

# אלגוריתמי החלפה

אראל סגל-הלוי

חלק מהשקפים של:  
Wayne Racey

# החלפה

דוגמאות:

- א. החלפת תורניות בין עובדים;
- ב. החלפת חפצים משומשים בקהילה;
- ג. החלפת חדרים בין סטודנטים במעונות.

למה לא להשתמש בדיקטורה סדרתית?

- כי סטודנטים עלולים להפסיד ויעדיפו לא להשתתף.

# תכונה ג: השתתפות מרצון

**הגדרה:** מנגנון מקיים השתתפות מרצון (voluntary participation), מילה נרדפת: individual rationality) אם מצבו של כל משתתף לאחר המנגנון טוב לפחות כמו לפניו.

מנגנון דיקטטורה סדרתית הוא **אמיתי ויעיל פארטו**, אבל **לא מקיים השתתפות מרצון**.

האם קיים מנגנון המקיים את כל שלוש התכונות?

# אלגוריתם מעגלי המסחר

## Top Trading Cycles

### Gale, Shapley, Scarf

0. מאתחלים גרף מכוון שבו:

הצמתים הם האנשים והבתים;

יש קשת מכל אדם לבית שהוא הכי רוצה,

ומכל בית לאדם שגר בו עכשיו.

א. מוצאים מעגל מכוון בגרף.

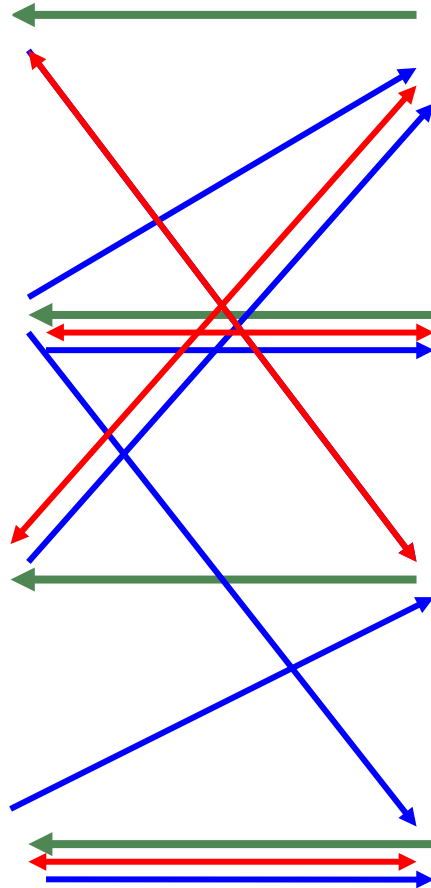
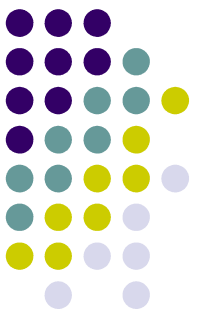
ב. מבצעים את ההחלפה במעגל.

ג. מוחקים מהגרף את הצמתים שהשתפו בהחלפה.

ד. מעדכנים את הקשתות של האנשים שנשארו.

ה. חוזרים על שלבים א-ד עד שהגרף ריק.

# אלגוריתם מעגלי המסחר בתמונות



# אלגוריתם מעגלי המסחר

**משפט:** אלגוריתם מעגלי המסחר מסתיים.

**הוכחה:** כל עוד הגרף לא ריק, קיים לפחות מעגל מכוון אחד. לכן בכל שלב הגרף  $\neq \emptyset$  עד שמתרוקן.

**משפט:** אלגוריתם מעגלי המסחר מקיים השתתפות מרצון.

**הוכחה:** כל משתתף מקבל בית שהצביע עליו. כל משתתף יכול להצביע על הבית שלו או על בית טוב יותר.

# אלגוריתם מעגלי המסחר - אמיתיות

**משפט:** אלגוריתם מעגלי המסחר הוא אמיתי.

**הוכחה:** נניח שיוסי סוחר במעגל  $k$  כשהוא תמים ובמעגל  $j$  כשהוא מתחכם. נשווה בין מצבים אלו בשני מקרים.

•  $j \geq k$  המסחר עד מעגל  $k-1$  זהה בשני המצבים. לכן קבוצת הבתים שנשארו זמינים אחרי מעגל  $k-1$  זהה בשני המצבים. וכשיוסי תמים הוא מקבל את הבית הכי טוב בקבוצה זו.

•  $j < k$  המסחר עד מעגל  $j-1$  זהה בשני המצבים. בסיבוב הבא כל הקשתות זהות בשני המצבים, פרט לקשת היוצאת מיוסי.

**כשיוסי מתחכם, הקשת היוצאת ממנו סוגרת מעגל עם בית**

**כלשהו  $x$ . כשיוסי תמים, הוא נמצא בסופה של שרשרת**

המתחילה בבית  $x$ . כל עוד לא נסגר מעגל, כל השרשרת הזאת

נשארת בגרף. בפרט, בית  $x$  עדיין נמצא בגרף כאשר מעגל  $k$

נסגר. לכן הבית שמקבל יוסי כשהוא תמים טוב לפחות כמו  $x$ .

# אלגוריתם מעגלי המסחר – יעילות ויציבות

**משפט:** אם כל יחסי ההעדפה הם *חזקים* (אין אדישות),  
אז אלגוריתם מעגלי המסחר יעיל פארטו.

**הוכחה:** דומה לדיקטטורה הסדרתית; תרגיל בית.

הגדרות:

• **קואליציה מערערת** (blocking coalition) =

קבוצת משתתפים שיכולה לפרוש ולבצע

החלפת-בתים שהיא טובה באותה מידה לכל חברי

הקבוצה וטובה יותר לחלק מחברי קבוצה.

• **שיבוץ יציב** (core-stable allocation) = שיבוץ

שבו אין קואליציה מערערת.



# אלגוריתם מעגלי המסחר - יציבות

**משפט:** אם כל יחסי ההעדפה הם חזקים (אין אדישות),  
אז מנגנון מעגלי המסחר מוצא שיבוץ יציב.

**הוכחה:** נניח שקבוצת "הבדלנים" שוקלת לפרוש.

שיבוץ א = השיבוץ לבדלנים כשהם לא פורשים.

שיבוץ ב = השיבוץ לבדלנים כשהם כן פורשים.

יהי  $k$  הקטן ביותר כך שבדלן ממעגל  $k$  מרויח מהפרישה.  
בשיבוץ א, הוא מקבל את הבית הטוב ביותר מהבתיים  
שלא נלקחו ע"י מעגלים  $k > j$ .

בשיבוץ ב מצבו טוב יותר, כלומר הוא מקבל בית חדש  
ששייך לבדלן אחר ממעגל  $k > j$ .

מכאן שגם הבדלן האחר הרויח מהפרישה – בסתירה  
להנחה ש- $k$  הקטן ביותר.

# אלגוריתם מעגלי המסחר - יציבות

משפט: אם כל יחסי ההעדפה הם חזקים, אז יש רק שיבוץ יציב אחד!  
(למה זה מעניין?)

הוכחה: נגדיר: שיבוץ א = השיבוץ של המנגנון,  
שיבוץ ב = שיבוץ אחר כלשהו.

יהי  $k$  הקטן ביותר כך שמישהו ממעגל  $k$  במנגנון, משובץ אחרת בשיבוץ ב.

בשיבוץ א הוא מקבל את הבית הטוב ביותר מהבתים שלא נלקחו ע"י מעגלים  $j > k$ .

בשיבוץ ב הוא לא מקבל בית ממעגל  $j > k$ , ולכן מצבו פחות טוב.

$\Rightarrow$  משתתפי מעגל  $k$  יכולים לפרוש ולערער על שיבוץ ב.  $\Rightarrow$  שיבוץ ב לא יציב.  
\*\*\*

# החלפת כליות

# Kindey Exchange

אראל סגל-הלוי

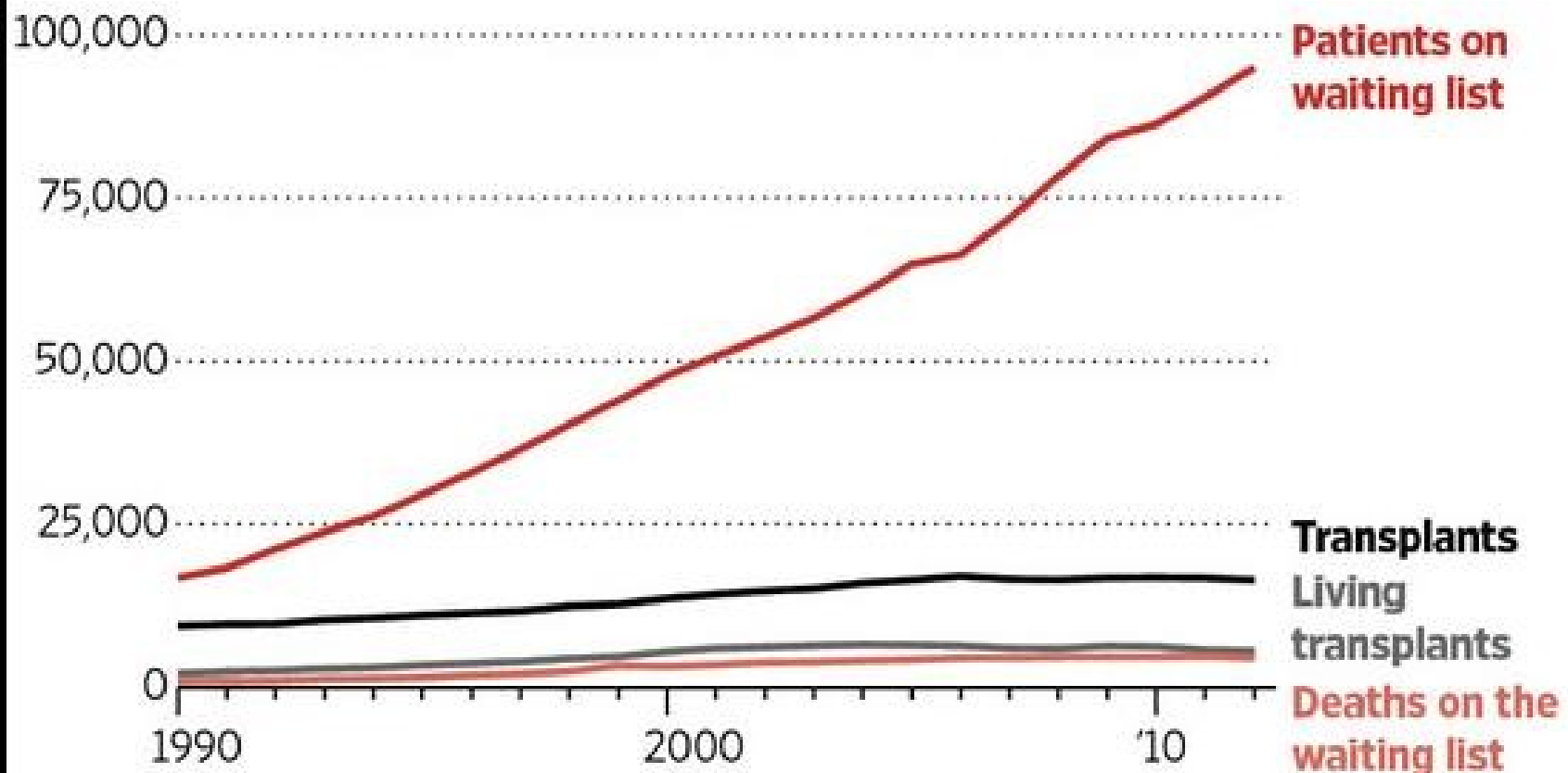
חלק מהשקפים של:

Wayne Racey

# התור להשתלת כליות

## A Long Wait for a Kidney

Since 1990, the number of people on the waiting list for a kidney transplant has grown sharply, while the number of transplants has increased only slightly.



Source: The Organ Procurement and Transplantation Network

The Wall Street Journal

# החלפת כליות

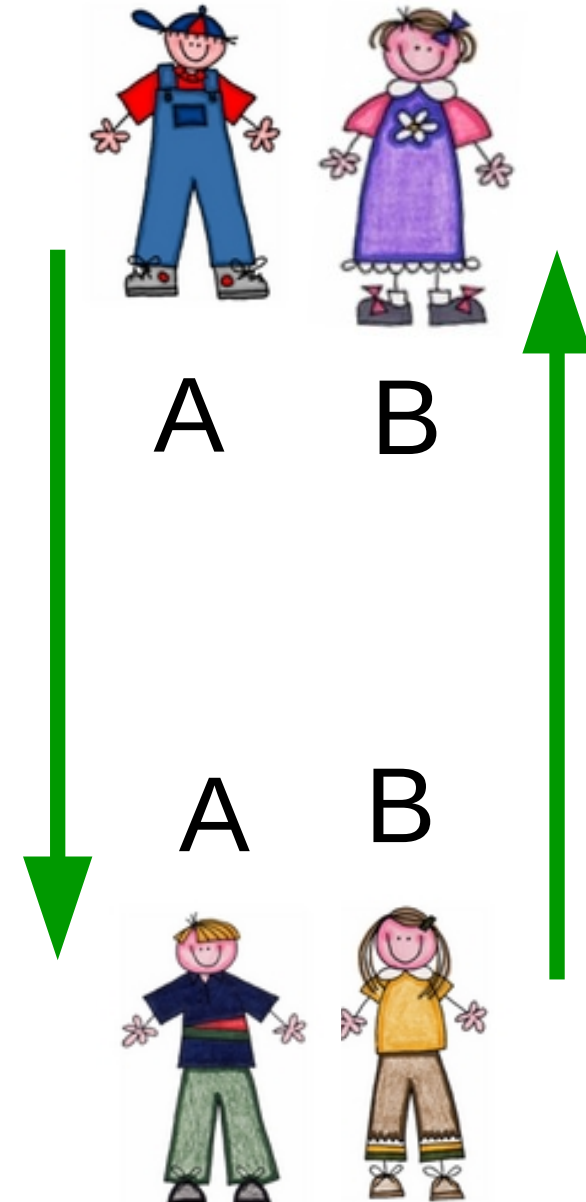
כמעט בכל המדינות:

- יש מחסור בכליות להשתלה.
- **אסור** לתרום כליות תמורת כסף.
- **מותר** לתרום כליה תמורת כליה.

# למה להחליף כליות?

תורם **מוכן** לתרום לחולה  
אבל **לא מתאים**, בגלל סוג  
הדם או סיבות נוספות:

> נתרם תורם V	O	A	B	AB
O	כן	כן	כן	כן
A	לא	כן	לא	כן
B	לא	לא	כן	כן
AB	לא	לא	לא	כן



# החלפת כליות 2004 - מעגלי מסחר

Kidney Swapping | Newsweek Health | Newsweek.com - Mozilla Firefox

File Edit View History Bookmarks Tools Help

http://www.newsweek.com/id/49389?tid=relatedcl



xchange

Coursework 5 : W09-ECON-285-01 : M...

Unraveling.pdf (application/pdf Object)

Kidney Swapping | Newsweek He...

ADVERTISEMENT

University of Phoenix

*I Am A PHOENIX* CLASS OF 2008

LEARN MORE ABOUT BECOMING A PHOENIX

CLICK HERE

HOME

THE MAGAZINE

INTERNATIONAL EDITION



LOGIN / REGISTER

SUBSCRIBE TO NEWSWEEK  
Only \$40 a year

# Newsweek

SEARCH SITE

WEB

NEWS

POLITICS

TECH / BUSINESS

CULTURE / IDEAS

HEALTH

VOICES

SITE GUIDE

SUBSCRIBE NOW

Health for Life

By The Numbers

Key Healthcare Issues



VIDEO SATIRE

'The District'

Episode 8: OMG! Everyone's PO'd at AIG



CULTURE

- The Reluctant Rock Star
- Meeting Your Teen Idols
- Photos: Grunge Gone By



OIL SLATE.COM

- The Locavore's Dilemma
- My Own Private B.O.
- Worst. Tournament. Ever.

## Kidney Swapping

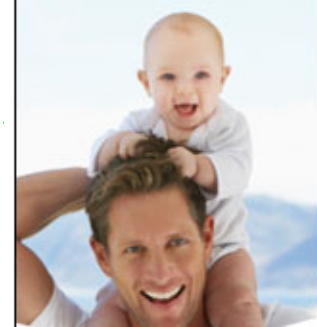
CREATING A NATIONAL EXCHANGE PROGRAM TO CONNECT PAIRS OF DONORS/RECIPIENTS COULD HELP THOSE MOST IN NEED.

By Vanessa Juarez | Newsweek Web Exclusive

Apr 26, 2005

ADVERTISEMENT

Pay Less for  
Term Life Insurance



Recommended (6)

- [Organ Trafficking Is No Myth](#)
- [Jerry Adler: Are Kidneys a Commodity?](#)

▼ See All

Topics (2)

- [Kendall Wyman](#)
- [Robert Montgomery](#)

▼ See All

# החלפת כליות 2005 - שידוכי מסחר

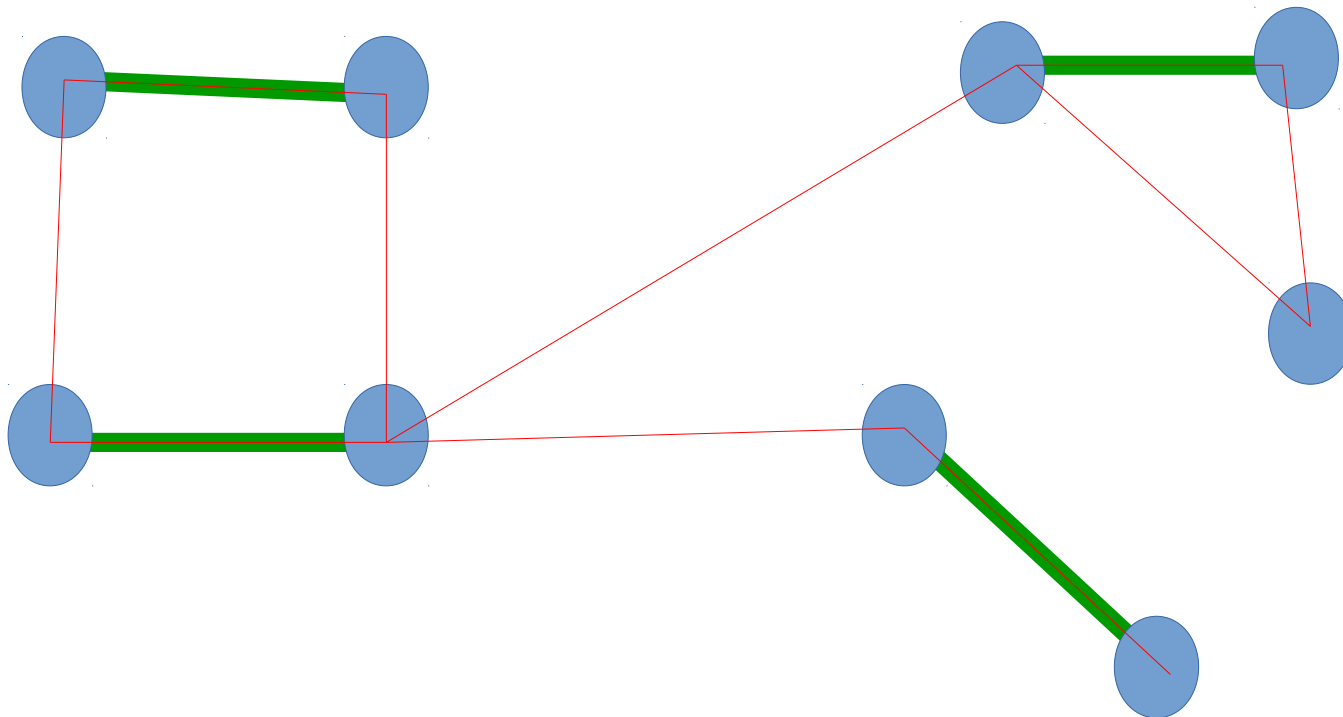
- אלגוריתם מעגלי המסחר לא התאים לבעיה:
- המעגלים ארוכים מדי! בהחלפת כליות מעדיפים מעגלים קצרים – באורך 2 או 3 – כי כל ההשתלות במעגל חייבות להתבצע במקביל.
- מצד שני, בהחלפת כליות ההעדפות בינאריות – כל חולה מוכן לקבל כליה מכל תורם מתאים.

הפתרון: במקום לחפש מעגלים,  
נחפש שידוכים.



# מציאת שידוך גדול ביותר

שידוך בגרף כללי = אוסף של זוגות-צמתים זרים.  
כל צומת מייצג זוג; כל קשת מייצגת התאמה הדדית.

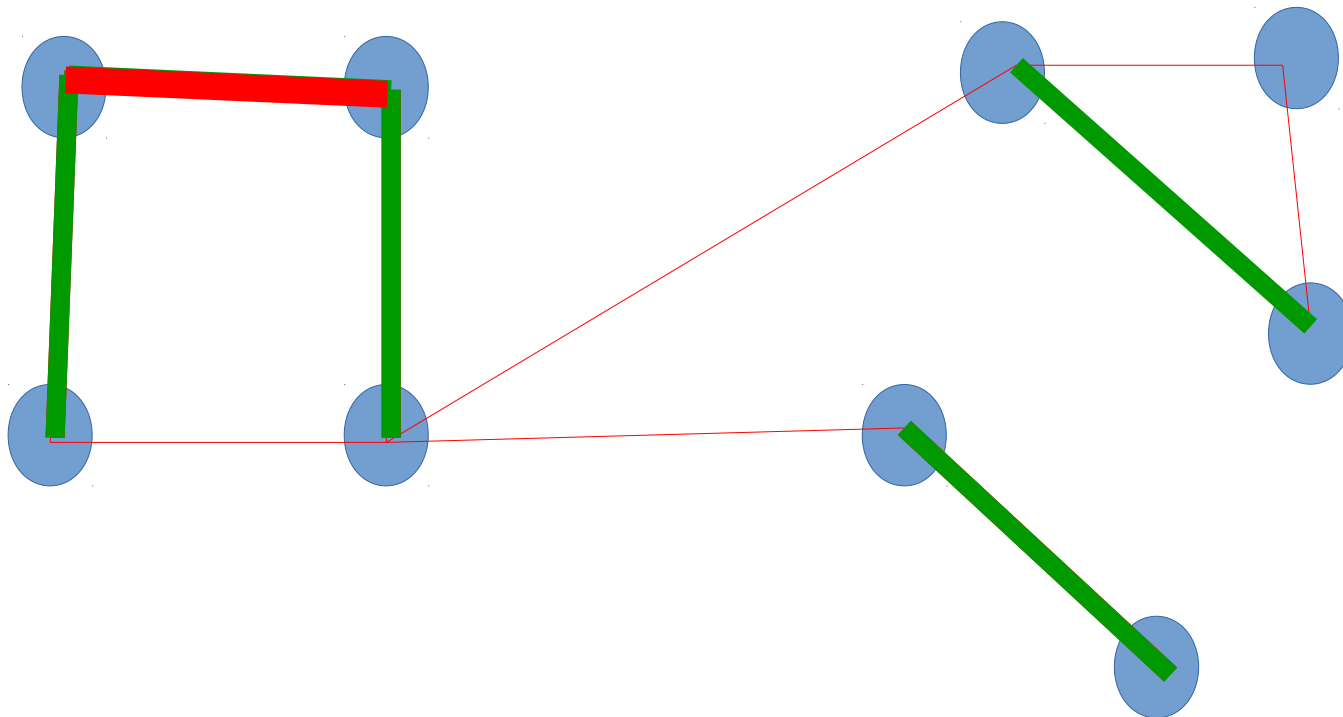


# אלגוריתם הפרחים

## (Blossom Algorithm, Edmonds Algorithm)

**מסלול שיפור = מתחיל ומסתיים בצמתים לא משודכים,**  
ומתחלף אדום-ירוק-אדום....-ירוק-אדום.

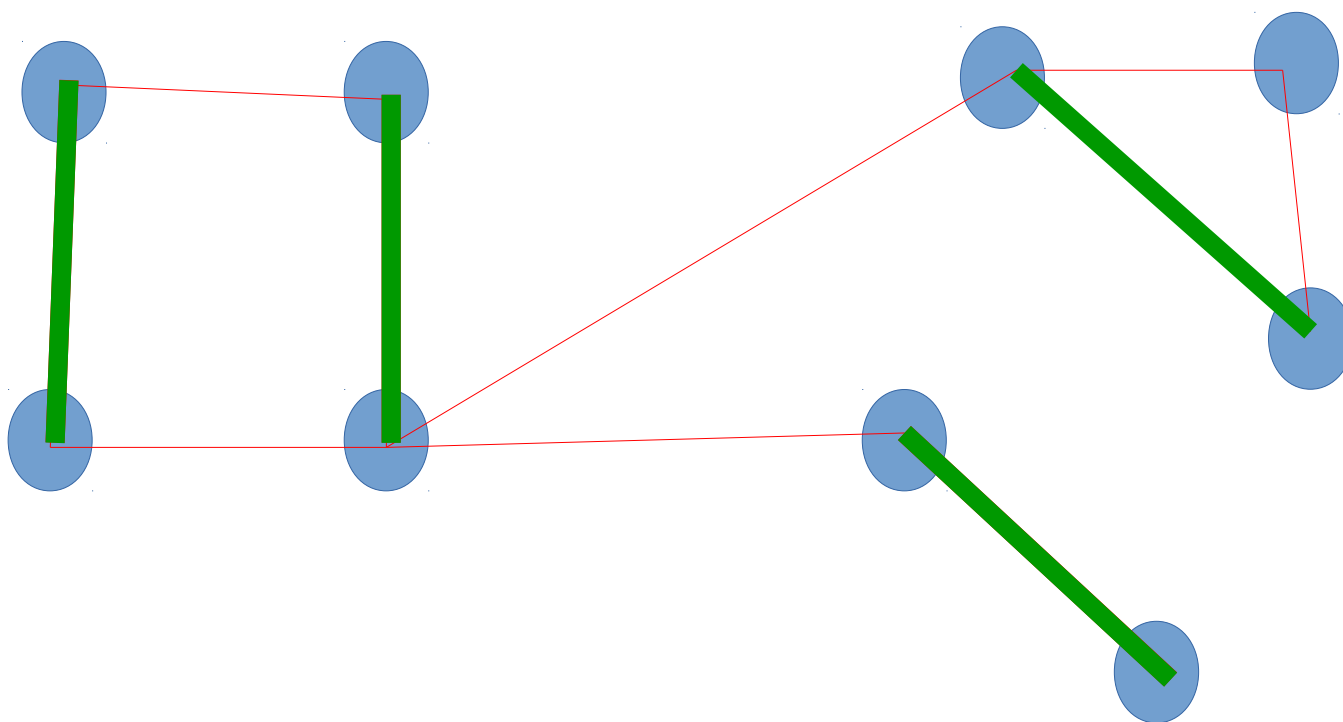
כל עוד יש מסלול-שיפור:  
הפוך אותו (ירוק לאדום ואדום לירוק).



# אלגוריתם הפרחים

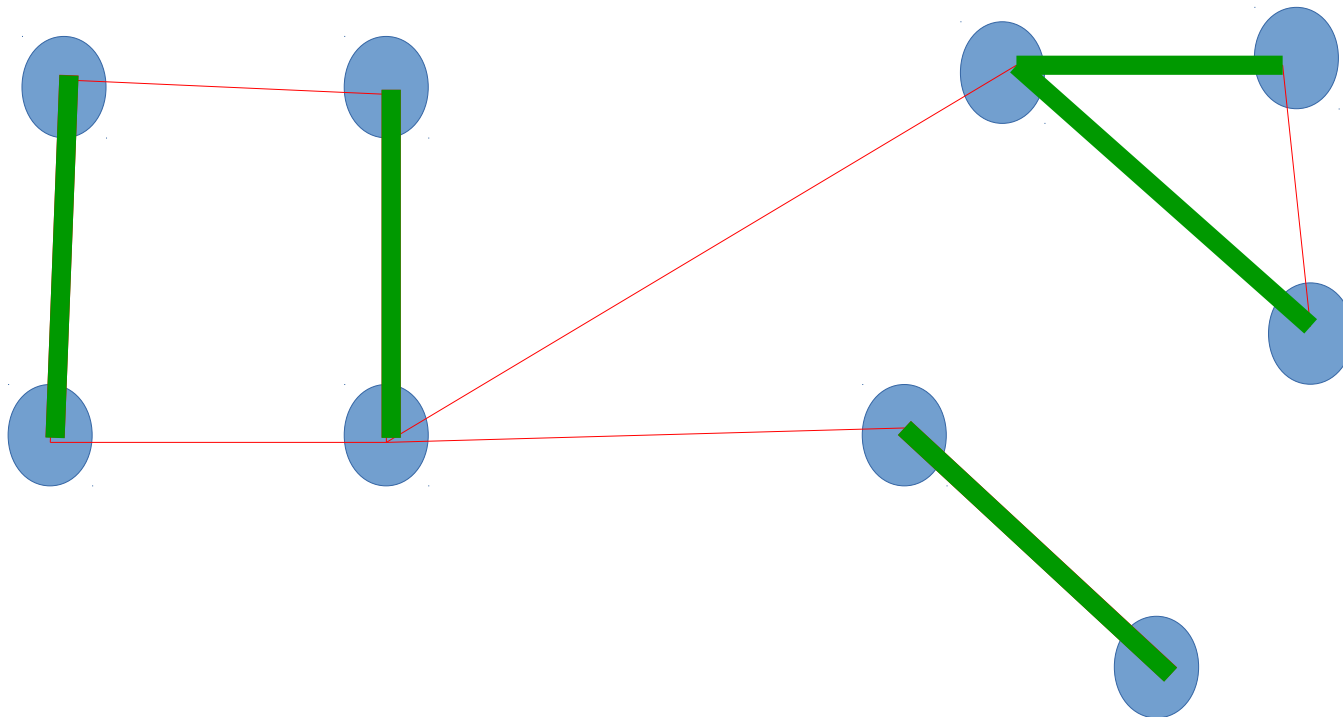
## (Blossom Algorithm, Edmonds Algorithm)

- למה האלגוריתם עובד? כי לפי הלמה של Berge:  
בכל שידוך לא-גדול-ביותר קיים מסלול שיפור.
- איך מוצאים מסלול שיפור? עם פרחים (מסובך).



# מציאת שידוך גדול ביותר - תמריצים

- ייתכנו כמה שידוכים גדולים ביותר.
- צמתים יכולים לנסות להשפיע על השידוך שייבחר ע"י הסתרת קשתות.
- איך להפוך את האלגוריתם לאמיתי?



# מציאת שידוך גדול ביותר – שבירת שוויון

**מנגנון שידוך-גדול-ביותר-עם-עדיפויות:**

- קבע סדר-עדיפות כלשהו על הצמתים (למשל לפי זמן המתנה בתור להשתלה, דחיפות רפואית, גיל, וכד').
- מצא את כל השידוכים הגדולים ביותר בגרף.
- בחר את השידוך עם וקטור-העדיפויות הגדול ביותר בסדר מילוני.

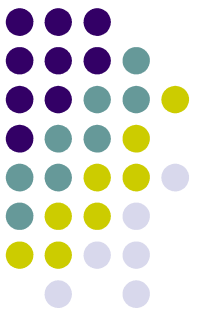
**משפט: המנגנון שידוך-גדול-ביותר-עם-עדיפויות אמיתי.**

**הוכחה:** נניח בשלילה שצומת צ מסתיר קשת ומרויח:

- בלי הסתרה (מצב א) – נבחר שידוך א בלי צ.
  - עם הסתרה (מצב ב) – נבחר שידוך ב עם צ.
- אבל שידוך א זמין במצב ב, ושידוך ב זמין במצב א.  
לכן בשני המצבים ייבחר אותו שידוך – סתירה.

# מעגלי החלפה באורך 3

- כיום אפשר לבצע שלושה ניתוחי השתלה בו זמנית - החלפת כליות במעגלים באורך 3.
- איך מוצאים הכי הרבה מעגלים באורך 3?
- הבעיה היא NP-קשה! יש רדוקציה:
  - $NP \rightarrow SAT \rightarrow 3\text{-coloring} \rightarrow$   
 $Set\ cover \rightarrow 3D\ matching \rightarrow 3\text{-Circles}$
  - מה עושים?
  - א. אלגוריתמי קירוב;
  - ב. חיפוש היוריסטי.



# החלפת כליות בישראל

[https://www.health.gov.il/English/Topics/organ\\_transplant/live\\_donors/Pages/intersection\\_plan.aspx](https://www.health.gov.il/English/Topics/organ_transplant/live_donors/Pages/intersection_plan.aspx)

# תמריצים של מרכזים רפואיים

מי הם השחקנים בבעיית שידוך הכליות?

- הזוגות – יכולים להסתיר קשתות.

- המרכזים – יכולים להסתיר זוגות - לשדך אותם באופן פנימי.

- האינטרס של המרכזים הרפואיים הוא לדאוג לחולים "שלהם" - שכמה שיותר חולים שלהם יקבלו כליה.



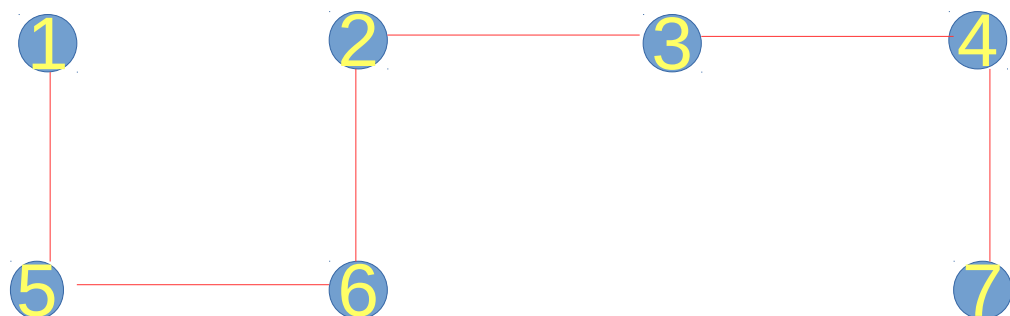
# תמריצים של מרכזים רפואיים

**משפט** (ראינו קודם): קיים מנגנון יעיל פארטו שהוא אמיתי עבור הזוגות.

**משפט** (נראה עכשיו): לא קיים מנגנון יעיל פארטו שהוא אמיתי עבור המרכזים הרפואיים!

**הוכחה:** נניח בשלילה שקיים מנגנון כזה. נראה מצב שבו, לכל שידוך שהמנגנון בוחר, קיים מרכז שיכול להסתיר זוגות, וכך להגדיל את מספר החולים "שלו" שמקבלים כליה.

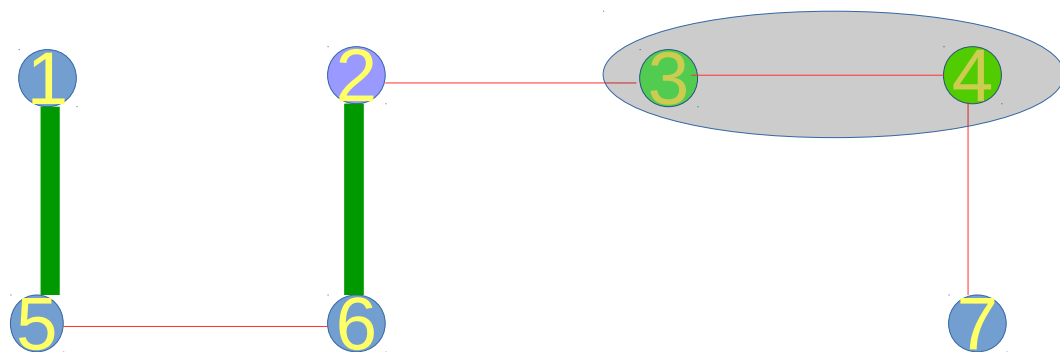
# תמריצים של מרכזים רפואיים – אי-אפשרות



רמב"ם

הדסה

נניח שהמצב  
האמיתי הוא כזה,  
שכל שידוך משאיר  
**לפחות חולה אחד**  
בלי כליה:

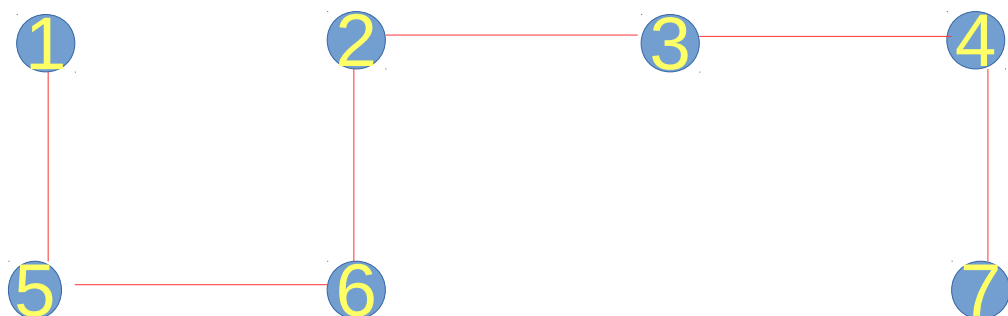


רמב"ם

הדסה

אם רמב"ם מסתיר  
שני זוגות ומשדך  
אותם אצלו, אז  
יש רק שידוך  
יעיל-פארטו אחד,  
ובו כל 4 החולים  
של רמב"ם  
מקבלים כליה:

# תמריצים של מרכזים רפואיים – אי-אפשרות

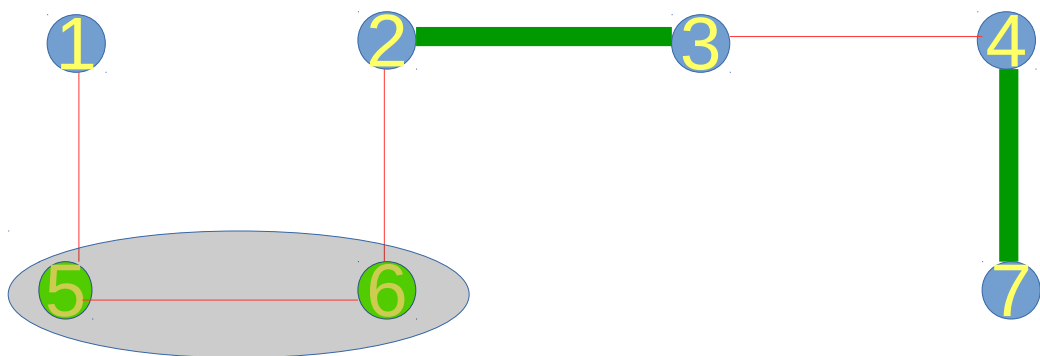


רמב"ם

הדסה

נניח שהמצב  
האמיתי הוא כזה.  
שכל שידוך משאיר  
**לפחות חולה אחד**  
בלי כליה.

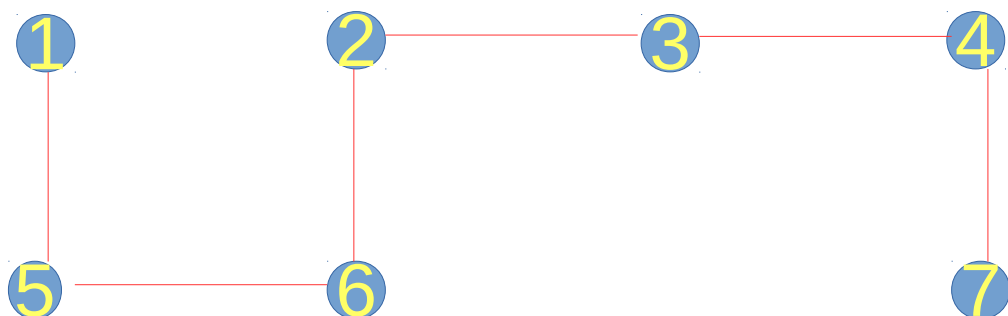
אם הדסה מסתירה  
שני זוגות ומשדכת  
אותם אצלה, אז יש  
רק שידוך  
יעיל-פארטו אחד,  
ובו כל 3 החולים  
של הדסה מקבלים  
כליה:



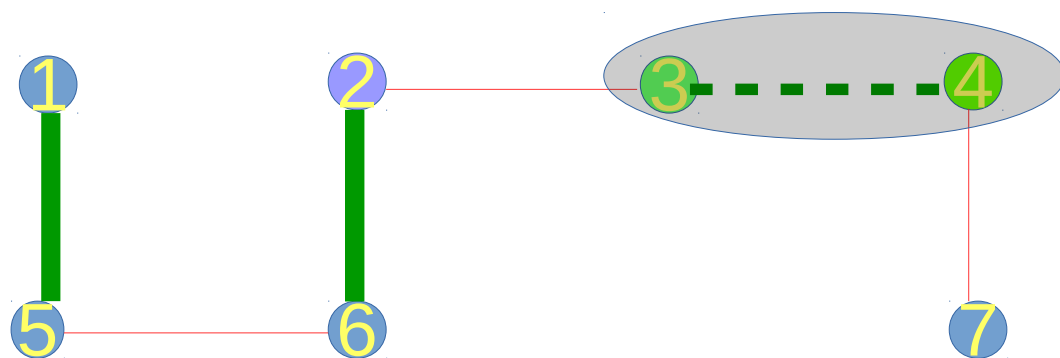
רמב"ם

הדסה

# תמריצים של מרכזים רפואיים – אי-אפשרות



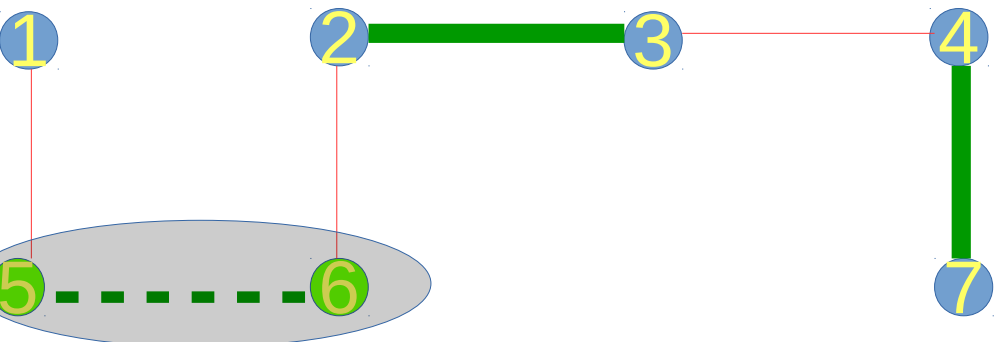
לכן, עבור כל שידוך שהאלגוריתם בוחר, אחד המרכזים יכול להסתיר זוגות וכך "להכריח" את



המנגנון לבחור שידוך עדיף עבורו. \*



כדי למנוע את זה, המנגנון צריך לא להתעקש דווקא על



השידוך המקסימלי, אלא להסכים

להחזיר שידוך קטן פי 2 (גודל 2 במקום 4)

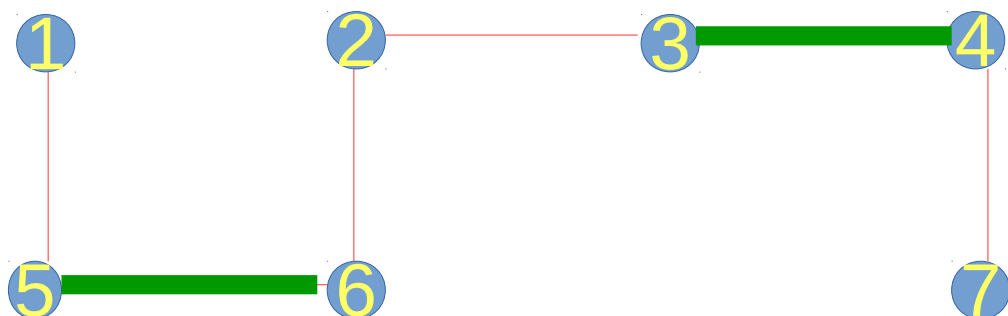
# תמריצים של מרכזים רפואיים – קירוב 1/2

כיוון שאין מנגנון אמיתי המשיג את השידוך הגדול ביותר, חיפשו מנגנון אמיתי המשיג שידוך שהוא גדול-ביותר-בקירוב.

המנגנון (אשלגי, פישר, קאש, פרוקצ'יה, 2013):

- מחשבים, עבור כל מרכז רפואי, את המספר הגדול ביותר של קשתות פנימיות.
- מחשבים את השידוך הגדול ביותר מבין כל השידוכים עם אותו מספר של קשתות פנימיות.

# קירוב 1/2 - דוגמאות



רמב"ם

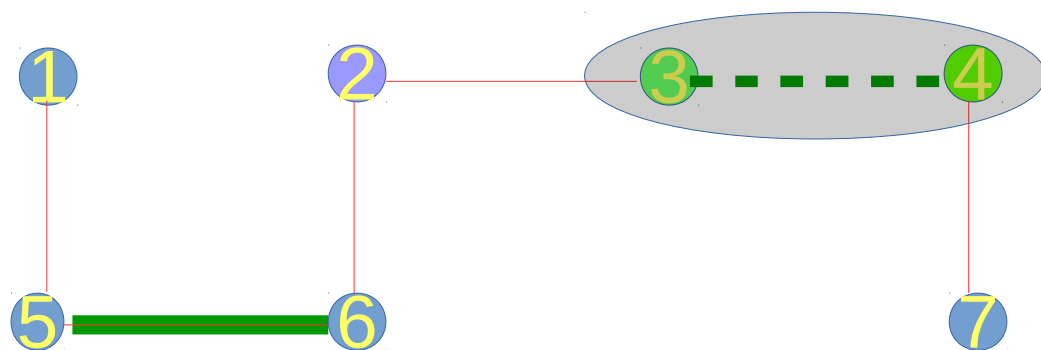
מצב אמיתי:

המנגנון בוחר שידוך

קטן פי 1.5

מהמקסימלי.

הדסה



רמב"ם

הסתרה ברמב"ם.

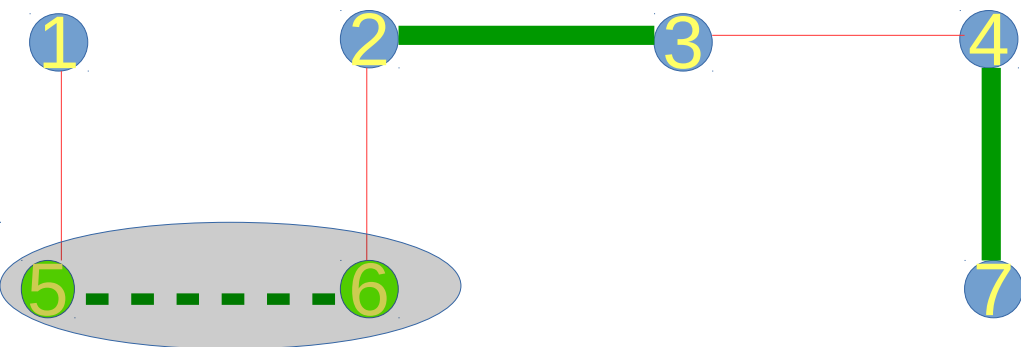
המנגנון בוחר

שידוך קטן פי 2

מהמקסימלי;

רמב"ם לא מרויח.

הדסה



רמב"ם

הסתרה בהדסה:

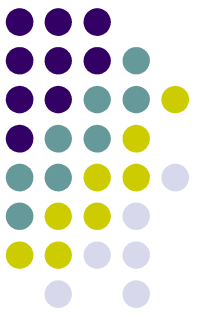
הדסה לא מרויחה.

הדסה

# קירוב $1/2$ - הוכחה

**משפט:** אלגוריתם אשל-גי-פישר-קאש-פרוקצ'יה מחזיר תמיד שידוך שגודלו לפחות  $1/2$  מהשידוך הגדול ביותר האפשרי.

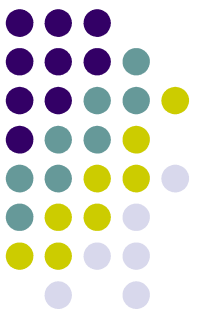
**הוכחה:** נניח שהשידוך הגדול ביותר כולל  $n$  קשתות ו- $2n$  זוגות. מכל קשת, לפחות זוג אחד נמצא בשידוך של האלגוריתם – אחרת האלגוריתם היה יכול להוסיף את הקשת ולהשיג שידוך גדול יותר. לכן השידוך של האלגוריתם כולל לפחות  $n$  זוגות.



# תורם חסיד - "שלי שלך ושלך שלך" (אלטרואיסט) – ממעגלים לשרשראות

- In July 2007, Alliance for paired donations started an "Altruistic Donor Chain"
- Altruistic donor in Michigan donated kidney to woman in Phoenix.
- Husband of Phoenix woman gave kidney to woman in Toledo.
- Her mom gave kidney to patient A in Columbus, whose daughter simultaneously gave kidney to patient B in columbus.
- And so on....





# שרשרת באורך 60

