

מטלה 9 - חלוקת שכר-דירה והאלגוריתם ההונגרי

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה הבאה.

שאלה 1: שידוך מקסימלי וכיסוי מינימלי

בהרצאה הזכרנו את המשפט האומר שבגרף דו-צדדי, גודל השידוך המקסימלי שווה לגודל הכיסוי המינימלי. המשפט הזה נקרא **משפט קניג**. ההוכחה שלו נותנת גם אלגוריתם שבעזרתו ניתן לבנות, מכל שידוך מקסימלי, את הכיסוי המינימלי. קיראו את ההוכחה כאן:

[https://en.wikipedia.org/wiki/K%C5%91nig%27s_theorem_\(graph_theory\)#Proof](https://en.wikipedia.org/wiki/K%C5%91nig%27s_theorem_(graph_theory)#Proof)

תארו במילים שלכם את האלגוריתם ותנו דוגמת הרצה.

שאלה 2: חלוקת שכר-דירה אגליטרית

בכל השמה של דיירים לחדרים, ישנן דרכים רבות לקבוע את מחירי החדרים. בכל וקטור מחירים, התועלת של כל דייר היא ערך החדר שקיבל עבורו פחות מחיר החדר. בכל וקטור מחירים, יש דייר אחד (או יותר) שהתועלת שלו הכי קטנה. החלוקה **האגליטרית** (egalitarian) היא החלוקה שבה התועלת הקטנה ביותר היא גדולה יותר מכל שאר החלוקות. החלוקה **האגליטרית ללא קנאה** היא החלוקה שבה התועלת הקטנה ביותר היא גדולה יותר מכל שאר החלוקות ללא קנאה.

א. תנו דוגמה עם שלושה חדרים ושלושה דיירים, שבו בחלוקה האגליטרית יש קנאה.

ב. מציאו את החלוקה האגליטרית-ללא-קנאה בדוגמה זו.

ג. האם מצב כזה (שבו בחלוקה האגליטרית יש קנאה) אפשרי גם עם שני חדרים ושני דיירים?

שאלה 3: חישוב חלוקה הוגנת עם תשלום מקסימלי

נתונה טבלה המתארת ערכים של שלושה דיירים לשלושה חדרים:

חדר א	חדר ב	חדר ג	דייר
33	22	11	א
66	55	44	ב
99	88	77	ג

ההשמה שנבחרה מסומנת בהדגשה. כיתבו פקודה בשפת Mathematica (או בשפה אחרת לבחירתכם) המחשבת מחיר לכל חדר, כך ש:

א. ההשמה הנבחרת, עם וקטור המחירים שחושב, היא ללא קנאה.

ב. סכום הכסף שנאסף מהדיירים הוא מקסימלי מבין כל החלוקות ללא קנאה.

שאלה 4: בעיית מכפלת הצריחים

נתון לוח שחמט (8 על 8) שבו בכל משבצת כתוב מספר חיובי כלשהו.

תארו אלגוריתם יעיל (פולינומיאלי) להצבת שמונה צריחים על הלוח, כך שאף צריח לא מאיים על אף צריח אחר, ומכפלת המספרים הרשומים תחת הצריחים היא הגדולה ביותר.

שאלה 5: תיכנות אלגוריתם

רוצים לחלק n חדרים ל- n דיירים. כל דייר מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
class Agent {  
    int bestRoom(int[] prices);  
    // INPUT:    the prices of the n rooms, in shekels.  
    // OUTPUT:   the index of a room that the agent most prefers  
    in these prices. Index is between 0 and n-1.  
};
```

כיתבו בשפה לבחירתכם, או בפסאודו-קוד, אלגוריתם המקבל כקלט n שחקנים ואת מחיר הדירה הכולל בשקלים, ומוצא השמת-חדרים ללא קנאה עד כדי שקל אחד. אם זה מקל עליכם - אפשר להניח ש $n=3$.
כותרת הפונקציה:

```
void findEnvyFreeAssignment(Agent[] agents, int totalRent)
```

פלט לדוגמה:

Agent 0 receives room 2 for 163 shekels.

Agent 1 receives room 1 for 274 shekels.

Agent 2 receives room 0 for 343 shekels.