

מכרזים אמיתיים

Truthful Auctions

אראל סגל-הלוי

מקורות:

הקורס של טים, הרצאות 13-16:

<http://theory.stanford.edu/~tim/f16/f16.html>

ויקיפדיה Auction

מה מוכרים במכרזים?

- שלל מלחמה (רומא, לפני 2000 שנה).
- חפצי אומנות (אנגליה, לפני 350 שנה. גם היום).
- <https://youtu.be/ZyATAodMDrQ>
- משאבים ציבוריים – קרקעות, תדרים...
- עליות לתורה (ישראל, ?).
- כל דבר (eBay, 1995).
- פרסומות (מנועי חיפוש, רשתות חברתיות).

סוגי מכרזים

- **מכרז אנגלי** – המשתתפים מעלים מחיר, האחרון שנשאר זוכה.

- **מכרז יפני** – הכרוז מעלה מחיר, האחרון שנשאר זוכה.

- **מכרז הולנדי** – הכרוז מוריד מחיר, הראשון שמצטרף זוכה.

- **מעטפות חתומות, מחיר ראשון.**

- **מעטפות חתומות, מחיר שני.**

באיזה סוג מכרז כדאי להשתמש?

העדפות המשתתפים

- יש חפץ אחד העומד למכירה במכרז.

- כל משתתף j מייחס לחפץ שווי פרטי v_j . **למה?**

- טעם אישי (חפצי אומנות)

- כישרון בניה (קרקעות)

- יכולת הפקת רווח (תדרים)

- הערכת סיכויי רווח (שדה גז/נפט)

- תרומה למכירות (פרסומת)

- אם משתתף j זוכה ומשלם p , התועלת שלו $v_j - p$.

מכרז אמיתי

הגדרה: מכרז אמיתי: לכל משתתף j ולכל אופן-פעולה של האחרים, התועלת הגדולה ביותר מתקבלת מאמירת הערך האמיתי v_j .

איזה מהמכרזים הבאים אמיתי?

- מכרז אנגלי – המשתתפים מעלים מחיר, האחרון זוכה.
- מכרז יפני – הכרוז מעלה מחיר, האחרון שנשאר זוכה.
- מכרז הולנדי – הכרוז מוריד מחיר, הראשון זוכה.
- מעטפות חתומות, מחיר ראשון.
- מעטפות חתומות, מחיר שני.

מכרז מחיר ראשון – First Price Auction

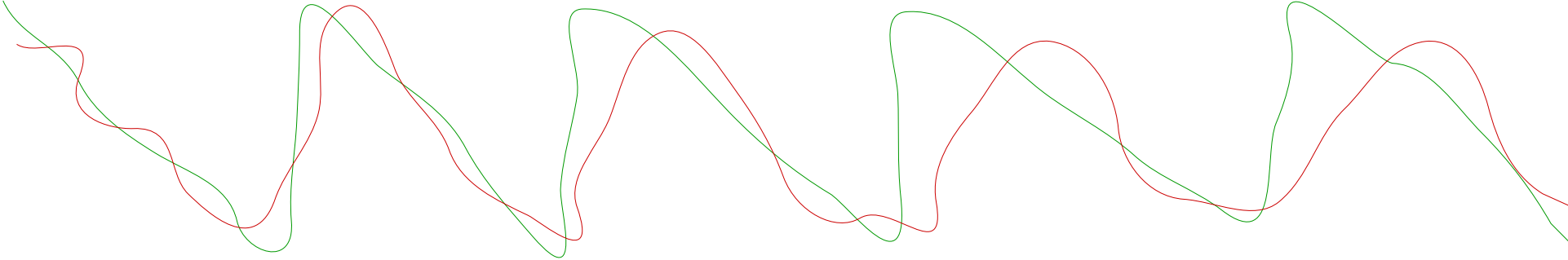
משפט: מכרז מחיר ראשון אינו אמיתי.

הוכחה:

- אמירת הערך האמיתי "מבטיחה" תועלת 0.
 - אמירת ערך נמוך יותר מאפשרת להשיג תועלת חיובית. למשל אם הערך שלי 10 והערך השני 5, הכרזה של 6 תיתן לי תועלת 4.
- ***

מה הבעיה במכרז לא אמיתי? --<

מכרז מחיר ראשון בפירסום

- המכרזים הראשונים לפירסום לפי מילות חיפוש היו של Overture (לפני גוגל).
 - המכרזים הראשונים היו "מחיר ראשון".
 - המהנדסים שמו לב, שהמפרסמים משנים את ההכרזה שלהם בלי סוף:
- 
- נוצר עומס כבד על השרתים.

מכרז מחיר שני - Second Price Auction

מכרז ויקרי - Vickrey Auction

הגדרה: מכרז ויקרי (= מכרז מחיר שני) הוא:

- (א) המשתתפים כותבים הכרזות במעטפות;
- (ב) המעטפות נפתחות ומסודרות בסדר יורד;
- (ג) בעל ההכרזה הגבוהה ביותר זוכה בחפץ;
- (ד) הזוכה משלם את ההכרזה השניה.

משפט: מכרז ויקרי מקיים השתתפות מרצון.

הוכחה: התשלום תמיד קטן או שווה מהערך,

לכן התועלת תמיד גדולה או שווה אפס. ***

מכרז מחיר שני – Second Price Auction

מכרז ויקרי – Vickrey Auction

משפט: מכרז ויקרי הוא אמיתי.

הוכחה: נניח שהערך שלי הוא v והערך המקסימלי של האחרים הוא x .

• התועלת הגבוהה ביותר שאני יכול לקוות להשיג במכרז היא $\max(0, v-x)$.

• כשאני מכריז v אני אכן מקבל תועלת זו. ***

מכרז מחיר שני – Second Price Auction

מכרז ויקרי – Vickrey Auction

משפט: מכרז ויקרי הוא יעיל פארטו

(עבור קבוצת כל המשתתפים – כולל המוכר).

הוכחה: תוצאה היא יעילה פארטו אם-ורק-אם
החפץ נמסר למשתתף עם הערך הכי גדול.

– כי אם החפץ נמסר למשתתף אחר, אז המשתתף
עם הערך הגדול ביותר יכול לקנות אותו ממנו
והקניה תועיל לשני הצדדים.

• זה בדיוק מה שעושה מכרז ויקרי. ***

מכרז מחיר שני בפירסום

- בעקבות העומס הכבד על השרתים, החליטו המהנדסים של Google שהמכרז שלהם יהיה **מכרז מחיר שני**.
- המפרסם עם ההכרזה הגבוהה ביותר זוכה, ומשלים סנט אחד מעל ההכרזה השניה בגובהה.
- השלב הבא: הכללה למכירת כמה פרסומות בו-זמנית <--

מכרז פירסום – Ad Auction

יש כמה חפצים למכירה, כל אחד באיכות שונה:

Google - Mozilla Firefox - חיפוש ב- מחשב נייד - חיפוש ב- Google

file:///home/erelsgl/Dropbox/ariel/ALGORITHMS2M/google-ads.html 170% Search

תנך docs cite איפה בוס ubuntu תקציב stats dicta notebook אריאל אלג2מ CPP vps בר-אילן conf משתלות OOP

מחשב נייד Google

הכל תמונות סרטונים חדשות מפות עוד הגדרות כלים

כ-366,000 תוצאות (0.59 שניות)

- 1 מחשבים ניידים 60 יום ניסיון | עכשיו באתר AZRIELI.COM
www.azrieli.com/ (מודעה)
מגוון רחב של דגמים של מיטב המותגים לבחירתכם באתר הקניות החדש מקבוצת עזריאלי
- 2 רשת אייבורי מחשבים | מחשב נייד דל 15.6" | ivory.co.il
www.ivory.co.il/ (מודעה)
מעבד Windows 10 Core i3-6006U ב-1,890 ש"ח
- 3 מחשבים ניידים - מבחר של ניידים | במבחר מחירים החל מ-790 ש"ח
www.ksd.co.il/ח"ש 790 (מודעה) מחשבים ניידים/החל מ-790 ש"ח

מכרז פירסום – Ad Auction

הנחות:

- לכל משבצת k יש הסתברות-הקלקה r_k
- $r_1 > r_2 > \dots$ [$CTR = Click Through Rate$]
- לכל מפרסם j יש ערך-הקלקה v_j .
- מכאן: כל מפרסם מעריך את משבצת k כ:

$$v_j * r_k$$

המטרה שלנו למצוא מכרז שהוא:

- יעיל פארטו
- מקיים השתתפות מרצון
- אמיתי

מכרז פירסום – יעילות פארטו

משפט:

- הקצאת מקומות למפרסמים היא **יעילה-פארטו**, אם-ורק-אם היא **ממקסמת את סכום הערכים:**

$$v_1 * r_{k(1)} + v_2 * r_{k(2)} + v_3 * r_{k(3)} + \dots$$

הוכחה:

(1) אם ההקצאה **לא יעילה פארטו**, אז קיים לה שיפור פארטו, ובו **סכום הערכים גבוה יותר**.

(2) אם ההקצאה **לא ממקסמת את סכום הערכים**, אז ניתן לעבור להקצאה שבה סכום הערכים גבוה יותר ולהעביר כספים בין המשתתפים, ומתקבל **שיפור פארטו**.

מכרז פירסום – מיקסום סכום התועלות

אלגוריתם חמדני:

- סדר את המפרסמים בסדר יורד של v_j .

- $v_1 > v_2 > \dots$

- תן למפרסם j את המקום ה- j .

מכרז פירסום – מיקסום סכום התועלות

משפט: האלגוריתם החמדני ממקסם את סכום הערכים.

הוכחה: נניח בשלילה שיש סדר ~~אחר~~ π .. הממקסם את סכום הערכים. בסדר זה יש מפרסמים j, i שעבורם:

$$v_j < v_i \quad r_{k(j)} > r_{k(i)}$$

נחליף את מפרסמים j ו- i . השינוי בסכום הערכים:

$$v_i * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) - v_j * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) = (v_i - v_j)(r_{k(j)} - r_{k(i)}) > 0$$

מכאן שהסדר האחר אינו ממקסם את סכום הערכים
- סתירה להנחה. ***

מכרז פירסום

- אנחנו יודעים איך להקצות מפרסמים למקומות.
- אנחנו צריכים להחליט איך לקבוע את התשלומים.
- איך נכליל את מכרז ויקרי למכירת כמה חפצים?

הפתרון של גוגל: מכרז מחיר שני מוכלל

Generalized Second Price Auction - GSP -

- המפרסם שההכרזה שלו היא ה- j בגובהה, זוכה במקום j , ומשלם את ההכרזה של המפרסם ה- $j+1$.
- כשיש רק מקום אחד – זה בדיוק מכרז ויקרי.
- כשיש שני מקומות או יותר – האם המכרז אמיתי?

מכרז מחיר שני מוכלל (GSP)

משפט: כשיש שני מקומות או יותר, מכרז מחיר שני מוכלל אינו אמיתי.

הוכחה: מספיק להביא דוגמה נגדית אחת:

$$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.05,$$

$$v_1 = 10, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 6.$$

אם מפרסם 1 אמיתי ומכריז 10, התועלת שלו היא:

$$0.1 * (10 - 9) = 0.1$$

אם מפרסם 1 מתחכם ומכריז 8, התועלת שלו היא:

$$0.05 * (10 - 6) = 0.2$$

מכרז מחיר שני מוכלל (GSP)

משפט: כשיש שני מקומות או יותר, מכרז מחיר שני מוכלל אינו אמיתי.

אז מה ההכללה ה"נכונה" של מכרז ויקרי למצב של יותר מחפץ אחד?

מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס Vickrey – Clarke - Groves (VCG) הנחות:

- יש מספר סופי של **תוצאות** אפשריות.
- לכל משתתף יש **ערך כספי** לכל תוצאה.

המנגנון:

- בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר.
- עבור כל שחקן:
 - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים.
 - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים
 - אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.
 - גבה מהשחקן את ההפרש בין שני הסכומים.

מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס

Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

מכרז ויקרי-קלארק-גרובס הוא מאד כללי ויכול
לטפל בכל מצב שבו ההעדפות הן "כספיות":

	אפשרות 3	אפשרות 2	אפשרות 1
משתתף א	8 ש"ח	4 ש"ח	3 ש"ח
משתתף ב	5 ש"ח	8 ש"ח	1 ש"ח
משתתף ג	3 ש"ח	5 ש"ח	3 ש"ח

מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס - דוגמה

	אפשרות 3	אפשרות 2	אפשרות 1
משתתף א	8 ש"ח	4 ש"ח	3 ש"ח
משתתף ב	5 ש"ח	8 ש"ח	1 ש"ח
משתתף ג	3 ש"ח	5 ש"ח	3 ש"ח
סכום	16	*17	7
רווחה בלי א	8	*13	4
רווחה בלי ב	*11	9	6
רווחה בלי ג	*13	12	4
תשלום א		13-13 = 0	
תשלום ב	11-9 = 2		
תשלום ג	13-12 = 1		

תשלום כולל: 3 ש"ח, לתרום לצדקה או טיפ למלצר (למה?)

ויקרי - קלארק - גרובס

במכרז על חפץ יחיד = מכרז מחיר שני

- בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר
(= תן את החפץ לשחקן עם הערך הגבוה ביותר - v_1).
- עבור כל שחקן:
 - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים
כשהשחקן הנוכחי משתתף.
 - (לזוכה - הסכום של האחרים הוא 0; לכל אחד אחר - v_1).
 - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים
אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.
 - (לזוכה - הסכום של האחרים היה v_2 ; לכל אחד אחר - v_1).
 - גבה מהשחקן את ההפרש בין הסכומים.
 - (לזוכה - ההפרש בין הסכומים הוא v_2 ; לגל אחד אחר - 0).

מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

משפט: מנגנון ויקרי-קלארק-גרובס הוא אמיתי.

מושגים: ערך = ברוטו (לא כולל המחיר);
תועלת = נטו (ערך פחות מחיר).

הוכחה: התועלת של כל שחקן היא:

- הערך של השחקן עצמו (1)
- פחות הסכום של שאר השחקנים בלעדיו (2)
- ועוד הסכום של שאר השחקנים כשהוא פה (3).

מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס

Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

משפט: מנגנון ויקרי-קלארק-גרובס הוא אמיתי.

הוכחה [המשך]: התועלת של כל שחקן היא:

סכום הערכים של כל השחקנים (שורה 1,3),

פחות מספר שאינו תלוי בהצהרה שלו (שורה 2)

השחקן שואף להשיג תועלת גדולה ביותר.

לשם כך עליו למקסם את סכום הערכים של

כל השחקנים. זה בדיוק מה שעושה מנגנון

ויקרי-קלארק-גרובס כשהשחקן אמיתי. ***

מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס

Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

משפט: אם הערך של כל שחקן בכל תוצאה $= < 0$, אז מנגנון וק"ג מקיים השתתפות מרצון.

הוכחה: התועלת של כל שחקן היא:

סכום הערכים הגדול ביותר של כל השחקנים

(שורה 1,3),

פחות סכום הערכים הגדול ביותר של שאר

השחקנים בלעדיו (שורה 2).

הסכום הראשון $= <$ הסכום השני.

ויקרי - קלארק - גרובס במכרזי פירסום

נחזור לדוגמה קודמת:

$$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.05, \\ v_1 = 10, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 6.$$

המחיר למפרסם 1:

- $9 * 0.1 + 6 * 0.05$ – סכום האחרים בלעדיו
- $- 9 * 0.05$ – סכום האחרים כשהוא נמצא
- $= 7.5 * 0.1$ (במקום 9; כבר לא כדאי לו להתחכם)

המחיר למפרסם 2:

- $10 * 0.1 + 6 * 0.05$ – סכום האחרים בלעדיו
- $- 10 * 0.1$ – סכום האחרים כשהוא נמצא
- $= 6 * 0.05$ (כמו קודם)

ויקרי - קלארק - גרובס במכרזי פירסום

תשלום כולל של מפרסם i במכרז VCG:

$$v_{i+1} * (r_i - r_{i+1}) + v_{i+2} * (r_{i+1} - r_{i+2}) + \dots$$

תשלום עבור קליק של מפרסם i במכרז VCG:

$$[v_{i+1} * (r_i - r_{i+1}) + v_{i+2} * (r_{i+1} - r_{i+2}) + \dots] / r_i$$

תשלום עבור קליק של מפרסם i במכרז GSP:

$$v_{i+1}$$

VCG לעומת GSP

- אם VCG כל כך טוב, למה לא משתמשים בו?
- קשה יותר למימוש.
 - פחות ברור למפרסמים.
 - עלול לגרום ירידה זמנית ברווחים.

2006: "The Lovely but Lonely Vickrey Auction"
(Lawrence M. Ausubel and Paul Milgrom).

VCG לעומת GSP

אם VCG כל כך בעייתי, למה חזרו להשתמש בו?

- מכרזי-פירסום בימינו ממילא מאד מסובכים:

• לא רק המיקום משתנה אלא גם הגודל והצורה.

• הסתברות ההקלקה לא ידועה למפרסמים.

• משלמים לא רק על קליק אלא גם על לייק וכד'.

• הכלל הפשוט של GSP לא עובד.

- לכן היום VCG חוזר לאופנה, למשל בפייסבוק

ובפירסומות של גוגל באתרים אחרים.

2013: "VCG in Theory and Practice"

(Hal Varian, and Christopher Harris).