

מטלה 7 - חלוקה הוגנת

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה הבאה.

שאלה 1: חלוקה אסטרטגית

א. הוכיחו שאלגוריתם "חתוך ובחר" אינו אמיתי.

ב. נניח שאתם משחקים במשחק "חתוך ובחר" עם אותו שחקן ועל אותה עוגה, במשך הרבה פעמים. תארו אסטרטגיה שתאפשר לכם להשיג את הערך הגדול ביותר. נסו את האסטרטגיה שלכם בקישור הבא:

<http://tora.us.fm/fairness/cake/game-01.html>

שאלה 2: חלוקת תורנויות פרופורציונלית (proportional chore division)

אמא ואבא נסעו לנופש, והשאירו את n ילדיהם הגדולים לשמור על התינוקות ה- $n+1$. הילדים לא כל כך רוצים לשמור אבל אין להם ברירה, אז הם החליטו לחלק ביניהם את הזמן ולעשות תורנויות. לכל ילד יש העדפות שונות לגבי הזמן ביום שהכי קשה לשמור בו - יש כאלה שהכי קשה להם לשמור בלילה, יש כאלה שהכי קשה להם לשמור דווקא בצהריים, וכו'.

א. הגדירו בפירוט מהי חלוקה פרופורציונלית במצב זה (מדוע זה שונה ממה שלמדנו בכיתה?).

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית של זמן השמירה, כך שכל ילד מקבל תורנות רצופה.

שאלה 3: חלוקת תורנויות ללא קנאה (envy-free chore division)

עמי תמי ורמי קיבלו משימה חדשה - הם צריכים לעזור בקטיף במטע המשפחתי. המטע המשפחתי הוא ריבועי, ויש בו עצים שונים עם דרגות-קושי שונות.

כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה ללא קנאה של המטע בין הילדים, כך שכל אחד משלושת הילדים מקבל אחריות על חלק קשיר של המטע.

שאלה 4: חלוקה עם זכויות לא שוות (unequal entitlements)

עמי ותמי עזרו לאמא להכין עוגה, אבל תמי עזרה יותר. עמי השקיע שעתיים ותמי השקיעה חמש שעות. אמא רוצה לחלק את העוגה ביניהם בצורה הוגנת בהתאם להשקעה.

א. הגדירו בפירוט מהי חלוקה פרופורציונלית במצב זה.

ב. כיתבו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית.

שאלה 5: שיווי-משקל בחלוקת עוגה

שני שחקנים מחלקים עוגה בעזרת אלגוריתם אבן-פז, כלומר: כל אחד מהם מסמן קו המחלק את העוגה לשני חלקים שווים לפי דעתו, והעוגה נחתכת בדיוק באמצע בין שני הקווים.

א. מה הם כל שיווי המשקל של משחק זה?

ב. האם כל שיווי המשקל יעילים פארטו?

שאלה 6: שינוי חלוקה קיימת

עמי רמי ותמי חילקו ביניהם עוגה בצורה פרופורציונלית (כל אחד קיבל לפחות $1/3$). הם התיישבו לאכול, אבל לפני שהספיקו - נכנסה צומי וטענה שגם לה מגיע חלק. פתחו אלגוריתם המוצא חלוקה פרופורציונלית (כל אחד מקבל לפחות $1/4$), ובנוסף, נותן לכל אחד משלושת הילדים הראשונים (עמי רמי ותמי) לפחות $3/4$ מהערך שהיה לו בחלוקה הראשונה.

שאלה 7: תיכנות אלגוריתם

נניח שרוצים לחלק עוגה המיוצגת ע"י הקטע $[0,1]$. כל משתתף מיוצג ע"י המחלקה הבאה:

```
class Agent {
    double eval(double x);
        // INPUT:  x, a number between 0 and 1.
        // OUTPUT: v, the value of [0,x]

    double mark(double v);
        // INPUT:  v, a number between 0 and 1.
        // OUTPUT: a number such that the value of [0,x] is v.
}
```

א. כיתבו בשפה לבחירתכם (אפשר גם פסאודו-קוד) את אלגוריתם "חתוך ובחר":

```
void cutAndChoose(Agent a, Agent b)
```

הפונקציה מקבלת שני שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

Agent a receives [0,0.3]. Agent b receives [0.3,1].

ב. כיתבו בשפה לבחירתכם את אלגוריתם "המפחית האחרון":

```
void lastDiminisher(Agent[] agents)
```

הפונקציה מקבלת מערך של שחקנים וכותבת את החלוקה בפורמט הבא (לדוגמה):

Agent 0 receives [0,0.3]. Agent 1 receives [0.3,0.6]. Agent 2..