מטלה 8 - חלוקה אמיתית ויעילה; חלוקת חדרים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה הבאה.

שאלה 1: חישוב חלוקה הוגנת ויעילה

עמי תמי וצומי רוצים להשתמש במחשב-העל המחלקתי לצורך ביצוע חישובים מורכבים. הערך של עמי הוא: 1*כמות הדיסק שהוא מקבל ועוד 2*כמות המעבד שהוא מקבל ועוד 3*כמות הזיכרון שהוא מקבל. הערכים של תמי ושל צומי נקבעים באופן דומה רק עם מספרים שונים (...) כיתבו פקודה בשפת Mathematica (או בשפה אחרת לבחירתכם) המוצאת חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה של משאבי המיחשוב.

- **פתרון**: הפתרון של אהוד וסיימון נכון. אמנם כדי להריץ אותו ב"מתמטיקה" צריך להכניס תנאי-התחלה מתאימים לכל משתנה (כדי שלא יתחיל מערכים שליליים). הנה הפקודה שעובדת אצלי:

```
FindMaximum[{Log[3 m1 + 2 p1 + d1] + Log[6 m2 + 5 p2 + 4 d2] + Log[9 (1 - m1 - m2) + 8 (1 - p1 - p2) + 7 (1 - d1 - d2)],   0 <= m1 + m2 <= 1, 0 <= d1 + d2 <= 1, 0 <= p1 + p2 <= 1,   0 <= m1 <= 1, 0 <= m2 <= 1, 0 <= p1 <= 1, 0 <= p2 <= 1,   0 <= d1 <= 1,   0 <= d2 <= 1}, {{m1, 0.1}, {m2, 0.1}, {p1, 0.1}, {p2, 0.1}, {d1, 0.1}, {d2, 0.1}}]
```

והתוצאה:

```
{4.67925, {m1 -> 0.854165, m2 -> 0.145833, p1 -> 4.55487*10^-7,
  p2 -> 0.849998, d1 -> 2.85534*10^-7, d2 -> 1.84868*10^-6}}
```

שאלה 2: חלוקה קשירה, יעילה וללא-קנאה

למדנו שתמיד קיימת חלוקה שהיא **ללא-קנאה וקשירה**, וחלוקה שהיא **ללא-קנאה ויעילה**. בשאלה זו נראה שלא תמיד קיימת חלוקה שהיא **ללא-קנאה, קשירה, ויעילה** בו-זמנית (...)

- **פתרון**: ראו למשל בפתרון של אביב ומשה.

שאלה 3: חלוקה קשירה, יעילה ופרופורציונלית

נניח שיש n שחקנים וכל אחד מהם רוצה חתיכה קשירה בלבד. הוכיחו שתמיד קיימת חלוקה שהיא גם יעילה-פארטו וגם פרופורציונלית.

- **פתרון**: אנחנו כבר יודעים שקיימת חלוקה פרופורציונלית. עכשיו, נניח שהחלוקה אינה יעילה-פארטו. זה אומר שקיים שיפור פארטו. נבצע את השיפור - החלוקה תישאר פרופורציונלית כי אף אחד לא הפסיד. נמשיך לבצע שיפורי-פארטו עוד ועוד; כל שיפור מגדיל את סכום הערכים, ולכן מתישהו ייגמרו השיפורים ונקבל חלוקה יעילה-פארטו.

- ועכשיו חידה לקוראים בבית: לפי שאלה 2, לא תמיד קיימת חלוקה קשירה שהיא גם יעילה-פארטו וגם **ללא-קנאה**. איך זה מסתדר עם ההוכחה למעלה - מדוע ההוכחה לא עובדת?

שאלה 4: חלוקה אמיתית והוגנת של עוגה המחולקת לאיזורים

נתונה עוגה המחולקת ל-k איזורים אחידים וידועים. יש n שחקנים. לכל שחקן יש ערך שונה לכל אחד מהאיזורים. התפלגות הערך של השחקן היא אחידה בכל איזור.

א. תארו אלגוריתם **אמיתי** המשיג חלוקה **פרופורציונליות וללא קנאה** של העוגה בין השחקנים.

- **פתרון**: פשוט מחלקים כל איזור ל-*n* חלקים ונותנים חלק אחד לכל שחקן. האלגוריתם אמיתי כי הוא בכלל לא מתחשב בערכים של השחקנים - לא משנה מה תגידו, תקבלו 1 חלקי *n* מכל איזור.

ב. איך זה מסתדר עם משפט האי-האפשרות שנזכר בהרצאה לגבי פונקציות-ערך לא בינאריות?

- **פתרון**: משפט האי-אפשרות דיבר על חלוקה שהיא גם יעילה-פארטו (בנוסף לכל שאר התכונות). החלוקה שתיארנו למעלה אינה יעילה-פארטו.

שאלה 5: השמת חדרים אמיתית ויעילה

נתונים n דיירים ו-n חדרים. לכל דייר יש ערך שונה לכל חדר; סכום הערכים של כל דייר שווה למחיר הדירה כולה (נניח 100). אנחנו רוצים לגרום לכל דייר להגיד לנו מהו הערך האמיתי שלו לכל חדר, ולשים כל דייר בחדר אחד, כך שסכום הערכים של הדיירים לחדרים שלהם יהיה מקסימלי. להזכירכם, בהרצאות הקודמות למדנו שני מנגנונים אמיתיים כלליים: מיירסון ו-VCG.

א. מדוע אי-אפשר להשתמש במנגנון של מיירסון בבעיה זו?

ב. הראו דוגמה להפעלה של מנגנון וק"ג על דירה בת 3 חדרים ו-3 דיירים. באיזה קושי מעשי ניתקל אם ננסה ליישם את תוצאות המנגנון במציאות?

- **פתרון**: ראו בפתרון של קוסטיה ויוגב: מנגנון מיירסון לא מתאים כי הוא עובד רק עם שחקנים חד-פרמטריים ואצלנו לכל שחקן יש כמה פרמטרים. הבעיה במנגנון וק"ג היא שסכום התשלומים של הדיירים קטן משכר-הדירה הכולל.

- **הערה**: לכאורה יכלנו להריץ את מנגנון מיירסון או וק"ג על כל חדר בנפרד, כלומר לעשות מכרז-מחיר-שני על כל חדר בנפרד. אבל אז היתה בעיה אחרת - ייתכן שאדם אחד היה זוכה בשני חדרים או יותר.

שאלה 6: תיכנות אלגוריתם

רוצים לחלק n חדרים ל-n דיירים. בשאלה זו נניח שאין כסף - כל החדרים בחינם. כל דייר מיוצג ע"י המחלקה הבאה (...) כיתבו בשפה לבחירתכם אלגוריתם המקבל כקלט n שחקנים, בודק אם קיימת השמת חדרים ללא קנאה, ואם כן - מציג את ההשמה.

- **פתרון**: ראו בפתרון של אוריאל ויואב.

- שימו לב! שאר הפתרונות הניחו שלכל דייר יש רק חדר אחד עם ערך מקסימלי. במקרה זה הבעיה קלה יחסית - קיימת חלוקה ללא קנאה אם-ורק-אם החדר המקסימלי של כל דייר הוא שונה.
אבל, ייתכן שלחלק מהדיירים יש כמה חדרים עם ערך מקסימלי. היה לכך רמז בשאלה - היה רמז שצריך להשתמש באלגוריתם מוכר מתורת הגרפים. האלגוריתם הוא מציאת שידוך מושלם בגרף.
קיימת חלוקה ללא קנאה אם-ורק-אם קיים שידוך מושלם בגרף שבו כל דייר מקושר לכל החדרים עם הערך המקסימלי עבורו.