חלוקה הוגנת ויעילה
Efficient Fair Division

אראל סגל-הלוי

יעילות - "חתוך ובחר"

משפט: אלגוריתם "חתוך ובחר" מחזיר תוצאה יעילה פארטו אם מתקיימים התנאים הבאים:

1) שני השחקנים רוצים רק חתיכות קשירות.
2) לכל נקודה בעוגה יש ערך חיובי ממש.
3) החותך אמיתי, או מתחכם "חכם".

הוכחה:

לפי תנאי 1, יש רק שתי אפשרויות: או שהחותך משמאל והבוחר מימין, או הפוך.

לפי תנאי 2, בסדר שנבחר, אין שיפור פארטו.

לפי תנאי 3, גם בסדר ההפוך אין שיפור פארטו.

***

יעילות – המקרה הכללי

.... אבל מה קורה אם:

1) השחקנים רוצים חתיכות לא דווקא קשירות?
2) יש הרבה שחקנים – יותר משניים?
3) אנחנו רוצים שהחלוקה תהיה גם ללא קנאה?

הנחות:

- ה"עוגה" מחולקת לאיזורים. הערך של כל שחקן אחיד בכל איזור *(אבל שונה לכל שחקן)*.
- אין כסף - השחקנים רוצים רק עוגה.

יעילות – מיקסום סכום הערכים

ניסיון ראשון: נמצא חלוקה הממקסמת את סכום הערכים. *הרעיון: כל חלוקה כזאת יעילה פארטו.*

$$\max \sum_{j=1}^{n} V_j(X_j)$$

אלגוריתם: תן כל אזור לשחקן עם הערך הכי גבוה:

א:	0	**19**	**81**
ב:	**20**	0	80

יעיל פארטו אבל לא הוגן.

יעילות – מיקסום סכום אחר

ניסיון שני: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של פונקציה עולה של הערכים. *היא עדיין יעילה פארטו.*

$$\max \sum_{j=1}^{n} f(V_j(X_j))$$

דוגמה: שחקן א מקבל x אחוזים מהאזור השמאלי:

א:	0	**19**	**81**
ב:	**20**	0	80

איזו פונקציה נבחר?

$$\begin{array}{ll} \max & f(81x+19)+f(80(1-x)+20) \\ \text{s.t.} & 0 \le x \le 1 \end{array}$$

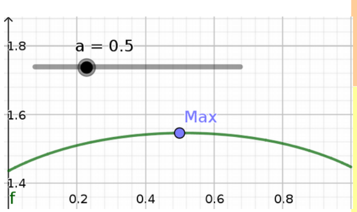
יעילות – מיקסום סכום קעור

ניסיון שלישי: נמצא חלוקה הממקסמת את הסכום של פונקציה עולה **וקעורה** של הערכים. *דוגמה:*

$$\max \sum_{j=1}^{n} \sqrt{V_j(X_j)}$$

הרעיון: לתת יותר למי שיש לו פחות.

דוגמה: שחקן א מקבל x אחוזים מהאזור השמאלי:



א:	0	**19**	**81**
ב:	**20**	0	80

המקסימום ב: x~0.5

– במקרה הזה הוגן!

$$\begin{aligned} \max \quad & \sqrt{81x+19} + \sqrt{80(1-x)+20} \\ \text{s.t.} \quad & 0 \le x \le 1 \end{aligned}$$

יעילות – מיקסום סכום קעור

משפט (חשבון אינפי 6): לכל פונקציה קעורה יש נקודת מקסימום אחת ויחידה בכל תחום קמור.

מסקנה: מקסימום **מקומי** של הפונקציה הוא גם מקסימום **גלובלי**.

מסקנה מעשית: קיימים אלגוריתמים מהירים למציאת נקודת מקסימום *(דוגמה: טיפוס על גבעה)*.

ראו בקורס חקר ביצועים או בתוכנות מתימטיות, למשל Mathematica:

```
In[9]:= FindMaximum[{
(81 x + 19)^0.5 + (80 (1 - x) + 20)^0.5,
0 <= x <= 1}, {x}]
Out[9]= {15.4601, {x -> 0.512327}}
```

יעילות – מיקסום סכום קעור

עכשיו כשאנחנו יודעים שקיימים אלגוריתמים מהירים לחישוב מקסימום של סכום קעור של הערכים,
השאלה הנשארת היא – **איזו פונקציה f לבחור**?

מתברר שאם הפונקציה f היא לוגריתמית:

$$f(V) = \log(V)$$

אז החלוקה לא רק יעילה אלא גם ללא קנאה!

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: נסתכל בפרוסת עוגה אינפיניטיסימלית, Z.

התרומה שלה לשחקן j היא: *(חשבון אינפי 1)*

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z)$$

לכן, אלגוריתם האופטימיזציה ייתן כל פרוסה Z לשחקן j שהמכפלה הזאת עבורו גדולה ביותר:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(Z) >= f'(V_i(X_i)) * V_i(Z)$$

נסכם את המשוואה על כל הפרוסות שניתנו ל-j:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) >= f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

יעילות – מיקסום סכום לוגים

משפט: כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.

הוכחה [המשך]:

לכל חלוקה הממקסמת את הסכום של $f(V)$:

$$f'(V_j(X_j)) * V_j(X_j) >= f'(V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

כאשר f היא פונקציה לוגריתמית, מקבלים:

$$(1 / V_j(X_j)) * V_j(X_j) >= (1 / V_i(X_i)) * V_i(X_j)$$

מעבירים אגף ומקבלים, לכל שני שחקנים j,i:

$$\boldsymbol{V_i(X_i) >= V_i(X_j)}$$

וזו בדיוק ההגדרה של חלוקה ללא קנאה! ***

חלוקה ללא קנאה - סיכום

קשיר > **יעיל פארטו V**	**לא**	**כן**
לא	עזיז-מקנזי: זמן היפר-אקספוננציאלי במספר השחקנים.	סימונס-סו: זמן אקספוננציאלי ברמת הדיוק של הקירוב.
כן	אופטימיזציה קמורה: זמן פולינומיאלי במספר השחקנים *והאיזורים*.	*לא קיים.*