

## מטלה 8 - חלוקה אמיתית ויעילה; חלוקת חדרים

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה הבאה.

### שאלה 1: חישוב חלוקה הוגנת ויעילה

עמי תמי וצומי רוצים להשתמש במחשב-העל המחלקתי לצורך ביצוע חישובים מורכבים. הערך של עמי הוא:  $1 \times$  כמות הדיסק שהוא מקבל ועוד  $2 \times$  כמות המעבד שהוא מקבל ועוד  $3 \times$  כמות הזיכרון שהוא מקבל. הערכים של תמי ושל צומי נקבעים באופן דומה רק עם מספרים שונים, בהתאם לטבלה הבאה:

עמי	זיכרון	מעבד	דיסק
1	3	2	1
תמי	6	5	4
צומי	9	8	7

כיתבו פקודה בשפת Mathematica (או בשפה אחרת לבחירתכם) המוצאת חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה של משאבי המיחשוב.

### שאלה 2: חלוקה קשירה, יעילה וללא-קנאה

למדנו שתמיד קיימת חלוקה שהיא **ללא-קנאה וקשירה**, וחלוקה שהיא **ללא-קנאה ויעילה**. בשאלה זו נראה שלא תמיד קיימת חלוקה שהיא **ללא-קנאה, קשירה, ויעילה** בו-זמנית.

נתונה עוגה חד-מימדית המחולקת לשבעה איזורים סמוכים. הערכים של עמי, תמי וצומי לכל אחד מהאיזורים נתונים בטבלה למטה. כל אחד מהשחקנים רוצה חתיכה קשירה בלבד.

עמי	2	0	3	0	2	0	0
תמי	0	0	0	0	0	7	0
צומי	0	2	0	2	0	0	3

הוכיחו שלא קיימת חלוקה שהיא גם יעילה-פארטו וגם ללא-קנאה.

### שאלה 3: חלוקה קשירה, יעילה ופרופורציונלית

נניח שיש  $n$  שחקנים וכל אחד מהם רוצה חתיכה קשירה בלבד. הוכיחו שתמיד קיימת חלוקה שהיא גם יעילה-פארטו וגם פרופורציונלית.

### שאלה 4: חלוקה אמיתית והוגנת של עוגה המחולקת לאיזורים

נתונה עוגה המחולקת ל- $k$  איזורים אחידים וידועים. יש  $n$  שחקנים. לכל שחקן יש ערך שונה לכל אחד מהאיזורים. התפלגות הערך של השחקן היא אחידה בכל איזור.

א. תארו אלגוריתם אמיתי המשיג חלוקה **פרופורציונלית וללא קנאה** של העוגה בין השחקנים.

ב. איך זה מסתדר עם משפט האי-האפשרות שנזכר בהרצאה לגבי פונקציות-ערך לא בינאריות?

### שאלה 5: השמת חדרים אמיתית ויעילה

נתונים  $n$  דיירים ו- $n$  חדרים. לכל דייר יש ערך שונה לכל חדר; סכום הערכים של כל דייר שווה למחיר הדירה כולה (נניח 100). אנחנו רוצים לגרום לכל דייר להגיד לנו מהו הערך האמיתי שלו לכל חדר, ולשים כל דייר בחדר אחד, כך שסכום הערכים של הדיירים לחדרים שלהם יהיה מקסימלי.

להזכירכם, בהרצאות הקודמות למדנו שני מנגנונים אמיתיים כלליים: מיירסון ו-VCG.

א. מדוע אי-אפשר להשתמש במנגנון של מיירסון בבעיה זו?

ב. הראו דוגמה להפעלה של מנגנון וק"ג על דירה בת 3 חדרים ו-3 דיירים. באיזה קושי מעשי ניתןקל אם ננסה ליישם את תוצאות המנגנון במציאות?

### שאלה 6: תיכנות אלגוריתם

רוצים לחלק  $n$  חדרים ל- $n$  דיירים. בשאלה זו נניח שאין כסף - כל החדרים בחינם. כל דייר מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
class Agent {  
    double eval(room i);  
    // INPUT: i, a number between 0 and n-1.  
    // OUTPUT: v, the value of the room for the agent.  
}
```

כיתבו בשפה לבחירתכם אלגוריתם המקבל כקלט  $n$  שחקנים, בודק אם קיימת השמת חדרים ללא קנאה, ואם כן - מציג את ההשמה. כותרת הפונקציה:

```
void findEnvyFreeAssignment(Agent[] agents)
```

פלט לדוגמה:

*An envy-free assignment exists: agent 0 receives room 2, agent 1 receives room 1, agent 2 receives room 0.*

פלט אחר לדוגמה:

*An envy-free assignment does not exist.*

אם אתם צריכים להשתמש באלגוריתם מוכר כלשהו על גרפים (שלמדתם בסמסטר שעבר), כיתבו רק את הכותרת של הפונקציה כך שתוכלו להשתמש בה בקוד שלכם; הניחו שגוף הפונקציה כבר ממומש.