

מטלה 3 - מכרז ויקרי - פתרון

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה הבאה.

שאלה 1: מכרז מחיר שלישי (הקורס של טים, שאלה 27)

ויקי המציאה מכרז חדש למכירת חפץ יחיד: מי שהכרזה שלו גבוהה ביותר זוכה בחפץ, ומשלם את המחיר השלישי (במקום המחיר השני במכרז ויקרי). האם המכרז של ויקי אמיתי?

• **פתרון:** לא. ראו למשל בפתרון של דביר ושמואל.

שאלה 2: קואליציה במכרז ויקרי (הקורס של טים, שאלה 30)

הגדרה: בהינתן קבוצה ק של משתתפים במכרז, מנגנון הוא אמיתי עבור ק אם לא קיימות הכרזות אחרות עבור חברי הקבוצה ק (שונות מהערכים האמיתיים שלהם) המביאות לכך שכל חברי הקבוצה מרויחים.

בכיתה הוכחנו שמכרז ויקרי הוא אמיתי עבור כל קבוצה בגודל 1.

השלימו והוכיחו את המשפט הבא: **מכרז ויקרי אמיתי עבור קבוצה ק, אם ורק אם הקבוצה אינה כוללת לפחות אחד משני המשתתפים עם הערכים הגבוהים ביותר.**

- **כיוון א:** נניח שהקבוצה כוללת את שני המשתתפים עם הערכים הגבוהים ביותר. הקבוצה יכולה להרויח בכך שהמשתתף עם הערך השני יפחית את ההכרזה שלו באפסילון כלשהו חיובי אבל קטן מאד, כך שהוא עדיין יישאר השני. אז הראשון עדיין יזכה, רק שהוא ישלם אפסילון פחות. הוא יכול לתת לשני חצי אפסילון, וכך שניהם מרויחים.
- **כיוון ב:** נניח שהקבוצה לא כוללת את המשתתף עם הערך הגבוה ביותר. הדבר היחיד שהקבוצה יכולה לעשות כדי לשנות את התוצאה הוא, שמישהו מחברי הקבוצה יכריז מעל הערך הגבוה ביותר. אבל אז, מישהו מחברי הקבוצה יישאר עם תועלת שלילית כי יצטרך לשלם יותר מהערך שלו.
- נניח שהקבוצה כוללת את המשתתף עם הערך הגבוה אבל לא כוללת את המשתתף עם הערך השני. הקבוצה יכולה לשנות את התוצאה בכך שהראשון יכריז ערך נמוך יותר, אבל זה כמובן לא יעזור להם. השינוי השני שהם יכולים לעשות הוא, שמישהו מחברי הקבוצה יכריז מעל המחיר השני. אבל אז, המחיר הכולל שתשלם הקבוצה יהיה גבוה יותר, כך שהם לא ירויחו.

שאלה 3: מכרז ויקרי לקניית שירות

אתם מעוניינים לשכור קבלן שיפוצים לשיפוץ הבית. לכל קבלן ישנה עלות אחרת לביצוע העבודה. אתם לא יודעים את העלות של כל קבלן. עקרונית, אתם מעדיפים לשכור קבלן עם עלות נמוכה ככל האפשר, אבל יש עוד גורם חשוב - המלצות. לכל קבלן ישנו מספר שונה של המלצות שקיבל מלקוחות קודמים. מספר ההמלצות של כל קבלן ידוע לכם. אתם מעדיפים קבלן קצת יותר יקר עם הרבה המלצות, על-פני קבלן קצת יותר זול עם מעט המלצות.

א. נסחו במדויק את פונקציית התועלת שלכם מכל קבלן - פונקציית העלות (C) ומספר המלצות (n).

• **פתרון אפשרי:** התועלת היא n פחות C.

ב. תארו מנגנון אמיתי שיאפשר לכם לבחור את הקבלן הטוב ביותר עבורכם.

- **פתרון אפשרי:** כל קבלן מכריז על העלות שלו. נניח שההכרזות הן c_1, c_2, \dots, c_k .
- מספרי ההמלצות הם ידועים: n_1, n_2, \dots, n_k . אנחנו מחשבים לכל קבלן את התועלת שלו - מספר ההמלצות פחות העלות. התועלות הן $n_1 - c_1, n_2 - c_2, \dots, n_k - c_k$.
- אנחנו מסדרים את התועלות בסדר יורד, ובחרים את הקבלן הראשון בסדרה - הקבלן עם התועלת הגבוהה ביותר.
- אנחנו משלמים לקבלן מספר 1 - הנבחר - את הסכום הבא: $c_2 + n_1 - n_2$.

הוכחה שהמנגנון אמיתי:

- **לגבי הקבלן הנבחר:** הרווח הנקי שלו הוא: $c_2 + n_1 - n_2 - c_1 = (n_1 - c_1) - (n_2 - c_2)$. על-פי הגדרה, כיוון שסידרנו אותם בסדר יורד, רווח זה הוא חיובי, ולכן הקבלן הנבחר רוצה להיבחר. אם הוא ישנה את הצהרת העלות שלו, זה לא ישנה את המחיר שיקבל (כי המחיר שיקבל לא תלוי בהצהרה שלו), זה רק עלול לגרום לו לא להיבחר, כלומר הוא יכול רק להפסיד.
- **לגבי הקבלנים האחרים:** נניח שקבלן 2, שלא נבחר, מגדיל את העלות שלו. אז הוא בוודאי לא ייבחר, כי ההפרש $n_2 - c_2$ שלו רק גדל. נניח שקבלן 2 מקטין את העלות שלו. אז הוא ייבחר רק אם ההפרש החדש שלו גדול יותר מההפרש $n_1 - c_1$ של הקבלן הנבחר. במקרה זה, הוא יקבל תשלום על-סך $c_1 + n_2 - n_1$, והרווח הנקי שלו יהיה: $c_1 + n_2 - n_1 - c_2 = (n_2 - c_2) - (n_1 - c_1)$. אבל, כיוון שהוא לא נבחר, הביטוי הזה הוא שלילי. אם קבלן 2 יתחכם וייבחר, הרווח הנקי שלו יהיה שלילי - לכן עדיף לו להגיד אמת ולא להיבחר.

שאלה 4: חלוקה יעילה של זכויות [Rakesh Vohra, Mechanism Design, pages 1-3]

חברה פרטית מעוניינת לסלול מסילת-רכבת דרך כפר מסויים. המסילה עוברת דרך שדה של אחד האיכרים. האיכר מתנגד וטוען שהמסילה תהרוס לו את היבולים. נניח ש:

- התועלת שתפיק חברת הרכבות מהמסילה היא x - והיא ידועה רק לחברה.
 - הנזק שייגרם לאיכר מהמסילה הוא y - והוא ידוע רק לאיכר.
- א. האם בניית המסילה היא תוצאה יעילה פארטו כאשר $x > y$? כאשר $x > y$?
- **פתרון:** בניית המסילה יעילה-פארטו אם $x > y$. במקרה זה חברת הרכבות יכולה לשלם לאיכר סכום כלשהו בין x ל- y , והתועלת של שניהם תעלה.
- ב. האם אי-בניית המסילה היא תוצאה יעילה פארטו כאשר $x > y$? כאשר $y > x$?
- **פתרון:** אי-בניית המסילה יעילה-פארטו אם $x > y$. במקרה זה, כל תשלום מהחברה לאיכר יהיה נמוך מדי לאיכר או גבוה מדי לחברה.
- ג. הציעו מנגנון אמיתי הבוחר תמיד את התוצאה היעילה פארטו.
- **פתרון:** עושים מכרז ויקרי על הזכות להחליט מה יקרה. כלומר: החברה אומרת x והאיכר אומר y . אם $x > y$ אז בונים את המסילה, החברה משלמת y לממשלה, והאיכר מקבל x מהממשלה. כולם

מרוצים (חוץ מהמשלה, שצריכה לסבסד את המנגנון). אם $y > x$ אז לא בונים את המסילה ואף אחד לא משלם ולא מקבל.

שאלה 5: מכרז על חפצים זהים (הקורס של טים, שאלה 29)

כדי לגייס כסף לשיפוץ הבית, החלטתם למכור את אוסף העטים הנדירים שלכם. באוסף יש 10 עטים זהים. ישנם 20 אנשים המעוניינים להשתתף במכרז. כל אחד מעוניין בעט אחד לכל היותר. תארו מכרז אמיתי ויעיל פארטו למכירת העטים.

- **פתרון:** מוכרים עט לכל אחד מ-10 הקונים עם ההכרזה הגבוהה ביותר. כל הזוכים משלמים את ההכרזה ה-11 בגובהה. ראו בפתרון של אהוד וסיימון או של יואב ואוריאל.
- **חידה לקוראים בבית:** הוכיחו, שאילו היינו מוכרים כל עט במכרז ויקרי נפרד, המכרז המשולב לא היה אמיתי.

שאלה 6: חשיפת מידע

מצאתם בעליית-הגג שלכם שרשרת אבני-חן ישנה, ואתם מאד רוצים לדעת מה השווי שלה. השכן שלכם הוא מומחה לאבני-חן ויודע בדיוק מהו שווי השרשרת, אבל הוא לא רוצה להגיד לכם. הציעו מנגנון שיגרום לשכן שלכם לגלות לכם, מרצונו החופשי, את שווי האמיתי של השרשרת. רמז: קיראו כאן: https://www.econ2.uni-bonn.de/pdf/papers/goethes_second.pdf

- **פתרון:** מציעים לשכן לקנות את השרשרת במכרז מחיר שני, כאשר אנחנו בוחרים את "המחיר השני" באקראי ובאופן סודי. מבחינת השכן, המנגנון אמיתי בדיוק כמו מכרז מחיר שני - הפעולה השלטת עבורו היא להגיד את הערך האמיתי שלו.