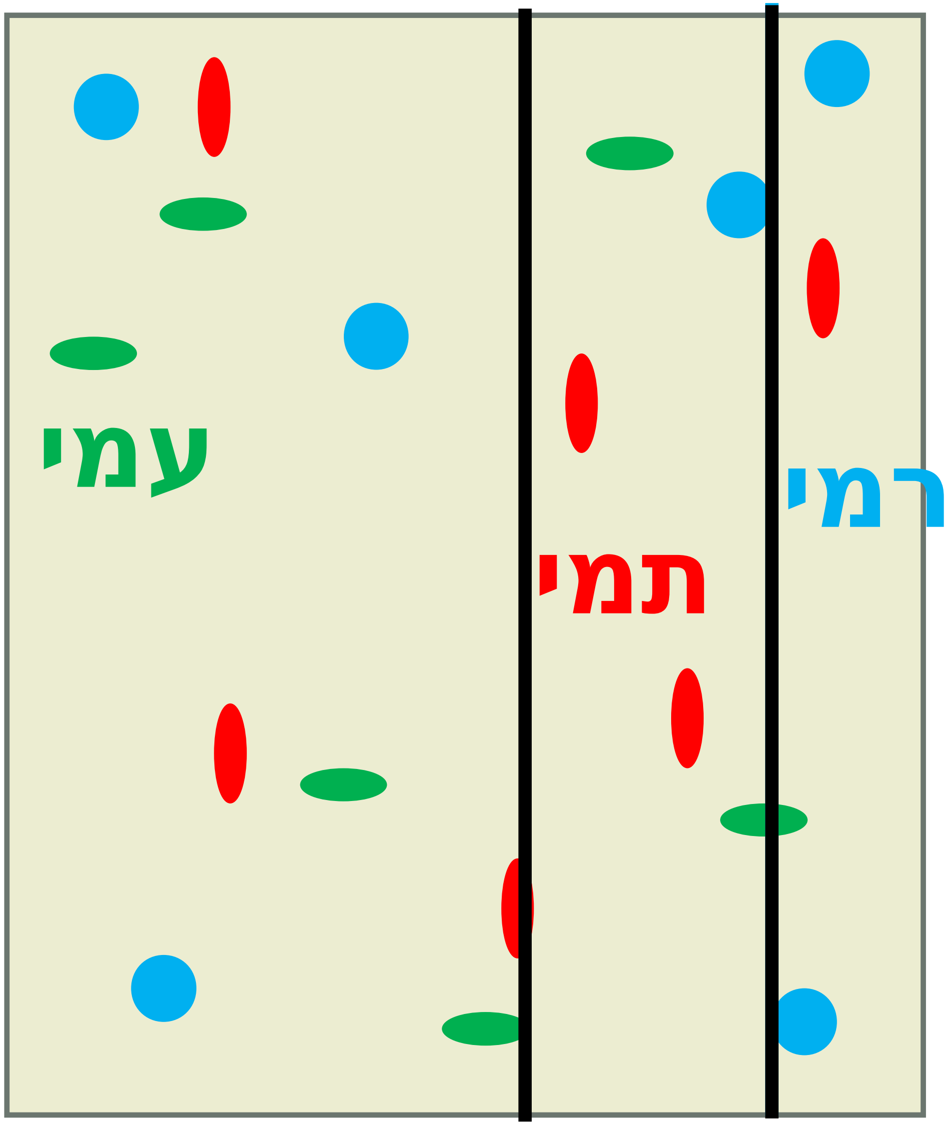
"ונחלתם אותה איש כאחיו" (יחזקאל מז 14)

חלוקה ללא קנאה

Envy-Free Division

אראל סגל-הלוי

קנאה



האלגוריתמים שראינו לא מבטיחים שהחלוקה תהיה ללא קנאה.

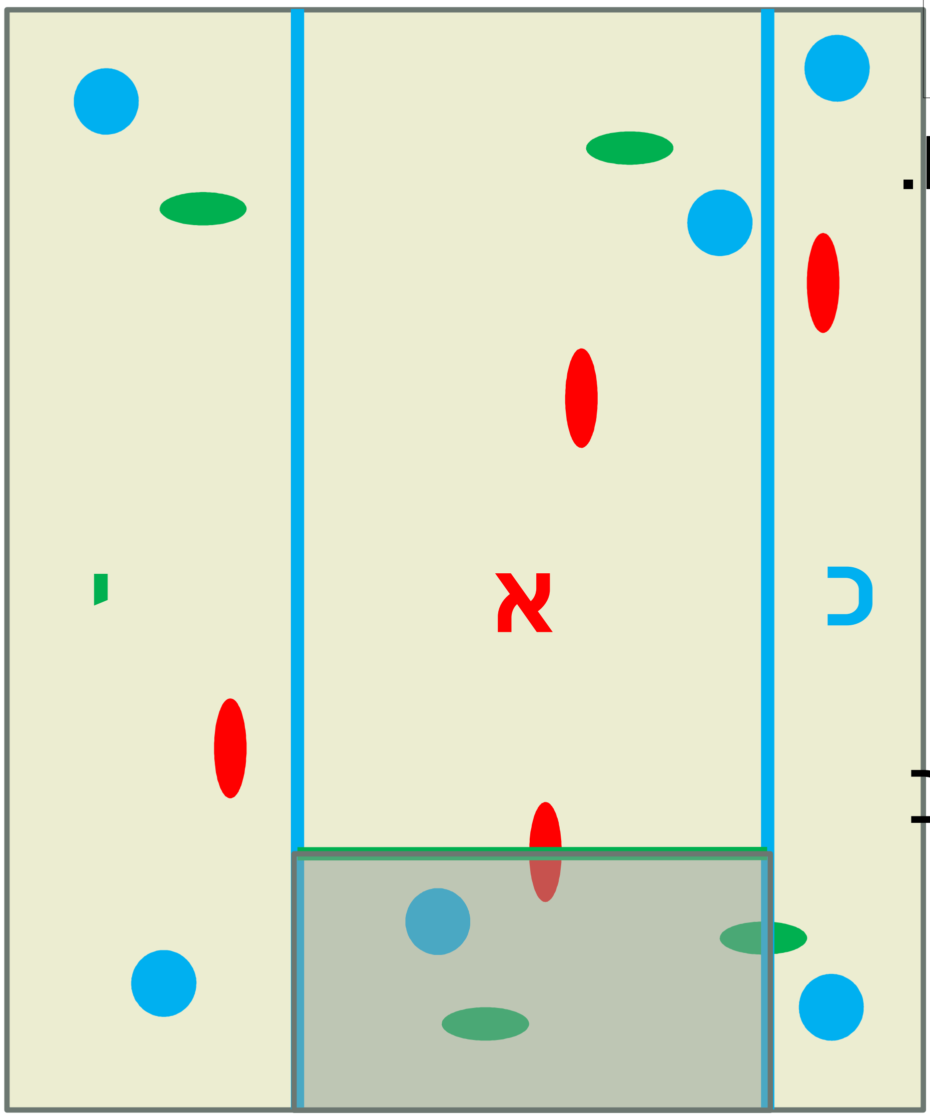
קנאה זה דבר מעצבן – ולא רק בני אדם -

youtube.com/watch?v=WUquKkTmbww

אז איך מוצאים חלוקה ללא קנאה?

חלוקה ללא קנאה ל-3 שותפים

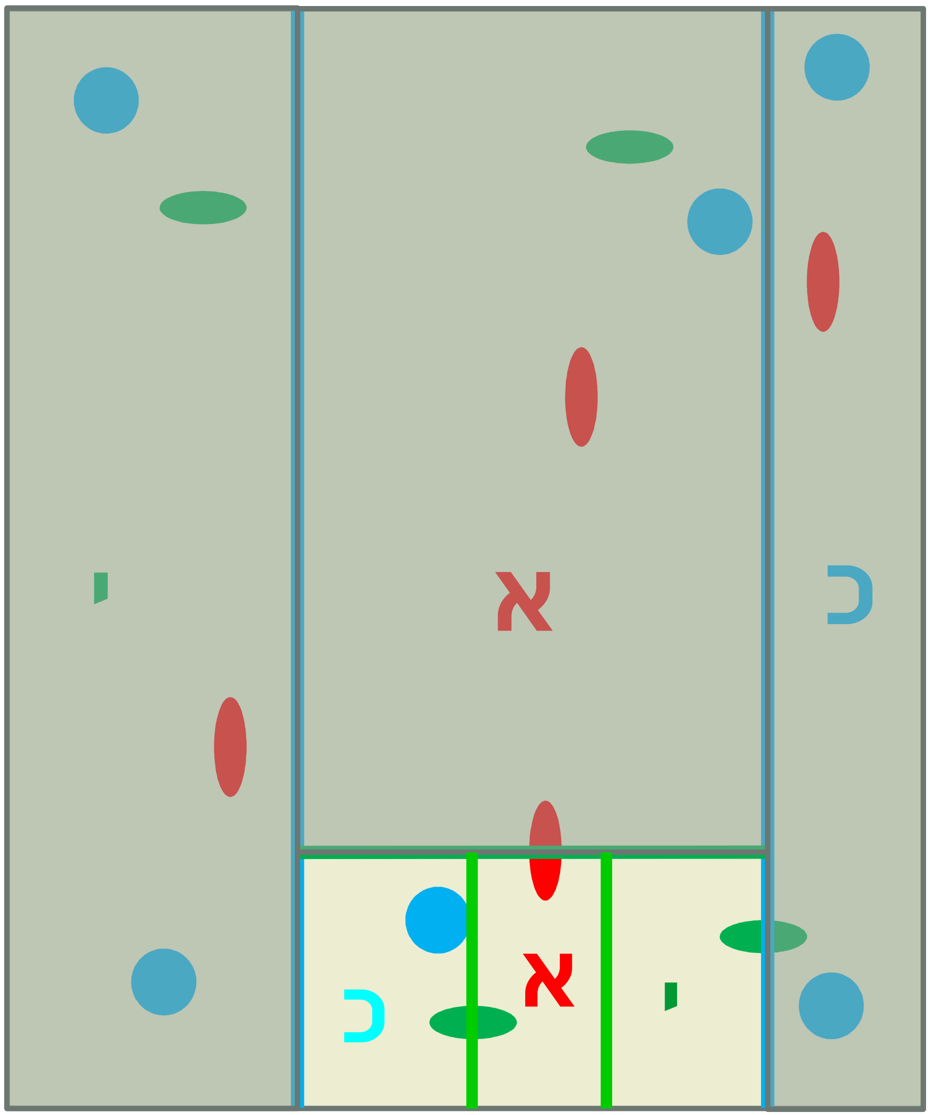
אלגוריתם Selfridge – Conway, 1963



- כ חותך 3 חתיכות שוות בעיניו.
- אם א, י מעדיפים חתיכות שונות – סיימנו. אחרת -
- י מקצץ את החתיכה הטובה ביותר ו**משווה** לשניה בעיניו.
- א, י, כ בוחרים חתיכה. י חייב לבחור את זו שקיצץ, אם לא נבחרה קודם.
- קיבלנו חלוקה עם שארית.

חלוקה ללא קנאה ל-3 שותפים

אלגוריתם – Selfridge
חלק ב – Conway, 1963



- [א או י בחרו את החתיכה המקוצצת; במקרה זה א].
- י (שלא בחר את החתיכה המקוצצת) מחלק את השארית לשלוש חתיכות שוות בעיניו.
- א, כ, י בוחרים חתיכה.

סלפרידג'-קונווי

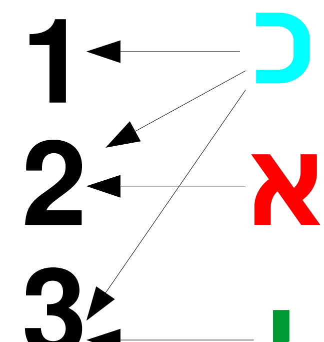
משפט: אלגוריתם סלפרידג'-קונווי נותן חלוקה ללא קנאה - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל חתיכה טובה לפחות כמו שתי האחרות.

הוכחה: נבנה גרף דו"צ שבו:

- הצמתים - שחקנים מצד אחד וחתיכות מצד שני.
- הקשתות - מכל שחקן לחתיכות הטובות בעיניו.

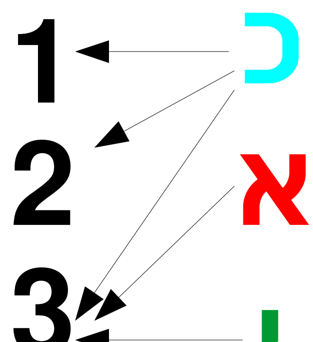
שידוך מושלם בגרף זה = חלוקה ללא קנאה!

אחרי החלוקה הראשונה של כ יש שני מקרים:



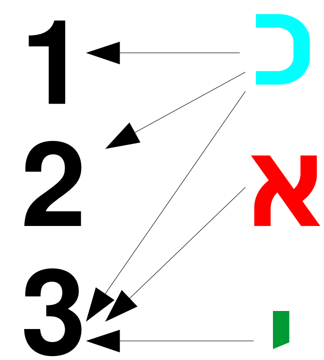
(המקרה הקל)

או

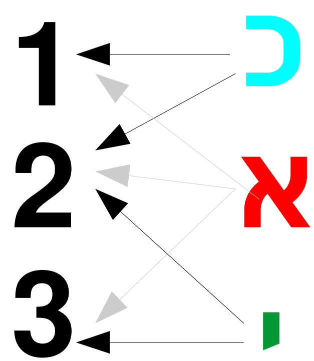


(המקרה הקשה)

סלפרידג'-קונוויי – המשך הוכחה

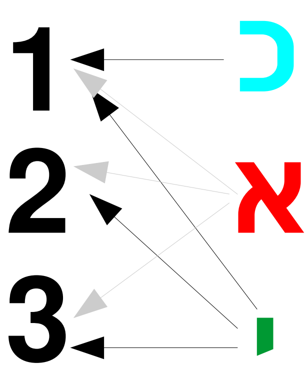


אחרי הקיצוץ
של **י** הופך ל:



בוחרים לפי הסדר **א**, **י**, **כ**. לא משנה מה **א** בוחר - ל-**י** נשאר מה לבחור. הוא חייב לבחור את 3 אם היא קיימת, לכן גם ל-**כ** נשאר מה לבחור.

חלק ב: נניח ש-**א** לקח את החתיכה המקוצצת. אז **י** חותך; **א**, **כ**, **י** בוחרים. **א** בוחר ראשון; ל-**י** יש שלוש חתיכות לבחור; *ו-**כ** לא יקנא ב-**א** אפילו אם **א** ייקח את כל השארית!* ***



חלוקה ללא קנאה

שאלות:

- מה קורה כשיש **4** שותפים או יותר?
- איך מוצאים חלוקה ללא קנאה עם חתיכות **קשירות**?
  - *(כזכור, האלגוריתמים לפרופורציונליות מוצאים חלוקה קשירה לכל מספר של שותפים).*

חלוקה ללא קנאה ל-n שותפים

1963: אלג' סלפרידג'-קונוויי ל-3 אנשים. 5 שאילתות

1996: אלג' בראמס-טיילור. #שאילתות לא חסום.

1998: אלג' רוברטסון. #שאילתות לא חסום.

2000: אלג' פיקהורקו. #שאילתות לא חסום.

2009: משפט פרוקצ'יה: #שאילתות לפחות n^2.

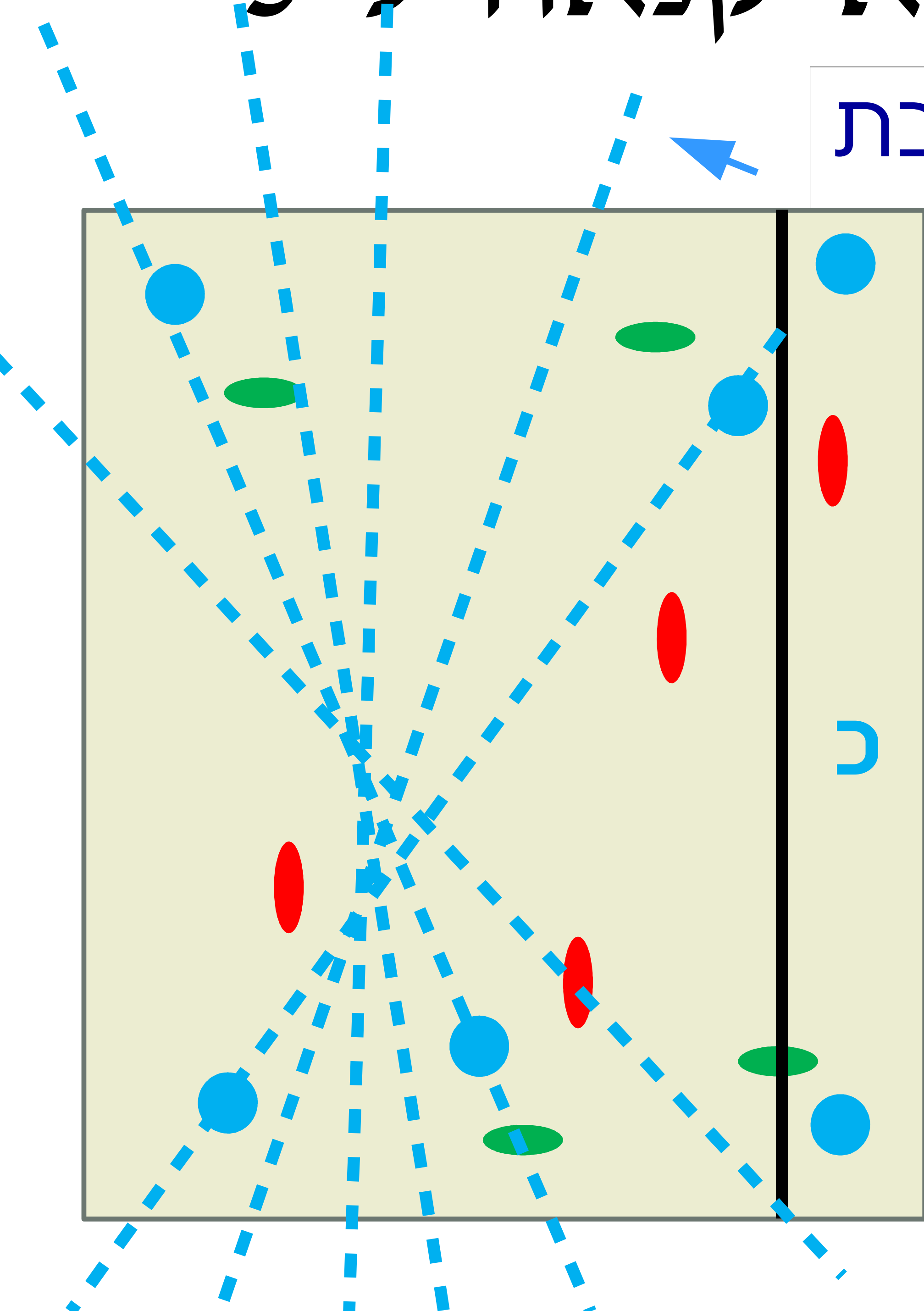
2015: אלג' עזיז-מקנזי ל-4. #שאילתות חסום!

2016: אלג' עזיז-מקנזי ל-n. #שאילתות חסום!

$$O(n^{n^{n^{n^{n^{n}}}}})$$

עדיין לא ידוע כמה שאילתות באמת צריך – האם אפשר למצוא אלגוריתם הדורש n^2 שאילתות?

חלוקה **קשירה** ללא קנאה ל-3

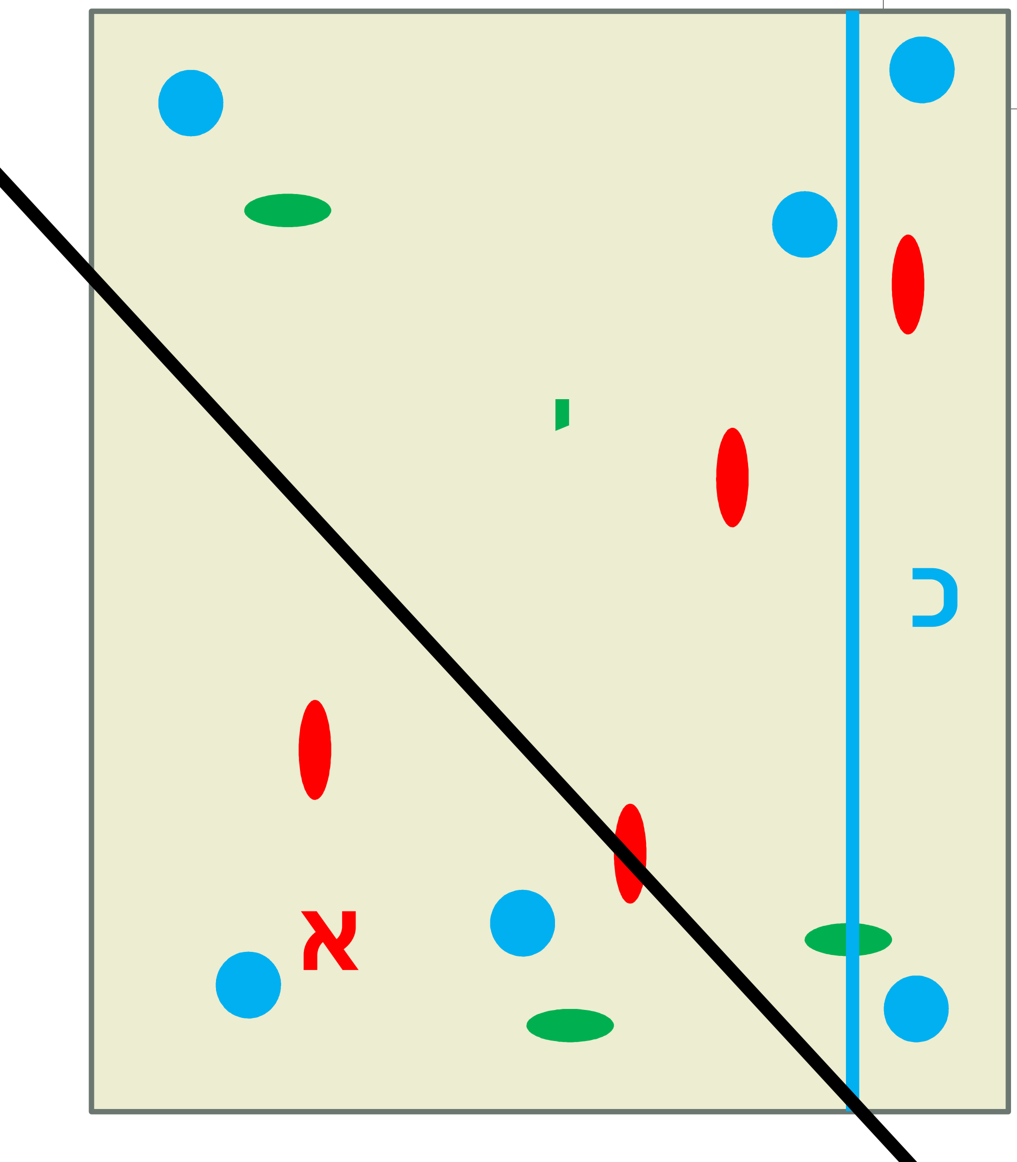


אלגוריתם הסכין המסתובבת
– רוברטסון-ווב 1998

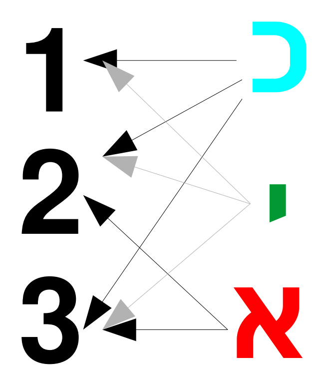
- עושים צעד אחד של "המפחית האחרון". שחקן אחד (נניח כ) זוכה בחתיכה.
- הזוכה (כ) מסובב סכין ארוכה מעל השארית, כך ששני החלקים תמיד שוים בעיניו.
  - *(אפשרי - משפט ערך הביניים).*
- א אומר "עצור" ברגע ששני החלקים שוים בעיניו.
  - *(תמיד יקרה - משפט ערך הביניים).*

חלוקה קשירה ללא קנאה ל-3

אלגוריתם הסכין המסתובבת
– רוברטסון-ווב 1998 [...]

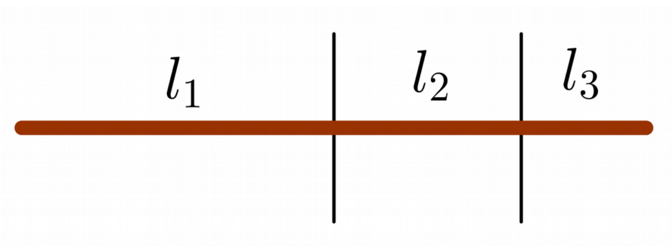


- בוחרים לפי הסדר י, א, כ.
- הוכחה שאין קנאה:



חלוקה קשירה ללא קנאה ל-n

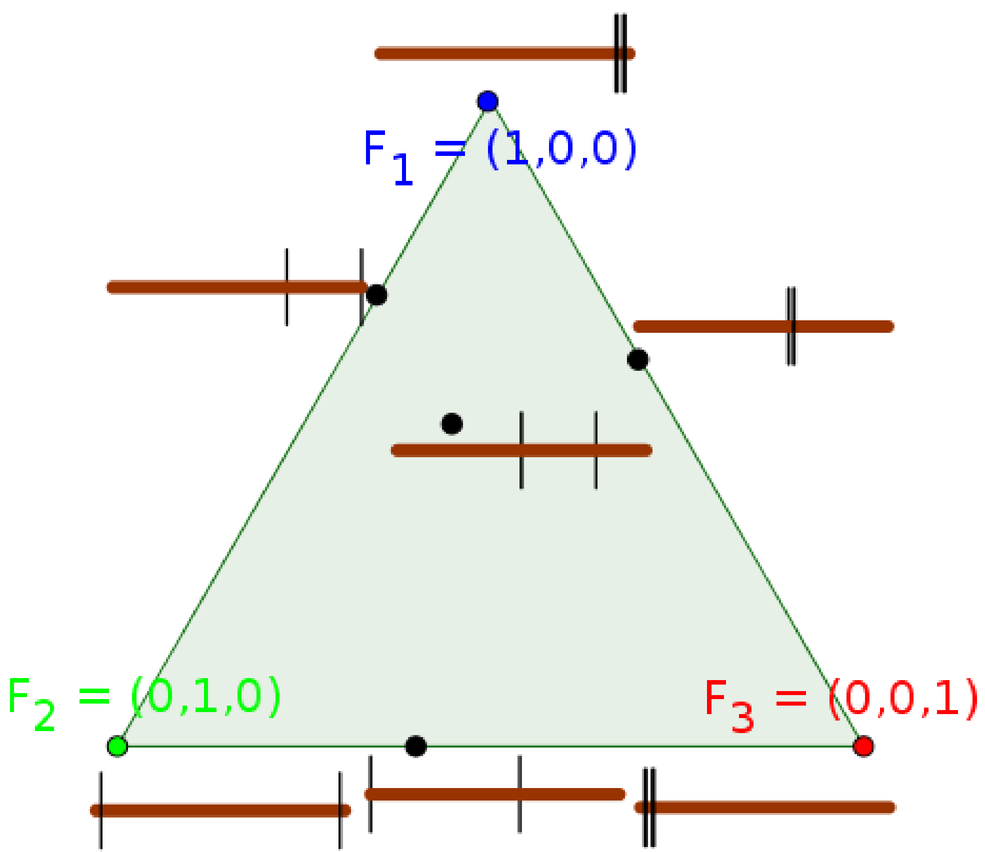
- נסתכל על כל החלוקות הקשירות ל-n חתיכות.
- כל חלוקה מוגדרת ע"י n מספרים שסכומם קבוע.



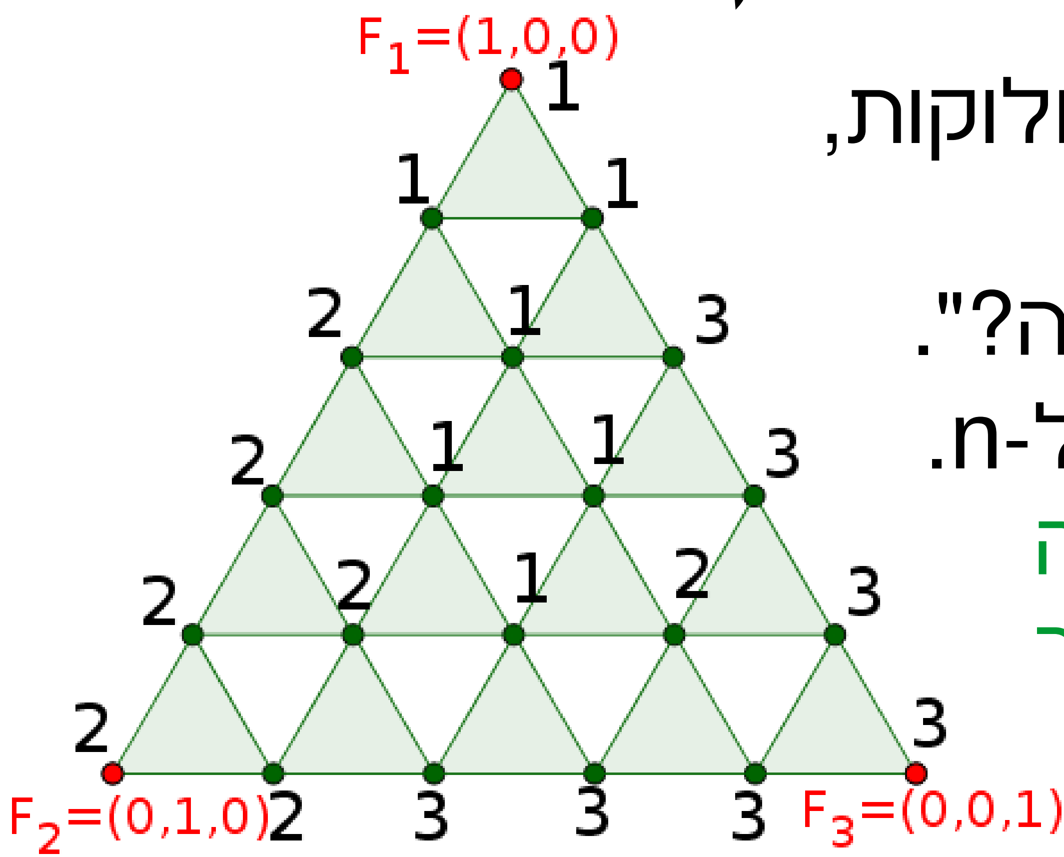
$$l_1 + l_2 + l_3 = 1$$

מרחב החלוקות הקשירות הוא

- עבור n=2 – **קטע**.
- עבור n=3 – **משולש**.
- עבור n=4 – **טטראדר**.
- באופן כללי – **סימפלקס**.

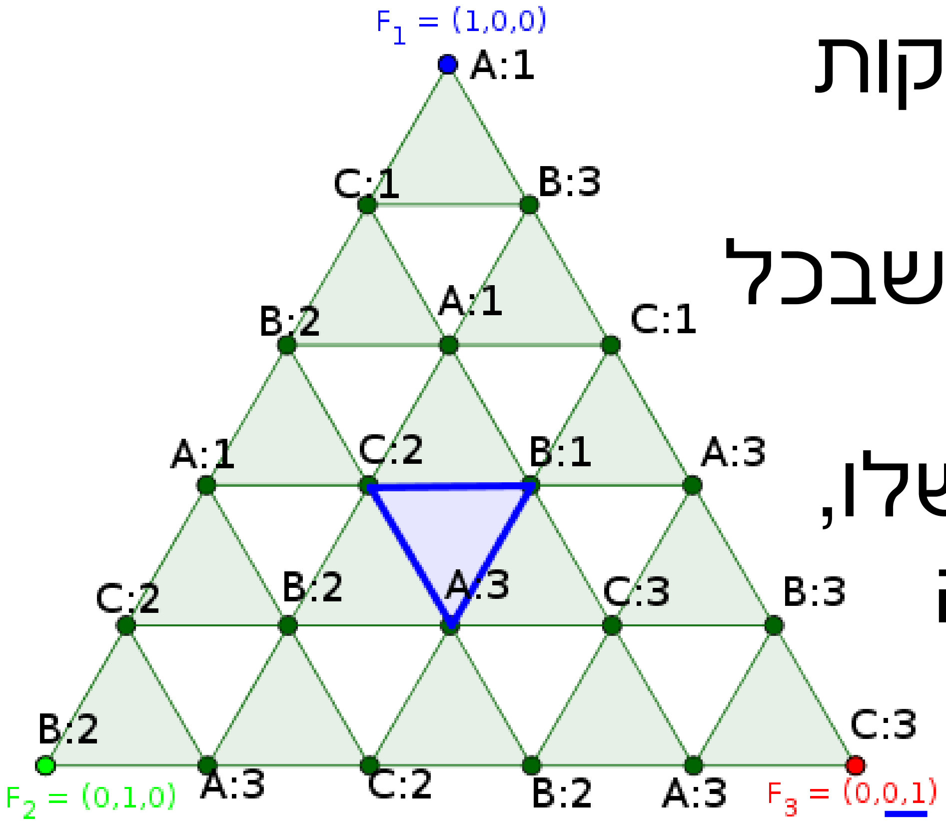


חלוקה קשירה ללא קנאה ל-n



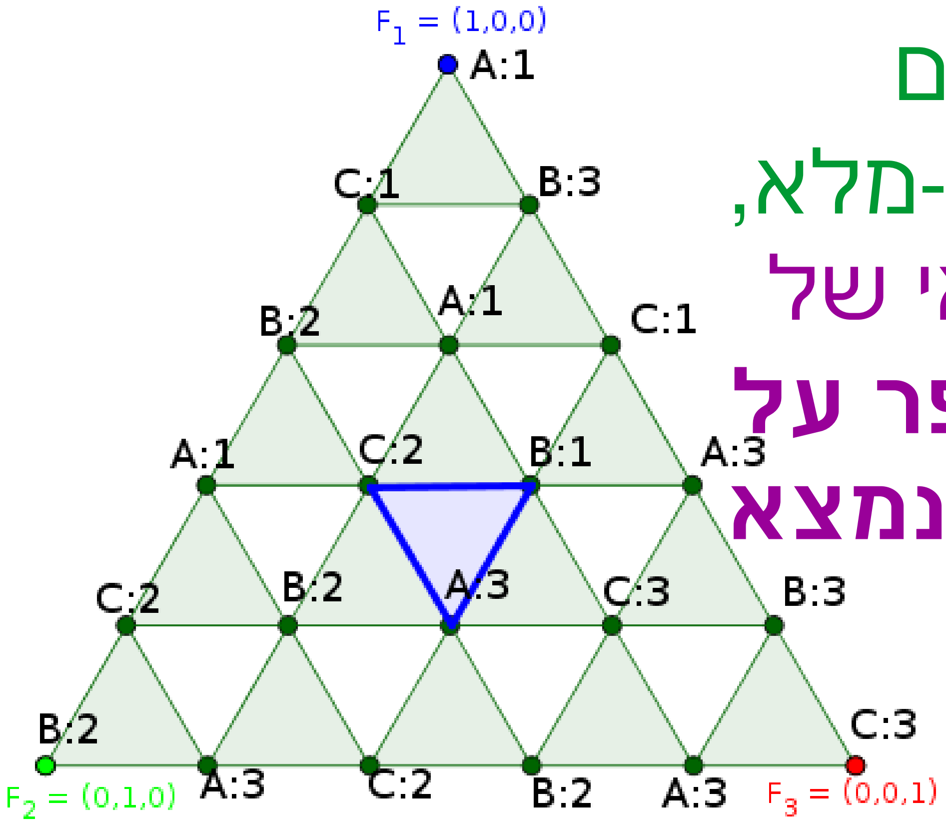
- בכל נקודה בסימפלקס החלוקות, אפשר לשאול כל שחקן "איזו חתיכה אתה הכי רוצה?". התשובה היא מספר בין 1 ל-n.
- חלוקה ללא קנאה = נקודה שבה כל שחקן כותב מספר אחר.
- חלוקה כמעט-ללא-קנאה = סימפלקסון שבו אפשר לחלק קודקוד לכל שחקן, כך שכל שחקן כתב על הקודקוד שלו מספר אחר.

אלגוריתם סימונס (Su 1999)



- מחלקים את סימפלקס-החלוקות לסימפלקסונים.
- נותנים כל צומת לשחקן, כך שבכל סימפלקסון, כולם מיוצגים.
- כל שחקן כותב, בכל צומת שלו, את מספר החתיכה הכי טובה בעיניו.
- מחפשים **סימפלקס-n מלא =** עם n מספרים שונים = חלוקה כמעט-ללא-קנאה.
- נוכיח באינדוקציה על n שקיים מספר איזוגי של סימפלקס-n-מלא.

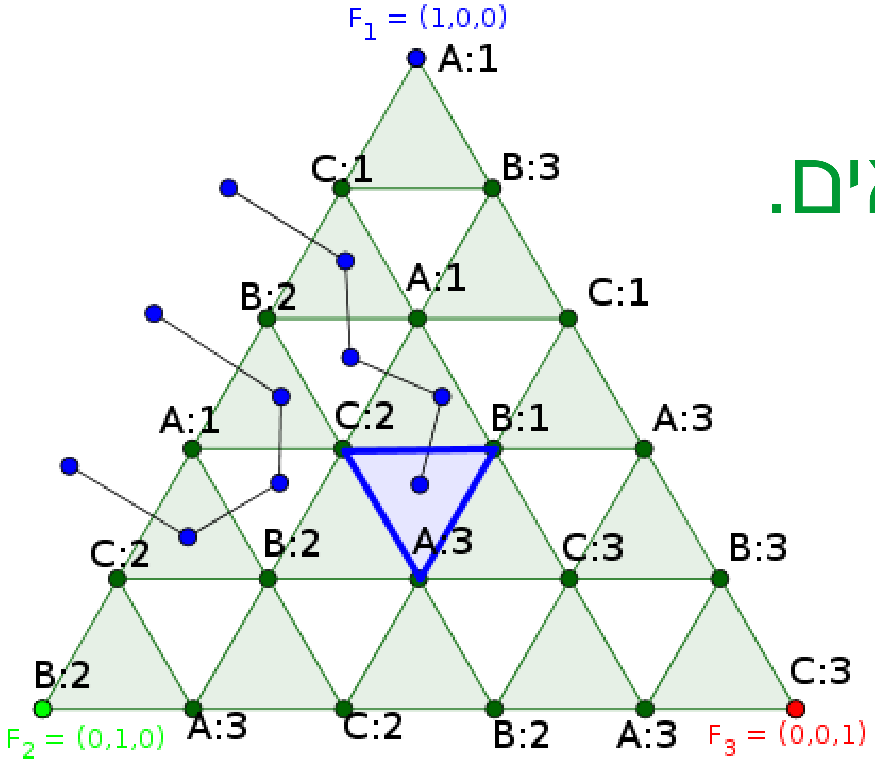
הלמה של שפרנר (Sperner's Lemma)



- נוכיח באינדוקציה על n שקיים מספר איזוגי של סימפלקס-n-מלא, בכל מצב שבו מתקיים התנאי של שפרנר (Sperner): **כל מספר על צומת בשפה הוא מספר שנמצא על קצות השפה.**
- התנאי הזה תמיד מתקיים אצלנו, כי כל שחקן מעדיף פרוסה לא ריקה!

בסיס: n=2. נסתכל על הצלע בין F_1 ל-F_2. המספרים מתחילים ב-1 ומסתיימים ב-2, ולכן מספר המעברים הוא איזוגי.

הלמה של שפרנר (Sperner's Lemma)



נוכיח באינדוקציה על n שקיים
מספר איזוגי של סימפלקס-n-מלאים.

בסיס: n=2. מספר המעברים בין 1 ל-2 הוא איזוגי.

צעד: נבחר סימפלקס-(n-1)-מלא וניכנס דרכו. הגענו לסימפלקס-n.
יש רק שתי אפשרויות:

- הגענו לסימפלקס-n-מלא.
- יש עוד סימפלקס-(n-1)-מלא. נצא דרכו ונמשיך לטייל.

בסוף, או שנגיע לסימפלקס-n-מלא, או שנצא החוצה דרך סימפלקס-(n-1)-מלא אחר.

לכן, יש גם מספר איזוגי של סימפלקס-n-מלאים. ***

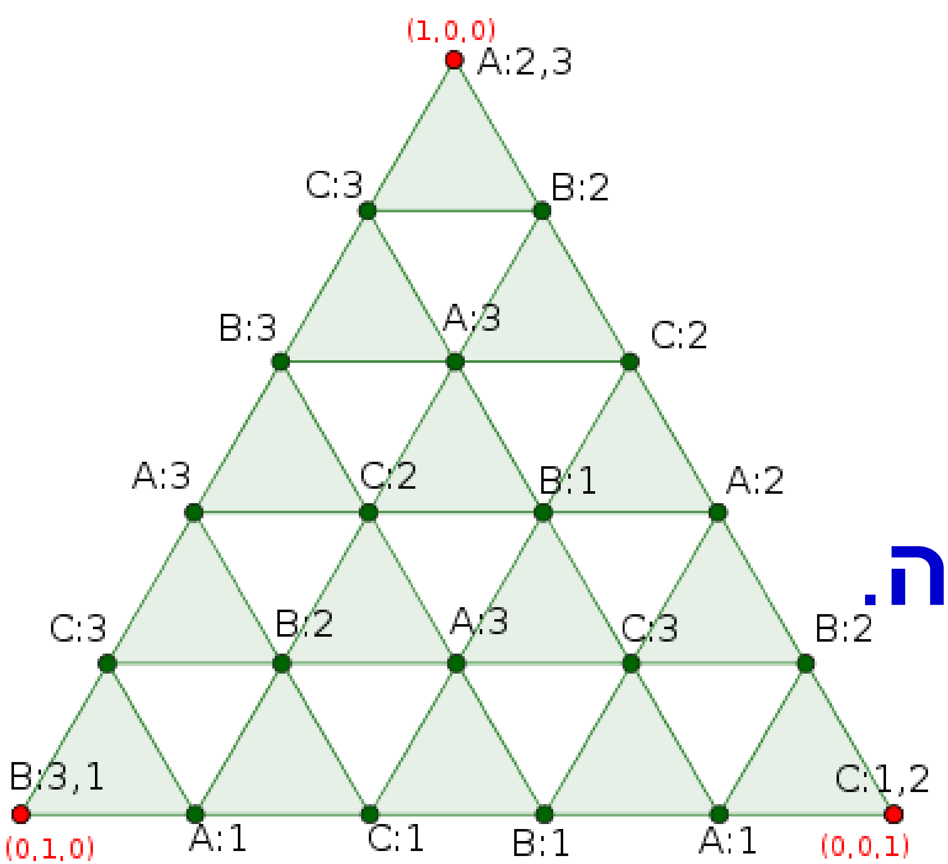
חלוקה של “עוגה” עם ערך שלילי

דוגמאות ל"עוגות" עם ערך שלילי:

- העוגה נשרפה/כולם בדיאטה, אבל צריך לאכול כי לא נעים מהמארחים.
- ה"עוגה" היא משל לקרקע שצריך לטפל בה (למשל לכסח את הדשא).
- ה"עוגה" היא משל לזמן שבו צריך לבצע תורנות.

כל שחקן מעדיף פרוסה **ריקה**.

תנאי שפרנר מתקיים -->
קיימת חלוקה ללא קנאה!



חלוקה קשירה ללא קנאה

1980: משפט סטרומקוויסט: תמיד קיימת חלוקה.

1980-1998: אלגוריתמי סכינים, לשלושה אנשים.

1999: אלגוריתם סימונס, #שאילתות אינסופי.

2008: משפט סטרומקוויסט: #שאילתות תמיד אינסופי!

מספר שאילתות לחלוקת עוגה

שחקנים	חלוקה פרופורציונלית	חלוקה ללא קנאה	חלוקה קשירה ללא קנאה
2	2		
3	$\Theta(n \log n)$	5	אינסוף!
4		200	
n		$\Omega(n^2)$ $O(n^{nnnnn})$	