

פתרון מטלה 4 - מכרזים: וק"ג, פירסום, מי"רסון

שאלה 1: שוק דו-צדדי

לשוק מכוניות משומשות מגיעים n מוכרים ו- m קונים. כל מוכר מביא מכונית אחת. כל קונה מעוניין במכונית אחת. כל המכוניות זהות. כל מוכר מייחס למכונית שלו ערך אחר. כל קונה מייחס למכונית שלו ערך אחר.

א. הסבירו מה בדיוק יעשה מנגנון וק"ג בשוק זה? מי ימכור וכמה כסף יקבל? מי יקנה וכמה כסף יקבל?

ב. הוכיחו, שאם הממשלה תנסה לארגן שוק כזה בעזרת מנגנון וק"ג, היא תיכנס לגירעון.

פתרון: נתחיל ממקרה פרטי שיעזור לנו להבין מה קורה. יש מוכר אחד עם ערך s וקונה אחד עם ערך b . יש שתי אפשרויות: או שהחפץ נמכר, או שלא. אם החפץ נמכר, המוכר מפסיד s והקונה מרוויח b , כך שסכום הערכים הוא $s - b$. אם החפץ לא נמכר, סכום הערכים הוא אפס. לכן, מנגנון וק"ג יחליט שהחפץ צריך להימכר אם $b > s$.

התשלום של כל שחקן (במקרה שהחפץ נמכר) יהיה לפי התרומה/הנזק שלו לצד השני.

- התשלום של הקונה נקבע לפי המוכר: אם הקונה לא משתתף - הנזק של המוכר 0; אם הקונה משתתף - הנזק של המוכר s ; לכן הקונה צריך לשלם s .

- התשלום של המוכר נקבע לפי הקונה: אם המוכר לא משתתף - הרווח של הקונה 0; אם המוכר משתתף - הרווח של הקונה b ; לכן המוכר צריך לקבל b .

כאן אנחנו כבר רואים שיש גירעון: נניח שהממשלה מחליטה שהחפץ צריך להימכר. אז היא צריכה לגבות s מהקונה ולשלם b למוכר. אבל במקרה זה $b > s$ - כלומר הממשלה משלמת יותר ממה שהיא גובה.

עכשיו נסתכל על המקרה הכללי. יש הרבה קונים והרבה מוכרים. צריך להחליט מי יקנה ומי לא יקנה, מי ימכור ומי לא ימכור. מספר הקונים חייב להיות שווה למספר המוכרים. מה עושים? מסדרים את הקונים בסדר יורד של הערך, ואת המוכרים בסדר עולה של הערך. מוצאים מספר כלשהו k כך שהערך של הקונה ה- k גבוה מהערך של המוכר ה- k . ואז k הקונים עם הערך הגבוה קונים מ- k המוכרים עם הערך הנמוך. כמה כל אחד משלם? נניח שקונה מסוים מהקונים הגבוהים עוזב את השוק. אז גם מוכר אחד יצטרך לעזוב - המוכר ה- k . לכן כל הקונים יצטרכו לשלם את הערך של המוכר ה- k . באותו אופן, כל המוכרים יצטרכו לקבל את הערך של הקונה ה- k . כיוון שערך זה גבוה יותר משל המוכר ה- k , המנגנון יהיה בגירעון.

שאלה 2: מכרזי פירסום - VCG לעומת GSP

א. הוכיחו, שהתשלום שמשלם מפרסם במכרז VCG כשהוא מכריז את ערכו האמיתי, תמיד קטן או שווה מהתשלום שישלם במכרז GSP כשהוא מכריז את ערכו האמיתי.

• **פתרון:** היו כמה פתרונות טובים. הפתרון של אוריאל היה הכי פשוט - ראו שם.

ב. לפי סעיף א, מעבר בין מכרז GSP למכרז VCG יגרום לירידה ברווחים. אולם ירידה זו תהיה זמנית בלבד. מדוע?

• **פתרון:** זו שאלה פתוחה, יש כמה תשובות אפשריות. התשובה שאני התכוונתי אליה: מכרז GSP לא אמיתי, המפרסמים מתרגלים להכריז פחות מהערך האמיתי שלהם. במעבר ל-VCG הם עדיין בהתחלה מכריזים פחות מהערך האמיתי שלהם מתוך הרגל. אבל במשך הזמן הם מבינים שהמנגנון אמיתי ואפשר להכריז את הערך האמיתי בלי להינזק, ולכן מעלים את ההכרזות בחזרה.

שאלה 3: מכרזי פירסום - VCG לעומת מ"רסון

חשבו את המחיר שמשלם משתתף במכרז-פירסום לפי משפט מיירסון (מחיר הסף). האם מחיר זה גדול או קטן מהמחיר שישלם במכרז VCG?

• **פתרון:** [השאלה נכנסה לכאן בטעות, אני מתנצל. אנחנו למדנו בכיתה על מנגנון מיירסון עם כלל-בחירה בינארי - כל שחקן, או שהוא נבחר או שהוא לא נבחר. אבל במכרז-פירסום, כלל-הבחירה הוא לא בינארי - כל שחקן נבחר "באחוזים" - למשל, אם שחקן מסוים מקבל מיקום שבו 10% מקליקים על המודעה, אז הוא כאילו "0.1 נבחר". ניתן להכליל את כלל-התשלומים של מיירסון גם למצב שהבחירה לא בינארית, אבל לא עשינו את זה בכיתה].

שאלה 4: הפיכת אלגוריתם למנגנון

מיצאו אלגוריתם נוסף שאתם מכירים, שונה מהאלגוריתמים שנלמדו בכיתה, שאפשר להפוך אותו למנגנון. תארו בפירוט את הקלט למנגנון, את הערכים של המשתתפים, את כלל-הבחירה ואת כלל-התשלום.

• **פתרון:** הפתרון של משה ואביב מעולה.

שאלה 5: מכרזי פירסום - איכות המודעה

בשיעור הנחנו, שהסתברות ההקלקה על מודעה מסויימת תלויה רק במיקום שלה ולא במודעה. במציאות, הסתברות ההקלקה על מודעה תלויה גם במיקום וגם במודעה עצמה.

א. נניח שלכל מודעה j יש מקדם איכות q_j , והסתברות ההקלקה כששמים אותה במקום k היא:

$$r_{j,k} = r_k * q_j$$

תארו אלגוריתם חמדני המשבץ מודעות למיקומים וממקסם את סכום הערכים.

פתרון:

הערך הממוצע של מפרסם j כששמים אותו במיקום k הוא הסתברות ההקלקה כפול הערך לקליק (V_j) :

$$v_j * q_j * r_k$$

לכן, כדי למקסם את סכום הערכים, נסדר את המפרסמים בסדר יורד של המכפלה $v_j * q_j$, כך ש:

$$v_1 * q_1 > v_2 * q_2 > v_3 * q_3 > \dots$$

ונסדר אותם לפי הסדר במקום 1, 2, 3, וכו'.

הוכחה שהאלגוריתם החמדני אכן ממקסם את סכום הערכים:

נתבונן בשני מפרסמים j, i ובסדר אחר שבו:

$$v_j * q_j < v_i * q_i \quad r_{k(j)} > r_{k(i)}$$

נחליף את מפרסמים j ו- i . השינוי בסכום הערכים:

$$v_i * q_i * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) - v_j * q_j * (r_{k(j)} - r_{k(i)}) = (v_i * q_i - v_j * q_j) (r_{k(j)} - r_{k(i)}) > 0$$

כלומר, הסדר האחר אינו ממקסם את סכום הערכים! מש"ל.

ג. נניח שלכל מודעה j ומיקום k יש הסתברות הקלקה כללית (לא דווקא ליניארית): $r_{j,k}$

הראו דוגמה שבה האלגוריתם החמדני לא עובד (לא מוצא שיבוץ המקסם את סכום הערכים).

פתרון:

הערך הממוצע של מפרסם j כששמים אותו במיקום k הוא הסתברות ההקלקה כפול הערך לקליק:

$$v_j * r_{j,k}$$

נניח שיש שני מפרסמים עם:

$$v_1=10, \quad r_{11}=0.9, \quad r_{12}=0.8; \quad v_2=5, \quad r_{21}=0.9, \quad r_{22}=0.1.$$

האלגוריתם החמדני ישים את מפרסם 1 במיקום 1 ומפרסם 2 במיקום 2; סכום הערכים הוא 9.5.

אבל בשיבוץ ההפוך, סכום הערכים הוא 12.5.