

שידוכים

[80 דקות]

"מטרוניא שאלה את ר' יוסי בר חלפתא, אמרה לו: בכמה ימים ברא הקב"ה את עולמו? אמר לה: לששת ימים... אמרה לו: ומאותה שעה עד עכשיו מהו יושב ועושה? אמר לה: **פזווג זיווגים**... ואם קלה היא בעינייך, קשה היא לפני הקדוש ברוך הוא כקריעת ים סוף" (ויקרא רבה ח א).

היום נדבר על בעיה מסוג חדש: שיבוץ סטודנטים למחלקות באוניברסיטאות. יש מחלקות שמאד קשה להתקבל אליהן, למשל, מחלקות שנותנות תואר שני בפסיכולוגיה. יש הרבה סטודנטים שרוצים להתקבל ומעט מקומות, והתחרות קשה.

לכאורה הבעיה דומה לבעיית השיבוץ למעונות. האם אפשר להשתמש כאן במנגנון "הדיקטטור הסדרתי"? אפשר, אבל התוצאות לא יהיו טובות. מדוע? כי הבעיה שונה למדי. ההבדל הוא, ששיבוץ למעונות הוא שוק חד-צדדי ושיבוץ למחלקות הוא **שוק דו-צדדי** (two-sided market). בשיבוץ למעונות, רק לסטודנטים יש העדפות; לחדר במעון לא אכפת מי יגור בו... אבל בשיבוץ למחלקות, גם למחלקות יש העדפות שונות! בדרך-כלל מחלקות מדרגות מועמדים לפי הציונים שלהם, אבל כל מחלקה נותנת משקל שונה לציונים שונים. יש גם שיקולים נוספים כמו ליצור איזון בין אוכלוסיות שונות, הפליה מתקנת, וכד'.

שיבוץ דו-צדדי נקרא גם **שידוך** (matching). אפשר להבין למה - הבעיה הקלאסית שתמיד מביאים כדוגמה היא שידוך בין נשים לגברים. יש n נשים ו- n גברים. לכל אישה יש סדר העדפות לגבי הגברים ולכל גבר יש סדר העדפות לגבי הנשים, וצריך למצוא שידוך "טוב" ביניהם (בהמשך נגדיר מהו שידוך "טוב"). במציאות, עד כמה שידוע לי, שידוכים בין נשים לגברים לא נעשים בעזרת האלגוריתמים שנלמד בהמשך, אבל האלגוריתמים הללו נפוצים ומקובלים בתחומים רבים אחרים.

שוק דו-צדדי מבוזר

כדי להבין מדוע שוק דו-צדדי מורכב יותר משוק חד-צדדי (ומדוע קשה יותר למצוא שידוך טוב מלמצוא שיבוץ טוב), נתאר קודם את המצב המתקיים בשווקים דו-צדדיים כאשר הם **מבוזרים** (decentralized) - ללא תכנון מרכזי. תיאור יפה של שוק דו-צדדי מבוזר נמצא בספרו של אלוין רות' (Alvin Roth) שזכה בפרס נובל בכלכלה על תרומתו לאלגוריתמי שידוך. הוא מתאר שוק דו-צדדי של שידוך בין רופאים-מתמחים לבין בתי-חולים.

מושג ההתמחות נכנס לחוק האמריקאי בשנת 1900, ומאותה שנה בתי-חולים התחילו להתחרות ביניהם על המתמחים הטובים ביותר. במשך הזמן, בתי"ח הבינו שיש חשיבות לגורם הזמן: אם הם מציעים הצעה לסטודנט מוכשר בשנה האחרונה ומגבילים אותה בזמן, יש סיכוי שהוא יקבל את ההצעה שלהם למרות שיש בתי"ח שהוא רוצה יותר, כיוון שהוא לא יודע אם ביה"ח הזה יציע לו הצעה. ההצעות הלכו ונעשו מוקדמות יותר ויותר, עד שבשנת 1945 הגיעו למצב שבת"ח כבר הציעו הצעות לסטודנטים בסוף שנה ראשונה. המצב הזה כמובן בעייתי מאד: הוא בעייתי לסטודנטים כי הם צריכים להתחייב על המקום שבו יתמחו בעוד שנתיים. הוא בעייתי גם לבתי"ח כי הם צריכים לבחור סטודנטים כשהנתון היחיד שיש

להם הוא הציונים שלהם בשנה ראשונה. המצב הזה, שבו שוק דו-צדדי "מתדרדר" להצעות מוקדמות לא הגיוניות, נקרא **פרימה** (unraveling).

בשנת 1945 החליטו האוניברסיטאות שהמצב לא יכול להימשך כך, וסיכמו ביניהן שלא יאפשרו לאף גורם לקבל מידע על ציוני הסטודנטים עד לתאריך קבוע מסוים בשנה האחרונה. כך הם אכן עצרו את תהליך הפרימה, אבל יצר בעיה אחרת: בתאריך הקריטי שבו השתחרר המידע, היתה "התנפלות" של בתי"ח על הסטודנטים הטובים. כל הסגל של בתי"ח, החל מהרכזות ועד המנהלים, בילו ימים ולילות ליד הטלפון בניסיונות להתקשר לסטודנטים הטובים ולהציע להם לבוא אליהם. יותר מזה, כדי למנוע מצב שבו בתי"ח נשאר בלי מתמחים, בתי"ח הציבו לסטודנטים הצעות מוגבלות בזמן, כגון: "אם לא תקבל את ההצעה תוך 10 דקות, המקום יועבר למועמד הבא בתור". אתם יכולים לתאר לעצמכם לאיזה לחץ זה הכניס את הסטודנטים, ואיך הרגיש סטודנט שאמר "כן" ואחרי 11 דקות קיבל הצעה טובה יותר... השוק המבוזר נכשל.

בשנת 1952 בתי החולים החליטו לבנות מערכת חדשה שתקבע שידוך בניהול **מרכזי** (centralized). זה שינוי די מהפכני, במיוחד עבור ארצות-הברית הידועה באידיאולוגיה הליברטריאנית-אנטי-צנטרליסטית שלה. בתי-החולים החליטו לוותר על החופש שלהם לבחור בעצמם את המתמחים שלהם, וליצור מערכת שתקבע את השידוך לכל בתי החולים יחד.

שוק דו-צדדי בניהול מרכזי

ברגע שהחלטנו לעבור למערכת מרכזית, אפשר להתחיל לדבר על **אלגוריתם למציאת שידוך**. הקלט לאלגוריתם כזה הוא סדר העדיפויות של כל אחד מהמשתתפים **בכל אחד מהצדדים** של השוק. למשל, בדוגמה של שידוך סטודנטים למחלקות:

- כל סטודנט צריך לדווח את רשימת המחלקות שהוא רוצה להתקבל אליהן, לפי סדר העדיפויות שלו.

- כל מחלקה צריכה לדווח את רשימת הסטודנטים שהיא רוצה לקבל, לפי סדר העדיפויות שלה.

האלגוריתם צריך למצוא שידוך, כלומר - להתאים כל סטודנט למחלקה, כך שמספר הסטודנטים בכל מחלקה יהיה שווה לקיבולת שלה.

אנחנו יכולים להניח, בלי הגבלת הכלליות, שמספר הסטודנטים שווה למספר המקומות הפנויים במחלקות, כך שתמיד אפשר לשדך את כולם (מדוע זה בלי הגבלת הכלליות?).

איך אנחנו מגדירים שידוך "טוב"? קודם-כל, שידוך טוב כמובן חייב להיות יעיל פארטו. אבל זה לא מספיק.

דוגמה. לשם פשטות נניח שיש שני סטודנטים (א,ב), ושתי מחלקות (1,2) עם מקום אחד בכל מחלקה. העדיפויות של הסטודנטים זהות: כולם מעדיפים את 1 על 2. גם העדיפויות של המחלקות זהות: כולן מעדיפות את א על ב. נניח שהשידוך שנבחר הוא: א-2, ב-1.

האם השידוך יעיל פארטו? כן! אי אפשר לבצע שיפורי פארטו. כל שינוי יפגע בסטודנט ב ו/או במחלקה 2.

אבל יש כאן בעיה אחרת. סטודנט א מעדיף את מחלקה 1, ומחלקה 1 מעדיפה את סטודנט א. אז הם יכולים לסכם ביניהם על "קומבינה" שבה א יודיע למחלקה 2 שהוא לא מעוניין, ומחלקה 1 תודיע לסטודנט ב שהמקום תפוס. הם יפרקו את השידוך שהאלגוריתם מצא, וייצרו שידוך אחר שמתאים להם

יותר. אם ננסה למנוע קומבינות כאלה ע"י חקיקה, המחלקות והסטודנטים ימצאו דרכים לעקוף את החוק, והשוק יחזור למצב של פרימה!¹

כדי למנוע את פרימת השוק, אנחנו צריכים אלגוריתם שיוצר שידוך שבו לא יהיו זוגות **שירצו** לבצע קומבינה כזאת.

הגדרות [כל ההגדרות מניחות שיש מקום אחד בכל מחלקה. ההרחבה למצב של כמה מקומות בכל מחלקה - בשיעורי הבית].

- בהינתן שידוך כלשהו, נגדיר **זוג מערער** (blocking pair) כזוג של סטודנט+מחלקה עם המאפיינים הבאים: (א) הסטודנט לא משודך למחלקה. (ב) הסטודנט מעדיף את המחלקה על-פני זו שמשודכת לו. (ג) המחלקה מעדיפה את הסטודנט על-פני זה שמשודך אליה.
- שידוך נקרא **יציב** (stable) אם אין בו זוגות מערערים.

כל שידוך יציב הוא יעיל פארטו (שיעורי בית) אבל ההיפך לא נכון (ראינו למעלה).

האם תמיד קיים שידוך יציב? זה בכלל לא מובן מאליו. העובדה שהגדרנו משהו, לא אומרת שהוא תמיד קיים...

אבל במקרה שלנו, מתברר שהתשובה היא כן! תמיד קיים שידוך יציב. יותר מזה, קיים אלגוריתם יעיל שמוצא אותו. הנה הוא.

אלגוריתם "קבלה על-תנאי" (deferred acceptance).

האלגוריתם הוצע לראשונה בשנת 1952 ע"י סטודנטים לרפואה שרצו לתקן את המנגנון הקיים להשמת מתמחים לבתי-חולים בארה"ב. הוא הוצג לראשונה באופן פורמלי ע"י דוד גייל (David Gale) ולויד שאפלי (Lloyd Shapley) בשנת 1962. בזכות השימושים הרבים שלו במקומות רבים בעולם, זכה שאפלי בפרס נובל ב-2012 (גייל נפטר מספר שנים קודם).

לצורך הפשטות אנחנו מניחים שיש מקום אחד בכל מחלקה.

א. כל סטודנט הולך למחלקה שהוא הכי רוצה, מבין המחלקות שעדיין לא דחו אותו, ונותן לה הצעה.

ב. כל מחלקה משאירה אצלה את הסטודנט שהיא הכי רוצה, מבין הסטודנטים שנמצאים בה, ודוחה את כל השאר.

(הסטודנט שנשאר במחלקה התקבל על-תנאי שלא יבוא סטודנט טוב יותר. מכאן שם האלגוריתם).

ג. חוזרים על שלבים א ו-ב עד שכולם משודכים.

משפט. אלגוריתם "קבלה על-תנאי" מסתיים בשידוך יציב.

הוכחה. צריך להוכיח שלושה דברים: מסתיים, בשידוך, יציב.

- מסתיים: כי כל סטודנט מציע לכל מחלקה פעם אחת לכל היותר. מספר המחלקות והסטודנטים סופי ולכן הכל מסתיים.

¹הבעיה הזאת אכן קרתה במקומות רבים בעולם. לדוגמה, מערכת הבריאות של אנגליה בשנות ה-1960 החליטה לעבור לשיטה מרכזית להשמת מתמחים לבתי-חולים, אולם נתנה לכל איזור חופש לקבוע את האלגוריתם. מבין 5 איזורים שבחרו באלגוריתם שאינו מבטיח יציבות, 3 איזורים נאלצו לזנוח את המערכת שלהם תוך שנים ספורות. המתמחים ובתי-החולים פשוט לא השתמשו במערכת - הם העדיפו לעקוף אותה ולנהל משא-ומתן בלעדיה.

- כשידוך: נניח שיש מחלקה לא-משודכת. אז אף סטודנט לא הגיע אליה. כיוון שמספר הסטודנטים והמחלקות שווה, יש גם סטודנט לא משודך. הוא עובר על כל הרשימה שלו מלמעלה למטה, לכן בהכרח הוא יגיע מתישהו למחלקה הלא-משודכת וישתדך איתה. כלומר האלגוריתם עוד לא הסתיים.
- יציב: מצבה של כל מחלקה הולך ומשתפר - היא מחליפה שידוך רק אם מגיע סטודנט טוב יותר עבורה. לעומת זאת, מצבו של כל סטודנט הולך ומתדרדר - כשהוא נדחה, הוא תמיד עובר למחלקה גרועה יותר עבורו.
- מכאן, אם זוג מסויים (ס,מ) לא נוצר אז יש שתי אפשרויות:
 - א. ס עוד לא היה ב-מ: מכאן ש-ס נמצא במחלקה טובה יותר.
 - ב. ס כבר היה ב-מ: מכאן של-מ יש סטודנט טוב יותר. מש"ל.

הרחבות

ניתן להרחיב את המנגנון בדרכים רבות. לדוגמה, סטודנט יכול להחליט שיש מחלקות מסויימות שהוא לא רוצה בכלל - הוא מעדיף להישאר בלי מחלקה, מאשר להיות משודך אליהן. במקרה זה אומרים שהסטודנט "מקצץ" (truncate) את רשימת העדיפויות שלו. למשל, אם יש 10 מחלקות אבל הוא מוכן להירשם רק ל-3 מתוכן, אז הוא מגיש סדר עדיפויות רק עבור 3 המחלקות הללו ומקצץ את הרשימה אחרי המחלקה השלישית. אם כל שלושת המחלקות הללו דוחות אותו, הוא יישאר בלי מחלקה (או משודך ל"קבוצה ריקה"). באותו אופן מחלקות יכולות "לקצץ" את הרשימה שלהן כדי לקבוע שהן לא מוכנות בשום אופן לקבל סטודנטים מסויימים. אם הסטודנטים הללו יפנו אליהן, הם יידחו מייד.

הרחבות נוספות - בשיעורי הבית.

איזה שידוך יציב מתקבל?

באלגוריתם שהצגנו למעלה, הסטודנטים מציעים למחלקות, והמחלקות מחליטות את מי לקבל. יכולנו גם לנהל את האלגוריתם בסדר הפוך: המחלקות מציעות לסטודנטים, והסטודנטים מחליטים את מי לקבל.

האם לדעתכם יש הבדל בין שתי הגישות? כסטודנטים, איזה אלגוריתם תעדיפו? כמנהלי מחלקות, איזה אלגוריתם תעדיפו?

משפט: כשהסטודנטים הם המציעים - השידוך המתקבל הוא הטוב ביותר לכל הסטודנטים מכל השידוכים היציבים.

הוכחה: כיוון שכל סטודנט יורד ברשימת המחלקות שלו מהגבוהה לנמוכה, מספיק להוכיח ש: אם הזוג (ס, מ) קיים בשידוך יציב כלשהו, אז מחלקה מ לא דוחה את סטודנט ס. נניח בשלילה שזה לא נכון. נסתכל על הפעם הראשונה שזה קורה. מ דוחה את ס כיוון שהיא קיבלה הצעה מסטודנט טוב יותר עבורה, נניח ע. בשידוך היציב האחר, ע משודך למחלקה טובה יותר עבורו, נניח נ. זה אומר שמחלקה נ דחתה את ע קודם - סתירה להנחה שזו הפעם הראשונה. מש"ל.

המשפט הזה מאד מעניין כי הוא מנוגד לאינטואיציה, ולא רק לאינטואיציה שלי: הסטודנטים לרפואה שפיתחו את המנגנון בשנת 1952, קבעו שבת-החולים יהיו המציעים! אילו הם היו יודעים את המשפט שהוכחנו הרגע, הם היו מעדיפים שהסטודנטים יציעו.

האם אלגוריתם "קבלה על-תנאי" אמיתי?

אלגוריתם "קבלה על-תנאי" הוא אמיתי למחצה. למה הכוונה? אם הסטודנטים מציעים, אז אפשר להוכיח שהאלגוריתם הוא אמיתי **עבור הסטודנטים**. כלומר, הכי משתלם לכל סטודנט לגשת למחלקות בסדר העדיפויות האמיתי שלו.

ההוכחה מורכבת למדי ולא נציג אותה כאן. במקום זה, נציג סוג אחד של שינוי שסטודנטים יכולים לחשוב שכדאי להם לעשות, ונוכיח שזה לא כדאי. השינוי הוא "להתפשר". הרבה פעמים אומרים לרווקים ורווקות "אתם צריכים להתפשר, אחרת תפסידו את הזיווג שלכם". גם סטודנט עלולים לחשוב שהוא צריך להתפשר כדי שלא יפסיד שידוך עם מחלקה. למשל, נניח שאתה פונה למחלקות לפי הסדר האמיתי שלך: פונה למחלקה 1 ונדחה, למחלקה 2 ונדחה וכו', עד שבסוף אתה מתקבל למחלקה 5 (החמישית בדירוג שלך). אתה יכול לחשוב לעצמך "חבל שבזבזתי זמן על מחלקות 1 ו-2, ממילא לא היה לי סיכוי, בזמן שחיכיתי שם מישוהו תפס לי את המקום במחלקה 3. אילו הייתי מלכתחילה מתפשר והולך למחלקה 3, הייתי מתקבל". אבל השיקול הזה לא נכון. בגלל שהקבלה היא על-תנאי, אף אחד לא יכול לתפוס לך את המקום. נניח שבזמן שחיכית במחלקות 1 ו-2, הגיע סטודנט אחר למחלקה 3. אם מחלקה 3 מעדיפה אותך עליו, אז כשתגיע אליה, היא תסלק אותו ותיקח אותך. אם מחלקה 3 מעדיפה אותו עליך, אז גם אם תגיע אליה ראשון, כשהוא יגיע אליה היא תסלק אותך ותיקח אותו. נוכיח את זה פורמלית.

משפט. נניח שמריצים את האלגוריתם על קלט א. מקבלים שידוך יציב א, שבו ס משודך למחלקה מ. יוצרים קלט ב הזהה לקלט א בכל, פרט לכך שסטודנט ס מוחק מהדירוג שלו מחלקה אחת או יותר שהוא מעדיף על-פני מ (בבחינת "ממילא לא יקבלו אותי, אין טעם לגשת"). מריצים את האלגוריתם על קלט ב ומקבלים שידוך יציב ב. אז:

- שידוך ב הוא יציב גם לפי קלט א. הוכחה: נניח בשלילה שיש זוג (ע,ג) המערער על שידוך ב לפי קלט א. אם ע אינו ס, אז אותו זוג מערער על שידוך ב גם לפי קלט ב, כי הדירוגים של שאר המשתתפים לא השתנו, וזו סתירה ליציבות של שידוך ב. אותו הדבר נכון אם $ע=ס$ וגם ס מעדיף-חלש את מ על נ, כי הדירוג של ס ממחלקה מ ומטה לא השתנה. אם $ע=ס$ וגם ס מעדיף-חזק את נ על מ, אז אותו זוג מערער לפי קלט א גם על שידוך א, כי הדירוג של מחלקה נ לא השתנה, וזו סתירה ליציבות של שידוך א. מש"ל.

- בשידוך א, כל הסטודנטים מקבלים מחלקה טובה לפחות כמו בשידוך ב. הוכחה: שידוך ב יציב לפי קלט א, ושידוך א הוא היציב הטוב ביותר לסטודנטים לפי קלט א.

מצד שני, האלגוריתם לא אמיתי **עבור המחלקות**. מחלקות יכולות להשיג "שידוך" טוב יותר על-ידי דיווח העדפות שונות מהאמיתיות; ראו דוגמה במצגת.

אם המחלקות מציעות אז המצב הפוך: האלגוריתם הוא אמיתי עבור המחלקות ולא עבור הסטודנטים.

האם קיים מנגנון אחר למציאת שידוך יציב, שהוא אמיתי עבור שני הצדדים? התשובה היא לא!

משפט. לא קיים מנגנון המוצא שידוך יציב, שהוא אמיתי עבור שני הצדדים.

הוכחה. נניח בשלילה שקיים מנגנון כזה. נתבונן במצב מסויים (ראו במצגת) שבו ישנם בדיוק שני שידוכים יציבים. המנגנון שלנו חייב להחזיר אחד מהם. נוכיח (במצגת) שאם הוא בוחר בשידוך א, אז אחת המחלקות יכולה להתחכם ולשפר את מצבה; ואם הוא בוחר בשידוך ב, אז אחד הסטודנטים יכול להתחכם ולשפר את מצבו. מכאן שהמנגנון לא יכול להיות אמיתי - סתירה להנחה.

אז מה עושים? -- במציאות בדרך-כלל מממשים את האלגוריתם שבו הסטודנטים מציעים, כדי להקל על הסטודנטים ולחסוך להם את הצורך לבצע שיקולים אסטרטגיים.

שידוכים יציבים בישראל

מאז כניסתו לשימוש בשנת 1952 בארה"ב, אלגוריתם הקבלה על-תנאי יושם בעוד מקומות רבים בעולם. האלגוריתם נכנס גם לישראל, לשידוך בין מועמדים לתואר שני בפסיכולוגיה לבין מחלקות. המערכת פועלת כבר מספר שנים כאן: <http://www.psychologymatch.org>. תהליך הכנסת המערכת לשימוש בישראל היה מעניין מאד והעלה אתגרים מחקרניים חדשים שניתן לקרוא עליהם כאן: http://scholar.harvard.edu/files/ran/files/redesigning_the_israeli_psychology_masters_match.pdf

מקורות

- הקורס של טים: <http://theory.stanford.edu/~tim/f16/f16.html> הרצאות 1, 2
- Alvin Roth, "Who gets what and why", 2015
- <http://www.cs.columbia.edu/~evs/intro/stable/writeup.html>
- Avinatan Hassidim, Assaf Romm, Ran Shorrer, "Redesigning the Israeli Psychology Master's Match", American Economic Review, 2017

סיכום: אראל סגל-הלוי.