מכרזים למיקסום רווח
Revenue Maximizing Auctions

אראל סגל-הלוי

מקורות:
הקורס של טים, הרצאה 5 והלאה:
http://theory.stanford.edu/~tim/f13/f13.html

מיקסום רווח לעומת מיקסום סכום ערכים

נניח שאנחנו מוכרים חפץ אחד ויש קונה אחד.

איזה מכרז ממקסם את סכום הערכים?
- זה קל – נותנים לו את החפץ בחינם.

איזה מכרז ממקסם את הרווח של המוכרים?
- זה קשה – תלוי בערך של השחקן!

במקום למקסם רווח – ננסה למקסם **תוחלת** רווח.
- זה דורש מידע סטטיסטי על ערכים של שחקנים.

מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

דוגמה: נניח שאספנו נתונים סטטיסטיים על ערכי קונים, והגענו למסקנה שהם מתפלגים כ:

Uniform[10,30]

לפי משפט מיירסון, כל מכרז אמיתי חייב להיות מסוג "מחיר קבוע מראש" (posted price): קובעים מחיר כלשהו p, והקונה מחליט אם לקנות או לא.

איזה מחיר ממקסם את תוחלת הרווח?

$$E[\mathrm{Revenue}(p)] = p * \mathrm{Prob}[v > p]$$

$$= p * (30-p)/(30-10)$$

$$\textit{derivative by } p = (30-2p)/20 \rightarrow \boldsymbol{p_{opt} = 15}$$

מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

הכללה: נניח שאספנו נתונים סטטיסטיים על ערכי קונים, והגענו למסקנה שהם מתפלגים כ:

$$\mathrm{Prob}[v<p] = \mathrm{F}(p)$$

איזה מחיר ממקסם את תוחלת הרווח?

$$\mathrm{E}[\mathrm{Revenue}(p)] = p \cdot \mathrm{Prob}[v > p] = p \cdot [1 - F(p)]$$

$$'p = 0 \iff p - \frac{1-F(p)}{F'(p)} = 0$$

נגדיר את **פונקציית הערך הוירטואלי**:

$$r(v) := v - \frac{1 - F(v)}{F'(v)}$$

המכרז האופטימלי הוא: **מכור אם"ם** $\boldsymbol{r(v)>0}$.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון - כללי

נתונה: *סביבה חד-פרמטרית*:

- לכל משתתף יש ערך כספי **יחיד** ל"היבחרות".
- הערך של משתתף j לקוח מהתפלגות F_j.
  - *(למה התפלגות שונה לכל משתתף? למשל מאפיינים דמוגרפיים).*

דרושים:

- כלל-בחירה לבחירת תת-קבוצה של משתתפים.
- כלל-תשלומים שאיתו כלל-הבחירה אמיתי.

כזכור, לפי משפט מיירסון, ברגע שיש **כלל-בחירה** – יש **כלל-תשלומים** יחיד שאיתו הכלל אמיתי.

נחפש כלל-בחירה שממקסם את תוחלת הרווח.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון - כללי

לכל כלל-תשלומים p, תוחלת הרווח היא:

$$E[\text{Revenue}(v_1,\ldots,v_n)] \quad = E[\textstyle\sum_{j=1}^{n} p_j(v_1,\ldots,v_n)]$$

לפי משפט מיירסון, כלל-התשלומים הוא פונקציה של כלל-הבחירה c. אם מציבים, מקבלים:

$$E[\text{Revenue}(v_1,\ldots,v_n)] \quad = E[\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j(v_1,\ldots,v_n)\cdot r_j(v_j)]$$

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

--> כדי למקסם רווח, צריך למצוא כלל-בחירה ש**ממקסם את סכום הערכים הוירטואליים**.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F_j'(v)}$$

א. קונה אחד:

תוחלת הרווח = הערך הוירטואלי = $r(v)$.

כלל-הבחירה הוא: מכור אם-ורק-אם $r(v)>0$.

*** *הכלל אמיתי בתנאי ש-r היא פונקציה עולה.*

התשלום הוא ערך-הסף = $r^{-1}(0)$.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F'_j(v)}$$

ב. הרבה קונים מאותה התפלגות F ועם אותו r:

(נניח ש-r פונקציה עולה).

תוחלת הרווח = $r(v_j)$ של המנצח.

כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם v_j הכי גבוה,

בתנאי ש $r(v_j)>0$.

התשלום הוא ערך-הסף: הערך השני בגובהו

או $r^{-1}(0)$ - הגבוה מביניהם.

--- שקול למכרז ויקרי עם מחיר מינימום $r^{-1}(0)$!

מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F'_j(v)}$$

ג. שני קונים עם התפלגויות שונות:

תוחלת הרווח = $r_j(v_j)$ של המנצח.

כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם $r_j(v_j)$ הכי גבוה, בתנאי ש $r_j(v_j)>0$. התשלום = ערך-הסף.

דוגמה: F_2=Unif[20,40], F_1=Unif[10,30].

$r_1(v) = 2v\text{-}30$, $r_2(v) = 2v\text{-}40$.

*אם 1 אמר **23** ו-2 אמר **27**, אז 1 יזכה! וישלם את ערך-הסף שלו שהוא **22**.* *[ערך הסף של 2 הוא **28**]*