שיווי-משקל נאש
במשחקים ובמכרזים

אראל סגל-הלוי

מה עושים שחקנים במנגנון לא אמיתי?

- כשיש לנו מנגנון אמיתי, קל לנתח את התנהגות המשתתפים – הם כנראה ידווחו את ההעדפות האמיתיות שלהם.
- אבל מה עושים כשאין מנגנון אמיתי?
או כשהמנגנון האמיתי מסובך מדי?
איך יתנהגו המשתתפים?
- שאלה לדוגמה: איך יתנהגו המשתתפים במכרז מחיר ראשון? מה יהיה הרווח למוכר?

תורת המשחקים על חצי רגל

הגדרה: משחק = אוסף של **שחקנים**,
לכל שחקן יש אוסף של **פעולות** אפשריות,
כל צירוף של פעולות מביא ל**תוצאה**,
וכל שחקן מקבל **תועלת** מכל תוצאה אפשרית.

דילמת האסיר
שיתוף קבצים

3 / 3	0 / 5
5 / 0	1 / 1

אבן נייר ומספריים

0 / 0	-1 / 1	1 / -1
1 / -1	0 / 0	-1 / 1
-1 / 1	1 / -1	0 / 0

זוג או פרד
משחק הפנדל

1 / -1	-1 / 1
-1 / 1	1 / -1

	1	2	3
1	1.5 / 1	0 / 1	0 / 0
2	2 / 0	1 / 0.5	0 / 0
3	1 / 0	1 / 0	0.5 / 0

מכרז מחיר ראשון. ערכים: 4, 3.

1 / 1	0 / 0	0 / 0
0 / 0	1 / 1	0 / 0
0 / 0	0 / 0	1 / 1

משחק תיאום

איך מתנהגים שחקנים במשחק?

הגדרה: פעולה שולטת (דומיננטית) של שחקן:
עבור כל צירוף-פעולות של האחרים,
הפעולה נותנת לשחקן תועלת גבוהה ביותר.

1 / 10	2 / **30**
3 / 20	**4** / **40**

1 / 10	3 / **20**
2 / 30	**4** / **40**

1 / -1	-1 / 1
-1 / 1	1 / -1

1 / 1	0 / 0	0 / 0
0 / 0	1 / 1	0 / 0
0 / 0	0 / 0	1 / 1

3 / 3	0 / 5
5 / 0	1 / 1

פעולות שולטות במכרזים

הגדרה: פעולה שולטת (דומיננטית) של שחקן:
עבור כל צירוף-פעולות של האחרים,
הפעולה נותנת לשחקן תועלת גבוהה ביותר.

	1	2	3
1	1.5 / 1	0 / 1	0 / 0
2	2 / 0	1 / 0.5	0 / 0
3	1 / 0	1 / 0	0.5 / 0
4	0 / 0	0 / 0	0 / 0

מכרז מחיר ראשון - אין

	1	2	3
1	1.5 / 1	0 / 2	0 / 2
2	3 / 0	1 / 0.5	0 / 1
3	3 / 0	2 / 0	0.5 / 0
4	3 / 0	2 / 0	1 / 0

מכרז מחיר שני - יש

פעולות שולטות – עיקרון הגילוי (Revelation Principle)

משפט: כל מטרה שאפשר להשיג ע"י משחק עם *פעולות שולטות* – אפשר להשיג ע"י *מנגנון אמיתי*.

הוכחה: המנגנון האמיתי מקבל מהשחקנים את טבלת הערכים שלהם, ומשחק עבורם את הפעולה השלטת שלהם.

דוגמה: מכרז אנגלי.

איך מתנהגים שחקנים *כשאין פעולה שולטת*?

הגדרה: שיווי-משקל נאש (Nash): צירוף פעולות של כל השחקנים, שבו הפעולה של כל שחקן נותנת לו תועלת גבוהה ביותר *בצירוף זה*.

פרשנות: הסכם שאוכף את עצמו.

משפט: אם לכל שחקן יש פעולה שלטת, אז צירוף הפעולות השולטות הוא שיווי-משקל נאש.

4 / 4	0 / 6
6 / 0	**2 / 2**

1 / 1	0 / 0	0 / 0
0 / 0	**1 / 1**	0 / 0
0 / 0	0 / 0	**1 / 1**

1 / -1	-1 / 1
-1 / 1	1 / -1

שיווי-משקל נאש במכרזים

הגדרה: שיווי-משקל נאש: צירוף פעולות של כל השחקנים, שבו הפעולה של כל שחקן נותנת לו תועלת גבוהה ביותר *בצירוף זה*.

	1	2	3
1	1.5 / 1	0 / 1	0 / 0
2	2 / 0	**1 / 0.5**	0 / 0
3	1 / 0	**1 / 0**	**0.5 / 0**
4	0 / 0	0 / 0	0 / 0

מכרז מחיר ראשון - יש

	1	2	3
1	1.5 / 1	0 / 2	0 / 2
2	3 / 0	1 / 0.5	0 / 1
3	**3 / 0**	**2 / 0**	0.5 / 0
4	**3 / 0**	**2 / 0**	**1 / 0**

מכרז מחיר שני - יש

שיווי-משקל נאש במכרזים

דוגמה: מכרז על חפץ אחד, שני משתתפים.

ס – ערך 60. כ – ערך 20.

מה הם כל שיווי-המשקל של המכרז?

נסמן: s – הכרזה של ס. k – הכרזה של כ.

מכרז מחיר ראשון - נחלק למקרים:

- **אם $k<19$** אז $s=k+1$ ואז כ יעלה ל-s – לא ש"מ.
- **אם $k>=19$ וגם $k<60$**, אז $s=k+1$ וזה כן ש"מ.
- **אם $k>=60$**, ס יפסיד ו-כ יירד – לא ש"מ.

שיווי-משקל נאש במכרזים

דוגמה: מכרז על חפץ אחד, שני משתתפים.

ס – ערך 60. כ – ערך 20.

מה הם כל שיווי-המשקל של המכרז?

נסמן: s – הכרזה של ס. k – הכרזה של כ.

מכרז מחיר שני - נחלק למקרים:

- **אם k<20** אז כל s>=20 הוא ש"מ.
- **אם k>=20 וגם k<60**, אז כל s>k הוא ש"מ.
- **אם k>=60**, אז כל s<20 הוא ש"מ!
- במכרז מחיר שני יש שיווי-משקל "רעים"!

(לא יעילים, רווח נמוך)

מכרז התדרים בניו-זילנד*

בשנת 1990 החליטה ממשלת ניו-זילנד למכור תדרי-שידור במכרז מחיר שני. תוצאות לדוגמה:

- מחיר ראשון: $100,000. מחיר שני: $6!
- מחיר ראשון: $7,000,000. מחיר שני: $5000!

לא ברור מה גרוע יותר – הפסד הרווחים, או העובדה שההצעות התפרסמו בציבור...

בפעם הבאה הם השתמשו במכרז מחיר ראשון.

* http://theory.stanford.edu/~tim/f13/l/l8.pdf

באיזה מכרז להשתמש?

	מחיר ראשון	מחיר שני
פעולות שולטות	לא	כן
כל ש"מ הוא יעיל פארטו (הגבוה זוכה)	כן	לא
בש"מ, הרווח למוכר תמיד לפחות הערך השני	כן	לא

משחק עם ידיעה לא שלמה (incomplete information)

- במקרים רבים, טבלת התועלות לא ידועה.
- התועלות של שחקן תלויות ב"סוג" (type) שלו.
- כל שחקן יודע את:
  - הסוג שלו (- ולכן גם התועלות שלו).
  - התפלגות-הסתברות על הסוגים של האחרים.

הגדרה: שיווי-משקל בייס-נאש (Bayes-Nash):
לכל שחקן יש *פונקציה* מהסוג לפעולה.
הפונקציה של כל שחקן נותנת לו ממוצע-תועלות גבוה ביותר בצירוף זה.

מכרז מחיר ראשון, חפץ אחד, שני שחקנים

- **הסוג** של כל שחקן j הוא ערך החפץ עבורו, v_j.
  הסוג של כל שחקן מתפלג אחיד בין 0 ל-1.
- **הפעולה** של כל שחקן היא ההכרזה שלו, b_j.
  נבדוק אם קיים ש"מ בייס-נאש עם: $b_j(v_j) = a^*v_j$
- מה הייתם מכריזים במצב זה? [ניסוי]

מכרז מחיר ראשון, חפץ אחד, שני שחקנים

- **הסוג** של כל שחקן j הוא ערך החפץ עבורו, v_j.
  הסוג של כל שחקן מתפלג אחיד בין 0 ל-1.
- **הפעולה** של כל שחקן היא ההכרזה שלו, b_j.
  נבדוק אם קיים ש"מ בייס-נאש עם: $b_j(v_j) = a*v_j$
- נניח ששחקן 1 מכריז $x*v_1$ ושחקן 2 מכריז $y*v_2$.
- $u_2(y) = ProbOfWinning * UtilityWhenWinning$
  $= Pr[v_1<(y/x)*v_2] * v_2*(1-y)$
  $= (y/x)*v_2 / 30 * v_2*(1-y)$
- גוזרים ומגלים שהמקסימום מתקבל עבור $y=1/2$.

מכרז מחיר ראשון, חפץ אחד, שני שחקנים

- מצאנו שיווי-משקל בייס-נאש:
- $b_j(v_j) = v_j / 2$
- תוחלת הרווח של המוכר בשיווי-משקל:
- $E\,[\max(v_1,v_2)] / 2 = [2/3] / 2 = \mathbf{1/3}$
- במכרז מחיר שני יש ש"מ באסטרטגיות שולטות:
- $b_j(v_j) = v_j$
- תוחלת הרווח של המוכר בשיווי-משקל:
- $E\,[\max(v_1,v_2)] = \mathbf{1/3}$
- השיוויון ברווחים אינו מקרי – זו דוגמה למשפט שקילות הרווח – Revenue Equivalence.