

פתרון מטלה 2

שאלה 1: החלפת בתים

- א. בבעיית החלפת-בתים עם n אנשים, אלגוריתם "מעגלי המסחר" מאתחל גרף עם $2n$ צמתים. כיתבו אלגוריתם המשתמש בגרף עם n צמתים בלבד.
- ב. הוכיחו את המשפט: אם כל יחסי ההעדפה הם חזקים (אין אדישות), אז אלגוריתם החלפת הבתים תמיד מחזיר שיבוץ יעיל פארטו.
- **פתרון:** ראו למשל בפתרון של הזר ורעות.

שאלה 2: החלפת מעונות סטודנטים

- בעיית החלפת-מעונות-סטודנטים היא שילוב של בעיית שיבוץ-סטודנטים-למעונות עם בעיית החלפת-בתים: יש n סטודנטים שכבר גרים ב- n חדרים. אבל יש גם m סטודנטים חדשים שאין להם חדרים, ו- m חדרים פנויים שהדיירים שלהם עזבו לאחר שסיימו את התואר. הציעו אלגוריתם המשבץ את $m+n$ הסטודנטים ל- $m+n$ החדרים, עם שלוש התכונות: אמיתיות, יעילות-פארטו, והשתתפות מרצון. הוכיחו שהאלגוריתם שלכם מקיים את שלוש התכונות.
- פתרון:** משבצים את m הסטודנטים החדשים באקראי ל- m החדרים שהתפנו, ומריצים את אלגוריתם מעגלי המסחר.
- אמיתיות - כי השיבוץ הראשוני הוא אקראי ואינו מושפע מההעדפות, ואלגוריתם מעגלי המסחר הוא אמיתי (הוכח בכיתה).
 - יעילות פארטו - כי אלגוריתם מעגלי המסחר תמיד מחזיר שיבוץ יעיל פארטו (הוכח בכיתה).
 - השתתפות מרצון - כי הסטודנטים החדשים רק מרוויחים (קודם היו בלי חדר ועכשיו יש להם חדר), ואלגוריתם מעגלי המסחר מקיים השתתפות מרצון עבור כל הסטודנטים כולל הסטודנטים הוותיקים (הוכח בכיתה).

שאלה 3: אלגוריתם מעגלי המסחר

- א. מיצאו שימוש נוסף לאלגוריתם מעגלי המסחר, שעדיין לא פועל במציאות.
- ב. כיתבו תוכנית מפורטת להקמת סטרט-אפ ו/או אתר אינטרנט ליישום הרעיון.
- **פתרון:** ראו בפתרונות של יאיר ושל תום.

שאלה 4: קשתות מזויפות

- בבעיית מציאת שידוך-כליות-גדול-ביותר, הנחנו שזוגות יכולים רק להסתיר קשתות. נניח עכשיו שזוגות יכולים גם להוסיף קשתות מזויפות - למשל לזייף תוצאות של בדיקות רפואיות המראות שיש התאמה בינם לבין זוג אחר.
- א. הגדירו במדויק את המשמעות של "מנגנון אמיתי" עבור זוגות במצב זה.

- **פתרון:** יותר נוח להגדיר את התכונה ההפוכה. מנגנון הוא "לא אמיתי" אם קיים זוג, שכאשר הוא מזווח רק קשתות אמיתיות - המנגנון לא משדך אותו, וכאשר הוא מוסיף קשתות מזויפות - המנגנון משדך אותו לזוג אחר המחובר אליו **בקשת אמיתית** (כי אם המנגנון משדך אותו על קשת מזויפת שהוא הוסיף - הוא לא מרויח מזה שום דבר).
- ב. הוכיחו או הפריכו: מנגנון שידוך-גדול-ביותר-עם-עדיפויות הוא אמיתי עבור הזוגות.
- **הוכחה:** נניח בשלילה שצומת כלשהו צ מרויח מזיוף קשת. נגדיר שני מצבים:
 - מצב א - בלי זיוף - המנגנון בוחר שידוך א שאינו כולל את צ.
 - מצב ב - עם זיוף - המנגנון בוחר שידוך ב שבו צ משודך על קשת אמיתית.
- שידוך א זמין במצב ב (כי יש יותר קשתות), ושידוך ב זמין במצב א (כי הוא לא משתמש בקשתות מזויפות). כיוון שהבחירה בין שידוכים היא לפי סדר מילוני קבוע על וקטורי העדיפויות שלהם, בשני המצבים ייבחר אותו שידוך - וזו סתירה. מש"ל.

שאלה 5: החלפת כליות לפי סוג דם

- בשאלה זו נניח שהתאמה בין תורם לנתרם תלויה רק בסוג הדם. נתון מאגר-נתונים ובו שלושה זוגות עם סוגי-דם לפי הטבלה בצד שמאל.
- א. ציירו את הגרף המכוון המתאר את ההתאמות בגרף.
- ב. כמה ואיזה חולים אפשר להציל בלי החלפת כליות בכלל?
- ג. כמה ואיזה חולים אפשר להציל בעזרת האלגוריתם למציאת שידוך גדול ביותר (שנלמד בכיתה)?
- ד. כמה ואיזה חולים אפשר להציל בעזרת אלגוריתם למציאת שלשות רבות ביותר (שלא נלמד בכיתה)?
- **פתרון:** ראו למשל בפתרון של אלכסיי.

שאלה 6: תורם חסיד ("שלי שלך ושליך שלך")

- בשאלה זו נניח שהתאמה בין תורם לנתרם תלויה בגורמים כלשהם ולא דווקא בסוג הדם. נתון מאגר-נתונים עם שבעה זוגות וטבלת-ההתאמה בצד שמאל.
- א. כמה חולים אפשר להציל בעזרת אלגוריתם למציאת מעגלים באורך 3?
- **פתרון:** אף זוג - אין בכלל מעגלים.
 - ב. יום אחד מגיע למאגר תורם חסיד (אלטרואיסט) המוכן לתרום כליה בהתנדבות. מה המספר הגדול ביותר של חולים שאפשר להציל בעזרת תרומה זו? מי יתרום למי ובאיזה סדר?
 - **פתרון:** ארבעה חולים: החסיד יתרום ל-1, 1 ל-3, 3 ל-6, 6 ל-7.
 - ג. מדוע תרומה ע"י תורם חסיד מאפשרת להציל בבת-אחת הרבה יותר אנשים מאשר החלפה?
 - **פתרון:** בהחלפת כליות כל הניתוחים חייבים להתבצע בו-זמנית, כדי למנוע מצב שאחד התורמים יתחרט ואז אחד החולים יישאר בלי תרומה ובלי תורם. אבל כשיש תורם חסיד זה לא חיוני - אפשר לבצע את ההשתלות אחת אחרי השניה. הסיכוי שאחד התורמים יתחרט הוא קטן, וגם אם משהו יתחרט זה לא יהיה אסון גדול כי אף אחד לא ניזוק.

ד. נניח שהחסייד הנ"ל בארץ כלשהי שבה עדיין אין מאגר החלפת כליות. הוא מתייעץ אתכם בשאלה הבאה: "האם לתרום עכשיו לחולה יחיד, או לחכות שיקימו מאגר החלפת כליות ואז התרומה שלי תציל חולים רבים יותר?" מה תייעצו לו?

• **פתרון:** אני לא יודע. אבל שאלתי את אליון רות' (שזכה בפרס נובל בין השאר על עבודותיו בנושא השתלת כליות), ולדעתו אין טעם לחכות, כי ייתכן שבעתיד בכלל לא יצטרכו השתלות - יהיו כליות מלאכותיות.

שאלה 7: החלפת ריאות

א. קראו בקישור למטה על השתלת ריאות:

https://hospitals.clalit.co.il/rabin/he/departments-and-clinics/pulmonary/Pages/pulmonary_transplant.aspx

מה ההבדל העקרוני בין השתלת ריאות לבין השתלת כליות? איך ישפיע ההבדל הזה על תיכנון מאגר-נתונים להחלפת ריאות?

• **פתרון:** הבדל אחד הוא שהתאמה בכליות תלויה גם בסוג הדם וגם בגודל הריאה. אבל זה לא הבדל עקרוני - זה בסה"כ משפיע על הקשתות בגרף ההתאמות, אבל לאחר שיצרנו את גרף ההתאמות - אלגוריתם השידוך הוא זהה. הבדל יותר עקרוני הוא, שבתרומת אונת-ריאה מאדם חי, יש צורך בתרומה של שתי אונות לפחות - כלומר צריך שני תורמים חיים לכל חולה. המשמעות היא, שבתכנון מאגר-נתונים להחלפת ריאות, כל חולה שירצה להיכנס למאגר, יצטרך להביא איתו שני תורמים פוטנציאליים שלא מתאימים לו, ומוכנים לתרום עבורו.

ב. ציירו גרף המתאר החלפת ריאות אופטימלית.

- חולה א מביא שני תורמים: א 1 מתאים לחולה ב, א 2 מתאים לחולה ג.
 - חולה ב מביא שני תורמים: ב 1 מתאים לחולה ג, ב 2 מתאים לחולה א.
 - חולה ג מביא שני תורמים: ג 1 מתאים לחולה א, ג 2 מתאים לחולה ב.
- מבצעים את ההחלפה במעגל ומצילים את כל 3 החולים בעזרת כל 6 התורמים.