

"וְנָחֲכֶתֶם אֹדֶתָהּ אִישׁ כְּאַחֲזִיו" (יחזקאל מ"א 14)

חלוקה הוגנת

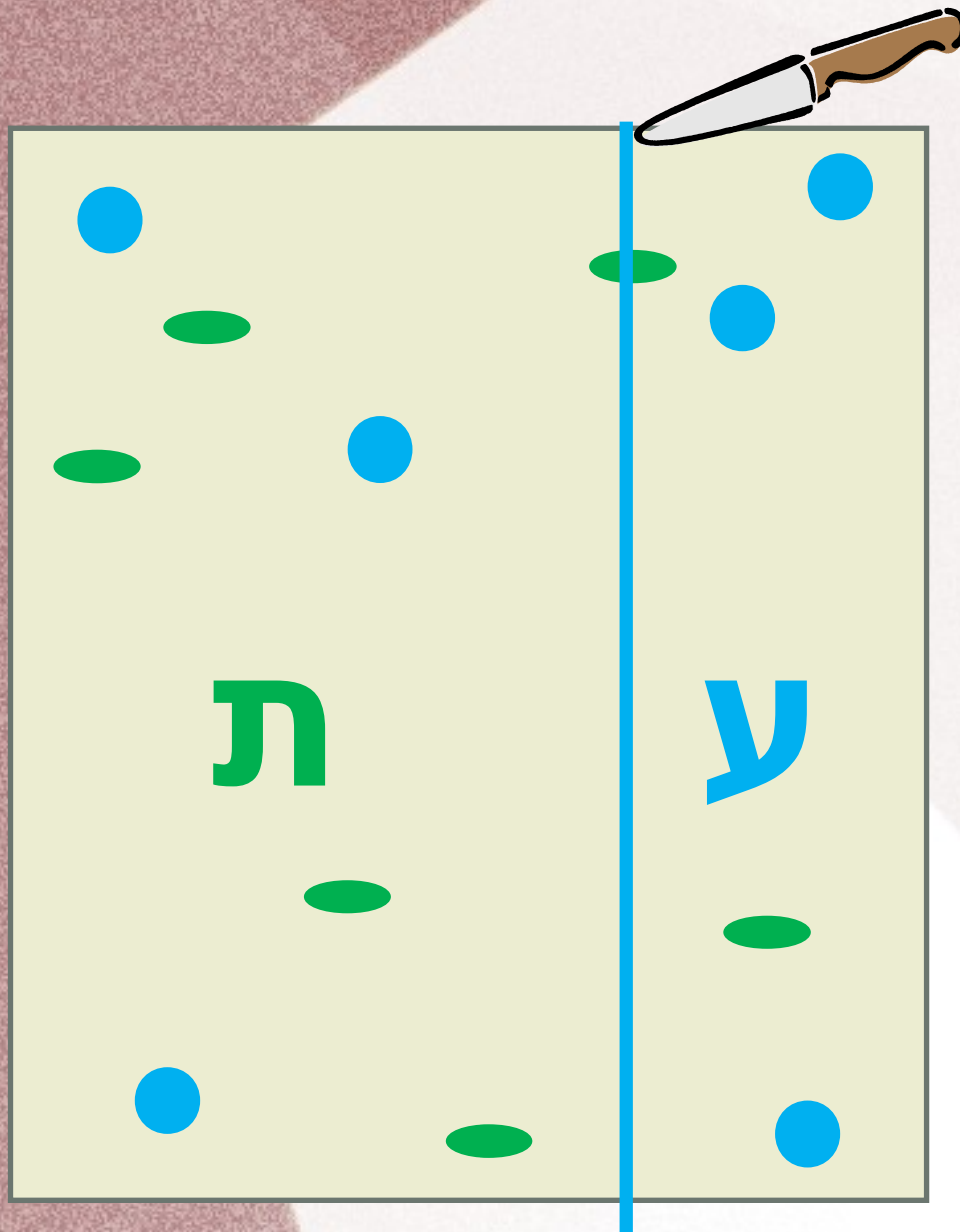
Fair Division

אראל סגל-הלוי, י"ד באייר ה'תשע"ח

חלוקה הוגנת

- **קלט:** משאב משותף, זכויות שוות.
- **אתגר:** העדפות שונות.
- **מטרה:** חלוקה שתהיה הוגנת בעיני כולם.
- **יישומים:** הרבה
 - <http://spliddit.org/>
 - <http://www.fairoutcomes.com/>

חלוקת עוגה בין שני ילדים



- **עמי** מחלק את העוגה לשני חלקים שווים בעיניו (בשווי $1/2$).
- **תמי** בוחרת את החלק הטוב בעיניה.
- **עמי** מקבל את השאר.

חלוקת קרקע בין שני אנשים

בראשית יד-9: וַיֹּאמֶר אַבְרָם אֶל לוֹט: אֵל נָא תְהִי
מְרִיבָה ביני וביניך ובין רעי ובין רעיך כי אנשים
אחים אנחנו. הלא כל הארץ לפניך, הפרד נא מעלי!
אם השמאל ואימנה, ואם הימין ואשמאילה.

אברם



לוט

אלגוריתם "חתוך ובחר"

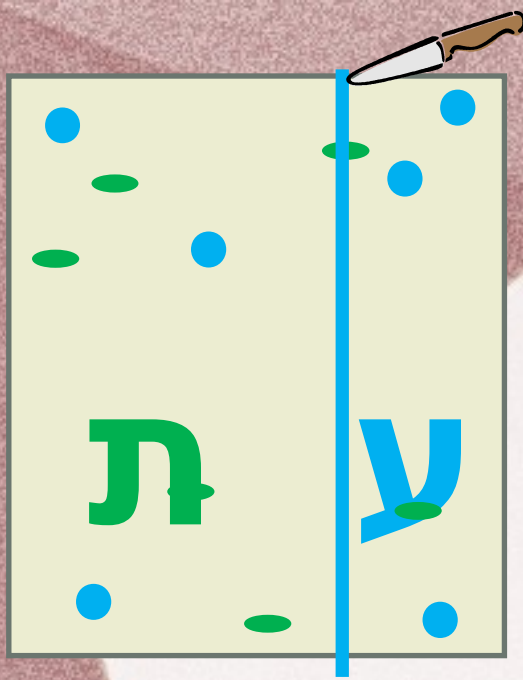
תכונות:

(1) כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות $1/2$ – חלוקה פרופורציונלית (proportional).

(2) כל משתתף חושב שהחלק שלו טוב יותר מכל האחרים – חלוקה ללא קנאה (envy-free).

הרחבות:

- מה עושים כשיש הרבה ילדים?
- מה עושים כשהחפצים בדידים?
- מה עושים כשהמשתתפים לא שווים?



חלוקת עוגה להרבה אנשים

תכונות:

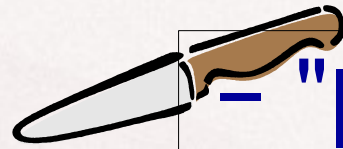
- (1) כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות $n/1$ – חלוקה פרופורציונלית (proportional).
- (2) כל משתתף חושב שהחלק שלו טוב יותר מכל האחרים – חלוקה ללא קנאה (envy-free).

חידה: מה יותר קשה?





חלוקה פרופורציונלית



אלג. "המפחית האחרון" =

- Last Diminisher

הוגו שטיינהאוס 1948

• **עמי** מסמן $n/1$ בעיניו.

• אם **תמי** חושבת שזה

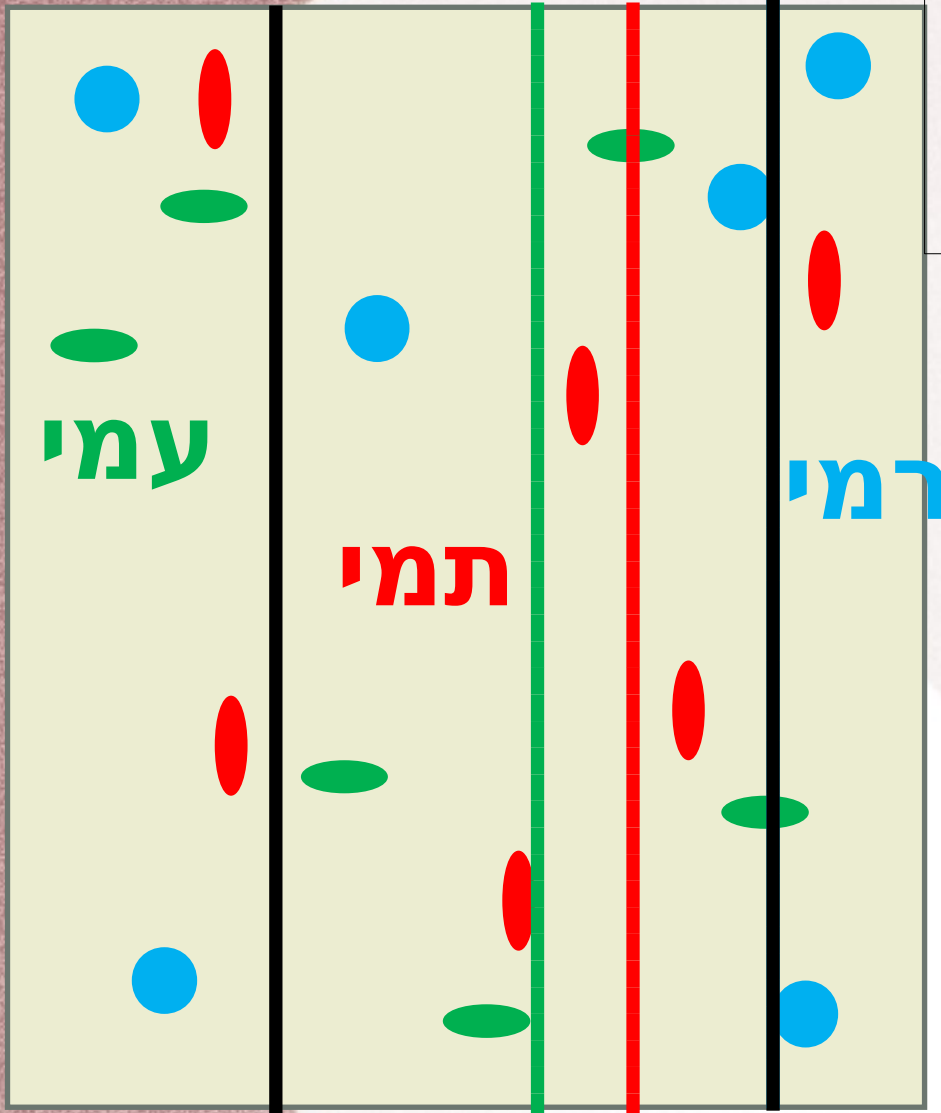
יותר מדי - היא מפחיתה

ל- $n/1$. וכן **רמי** וכו'.

• האחרון שהפחית מקבל

את החלק שסימן.

• ממשיכים ברקורסיה.



הרעיון: מכרז בין השחקנים: מי שמוכן לקבל הכי מעט - זוכה.

אלגוריתם המפחית האחרון

משפט: אלגוריתם "המפחית האחרון" נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות $n/1$ מערך העוגה בעיניו.

הוכחה: נניח שעריך העוגה כולה הוא n . נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על n . **בסיס:** שחקן אחד מקבל הכל. **צעד:** נניח שנכון ל- $n-1$ שחקנים. עכשיו יש n . אחד מהם מקבל חלק ששווה בעיניו 1. נשארים $n-1$ שחקנים. בעיניהם, החלק שנמסר שווה פחות מ-1. לכן, החלק שנשאר שווה בעיניהם יותר מ- $n-1$. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1. ***

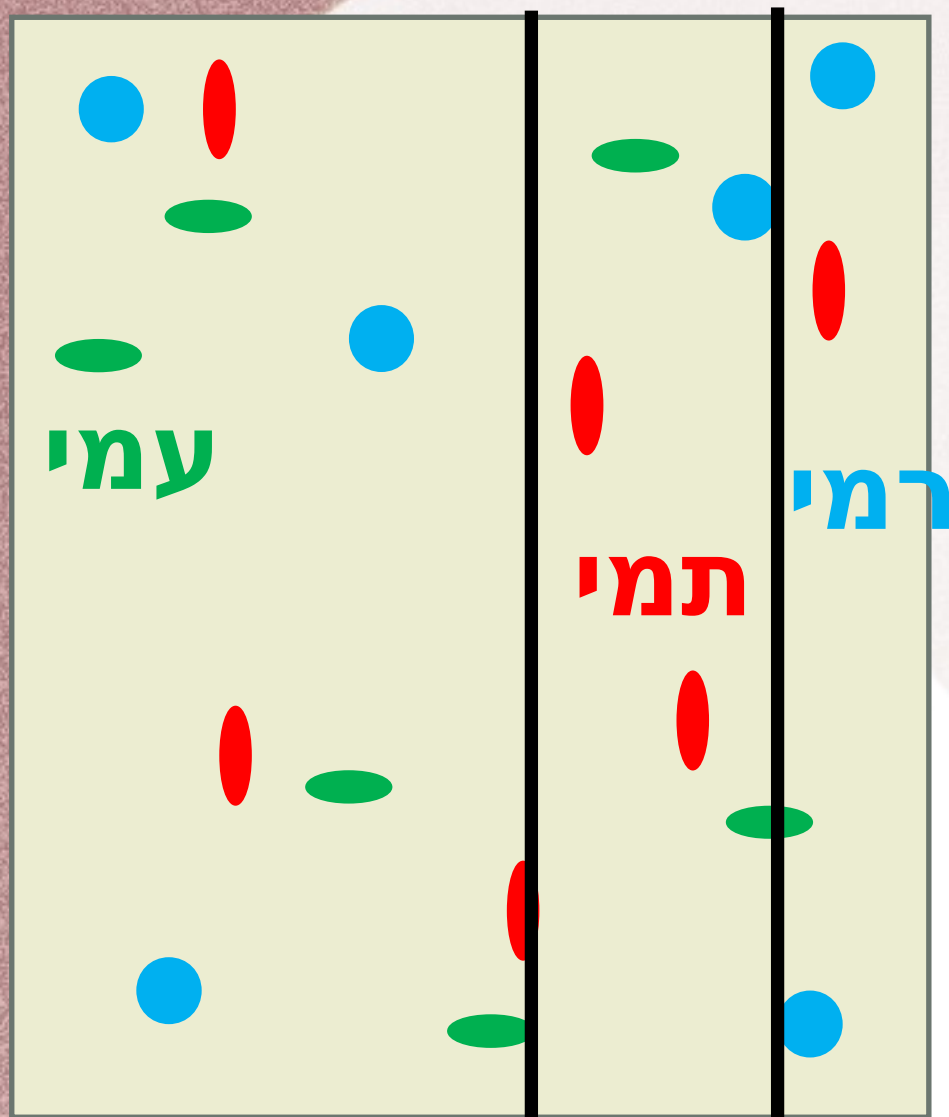
אלגוריתם המפחית האחרון

משפט: אלגוריתם "המפחית האחרון" משתמש ב-
 $O(n^2)$ שאילתות.

הוכחה: בכל צעד שחקן אחד יוצא - יש n צעדים.
בכל צעד צריך לשאול כל שחקן שאילתה אחת.
סה"כ $O(n^2)$ שאילתות.

האם יש אלגוריתם מהיר יותר?

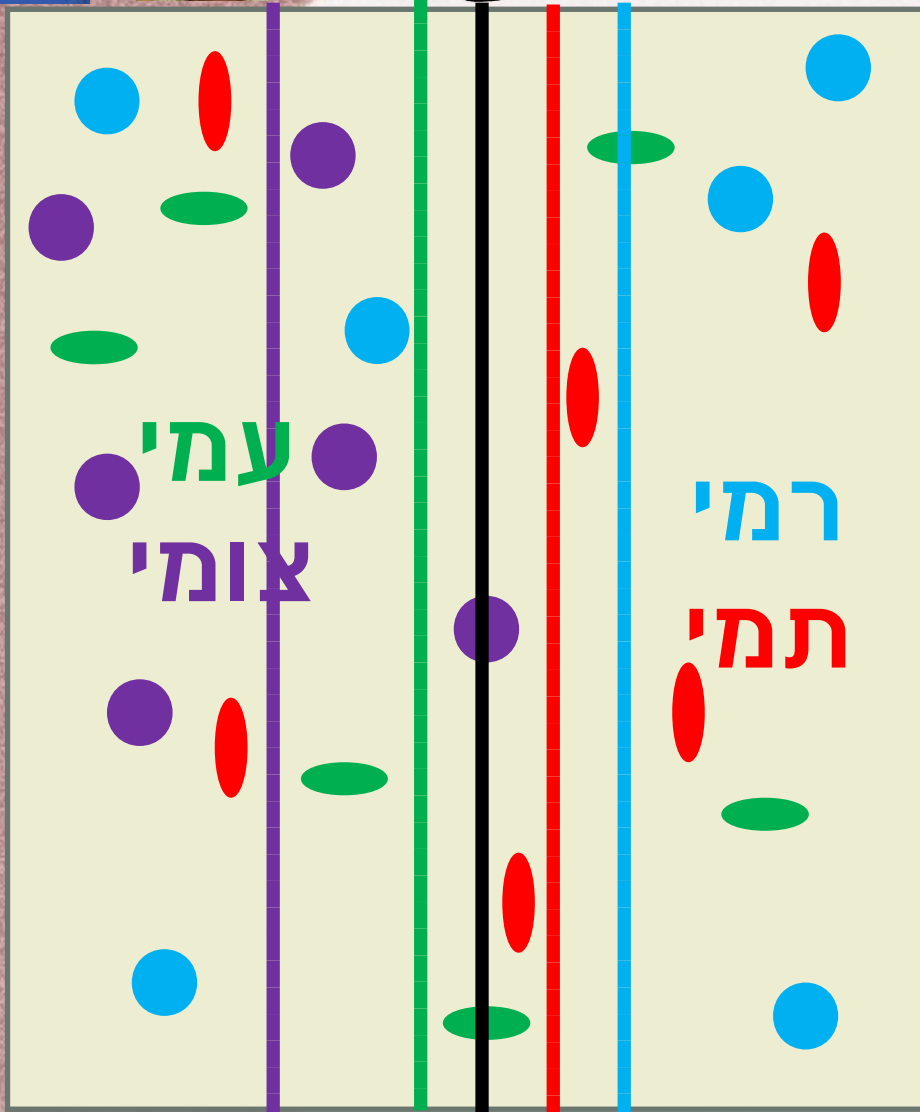
המפחית האחרון – גרסה רציפה



אלגוריתם דובינס-ספנייר –
Dubins & Spanier -
1961

- מחזיקים סכין מעל העוגה ומזיזים אותו מימין לשמאל.
- מי שחושב שהחלק מימין לסכין שווה $1/n$ צועק "עצור!" ומקבל את מה שמימין לסכין.
- השאר ממשיכים רקורסיבית.
- יותר נוח וקל למשתמש – אבל לא יותר מהיר חישובית.

חלוקה פרופורציונלית מהירה



אלגוריתם אבן-פז -

- Even-Paz

שמעון אבן ועזריה פז, '84

- כל שחקן מחלק לשני חלקים בשווי $1/2$ בעיניו.
- חותכים את העוגה בחציון של הקווים.
- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.
- מחלקים כל חצי ברקורסיה.

אלגוריתם אבן-פז

מה עושים כש- n איזוגי?



- כל שחקן מחלק לשני חלקים ביחס של:

$$(n-1)/2 : (n+1)/2$$

- חותכים את העוגה כך שבצד אחד יהיו

$(n-1)/2$ קוים ובצד שני $(n+1)/2$ קוים.

- שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.

אלגוריתם אבן-פז

משפט: אלגוריתם אבן-פז נותן חלוקה פרופורציונלית - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות $n/1$ מערך העוגה בעיניו.

הוכחה: נניח שעריך העוגה כולה הוא n . נוכיח שכל שחקן מקבל חלק ששווה בעיניו לפחות 1. נוכיח באינדוקציה על n . **בסיס:** שחקן אחד מקבל הכל. **צעד:** נניח שנכון לכל מספר שחקנים עד $n-1$. עכשיו יש n . כל מי שמשחק לפי הכללים, מגיע לחלק ששווה בעיניו לפחות k , ויש בו k שחקנים, כאשר k הוא $n/2$ או $(n+1)/2$ או $(n-1)/2$. לפי הנחת האינדוקציה, כל אחד מקבל לפחות 1.

אלגוריתם אבן-פז

משפט: אלגוריתם אבן-פז משתמש

ב- $O(n \log n)$ שאילות.

הוכחה: נעגל את n למעלה לחזקה הקרובה של 2. הגדלנו אותו בפחות מ-2. עכשיו, בכל צעד, גודל הקבוצות $\leq n/2$. לכן מספר הצעדים הוא לכל היותר $\log_2(2n)$. בכל צעד, שואלים כל שחקן שאילתה אחת. לכן הסיבוכיות $O(n \log n)$.

האם יש אלגוריתם מהיר יותר?

-- לא! כל אלגוריתם לחלוקה פרופורציונלית צריך לפחות $O(n \log n)$ שאילות (הוכח בשנת 2007).