



”מטרוניתא שאלה את ר' יוסי בר חלפתא,
אמרה לו: בכמה ימים ברא הקב"ה את עולמו?
אמר לה: לששת ימים...”

אמרה לו: ומאותה שעה עד עכשיו מהו יושב ועושה?
אמר לה: מזווג זיווגים... ואם קלה היא בעינייך, קשה היא לפני
הקדוש ברוך הוא כקריעת ים סוף” (ויקרא רבה ח א).

אלגוריתמי שידוך

אראל סגל-הלוי

שיבוצים ושידוכים

שאלה: מה ההבדל בין הבעיות הבאות:

- א. שיבוץ סטודנטים לחדרים במעונות;
- ב. שידוך סטודנטים למחלקות באוניברסיטה?

תשובה:

- בעיה א חד צדדית – רק לסטודנטים יש העדפות.
- בעיה ב דו צדדית – גם למחלקות יש העדפות.

שוק דו-צדדי

הגדרה: שוק דו-צדדי הוא שוק שבו צריך להתאים בין משתתפים משתי קבוצות, כאשר לכל משתתף מכל אחת מהקבוצות יש העדפות שונות.

שאלה: מה יקרה אם ננסה ליצור שידוך בשוק דו-צדדי, ע"י אלגוריתם "הדיקטטור הסדרתי"?

דוגמה: שני סטודנטים א, ב ושתי מחלקות 1, 2
הסטודנטים מדרגים $2 < 1$, המחלקות מדרגות $א < ב$.
סטודנט ב בוחר ראשון. מה ייצא?

שוק דו-צדדי

דוגמה: שני סטודנטים א, ב ושתי מחלקות 1, 2
הסטודנטים מדרגים $2 < 1$, המחלקות מדרגות $א < ב$.
סטודנט ב בוחר ראשון. השידוך המתקבל:

א – 2

ב – 1

האם השידוך יעיל פארטו?

- כן.

אבל מה יקרה אם מחלקה 1 תפנה לסטודנט א?

- השידוך יתפרק! אנשים לא ישתפו פעולה.

השוק ייפרם (*unravel*).

שידוכים יציבים

הגדרה: זוג מערער:

- סטודנט ומחלקה שאינם משודכים, והם מעדיפים זה את זו על פני ה"שידוכים" הנוכחיים שלהם.

הגדרה: שידוך יציב:

- שידוך בלי זוגות מערערים.

השקפים הבאים מבוססים על מצגת של פרופ' סרג'יו הרט בהרצאת "מדוע" בעיצובה של עינב הרט. לינק להרצאה <http://community-youth.huji.ac.il/program1.asp?id=116&cat=117>

שידוכים יציבים

הגדרת הבעיה:

- סטודנטים ומחלקות במספר שווה.
- בכל מחלקה יש מקום לסטודנט אחד.
- כל סטודנט לומד במחלקה אחת.
- לכל מחלקה יש סדר העדפות על הסטודנטים.
- לכל סטודנט יש סדר העדפות על המחלקות.
- האם תמיד קיים שידוך יציב?

ראשי המחלקות

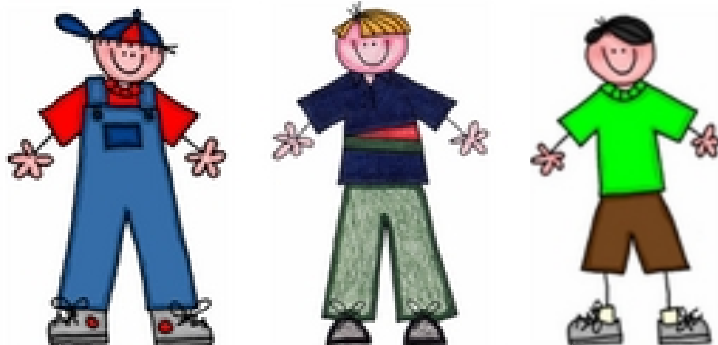


אביבה

בתיה

גליה

הסטודנטים



תומר

שלמה

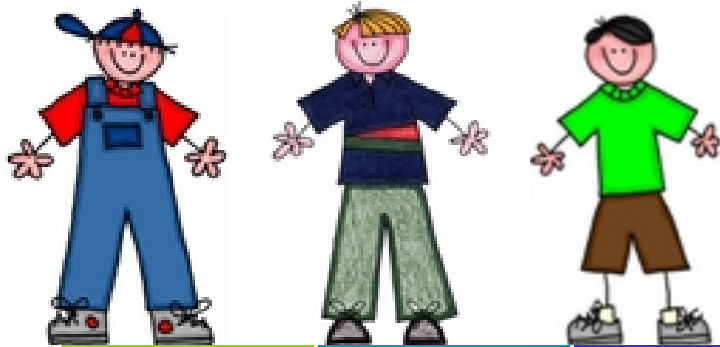
רפי

העדפות המחלקות



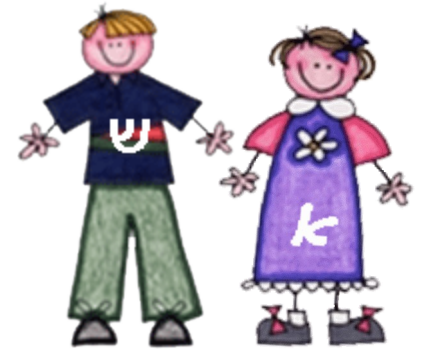
| | גליה | בתיה | אביבה |
|---|------|------|-------|
| 1 | שלמה | שלמה | רפי |
| 2 | תומר | רפי | שלמה |
| 3 | רפי | תומר | תומר |

העדפות הסטודנטים



| | רפי | שלמה | תומר |
|---|-------|-------|-------|
| 1 | אביבה | אביבה | בתיה |
| 2 | גליה | בתיה | גליה |
| 3 | בתיה | גליה | אביבה |

| | גליה | בתייה | אביבה |
|---|------|-------|-------|
| 1 | שלמה | שלמה | רפי |
| 2 | תומר | רפי | שלמה |
| 3 | רפי | תומר | תומר |



| | רפי | שלמה | תומר |
|---|-------|-------|-------|
| 1 | אביבה | אביבה | בתייה |
| 2 | גליה | בתייה | גליה |
| 3 | בתייה | גליה | אביבה |



שידוכים יציבים

האם תמיד קיים שידוך יציב?

- כן, ויש אלגוריתם יעיל שמוצא אחד כזה!

- אלגוריתם הקבלה על-תנאי

deferred acceptance

- פותח ע"י Gale & Shapley (1962)

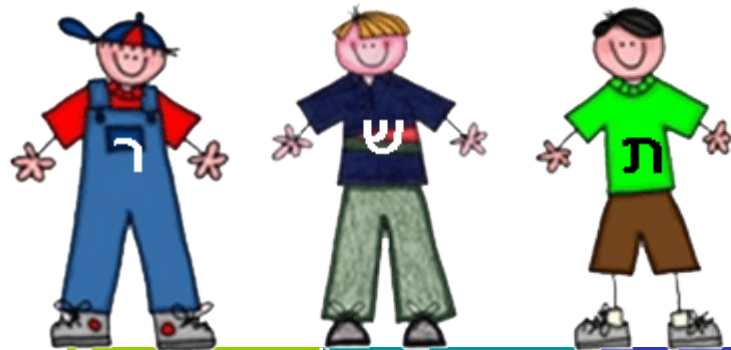
- זכה בפרס נובל בשנת 2012

אלגוריתם "קבלה על-תנאי"

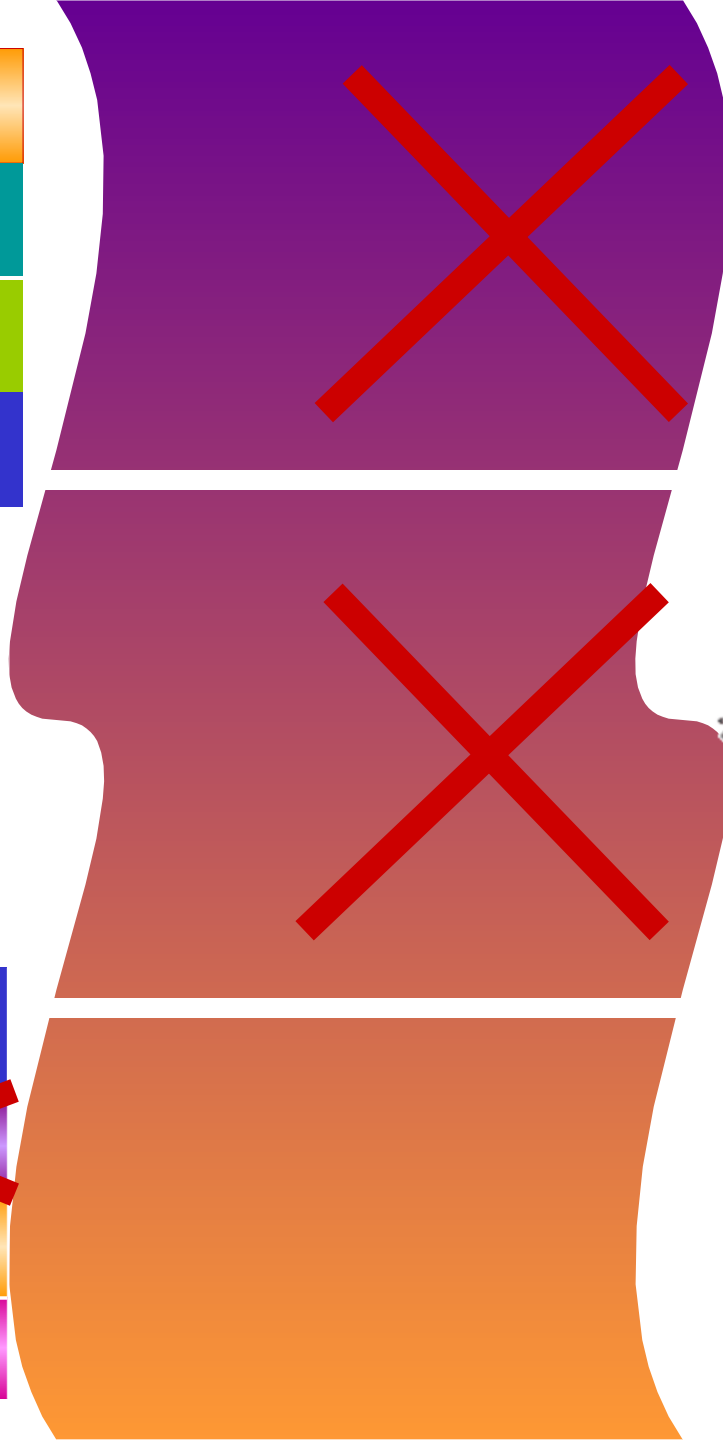
deferred acceptance

- א. כל סטודנט הולך למחלקה שהוא הכי רוצה, מבין המחלקות שעדיין לא דחו אותו.
- ב. כל מחלקה "מקבלת על תנאי" את הסטודנט שהיא הכי רוצה, מבין אלה שנמצאים בה, ודוחה את כל השאר.
- ג. חוזרים על שלבים א ו-ב עד שכולם משודכים.

| | גליה | בתיא | אביבה |
|---|------|------|-------|
| 1 | שלמה | שלמה | רפי |
| 2 | תומר | רפי | שלמה |
| 3 | רפי | תומר | תומר |



| | רפי | שלמה | תומר |
|---|-------|-------|-------|
| 1 | אביבה | אביבה | בתיא |
| 2 | גליה | בתיא | גליה |
| 3 | בתיא | גליה | אביבה |







| | גליה | בתייה | אביבה |
|---|------|-------|-------|
| 1 | שלמה | שלמה | רפי |
| 2 | תומר | רפי | שלמה |
| 3 | רפי | תומר | תומר |



| | רפי | שלמה | תומר |
|---|-------|-------|-------|
| 1 | אביבה | אביבה | בתייה |
| 2 | גליה | בתייה | גליה |
| 3 | בתייה | גליה | אביבה |



משפט: האלגוריתם מסתיים בשידוך יציב

מסתיים: כי כל סטודנט מציע לכל מחלקה פעם אחת לכל היותר.

בשידוך: נניח שיש מחלקה לא-משודכת. אז אף סטודנט לא הגיע אליה. כיוון שמספר הסטודנטים והמחלקות שווה, יש גם סטודנט לא משודך. הוא עובר על כל הרשימה שלו מלמעלה למטה, לכן בהכרח הוא יגיע מתישהו למחלקה הלא-משודכת וישתדך איתה. כלומר האלגוריתם עוד לא הסתיים.

יציב: מצבה של כל מחלקה הולך ומשתפר.

לעומת זאת, כל סטודנט הולך ומתפשר.

מכאן, אם זוג מסויים (ס,מ) לא נוצר אז יש שתי אפשרויות:

א. ס עוד לא היה ב-מ: מכאן ש-ס נמצא במחלקה טובה יותר.

ב. ס כבר היה ב-מ: מכאן של-מ יש סטודנט טוב יותר. ***

מי מציע ומי מקבל?

באלגוריתם שהצגנו למעלה, הסטודנטים מציעים למחלקות, והמחלקות מחליטות את מי לקבל.

יכולנו גם לנהל את האלגוריתם בסדר הפוך: המחלקות מציעות לסטודנטים, והסטודנטים מחליטים את מי לקבל. האם לדעתכם יש הבדל בין שתי הגישות? כסטודנטים, איזה אלגוריתם תעדיפו? כמנהלי מחלקות, איזה אלגוריתם תעדיפו?

מי מציע ומי מקבל?

דוגמה:

| | אביבה | בתיה | גילה |
|---|-------|------|------|
| 1 | רפי | שלמה | שלמה |
| 2 | שלמה | רפי | רפי |
| 3 | תומר | תומר | תומר |

• אם הסטודנטים מציעים –

השידוך הוא:

ר-ב, ש-א, ת-ג

• אם המחלקות מציעות,

השידוך הוא:

ר-א, ש-ב, ת-ג

| | תומר | שלמה | רפי |
|---|-------|-------|-------|
| 1 | בתיה | אביבה | בתיה |
| 2 | אביבה | בתיה | אביבה |
| 3 | גילה | גילה | גילה |

• מה עדיף לסטודנטים?

מה עדיף למחלקות?

מי מציע ומי מקבל?

משפט: כשהסטודנטים הם המציעים – השידוך המתקבל הוא הטוב ביותר לכל הסטודנטים מכל השידוכים היציבים.

הוכחה: מספיק להוכיח ש: אם הזוג (ס,מ) קיים בשידוך יציב כלשהו, אז מחלקה מ לא דוחה את סטודנט ס.

נניח בשלילה שזה לא נכון. נסתכל על הפעם הראשונה שזה קורה. מ דוחה את ס כיוון שהיא קיבלה הצעה

מסטודנט טוב יותר עבורה, נניח ע. בשידוך היציב האחר, ע משודך למחלקה טובה יותר עבורו, נניח נ. זה אומר שמחלקה נ דחתה את ע קודם – סתירה. ***

האם "קבלה על תנאי" אמיתי?

| | גילה | בתיא | אביבה |
|---|------|------|-------|
| 1 | שלמה | שלמה | רפי |
| 2 | רפי | רפי | שלמה |
| 3 | תומר | תומר | תומר |

| | רפי | שלמה | תומר |
|---|-------|-------|-------|
| 1 | בתיא | אביבה | בתיא |
| 2 | אביבה | בתיא | אביבה |
| 3 | גילה | גילה | גילה |

משפט: מנגנון "קבלה על תנאי"
שבו הסטודנטים מציעים הוא
לא אמיתי עבור המחלקות.

ההוכחה בדוגמה:

- אם הסטודנטים מציעים –

השידוך הוא:

ר-ב, ש-א, ת-ג

- מה יכולה בתיא לעשות כדי
לזכות בשלמה?

- תשובה: להגיד שהסדר שלה
הוא: ש<ת<א.

- מסקנה: המנגנון לא אמיתי עבור
המחלקות.

האם "קבלה על תנאי" אמיתית?

משפט: מנגנון "קבלה על תנאי" שבו הסטודנטים מציעים הוא אמיתי עבור הסטודנטים.

הוכחה חלקית. נוכיח שלא כדאי לסטודנט "להתפשר" - למחוק מהדירוג שלו מחלקה שדחתה אותו, כדי להגיע יותר מהר

למחלקה אחרת שדחתה אותו. נבדוק שני קלטים לאלגוריתם:

- קלט א – כולם אמיתיים. מתקבל שידוך יציב א, עם הזוג (ס,מ).
 - קלט ב – כמו א, רק ש-ס מחק מהדירוג כמה מחלקות מעל מ. שידוך ב הוא יציב גם לפי קלט א. הוכחה: נב"ש זוג מערער (ע,נ):
 - אם ע <> ס, אז (ע,נ) מערער גם לפי קלט ב – סתירה ליציבות ב.
 - אם ע=ס וגם ס מעדיף-חלש את מ על נ – כנ"ל.
 - אם ע=ס וגם ס מעדיף-חזק את נ על מ, אז (ע,נ) מערער גם לפי קלט א – סתירה ליציבות א.
- אבל שידוך א הוא היציב הטוב ביותר לסטודנטים! אז ס לא הרויח.

מנגנון שידוך יציב אמיתי?

מנגנון קבלה על תנאי:

- כשהסטודנטים מציעים – אמיתי לסטודנטים אך לא למחלקות.
 - כשהמחלקות מציעות – אמיתי למחלקות אך לא לסטודנטים.
- משפט. לא קיים מנגנון לשידוך יציב שהוא אמיתי לשני הצדדים!
הוכחה. נניח שההעדפות הן:

| | אביבה | בתיה | גילה |
|---|-------|------|------|
| 1 | רפי | שלמה | שלמה |
| 2 | שלמה | רפי | רפי |
| 3 | תומר | תומר | תומר |

| | תומר | שלמה | רפי |
|---|-------|-------|-------|
| 1 | בתיה | אביבה | בתיה |
| 2 | אביבה | בתיה | אביבה |
| 3 | גילה | גילה | גילה |

בכל שידוך יציב, גילה ותומר משודכים. לכן יש 2 שידוכים יציבים.

- אם המנגנון בוחר ר-ב ש-א, אז אביבה יכולה להרויח מ: ר<ת<ש.
- אם המנגנון בוחר ר-א ש-ב, אז רפי יכול להרויח מ: ב<ג<א.

שידוכים יציבים בישראל

<http://www.psychologymatch.org/students/FAQ.aspx>