מטלה 1 - פתרון

שאלה 1: יעילות ואמיתיות

[מבוסס על סיפור אמיתי; השמות שונו למניעת זיהויים] בני משפחת X רוצים ללכת יחד למסעדה. הם מתלבטים בין שלוש אפשרויות: מסעדה א, מסעדה ב ומסעדה ג. כל אחד מציין, לגבי כל מסעדה, מספר בין 1 = מאד לא רוצה, לבין 10 = מאד רוצה.

א. ירמיהו מציע לבחור בין האפשרויות בעזרת המנגנון הבא. עבור כל מסעדה, מחשבים את **סכום** כל המספרים שסימנו המשתתפים (הסכום בכל עמודה). בוחרים את המסעדה שהסכום בעמודה שלה הוא הגבוה ביותר. האם המנגנון של ירמיהו הוא אמיתי? האם הוא יעיל פארטו? הוכיחו או הפריכו.

ב. יוחנן מציע לבחור בין האפשרויות בעזרת המנגנון הבא. עבור כל מסעדה מחשבים את **המינימום** בין כל המספרים שסימנו המשתתפים (המינימום בכל עמודה). בוחרים את המסעדה שהמינימום בעמודה שלה הוא הגבוה ביותר. האם המנגנון של יוחנן הוא אמיתי? האם הוא יעיל פארטו? הוכיחו או הפריכו.

- **תשובות**: לא, כן, לא, לא. ראו בפתרון של רז ואורן.

שאלה 2: דיקטטורה סדרתית

א. בכיתה תיארנו את אלגוריתם הדיקטטורה הסדרתית בהנחה שאף משתתף לא אדיש - כל סטודנט יכול לדרג כל שני חדרים במעונות ולהגיד איזה מהם טוב יותר. נניח עכשיו שיש סטודנטים אדישים - למשל יש סטודנטים שלא אכפת להם אם יהיו בבניין 101 או 102. האם המנגנון עדיין יעיל פארטו? האם המנגנון עדיין אמיתי? הוכיחו או הפריכו.

- **פתרון**: לא, כן. ראו בפתרון של מתן ועידן.

ב. לאחר שהסטודנטים קיבלו מעונות, אגודת הסטודנטים מחלקת להם מתנות. יש n סטודנטים ו-2n מתנות וכל סטודנט צריך לקבל 2 מתנות. כל המתנות שונות ולסטודנטים יש העדפות שונות. נשיא האגודה הציע את האלגוריתם הבא: מסדרים את הסטודנטים לפי סדר העדיפות שלהם (אותו סדר-עדיפות כמו בחלוקת המעונות), וכל אחד מהם בוחר חפץ. לאחר מכן עושים עוד סיבוב בסדר הפוך, וכל אחד בוחר חפץ נוסף. הוכיחו שהאלגוריתם אינו אמיתי; הציעו תיקון קטן באלגוריתם שיהפוך אותו לאמיתי.

- **פתרון**: האלגוריתם לא אמיתי. נניח שיש שני סטודנטים (א, ב) ו-4 מתנות. אז סדר הבחירה יהיה א-ב-ב-א. אם סטודנט א יודע מה ההעדפות של ב, ייתכן שלא כדאי לו לבחור בהתחלה את המתנה שהוא הכי רוצה. למשל, ייתכן שסטודנט א הכי רוצה את הקלמר המשופצר, אבל סטודנט ב הכי פחות רוצה את הקלמר הזה. אז לסטודנט א כדאי לבחור את החפץ השני בדירוג שלו - כי את הקלמר המשופצר הוא יקבל בכל מקרה.
- **תיקון**: מסדרים את הסטודנטים בסדר אקראי, וכל סטודנט בוחר שתי מתנות בבת-אחת. עכשיו כבר אין מקום לשיקולים אסטרטגיים - כשמגיע תורך, תבחר את שתי המתנות הכי טובות מאלה שנשארו (אמנם, אינטואיטיבית ה"תיקון" הזה גורם לכך שהמנגנון פחות הוגן - הראשונים בוחרים שתי מתנות טובות ולאחרונים נשארות שתי המתנות הגרועות. אבל בשאלה זו לא שאלנו על הגינות אלא רק על אמיתיות).

שאלה 3: יציבות ויעילות

א. האם כל שידוך יציב הוא יעיל פארטו? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

- **פתרון**: כן. נניח בשלילה שיש שיפור פארטו. אז קיים מישהו שמצבו השתפר. נניח בה"כ שזה סטודנט ונקרא לו ס. אז במקור, ס משודך למחלקה מ 1, ובשיפור, ס משודך למחלקה מ 2 שהיא טובה יותר עבורו. כיוון שזה שיפור פארטו, המחלקה לא מפסידה. לכן מ 2 מעדיפה את ס על-פני השידוך המקורי שלה. מכאן ש(ס,מ 2) הם זוג מערער בשידוך המקורי - כלומר השידוך המקורי לא יציב.

ב. האם כל שידוך יעיל פארטו הוא יציב? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

- **פתרון**: לא. ראו דוגמה נגדית בפתרון של אהוד וסיימון.

שאלה 4: אלגוריתם קבלה-על-תנאי

א. מיצאו דוגמה עם 3 סטודנטים ו-3 מחלקות שבו אלגוריתם קבלה על-תנאי מחזיר תמיד את אותו שידוך, בין אם הסטודנטים מציעים או המחלקות מציעות.

- **פתרון** לדוגמה:
הסדר של כל הסטודנטים הוא: מ 1 > מ 2 > מ 3,
והסדר של כל המחלקות הוא: ס 1 > ס 2 > ס 3.
יש רק שידוך יציב אחד והוא: (ס 1 - מ 1) (ס 2 - מ 2) (ס 3 - מ 3). לכן אלגוריתם קבלה-על-תנאי יחזיר אותו לא משנה מי מציע.

ב. הוכיחו שאלגוריתם קבלה על-תנאי כשהמחלקות מציעות, מחזיר את השידוך היציב הכי גרוע עבור הסטודנטים מכל השידוכים היציבים (רמז: הוכיחו שכל שידוך יציב שהוא הכי טוב עבור המחלקות, הוא הכי גרוע עבור הסטודנטים).

- **פתרון**: נתבונן בשני שידוכים יציבים: שידוך א ושידוך ב. נניח שכל המחלקות מעדיפות את שידוך א. נוכיח שכל הסטודנטים מעדיפים את שידוך ב.
נניח בשלילה שיש סטודנט כלשהו ס המעדיף את שידוך א. כלומר הוא מעדיף את המחלקה שלו בשידוך א (נניח מ 1), על-פני המחלקה שלו בשידוך ב (נניח מ 2). לפי ההנחה, מ 1 מעדיפה את ס על-פני הסטודנט שלה בשידוך ב. לכן, (ס, מ 1) הם זוג מערער על שידוך ב. זו סתירה להנחה ששידוך ב הוא יציב. ***
עכשיו נחזור לשאלה. אלגוריתם קבלה-על-תנאי כשהמחלקות מציעות מחזיר את השידוך היציב הכי טוב למחלקות, ולכן לפי משפט-העזר שהוכחנו למעלה זה השידוך היציב הכי גרוע לסטודנטים.

שאלה 5: הרחבות לאלגוריתם קבלה-על-תנאי

א. הסבירו איך צריך לשנות את האלגוריתם כדי שיעבוד גם כשמספר הסטודנטים גדול יותר או קטן יותר ממספר המחלקות (עדיין בכל מחלקה יש מקום אחד).

- כשמספר הסטודנטים גדול יותר - מוסיפים "מחלקות וירטואליות" כמספר הסטודנטים העודפים, שכל הסטודנטים חושבים שהן הכי גרועות. כשמספר המחלקות גדול יותר - מוסיפים "סטודנטים וירטואליים" שכל המחלקות חושבות שהם הכי גרועים.

ב. הסבירו איך צריך לשנות את האלגוריתם כאשר בכל מחלקה יש מקום לכמה סטודנטים, מספר המקומות הכולל במחלקה i הוא c_i, לכל מחלקה יש דירוג על הסטודנטים, וכל מחלקה מעדיפה לקבל את c_i הסטודנטים עם הדירוג הגבוה ביותר בכל קבוצה. כתבו בפירוש את האלגוריתם למקרה זה.

- **פתרון**: ראו בפתרון של אלכסי.

ג. באלגוריתם "קבלה על תנאי", כל מחלקה מדרגת את הסטודנטים בלי לראות מה הסטודנטים דירגו. נניח עכשיו שאנחנו מאפשרים למחלקות לראות את הדירוג של הסטודנטים לפני שהן מפרסמות את הדירוג שלהן. האם האלגוריתם עדיין אמיתי?

- **תשובה:** האלגוריתם כבר לא אמיתי, כי הדירוג של מחלקה יכול להיות תלוי בדירוג של הסטודנט. למשל, מחלקה יכולה להגיד "אני מקבלת רק את מי שדירג אותי במקום הראשון". ואז, סטודנט שחושב שלא יצליח להתקבל למחלקה הראשונה שלו, יעדיף לדרג את המחלקה השניה שלו במקום ראשון, כדי שיהיה לו סיכוי להתקבל לשם. לכן, כשמממשים את האלגוריתם במציאות, מקפידים מאד על סודיות.

שאלה 6: שידוך יציב במקרה פשוט

בליגת כדורסל מסויימת, לכל שחקן יש העדפות שונות על הקבוצות, אבל לכל הקבוצות יש אותן העדפות על השחקנים - כל הקבוצות מדרגות את השחקנים מהגבוה לנמוך. כיתבו אלגוריתם לשידוך יציב בין קבוצות לשחקנים, שהוא פשוט יותר מאלגוריתם קבלה על-תנאי, אך עדיין אמיתי.

- **תשובה:** מסדרים את השחקנים מהגבוה לנמוך, ומריצים דיקטטורה סדרתית - כל שחקן בוחר את הקבוצה הטובה ביותר מאילו שנשארו פנויות. זה אמיתי - כי זו דיקטטורה סדרתית (הוכחנו בכיתה). זה יציב - כי כל מחלקה מעדיפה שחקן גבוה יותר מזה שקיבלה, אבל השחקן הגבוה יותר בחר מוקדם יותר ולכן הוא הגיע למחלקה שהוא מעדיף.