

# מכרזים אמיתיים

# Truthful Auctions

אראל סגל-הלוי

מקורות:

הקורס של טים, הרצאות 13-16:

<http://theory.stanford.edu/~tim/f16/f16.html>

ויקיפדיה Auction

# מה מוכרים במכרזים?

- שלל מלחמה (רומא, לפני 2000 שנה).
- חפצי אומנות (אנגליה, לפני 350 שנה. גם היום).
- <https://youtu.be/ZyATAodMDrQ>
- משאבים ציבוריים – קרקעות, תדרים...
- עליות לתורה (ישראל, ?).
- כל דבר (eBay, 1995).
- פרסומות (מנועי חיפוש, רשתות חברתיות).

# סוגי מכרזים

- **מכרז אנגלי** – המשתתפים מעלים מחיר, האחרון שנשאר זוכה.

- **מכרז יפני** – הכרוז מעלה מחיר, האחרון שנשאר זוכה.

- **מכרז הולנדי** – הכרוז מוריד מחיר, הראשון שמצטרף זוכה.

- **מעטפות חתומות, מחיר ראשון.**

- **מעטפות חתומות, מחיר שני.**

*באיזה סוג מכרז כדאי להשתמש?*

# העדפות המשתתפים

- יש חפץ אחד העומד למכירה במכרז.

- כל משתתף  $j$  מייחס לחפץ שווי פרטי  $v_j$ . **למה?**

- טעם אישי (חפצי אומנות)

- כישרון בניה (קרקעות)

- יכולת הפקת רווח (תדרים)

- הערכת סיכויי רווח (שדה גז/נפט)

- תרומה למכירות (פרסומת)

- אם משתתף  $j$  זוכה ומשלם  $p$ , התועלת שלו  $v_j - p$ .

# מכרז אמיתי

הגדרה: מכרז אמיתי: לכל משתתף  $j$  ולכל אופן-פעולה של האחרים, התועלת הגדולה ביותר מתקבלת מאמירת הערך האמיתי  $v_j$ .

איזה מהמכרזים הבאים אמיתי?

- מכרז אנגלי – המשתתפים מעלים מחיר, האחרון זוכה.
- מכרז יפני – הכרוז מעלה מחיר, האחרון שנשאר זוכה.
- מכרז הולנדי – הכרוז מוריד מחיר, הראשון זוכה.
- מעטפות חתומות, מחיר ראשון.
- מעטפות חתומות, מחיר שני.

# מכרז מחיר ראשון – First Price Auction

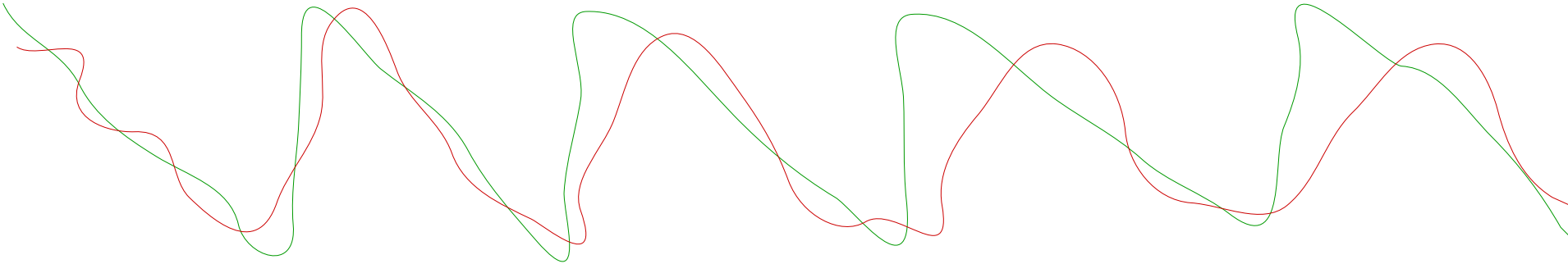
**משפט:** מכרז מחיר ראשון אינו אמיתי.

**הוכחה:**

- אמירת הערך האמיתי "מבטיחה" תועלת 0.
  - אמירת ערך נמוך יותר מאפשרת להשיג תועלת חיובית. למשל אם הערך שלי 10 והערך השני 5, הכרזה של 6 תיתן לי תועלת 4.
- \*\*\*

**מה הבעיה במכרז לא אמיתי? --<**

# מכרז מחיר ראשון בפירסום

- המכרזים הראשונים לפירסום לפי מילות חיפוש היו של Overture (לפני גוגל).
  - המכרזים הראשונים היו "מחיר ראשון".
  - המהנדסים שמו לב, שהמפרסמים משנים את ההכרזה שלהם בלי סוף:
- 
- נוצר עומס כבד על השרתים.

# מכרז מחיר שני - Second Price Auction

## מכרז ויקרי - Vickrey Auction

**הגדרה:** מכרז ויקרי (= מכרז מחיר שני) הוא:

- (א) המשתתפים כותבים הכרזות במעטפות;
- (ב) המעטפות נפתחות ומסודרות בסדר יורד;
- (ג) בעל ההכרזה הגבוהה ביותר זוכה בחפץ;
- (ד) הזוכה משלם את ההכרזה השניה.

**משפט:** מכרז ויקרי מקיים השתתפות מרצון.

**הוכחה:** התשלום תמיד קטן או שווה מהערך,

לכן התועלת תמיד גדולה או שווה אפס. \*\*\*



# מכרז מחיר שני – Second Price Auction

## מכרז ויקרי – Vickrey Auction

**משפט:** מכרז ויקרי הוא אמיתי.

**הוכחה:** נניח שהערך שלי הוא  $v$  והערך המקסימלי של האחרים הוא  $x$ .

• התועלת הגבוהה ביותר שאני יכול לקוות להשיג במכרז היא  $\max(0, v-x)$ .

• כשאני מכריז  $v$  אני אכן מקבל תועלת זו. \*\*\*

# מכרז מחיר שני – Second Price Auction

## מכרז ויקרי – Vickrey Auction

**משפט:** מכרז ויקרי הוא יעיל פארטו

(עבור קבוצת כל המשתתפים – כולל המוכר).

**הוכחה:** תוצאה היא יעילה פארטו אם-ורק-אם  
החפץ נמסר למשתתף עם הערך הכי גדול.

– כי אם החפץ נמסר למשתתף אחר, אז המשתתף  
עם הערך הגדול ביותר יכול לקנות אותו ממנו  
והקניה תועיל לשני הצדדים.

• זה בדיוק מה שעושה מכרז ויקרי. \*\*\*

# מכרז מחיר שני בפירסום

- בעקבות העומס הכבד על השרתים, החליטו המהנדסים של Google שהמכרז שלהם יהיה **מכרז מחיר שני**.
- המפרסם עם ההכרזה הגבוהה ביותר זוכה, ומשלים סנט אחד מעל ההכרזה השניה בגובהה.
- השלב הבא: הכללה למכירת כמה פרסומות בו-זמנית <--

# מכרז פירסום – Ad Auction

יש כמה חפצים למכירה, כל אחד באיכות שונה:

Google - Mozilla Firefox - חיפוש ב- מחשב נייד - חיפוש ב- Google

file:///home/erelsgl/Dropbox/ariel/ALGORITHMS2M/google-ads.html 170% Search

תנך docs cite איפה בוס ubuntu תקציב stats dicta notebook אריאל אלג2מ CPP vps בר-אילן conf משתלות OOP

מחשב נייד Google

כלים הגדרות עוד מפות חדשות סרטונים תמונות הכל

כ-366,000 תוצאות (0.59 שניות)

**1** מחשבים ניידים 60 יום ניסיון | עכשיו באתר AZRIELI.COM  
▼ [www.azrieli.com/](http://www.azrieli.com/) מודעה  
מגוון רחב של דגמים של מיטב המותגים לבחירתכם באתר הקניות החדש מקבוצת עזריאלי

**2** רשת אייבורי מחשבים | מחשב נייד דל 15.6" | ivory.co.il  
▼ [www.ivory.co.il/](http://www.ivory.co.il/) מודעה  
מעבד Windows 10 Core i3-6006U ב-1,890 ש"ח

**3** מחשבים ניידים - מבחר של ניידים | במבחר מחירים החל מ-790 ש"ח  
▼ [www.ksp.co.il/n](http://www.ksp.co.il/n) מודעה מחשבים ניידים/החל מ-790 ש"ח

# מכרז פירסום – Ad Auction

## הנחות:

- לכל משבצת  $k$  יש הסתברות-הקלקה  $r_k$
- $r_1 > r_2 > \dots$  [ $CTR = Click Through Rate$ ]
- לכל מפרסם  $j$  יש ערך-הקלקה  $v_j$ .
- מכאן: כל מפרסם מעריך את משבצת  $k$  כ:

$$v_j * r_k$$

המטרה שלנו למצוא מכרז שהוא:

- יעיל פארטו
- מקיים השתתפות מרצון
- אמיתי

# מכרז פירסום – יעילות פארטו

**משפט:**

- הקצאת מקומות למפרסמים היא **יעילה-פארטו**, אם-ורק-אם היא **ממקסמת את סכום הערכים:**

$$v_1 * r_{k(1)} + v_2 * r_{k(2)} + v_3 * r_{k(3)} + \dots$$

**הוכחה:**

(1) אם ההקצאה **לא יעילה פארטו**, אז קיים לה שיפור פארטו, ובו **סכום הערכים גבוה יותר**.

(2) אם ההקצאה **לא ממקסמת את סכום הערכים**, אז ניתן לעבור להקצאה שבה **סכום הערכים גבוה יותר ולהעביר כספים בין המשתתפים, ומתקבל שיפור פארטו**.

# מכרז פירסום – מיקסום סכום התועלות

## אלגוריתם חמדני:

- סדר את המפרסמים בסדר יורד של  $v_j$ .

- $v_1 > v_2 > \dots$

- תן למפרסם  $j$  את המקום ה- $j$ .

**משפט:** האלגוריתם ממקסם את סכום הערכים.

**הוכחה:** נתבונן בשני מפרסמים  $j, i$  ובסדר אחר שבו:

$$v_j < v_i \quad r_{k(j)} > r_{k(i)}$$

נחליף את מפרסמים  $j$  ו- $i$ . השינוי בסכום הערכים:

$$v_i * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) - v_j * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) = (v_i - v_j)(r_{k(j)} - r_{k(i)}) \geq 0$$

# מכרז פירסום

- אנחנו יודעים איך להקצות מפרסמים למקומות.
- אנחנו צריכים להחליט איך לקבוע את התשלומים.
- איך נכליל את מכרז ויקרי למכירת כמה חפצים?

## אפשרות א: מכרז מחיר שני מוכלל

Generalized Second Price Auction - GSP -

- המפרסם שההכרזה שלו היא ה- $j$  בגובהה, זוכה במקום  $j$ , ומשלם את ההכרזה של המפרסם ה- $j+1$ .
- כשיש רק מקום אחד – זה בדיוק מכרז ויקרי.
- כשיש שני מקומות או יותר – האם המכרז אמיתי?



# א. מכרז מחיר שני מוכלל (GSP)

**משפט:** כשיש שני מקומות או יותר, מכרז מחיר שני מוכלל אינו אמיתי.

**הוכחה:** מספיק להביא דוגמה נגדית אחת:

$$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.05,$$

$$v_1 = 10, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 6.$$

אם מפרסם 1 אמיתי ומכריז 10, התועלת שלו היא:

$$0.1 * (10 - 9) = 0.1$$

אם מפרסם 1 מתחכם ומכריז 8, התועלת שלו היא:

$$0.05 * (10 - 6) = 0.2$$

א. מכרז מחיר שני מוכלל (GSP)

**משפט:** כשיש שני מקומות או יותר, מכרז מחיר שני מוכלל אינו אמיתי.

*אז מה ההכללה ה"נכונה" של מכרז ויקרי למצב של יותר מחפץ אחד?*

# מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס Vickrey – Clarke - Groves (VCG) הנחות:

- יש מספר סופי של **תוצאות** אפשריות.
- לכל משתתף יש ערך כספי לכל תוצאה אפשרית.

המנגנון:

- בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר.
- עבור כל שחקן:
  - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים.
  - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים
- אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.
- גבה מהשחקן את ההפרש בין הסכומים.

מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס

Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

מכרז ויקרי-קלארק-גרובס הוא מאד כללי ויכול  
לטפל בכל מצב שבו ההעדפות הן "כספיות":

	אפשרות 3	אפשרות 2	אפשרות 1
משתתף א	8 ש"ח	4 ש"ח	3 ש"ח
משתתף ב	5 ש"ח	8 ש"ח	1 ש"ח
משתתף ג	3 ש"ח	5 ש"ח	3 ש"ח

# מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס - דוגמה

	אפשרות 3	אפשרות 2	אפשרות 1
משתתף א	8 ש"ח	4 ש"ח	3 ש"ח
משתתף ב	5 ש"ח	8 ש"ח	1 ש"ח
משתתף ג	3 ש"ח	5 ש"ח	3 ש"ח
<b>סכום</b>	<b>16</b>	<b>*17</b>	<b>7</b>
בלי א	8	*13	4
בלי ב	*11	9	6
בלי ג	*13	12	4
<b>תשלום א</b>		<b>13-13 = 0</b>	
<b>תשלום ב</b>	<b>11-9 = 2</b>		
<b>תשלום ג</b>	<b>13-12 = 1</b>		

תשלום כולל: 3 ש"ח, לתרום לצדקה או טיפ למלצר (למה?)

# ויקרי - קלארק - גרובס: חפץ יחיד

- בחר את התוצאה עם סכום-הערכים הגבוה ביותר  
(= תן את החפץ לשחקן עם הערך הגבוה ביותר -  $v_1$ ).
- עבור כל שחקן:
  - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים  
(לזוכה - הסכום הזה הוא 0; לשאר -  $v_1$ ).
  - חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים  
אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.  
(לזוכה - הסכום הזה הוא  $v_2$ ; לשאר -  $v_1$ ).
  - גבה מהשחקן את ההפרש בין הסכומים.  
(לזוכה - ההפרש הוא  $v_2$ ; לשאר - 0).

# ויקרי - קלארק - גרובס במכרזי פירסום

נחזור לדוגמה קודמת:

$$r_1 = 0.1, \quad r_2 = 0.05, \\ v_1 = 10, \quad v_2 = 9, \quad v_3 = 6.$$

## המחיר למפרסם 1:

- $9 * 0.1 + 6 * 0.05$  – סכום האחרים בלעדיו
- $- 9 * 0.05$  – סכום האחרים כשהוא נמצא
- $= 7.5 * 0.1$  (במקום 9; כבר לא כדאי לו להתחכם)

## המחיר למפרסם 2:

- $10 * 0.1 + 6 * 0.05$  – סכום האחרים בלעדיו
- $- 10 * 0.1$  – סכום האחרים כשהוא נמצא
- $= 6 * 0.05$  (כמו קודם)

# ויקרי - קלארק - גרובס במכרזי פירסום

תשלום כולל של מפרסם  $i$  במכרז VCG:

$$v_{i+1} * (r_i - r_{i+1}) + v_{i+2} * (r_{i+1} - r_{i+2}) + \dots$$

תשלום עבור קליק של מפרסם  $i$  במכרז VCG:

$$[v_{i+1} * (r_i - r_{i+1}) + v_{i+2} * (r_{i+1} - r_{i+2}) + \dots] / r_i$$

תשלום עבור קליק של מפרסם  $i$  במכרז GSP:

$$v_{i+1}$$



# מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

**משפט:** מנגנון ויקרי-קלארק-גרובס הוא אמיתי.

**מושגים:** ערך = ברוטו (לא כולל המחיר);  
תועלת = נטו (ערך פחות מחיר).

**הוכחה:** התועלת של כל שחקן היא:

- הערך של השחקן עצמו (1)
- פחות הסכום של שאר השחקנים בלעדיו (2)
- ועוד הסכום של שאר השחקנים כשהוא פה (3).

מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס

Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

**משפט:** מנגנון ויקרי-קלארק-גרובס הוא אמיתי.

**הוכחה [המשך]:** התועלת של כל שחקן היא:

**סכום הערכים של כל השחקנים** (שורה 1,3),

**פחות מספר שאינו תלוי בהצהרה שלו** (שורה 2)

השחקן שואף להשיג תועלת גדולה ביותר.

לשם כך עליו למקסם את סכום הערכים של

כל השחקנים. זה בדיוק מה שעושה מנגנון

ויקרי-קלארק-גרובס כשהשחקן אומר אמת.\*\*\*

מנגנון ויקרי - קלארק - גרובס

Vickrey – Clarke - Groves (VCG)

**משפט:** אם הערך של כל שחקן בכל תוצאה  $= < 0$ , אז מנגנון וק"ג מקיים השתתפות מרצון.

**הוכחה:** התועלת של כל שחקן היא:

סכום הערכים הגדול ביותר של כל השחקנים

(שורה 1,3),

פחות סכום הערכים הגדול ביותר של שאר

השחקנים בלעדיו (שורה 2).

\*\*\*

הסכום הראשון  $= <$  הסכום השני.

ויקרי - קלארק - גרובס - עוד דוגמאות

• פרויקט ציבורי

• מכרז דו-צדדי

• מסלול זול ביותר ברשת

# VCG לעומת GSP

- אם VCG כל כך טוב, למה לא משתמשים בו?
- קשה יותר למימוש.
  - פחות ברור למפרסמים.
  - עלול לגרום ירידה זמנית ברווחים.

2006: "The Lovely but Lonely Vickrey Auction"  
(Lawrence M. Ausubel and Paul Milgrom).

# VCG לעומת GSP

אם VCG כל כך בעייתי, למה חזרו להשתמש בו?

- מכרזי-פירסום בימינו ממילא מאד מסובכים:

• לא רק המיקום משתנה אלא גם הגודל והצורה.

• הסתברות ההקלקה לא ידועה למפרסמים.

• משלמים לא רק על קליק אלא גם על לייק וכד'.

• האלגוריתם החמדני לא עובד.

- לכן היום VCG חוזר לאופנה, למשל בפייסבוק

ובפירסומות של גוגל באתרים אחרים.

2013: "VCG in Theory and Practice"

(Hal Varian, and Christopher Harris).

# האתגר העיקרי ב-VCG: סיבוכיות

1. **סיבוכיות ההכרזה:** מספר התוצאות האפשריות הוא גדול מאד.

אבל ממשק-המשתמש חייב להיות פשוט.

• **"פתרון":** מניחים הנחות מפשטות, למשל: תועלת ליניארית.

2. **סיבוכיות החישוב:** מציאת התוצאה האופטימלית עלולה לקחת הרבה זמן.

• **"פתרון":** אלגוריתמי קירוב.

– בעיה חדשה: המנגנון כבר לא אמיתי...