מכרזים למיקסום רווח
Revenue Maximizing Auctions

אראל סגל-הלוי

מקורות:
הקורס של טים, הרצאה 5 והלאה:
http://theory.stanford.edu/~tim/f13/f13.html

מיקסום רווח לעומת מיקסום סכום ערכים

נניח שאנחנו מוכרים חפץ אחד ויש קונה אחד.

איזה מכרז ממקסם את סכום הערכים?

- זה קל – נותנים לו את החפץ בחינם.

איזה מכרז ממקסם את הרווח של המוכרים?

- זה קשה – תלוי בערך של השחקן!

במקום למקסם רווח – ננסה למקסם **תוחלת** רווח.

- זה דורש מידע סטטיסטי על ערכים של שחקנים.

מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

דוגמה: נניח שאספנו נתונים סטטיסטיים על ערכי קונים, והגענו למסקנה שהם מתפלגים כ:

Uniform[10,30]

לפי משפט מיירסון, כל מכרז אמיתי חייב להיות מסוג "מחיר קבוע מראש" (posted price): קובעים מחיר כלשהו p, והקונה מחליט אם לקנות או לא.

איזה מחיר ממקסם את תוחלת הרווח?

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathrm{Revenue}(p)] &= p * \mathrm{Prob}[v > p] \\ &= p * (30-p)/(30-10) \\ \textit{derivative by } p &= (30-2p)/20 \;\rightarrow\; \boldsymbol{p_{opt} = 15} \end{aligned}$$

מיקסום רווח – חפץ אחד וקונה אחד

הכללה: נניח שאספנו נתונים סטטיסטיים על ערכי קונים, והגענו למסקנה שהם מתפלגים כ:

$$\mathrm{Prob}[v<p] = \mathrm{F}(p)$$

איזה מחיר ממקסם את תוחלת הרווח?

$$\mathrm{E}[\mathrm{Revenue}(p)] = p \cdot \mathrm{Prob}[v > p] = p \cdot [1 - F(p)]$$

$$'p = 0 \iff p - \frac{1-F(p)}{F'(p)} = 0$$

נגדיר את **פונקציית הערך הוירטואלי**:

$$r(v) := v - \frac{1 - F(v)}{F'(v)}$$

המכרז האופטימלי הוא: **מכור אם"ם** ***r(v)>0***.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון - כללי

נתונה: *סביבה חד-פרמטרית*:

- לכל משתתף יש ערך כספי **יחיד** ל"היבחרות".
- הערך של משתתף j לקוח מהתפלגות F_j.
  - *(למה התפלגות שונה לכל משתתף? למשל מאפיינים דמוגרפיים).*

דרושים:

- כלל-בחירה לבחירת תת-קבוצה של משתתפים.
- כלל-תשלומים שאיתו כלל-הבחירה אמיתי.

כזכור, לפי משפט מיירסון, ברגע שיש **כלל-בחירה** – יש **כלל-תשלומים** יחיד שאיתו הכלל אמיתי.

נחפש כלל-בחירה שממקסם את תוחלת הרווח.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון - כללי

לכל כלל-תשלומים p, תוחלת הרווח היא:

$$E[\text{Revenue}(v_1,\ldots,v_n)] \quad = E[\textstyle\sum_{j=1}^{n} p_j(v_1,\ldots,v_n)]$$

לפי משפט מיירסון, כלל-התשלומים הוא פונקציה של כלל-הבחירה c. אם מציבים, מקבלים:

$$E[\text{Revenue}(v_1,\ldots,v_n)] \quad = E[\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j(v_1,\ldots,v_n)\cdot r_j(v_j)]$$

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.
--> כדי למקסם רווח, צריך למצוא כלל-בחירה ש**ממקסם את סכום הערכים הוירטואליים**.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F_j'(v)}$$

א. קונה אחד:

תוחלת הרווח = הערך הוירטואלי = $r(v)$.

כלל-הבחירה הוא: מכור אם-ורק-אם $r(v)>0$.

*** הכלל אמיתי בתנאי ש-r היא פונקציה עולה.*

התשלום הוא ערך-הסף = $r^{-1}(0)$.

מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F'_j(v)}$$

ב. הרבה קונים מאותה התפלגות F ועם אותו r:

(נניח ש-r פונקציה עולה).

תוחלת הרווח = $r(v_j)$ של המנצח.

כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם v_j הכי גבוה,

בתנאי ש $r(v_j)>0$.

התשלום הוא ערך-הסף: הערך השני בגובהו

או $r^{-1}(0)$ - הגבוה מביניהם.

--- שקול למכרז ויקרי עם מחיר מינימום $r^{-1}(0)$!

מיקסום רווח בשיטת מיירסון – חפץ אחד

תוחלת הרווח = תוחלת סכום הערכים הוירטואליים.

$$r_j(v) := v - \frac{1 - F_j(v)}{F_j'(v)}$$

ג. שני קונים עם התפלגויות שונות:

תוחלת הרווח = $r_j(v_j)$ של המנצח.

כלל-הבחירה הוא: מכור למשתתף עם $r_j(v_j)$ הכי

גבוה, בתנאי ש $r_j(v_j)>0$. התשלום = ערך-הסף.

דוגמה: F_a=Unif[10,30], F_b=Unif[20,40].

$r_a(v) = 2v\text{-}30,$ $r_b(v) = 2v\text{-}40.$

אם *a* אמר **23** ו-*b* אמר **27**, אז *a* יזכה! וישלם את

ערך-הסף שלו שהוא **22** [ערך הסף של *b* הוא 28]. **למה??**

מיקסום רווח במערכת הפירסום של יאהו *

- עד 2008, יאהו השתמשה במחירי-מינימום נמוכים וזהים עבור כל מילות-החיפוש.
- ב-2008 בוצע מחקר סטטיסטי שנועד להעריך את ההתפלגות F עבור כל מילה בנפרד.
- חושב מחיר-מינימום שונה עבור כל מילה.
- המנהלים לא הסכימו להשתמש במחירים החדשים אלא עשו ממוצע בין הישנים לחדשים.
- **התוצאה:** עליה גדולה ברווחים בסוף 2008.

* http://theory.stanford.edu/~tim/f13/l/l6.pdf
* Ostrovsky, Michael, and Michael Schwarz. "Reserve prices in internet advertising auctions: A field experiment." Proceedings of the 12th ACM conference on Electronic commerce. ACM, 2011.

מיקסום רווח בשיטת בולוב-קלמפרר (Bulow - Klemperer)

- רוצים למכור חפץ 1 לקונים עם התפלגות זהה - F.
- מכרז פשוט = מכרז ויקרי בלי מחיר מינימום.
  לא דורש לחשב את F, אבל הרווח לא אופטימלי.
- מכרז אופטימלי = מכרז עם מחיר המינימום של מיירסון. משיג את תוחלת-הרווח הגבוהה ביותר,
  אבל, דורש הרבה עבודה כדי לחשב את F.
- **משפט בולוב-קלמפרר**: תוחלת הרווח
  של מכרז פשוט עם n+1 משתתפים
  <= של מכרז אופטימלי עם n משתתפים!
- מסקנה: במקום סטטיסטיקה – תביאו עוד משתתף!

משפט בולוב-קלמפרר - הוכחה

- נגדיר מכרז עזר שבו מוכרים את החפץ לקונה עם הערך הוירטואלי הגבוה ביותר מתוך ה-n הראשונים אם הוא חיובי; אחרת – נותנים לקונה ה-n+1 חינם.
- במכרז פשוט עם n+1 משתתפים, מוכרים את החפץ לקונה עם הערך הוירטואלי הגבוה ביותר מתוך ה-n+1. לכן:
- תוחלת הרווח במכרז פשוט עם n+1 משתתפים

<= במכרז העזר

<= במכרז אופטימלי עם n משתתפים.