

תכנון מנגנונים אלגוריתמי

Algorithmic Mechanism Design

אראל סגל-הלוי

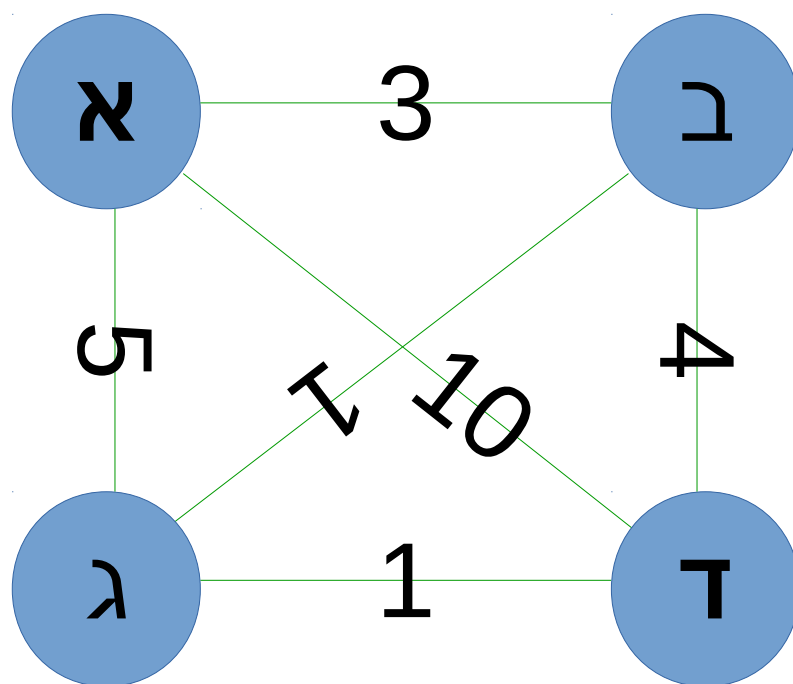
מקורות:

הקורס של טים, הרצאה 3 והלאה:

<http://theory.stanford.edu/~tim/f13/f13.html>

מציאת מסלול זול ביותר

נתונה רשת. לכל קשת יש עלות-מעבר. צריך להעביר חבילה בין שתי נקודות ברשת (α - τ), במסלול הזול ביותר.

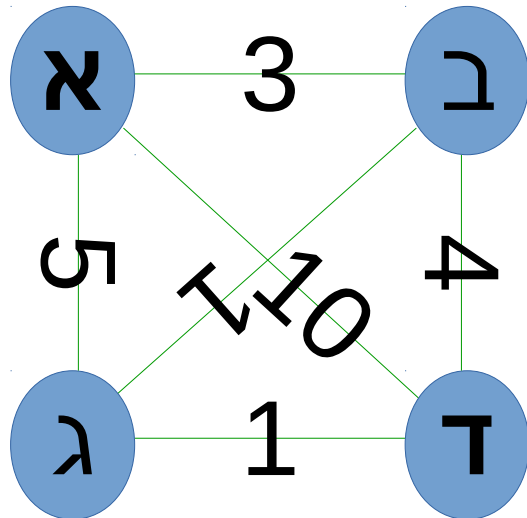


- אם העלות של כל קשת ידועה לכולם – אלגוריתם.
- אם העלות של כל קשת ידועה רק לבעליה – מנגנון.

מנגנון למסלול זול ביותר בשיטת ויקרי-קלארק-גרובס

צריך לפתור $1+6$ בעיות מסלול-זול-ביותר.

- כשכולם נמצאים: המסלול אבגד, הסכום -5 .
- בלי אב: המסלול אגד, הסכום -6 . **תשלום -4** .
- בלי בג: המסלול אגד, הסכום -6 . **תשלום -2** .
- בלי גד: המסלול אבד, הסכום -7 . **תשלום -3** .
- בלי אג/אד/בד: אין שינוי, הסכום -5 . **תשלום 0** .
- עלות כוללת -9 .



בעיית התרמיל (knapsack)

מכניסים אתכם לחדר מלא חפצים, נותנים לכם תרמיל שיכול להכיל עד 100 ק"ג, ואומרים לכם "כל מה שתצליחו להכניס לתרמיל – שלכם".

לכל חפץ יש **משקל** **אחר** **וערך** **אחר**.

איך תבחרו חפצים שסכום-ערכיהם גדול ביותר?

- העלות של כל חפץ ידועה לכולם – **אלגוריתם**.

- העלות של כל חפץ ידועה רק לחפץ – **מנגנון**.

(דוגמה: יש 100 שניות המיועדות לפרסומות.

לכל מפרסם יש פרסומת עם **אורך** **אחר** **וערך**

אחר. איך לבחור איזה פרסומות לשים?)

מנגנון למילוי תרמיל בשיטת ויקרי-קלארק-גרובס

כשיש m חפצים, צריך לפתור $m+1$ בעיות-תרמיל.

- **הבעיה:** בעיית התרמיל היא NP-קשה!
- מה יקרה אם נשתמש באלגוריתמי קירוב?

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

דוגמה נגדית:

\$100/100k, \$20/2k, \$20/2k, \$20/2k ...

הראשון יזכה וישלם \$1000 – יותר מהערך שלו!

מנגנון למילוי תרמיל בשיטת ויקרי-קלארק-גרובס

כשיש m חפצים, צריך לפתור $m+1$ בעיות-תרמיל.

- **הבעיה:** בעיית התרמיל היא NP-קשה!
- מה יקרה אם נשתמש באלגוריתמי קירוב?

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של **ערך/משקל**.
- בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.

דוגמה נגדית:

\$20/2k, \$100/100k.

הראשון יזכה וישלם \$100 – יותר מהערך שלו!

מנגנון למילוי תרמיל בשיטת ויקרי-קלארק-גרובס

אלגוריתם **א+ב**: הפעל את שני האלגוריתמים
החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

משפט: אלגוריתם **א+ב** נותן קירוב $1/2$.

הוכחה: נניח שאלגוריתם **ב** נתקע אחרי k חפצים.

עם החפץ ה- $k+1$ - הסכום הוא מקסימלי++.

הסכום של אלגוריתם **א** הוא לפחות החפץ ה- $k+1$.

--< הסכום של אלגוריתמים **א+ב** מקסימלי++.

--< הסכום של **א** או **ב** הוא מקסימלי++ $\setminus 2$. ***

כאלגוריתם - טוב, כמנגנון - לא מוצלח. דוגמה:

$\$54/52k$, $\$52/51k$, $\$49/49k$.

הראשון יזכה וישלם $\$101$ - יותר מהערך שלו!

בניית מנגנונים בשיטת מיירסון (Myerson)

נתונים:

- כלל-בחירה לבחירת תת-קבוצה של משתתפים.
- לכל משתתף יש ערך כספי **יחיד** ל"היבחרות".
- דרוש:** כלל-תשלומים שאיתו כלל-הבחירה אמיתי.

משפט מיירסון: קיים כלל-תשלומים אמיתי
אם ורק אם כלל-הבחירה הוא פונקציה מונוטונית
עולה של הערך. כלל-התשלומים הזה הוא *יחיד*.

הוכחת משפט מיירסון

סימונים:

- כלל-הבחירה – f - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור בינארי ($1 = \text{"ברכות", נבחרת!"}$). f נתון וקבוע.
- כלל התשלום – p - פונקציה המקבלת כקלט את הערכים של כל המשתתפים, ומחזירה וקטור מספרי של תשלומים. את p אנחנו מחפשים.

התועלת של משתתף עם ערך v שאומר b היא:

$$v * f(b) - p(b)$$

הוכחת משפט מיירסון - המשך

התועלת של משתתף עם ערך v שאומר b היא:

$$v * f(b) - p(b)$$

במנגנון אמיתי חייב להתקיים:

$$v * f(v) - p(v) \geq v * f(b) - p(b)$$

התועלת של משתתף עם ערך b שאומר v היא:

$$b * f(v) - p(v)$$

במנגנון אמיתי חייב להתקיים:

$$b * f(b) - p(b) \geq b * f(v) - p(v)$$

מחברים את המשוואות ומקבלים:

$$v[f(v) - f(b)] \geq p(v) - p(b) \geq b[f(v) - f(b)]$$

הוכחת משפט מיירסון - המשך

נתון: כלל-בחירה f .

דרוש: כלל-תשלומים אמיתי p ; חייב לקיים:

$$v[f(v)-f(b)] \geq p(v)-p(b) \geq b[f(v)-f(b)]$$

תנאי הכרחי א: מחיסור שני הצדדים מתקבל:

$$(v-b) * (f(v)-f(b)) \geq 0$$

כלומר: הפונקציה f חייבת להיות מונוטונית.

תנאי הכרחי ב: אם $f(v)=f(b)$ אז $p(v)=p(b)$.

אם $f(v)>f(b)$ אז $p(v)-p(b)$

ערך שבו f מתחלפת מ-0 ל-1.

הוכחת משפט מיירסון - המשך

נתון: כלל-בחירה f . חייב להיות פונקציה מונוטונית.

מצאנו: כלל-תשלומים p .

התשלום של שחקן שלא נבחר ($f=0$) הוא 0;

התשלום של שחקן שנבחר ($f=1$) הוא הערך הקריטי

- הערך הקטן ביותר שהוא צריך להגיד כדי להיבחר.

נשאר להוכיח: כלל התשלומים הזה הוא אמיתי.

הוכחה: אם נבחרת ותכריז יותר – כלום לא ישתנה.

אם נבחרת ותכריז פחות – (אולי) כבר לא תיבחר.

אם לא נבחרת ותכריז יותר – תשלם יותר מערכך.

אם לא נבחרת ותכריז פחות – כלום לא ישתנה. ***

מנגנון למילוי תרמיל בשיטת מיירסון

אלגוריתם חמדני א:

- סדר את החפצים בסדר יורד של הערך.
 - בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.
- \$100/100k, \$20/2k, \$20/2k, \$20/2k ...**
- הראשון זוכה ומשלם את התשלום הקריטי - \$20.**

אלגוריתם חמדני ב:

- סדר את החפצים בסדר יורד של **ערך/משקל**.
 - בחר חפצים לפי הסדר עד שהתרמיל מתמלא.
- \$20/2k, \$100/100k.**
- הראשון יזכה וישלם את התשלום הקריטי - \$2.**

מנגנון למילוי תרמיל בשיטת מיירסון

• אלגוריתם א+ב: הפעל את שני האלגוריתמים
החמדניים. בחר את התוצאה עם הסכום הגבוה.

\$54/52k, \$52/51k, \$49/49k.

הראשון נבחר ומשלם את התשלום הקריטי:

$\$52 * (52k/51k)$

מיירסון לעומת ויקרי-קלארק-גרובס

מיירסון	וק"ג	
אחד	הרבה (למשל: בחירת מסעדה)	פרמטרים לכל שחקן
כל כלל מונוטוני (למשל: קירוב בעיית התרמיל, מיקסום רווח)	מיקסום סכום ערכים	כלל בחירה