

מטלה 6 - משחקים ושיווי משקל

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה הבאה.

שאלה 1: כדורי הזהב

צפו בסרטון על משחק "כדורי הזהב", למשל <https://youtu.be/p3Uos2fzIJ0> וענו:

א. מהי טבלת התועלות של המשחק?

ב. האם יש שיווי-משקל בפעולות שולטות, ואם כן, איזה?

ג. מה הם כל שיוויי-משקל-נאש במשחק (באסטרטגיות טהורות)?

פתרון: ראו למשל בפתרון של הזר ורעות.

שאלה 2: דילמת הנוסע (Traveler's dilemma)

מישהו מציע לכם את המשחק הבא, לשני שחקנים. שמים אתכם בחדר אחד, ואת השחקן השני בחדר אחר, כך שאין לכם אפשרות לתקשר ביניכם. נותנים לכם דף ועט ואומרים לכם לכתוב מספר בין 2 ל-100. חוקי המשחק הם:

- אם שניכם כתבתם אותו מספר, נניח k - שניכם מקבלים k שקלים.
- אם כתבתם מספרים שונים - נניח ש- k הוא המספר הקטן ביניהם. אז מי שכתב k מקבל $k+2$, ומי שכתב מספר גדול יותר מקבל $k-2$.

הוכיחו שבמשחק זה קיים שיווי-משקל נאש יחיד (באסטרטגיות טהורות). מה הוא?

פתרון: ראו למשל בפתרון של יוגב וקוסטיה.

שאלה 3: מכרז "כולם משלמים" (all-pay auction)

במכרז "כולם משלמים", כל שחקן מכריז על מחיר, השחקן שהכריז את המחיר הגבוה ביותר זוכה בחפץ, וכל השחקנים (לא רק הזוכה) משלמים את המחיר שהכריזו.

נניח שבמכרז מחיר שני ישנם שני משתתפים: ס - עם ערך 60, כ - עם ערך 20. מה הם כל שיוויי-משקל נאש של המשחק (באסטרטגיות טהורות)?

פתרון: במשחק זה אין שיווי-משקל נאש באסטרטגיות טהורות.

הוכחה: נבדוק את כל האפשרויות.

- אפשרות א: שני השחקנים מכריזים מספר גדול מאפס. אחד מהם זוכה, והשני משלם בלי לזכות. זה לא יכול להיות שיווי משקל, כי זה שהפסיד היה מעדיף להגיד 0.

- אפשרות ב: שני השחקנים מכריזים אפס. אחד מהם זוכה והשני נשאר עם תועלת 0. גם זה לא שיווי משקל, כי זה שהפסיד היה מעדיף להגיד 1 ולזכות.
- אפשרות ג: אחד השחקנים מכריז 0, השני מכריז 1. זה לא ש"מ, כי זה שהפסיד היה מעדיף להגיד 2 ולזכות.
- אפשרות ד: אחד מכריז 0, השני מכריז 2 או יותר. זה לא ש"מ, כי זה שניצח היה מעדיף להגיד 1 ולזכות במחיר נמוך יותר.

שאלה 4: משחק עומס (congestion game)

בקורס מסויים ישנם 3 שרתים המשמשים לבדיקה אוטומטית של מטלות. ישנם 91 סטודנטים המעוניינים לבדוק את המטלות שלהם באותו זמן. אם סטודנט שולח את המטלה לשרת כאשר הוא פנוי, הבדיקה לוקחת דקה אחת. אבל אם k סטודנטים שולחים את המטלה לאותו שרת באותו זמן, הבדיקה לוקחת k דקות. כל סטודנט צריך לבחור לאיזה שרת לשלוח את המטלה. התועלת של כל סטודנט היא מינוס מספר הדקות. מה הם כל שיווי-משקל נאש במשחק זה (באסטרטגיות טהורות)?

פתרון: בשיווי-משקל נאש, הסטודנטים יתחלקו בצורה מאוזנת בין השרתים. יש שלוש אפשרויות:

- 31 על שרת א, 30 על שרת ב, 30 על שרת ג
- 30 על שרת א, 31 על שרת ב, 30 על שרת ג
- 30 על שרת א, 30 על שרת ב, 31 על שרת ג

במקרה זה, כל סטודנט שינסה לעבור לשרת אחר, ימצא את עצמו עם עומס גדול לפחות באותה מידה כמו השרת שהוא נמצא בו עכשיו, ולכן יעדיף כבר להישאר על אותו שרת.

הוכחה שאין שיווי משקל נוספים: נניח שהחלוקה לא מאוזנת, כלומר מספר הסטודנטים על שרת כלשהו (נניח שרת א) קטן ב-2 או יותר ממספר הסטודנטים על שרת אחר (נניח שרת ב). אז, כל סטודנט שיעבור מהשרת העמוס לשרת הפחות עמוס, ירויח דקה אחת לפחות. לכן, סטודנטים על השרת העמוס ירצו לעבור לשרת הלא-עמוס. לכן זה לא ש"מ.