## אלגוריתם "קבלה על תנאי"

אלגוריתם למציאת שידוך יציב.

אלגוריתם: (לצורך הפשטות אנחנו מניחים שיש מקום אחד בכל מחלקה)

1. כל סטודנט הולך למחלקה שהוא הכי רוצה, מבין המחלקות שעדיין לא דחו אותו, ונותן לה הצעה.
2. כל מחלקה משאירה אצלה את הסטודנט שהיא הכי רוצה, מבין הסטודנטים שנמצאים בה, ודוחה את כל השאר. (הסטודנט שנשאר במחלקה התקבל על-תנאי שלא יבוא סטודנט טוב יותר. מכאן שם האלגוריתם).
3. חוזרים על שלבים א ו-ב עד שכולם משודכים.

**משפט - אלגוריתם "קבלה על-תנאי" מסתיים בשידוך יציב.**

**משפט - כשהסטודנטים הם המציעים, השידוך המתקבל הוא הטוב ביותר לכל הסטודנטים מכל השידוכים היציבים.**

**אלגוריתם "קבלה על-תנאי" הוא אמיתי עבור הצד המציע.**

**משפט - לא קיים מנגנון המוצא שידוך יציב, שהוא אמיתי עבור שני הצדדים.**

**משפט – כל שידוך יציב הוא יעיל פארטו.**

### החלפות ומעגלים

- השתתפות מרצון:
  מנגנון מקיים את התכונה השתתפות מרצון אם כל משתתף מעדיף את תוצאת המנגנון על-פני המצב לפני המנגנון (או לפחות אדיש בין התוצאות).

## אלגוריתם מעגלי מסחר

הקלט לאלגוריתם הוא שיבוץ של אנשים לבתים - לכל איש יש בית אחד. האלגוריתם מחזיק גרף מכוון שבו:

- הצמתים הם האנשים והבתים;
- יש קשת מכל אדם אל הבית שהוא הכי רוצה, ומכל בית אל האדם שהוא שייך אליו.

האלגוריתם:

א. מוצאים מעגל מכוון בגרף (למשל ע"י אלגוריתם DFS שלמדתם בקורס קודם).
ב. מבצעים את ההחלפה במעגל: כל אדם מקבל את הבית שהוא מצביע עליו.
ג. מוחקים מהגרף את הצמתים של האנשים והבתים שהשתתפו בהחלפה.
ד. לכל איש שנשאר בגרף, מעדכנים את הקשת שלו כך שתצביע לבית שהוא הכי רוצה מאלה שנשארו.
ה. חוזרים על סעיפים א-ד עד שהגרף ריק.

**משפט - אלגוריתם מעגלי המסחר מסתיים.**

**משפט - אלגוריתם מעגלי המסחר מקיים השתתפות מרצון.**

**משפט - אלגוריתם מעגלי המסחר הוא אמיתי.**

**משפט - אלגוריתם מעגלי המסחר הוא יעיל פארטו.**

**משפט א - אלגוריתם מעגל המסחר מחזיר תמיד שיבוץ יציב.**

**משפט ב - יש רק שיבוץ יציב אחד - והוא זה שמחזיר אלגוריתם.**

### מכרזים

תשלום – ערך = תועלת, כל משתתף מייחס לחפץ שווי כלשהי V (ערך) לפי שיקולים אישיים.

תכונות של מכרזים:

- מכרז אמיתי:
  לכל משתתף ולכל אופן-פעולה של האחרים, התועלת הגדולה ביותר מתקבלת מאמירת הערך האמיתי.
- השתתפות מרצון:
  מכרז מקיים השתתפות מרצון אם התועלת לאחר ההשתתפות במכרז >=0.
- יעילות פארטו:
  להגדיל את היעילות של חלק מהמשתתפים מבלי לפגוע ביעילות של אחרים.

**משפט - תוצאה היא יעילה פארטו אם-ורק-אם החפץ נמסר למשתתף עם הערך הכי גדול. (משפט כללי!)**

## מכרז ויקרי (מכרז מחיר שני)

המכרז:

1. המשתתפים כותבים הכרזות במעטפות;
2. המעטפות נפתחות ומסודרות בסדר יורד;
3. בעל ההכרזה הגבוהה ביותר זוכה בחפץ;
4. הזוכה משלם את ההכרזה השניה.

**משפט - מכרז ויקרי מקיים השתתפות מרצון.**

**משפט - מכרז ויקרי הוא אמיתי.**

**משפט - מכרז ויקרי הוא יעיל פארטו.**

## מכרז ויקרי – קלארק – גרובס (VCG)

הכללה של מכרז ויקרי (מכרז מחיר שני) למצב של יותר מחפץ אחד. כל משתתף משלם/מקבל את הנזק/התועלת שהוא גורם בנוכחותו (הבדיקה מתבצעת בלי כסף רק לפי ערכים).

הנחות:

- יש מספר סופי של תוצאות אפשריות.
- לכל משתתף יש ערך כספי לכל תוצאה.
- כל משתתף זוכה לכל היותר בפריט אחד.

המכרז:

1. לחלק את החפצים כך שסכום הערכים של הזוכים יהיה מקסימלי.

עבור כל שחקן:

2. חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים אילו השחקן הנוכחי לא היה משתתף.
3. חשב את סכום הערכים של שאר השחקנים עם השחקן הנוכחי.
4. גבה מהשחקן את ההפרש בין שני הסכומים.

**משפט - מכרז VCG הוא אמיתי.**

**משפט – מכרז VCG מקיים השתתפות מרצון.**

## מנגנונים בשיטת מיירסון

רוג'ר מיירסון פיתח שיטה כללית לבניית מנגנונים. השיטה עובדת בכל מקרה שבו יש קבוצה של שחקנים שצריך לבחור חלק מהם, ולכל אחד מהם יש ערך שונה ל"היבחרות" **(פרמטר אחד של ערך)**.

**משפט מיירסון - קיים כלל-תשלומים אמיתי אם ורק אם כלל-הבחירה (איך בוחרים את הזוכים) הוא פונקציה מונוטונית עולה של הערך. כלל-התשלומים הזה הוא יחיד. לכל כלל-בחירה יש תוחלת-רווח (כלל הבחירה קובע את ערך הסף של המשתתף=תשלום של המשתתף, ואם נתונה לנו התפלגות הערכים של השחקן נכפיל את ההסתברות שהמשתתף יבחר לפי כלל הבחירה בתשלום ונקבל את תוחלת הרווח.**

### נוסחת מיירסון

נוסחה המאפשרת לדעת בהינתן כלל-בחירה מסויים, מה תהיה תוחלת-הרווח שלו.

כדי להשתמש בנוסחה של מיירסון, אנחנו צריכים לדעת, עבור כל אחד מהשחקנים, מה התפלגות הערך שלו. אז לכל שחקן i, אנחנו מניחים שידועה לנו פונקציה Fi, המייצגת את התפלגות הערכים שלו, ומוגדרת כך: $Fi(x) = Prob[vi < x]$

כלומר $Fi(x)$ זה ההסתברות שהערך של קונה אקראי היא קטנה מ-x.

אם הם רואים שכל הערכים של קונים הם בין 10 ל-30 ויש בערך מספר שווה של קונים בכל אחד מהערכים האלה, אז הפונקציה תהיה:

$$F_i(x) = \begin{cases} 0, & x < 10 \\ \frac{x-10}{30-10}, & 10 \le x \le 30 \\ 1, & x > 30 \end{cases}$$

מיירסון הגדיר את "פונקציית הערך הוירטואלי" (virtual valuation function). באופן הבא:

$ri(x) = x - [1 - Fi(x)]/Fi'(x)$

הפונקציה הזאת היא המפתח לשאלה ששאלנו קודם - איך מקשרים בין כלל-הבחירה לבין תוחלת-הרווח.

בהינתן כלל-בחירה מסויים, אפשר לחשב את סכום הערכים הוירטואליים של השחקנים הנבחרים; כדי לחשב את סכום הערכים הוירטואליים, אין צורך לחשב את ערכי-הסף ואת כלל-התשלומים - מספיק לדעת את כלל-הבחירה.

**לכל כלל-בחירה, כאשר התשלומים נקבעים לפי ערכי-הסף,**
**תוחלת הרווח שווה לתוחלת סכום הערכים הוירטואליים של הנבחרים.**

למה זה עוזר לנו? כי עכשיו אנחנו יודעים איזה כלל-בחירה אנחנו רוצים: כדי למקסם רווח, כלל-הבחירה שלנו צריך להיות בחר את הקבוצה שבה סכום הערכים הוירטואליים הוא הגדול ביותר.

**המכרז הוא אופטימלי הוא: מכור את החפץ <-> r(x)>0 כדי שהפונקציה תהיה מונוטונית עולה והכלל בחירה יהיה אמיתי לפי המשפט.**

**אם הערכים של המשתתף מפלגים בין a ל-b, Uniform(a,b) אז פונקציית הערך הוירטואלי: r(x) = 2x-b**

### האלגוריתם:

בכל המקרים נחשב את r(x) בעזרת הנוסחה r(x)=2x-b כאשר ההתפלגות היא Uniform(a,b).

1. מכירת חפץ אחד לקונה אחד:
   א. כלל-הבחירה של מיירסון במקרה זה הוא: "בחר את הקונה אם"ם הערך הוירטואלי שלו גדול מאפס".
   ב. נחשב את r(x)=2x-b, כאשר הערכים של הקונה מתפלגים אחידה - Uniform(a,b).
   ג. נבדוק מתי מתקיים r(x)>0 והפונקציה מונוטונית עולה, ונקבל למשל x>15, מכאן שכלל הבחירה שלנו הוא מכור אם x>15.
   ד. מכאן שכלל התשלומים = ערך הסף = 15.
   ה. נחשב את תוחלת הרווח המירבית שניתן להשיג על ידי הכפלת התשלום בהסתברות שהוא יבחר, למשל אם ההתפלגות היא (10,30) וכלל הבחירה הוא x>15 אז תוחלת הרווח המירבית היא
   $.15 * \frac{30-15}{30-10} = 11.25$
2. מכירת חפץ אחד להרבה קונים עם אותה התפלגות:
   א. נבחר את הקונה עם הערך הגדול ביותר אם הוא מקיים r(x)>0, למשל x>15, אחרת לא נמכור.
   ב. ערך-הסף של הזוכה הוא המקסימום בין כלל הבחירה שקיבלנו בסעיף א' לבין הערך השני בגודלו, כי אם הערך השני בגודלו גדול מ-15, ערך הסף של הזוכה הוא הערך השני בגודלו (בוחרים את הקונה עם הערך הכי גדול).
   ג. נסתכל על 2 המשתתפים עם הערכים הגבוהים ביותר ונחלק למקרים, שלכל מקרה הסתברות שונה:
   או שהערכים של שניהם קטנים מכלל הבחירה ואז הרווח הוא 0.
   או שהערך השני בגודלו מתחת לכלל הבחירה והראשון מעל ואז הרווח הוא לפי כלל הבחירה 15.
   או שהפוך למקרה הקודם והרווח שוב 15.
   או ששני הערכים גדולים מכלל הבחירה, ואז שניהם מתפלגים אחידה בין 15 ל-30 ונבחר את התוחלת של הקטן מביניהם, אם n ערכים מתפלגים אחידה במרחק k (30-15), אז תוחלת הקטן ביותר היא $k * \frac{1}{n+1}$, כלומר במקרה של 2 משתתפים $15 * \frac{1}{3}$, אז התוחלת של הקטן ביותר היא 15 + 5 = 20.
   ד. בסוף כדי לקבל את תוחלת הרווח, נסכום את ההסתברויות לכל מקרה*הרווח שלו.
3. מכירות חפץ לשני קונים עם התפלגות שונה:
   א. נחשב את כלל הבחירה לכל אחד מהם לפי ההתפלגות שלו *r(y)>0,r(x)>0*.
   ב. נחלק למקרים הבאים:
   $$\text{If } 2x - 30 > 2y - 40 \text{ and } 2x - 30 > 0 - \text{ sell to American;}$$
   $$\text{If } 2y - 40 > 2x - 30 \text{ and } 2y - 40 > 0 - \text{ sell to Israeli;}$$
   $$\text{If } 0 > 2x - 30 \text{ and } 0 > 2y - 40 - \text{ do not sell at all.}$$
   ג. ניתן לחשב את כלל התשלומים, וכך את תוחלת הרווח.

### שיווי-משקל נאש במשחקים ובמכרזים

- משחק – אוסף של שחקנים, לכל שחקן יש אוסף של פעולות אפשריות, כל צירוף של פעולות מביא לתוצאה, וכל שחקן מקבל תועלת מכל תוצאה אפשרית.
- פעולה שולטת (דומיננטית) של שחק - עבור כל צירוף-פעולות של האחרים, הפעולה נותנת לשחקן תועלת גבוהה ביותר.
- שיווי-משקל נאש - צירוף פעולות של כל השחקנים, שבו הפעולה של כל שחקן נותנת לו תועלת גבוהה ביותר בצירוף זה.

**משפט - אם לכל שחקן יש פעולה שלטת, אז צירוף הפעולות השולטות הוא שיווי-משקל נאש.**

**משפט - כל מטרה שאפשר להשיג ע"י משחק עם פעולות שולטות – אפשר להשיג ע"י מנגנון אמיתי.**

### אלגוריתמי חלוקה הוגנת

תכונות של חלוקה:

- פרופורציונליות:

כל משתתף חושב שהחלק שלו שווה לפחות 1/n מהמשאב כאשר n הוא מספר המשתתפים בחלוקה.

$$Vi(Xi) >= Vi(C) / n$$

- ללא קנאה:

כל משתתף חושב שהחלק שלו טוב לפחות כמו כל האחרים.

$$Vi(Xi) >= Vi(Xj)$$

**משפט – חלוקה ללא קנאה -> פרופורציונלית**

**משפט - לא קיים אלגוריתם הוגן אמיתי ויעיל-פארטו אם:**

**פונקציות הערך לא בינאריות, או - כל שחקן צריך לקבל חתיכה קשירה.**

**משפט - חלוקה הממקסמת את סכום הערכים**

**היא יעילה פארטו.**

$$\max \sum_{j=1}^{n} V_j(X_j)$$

**משפט - חלוקה הממקסמת את הסכום של פונקציה עולה כתלות של הערכים היא עדיין יעילה פארטו. כל חלוקה הממקסמת את סכום לוגי הערכים היא חלוקה ללא קנאה.**

**מסקנה - אם נמקסם את מכפלת הערכים אזי נקבל חלוקה ללא קנאה ויעילה פארטו.**

משפט: יהי $v_{\max}$ הערך המקסימלי שהמשתתף נותן לחפץ (יכולים להיות מספר חפצים עם אותו ערך מקסימלי), קיימת חלוקה ללא קנאה אם–ורק–אם קיים שידוך מושלם בגרף שבו כל משתתף מקושר לכל החפצים עם הערך $v_{\max}$.

---

### אלגוריתם חתוך ובחר (חלוקה בין 2 אנשים)

האלגוריתם:

1. אחד מחלק את העוגה לשני חלקים שווים בעיניו.
2. השני בוחר את החלק הטוב בעיניו.
3. הראשון מקבל את השאר.

**משפט - אלגוריתם חתוך ובחר הוא פורפורציונלי.**

**משפט - אלגוריתם חתוך ובחר הוא ללא קנאה.**

### המפחית האחרון (חלוקה ליותר מ-2 אנשים)

האלגוריתם:

1. אחד המשתתפים חותך 1/n מהמשאב בעיניו.
2. מי שחושב שהחתיכה גדולה מ-1/n מפחית אותה ל-1/n בעיניו.
3. האחרון שמפחית מקבל את החתיכה.
4. ממשיכים ברקורסיה.

**משפט - אלגוריתם המפחית האחרון הוא פרופורציונלית, כלומר כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות 1/n מערך העוגה בעיניו.**

**משפט - אלגוריתם "המפחית האחרון" משתמש ב-O(n2) שאילתות.**

<u>גירסה רציפה:</u> יותר נוח וקל למשתמש – אבל לא יותר מהיר חישובית האלגוריתם:

1. מחזיקים סכין מעל העוגה ומזיזים אותו מימין לשמאל.
2. מי שחושב שהחלק מימין לסכין שווה 1/n צועק "עצור!" ומקבל את מה שמימין לסכין.
3. השאר ממשיכים רקורסיבית.

### אלגוריתם אבן פז

חלוקה פרופורציונלית מהירה יותר מהמפחית האחרון.

האלגוריתם:

1. כל שחקן מחלק לשני חלקים בשווי 1/2 בעיניו.
2. חותכים את העוגה בחציון של הקווים.
3. שולחים כל שחקן לחצי שמכיל את הקו שלו.
4. מחלקים כל חצי ברקורסיה.

**משפט - אלגוריתם אבן-פז נותן חלוקה פרופורציונלית (כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל לפחות 1/n מערך העוגה בעיניו).**

**משפט - אלגוריתם אבן-פז משתמש ב O(n log n) שאילתות.**

### אלגוריתם Selfridge – Conway

חלוקה ל-3 אנשים ללא קנאה.

האלגוריתם:

1. כ חותך 3 חתיכות שוות בעיניו .
2. אם א ,י מעדיפים חתיכות שונות – סיימנו .אחרת-
3. י מקצץ את החתיכה הטובה ביותר ומשווה לשניה בעיניו.
4. א ,י ,כ בוחרים חתיכה . י חייב לבחור את זו שקיצץ ,אם לא נבחרה קודם. קיבלנו חלוקה עם שארית.
5. א או י בחרו את החתיכה המקוצצת ;במקרה זה א.
6. י (שלא בחר את החתיכה המקוצצת) מחלק את השארית לשלוש חתיכות שוות בעיניו.
7. א ,כ ,י בוחרים חתיכה.

**משפט - אלגוריתם סלפרידג'-קונווי נותן חלוקה ללא קנאה - כל שחקן המשחק לפי הכללים מקבל חתיכה טובה לפחות כמו שתי האחרות.**

### אלגוריתם הסכין המסתובבת

חלוקה קשירה ללא קנאה ל-3 אנשים.

האלגוריתם:

1. עושים צעד אחד של המפחית האחרון . שחקן אחד נניח כ זוכה בחתיכה.
2. הזוכה כ מסובב סכין ארוכה מעל השארית ,כך ששני החלקים תמיד שוים בעיניו. (אפשר לפי משפט ערך הביניים).
3. א אומר" עצור "ברגע ששני החלקים שוים בעיניו .

### אלגוריתם סימונס

**חלוקה קשירה ללא קנאה ל-n משתתפים:**

נסתכל על כל החלוקות הקשירות ל-n חתיכות.

כל חלוקה מוגדרת ע"י $n$ מספרים שסכומם קבוע.

$\sum_i v_i = 1$, כאשר 1 זה הערך של כל ה"עוגה".

בכל נקודה בסימפלקס החלוקות, אפשר לשאול כל שחקן "איזו חתיכה אתה הכי רוצה?". התשובה היא מספר בין 1 ל-n.

חלוקה ללא קנאה = נקודה שבה כל שחקן כותב מספר אחר.

חלוקה כמעט-ללא-קנאה =סימפלקסון שבו אפשר לחלק קודקוד לכל שחקן, כך שכל שחקן כתב על הקודקוד שלו מספר אחר.

---

**אלגוריתם סימונס**

מחלקים את סימפלקס-החלוקות לסימפלקסונים.

נותנים כל צומת לשחקן, כך שבכל סימפלקסון, כולם מיוצגים.

כל שחקן כותב, בכל צומת שלו, את מספר החתיכה הכי טובה בעיניו.

***מחפשים סימפלקסון n-מלא*** = עם n מספרים שונים = חלוקה כמעט-ללא-קנאה.

---

### אלגוריתם Bei, Huzhang, Suksompong

אלגוריתם חלוקה הוגן, אמיתי ויעיל פארטו.

האלגוריתם:

1. מצא את ה x-המינימלי כך שהערך של ב משמאלו שווה לערך של א מימינו $Vb([0,x]) = Va([x,1])$
2. תן לשחקן ב את הקטעים שהוא רוצה משמאל ל-x ואת הקטעים ששחקן א לא רוצה מימין ל-x.

**משפט – האלגוריתם הוגן**

**משפט – האלגוריתם אמיתי**

**משפט – האלגוריתם יעיל פארטו**

<u>חלוקת חפצים בדידים</u>

כשהחפצים לא ניתנים לחלוקה בדרך-כלל אי אפשר למצוא חלוקה **פרופורציונלית וללא קנאה** (דוגמה: בית).

פתרונות מקובלים:

- הוספת כסף למערכת, דוגמה :אלגוריתמי חלוקת שכר-דירה.
- מציאת דרך יצירתית לחלק חפץ אחד .דוגמה :אלגוריתם" וין-וין "לגישור.
- חלוקה ללא-קנאה-בקירוב .דוגמה :חלוקת תכשיטים ומקומות בקורסים.

הנחות:

חדרים סבירים - כל דייר מייחס ערך כספי לכל חדר ,סכום הערכים = לפחות ערך הדירה כולה.

קוואזי-ליניאריות - התועלת של דייר שמקבל חדר = ערך החדר פחות המחיר שלו.

<u>פתרון עבור n=2</u>

האלגוריתם: (חתוך ובחר) אחד מחלק את שכר-הדירה ;השני בוחר חדר.

**משפט - בכל השמה ללא קנאה ,סכום הערכים של הדיירים בחדרים שהם גרים בהם הוא מקסימלי.**

**משפט - כל השמת-חדרים ללא קנאה היא יעילה פארטו. ,כלומר כדי למצוא חלוקת שכ"ד ללא קנאה, צריך אלגוריתם להשמה ממקסמת-סכום-ערכים. הבעיה נקראת בעיית ההשמה.**

### האלגוריתם ההונגרי

חלוקת n עובדים ל-n משימות כאשר לכל עובד יש עלות לכל משימה, כך שסכום העלויות הוא מינימלי. ניתן להשתמש גם לחלוקת n דיירים ל-n חדרים כאשר לכל דייר יש ערך לכל חדר, ואז נהפוך ערך חיובי = עלות שלילית, וסכום עלויות מינימלי ייתן לנו סכום ערכים מקסימלי.

האלגוריתם:

1. בנה מטריצה של העובדים והמשימות כאשר בכל משבצת נמצא העלות של כל עובד למשימה.
2. החסר מכל שורה את המינימום באותה שורה.
3. החסר מכל עמודה את המינימום באותה עמודה.
4. סרטט מינימום קווים (אופקיים או אנכיים) כך שיחסו את כל האפסים.
5. אם מספר הקווים = n, קיימת חלוקה עם סכום מינימלי והיא האפסים שקיבלנו.
6. אחרת, קח את המינימום מכל הטבלה שלא מכוסה בקווים, החסר אותו מכל שורה שאין על כולה קו, והוסף אותו לכל עמודה שמכוסה בקו. חזור לשלב 4.

### האלגוריתם המנצח המתוקן

חלוקת מספר חפצים בין שני שותפים, כאשר כל שותף מייחס ערך לכל חפץ.

האתגר – להחליט מי יקבל כל חפץ/נושא כך **שלא תהיה קנאה התוצאה, תהיה יעילה פארטו ונצטרך לחתוך חפץ אחד לכל היותר.**

האלגוריתם:

1. כל חפץ נמסר למי שהכי רוצה אותו
2. אם סכום הנקודות שווה – סיימנו
3. אחרת – מסדרים את החפצים בסדר עולה של היחס מנצח\מפסיד, ומעבירים חפצים עד שהסכום משתווה. (מעבירים כל פעם את החפץ ששווה הכי פחות למנצח והכי הרבה למפסיד לפי היחס, יתכן שנצטרך לחתוך את החפץ האחרון שמועבר)

**משפט - אלגוריתם המנצח המתוקן מחזיר תמיד חלוקה יעילה פארטו.**

**משפט - אלגוריתם "המנצח המתוקן" מחזיר תמיד חלוקה ללא קנאה.**

**משפט - האלגוריתם לא אמיתי (כמו רוב האלגוריתמים לחלוקה הוגנת)**

### אלגוריתם מעגלי קנאה

חלוקה ללא קנאה בקירוב כאשר החפצים בדידים. (קנאה בגודל חפץ 1 לכל היותר).

הגדרה: חלוקה נקראת "ללא קנאה מלבד 1 " אם לכל 2 משתתפים א,ב אם מורידים מהסל של שחקן ב חפץ אחד לכל היותר, אז שחקן א לא מקנא בו.

האלגוריתם:

1. עוברים על החפצים בסדר שרירותי.
2. לכל חפץ נותנים את החפץ לשחקן שלא מקנאים בו.
3. אם אין כזה – סימן שיש מעגל קנאה.
4. מחליפים סלים במעגל בניגוד לכיוון חצי הקנאה.
5. מבצעים את 2 עד שאין מעגלים, ואז חוזרים ל-1.

**משפט: אם יש m חפצים ו-n שחקנים, אז זמן הריצה של אלגוריתם מעגלי הקנאה הוא O(m n3).**

**משפט - האלגוריתם מחזיר חלוקה EF1.**

### אלגוריתם מקסום מכפלת הערכים

אלגוריתם לחלוקה של אוסף חפצים בדידים, שהיא יעילה פארטו וגם EF1.

**משפט - נניח ש: ההעדפות אדיטיביות – ערך של סל הוא סכום הערכים של החפצים בסל וגם קיימת לפחות חלוקה אחת שבה כל שחקן מקבל ערך גדול מאפס . אז, כל חלוקה הממקסמת את מכפלת ערכי המשתתפים היא גם יעילה פארטו וגם EF1.**