

נוסחאות אלגוריתמים-2מ

שיבוץ מעונות:

- עוברים על הסטודנטים לפי התור.
- נותנים לכל סטודנט את העדיפות הכי גבוהה הפנויה.
- אם כל העדיפויות תפוסות – נותנים לסטודנט חדר באקראי.

משפט: האלגוריתם "שיבוץ שלוש עדיפויות" לא אמיתי **הוכחה:** ניקח לדוגמה סטודנט ששלוש העדיפויות הראשונות שלו הן 101, 102, 103 נניח לצורך הדוגמה שבכל בניין יש 100 חדרים, והסטודנט נמצא במקום 301 בתור. אם הסטודנט יודע ש-300 הראשונים בתור רוצים את הבניינים האלה, כדאי לו לומר שהוא רוצה בעדיפות ראשונה את העדיפות הרביעית שלו – זה טוב יותר מלקבל חדר באקראי. מש"ל.

אלגוריתם "דיקטטורה סדרתית": הוא אמיתי. הוכחה: נניח שמקומך בתור הוא k. עד שמגיע תורך, k-1 חדרים כבר תפוסים, וקבוצת החדרים הנשארים לא תלויה בדיווח שלך. המנגנון בוחר עבורך, מתוך החדרים הנשארים, את החדר הטוב ביותר עבורך – בהתאם לרשימה שדיווחת. לכן, התוצאה הטובה ביותר עבורך תתקבל ע"י דיווח הרשימה האמיתית. מש"ל.

משפט: כשההעדפות של כל הסטודנטים הן חזקות, אלגוריתם "דיקטטורה סדרתית" הוא יעיל פארטו. הוכחה: כיוון שהאלגוריתם אמיתי, ניתן להניח שכל הסטודנטים מדווחים את העדיפויות האמתיות. בהינתן קלט מסוים, נגדיר: שיבוץ א – השיבוץ של המנגנון. שיבוץ ב – שיבוץ אחר כלשהו. נניח בשלילה ששיבוץ ב הוא שיפור פארטו של שיבוץ א. נניח שהסטודנט הראשון הנהנה מהשיפור הוא הסטודנט שמקומו בתור k. בשיבוץ א, סטודנט זה מקבל את החדר הטוב ביותר מבין החדרים שלא נלקחו על-ידי סטודנטים שמקומם קטן מ-k.

k. בשיבוץ ב מצבו טוב יותר, כלומר הוא בהכרח מקבל חדר שבשיבוץ א ניתן לסטודנט שמקומו j כאשר k

אלגוריתם "קבלה על תנאי":) לצורך הפשטות אנחנו מניחים שיש מקום אחד בכל מחלקה)

א. לכל סטודנט הולך למחלקה שהוא הכי רוצה, מבין המחלקות שעדיין לא דחו אותן, ונותן לה הצעה.

ב. כל מחלקה משאירה אצלה את הסטודנט שהיא הכי רוצה, מבין הסטודנטים שנמצאים בה, ודוחה את כל השאר. הסטודנט שנשאר במחלקה התקבל על-תנאי שלא יבוא סטודנט טוב יותר. מכאן שם האלגוריתם

ג. חוזרים על שלבים א ו-ב עד שכולם משודכים.

משפט. אלגוריתם "קבלה על-תנאי" מסתיים בשידוך יציב.

משפט: כשהסטודנטים הם המציעים – אלגוריתם קבלה-על-תנאי הוא אמיתי עבור הסטודנטים. מצד שני, האלגוריתם לא אמיתי עבור המחלקות.

משפט לא קיים מנגנון המוצא שידוך יציב, שהוא אמיתי עבור שני הצדדים.

אלגוריתם מעגלי המסחר:האלגוריתם מחזיק גרף מכון שבו הצמתים הם האנשים והבתים: יש קשת מכל אדם אל הבית שהוא הכי רוצה, ומכל בית אל האדם שהוא שייך אליו מעדכנים את הגרף באופן הבא:

א. מוצאים מעגל מכון (DFS)

ב. מבצעים את ההחלפה במעגל: כל אדם מקבל את הבית שהוא מצביע עליו.

ג. מוחקים מהגרף את הצמתים של האנשים והבתים שהשתתפו בהחלפה.

ד. לכל איש שנשאר בגרף, מעדכנים את הקשת שלו כך שתצביע לבית שהוא הכי רוצה מאלה שנשארו.

ה. חוזרים על סעיפים א-ד עד שהגרף ריק.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מקיים את תכונת ההשתתפות-מרוצון, אמתיות ויעילות פארטו.

משפט: אלגוריתם מעגל המסחר מחזיר תמיד שיבוץ יציב

החלפת כליות: לא ניתן להשתמש במעגלי מסחר כי בהחלפת כליות יכולות לצאת מספר צלעות מכל צומת.

שימוש באלגוריתם הפרחים:

- צבע את כל הקשתות באדום (צבע אדום מסמל שהקשת לא בשידוך ירוק יסמל שהקשת בשידוך).
- מצא מסלול שיפור : מסלול המתחיל ומסתיים בצומת שאינו בשידוך (סמוך רק לקשתות אדומות), והקשתות שבו מתחלפות בצבען: אדום--ירוק--אדום--...--ירוק--אדום.
- הפוך את צבע הקשתות במסלול השיפור: כל אדומה לירוקה וכל ירוקה לאדומה (שימו לב שמספר הקשתות הירוקות גדל ב-1 ומספר הצמתים בשידוך גדל ב-2
- בצע את שלבים ב, ג כל עוד יש מסלול שיפור.

הוכחה: לפי הלמה של ברג שלא נוכיח כאן, שידוך הוא מקסימלי אם-ורק-אם אין בו מסלולי שיפור.

משפט: מנגנון שידוך-גדול-ביותר-עם-עדיפויות הוא אמיתי.

משפט: לא קיים מנגנון יעיל פארטו שהוא אמיתי עבור מרכזים רפואיים! הוכחה: נניח בשלילה שקיים מנגנון כזה. נראה מצב שבו, לכל שידוך-גדול-ביותר שהמנגנון בוחר, קיים מרכז רפואי שיכול להסתייר זוגות ולהרוויח (ראו דוגמה למצב כזה במצגת). מש"ל.

משפט: כשיש שני מרכזים רפואיים, קיים מנגנון שהוא אמיתי עבור המרכזים ומחזיר שידוך בגודל לפחות חצי מהאופטימלי.

רעיון ההוכחה: מחשבים, עבור כל מרכז רפואי, את מספר הקשתות הפנימי הגדול ביותר, מחשבים את השידוך הגדול ביותר מבין כל השידוכים המבטיחים לכל מרכז רפואי את אותו מספר של קשתות פנימיות.מנגנון זה הוא אמיתי, ומשיג שידוך גלובלי שגודלו לפחות חצי מהשידוך הגדול ביותר.

מכרזים:

מכרז מחיר ראשון: לא אמיתי הוכחה אמירת הערך האמיתי "מבטיחה" תועלת 0 אמירת ערך נמוך יותר מאפשרת להשיג תועלת חיובית.

מכרז מחיר שני ויקרי: מקיים השתתפות- מרוצון הוכחה: התשלום ממיד קטן או שווה מהערך, לכן התועלת תמיד גדולה או שווה אפס.

אמיתי- הוכחה נניח שהערך של v והערך המקסימלי של האחרים הוא x . התועלת הגבוהה ביותר שאני יכול לקוות להשיג במכרז היא max(0, v-x) כשאני מכרז v אני אכן מקבל תועלת 0.

יעיל פארטו- הוכחה: תוצאה היא יעילה פארטו אם ורק אם החפץ נמסר למשתתף עם הערך הכי גדול.

מכרז פרסום: יעיל פארטו- אם ההקצאה לא יעילה פארטו, אז קיים לה שיפור פארטו, ובו סכום הערכים גבוה יותר.

מכרז מחיר שני מוכלל GSP: המפרסם שההכרזה שלו היא n בגובהה, זוכה במקום j ומשלם את ההכרזה של המפרסם ה-1+j

משפט: כשיש שני מקומות או יותר, מכרז מחיר שני מוכלל אינו אמיתי. הוכחה: מספיק להביא דוגמה נגדית אחת.

VCG: בחר את התוצאה עם סכום הערכים הגבוה ביותר. עבור כל שחקן:

א. חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים.

ב. חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.

ג. גבה מהשחקן את ההפרש בין שני הסכומים.

משפט: מנגנון VCG הוא אמיתי. הוכחה: השחקן שואף להשיג תועלת גדולה ביותר. לשם כך עליו למקסם את סכום הערכים של כל השחקנים. זה בדיוק מה שעושה המנגנון כשהשחקן אמיתי.

משפט: אם הערך של כל שחקן בכל תוצאה, 0=< אז מנגנון VCG מקיים השתתפות מרוצון הוכחה: התועלת של כל שחקן היא: סכום הערכים הגדול ביותר של כל השחקנים פחות

סכום הערכים הגדול ביותר של שאר השחקנים בלעדיו הסכום הראשון <= הסכום השני.

VCG לעומת VCG: GSP קשה יותר למימוש. פחות ברור למפרסמים. עלול לגרום ירידה זמנית ברווחים.

תכנון מנגנונים אלגוריתמי

מיירסון שלב א'- קביעת כלל-בחירה: כלל-בחירה הוא אלגוריתם שהקלט שלו הוא הערכים של כל אחד מהשחקנים, והפלט שלו הוא קבוצת השחקנים הנבחרים.

שלב ב' קביעת כלל-תשלומים: למה צריך את זה? כי בלי תשלומים, רוב כללי-הבחירה לא יהיו אמתיים - השחקנים לא יגידו לנו מה הערך האמיתי שלהם.

משפט: כדי להפוך כלל-בחירה לאמיתי דרושים שני תנאים: שהם הכרחיים ומספיקים: תנאי א': כלל-הבחירה חייב להיות **מונוטוני**. תנאי ב: התשלום הנגבה מכל שחקן חייב להיות **שווה לערך הסף שלו**.

מקסום רווח- משפט: לכל כלל-בחירה כאשר התשלומים נקבעים לפי ערכי-הסף, תוחלת הרווח שווה לתוחלת סכום הערכים הווירטואליים של הנבחרים.

משפט : כדי למקסם רווח, כלל-הבחירה שלנו צריך להיות בחר את הקבוצה שבה סכום הערכים הווירטואליים הוא הגדול ביותר.

שוק דו צדדי:

VCG: א. מצא את מספר העסקאות היעילות k

ב. חשב מחיר וק"ג למוכרים ומחיר וק"ג אחר לקונים.

מקבלים- רווח מרבי אמתיות אך נכנסים לגרעון תקציבי.

משפט מיירסון וסאטרתייט -לא קיים מנגנון המשיג את כל שלוש התכונות בו זמנית.

מנגנון מקאפא: א. מצא את מספר העסקאות היעילות k.

ב. הפחת 1

ג. חשב מחיר סף לקונים ומחיר סף אחר למוכרים