiene la conservación de la masa en el enfoque Lagrangiano,

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\vec\nabla\cdot\vec v = 0}$$

Ahora bien, para que esta expresión coincida con la ecuación de continuidad (Euleriana),

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec\nabla\cdot(\rho\vec v) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec v\cdot\vec\nabla\rho + \rho\,\vec\nabla\cdot\vec v = 0$$

se debe cumplir que

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec v\cdot\vec\nabla\rho\,.$$

El operador

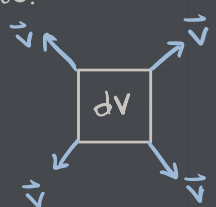
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec v\cdot\vec\nabla$$

se conoce como la derivada Lagrangiana o derivada temporal total. Este se puede obtener a partir de la regla de la cadena,

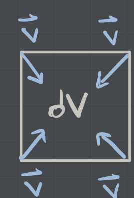
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec v\cdot\vec\nabla\rho\,.$$

El término $\vec v\cdot\vec\nabla\rho$ se conoce como derivada advectiva y mide el cambio de la cantidad ρ a lo largo de $\vec v$. (se refiere al transporte de ρ debido a la velocidad).

El término $-\rho\,\vec\nabla\cdot\vec v$ mide el cambio en ρ debido a la compresión o expansión del elemento de fluido.



$\vec\nabla\cdot\vec v > 0$



$\vec\nabla\cdot\vec v < 0$