תכנון מנגנונים אלגוריתמי
Algorithmic Mechanism Design

אראל סגל-הלוי

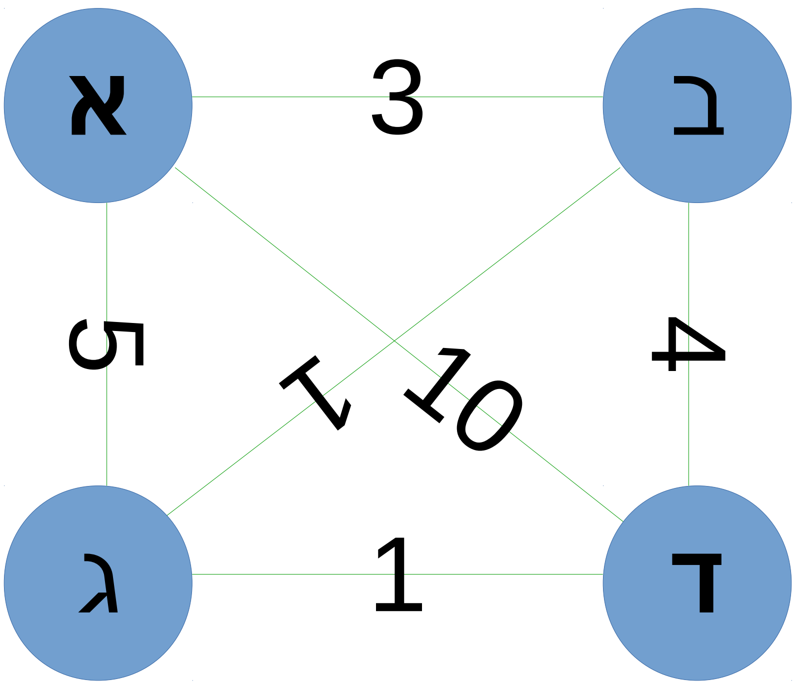
מקורות:

הקורס של טים, הרצאה 3 והלאה:

http://theory.stanford.edu/~tim/f13/f13.html

מציאת מסלול זול ביותר

נתונה רשת. לכל קשת יש עלות-מעבר. צריך להעביר חבילה בין שתי נקודות ברשת *(א -> ד)*, במסלול הזול ביותר.

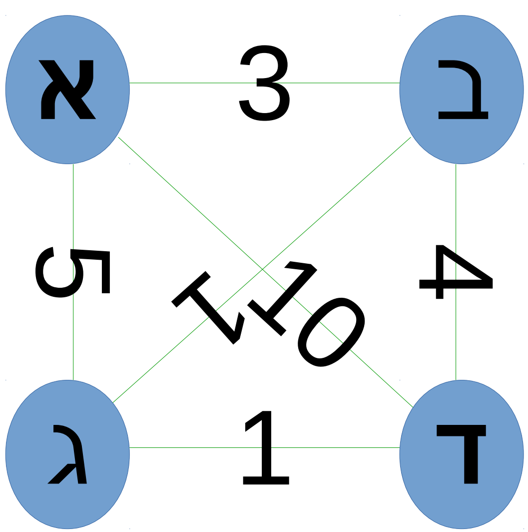


- אם העלות של כל קשת ידועה לכולם – אלגוריתם.
- אם העלות של כל קשת ידועה רק לבעליה – מנגנון.

מנגנון למסלול זול ביותר
בשיטת ויקרי-קלארק-גרובס

צריך לפתור 1+6 בעיות מסלול-זול-ביותר.

- כשכולם נמצאים: המסלול אבגד, הסכום 5-.
- בלי **אב**: המסלול אגד, הסכום 6-. **תשלום 4-**.
- בלי **בג**: המסלול אגד, הסכום 6-. **תשלום 2-**.
- בלי **גד**: המסלול אבד, הסכום 7-. **תשלום 3-**.
- בלי **אג/אד/בד**: אין שינוי, הסכום 5-. **תשלום 0**.
- עלות כוללת **9-**.



בעיית התרמיל (knapsack)

מכניסים אתכם לחדר מלא חפצים, נותנים לכם תרמיל שיכול להכיל עד 100 ק"ג, ואומרים לכם "כל מה שתצליחו להכניס לתרמיל – שלכם".

לכל חפץ יש **משקל אחר** ו**ערך אחר**.

איך תבחרו חפצים שסכום-ערכיהם גדול ביותר?

- הערך של כל חפץ ידוע לכולם – אלגוריתם.
- הערך של כל חפץ ידועה רק לחפץ – מנגנון.
  *(דוגמה: יש 100 שניות המיועדות לפרסומות. לכל מפרסם יש פרסומת עם **אורך אחר** ו**ערך אחר**. איך לבחור איזה פרסומות לשים?)*

מנגנון למילוי תרמיל
בשיטת ויקרי-קלארק-גרובס

כשיש m חפצים, צריך לפתור m+1 בעיות-תרמיל.

- **הבעיה**: בעיית התרמיל היא NP-קשה!
- מה יקרה אם נשתמש באלגוריתמי קירוב?

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

דוגמה נגדית:

\$100/100k, \$20/2k, \$20/2k, \$20/2k …

הראשון יזכה וישלם \$1000 – יותר מהערך שלו!

מנגנון למילוי תרמיל
בשיטת ויקרי-קלארק-גרובס

כשיש m חפצים, צריך לפתור m+1 בעיות-תרמיל.

- **הבעיה**: בעיית התרמיל היא NP-קשה!
- מה יקרה אם נשתמש באלגוריתמי קירוב?

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של **ערך**/**משקל**.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

דוגמה נגדית:

$20/2k, $100/100k.

הראשון יזכה וישלם $100 – יותר מהערך שלו!

מנגנון למילוי תרמיל
בשיטת ויקרי-קלארק-גרובס

אלגוריתם א+ב: הפעל את שני האלגוריתמים החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

משפט: אלגוריתם א+ב נותן קירוב 1/2.

הוכחה: נניח שאלגוריתם ב נתקע אחרי k חפצים.

עם החפץ ה-k+1 – הסכום הוא מקסימלי++.

הסכום של אלגוריתם א הוא לפחות החפץ ה-k+1.

--> הסכום של אלגוריתמים א+ב מקסימלי++.

--> הסכום של א **או** ב הוא מקסימלי++ \ 2. ***

כאלגוריתם – טוב, כמנגנון – לא מוצלח. דוגמה:

$54/52k, $52/51k, $49/49k.

הראשון יזכה וישלם $101 – יותר מהערך שלו!

בניית מנגנונים בשיטת מיירסון (Myerson)

נתונים:

- כלל-בחירה לבחירת תת-קבוצה של משתתפים.
- לכל משתתף יש ערך כספי **יחיד** ל"היבחרות".

דרוש: כלל-תשלומים שאיתו כלל-הבחירה אמיתי.

משפט מיירסון: קיים כלל-תשלומים אמיתי *אם ורק אם* כלל-הבחירה הוא פונקציה מונוטונית עולה של הערך. כלל-התשלומים הזה הוא *יחיד*.

הוכחת משפט מיירסון

סימונים:

- כלל-הבחירה – c - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור בינארי *(1 = "ברכותיי, נבחרת!").* *c נתון וקבוע.*
- כלל התשלום – p - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור מספרי של תשלומים. *את p אנחנו מחפשים.*

התועלת של משתתף עם ערך v, שאומר b, היא:

$$v*c(b) - p(b)$$

הוכחת משפט מיירסון - המשך

התועלת של משתתף עם ערך v שאומר b היא:

$$v*c(b) - p(b)$$

במנגנון אמיתי חייב להתקיים:

$$v*c(v) - p(v) >= v*c(b) - p(b)$$

התועלת של משתתף עם ערך b שאומר v היא:

$$b*c(v) - p(v)$$

במנגנון אמיתי חייב להתקיים:

$$b*c(b) - p(b) >= b*c(v) - p(v)$$

מחברים את המשוואות ומקבלים:

$$v[c(v)-c(b)] >= p(v)-p(b) >= b[c(v) - c(b)]$$

הוכחת משפט מיירסון - המשך

נתון: כלל-בחירה c.

דרוש: כלל-תשלומים אמיתי p; חייב לקיים:

$$v[c(v)–c(b)] \;\; >= \;\; p(v)\text{-}p(b) \;\; >= \;\; b[c(v) – c(b)]$$

תנאי הכרחי א: מחיסור שני הצדדים מתקבל:

$$(v\text{-}b) \; * \; (c(v)\text{-}c(b)) \;\; >= \;\; 0$$

כלומר: הפונקציה c חייבת להיות מונוטונית.

תנאי הכרחי ב: אם $c(v)=c(b)$, אז $p(v)=p(b)$.

אם $c(v)>c(b)$, אז $p(v)\text{-}p(b) =$

ערך שבו c מתחלפת מ-0 ל-1.

הוכחת משפט מיירסון - סיום

נתון: כלל-בחירה c. חייב להיות פונקציה מונוטונית.

מצאנו: כלל-תשלומים p.

שחקן שלא נבחר ($c_i=0$) משלם 0;

שחקן שנבחר ($c_i=1$) משלם את *ערך הסף שלו*

- הערך הקטן ביותר שהוא צריך להגיד כדי להיבחר.

שימו לב: לכל שחקן יכול להיות ערך סף אחר.

נשאר להוכיח: כלל התשלומים הזה הוא אמיתי.

הוכחה: אם נבחרת ותכריז יותר – כלום לא ישתנה.

אם נבחרת ותכריז פחות – (אולי) כבר לא תיבחר.

אם לא נבחרת ותכריז יותר – תשלם יותר מערכך.

אם לא נבחרת ותכריז פחות – כלום לא ישתנה. ***

מנגנון למילוי תרמיל בשיטת מיירסון

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

$100/100k, $20/2k, $20/2k, $20/2k …

הראשון זוכה ומשלם את ערך הסף שלו - $20.

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של **ערך**/**משקל**.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

$20/2k, $100/100k.

הראשון זוכה ומשלם את ערך הסף שלו - $2.

מנגנון למילוי תרמיל בשיטת מיירסון

אלגוריתם א+ב: הפעל את שני האלגוריתמים החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

$54/52k, $52/51k, $49/49k.

הראשון זוכה ומשלם: $52 * (52k/51k)

$100/100k, $20/2k, $20/2k.

הראשון זוכה ומשלם $40.

$100/100k, $60/2k, $60/2k.

שני האחרונים זוכים, כ"א משלם $40.

מיירסון לעומת ויקרי-קלארק-גרובס

	וק"ג	מיירסון
פרמטרים לכל שחקן	הרבה *(למשל: בחירת מסעדה)*	אחד
כלל בחירה	מיקסום סכום ערכים	כל כלל מונוטוני *(למשל: קירוב בעיית התרמיל, מיקסום רווח)*