

## מטלה 5 - מיקסום רווח - פתרונות

### שאלה 1: מכרז הפוך

במכרז הפוך, יש כמה חברות שמוכנות לייצר חפץ מסויים. אנחנו רוצים לקנות את החפץ מאחת החברות, ולשלם עליו כמה שפחות. נניח שעלות-הייצור של כל חברה מתפלגת לפי פונקציה  $F$  (התפלגות זהה עבור כל החברות). תארו מנגנון אמיתי למכירת החפץ בעלות קטנה ככל האפשר.

שימו לב: כדי שהשאלה תהיה הגיונית, צריך להוסיף לה נתון מסויים. מהו?

**פתרון:** צריך להוסיף נתון, והוא הערך של המוצר עבורנו. נניח שהערך הזה הוא  $V$ . אם אנחנו לא קונים - הערך שלנו הוא 0. אם אנחנו קונים - הערך שלנו הוא  $V$  ועוד התשלום שאנחנו מקבלים (במקרה הזה אנחנו נקבל תשלום שלילי). לפי משפט מיירסון, תוחלת התשלום שאנחנו מקבלים שווה לסכום הערכים של המוכרים (במקרה הזה הערכים הם שליליים; ערך = מינוס עלות). כיוון שאנחנו קונים רק חפץ אחד, הכי טוב לקנות מהמוכר עם הערך הגבוה ביותר (= העלות הנמוכה ביותר). כלומר צריך לבחור בין:

- לא לקנות - סכום הערכים הוירטואליים הוא 0.
- לקנות מהמוכר עם העלות הכי נמוכה - סכום הערכים הוירטואליים הוא  $V + r(-c)$  כאשר  $c$  הוא העלות הנמוכה ביותר ו- $r$  הוא פונקציית הערך הוירטואלי:

$$r(-c) = -c - (1-F(-c))/F'(-c)$$

כדי למקסם את התועלת שלנו, נבחר לקנות מהמוכר עם העלות הנמוכה ביותר, בתנאי שהעלות מספיק נמוכה כך ש:

$$V + r(-c) > 0$$

### שאלה 2: מיקסום רווח עם ברירת-מחדל

מצאתם ברחוב ציור עתיק. בחנות יד שניה הציעו לכם עבורו  $X$  ש"ח. אתם רוצים להשיג סכום גבוה יותר ע"י מכירה לאספן עתיקות ידוע, שהערך שלו לציור מתפלג לפי פונקציה  $F$ .

תארו מנגנון אמיתי הממקסם את הרווח שלכם ממכירת הציור. שימו לב - המנגנון תלוי ב- $F$  וגם ב- $X$ .

**פתרון:** קודם-כל נחשב את פונקציית הערך הוירטואלי של האספן:

$$r(v) = v - (1-F(v))/F'(v)$$

אם אנחנו מוכרים לאספן - תוחלת הרווח שלנו היא התוחלת של  $r(v)$ . אם אנחנו מוכרים לחנות - תוחלת הרווח שלנו הוא  $X$ . לכן, צריך למכור לאספן אם-ורק-אם  $r(v) > X$  גדול מ- $X$ . המחיר שישלם האספן הוא מחיר הסף - הערך שבו  $r(v) = X$ .

לדוגמה, אם ההתפלגות של האספן היא אחידה בין 10 ל-30, אז  $r(v) = 2v - 30$ . נניח שהמחיר של החנות הוא 10. אז לפי הנוסחה, מחיר הסף של האספן יהיה 20. תוחלת הרווח שלנו תהיה: בהסתברות 0.5 - האספן קונה ומשלם 20, בהסתברות 0.5 - האספן לא קונה ומוכרים לחנות ב-10. סה"כ תוחלת הרווח 15.

### שאלה 3: ערך וירטואלי בהתפלגות אחידה

נניח שהערך של קונה מסויים מתפלג אחיד בין  $a$  ל-  $b$  (שני פרמטרים חיוביים).

א. כיתבו ביטוי לפונקציית הערך הוירטואלי של הקונה,  $r(v)$ , כפונקציה של  $a, b$ .

\* **פתרון:** ראו בפתרון של רז ואורן.

ב. כיתבו ביטוי למחיר האופטימלי למכירת חפץ כלשהו לקונה זה,  $r^{-1}(0)$ .

\* **פתרון:** ראו בפתרון של רז ואורן.

ג. כיתבו ביטוי לתוחלת הרווח של המוכר כאשר הוא משתמש במחיר האופטימלי.

**פתרון:** המחיר שחושב בסעיף ב הוא  $b/2$ . מכאן, ההסתברות שהקונה ירצה לקנות את החפץ היא

$$(b-b/2) / (b-a) = b/(2b-2a)$$

בהסתברות זו, המוכר מרוויח את המחיר  $b/2$ . אחרת, המוכר מרוויח 0. לכן תוחלת הרווח היא:

$$(b/2) * b/(2b-2a) = b^2 / (4b-4a)$$

### שאלה 4: ערך וירטואלי בהתפלגות בדידה

שאלו 1150 אנשים כמה הם מוכנים לשלם על עץ סמבוק מבית-לחם הגלילית. התקבלו התשובות הבאות: 50 אמרו "1". 100 אמרו "2". 850 אמרו "3". 100 אמרו "4". 50 אמרו "5".

הניחו שהתשובות כנות ושהמדגם מייצג את כלל האוכלוסיה בישראל.

א. כיתבו ביטוי לפונקציית הערך הוירטואלי של קונים בישראל.

ב. תארו מכרז ממוקסם-רווח למכירת עץ סמבוק לקונה מישראל.

ג. מה תוחלת הרווח של המכרז שלכם כשיש קונה אחד? שני קונים?

• **פתרון:** ראו בפתרון של אלכסיי.

### שאלה 5: השוואת רווח בין מכרזים

נתונים  $n$  קונים שהערך שלהם מתפלג אחיד בין 0 ל-100.

א. במכרז ויקרי בלי מחיר מינימום, מה תוחלת הרווח של המוכר?

ב. במכרז ויקרי עם מחיר המינימום האופטימלי, מה תוחלת הרווח של המוכר?

• [ירד במיקוד... זורש חישובי-הסתברות מורכבים על  $n$  קונים - אנחנו חישבנו רק על קונה אחד או שניים].

### שאלה 6: כמה מועיל פילוח שוק? (שאלה של קוסטיה)

נתונים שני קונים: הערך של אחד מהם מתפלג אחיד בין 0 ל-20. של השני מתפלג אחיד בין 20 ל-40.

א. מה תוחלת הרווח של מוכר כאשר הוא משתמש במכרז האופטימלי?

**פתרון:** הערך הוירטואלי של הקונה הראשון הוא  $2v_1 - 20$  ושל השני  $2v_2 - 40$ . המכרז האופטימלי צריך לבחור את הקונה עם הערך הוירטואלי הגבוה ביותר, בתנאי שהערך הוירטואלי הזה גדול מאפס. במקרה זה, הערך הוירטואלי של הקונה השני תמיד גדול מאפס, ולכן יש רק שתי אפשרויות:

- אם  $v_2 > v_1 + 10$  אז הקונה השני זוכה ומשלם את מחיר הסף שלו -  $v_1 + 10$  או 20 - הגבוה מביניהם.

- אחרת הקונה הראשון זוכה ומשלם את מחיר הסף שלו -  $v_2 - 10$  (הוא תמיד גבוה יותר מ-10).

נחשב את תוחלת הרווח:

- עבור כל ערך של  $v_1$ , אם  $v_2$  נמצא בין 20 ל- $v_1 + 10$ , אז הרווח הוא המקסימום בין  $v_2 - 10$  ל-10. אם  $v_2$  נמצא בין  $v_1 + 10$  ל-40, אז הרווח הוא המקסימום בין  $v_2 - 10$  ל-20. לכן תוחלת הרווח היא האינטגרל הבא על  $v_2$ , שניתן לחשב בעזרת מתמטיקה:

- $$\text{Integrate}[(1/20) \text{Max}[(v_2 - 10), 10], \{v_2, 20, v_1 + 10\}] + \text{Integrate}[(1/20) \text{Max}[(v_1 + 10), 20], \{v_2, v_1 + 10, 40\}]$$

- כדי לחשב את תוחלת הרווח הכללית, צריך לעשות אינטגרל של הביטוי למעלה על  $v_1$ :

- $$\text{Integrate}[(1/20) \text{Out}[11], \{v_1, 0, 20\}]$$

- התוצאה המתקבלת היא  $22.0833 = 265/12$ .

ב. מה תוחלת הרווח של מוכר כאשר הוא מתעלם מפילוח-השוק ומתייחס לשני הקונים כאילו שהם באים מהתפלגות אחידה בין 0 ל-40?

**פתרון:** במקרה זה המכרז האופטימלי הוא מכרז ויקרי עם מחיר-סף 20. הקונה הראשון תמיד מתחת לסף והשני תמיד מעל לסף, כך שהקונה השני תמיד יזכה וישלם 20, והרווח שלנו יהיה 20.

**מסקנה:** פילוח השוק מגדיל את תוחלת הרווח, במקרה זה, ביותר מ-10%.