Ondas Sonoras

Consideraremos ahora un sistema en equilibrio hidrostático. Suponiendo que no existen perdidas de energía, que no existe viscosidad y el fluido es desmagnetizado, se tiene

$$\vec{q}=0 \qquad \nu=0 \qquad \vec{J}=0$$
$$\vec{F}_{rad}=0 \qquad \vec{B}=0 \qquad Q^{(vis)}=0$$

De esta forma las ecuaciones de continuidad y de movimiento serán

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})=0$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p+\vec{f}$$

Ahora se consideraran pequeñas perturbaciones alrededor de un estado de equilibrio. Así, se tienen las cantidades

$$\begin{cases} P = P_0 + \delta P \\ \rho = \rho_0 + \delta\rho \\ \vec{v} = \delta\vec{v} \end{cases}$$

P_0, ρ_0 : valores en el estado de equilibrio $(\vec{v}_0=\vec{0})$

$\delta P, \delta\rho, \delta\vec{v} \sim \epsilon \ll 1$

Introducimos la ecuación de estado politrópica (en lugar de la ecuación de conservación de la energía),

$$P_0+\delta P = K(\rho_0+\delta\rho)^{\gamma} \qquad \text{I} \qquad\qquad 1 \leq \gamma \leq 5/3$$

La ecuación de continuidad se convierte en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0+\delta\rho)+\vec{\nabla}\cdot\left[(\rho_0+\delta\rho)\,\delta\vec{v}\right]=0$$

$$\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t}+\rho_0\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{v}=0+O(\epsilon^2) \qquad \text{II} \qquad \longleftarrow \qquad \left.\begin{aligned}\frac{\partial\rho_0}{\partial t}&=0\\ \vec{\nabla}\rho_0&=0\end{aligned}\right\}\ \rho_0 \text{ representa el estado de equilibrio.}$$

La ecuación de Euler se convierte en

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right]=-\vec{\nabla}P+\vec{f}$$

$$(\rho_0+\delta\rho)\left[\frac{\partial(\delta\vec{v})}{\partial t}+(\delta\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\delta\vec{v}\right]=-\vec{\nabla}(P_0+\delta P)+\vec{f}$$

$$\rho_0\frac{\partial(\delta\vec{v})}{\partial t}=-\vec{\nabla}\delta P-\vec{\nabla}P_0+\vec{f}\;+O(\epsilon^2)$$

En el estado de equilibrio, la ecuación de movimiento en el enfoque Lagrangiano es

$$\rho\frac{d\vec{v}_0}{dt}=-\vec{\nabla}P_0+\vec{f}=0\quad\longrightarrow\quad\vec{\nabla}P_0=\vec{f}$$

Utilizando este resultado, la ecuación de movimiento linealizada será

$$\rho_0\frac{\partial(\delta\vec{v})}{\partial t}=-\vec{\nabla}\delta P$$

Debido a que P es función de ρ exclusivamente (Ec. de estado) se puede escribir

$$\vec{\nabla}\delta P=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)\bigg|_0\vec{\nabla}\delta\rho$$

y con ello

$$\rho_0\frac{\partial(\delta\vec{v})}{\partial t}=-\left(\frac{dP}{d\rho}\right)\bigg|_0\vec{\nabla}\delta\rho\qquad\text{III}$$

Aplicando el operador $\frac{\partial}{\partial t}$ a II y el operador $\vec{\nabla}$ a III se tiene

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2(\delta\rho)}{\partial t^2}+\rho_0\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\delta\vec{v})=0\\[2ex]\rho_0\vec{\nabla}\cdot\dfrac{\partial(\delta\vec{v})}{\partial t}=-\left(\dfrac{dP}{d\rho}\right)\bigg|_0\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\delta\rho)\end{cases}$$

Restando estas relaciones se obtiene la ecuación de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2(\delta\rho)}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2(\delta\rho)}$$

donde se identifica la velocidad de propagación de las ondas sonoras

$$\boxed{c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\Big|_0}$$

A partir de la ecuación politrópica se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(K\rho^{\gamma}\right) = \gamma K \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{K\rho^{\gamma}}{\rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

y con ello

$$\boxed{c_s^2 = \gamma \frac{P_0}{\rho_0}}$$

Para el flujo adiabático, $\gamma = \frac{5}{3} \rightarrow \left(c_s^{ad}\right)^2 = \frac{5}{3}\frac{kT}{\mu m_H}$

Para el flujo isotermo, $\gamma = 1 \rightarrow \left(c_s^{iso}\right)^2 = \frac{kT}{\mu m_H}$

En cualquiera de los casos, el valor numérico de la rapidez del sonido se puede estimar como

$$\boxed{c_s \sim \left(\frac{kT}{\mu m_H}\right)^{1/2} \sim 10\left(\frac{T}{10^4 K}\right)^{1/2} \quad \left[\frac{km}{s}\right]}$$

y además considerando $\vec{v}=0$, la ecuación de conservacion del momentum se reduce a

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{v}\right] = -\vec{\nabla}P + \vec{f}$$

$$\vec{\nabla}P = \vec{f} \qquad (\mathrm{V})$$