



**POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL**

UNIVERSITÉ
D'INGÉNIERIE

IND8122

ANALYSE FINANCIÈRE INDUSTRIELLE
RAPPORT

TP2 - Optimisation de portefeuille

Élèves :

2409467 Zakaria MEZIARI
2312414 David ZHU
2413607 Adrien TELITCHKO
2022388 Olivier DESRAVINES
2060256 Théo GAPIHAN

Enseignant :
Robert NORMAND

14 décembre 2024

Table des matières

1 Acquisition et préparation des données	3
1.1 Présentation des fonds	3
1.2 Séparation des données en set d'entraînement et de test	4
2 Analyse statistiques des données	6
2.1 Performances historiques	6
2.1.1 Formules	6
2.1.2 Résultats et analyse	6
2.1.3 Analyse de la corrélation entre fonds	8
2.2 Évolutions des fonds	9
2.2.1 Évolution des prix normalisés	9
2.2.2 Distributions de rendement et Maximum Drawdown	9
3 Portefeuilles efficients	12
3.1 Frontière efficiente	12
3.2 Utilisation de solveurs	13
3.3 Solution pseudo-optimale au problème de minimisation de variance	13
3.3.1 Cas 1 : Contraintes dures supplémentaires de poids supérieur strictement à 0%	13
3.3.2 Cas 2 : Contraintes dures supplémentaires de poids compris entre 5% et 30%	14
3.4 Solution pseudo-optimale au problème de maximisation du ratio de Sharpe	15
3.4.1 Cas 1 : Contraintes dures supplémentaires de poids supérieur strictement à 0%	16
3.4.2 Cas 2 : Contraintes dures supplémentaires de poids compris entre 5% et 30%	17
4 Rebalancement et analyse du backtesting	18
4.1 Portefeuilles de référence	18
4.1.1 Portefeuille équipondéré	18
4.1.2 Portefeuille inverse-variance	19
4.2 Rebalancement	19
4.2.1 Méthodologie de rebalancement	19
4.2.2 Résultats du rebalancement	19
4.3 Analyse des performances	20
4.3.1 Rendement cumulés	20
4.3.2 Rendement, volatilité et Sharp Ratio	20
4.3.3 Maximum Drawdown	22
5 Conclusion	23
A Résultats de rebalancement de stratégie	24
B Résultats numériques	27

Table des figures

1	Évolution des prix ajustés des fonds sélectionnés.	3
2	Rendements mensuels des fonds sélectionnés.	3
3	Évolution des prix ajustés pour l'ensemble d'entraînement.	4
4	Évolution des prix ajustés pour l'ensemble de test.	4
5	Évolution des rendements mensuels pour l'ensemble d'entraînement.	5
6	Évolution des rendements mensuels pour l'ensemble de test.	5
7	Rendement moyen sur une base annuelle.	6
8	Volatilité annuelle	7
9	Ratio rendement-risque.	7
10	Matrice des corrélations.	8
11	Évolution du prix des titre.	9
12	Distribution des rendements mensuels.	10
13	Graphique du maximum drawdown.	11
14	Frontière efficiente et portefeuilles générés aléatoirement.	12
15	Top 3 des portefeuilles générés aléatoirement selon le ratio de Sharpe.	12
16	Composition de PFT1.	13
17	Composition de PFT2	14
18	Composition de PFT3	16
19	Composition de PFT4	17
20	Composition de PFT4	18
21	Composition de PFT4	19
22	Rendement cumulé des portefeuilles	20
23	Rendement moyen annuel des portefeuilles	21
24	Volatilité annuelle des portefeuilles	21
25	Ratio de sharp des portefeuilles	21
26	Maximum drawdown des portefeuilles	22
27	Évolution de PFT1	24
28	Évolution de PFT2	24
29	Évolution de PFT3	25
30	Évolution de PFT4	25
31	Évolution de PFT5	26
32	Évolution de PFT6	26

Liste des tableaux

1	Résumé des performances des portefeuilles calculé avec QuantStat	27
---	--	----

1 Acquisition et préparation des données

1.1 Présentation des fonds

La lecture des données permet d'acquérir les prix ajustés ainsi que les rendements mensuels présentés ci-dessous.

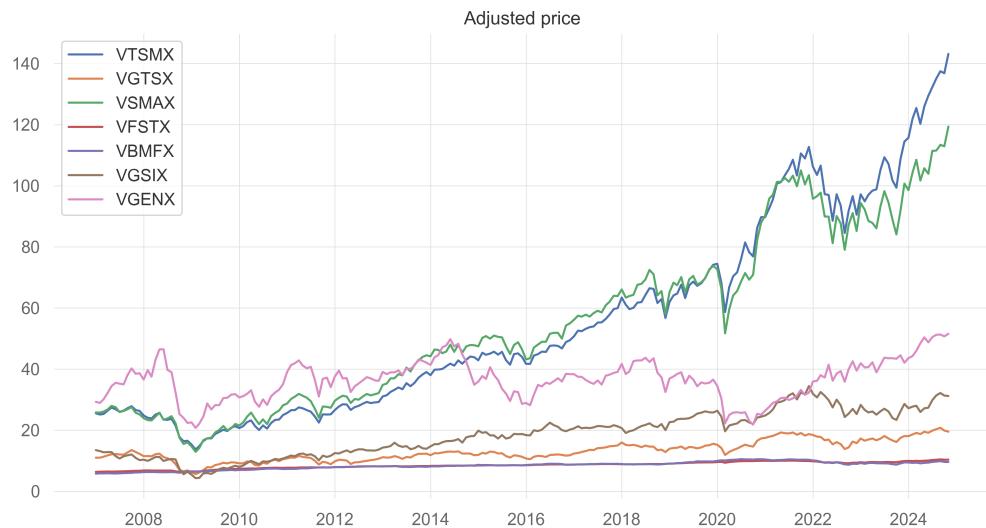


FIGURE 1 – Évolution des prix ajustés des fonds sélectionnés.

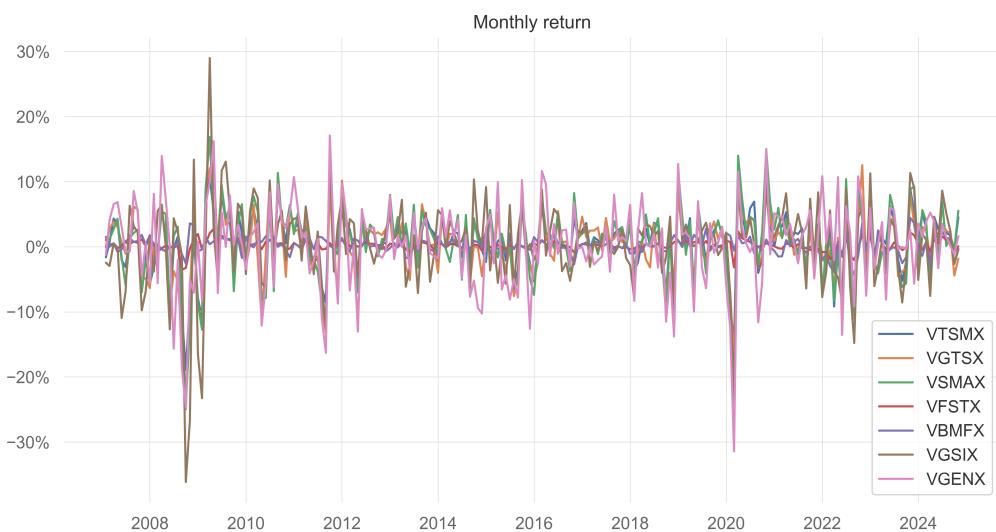


FIGURE 2 – Rendements mensuels des fonds sélectionnés.

1.2 Séparation des données en set d'entraînement et de test

L'ensemble des données a été séparé en deux échantillons :

- **Échantillon d'entraînement** : couvrant la période de 2007 à fin 2021.
- **Échantillon de test** : couvrant la période de 2022 à 2024.

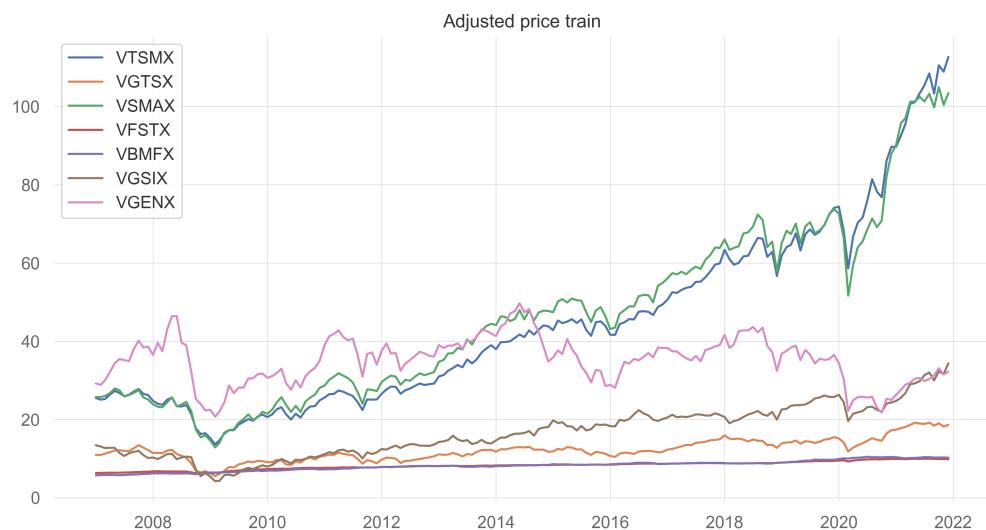


FIGURE 3 – Évolution des prix ajustés pour l'ensemble d'entraînement.

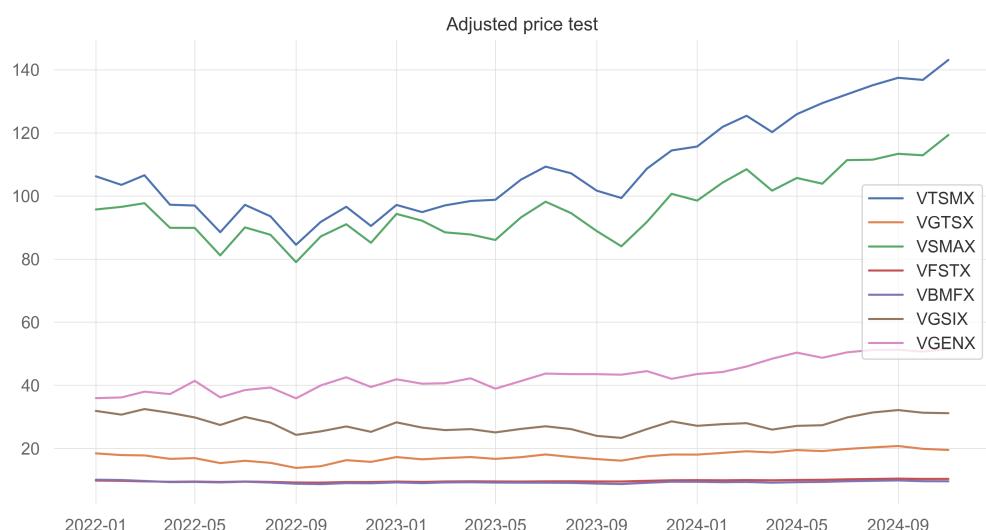


FIGURE 4 – Évolution des prix ajustés pour l'ensemble de test.

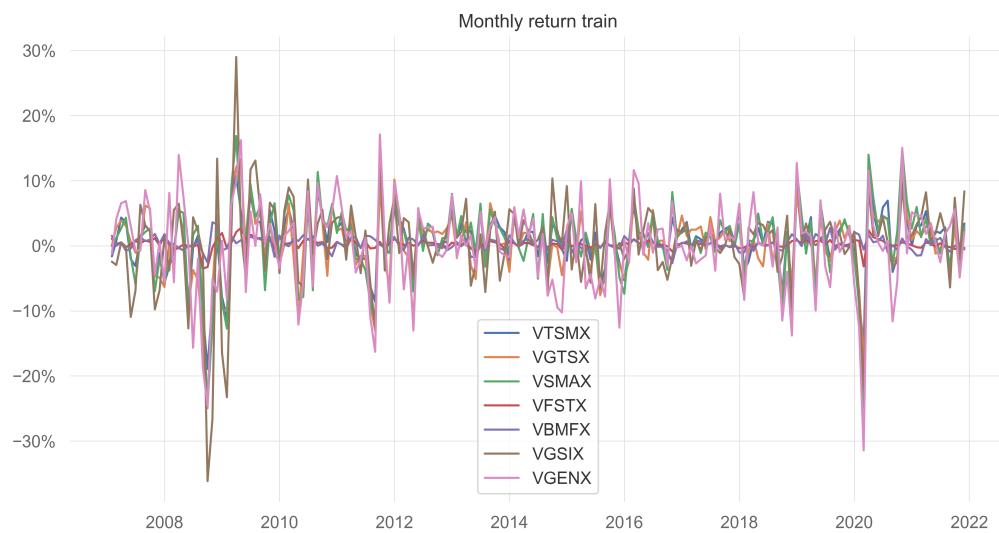


FIGURE 5 – Évolution des rendements mensuels pour l'ensemble d'entraînement.

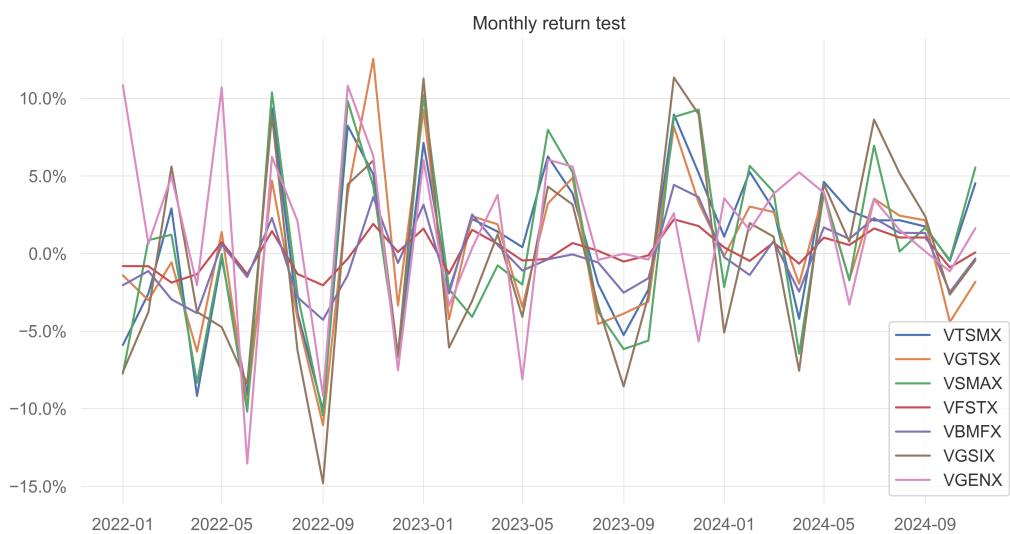


FIGURE 6 – Évolution des rendements mensuels pour l'ensemble de test.

2 Analyse statistiques des données

2.1 Performances historiques

2.1.1 Formules

Les formules suivantes ont été utilisées pour les calculs des métriques :

- **Rendement moyen annuel pour un fond** : La moyenne géométrique des rendements mensuels sur une base annuelle :

$$\text{Rendement moyen annuel} = \left(\prod_{i=1}^n (1 + r_i) \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (1)$$

où r_i est le rendement mensuel pour le mois i ème mois.

- **Écart-type annuelle des rendements pour un fond** :

$$\text{Écart-type annuelle} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - r_m)^2} \times \sqrt{12} \quad (2)$$

où r_i est le rendement mensuel pour le i ème mois, r_m est le rendement moyen annuel pour ce fond.

- **Ratio de Sharpe pour un fond** : Défini comme le rapport entre l'excès de rendement et la volatilité annuelle :

$$\text{Ratio de Sharpe} = \frac{r - r_f}{\sigma_p} \quad (3)$$

où r_m est le rendement annuel moyen du fond, r_f est le taux sans risque et σ_p est l'écart-type annuel des rendements du portefeuille.

2.1.2 Résultats et analyse

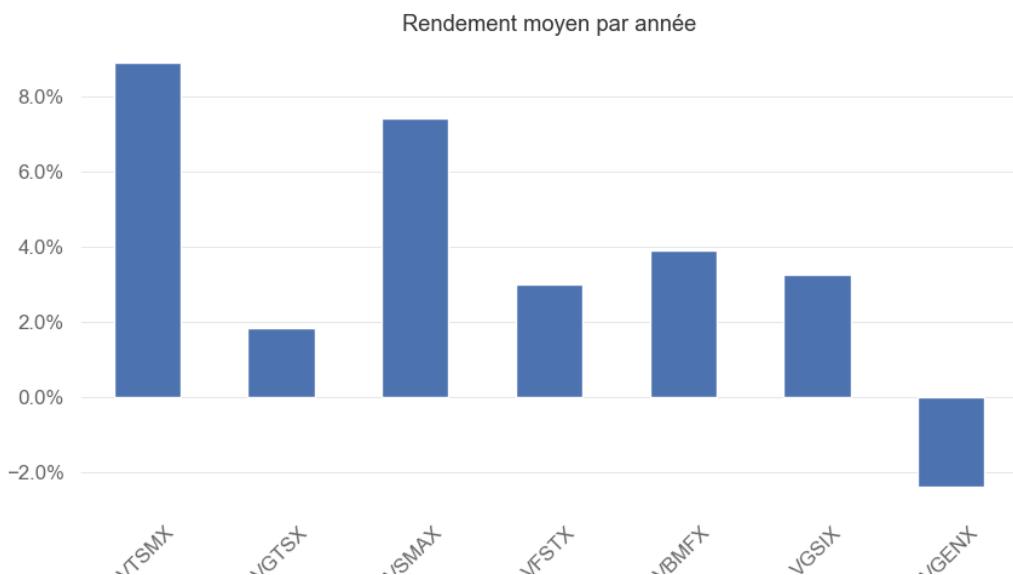


FIGURE 7 – Rendement moyen sur une base annuelle.

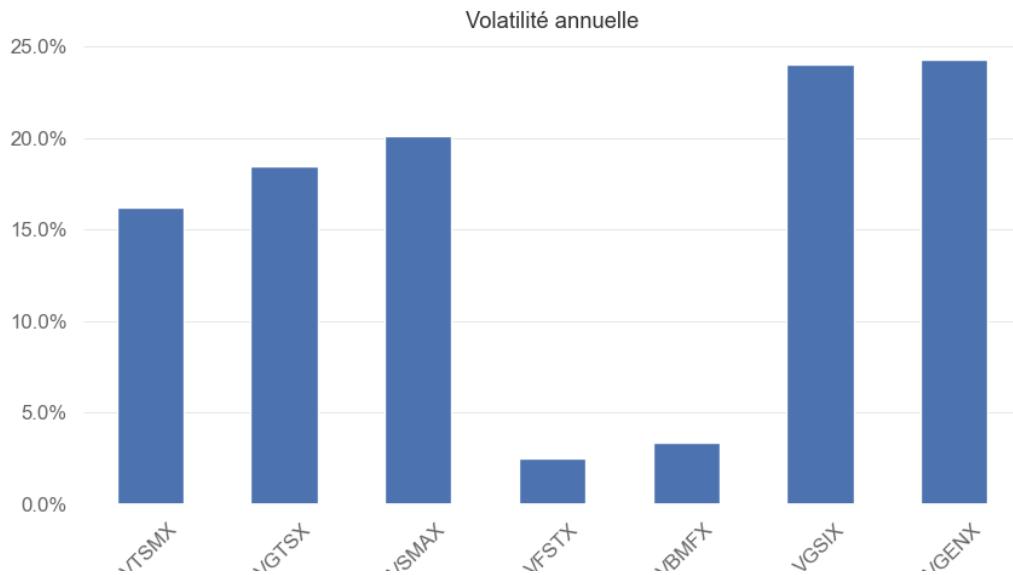


FIGURE 8 – Volatilité annuelle .

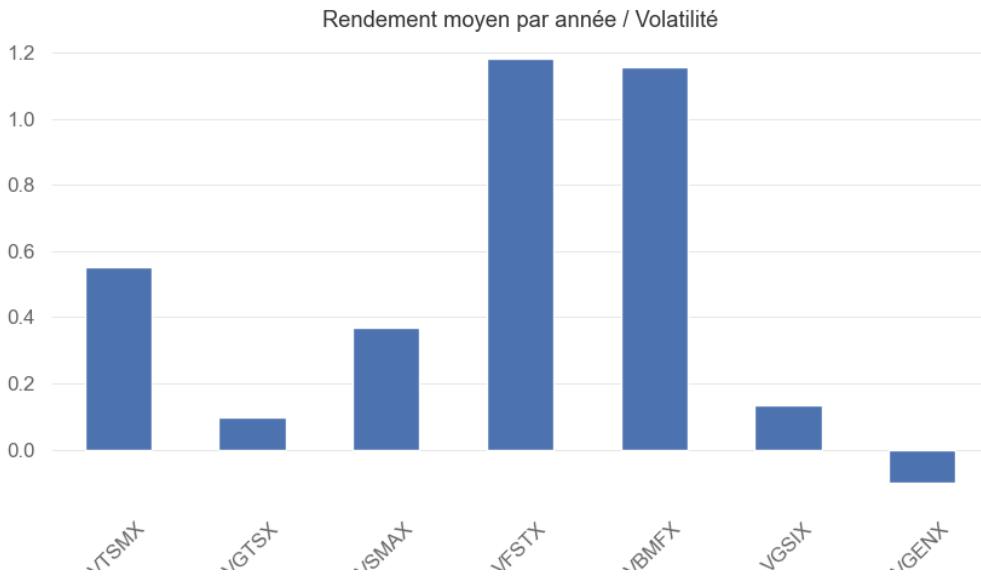


FIGURE 9 – Ratio rendement-risque.

On peut remarquer que les fonds **VFSTX** et **VBFMX** se distinguent par une volatilité inférieure à celle du marché, ce qui leur permet d'atteindre un ratio de Sharpe supérieur à celui des autres actifs. Ils seraient donc pertinent pour la composition d'un portefeuille qui vise à maximiser le rendement tout en contrôlant le risque.

On remarque également que **VGENX** affiche un rendement négatif accompagné d'une volatilité relativement élevée. Cela suggère une mauvaise performance, qui mériterait toutefois d'être confirmée par une analyse fondamentale approfondie.

2.1.3 Analyse de la corrélation entre fonds

L'analyse de la corrélation est essentielle pour optimiser la composition d'un portefeuille. Investir dans des actifs fortement corrélés réduit la diversification, ce qui peut compromettre les performances du portefeuille en cas de mouvement généralisé du marché. Avec les fonds étudiés, nous avons la matrice de corrélation suivante :



FIGURE 10 – Matrice des corrélations.

Certaines paires ou groupes de fonds, comme **VTSMX**, **VGTSX**, et **VSMAX**, présentent une forte corrélation. Pour renforcer la diversification, il serait pertinent d'introduire des contraintes spécifiques pendant l'optimisation de portefeuille. Par exemple, limiter la somme des poids alloués à ces fonds corrélés afin qu'elle ne dépasse pas le poids maximal autorisé pour un seul actif.

2.2 Évolutions des fonds

2.2.1 Évolution des prix normalisés

En normalisant les prix, on peut comparer les fonds entre eux et obtenir le graphique suivant :

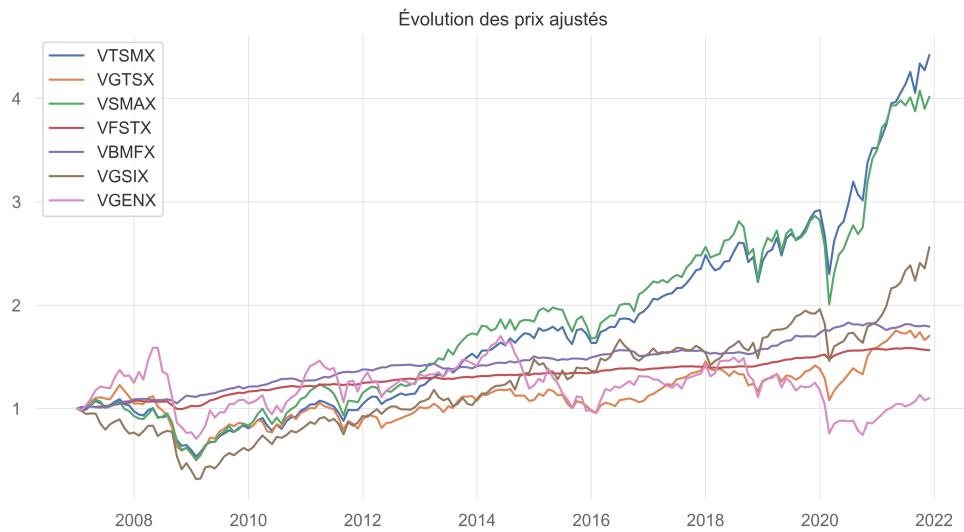


FIGURE 11 – Évolution du prix des titres.

On voit dans ce graphique que les deux meilleurs fonds sont bien **VTSMX** et **VSMAX** en terme de rendement, et que en terme de volatilité les fonds **VFSTX** et **VBMFX** sont très peu volatile.

2.2.2 Distributions de rendement et Maximum Drawdown

Dans les graphiques suivants, on distingue deux groupes de fonds en fonction de leurs rendements et de leur maximum drawdown :

- Le premier groupe, plus volatile et risqué, composé de **VTSMX**, **VGTSX**, **VSMAX**, **VGSIX** et **VGENX**, affiche des rendements fluctuants entre -20% et 10% , reflétant une plus grande volatilité. Ils possèdent des drawdowns maximaux importants, oscillant entre -50% et -60% . Parmi eux, **VGENX** est notable pour son drawdown final négatif d'environ -55% .
- Le second groupe, plus stable et conservateur, constitué de **VFSTX** et **VBMFX**, présente des rendements beaucoup plus stables, compris entre -2% et 2% . Avec ces rendements plus stables, ils présentent des drawdowns nettement plus faibles, compris entre -2% et -3% .

Ces deux groupes présentent des avantages distincts. Le choix de leur poids dans le portefeuille dépendra de la tolérance au risque et de la stratégie de diversification adoptée.

Distribution des rendements mensuels

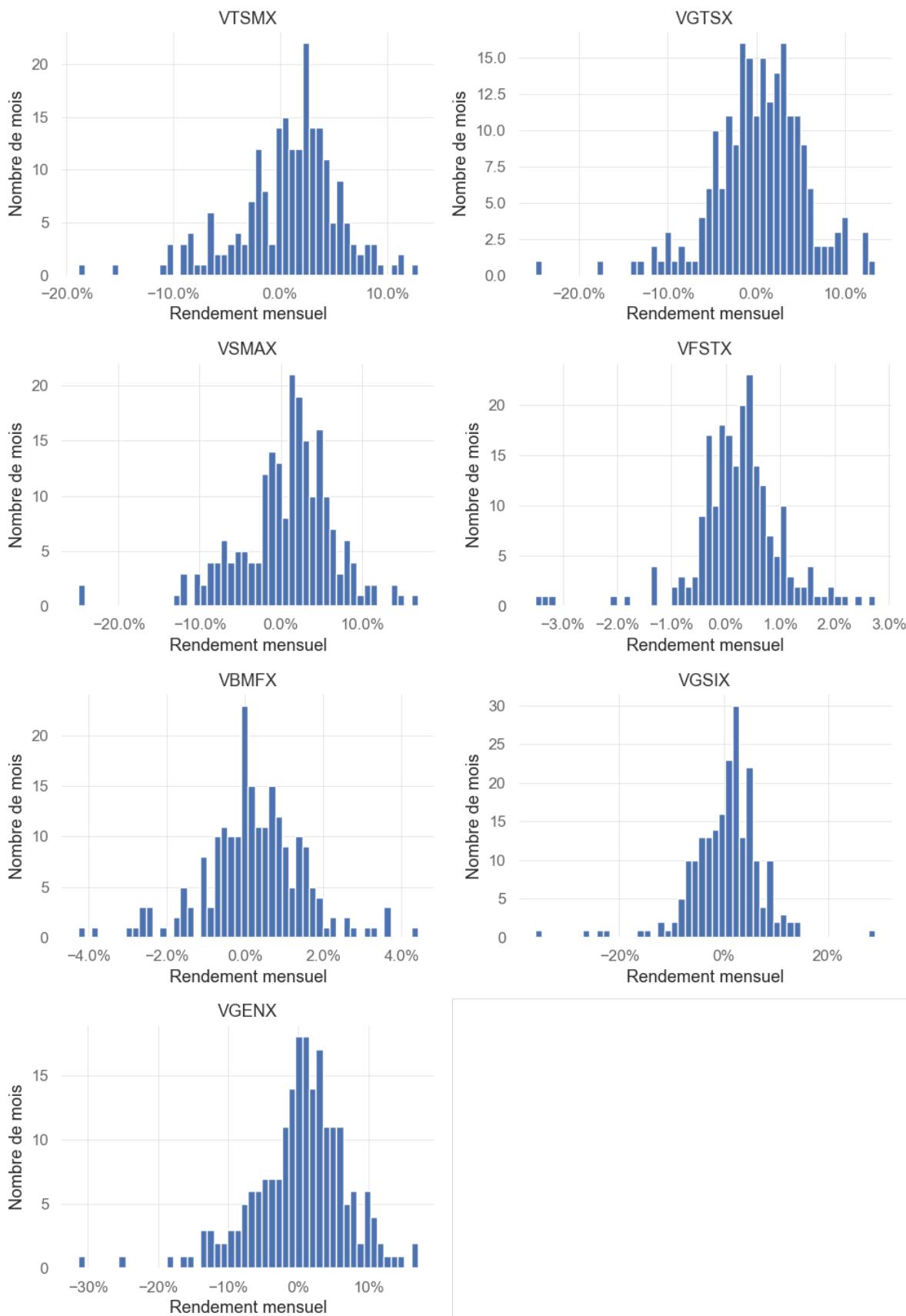


FIGURE 12 – Distribution des rendements mensuels.

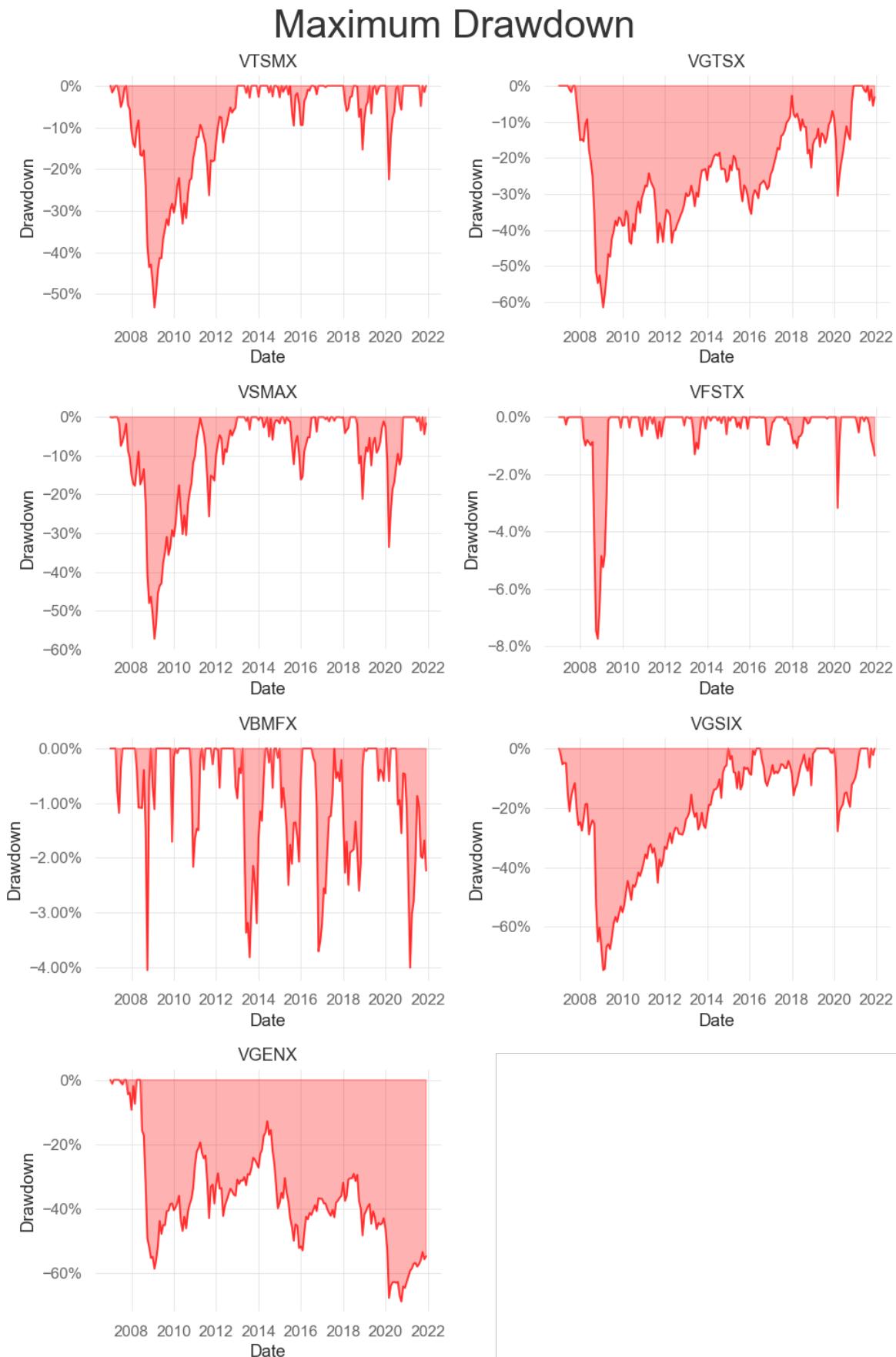


FIGURE 13 – Graphique du maximum drawdown.

3 Portefeuilles efficents

3.1 Frontière efficiente

La frontière efficiente a été calculée en utilisant **PyPortfolioOpt** et les données de rendement et de covariance entre fonds pour obtenir le graphique suivant.

En générant 10 000 portefeuilles aléatoires, on peut également visualiser une représentation de l'ensemble des portefeuilles possibles dans l'espace des rendements et des risques, qui est représenté par le nuage de points.

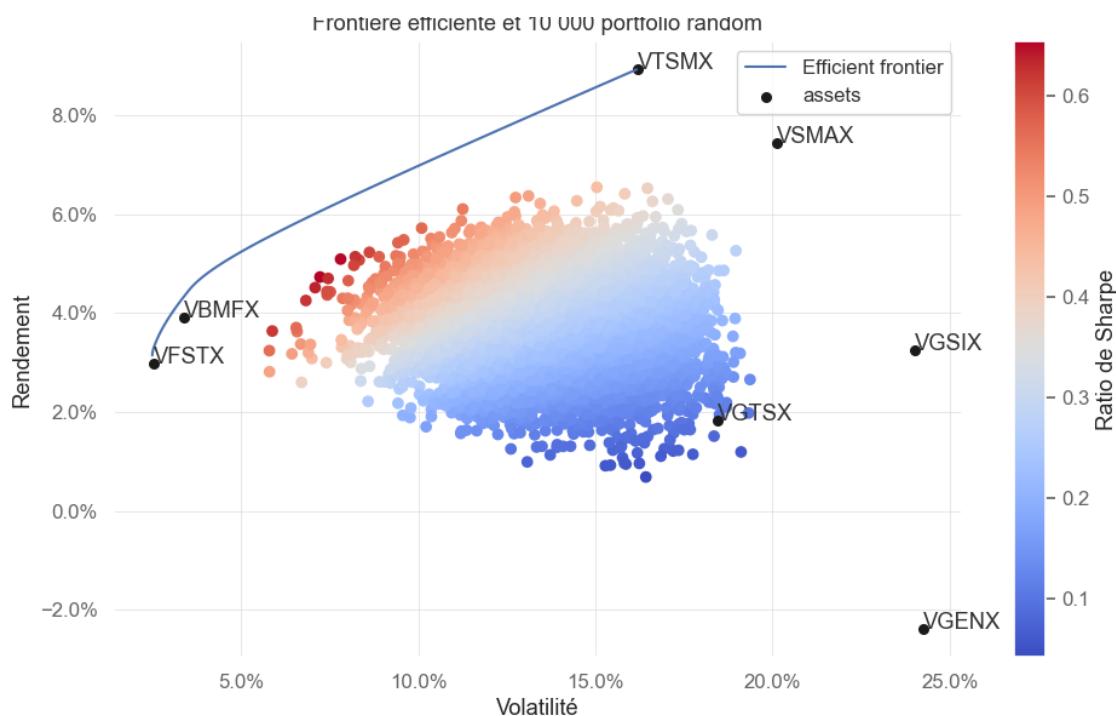


FIGURE 14 – Frontière efficiente et portefeuilles générés aléatoirement.

Le graphique suivant présente les trois meilleurs portfolios générés aléatoirement. On retrouve toujours une forte présence de **VFSTX**, **VBMFX** et **VTSMX** ce qui concorde avec les calculs des ratios de Sharp en 2.1.2 .

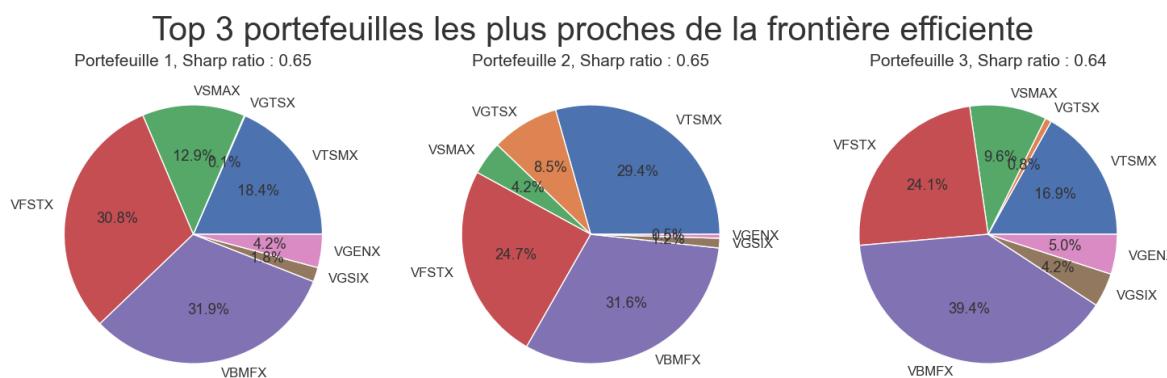


FIGURE 15 – Top 3 des portefeuilles générés aléatoirement selon le ratio de Sharpe.

3.2 Utilisation de solveurs

Le solveur **cvxpy** a été utilisé pour résoudre le problème d'optimisation quadratique.

3.3 Solution pseudo-optimale au problème de minimisation de variance

La formulation du problème est la suivante :

$$\text{Fonction objective : } \arg \min_w (w^\top \Sigma w) \quad (4)$$

$$\text{Contrainte dure : } \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (5)$$

où w est le vecteur des poids et Σ représente la matrice de covariance des rendements et n le nombre de fonds.

3.3.1 Cas 1 : Contraintes dures supplémentaires de poids supérieur strictement à 0%

Dans ce cas, on rajoute les contraintes supplémentaires à la formulation du problème :

$$\text{Contraintes dures supplémentaires : } \forall i \in [0, n], \quad 0 < w_i < 1 \quad (6)$$

PFT1 : Minimiser la variance (2.52%)

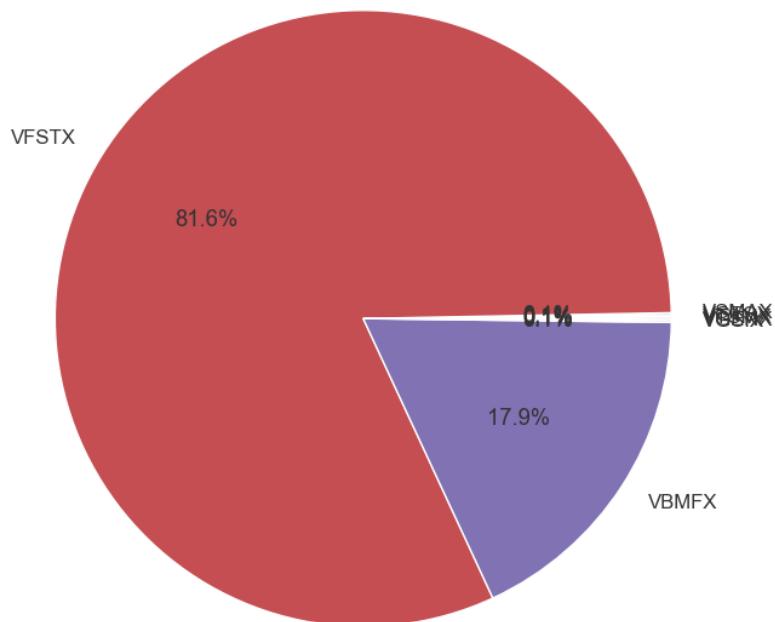


FIGURE 16 – Composition de PFT1.

Le portefeuille obtenu présente une variance de **0,73%**, principalement constitué de **VFSTX** et **VBMFX**. Ce résultat est cohérent avec les observations en 2.1.2, VFSTX et VBMFX étant les deux fonds les moins volatiles.

3.3.2 Cas 2 : Contraintes dures supplémentaires de poids compris entre 5% et 30%

Dans ce cas, on rajoute les contraintes supplémentaires à la formulation du problème :

$$\text{Contraintes dures supplémentaires : } \forall i \in [0, n], \quad 0.05 \leq w_i \leq 0.30 \quad (7)$$

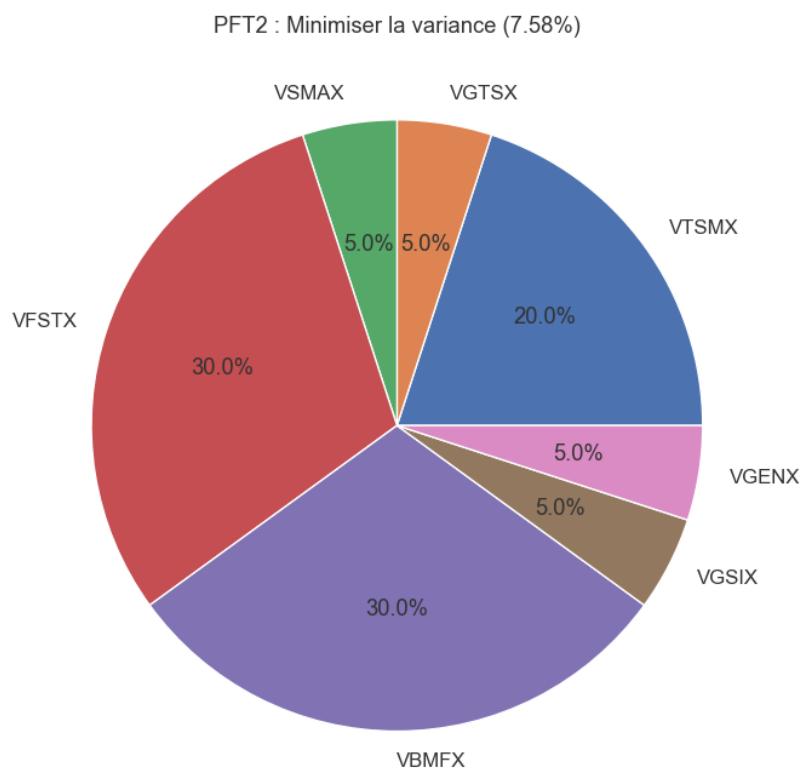


FIGURE 17 – Composition de PFT2

La composition du portefeuille est plus uniforme tout en respectant l'ensemble des contraintes dures. La variance obtenue pour ce portefeuille est de **2,19%**. Ce résultat est cohérent, car la réduction de l'espace de recherche conduit logiquement à une solution moins optimale et avec une variance plus élevée par rapport à celle du portefeuille PTF1.

3.4 Solution pseudo-optimale au problème de maximisation du ratio de Sharpe

Le solveur **cvxpy**, conçu pour résoudre des problèmes d'optimisation linéaire et combinatoire, ne permettait pas de résoudre directement le problème de maximisation du ratio de Sharpe, défini comme suit :

$$\operatorname{argmax}_w \frac{w^\top r}{w^\top \Sigma w} \quad (8)$$

où w est le vecteur des poids, r le vecteur des rendements, et Σ la matrice de covariance.

Deux reformulations possibles ont été envisagées pour contourner cette limitation :

- Problème multi-objectifs** : Minimiser une combinaison pondérée entre le rendement négatif et le risque :

$$\operatorname{argmin}_w -w^\top r + \frac{\gamma}{2} w^\top \Sigma w \quad (9)$$

où γ est un hyperparamètre permettant d'ajuster le compromis entre le rendement et la variance.

- Problème de minimisation quadratique avec contraintes supplémentaires** : réutilisation de la formulation minimisation de variance de 3.3 et ajout d'une contrainte dure supplémentaire sur le rendement minimal :

$$\operatorname{argmin}_w w^\top \Sigma w \quad (10)$$

avec la contrainte dure suivante :

$$w^\top r \geq r_t \quad (11)$$

où r_t est le seuil du rendement souhaité qui sera ajusté pour explorer différentes solutions.

Nous avons opté pour la deuxième approche.

3.4.1 Cas 1 : Contraintes dures supplémentaires de poids supérieur strictement à 0%

Dans ce cas, on rajoute les contraintes supplémentaires à la formulation du problème :

$$\text{Contraintes dures supplémentaires : } \forall i \in [0, n], \quad 0 < w_i < 1 \quad (12)$$

PFT3 : Maximiser le ratio de Sharpe (1.32)

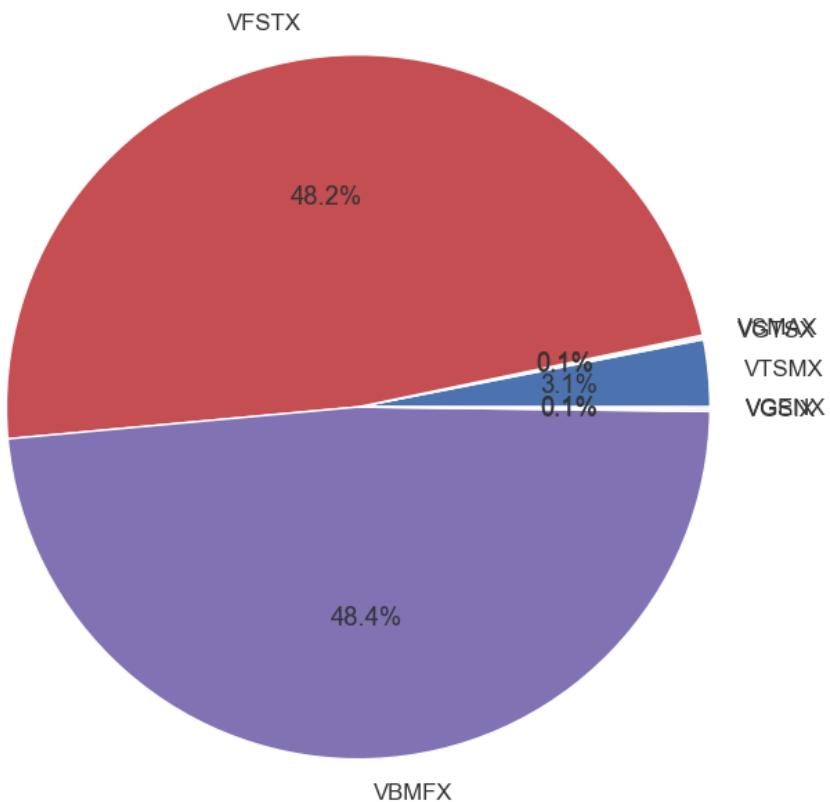


FIGURE 18 – Composition de PFT3

On obtient un portefeuille avec un ratio de Sharp de **3.72**, ce qui permet déjà d'obtenir un meilleur portefeuille que tout les portefeuilles aléatoires.

Également, le portefeuille respecte toutes les contraintes dures et la composition est très proche de PTF1 mais avec une pondération nettement plus importante pour **VTSMX**.

3.4.2 Cas 2 : Contraintes dures supplémentaires de poids compris entre 5% et 30%

Dans ce cas, on rajoute les contraintes supplémentaires à la formulation du problème :

$$\text{Contraintes dures supplémentaires : } \forall i \in [0, n], \quad 0.05 \leq w_i \leq 0.30 \quad (13)$$

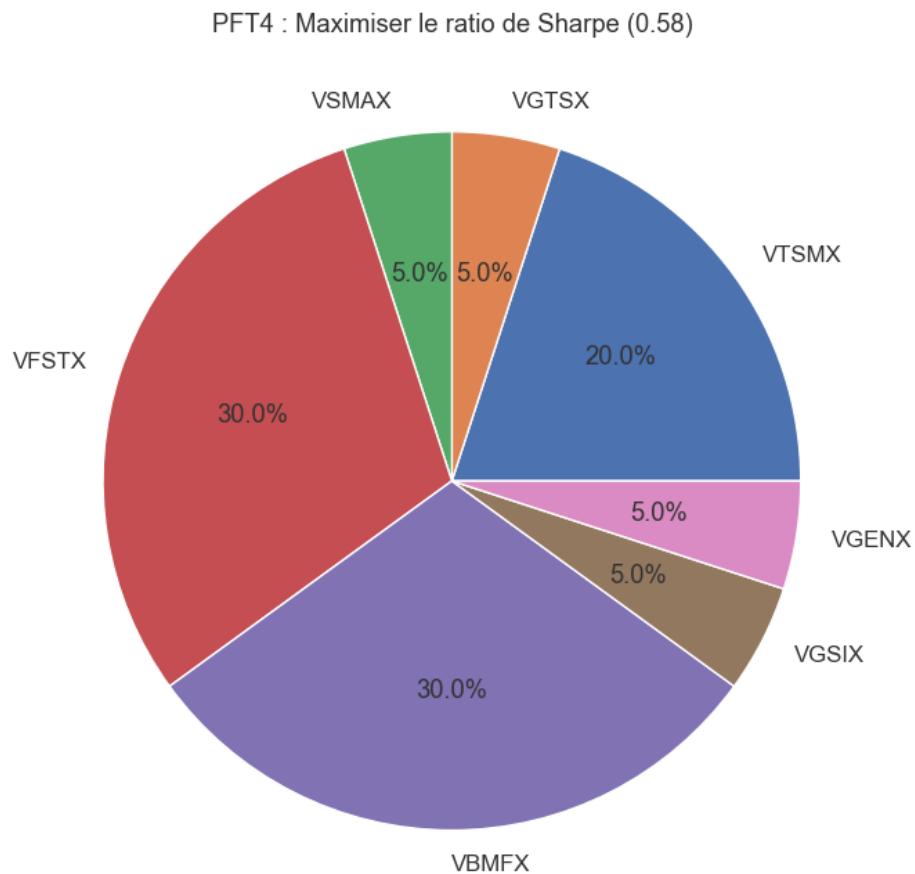


FIGURE 19 – Composition de PFT4

On obtient un portefeuille avec un ratio de Sharp de **2.33**.

Le portefeuille respecte l'ensemble des contraintes mais affiche un ratio de Sharpe inférieur à celui de PTF3. Ce résultat est cohérent, car la réduction de l'espace de recherche limite les opportunités d'optimisation. Sa composition est également très proche de celle de PTF2.

4 Rebalancement et analyse du backtesting

Nous allons effectuer un rebalancement avec les stratégies préalablement établies afin de les comparer aux portefeuilles de référence suivants.

4.1 Portefeuilles de référence

Les portefeuilles de référence serviront de benchmark pour comparer les différentes formulations du problème et, par conséquent, évaluer les diverses stratégies.

4.1.1 Portefeuille équipondéré

Le portefeuille équipondéré (PFT5) est l'un des plus simples. Il ne tient pas compte du rendement historique, ni de la volatilité, ni de la corrélation entre les actifs.

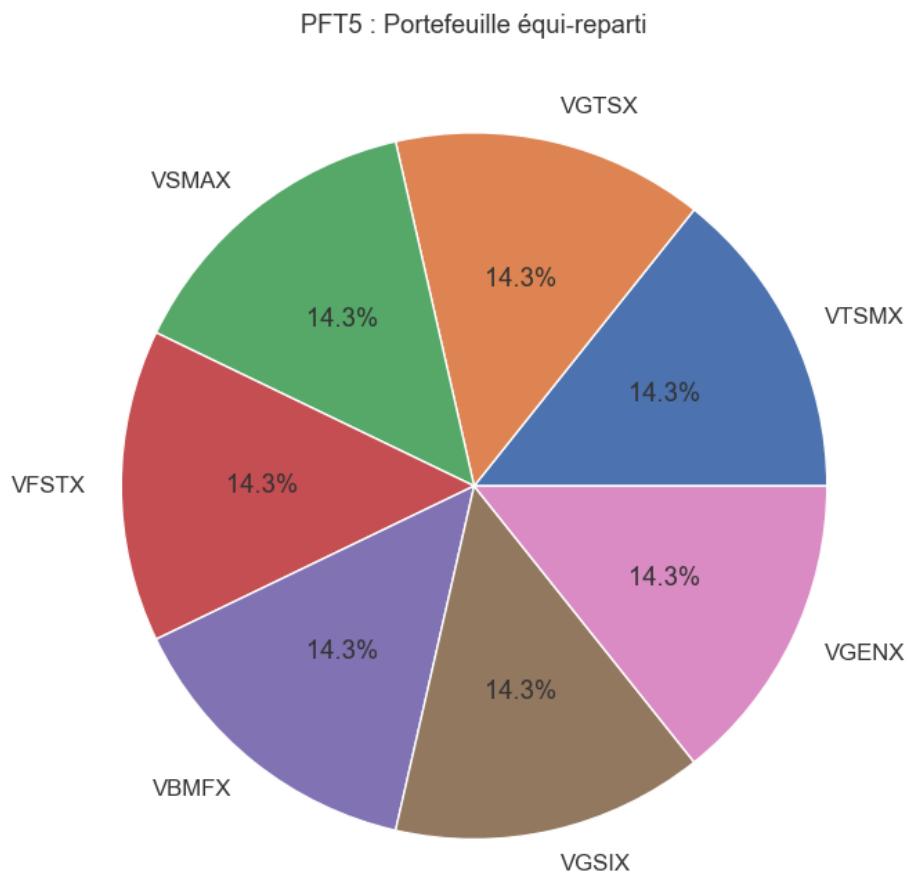


FIGURE 20 – Composition de PFT4

4.1.2 Portefeuille inverse-variance

Ce portefeuille alloue les actifs en fonction de l'inverse de leur variance individuelle. Toutefois, cette allocation ne prend pas en compte la covariance entre les titres. Malgré cela, ce type de portefeuille génère souvent des rendements supérieurs à ceux de stratégies plus élaborées.

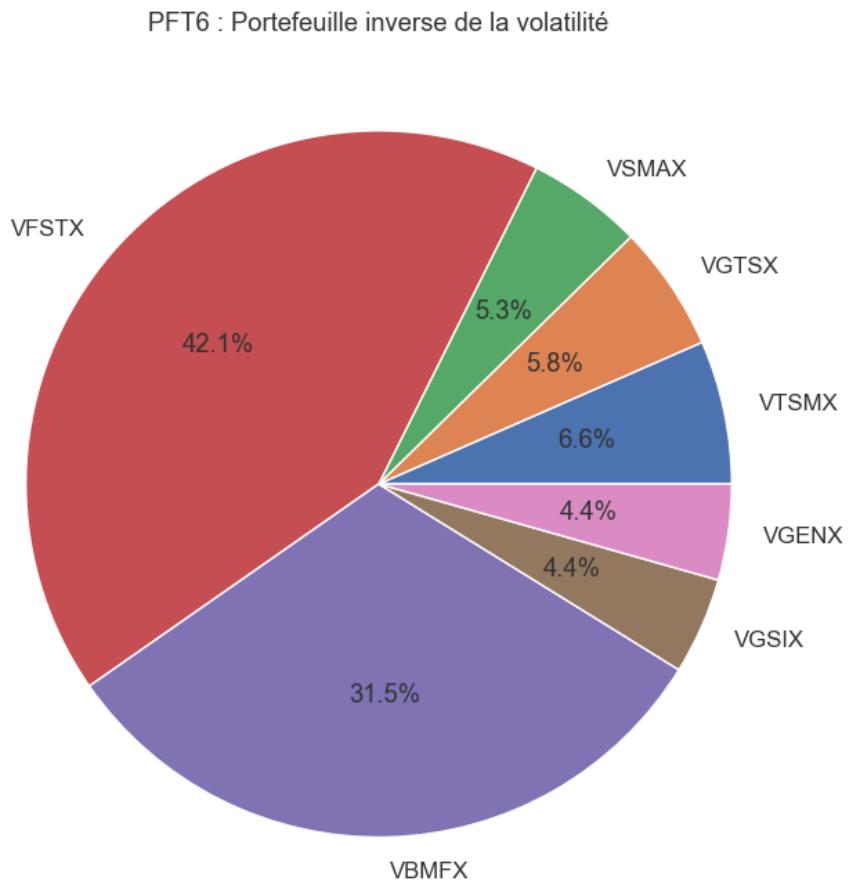


FIGURE 21 – Composition de PFT4

4.2 Rebalancement

4.2.1 Méthodologie de rebalancement

Le rebalancement est effectué tous les quatre mois. À chaque rebalancement, les 15 années de données passées sont utilisées pour construire quatre nouveaux portefeuilles optimisés.

4.2.2 Résultats du rebalancement

Les figures en annexe A présentent des graphiques en barres illustrant l'évolution des portefeuilles dans le temps. On observe que la composition des portefeuilles change tous les quatre mois, reflétant les ajustements réalisés lors de chaque rebalancement.

4.3 Analyse des performances

4.3.1 Rendement cumulés

Une fois les poids calculés, il est possible d'évaluer la performance de chaque stratégie. Une première approche consiste à examiner l'évolution des rendements cumulés des portefeuilles, comme illustré ci-dessous.

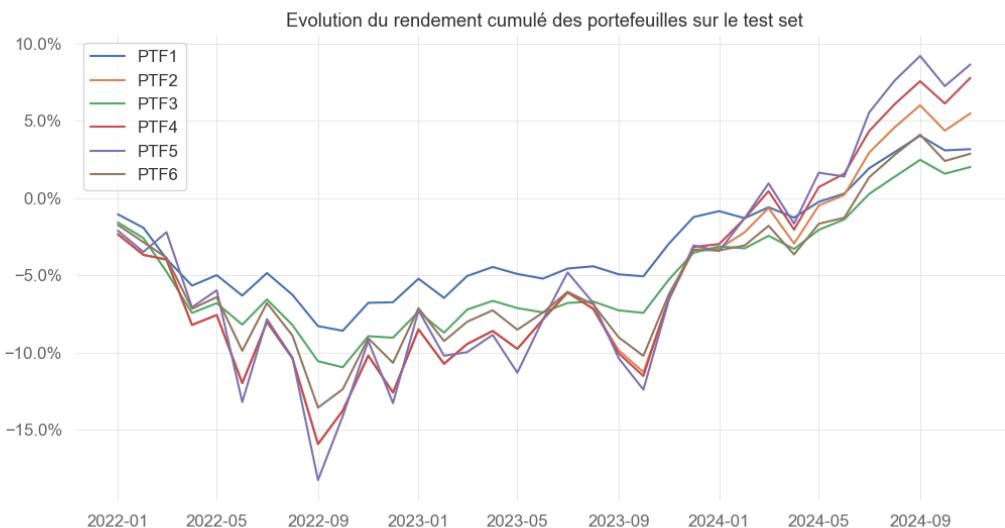


FIGURE 22 – Rendement cumulé des portefeuilles

On observe un mouvement global aligné avec la tendance générale du marché. En effet, bien que les portefeuilles diffèrent légèrement dans leur composition, ils restent globalement similaires.

4.3.2 Rendement, volatilité et Sharp Ratio

L'analyse des performances individuelles des portefeuilles est réalisée à l'aide des métriques suivantes : rendement moyen annuel, volatilité annuelle, ratio de Sharpe et maximum drawdown.

En ce qui concerne la volatilité, **PFT1** et **PFT2** ont été conçus pour minimiser l'écart type du rendement. On constate que **PFT1** réussit à battre les portefeuilles de référence **PFT5** et **PFT6**. On voit que **PFT2** a une volatilité plus élevée, il retourne probablement de solutions moins étant donné que son espace de recherche est plus contraint que celui de **PFT1**. Pour le ratio de Sharpe, **PFT3** et **PFT4** ont été conçus pour maximiser le ratio de Sharp. On voit que les deux portefeuilles performent mieux que le portefeuille de référence **PFT6** mais **PFT3** performe moins bien que le reste.

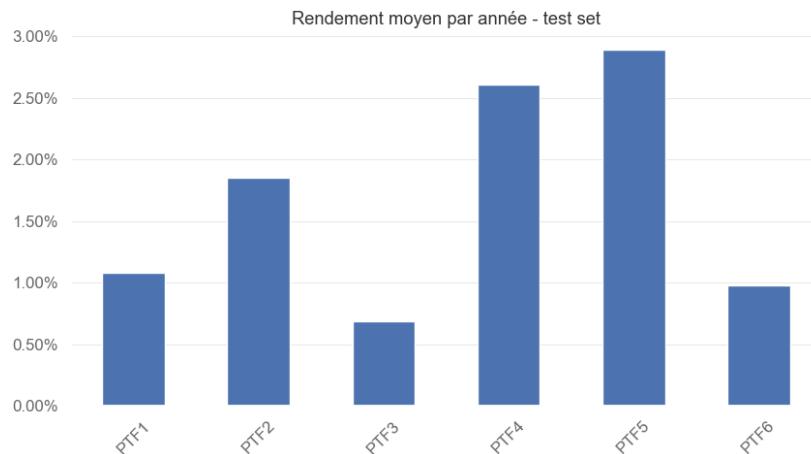


FIGURE 23 – Rendement moyen annuel des portefeuilles

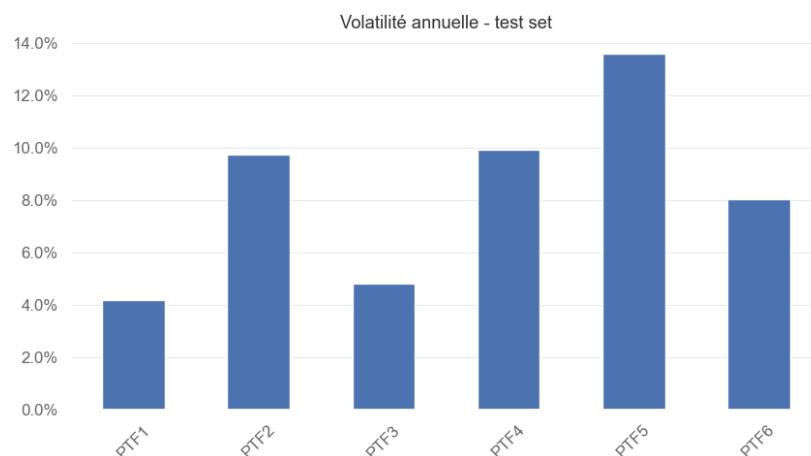


FIGURE 24 – Volatilité annuelle des portefeuilles

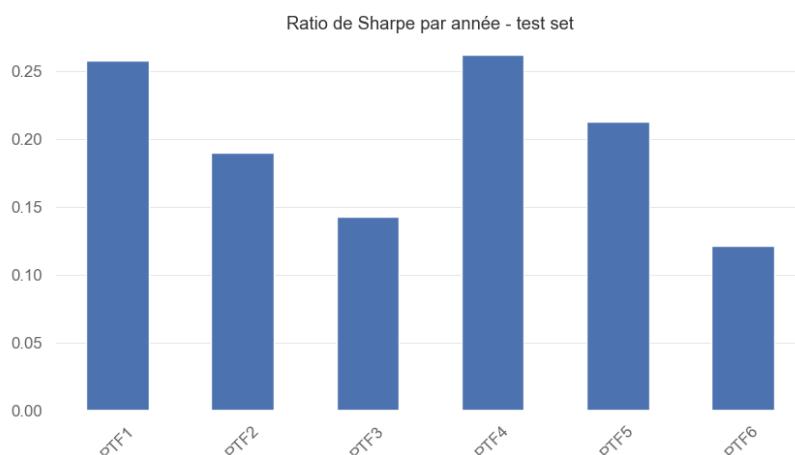


FIGURE 25 – Ratio de sharp des portefeuilles

4.3.3 Maximum Drawdown

En ce qui concerne le maximum drawdown, **PTF1** avec **PTF3** apparaissent comme les plus intéressants avec un maximum drawdown entre -8% et -10%. Les autres portefeuilles présentent tous un drawdown encore plus bas, en dessous des -10%.

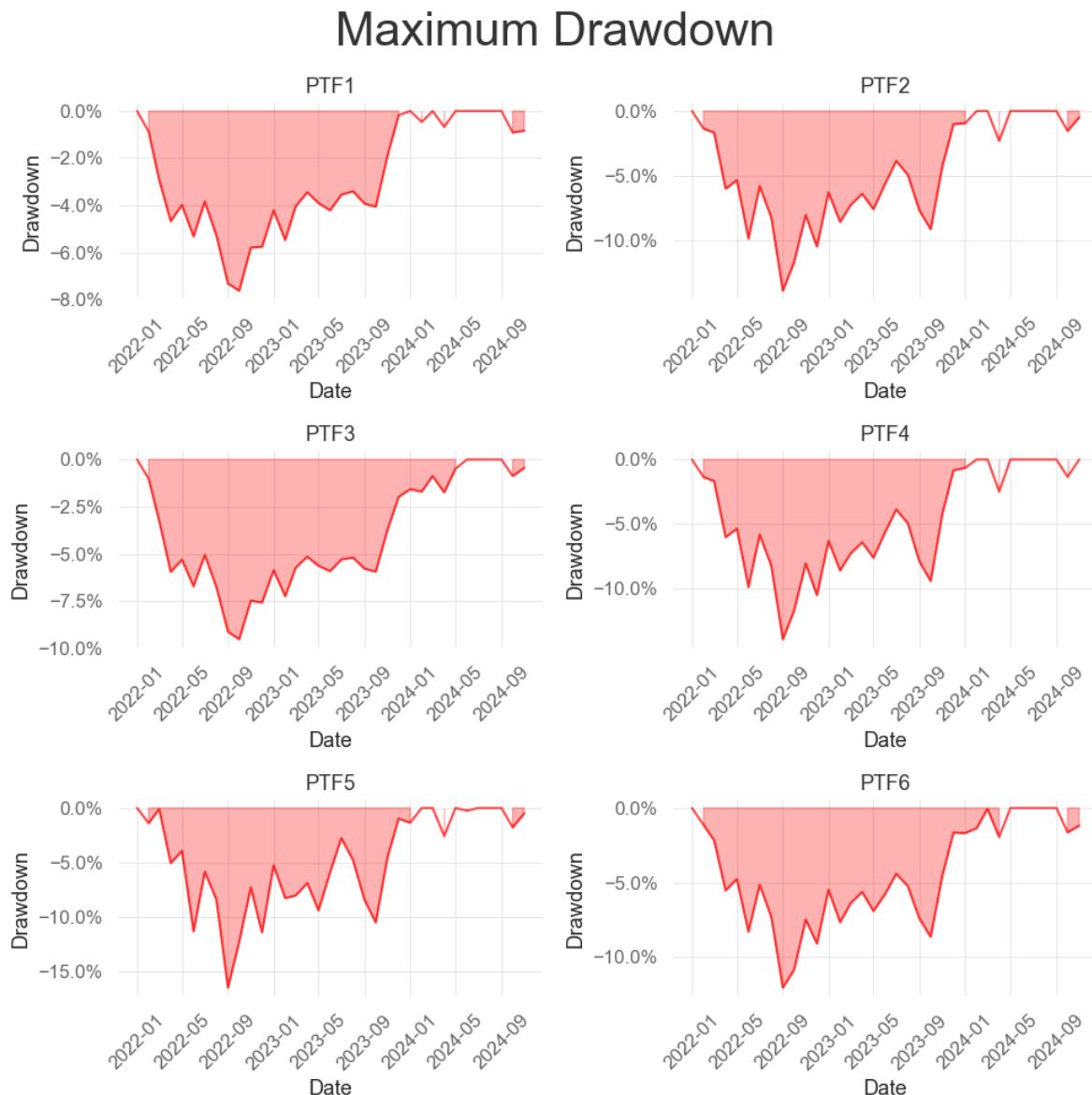


FIGURE 26 – Maximum drawdown des portefeuilles

5 Conclusion

Les résultats obtenus montrent que les solveurs permettent d’atteindre des performances souvent supérieures à celles des stratégies classiques en proposant des stratégies avec moins de drawdown.

Ces performances mettent en lumière l’efficacité des approches optimisées dans la gestion de portefeuilles. Cependant, cette supériorité n’est pas sans coût : les solveurs exigent des efforts significatifs en termes de calculs et de réglages des hyperparamètres (contraintes pour les solveurs).

Par ailleurs, l’analyse met en évidence un constat intéressant : des portefeuilles simples, comme ceux équipondérés **PFT5**, atteignent parfois des résultats similaires à ceux des portefeuilles optimisés plus complexes comme **PFT3**. Cela suggère que, dans certains cas, une approche pragmatique et moins coûteuse en termes de ressources computationnelles peut être une alternative viable.

Dans des contextes où la simplicité et la rapidité sont privilégiées, des portefeuilles simples et bien diversifiés peuvent offrir une solution élégante et efficace. Ces résultats invitent à réfléchir sur la pertinence de l’équilibre entre complexité et simplicité dans la gestion de portefeuilles, et ouvrent la voie à de futures recherches visant à optimiser cet équilibre dans des environnements financiers variés.

A Résultats de rebalancement de stratégie

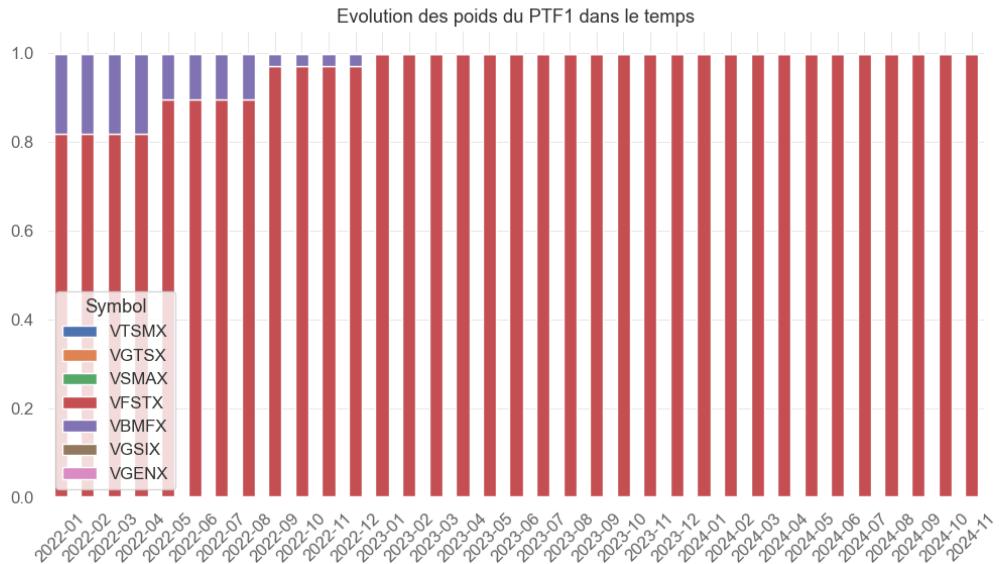


FIGURE 27 – Évolution de PFT1

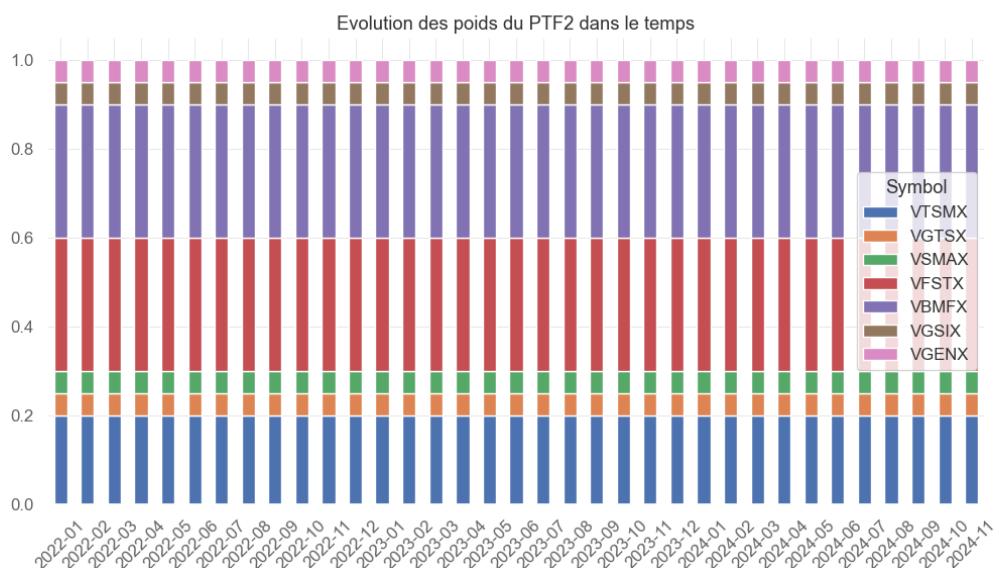


FIGURE 28 – Évolution de PFT2

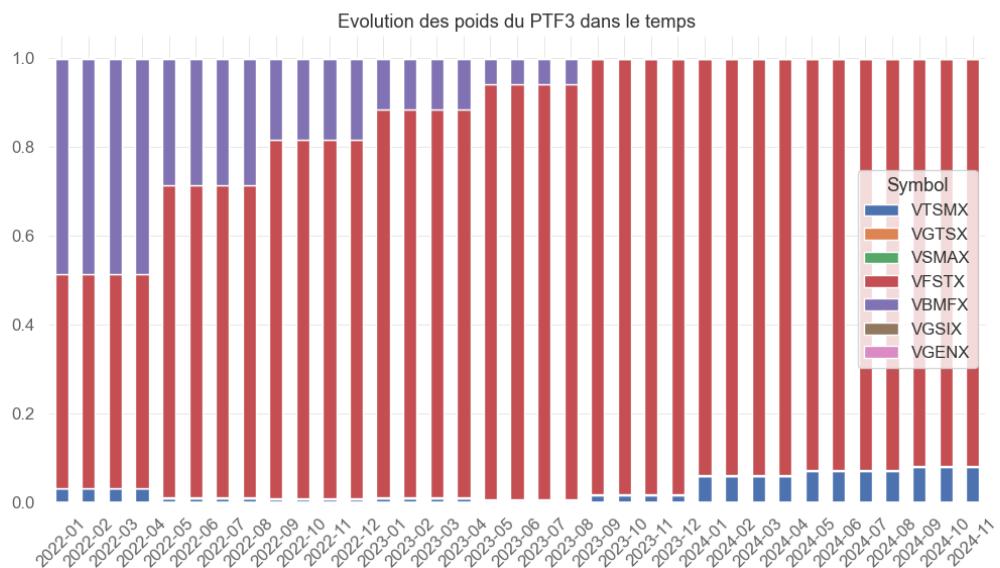


FIGURE 29 – Évolution de PFT3

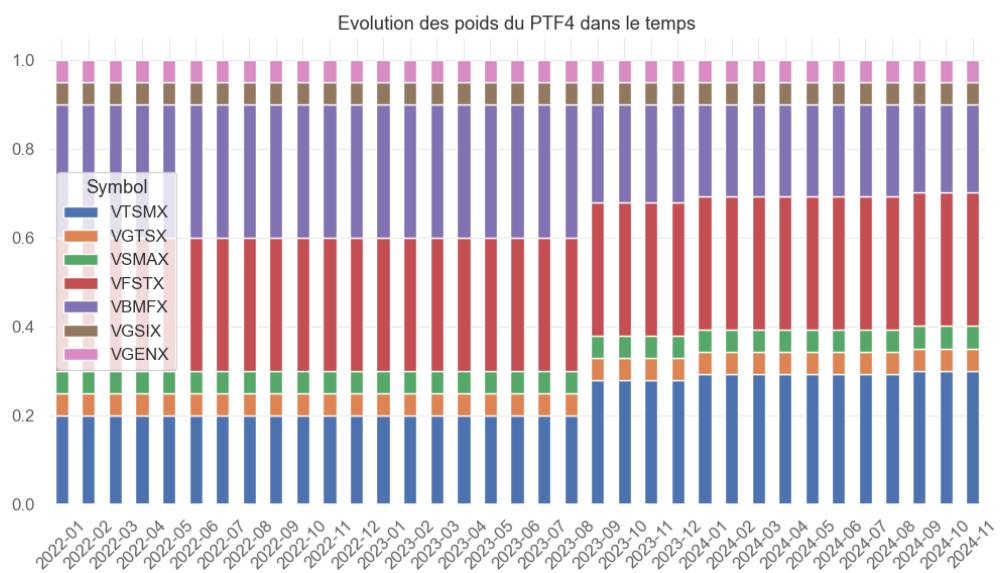


FIGURE 30 – Évolution de PFT4

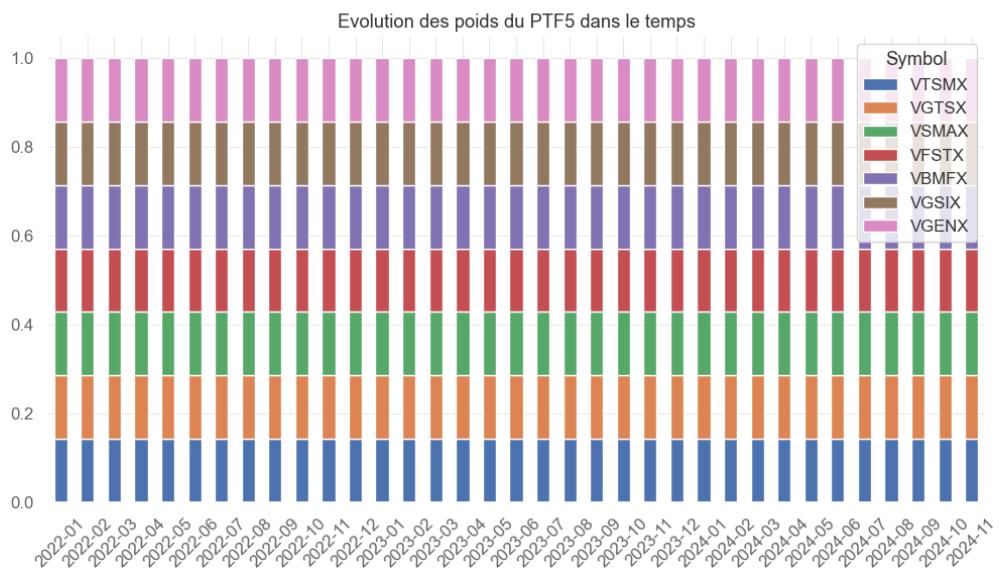


FIGURE 31 – Évolution de PFT5

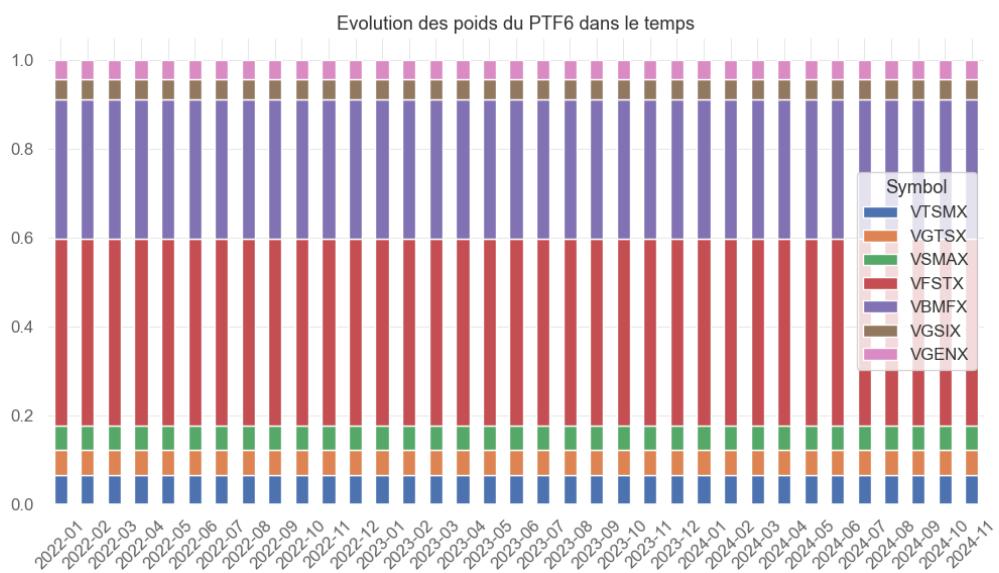


FIGURE 32 – Évolution de PFT6

B Résultats numériques

TABLE 1 – Résumé des performances des portefeuilles calculé avec QuantStat

Métrique	PTF1	PTF2	PTF3	PTF4	PTF5	PTF6
Start Period	2022-01-01	2022-01-01	2022-01-01	2022-01-01	2022-01-01	2022-01-01
End Period	2024-11-01	2024-11-01	2024-11-01	2024-11-01	2024-11-01	2024-11-01
Risk-Free Rate	4.0%	4.0%	4.0%	4.0%	4.0%	4.0%
Time in Market (%)	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
Cumulative Return (%)	3.17	5.49	1.96	7.86	8.66	3.74
CAGR (%)	0.76	1.31	0.47	1.86	2.04	0.9
Sharpe Ratio	1.06	0.99	0.56	1.33	1.2	0.82
Prob. Sharpe Ratio (%)	59.18	56.45	51.48	61.22	59.06	54.3
Sortino Ratio	1.6	1.45	0.79	1.97	1.77	1.21
Max Drawdown (%)	-7.62	-13.92	-9.58	-13.92	-16.51	-11.28
Longest DD Days	669	700	821	700	700	731
Gain/Pain Ratio	0.21	0.18	0.12	0.24	0.21	0.15
Recovery Factor	0.44	0.48	0.24	0.64	0.66	0.4
Serenity Index	-0.03	0.11	-0.05	0.21	0.34	0.02
YTD (%)	4.45	9.13	5.69	11.4	12.09	6.49
1Y (%)	8.68	18.9	10.14	21.87	24.04	14.09