החלפות ומעגלים

היום נדבר על החלפות. נניח שכמה עובדים משובצים לתורניות, וחלק מהם היו מעדיפים להתחלף עם אחרים. או, בהמשך לדוגמאות מהשיעור הקודם, כמה סטודנטים משובצים לחדרים במעונות והיו מעוניינים להתחלף. אנחנו רוצים ליצור שיבוץ חדש שיהיה יעיל פארטו. לכאורה הבעיה דומה לבעיית השיבוץ שדיברנו עליה בשיעור הראשון, הרי בסופו של דבר המטרה היא לייצר שיבוץ. ואכן אפשר להשתמש באלגוריתם "דיקטטורה סדרתית" שהזכרנו בשיעור הראשון והתוצאה תהיה יעילה פארטו. אבל זה לא אלגוריתם טוב. מדוע? כי כאן - בניגוד לבעיה הראשונה - לאנשים יש זכויות קודמות עוד לפני הפעלת המנגנון. כדי שאנשים יסכימו להשתתף במנגנון שלנו, אנחנו חייבים להבטיח להם שלא ייגרם להם נזק. אז בנוסף לתכונות של יעילות-פארטו ושל אמיתיות, אנחנו דורשים תכונה שלישית.

הגדרה: מנגנון מקיים את התכונה **השתתפות מרצון** (באנגלית voluntary participation, מושג נרדף: individual rationality) אם כל משתתף מעדיף את תוצאת המנגנון על-פני המצב לפני המנגנון (או לפחות אדיש בין התוצאות).

אלגוריתם הדיקטטורה הסדרתית לא מקיים תכונה זו. הנה אלגוריתם שכן מקיים אותה.

אלגוריתם מעגלי המסחר - Top Trading Cycles

האלגוריתם פותח ע"י אותם חוקרים שפיתחו את המנגנון לשידוך יציב - Gale ו Shapley, עם חוקר שלישי בשם Scarf. הקלט לאלגוריתם הוא שיבוץ של **אנשים** ל**בתים** - לכל איש יש בית אחד.

האלגוריתם מחזיק גרף מכוון שבו:

- הצמתים הם האנשים והבתים;
- יש קשת מכל אדם אל הבית שהוא הכי רוצה, ומכל בית אל האדם שהוא שייך אליו.

מעדכנים את הגרף באופן הבא:

א. מוצאים מעגל מכוון בגרף (למשל ע"י אלגוריתם DFS שלמדתם בקורס קודם).
ב. מבצעים את ההחלפה במעגל: כל אדם מקבל את הבית שהוא מצביע עליו.
ג. מוחקים מהגרף את הצמתים של האנשים והבתים שהשתתפו בהחלפה.
ד. לכל איש שנשאר בגרף, מעדכנים את הקשת שלו כך שתצביע לבית שהוא הכי רוצה מאלה שנשארו.
ה. חוזרים על סעיפים א-ד עד שהגרף ריק.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מסתיים.
הוכחה: מספיק להוכיח שבשלב א תמיד קיים מעגל. הסיבה היא שמכל צומת יוצאת קשת אחת בדיוק. כיוון שהגרף סופי, אם נתחיל מצומת כלשהו ולך בכיוון החצים, מתישהו בהכרח נגיע לצומת שכבר היינו בו - זה מעגל. מש"ל.

מה סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם? - מציאת מעגל דורשת זמן $O(n)$. אחרי כל מציאת מעגל, מוחקים לפחות צומת אחד, כך שמספר השלבים הוא לכל היותר n. לכן זמן הריצה הכולל הוא $O(n^2)$.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מקיים את תכונת ההשתתפות-מרצון.
הוכחה: האלגוריתם משבץ כל משתתף בבית שהוא הצביע עליו בשלב כלשהו. כל משתתף מצביע תמיד על הבית של עצמו או על בית טוב יותר. מש"ל.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר הוא אמיתי.

הוכחה: האבחנה החשובה כאן היא, שהקשת היוצאת מאדם מסויים משפיעה על הגרף רק באותו סיבוב שהוא סוחר, ואז הוא יוצא מהמשחק. למשל, אם יוסי סוחר במעגל 3 כשהוא תמים ובמעגל 5 כשהוא ערמומי, אז המסחר עד למעגל 3 מתנהל בדיוק באותו אופן בשני המצבים - העובדה שיוסי שינה את הקשת שלו, לא גרמה שום שינוי בקשתות אחרות ובמעגלים אחרים.

נניח שיוסי סוחר במעגל k כשהוא תמים ובמעגל j כשהוא ערמומי. נשווה בין מצבים אלו בשני מקרים.

- מקרה א: j>=k. במקרה זה, המסחר עד למעגל k-1 זהה בשני המצבים. לכן קבוצת הבתים שנשארו זמינים אחרי מעגל k-1 היא זהה בשני המצבים. וכשיוסי תמים, הוא מקבל את הבית הטוב ביותר בקבוצה זו.
- מקרה ב: j<k. במקרה זה, המסחר עד למעגל j-1 זהה בשני המצבים. בסיבוב הבא, כל הקשתות זהות בשני המצבים, פרט לקשת היוצאת מיוסי. כשיוסי ערמומי, הקשת היוצאת ממנו סוגרת מעגל (מעגל j); נניח שהוא סוגר מעגל עם בית כלשהו x. כשיוסי תמים, הוא נמצא בסופה של שרשרת המתחילה בבית x. כל עוד לא נסגר מעגל, כל השרשרת הזאת נשארת בגרף. בפרט, בית x עדיין נמצא בגרף כאשר מעגל k נסגר. לכן הבית שמקבל יוסי כשהוא תמים טוב לפחות כמו x.

אלגוריתם מעגלי המסחר הוא גם יעיל פארטו (תרגיל בית). אבל הוא מקיים גם תכונה חזקה יותר הנקראת יציבות. בהינתן שיבוץ מסויים של אנשים לבתים, נגדיר **קבוצה מערערת** (blocking coalition) כקבוצה היכולה לפרוש מהמערכת ולבצע מסחר פנימי בתוך הקבוצה, והתוצאה שתתקבל תהיה טובה יותר לפחות לאחד מחברי הקבוצה, ולא פחות טובה לכל שאר חברי הקבוצה. אם אין קבוצה מערערת, השיבוץ נקרא **יציב**. קבוצת השיבוצים היציבים נקראת ה**ליבה** (core) של משחק השיבוצים. ניתן להראות שהליבה כוללת בדיוק שיבוץ אחד, והוא השיבוץ המוחזר ע"י אלגוריתם מעגלי המסחר. קל לראות ששיבוץ יציב הוא יעיל פארטו ומקיים השתתפות מרצון.

משפט א: אלגוריתם מעגל המסחר מחזיר תמיד שיבוץ יציב.
משפט ב: יש רק שיבוץ יציב אחד - והוא זה שמחזיר אלגוריתם מעגלי המסחר.
הוכחה: ראו במצגת.

אלגוריתם מעגלי המסחר יכול לשמש תחליף למסחר בכסף, במצבים שבהם לא רוצים מסיבה כלשהי להשתמש בכסף. לדוגמה, אפשר להשתמש בו כדי לבנות מערכת להחלפת ספרים משומשים. כל אחד מציע ספר ובוחר את הספר שהוא הכי רוצה מבין הספרים האחרים, והמערכת מבצעת החלפות במעגל. מעגלי-מסחר יכולים לשמש גם כדי ליישם את מצוות היובל בימינו. ראו מאמרי "אלגוריתם היובל - תהליך הדרגתי לחלוקת קרקעות", בד"ד 28, http://www.tora.us.fm/tryg/yovl/bdd/yovel-bdd-28.pdf.

החלפת כליות - kidney exchange

מחלת כליות היא בעיה רפואית קשה. חולי כליות צריכים להיות מחוברים לדיאליזה במשך שעות רבות - אלא-אם-כן משתילים להם כליה חדשה. ברוב המדינות, התור להשתלת כליות ארוך הרבה יותר ממספר הכליות הנתרמות. פתרון אפשרי לבעיה היה לאפשר מסחר בכליות, אלא שהחוק ברוב המדינות אוסר סחר באיברים (יש מדינה אחת שבה החוק מתיר סחר בכליות והיא איראן. זו גם המדינה היחידה שאין בה תור להשתלת כליות...).

החוק כן מתיר תרומת איברים בחינם, ואכן לחולים רבים יש חבר או קרוב המוכן לתרום להם כליה. הבעיה היא, שבמקרים רבים התורם לא מתאימה לחולה מבחינה רפואית. הסיבה העיקרית היא **סוג הדם**. כידוע, יש ארבעה סוגי דם. הטבלה הבאה מתארת מי יכול לתרום למי (למשל, סוג-דם O יכול לתרום לכולם):

תורם V נתרם >	O	A	B	AB
O	כן	כן	כן	כן
A	לא	כן	לא	כן

B	לא	לא	כן	כן
AB	לא	לא	לא	כן

בנוסף לסוג דם ישנם עוד גורמים - נוגדנים מסויימים שנמצאים אצל התורם ולא אצל הנתרם יכולים לגרום לדחיית השתל.

עכשיו תארו לעצמכם שיש שני זוגות תורמים: תורם א מתאים לחולה ב (למשל שניהם עם דם סוג A), ותורם ב מתאים לחולה א (למשל שניהם עם דם סוג B). במצב זה אפשר לבצע **החלפת כליות**: הארבעה מסכמים ביניהם, שתורם א יתרום לחולה ב ובתמורה תורם ב יתרום לחולה א. "מסחר" מסוג זה הוא חוקי ברוב המדינות.

כדי לעודד החלפות כאלו, הוקמו מאגרי-מידע של זוגות חולים ותורמים, למשל מאגר Kidney Paired Donation בארה"ב. ניתן לייצג מאגר-מידע כזה כגרף מכוון שבו:

- הצמתים הם הזוגות;
- יש קשת מזוג א אל זוג ב, אם התורם בזוג א יכול מבחינה רפואית לתרום כליה לחולה בזוג ב.

עקרונית, יכולנו להשתמש כאן באלגוריתם "מעגלי המסחר" (וכך אכן עשו בהתחלה - בשנת 2004 - כשהקימו את המאגר הראשון). אולם יש שתי בעיות:

- בהחלפת כליות ה"העדפות" הן בינאריות: או שזוג מסויים מתאים, או שלא. לכן לכל זוג יכולות להיות הרבה קשתות יוצאות. באלגוריתם מעגלי המסחר, לכל צומת היתה קשת יוצאת אחת.
- החלפת כליות היא תהליך בלתי הפיך. לכן, כדי לוודא שאף תורם לא יתחרט באמצע, חשוב שכל ההשתלות יתבצעו בדיוק באותו זמן. ככל שהמעגלים גדולים יותר, זה יותר מסובך מבחינה לוגיסטית. לכן באופן פרקטי המעגלים צריכים להיות קצרים - באורך 2 או לכל היותר 3. אלגוריתם מעגלי המסחר לא מבטיח שום דבר לגבי אורך המעגלים.

במצב זה, נראה שהפתרון של מציאת מעגלים אינו מתאים. אבל אפשר להשתמש בפתרון אחר.

החלפת כליות בזוגות

ראשית, נניח שאנחנו מסתפקים במעגלים באורך 2. במצב זה אפשר להפוך את הגרף לגרף לא-מכוון, שבו יש קשת בין זוג א לזוג ב, אם גם תורם א מתאים לחולה ב וגם תורם ב מתאים לחולה א. המטרה שלנו היא לבצע כמה שיותר החלפות. לאיזו בעיה בתורת הגרפים זה מתאים? **מציאת שידוך גדול ביותר בגרף**.

בקורס הקודם למדתם למצוא שידוך גדול ביותר בגרף דו-צדדי בעזרת אלגוריתם הזרימה של Ford-Fulkerson. הגרף שלנו הוא גרף כללי - לא בהכרח דו-צדדי. לכן צריך אלגוריתם כללי יותר. ואכן קיים אלגוריתם אשר מוצא שידוך גדול ביותר בגרף כללי בזמן פולינומיאלי. האלגוריתם הראשון שהוצג לבעיה זו היה של ג'ק אדמונדס (Jack Edmonds). הוא נקרא אלגוריתם הפרחים (Blossom algorithm). זמן הריצה שלו: $O(|E||V|^2)$.

א. צבע את כל הקשתות באדום (צבע אדום מסמל שהקשת לא בשידוך; ירוק יסמל שהקשת בשידוך).

ב. מצא **מסלול שיפור** (augmenting path): מסלול המתחיל ומסתיים בצומת שאינו בשידוך (סמוך רק לקשתות אדומות), והקשתות שבו מתחלפות בצבען: אדום--ירוק--אדום--...--ירוק--אדום.

ג. הפוך את צבע הקשתות במסלול השיפור: כל אדומה לירוקה וכל ירוקה לאדומה (שימו לב שמספר הקשתות הירוקות גדל ב-1 ומספר הצמתים בשידוך גדל ב-2).

ד. בצע את שלבים ב, ג כל עוד יש מסלול שיפור.

לפי הלמה של ברג' (Berge), שלא נוכיח כאן, שידוך הוא מקסימלי אם-ורק-אם אין בו מסלולי שיפור. לכן האלגוריתם הנ"ל עובד. החלק הקשה באלגוריתם הוא חלק ב - מציאת מסלול שיפור (כאן נכנס הקטע

של הפרחים). מפאת קוצר הזמן לא נתאר שלב זה כאן; המעוניינים מוזמנים להסתכל בויקיפדיה https://en.wikipedia.org/wiki/Blossom_algorithm.

השלב הבא הוא לברר האם האלגוריתם אמיתי. צריך קודם להגדיר מה זה בכלל "אמיתי" בהקשר של החלפת כליות. הרי התאמה בין תורם לנתרם אינה קשורה להעדפות של המשתתפים - היא אובייקטיבית וניתנת לבדיקה רפואית. עדיין יש שני דברים שזוגות יכולים לעשות:

- חולים שיש להם כמה תורמים תואמים במאגר, יכולים להסתיר תוצאות של בדיקות המראות על התאמה (או לא לבצע את הבדיקות), וכך להסתיר קשתות עם תורמים תואמים.
- חולים שיש להם כמה חברים לא-תואמים שמוכנים לתרום לזכותם, יכולים להסתיר אותם (או להגיד להם לא לבוא), וכך להסתיר קשתות עם חולים תואמים.

בשני המקרים המניפולציה מתבטאת בהסתרה של קשת בגרף ההתאמות. נגדיר שאלגוריתם להחלפת כליות הוא **אמיתי** אם אף זוג לא יכול להרוויח ע"י הסתרת קשת. "להרוויח" הכוונה, שבמצב הרגיל הוא לא ישתתף בהחלפה, וע"י ההסתרה הוא כן ישתתף בהחלפה.

האם אלגוריתם "שידוך גדול ביותר" הוא אמיתי לפי הגדרה זו? זה תלוי בפרט טכני-לכאורה באלגוריתם למציאת שידוך גדול ביותר -- באופן שבירת השיוויון שלו (tie-breaking) -- מה האלגוריתם עושה כשיש **כמה** שידוכים גדולים ביותר? איך הוא מחליט איזה מהם להחזיר?

בדרך-כלל, כשמפתחים אלגוריתם אופטימיזציה, הדבר היחיד שחשוב לנו הוא שהאלגוריתם יחזיר תוצאה אופטימלית כלשהי. אם יש שתיים - שיחזיר אחת מהן, מה אכפת לנו איזה? אבל כשמדברים על **מנגנון**, לפרטים האלה יש חשיבות. תארו לכם שמישהו ייכנס לקוד של האלגוריתם ויבין איך הוא עובד, ויגיע למסקנה שאם הוא יסתיר אחת מהקשתות שלו - הוא יגדיל את הסיכויים שלו להיכנס לשידוך (עם קשת אחרת). זה יגרום לאנשים להסתיר קשתות ועלול לפגוע ביעילות של האלגוריתם!

כדי לפתור את הבעיה צריך להגדיר את המנגנון בצורה מדוייקת יותר. הנה דרך אפשרית לעשות זאת.

מנגנון שידוך-גדול-ביותר-עם-עדיפויות:
- קבע סדר-עדיפות כלשהו על הצמתים (למשל לפי זמן המתנה בתור להשתלה, דחיפות רפואית, גיל, וכד').
- מצא את כל השידוכים הגדולים ביותר בגרף (אפשר לעשות זאת ע"י שיפור של אלגוריתם אדמונדס).
- מכל השידוכים הגדולים ביותר, בחר את השידוך עם וקטור-העדיפויות הגדול ביותר בסדר מילוני.

משפט: מנגנון שידוך-גדול-ביותר-עם-עדיפויות הוא אמיתי.

הוכחה: נניח בשלילה שצומת צ מסתיר קשת ומרויח. כלומר:
- בלי הסתרה (מצב א) – נבחר שידוך א בלי צ.
- עם הסתרה (מצב ב) – נבחר שידוך ב עם צ.

אבל, שידוך א זמין במצב ב (כי צ יכול להסתיר רק קשתות סמוכות לו), ושידוך ב זמין במצב א (כי יש יותר קשתות). כיוון שהבחירה בין שידוכים היא לפי סדר מילוני קבוע על וקטורי העדיפויות שלהם, בשני המצבים ייבחר אותו שידוך – וזו סתירה. מש"ל.

מה המסר? שכשאלגוריתם עובד עם בני-אדם, גם פרטים טכניים-לכאורה כמו אופן שבירת השיוויון עלולים להשפיע באופן מפתיע.

מעגלים באורך 3

עד עכשיו דיברנו על החלפה בזוגות. אבל במקרים מסוימים אפשר לבצע החלפה במעגל באורך 3.

איך אפשר למצוא את מספר המעגלים הגדול ביותר באורך (לכל היותר) 3?

מתברר שזו בעיה הרבה יותר קשה מלמצוא הכי הרבה מעגלים באורך 2.

מה הכוונה "הרבה יותר קשה"? - הכוונה שהיא **NP-שלמה**.

תלמדו על זה יותר בהמשך התואר. לצורך השיעור הזה נסביר בקיצור במה מדובר.

- יש הרבה בעיות, שקשה לנו לפתור אותן, אבל כשמישהו מגלה לנו את הפתרון, קל לנו לוודא שהפתרון נכון. לדוגמה: להוכיח משפט במתמטיקה זה יכול להיות מאד קשה, אבל כשרואים הוכחה, זה יחסית קל לוודא שההוכחה נכונה. אוסף הבעיות האלו, שהפתרון שלהן ניתן לאימות בזמן פולינומיאלי, נקרא **NP**.
- לפני כמה עשרות שנים, הוכיחו שני מדעני-מחשב אמריקאים (Cook, Levin), שיש בעיה **אחת**, שאם נצליח לפתור אותה בזמן פולינומיאלי, נצליח לפתור את **כל** הבעיות בקבוצה **NP**. בעיה זו נקראת **SAT**: נתונה נוסחה לוגית עם כמה משתנים, וצריך למצוא השמה למשתנים כך שערך הנוסחה יהיה אמת. ההוכחה הזאת כמובן גרמה להרבה מדענים לנסות למצוא אלגוריתם פולינומיאלי ל-SAT, אך עד כה הם לא הצליחו, ורובם מאמינים שזה בלתי אפשרי.
- לאחר מכן, הוכיח מדען-מחשב שלישי (Karp), שיש 21 בעיות, שאם נצליח לפתור אחת מהן בזמן פולינומיאלי, נצליח לפתור גם את SAT, ולכן גם את כל NP. בשנים הבאות הוכיחו על עוד מאות או אלפי בעיות, שאם נצליח לפתור אחת מהן, נצליח לפתור את אחת מ-22 הבעיות הללו. כל הבעיות הללו נקראות בעיות **NP-שלמות**.
- לפי רוב הדעות, בעיה NP-שלמה היא בעיה שאי-אפשר לפתור בזמן פולינומיאלי, אם כי, זה עדיין לא הוכח.
- בשנת 2007, הוכיחו אברהם (Abraham) ושותפיו, שיש **רדוקציה** אל בעיית מציאת מספר גדול ביותר של מעגלים באורך 3, מבעיית "שידוך תלת-ממדי גדול ביותר". המשמעות היא, שגם בעיה זו היא NP-שלמה. המשמעות של זה היא, שלפי ההשערה המקובלת, כנראה לא יהיה אלגוריתם פולינומיאלי שפותר אותה.

מה עושים כשמגלים שבעיה היא NP-קשה? שתי אפשרויות:

- מפתחים אלגוריתמי קירוב. אולי אי אפשר למצוא הכי הרבה מעגלים, אבל אפשר למצוא נניח חצי ממספר המעגלים הגדול ביותר. פתרון זה אפשרי בבעיות רבות שהן NP-שלמות, אבל במקרה שלנו הוא לא כל כך מושך - כל מעגל שמפספסים, עלול להיות גזר-דין מוות לשלושה אנשים.
- מפתחים אלגוריתמי חיפוש היוריסטי. עוברים על כל מרחב האפשרויות, אבל עושים את זה בצורה חכמה - מקצצים אפשרויות שאינן יכולות להוביל לפתרון טוב ביותר. אברהם (Abraham) ושותפיו בנו אלגוריתם כזה, אלגוריתם בשם branch-and-price, המבצע חיפוש חכם במרחב המעגלים, ומצליח לפתור בעיות עם 10,000 זוגות במשך מספר שעות.

נקודה מעניינת - אם אנחנו מוכנים למצוא מעגל בכל אורך שהוא, הבעיה נעשית קלה יותר, וניתן לפתור אותה בזמן פולינומיאלי.

תמריצים של מרכזים רפואיים

הראינו קודם מנגנון למציאת שידוך גדול ביותר שהוא אמיתי ביחס לזוגות - זוגות לא מרויחים מכך שהם מסתירים קשתות.

אבל בעולם ההשתלות יש עוד שחקן עם אינטרסים משלו - המרכז הרפואי. האינטרס של מרכז רפואי הוא להשיג כמה שיותר השתלות לחולים שלו. נניח שבמרכז רפואי מסויים יש מאגר פרטי של זוגות, והוא יכול לעשות ביניהם התאמות ולבצע השתלות. האם כדאי לו לשתף את המאגר שלו עם המאגר הכללי? לא תמיד. לפעמים הוא "להרויח" (כלומר להשיג יותר השתלות עבור חולים שלו) ע"י הסתרת זוגות!

ראינו קודם מנגנון יעיל פארטו שהוא אמיתי עבור הזוגות.
משפט: לא קיים מנגנון יעיל פארטו שהוא אמיתי עבור מרכזים רפואיים!
הוכחה: נניח בשלילה שקיים מנגנון כזה. נראה מצב שבו, לכל שידוך-גדול-ביותר שהמנגנון בוחר, קיים מרכז רפואי שיכול להסתיר זוגות ולהרויח (ראו דוגמה למצב כזה במצגת). מש"ל.

מה עושים כשאי-אפשר למצוא מנגנון המקיים את כל התכונות הרצויות? - מתפשרים. דרך אחת להתפשר היא לחפש מנגנון אמיתי שהוא לא לגמרי יעיל פארטו - הוא לא מוצא את השידוך הגדול ביותר אלא שידוך שהוא "כמעט" גדול ביותר.

משפט: כשיש שני מרכזים רפואיים, קיים מנגנון שהוא אמיתי עבור המרכזים, ומחזיר שידוך בגודל לפחות 1/2 מהאופטימלי.

רעיון ההוכחה: מחשבים, עבור כל מרכז רפואי, את מספר הקשתות הפנימי הגדול ביותר.
מחשבים את השידוך הגדול ביותר מבין כל השידוכים המבטיחים לכל מרכז רפואי את אותו מספר של קשתות פנימיות.
אשלגי ושותפיו (2013) הראו, שמנגנון מעין זה (קצת יותר מורכב) הוא אמיתי, ומשיג שידוך גלובלי שגודלו לפחות 1/2 מהשידוך הגדול ביותר. הם גם הראו איך להרחיב את הרעיון לשלושה בתי"ח או יותר.

תורמים חסידים

עד עכשיו דיברנו על תורמים שמוכנים לתרום כליה בתמורה לכליה אחרת. אולם יש גם תורמים חסידים (=אלטרואיסטים, "שלי שלך ושלך שלך") המוכנים לתרום כליה בלי כל תמורה. איך הם משפיעים על מנגנון ההחלפה שלנו? בשתי דרכים:

א. כשיש תורמים חסידים, יש במאגר לא רק מעגלים, אלא גם **שרשראות**. צריך לשנות את האלגוריתם כך שימצא, לא את מספר המעגלים הגדול ביותר, אלא את השילוב המקסימלי של מעגלים+שרשראות. האלגוריתם מסובך למדי ולא נלמד אותו כאן.

ב. אורך השרשראות לא מוגבל, כי התרומות לא חייבות להתבצע בו-זמנית. בשנת 2011 בוצעה שרשרת של 30 השתלות (60 ניתוחים בו-זמנית) בזכות תורם חסיד אחד!

החלפת כליות בישראל

ממש לאחרונה נפתחה בישראל תוכנית להשתלת כליות. תוכלו לקרוא עליה באתר של משרד הבריאות:
https://www.health.gov.il/English/Topics/organ_transplant/live_donors/Pages/intersection_plan.aspx

מקורות

- Parkes and Seuken, "Economics and Computation" (2018), chapter 12

- Itai Ashlagi et al, "Mix and match: A strategyproof mechanism for multi-hospital kidney exchange", Games and Economic Behavior 2013.
- Abraham & Blum & Sandholm, "Clearing Algorithms for Barter Exchange Markets: Enabling Nationwide Kidney Exchanges". Economics and Computation 2007.

סיכם: אראל סגל-הלוי.