Trabalho Prático 2

Ano letivo 2021/2022

David Alexandre Ferreira Duarte (a93253)
Diana Abreu Machado Azevedo Rodrigues (a93164)
Mariana do Carmo Araújo Amorim (a93190)
Samuel de Almeida Simões Lira (a94166)
Sara Lima Pereira (a93215)

Licenciatura em Engenharia Informática

Investigação Operacional

08/05/2022

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Índice

1. Introdução

O presente relatório tem como objetivo apresentar o desenvolvimento do projeto proposto na Unidade Curricular de Investigação Operacional.

O objetivo deste trabalho passa por aplicar alguns dos conhecimentos adquiridos nesta Unidade Curricular relacionados com a resolução de problemas de transporte em redes com capacidades.

O problema apresentado baseia-se na atribuição de tarefas (prestação de serviços a determinados clientes) a equipas de funcionários e tem como objetivo minimizar o custo total da operação (custo de deslocamento e custos fixos de utilização dos veículos). Para isso, foi necessário formular o problema e modelá-lo de forma a obter, então, o percurso e número de equipas ótimos, através da utilização da ferramenta Relax4. Por fim, validámos o modelo e confirmámos os resultados obtidos.

2. Clientes

O número de aluno mais elevado dos elementos do grupo é o número: 94166, assim removemos o cliente 6, obtendo o seguinte quadro:

J	cliente	a_j (¼ hora)	a_j (hora de serviço)
1	Ana	5	10:15
2	Beatriz	7	10:45
3	Carlos	4	10:00
4	Diogo	2	09:30
5	Eduardo	10	11:30
7	Gonçalo	9	11:15
8	Helena	2	09:30
9	Inês	2	09:30
10	José	5	10:15

Com estes dados, podemos obter o seguinte grafo de compatibilidades:

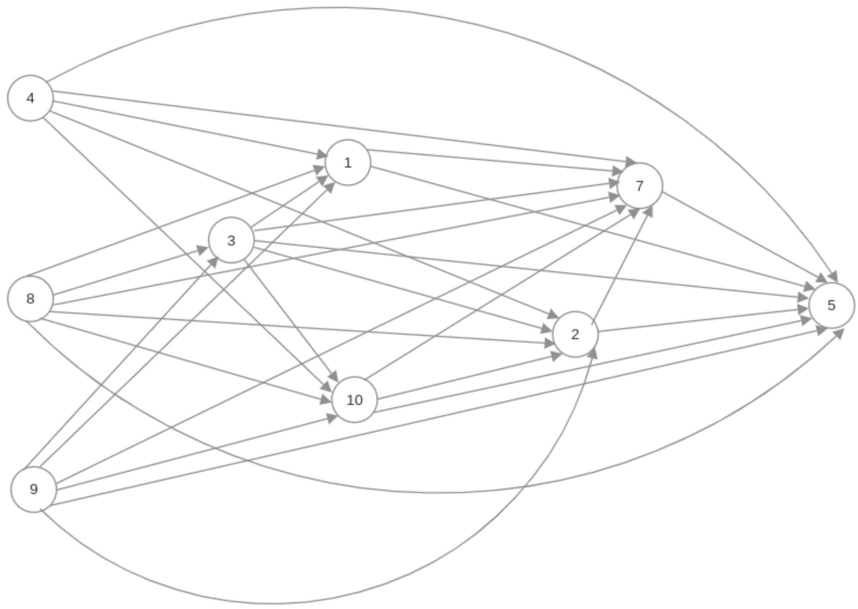

Figura 1 - Grafo de compatibilidades.

<u>Nota:</u> Uma vez que, no instante inicial, cada equipa pode ir do ponto de partida (Keleirós) para qualquer cliente e, após realizar o serviço de qualquer cliente, regressar para o mesmo ponto decidimos **não representar** todos estes arcos (e o vértice Keleirós) para que a representação do grafo ficasse mais legível e menos confusa.

3. Formulação do Problema

O problema apresentado trata-se de uma questão logística de gestão de recursos onde existem 9 clientes com serviços agendados e cada cliente deve receber o atendimento de exatamente uma equipa de trabalho no horário marcado. Cada equipa existente está disponível a partir das 9:00 na sede em Keleirós e tem associado o custo fixo de 1 U.M. Cada equipa parte para prestar serviço a um cliente e, se necessário, deve esperar até à hora em que o serviço está marcado. As durações dos serviços são desprezadas.

A fim de solucionar este problema é necessário determinar o número de equipas e o percurso de cada equipa de forma a minimizar o custo total da realização dos serviços (nas horas marcadas) a esses 9 clientes.

Para resolver este problema definimos o grafo de compatibilidades que representa os trajetos possíveis a efetuar pelas equipas. Cada vértice da rede representa um dos clientes (de 1 a 9) e os arcos representam as deslocações possíveis a efetuar pelas equipas tendo em conta as horas dos serviços. Assim, quando uma equipa se desloca para realizar um serviço numa determinada hora, posteriormente só poderá realizar serviços de clientes que tenham agendado serviços para uma hora posterior ou igual à soma do tempo de deslocação com a hora do último serviço realizado. Ou seja, se uma equipa realiza o serviço agendado pela cliente Ana, às 10h15, não poderá depois realizar o serviço agendado pela cliente Inês às 9h30, ou pela cliente Beatriz às 10h45 (dado que da Ana à Beatriz se demora 1h na deslocação).

Definimos que o fluxo na rede seria o número máximo de equipas a utilizar (9 dado existirem 9 clientes sendo que, no máximo, cada equipa atendia o serviço de 1 cliente). Assim, definimos que a oferta no nodo inicial seria 9 e o consumo no vértice final seria -9.

Uma vez que se pretende minimizar os custos e não faz sentido duas equipas deslocarem-se até ao mesmo cliente, a capacidade máxima de todos os arcos entre clientes, do ponto de partida para os clientes e dos clientes para o ponto de chegada é 1. No entanto, o arco que une o ponto de partida ao ponto de chegada (que, na prática, correspondem ao mesmo local - Keleirós) tem capacidade máxima infinita, dado que todas as equipas não utilizadas serão abrangidas por este arco.

Os custos em cada arco correspondem aos custos das deslocações entre os vários clientes e entre os clientes e Keleirós, que correspondem a despesas de combustível, portagens e outras.

Sendo que neste problema é necessário que as equipas visitem todos os clientes, seria expectável que cada vértice (representante de um cliente) tivesse um consumo de -1. No entanto, caso tal acontecesse, o fluxo chegaria a 0 em cada vértice e as equipas não regressariam a Keleirós. Assim, foi necessário transformar cada vértice do grafo de compatibilidades em dois, com um arco que os une com capacidade 0 e custo 0. O primeiro vértice correspondente a um dado cliente teria um consumo de -1, o que levaria as equipas a visitarem todos os clientes, no entanto, o segundo vértice correspondente ao mesmo cliente teria uma oferta de 1, de forma a obrigar as equipas a continuarem o seu percurso e a terminarem apenas em Keleirós.

A solução ótima será indicada pela escolha de arcos no grafo. O número de arcos selecionados do ponto inicial (Keleirós) para os clientes representará o número de equipas a utilizar e o fluxo do ponto inicial para o final consistirá no número de equipas não selecionadas. Para além disso será possível determinar os percursos das equipas escolhidas pela seleção de arcos consecutivos. Em caso de exemplo, se o fluxo for de 1 em 4 arestas que unem Keleirós a 4 clientes e se for de 5 na aresta que une Keileirós como ponto inicial a Keleirós como ponto final, percebemos que o número ótimo de equipas a utilizar é 4. Ao mesmo tempo, se uma dessas quatro arestas unir Keleirós inicial ao cliente Carlos e o fluxo da aresta que une o cliente Carlos ao cliente José também for de 1, sabemos que a equipa que saiu de Keleirós prestou serviço ao cliente Carlos e, posteriormente, a mesma equipa deslocou-se até ao cliente José e realizou o seu serviço. Assim, podemos obter os percursos efetuados pelas várias equipas, sendo que o custo total é a soma dos custos das deslocações com o custo de escolher determinado número de equipas.

4. Modelo do problema

Construção da rede:

O primeiro passo para a resolução deste problema de transporte em redes foi a própria construção da rede, já tendo em conta as restrições relativas à hora de início de serviço associada a cada cliente.

Numa solução admissível, é possível que uma equipa visite mais do que um cliente antes de voltar até à sede da empresa, desde que a hora de início de serviço para o cliente atual, somada com o tempo de deslocação entre o cliente atual e o cliente seguinte em causa não exceda a hora de início de serviço do cliente seguinte.

$$a_i + t_{ij} \leq a_j,$$

$$a_i \equiv hora\ de\ início\ de\ serviço\ do\ cliente\ atual,$$

$$a_j \equiv hora\ de\ início\ de\ serviço\ do\ cliente\ seguinte,$$

$$t_{ij} \equiv tempo\ de\ deslocação\ entre\ cliente\ a_i\ e\ cliente\ a_j.$$

Para além disto, foi também definido que nenhum cliente poderia ser visitado depois da sua hora de início de serviço ter sido cumprida, uma vez que poderia ser considerada essa possibilidade para possíveis reduções de custos, embora contribuísse para uma solução não muito realista.

$$\forall_{i,j} \in C, a_j \geq a_i \rightarrow x_{ji} = 0,$$

$$C\ \equiv conjunto\ dos\ clientes,$$

$$a_i \equiv hora\ de\ início\ de\ serviço\ do\ cliente\ i,$$

$$a_j \equiv hora\ de\ início\ de\ serviço\ do\ cliente\ j,$$

$$x_{ji} \equiv utilização\ da\ aresta\ direcionada\ entre\ cliente\ j\ e\ cliente\ i.$$

Tendo isto em conta, o grupo começou a construção da rede dispondo os vértices associados a cada cliente por ordem das suas horas de início de serviço como mostra a imagem seguinte:

Figura 2 - Disposição inicial dos vértices relativos aos clientes.

De seguida, foram definidas as arestas com base nas restrições acima mencionadas, dando origem ao grafo apresentado no capítulo *Clientes*.

Os tempos de deslocação entre clientes e entre clientes e a sede da empresa, localizada em Keleirós, em quartos de hora, e os custos de deslocação tidos em conta foram os seguintes:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Ki**	**Kf**
1	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-	1
2	-	-	-	-	3	2	-	-	-	-	5
3	1	3	-	-	2	2	-	-	1	-	2
4	2	5	-	-	1	3	-	-	3	-	1
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2
7	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	3
8	1	3	0	-	2	2	-	-	1	-	1
9	0	4	1	-	2	2	-	-	3	-	2
10	-	2	-	-	2	2	-	-	-	-	4
Ki	1	5	2	1	2	3	1	2	4	-	0
Kf	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 1 - Tempos de deslocação

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**8**	**9**	**10**	**Ki**	**Kf**
1	-	-	-	-	5	7	-	-	-	-	2
2	-	-	-	-	10	6	-	-	-	-	16
3	5	11	-	-	6	6	-	-	6	-	3
4	6	14	-	-	4	8	-	-	11	-	5
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7
7	-	-	-	-	4	-	-	-	-	-	10
8	5	11	0	-	6	10	-	-	6	-	10
9	0	13	5	-	5	7	-	-	7	-	10
10	-	4	-	-	7	5	-	-	-	-	11
Ki	1	15	2	4	6	9	9	9	10	-	0
Kf	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 2 - Custos de deslocação

É de notar que os custos de todas as arestas cujo destino é Kf tiveram o incremento de uma unidade, associada ao custo fixo da volta de cada equipa com serviço à sede da empresa.

Para além disso, foi acrescentada uma aresta extra fictícia (cuja utilidade é explicada no subcapítulo seguinte) que liga o vértice Ki a Kf. Esta aresta tem tanto o tempo como o custo de deslocação nulos.

Restrições de conservação de fluxo:

O maior desafio relacionado com este problema consistiu em garantir a conservação de fluxo em todos os vértices da rede.

Em primeiro lugar, foi necessário definir o significado do fluxo na rede. Tendo em conta que o objetivo do problema é minimizar o somatório dos custos das arestas utilizadas e o custo associado a cada aresta da rede reflete o custo de uma deslocação entre dois clientes, faz sentido que o fluxo seja o número de equipas.

Assim, o passo seguinte na resolução do problema implicou definir o número de equipas mínimo para que todas as horas de início de serviço fossem cumpridas sem que a mesma equipa visitasse mais do que um cliente. Este número equivale ao número de clientes existentes, ou seja, nove, e representa a oferta inicial da rede (associado ao vértice Ki).

Com a oferta inicial da rede estabelecida e existindo a possibilidade de cada equipa visitar mais do que um cliente antes de voltar à sede da empresa, surgiu então a necessidade de pensar numa estratégia que permitisse, de forma clara, distinguir as equipas com serviços atribuídos das equipas sem serviços atribuídos.

Para isso, foi acrescentada uma aresta fictícia entre os vértices Ki e Kf. De forma a não influenciar a solução final, tanto no custo total das deslocações como na escolha de arestas, o custo associado a esta aresta foi zero.

A garantia de que todos os clientes fossem visitados, mantendo a conservação de fluxo, foi conseguida transformando cada vértice que representa um cliente em dois vértices ligados por uma aresta. Desta forma, o vértice correspondente à entrada apresenta uma variação de fluxo de -1 unidade e o de saída tem uma variação de +1 unidade.

No vértice final (Kf) o consumo é o inverso da oferta inicial, ou seja, -9.

Restrições de capacidade:

Uma vez que o fluxo do arco fictício acrescentado entre os nodos Ki e Kf serve para sabermos quantas equipas (das 9) não foram utilizadas, definimos que teria capacidade 1000 o que, no contexto deste problema, representa capacidade ilimitada.

Por outro lado, para os restantes arcos fictícios (arcos que ligam o nodo de um cliente ao seu “complementar”) definimos que a capacidade seria 0, já que considerámos, como referido anteriormente, o fluxo -1 no nodo do cliente e +1 no nodo “complementar”. Apenas assim é possível garantir que cada cliente é visitado por uma só equipa.

Para os restantes arcos, de forma a garantir que nenhum cliente é visitado mais do que uma vez, foi definida uma capacidade máxima com o valor de uma unidade.

5. Ficheiro de Input

```
22
58
21  1   1   1
21  2   15  1
```

21	3	2	1
21	4	4	1
21	5	6	1
21	7	9	1
21	8	9	1
21	9	9	1
21	10	10	1
21	22	0	1000
1	11	0	0
2	12	0	0
3	13	0	0
4	14	0	0
5	15	0	0
7	17	0	0
8	18	0	0
9	19	0	0
10	20	0	0
11	5	5	1
11	7	7	1
11	22	2	1
12	5	10	1
12	7	6	1
12	22	16	1
13	1	5	1
13	2	11	1
13	5	6	1
13	7	6	1
13	10	6	1
13	22	3	1
14	1	6	1
14	2	14	1
14	5	4	1
14	7	8	1
14	10	11	1
14	22	5	1
15	22	7	1
17	5	4	1
17	22	10	1
18	1	5	1
18	2	11	1
18	3	0	1
18	5	6	1
18	7	10	1
18	10	6	1
18	22	10	1
19	1	0	1
19	2	13	1

19 3 5 1
19 5 5 1
19 7 7 1
19 10 7 1
19 22 10 1
20 2 4 1
20 5 7 1
20 7 5 1
20 22 11 1
-1
-1
-1
-1
-1
0
-1
-1
-1
-1
1
1
1
1
1
0
1
1
1
1
9
-9

6. Ficheiro de Output

****

NEOS Server Version 6.0
Job# : 11910891
Password : gWIVktaf
User :
Solver : lno:RELAX4:RELAX4
Start : 2022-04-29 08:19:32
End : 2022-04-29 08:19:34
Host : prod-sub-1.neos-server.org

Disclaimer:

This information is provided without any express or

implied warranty. In particular, there is no warranty
of any kind concerning the fitness of this
information for any particular purpose.

Announcements:
****
NUMBER OF NODES = 22, NUMBER OF ARCS = 58
UNKNOWN OR UNSPECIFIED INITIALIZATION MODE;USING DEFAULT INITIALIZATION
****
Total algorithm solution time =   0.00326418877 sec.
OPTIMAL COST =   56.
NUMBER OF ITERATIONS = 13
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 1
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 1
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 1
****

-------------------- begin dimacs-format results --------------------
c
c PROCESSING INFORMATION:
c ======================
c
c This problem was processed by the Optimization Technology Center's
c NEOS Server for Linear Network Optimization (LNO). If you have any
c questions about the Server, please refer to our web page:
c
c   https://neos-server.org/
c
c If your have questions or comments about the output, or if you
c have any other issues, send mail to:
c
c   support@neos-server.org
c
c
c SOLVER INFORMATION:
c ==================
c
c The problem was solved using RELAX-IV by Dimitri Bertsekas (MIT) and
c Paul Tseng (Univ. of Washington). Both authors welcome and appreciate
c feedback from users of their code -- they may be contacted by email:
c
c   bertsekas@lids.mit.edu, tseng@math.washington.edu
c
c (Please note that the authors do not maintain the NEOS Server; any

c feedback that is related to problems with the Server should be
c directed via email to "support@neos-server.org".)
c
c The RELAX-IV code is publicly available via anonymous ftp from the
c server "lids.mit.edu" in the "/pub/bertsekas/RELAX" directory. The
c code can be used for any noncommercial research purposes and for
c comparative test purposes, but cannot be used to satisfy commercial
c deliverables to government or industry without prior agreement with
c the authors.
c
s 56.
f 21 1 0
f 21 2 0
f 21 3 0
f 21 4 1
f 21 5 0
f 21 7 0
f 21 8 1
f 21 9 1
f 21 10 0
f 21 22 6
f 1 11 0
f 2 12 0
f 3 13 0
f 4 14 0
f 5 15 0
f 7 17 0
f 8 18 0
f 9 19 0
f 10 20 0
f 11 5 0
f 11 7 0
f 11 22 1
f 12 5 0
f 12 7 1
f 12 22 0
f 13 1 0
f 13 2 0
f 13 5 0
f 13 7 0
f 13 10 1
f 13 22 0
f 14 1 0
f 14 2 0
f 14 5 0
f 14 7 0
f 14 10 0

f 14 22 1
f 15 22 1
f 17 5 1
f 17 22 0
f 18 1 0
f 18 2 0
f 18 3 1
f 18 5 0
f 18 7 0
f 18 10 0
f 18 22 0
f 19 1 1
f 19 2 0
f 19 3 0
f 19 5 0
f 19 7 0
f 19 10 0
f 19 22 0
f 20 2 1
f 20 5 0
f 20 7 0
f 20 22 0
-------------------- end dimacs-format results --------------------

7. Interpretação da Solução Ótima

A figura abaixo representa a solução ótima obtida através do Relax4 utilizando o modelo desenvolvido pelo grupo anteriormente apresentado.

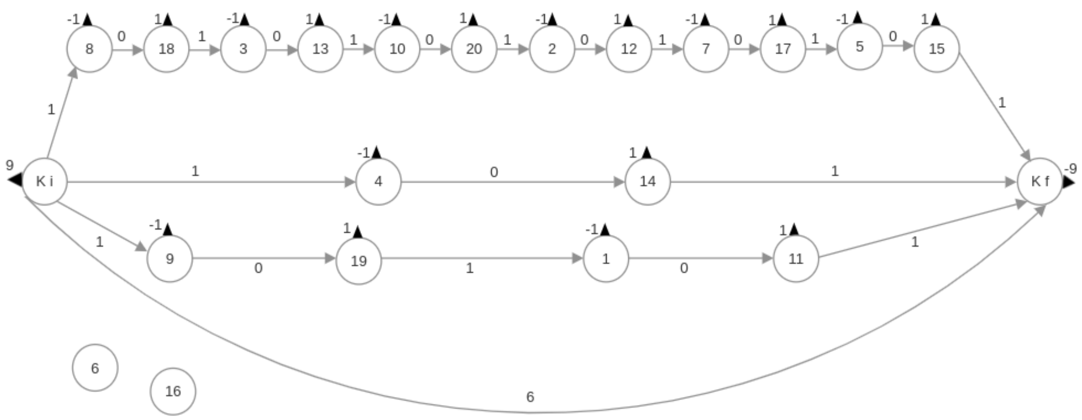

Figura 3 - Grafo representativo da solução ótima com fluxo, ofertas e procuras.

Retirando os nodos auxiliares do grafo, de modo a tornar a sua interpretação mais intuitiva, obtemos o seguinte grafo:

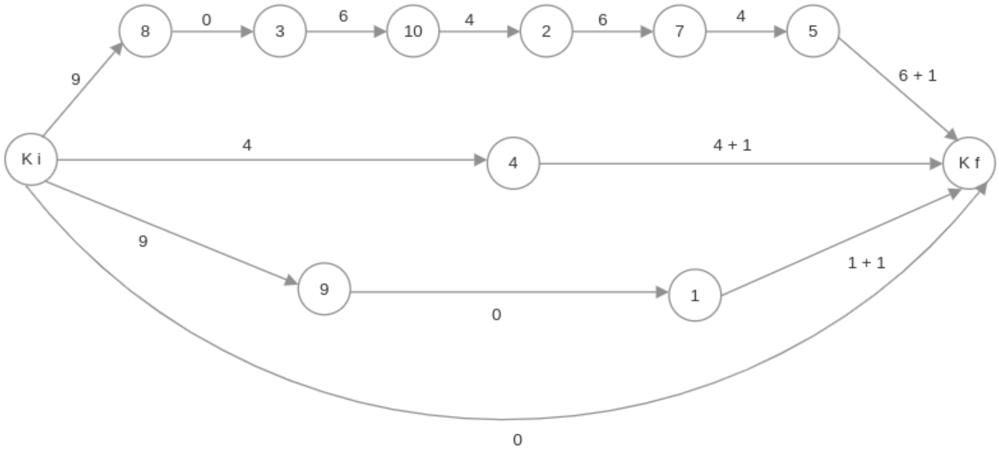

Figura 4 - Grafo simplificado representativo da solução ótima com custos de deslocação.

A partir deste grafo podemos concluir que esta solução é composta por três equipas de trabalho, sendo cada equipa responsável por atender um conjunto distinto de clientes.

Equipa	Percurso	Hora de chegada	Duração	Custo
A	K->8->3->10->2->7->5->K	12:00	3h	36
B	K->4->K	09:45	45 min	9
C	K->9->1->K	10:30	1h30	11
Total	-	-	-	56

Uma equipa, chamemo-la equipa A, é responsável por fazer o percurso K -> 8 -> 3 -> 10 -> 2 -> 7 -> 5 -> K. Esta equipa parte de Keleirós às 9h, segue para realizar o serviço da cliente 8 (Helena) e, uma vez que o serviço da Helena só se inicia às 9h30 e a deslocação de Keleirós a esta cliente só demora 1 quarto de hora, espera 15 minutos. Segue para o cliente 3 (Carlos) cujo serviço se inicia às 10h e espera 30 minutos. Segue para o cliente 10 (José) cuja deslocação demora 1 quarto de hora e, portanto, a equipa chega mesmo a tempo de realizar o seu serviço às 10h15. Segue para a cliente 2 (Beatriz) com serviço às 10h45, a equipa chega mesmo a tempo de realizar este serviço. Segue para o cliente 7 (Gonçalo) cujo serviço se inicia às 11h15 e, dado que o tempo de deslocação entre a Beatriz e o Gonçalo é de 30 minutos, a equipa não precisa de esperar entre os serviços. Por fim, visita o cliente 5 (Eduardo) com uma deslocação de 1 quarto de hora, pelo que a equipa chega mesmo a tempo de realizar o serviço às 11h30. Por fim, esta equipa regressa a Keleirós com uma deslocação de duração de 30 minutos, pelo que o trabalho desta equipa dura no total 3h e termina às 12h.

Já o percurso da equipa B começa às 9h em Keleirós. A equipa faz o serviço associado ao cliente 4 (Diogo), sendo que a deslocação tem um tempo de 15 minutos e custo de 4 U.M. Como a hora de serviço especificada para este cliente é 9h30, a equipa espera 15 minutos para poder realizá-lo. Por fim, a equipa regressa à sede da empresa, numa deslocação de 15 minutos e custo de 5 U.M, terminando todos os seus serviços às 9h45 com um custo total de 9 U.M.

Finalmente, a equipa C parte também às 9h para prestar serviço ao cliente 9 (Inês), o que corresponde a um custo de 9 U.M. e tempo de deslocação de 30 minutos e, por isso, chegará exatamente à hora marcada para a prestação do serviço. Acabado este serviço, dirigir-se-á para o cliente 1 (Ana), o que não tem qualquer tempo ou custo de deslocação associados. Assim considerámos que a equipa chegará ao cliente 1 (Ana) às 09:30 tendo de esperar até às 10:15 (45 minutos). Prestado este serviço, a equipa voltará à sede da empresa chegando às 10:30 visto que o tempo de deslocação é de 15 minutos. Tendo em conta que esta última deslocação tem custo de 1 U.M., o que perfaz um custo total de 11 U.M. (9+0+1+1) já com o custo fixo incluído. Como foi referido anteriormente a equipa regressa à sede às 10:30 o que significa que esta equipa demora 1h30 a prestar todos os serviços e regressar à empresa.

8. Validação do Modelo

De forma a validar a solução obtida através do modelo anteriormente apresentado, começámos por confirmar que a soma dos custos das arestas utilizadas correspondia ao custo ótimo apresentado no ficheiro de output do Relax4:

Custo ótimo = $X_{Ki\_8} * C_{Ki\_8} + X_{8\_18} * C_{8\_18} + X_{18\_3} * C_{18\_3} + X_{3\_13} * C_{3\_13} + X_{13\_10} * C_{13\_10} + X_{10\_20} * C_{10\_20} + X_{20\_2} * C_{20\_2} + X_{2\_12} * C_{2\_12} + X_{12\_7} * C_{12\_7} + X_{7\_17} * C_{7\_17} + X_{17\_5} * C_{17\_5} + X_{5\_15} * C_{5\_15} + X_{15\_Kf} * C_{15\_Kf} + X_{Ki\_4} * C_{Ki\_4} + X_{4\_14} * C_{4\_14} + X_{14\_Kf} * C_{14\_Kf} + X_{Ki\_9} * C_{Ki\_9} + X_{9\_19} * C_{9\_19} + X_{19\_1} * C_{19\_1} + X_{1\_11} * C_{1\_11} + X_{11\_Kf} * C_{11\_Kf} + X_{Ki\_Kf} * C_{Ki\_Kf}$ = 1*9 + 0*0 + 1*0 + 0*0 + 1*6 + 0*0 + 1*4 + 0*0 + 1*6 + 0*0 + 1*4 + 0*0 + 1*(6 + 1) + 1*4 + 0*0 + 1*(4 + 1) + 1*9 + 0*0 + 1*0 + 0*0 + 1*(1 + 1) + 6*0 = 56

De seguida passámos à confirmação do cumprimento das restrições. De modo a verificar que as restrições de conservação de fluxo são respeitadas, devemos, para cada nodo, averiguar se o fluxo corresponde à diferença entre as saídas e as entradas:

Nodo 1:	9 = 1 + 1 + 1 + 6	Nodo 12:	1 = 1 - 0
Nodo 2:	-1 = 0 - 1	Nodo 13:	1 = 1 - 0
Nodo 3:	-1 = 0 - 1	Nodo 14	1 = 1 - 0

Nodo 4:	-1 = 0 - 1	Nodo 15:	1 = 1 - 0
Nodo 5:	-1 = 0 - 1	Nodo 16:	0 = 0
Nodo 6:	0 = 0	Nodo 17:	1 = 1 - 0
Nodo 7:	-1 = 0 - 1	Nodo 18:	1 = 1 - 0
Nodo 8:	-1 = 0 - 1	Nodo 19:	1 = 1 - 0
Nodo 9:	-1 = 0 - 1	Nodo 20:	1 = 1 - 0
Nodo 10:	-1 = 0 - 1	Nodo 21 (Ki):	9 = 1 + 1 + 1 + 6
Nodo 11:	1 = 1 – 0	Nodo 22(Kf):	-9 = - 1 - 1 - 1 - 6

Quanto à confirmação do cumprimento das restrições de capacidade é apenas necessário verificar que, em cada arco, a capacidade máxima não é excedida.

Os arcos X_{1_11}, X_{2_12}, X_{3_13}, X_{4_14}, X_{5_15}, X_{6_16}, X_{7_17}, X_{8_18}, X_{9_19} e X_{10_20} têm capacidade máxima de 0 e, tal como é possível verificar na figura 4 (e no ficheiro de *output*), essa capacidade não é ultrapassada em nenhum dos arcos.

Já o arco X_{21_22} apresentada capacidade 1000 o que, no contexto deste problema, representa capacidade ilimitada. Uma vez que nesse arco, na solução ótima, circulam 6 equipas também a capacidade deste arco é respeitada.

Por fim, todos os restantes arcos têm capacidade 1 e, como podemos observar na figura 4 (e no ficheiro de *output*), essa capacidade é respeitada em todos esses arcos.

Assim, podemos concluir que todas as restrições (de capacidade e de conservação de fluxo) são respeitadas.

9. Conclusão

Considerámos que os objetivos estabelecidos para este trabalho prático foram atingidos com sucesso.

A nossa maior dificuldade foi perceber como poderíamos garantir que cada cliente seria visitado uma e uma só vez, mas, combinando o estabelecimento de capacidades nos arcos e de fluxos nos vértices, foi possível fazê-lo.

Este trabalho permitiu-nos consolidar conhecimentos relacionados com os problemas de transporte em rede.