

אלגוריתם "המנצח המתוקן" Adjusted Winner Algorithm

אראל סגל-הלוי

חלוקת חפצים בדידים

כשהחפצים לא ניתנים לחלוקה, בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה פרופורציונלית וללא קנאה (דוגמה: בית).

פתרונות מקובלים:

(1) הוספת כסף למערכת.

דוגמה: אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה.

(2) מציאת דרך יצירתית לחלק חפץ אחד.

דוגמה: אלגוריתם "וין-וין" לגישור.

(3) חלוקה ללא-קנאה-בקירוב.

דוגמה: חלוקת תכשיטים ומקומות בקורסים.

חלוקת חפצים בין שני אנשים

נתונים:

- שני שותפים (למשל: דונאלד ואיוואנה).
- m חפצים או נושאים שיש עליהם מחלוקת
- כל שותף מייחס ערך באחוזים לכל נושא.

האתגר – להחליט מי יקבל כל חפץ/נושא כך ש:

- לא תהיה קנאה.
- התוצאה תהיה יעילה פארטו.
- נצטרך לחתוך חפץ אחד לכל היותר.

חלוקת חפצים בין שני אנשים

ניסיון ראשון: אחד מחלק, השני בוחר.

- אין קנאה; חפץ אחד נחתך; אבל לא יעיל פארטו.

דונאלד:	20	30	20	30
איוואנה:	30	10	40	20

ניסיון שני: כל חפץ נמסר למי שהכי רוצה אותו.

- יעיל פארטו, אף חפץ לא נחתך; אבל יש קנאה.

דונאלד:	10	30	30	30
איוואנה:	40	20	18	16

חלוקת חפצים בין שני אנשים

ניסיון שלישי: מיקסום מכפלת הערכים.

- אין קנאה; יעיל פארטן;

אבל לא ברור כמה חפצים נחתכים.
[בנוסף, גם לא פשוט לחישוב].

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

(Adjusted Winner)

Brams and Taylor, 1996

א. כל חפץ נמסר למי שהכי רוצה אותו.

ב. אם סכום הנקודות שווה – סיימנו.

ג. אחרת – מסדרים את החפצים בסדר עולה של היחס מנצח\מפסיד, ומעבירים חפצים עד שהסכום משתווה. צריך לחתוך לכל היותר חפץ אחד*.

30	30*	30	10	דונאלד:
18	20*	28	34	איואנה:

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו.

הוכחה: יהי r יחס-הניקוד של החפץ האחרון

שהועבר מהמנצח/ת למפסיד/ה ($r > 1$). [היחס הגדול ביותר].

נכפיל את הניקוד של המפסיד ב- r . עכשיו בחלוקה הסופית, כל חפץ נמסר למי שנותן לו ניקוד מירבי.

מכאן - החלוקה הסופית ממקסמת סכום:

$$r \cdot v[\text{loser}] + v[\text{winner}]$$

30	30*	30	10	דונאלד:
$r \cdot 18 = 27$	$r \cdot 20 = 30^*$	$r \cdot 28 = 42$	$r \cdot 34 = 51$	איוואנה:

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

משפט: אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה ללא קנאה.

הוכחה: לשני השותפים ניקוד שווה.

אילו הניקוד היה קטן מ-50, הם היו יכולים להתחלף וזה היה שיפור פארטו – סתירה למשפט הקודם. ***

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

שיקולים אסטרטגיים:

- האלגוריתם לא אמיתי (כמו רוב האלגוריתמים לחלוקה הוגנת).
- כל שיווי-משקל נאש טהור הוא ללא קנאה.
- כל שיווי-משקל נאש טהור משיג קירוב $3/4$ למקסימום-סכום-הערכים.
- <http://www.aaai.org/ocs/index.php/IJCAI/IJCAI15/paper/download/11147/10727>

אלגוריתם "המנצח המתוקן"

מקורות:

- Brams and Taylor: Fair Division (1996 book), The Win-Win Solution (1999 book).
- הקורס של ויליאם גסרך - כולל מצגות סטודנטים על יישומים של האלגוריתם במקרים שונים:
<http://www.cs.umd.edu/~gasarch/COURSES/209/S15/>
- האתר של אוניברסיטת ניו-יורק - כולל הדגמה חיה ואפשרות לשלם כדי לקבל הסכם פורמלי:
<http://www.nyu.edu/projects/adjustedwinner/>
- <http://fairoutcomes.com/fd.html>