

מטלה 7 - חלוקה הוגנת

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה הבאה.

שאלה 1: חלוקה אסטרטגית

א. הוכיחו שאלגוריתם "חתוך ובחר" אינו אמיתי.

ב. נניח שאתם משחקים במשחק "חתוך ובחר" עם אותו שחקן ועל אותה עוגה, במשך הרבה פעמים. תארו אסטרטגיה שתאפשר לכם להשיג את הערך הגדול ביותר. נסו את האסטרטגיה שלכם בקישור הבא:

<http://tora.us.fm/fairness/cake/game-01.html>

היו כמה פתרונות יפים. למשל:

- הפתרון של סמואל ויינון מתאים למצב שבו מספר המשחקים בלתי מוגבל. משקיעים מספר קטן של משחקים בהתחלה כדי ללמוד את ההעדפות של השחקן השני, ומכאן והלאה משתמשים במידע הזה כדי לחתוך באופן אופטימלי.
- הפתרון של קוסטיה ויוגב מתייחס גם למצב שבו מספר המשחקים מוגבל - כמו בקישור.

שאלה 2: חלוקת תורנויות פרופורציונלית (proportional chore division)

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את n ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקות ה- $n+1$. הילדים לא כל כך רוצים לשמור אבל אין להם ברירה, אז הם החליטו לחלק ביניהם את הזמן ולעשות תורנויות. לכל ילד יש העדפות שונות לגבי הזמן ביום שהכי קשה לשמור בו - יש כאלה שהכי קשה להם לשמור בלילה, יש כאלה שהכי קשה להם לשמור דווקא בצהריים, וכו'.

א. הגדירו בפירוט מהי חלוקה פרופורציונלית במצב זה (מדוע זה שונה ממה שלמדנו בכיתה?).

- כל ילד צריך לקבל תורנויות שרמת הקושי שלה היא **לכל היותר 1 חלקי n** מרמת הקושי הכללית.
- התנאי שלמדנו בכיתה היה **לפחות 1 חלקי n** כי העוגה היתה חיובית, כאן ה"עוגה" היא שלילית.
- ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית של זמן השמירה, כך שכל ילד מקבל תורנויות רצופה.
- אפשר להשתמש בוריאציה של אלגוריתם "המפחית האחרון" שנקרא לה "המוסיף האחרון": הילד הראשון מסמן על ציר הזמן קטע שרמת הקושי שלו היא 1 חלקי n בעיניו. אם השני חושב שזה מעט מדי - הוא **מאריך** את הקטע לקטע ששווה 1 חלקי n בעיניו, וכן הלאה. המוסיף האחרון מקבל את הקטע, ושאר הילדים מחלקים ביניהם את השאר ברקורסיה.

שאלה 3: חלוקת תורנויות ללא קנאה (envy-free chore division)

עמי תמי ורמי קיבלו משימה חדשה - הם צריכים לעזור בקטיף במטע המשפחתי. המטע המשפחתי הוא ריבועי, ויש בו עצים שונים עם דרגות-קושי שונות.

כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה ללא קנאה של המטע בין הילדים, כך שכל אחד משלושת הילדים מקבל אחריות על חלק קשיר של המטע.

- אפשר להשתמש באלגוריתם "הסכין המסתובבת" אבל, כמו בשאלה הקודמת, צריך להתאים אותו למצב שבו כל ילד רוצה חלק כמה שיותר קטן. בשלב ראשון, כל ילד מסמן חלק ששווה שליש בעיניו, והילד שסימן את החלק הכי גדול (נגיד עמי) מקבל אותו. בשלב שני, עמי מסובב סכין מעל החלק שנשאר כך שרמת הקושי משני צדי הסכין שווה בעיניו; תמי צועקת "עצור" כשרמת הקושי משני הצדדים שווה בעיניה, ורמי בוחר את החלק הכי קטן בעיניו.

שאלה 4: חלוקה עם זכויות לא שוות (unequal entitlements)

עמי ותמי עזרו לאמא להכין עוגה, אבל תמי עזרה יותר. עמי השקיע שעתיים ותמי השקיעה חמש שעות. אמא רוצה לחלק את העוגה ביניהם בצורה הוגנת בהתאם להשקעה.

א. הגדירו בפירוט מהי חלוקה פרופורציונלית במצב זה.

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית.

- הפתרון של אהוד מעולה.
- פתרון נוסף: נייצר 5 עותקים של תמי ו-2 עותקים של עמי ונשתמש באלגוריתם "המפחית האחרון". כפי שהוכחנו בכיתה, האלגוריתם נותן לכל עותק, חתיכה ששווה לפחות $1/7$ מהעוגה לפי דעתו. לכן, 5 העותקים של תמי יקבלו ביחד לפחות $5/7$ מהעוגה לפי דעתה, ו-2 העותקים של עמי יקבלו ביחד $2/7$ מהעוגה לפי דעתו.

שאלה 5: שיווי-משקל בחלוקת עוגה

שני שחקנים מחלקים עוגה בעזרת אלגוריתם אבן-פז, כלומר: כל אחד מהם מסמן קו המחלק את העוגה לשני חלקים שווים לפי דעתו, והעוגה נחתכת בדיוק באמצע בין שני הקווים.

א. מה הם כל שיווי המשקל של משחק זה?

- נניח שהעוגה חז-ממדית, חצי העוגה בעיני שחקן א הוא בנקודה x , וחצי העוגה בעיני שחקן ב הוא בנקודה z , ונניח ש- $x < z$. אז, לכל נקודה y המקיימת: $x < y < z$, קיים שיווי-משקל שבו שחקן א חותך את העוגה בנקודה y , ושחקן ב חותך את העוגה בנקודה y ועוד אפסילון (כלומר קצת מימין לשחקן א). שחקן א מקבל את החלק השמאלי ששווה בעיניו לפחות חצי, ושחקן ב מקבל את החלק הימני ששווה בעיניו לפחות חצי.
- כדי להוכיח שזה ש"פ צריך להוכיח שאף שחקן לא יכול להרויח משינוי הפעולה שלו. אכן שחקן א לא יכול להרויח: אם הוא יזוז שמאלה, קו החיתוך יזוז שמאלה והחלק השמאלי יהיה קטן יותר; אם הוא יזוז ימינה, הוא יקבל את החלק הימני ששווה בעיניו פחות מחצי. אותו שיקול בדיוק נכון לגבי שחקן ב.

ב. האם כל שיווי המשקל יעילים פארטו?

- כן, בהנחה שלכל חלקי העוגה יש ערך חיובי לכל השחקנים, ושני השחקנים רוצים רק חתיכות קשירות. כדי להוכיח את זה צריך להוכיח שאין חלוקה אחרת שבה אחד נהנה והשני לא חסר.

נבדוק איזה חלוקות אחרות אפשריות: (*) חלוקה שבה שחקן א משמאל ושחקן ב מימין - חלוקה אחרת אפשרית רק אם מזיזים את קו החיתוך ימינה או שמאלה, אבל במקרה זה אחד השחקנים מפסיד. (*) חלוקה שבה שחקן א מימין ושחקן ב משמאל - בחלוקה זו שני השחקנים מקבלים פחות מחצי עוגה, כלומר שניהם מפסידים.

שאלה 6: שינוי חלוקה קיימת

עמי רמי ותמי חילקו ביניהם עוגה בצורה פרופורציונלית (כל אחד קיבל לפחות $1/3$). הם התיישבו לאכול, אבל לפני שהספיקו - נכנסה צומי וטענה שגם לה מגיע חלק. פתחו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית (כל אחד מקבל לפחות $1/4$), ובנוסף, נותן לכל אחד משלושת הילדים הראשונים (עמי רמי ותמי) לפחות $3/4$ מהערך שהיה לו בחלוקה הראשונה.

- הפתרון של אריה וניסן מעולה.

שאלה 7: תיכנות אלגוריתם

- הפתרון של אוריאל ויואב מעולה.