

חלוקה הוגנת של

חפצים בדידים

Fair Indivisible Item
Assignment

אראל סגל-הלוי

חלוקת חפצים בדידים

כשהחפצים לא ניתנים לחלוקה, בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה פרופורציונלית וללא קנאה (דוגמה: בית).

פתרונות מקובלים:

(1) הוספת כסף למערכת.

דוגמה: אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה.

(2) מציאת דרך יצירתית לחלק חפץ אחד.

דוגמה: אלגוריתם "וין-וין" לגישור.

(3) חלוקה ללא-קנאה-בקירוב.

דוגמה: חלוקת תכשיטים ומקומות בקורסים.

חלוקת שכר דירה

נתונים:

- דירה עם n חדרים ודמי-שכירות נתונים P .
- שותפים n שרוצים לשכור יחד את הדירה.
האתגר – להחליט לגבי כל שותף:
- כמה כסף ישלם? הסכום צריך להיות P .
- איזה חדר יקבל? צריך שלא תהיה קנאה.

חלוקת שכר דירה: מודל אורדינלי

הנחות:

- "חדרים סבירים" - בכל חלוקה של שכר-הדירה - כל שוכר יכול לבחור לפחות חדר אחד.
- "דיירים עניים" - כל שוכר מעדיף חדר בחינם על-פני חדר בתשלום.

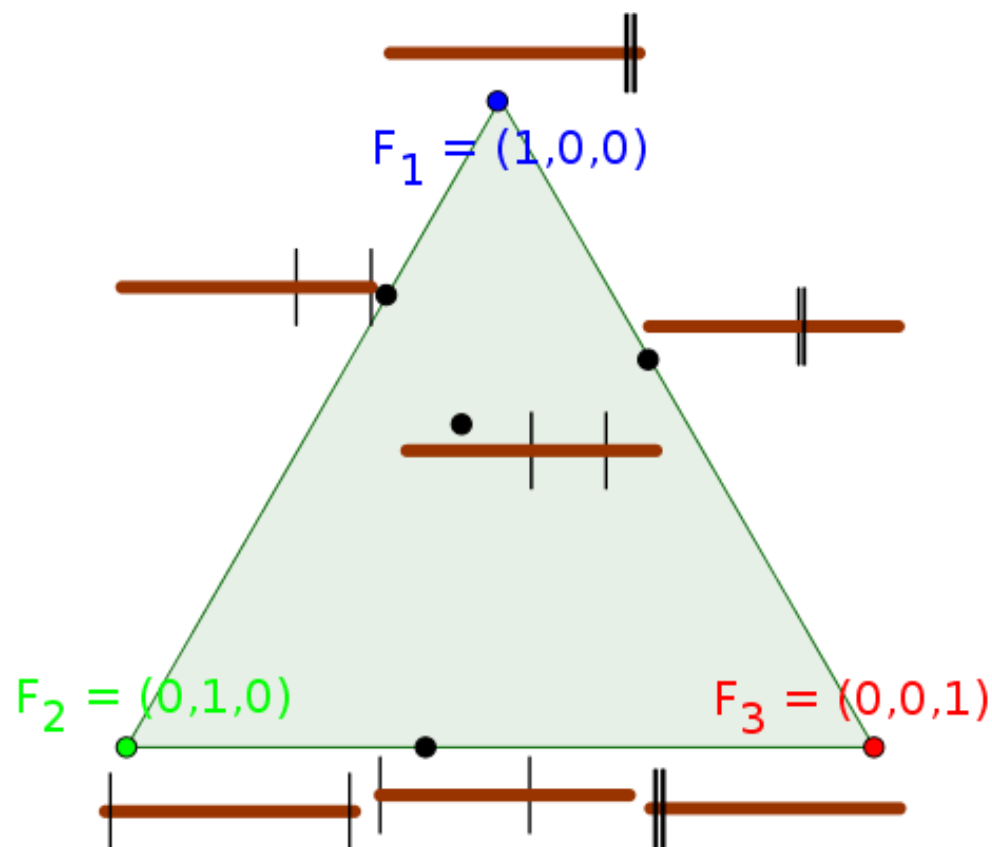
פתרון עבור $n=2$:

- אחד מחלק את שכר-הדירה; השני בוחר חדר.
 - בדיוק כמו חלוקת עוגה לשני ילדים!
- האם אפשר להכליל לשלושה או יותר?

אלגוריתם (Su, 1999)

בניח ששכר-הדירה הוא 1.

כל תימחור של החדרים שקול ל- n מספרים
שסכומם 1 – סימפלקס החלוקות.



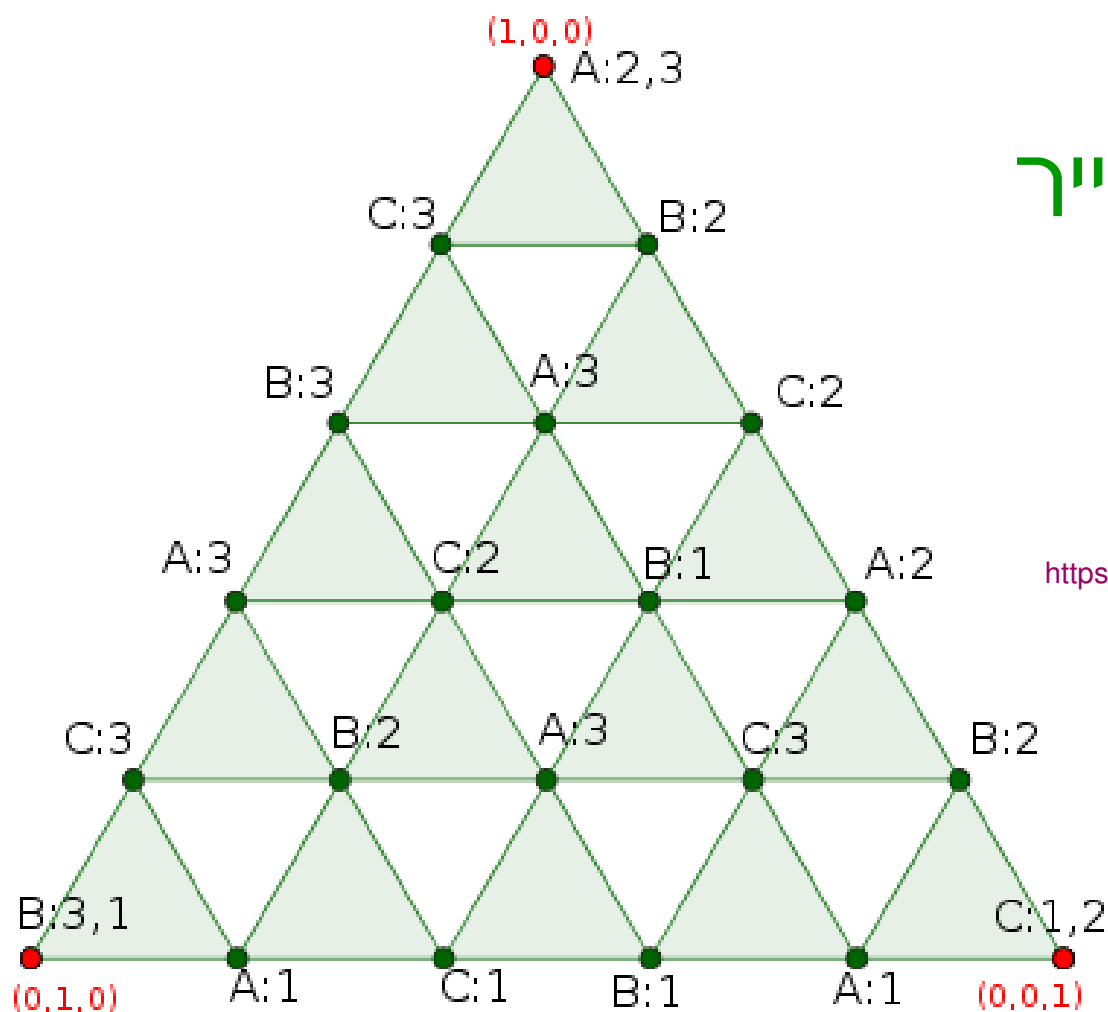
אלגוריתם (Su, 1999)

לפי הנחת "הדיירים העניים", כל דייר מעדיף בכל חלוקה את אחת הפרוסות הריקות.

לפי הלמה של ספרנר,
קיים משולשון שבו כל דייר
מעדיף חדר אחר.

זו חלוקה ללא קנאה!

<https://www.nytimes.com/interactive/2014/science/rent-division-calculator.html>



חלוקת שכר דירה: מודל קרדינלי

הנחות:

- "חדרים סבירים" - כל דייר מייחס ערך כספי לכל חדר, סכום הערכים = לפחות ערך הדירה כולה.
- "קוואזי-ליניאריות" - התועלת של דייר שמקבל חדר = ערך החדר פחות המחיר שלו.
- הנחת "הדיירים העניים" בדרך-כלל לא מתקיימת:
אם חדר א = 100 וחדר ב = 50,
נעדיף את חדר א במחיר 1 מחדר ב בחינם.

חלוקת שכר דירה: סכום הערכים

משפט: בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

הוכחה: תהי X השמת-חדרים ללא קנאה.
תהי Y השמה אחרת כלשהי. לפי הגדרת קנאה:

$$V_i(X_i) - P(X_i) \geq V_i(Y_i) - P(Y_i)$$

נסכום על כל הדיירים, i בין 1 ל- n :

$$\sum (V_i(X_i) - P(X_i)) \geq \sum (V_i(Y_i) - P(Y_i))$$

$$\sum V_i(X_i) - \sum P(X_i) \geq \sum V_i(Y_i) - \sum P(Y_i)$$

בשני הצדדים, סכום המחירים שווה למחיר הדירה.*

מיקסום סכום הערכים

משפט: בכל השמה ללא קנאה, סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.

מסקנות:

(1) כל השמת-חדרים ללא קנאה היא יעילה פארטו.

(2) כדי למצוא חלוקת שכ"ד ללא קנאה, צריך אלגוריתם להשמה ממקסמת-סכום-ערכים.

הבעיה נקראת בעיית ההשמה (Assignment).

בעיית ההשמה - האלגוריתם ההונגרי

(Kuhn, Munkres 1957)

- **הקלט:** מטריצה n על n המתארת את הערך של כל דייר i לחדר j .

- **הפלט:** השמה של דייר לחדר, כך שסכום הערכים של הדיירים לחדריהם גדול ביותר.

- **שימושים נוספים:** השמת עובדים למשימות כך שסכום העלויות של המשימות קטן ביותר.

- **האלגוריתם** (ערך חיובי = עלות שלילית):

▪ http://www.math.harvard.edu/archive/20_spring_05/handouts/assignment_overheads.pdf

- **סיבוכיות:** $O(n^3)$

חלוקת שכר-דירה – קביעת המחירים

- מצאנו השמה ממקסמת-ערכים. צריך לקבוע מחירים כך שההשמה תהיה ללא קנאה. איך?
- יש הרבה דרכים. דרך אחת היא להשתמש בפלט-הביניים של האלגוריתם ההונגרי.
- המטריצה המתקבלת זהה למטריצה המקורית, פרט ל:
 - תוספת x_j לכל עמודה j (המייצגת חדר);
 - תוספת y_j לכל שורה j (המייצגת שחקן).
- כל העלויות ≥ 0 , ויש אפסים באלכסון.
- מכאן: אם המחיר של חדר j יהיה x_j ההשמה ללא קנאה!

חלוקת שכר-דירה – קביעת המחירים

- קובעים את המחיר של חדר j ל- x_j .

- משווים את סכום המחירים למחיר הכולל של הדירה.

- מחלקים את העודף / גירעון שווה בשווה בין כולם.

- קיבלנו חלוקה ללא קנאה!

מימושים והדגמות:

- גליון אלקטרוני rent-division.ods

- אתר לקבוצות רכישה <http://tora.us.fm/fairness/home/>

- אתר לחלוקת ירושות <http://tora.us.fm/fairness/home/ab.html>

- אלג. גל-מש-פרוקצ'יה-זיק: <http://www.spliddit.org/apps/rent>

חלוקת שכר-דירה – בעיית הטרמפיסט

חדר ב	חדר א	
0	150	דייר א
10	140	דייר ב

משפט: במודל הקרדינלי, ייתכן שבכל חלוקה ללא קנאה, אחד הדיירים ישלם מחיר שלילי (צריך לשלם לו שיסכים לגור איתנו...)

הוכחה: נניח שיש שני דיירים ושני חדרים, הדירה עולה 100 והערכים הם כמו בטבלה משמאל למעלה.

חדר א	חדר ב	חדר ג	חדר ד	
36	34	30	0	דייר א
31	36	33	0	דייר ב
34	30	36	0	דייר ג
32	33	35	0	דייר ד

כדי למקסם סכום ערכים, ניתן חדר א לדייר א וחדר ב לדייר ב.

כדי למנוע קנאה, הפרש המחירים צריך להיות 130. דייר ב מקבל 15!

חלוקת שכר דירה - הבחירה הקשה

דיירים שמקבלים כסף	קנאה	הנחת "דיירים עניים"	
לא	לא	כן	אלגוריתם סו . והמשולשים
כן	לא	לא	האלגוריתם ההונגרי ודומיו
לא	כן	לא	אלגוריתם הונגרי עם מחיר מיני. 0