Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Matemática Computacional
IMT2220 - Cálculo para Ciencia de Datos

Tarea 4

16 de noviembre de 2023

$2^{\underline{o}}$ semestre 2023 - Profesor Joaquín Valenzuela

Benjamín Ismael Ruiz Salvatierra

Pregunta 1:

1. Verifique que el volumen encerrado por la superficie de revolución generada al rotar la función $f(x) = \frac{1}{x}$ alrededor del eje X para $x \in [1, \infty)$ es finito, mientras que el área de esta superficie es infinita.

R: Para resolver este problema, primero recordaremos las fórmulas para calcular el área y volumen de revolución de una función, siendo estas:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

1) Calculamos el volumen de revolución de la función:

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

Utilizando la explicación de integral impropia:

$$\pi \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$$

$$\pi \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Bigg|_1^b$$

$$\pi(-\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} + 1)$$
$$= \pi$$

Como podemos ver, al ser el resultado de la integral un valor finito irracional, podemos concluir que el volumen revolución generado por la función $\frac{1}{x}$ es finito.

2) Calculamos la superficie de revolución de la función:

$$S = \int_1^\infty 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$$

Utilizando al explicación de integral impropia:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$$

Extrayendo los valores constantes y analizando una cota inferior para que sea más fácil la integral, nos queda lo siguiente:

$$\lim_{b\to\infty} 2\pi\int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx > \lim_{b\to\infty} 2\pi\int_1^b \frac{1}{x}dx$$

Analizamos la integral inferior:

$$\lim_{b\to\infty} 2\pi\int_1^b \frac{1}{x}dx$$

$$\lim_{b\to\infty} 2\pi(\ln(b)-\ln(1))$$

$$2\pi\lim_{b\to\infty}\ln(b)$$

$$2\pi\cdot\infty$$

$$=\infty$$

Podemos concluir que, al obtener un resultado infinito de la integral, la función $\frac{1}{x}$ posee una superficie infinita.

Finalmente tras haber realizado los cálculos, podemos llegar a la conclusión de que la función $\frac{1}{x}$ presenta un volumen de revolución infinito, mientras que su área de la superficie de revolución es infinita.

Pregunta 2:

2. Determine los valores de λ tales que la integral:

$$\int\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\lambda} dA$$

es convergente, cuando D es el disco unitario en $\mathbb{R}^2$

R: Para encontrar los valores λ que permiten que nuestra función sea convergente, primeramente utilizaremos el cambio de variable por coordenadas polares, resultando tal que así:

Desarrollamos nuestro cambio de variable: Como estamos trabajando sobre el disco unitario de $\mathbb{R}^2$, al ser este una circunferencia podemos decir que nuestro valor de θ se mueve entre el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, mientras que el valor del radio se moverá en el intervalo $0 \leq r \leq 1$. Cabe recordar que para cuando estamos trabajando con coordenadas polares, el valor de r cumple con las siguientes propiedades:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$|J_{f(u,v)}| = r \text{ (con } f(u,v) \text{ la función con cambios de variable)}$$

Una vez habiendo encontrado los intervalos de integración, reemplazamos los datos dentro de nuestra nueva integral doble, resultando finalmente como:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{r^{2\lambda}} dr d\theta$$

Desarrollando algebraicamente:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{1-2\lambda} dr d\theta$$

Calculamos la integral con respecto de r:

$$\int_0^{2\pi} \left.\frac{r^{2-2\lambda}}{2-2\lambda}\right|_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1^{2-2\lambda}}{2-2\lambda} - \frac{0^{2-2\lambda}}{2-2\lambda}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1^{2-2\lambda}}{2-2\lambda} d\theta$$

Al ser el valor resultante un valor independiente de θ, aplicamos la integral de una constante:

$$\frac{1}{2-2\lambda}(2\pi - 0)$$

$$= \frac{\pi}{1-\lambda}$$

Por lo que podemos concluir que la integral es convergente para todo valor Real de $\lambda < 1$, es decir, todo valor dentro del disco exceptuando la frontera.

Pregunta 3:

3. Un cuerpo esférico de radio 5 tiene densidad de masa:

$$\rho(x,y,z) = 1 - \frac{x^2+y^2+z^2}{100}$$

donde (x,y,z) son los puntos medidos de forma que el centro del cuerpo esférico es el origen. Calcule el centro de masa de este cuerpo.

R: En esta ocasión, para poder hallar el centro de masa del cuerpo debemos utilizar las fórmulas vistas en clase para así calcular las coordenadas de balance para x, y y z, por lo que, analizando el ejercicio, podemos apreciar que es recomendable aplicar un cambio de variable a coordenadas esféricas, teniendo los siguientes datos:

$$0 \leq r \leq 5$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

Además de que nuestros valores de x, y y z se verán reflejados como:

$$x = r\sin(\phi)cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$$

$$z = rcos(\phi)$$

$$r^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$|J_{f(u,v)}| = r^2\sin(\phi) \text{ (con } f(u,v) \text{ la función con cambios de variable)}$$

Una vez explicado esto, procederemos a calcular la coordenada de x:

Calculamos la coordenada x:

Primero traspasamos nuestros datos a nuestra integral triple:

$$\frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^5 r\sin(\phi)cos(\theta)\left(1 - \frac{x^2+y^2+z^2}{100}\right)drd\theta d\phi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^5 \left(1 - \frac{x^2+y^2+z^2}{100}\right)drd\theta d\phi}$$

$$= \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^5 r\sin(\phi)cos(\theta)\left(1 - \frac{r^2}{100}\right)r^2\sin(\phi)drd\theta d\phi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^5 \left(1 - \frac{r^2}{100}\right)r^2\sin(\phi)drd\theta d\phi}$$

Desarrollamos algebraicamente la expresión:

$$\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5} r^3\sin^2(\phi)\cos(\theta)-\frac{r^5\sin^2(\phi)\cos(\theta)}{100}\,dr\,d\theta\,d\phi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\left(r^2\sin(\phi)-\frac{r^4\sin(\phi)}{100}\right)\,dr\,d\theta\,d\phi}$$

Desarrollamos el numerador:

$$=\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\sin^2(\phi)\cos(\theta)\int_0^{5} r^3\,dr-\frac{\sin^2(\phi)\cos(\theta)}{100}\int_0^{5} r^5\,dr)\,d\theta\,d\phi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\left(r^2\sin(\phi)-\frac{r^4\sin(\phi)}{100}\right)\,dr\,d\theta\,d\phi}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\sin^2(\phi)\cos(\theta)\left[\frac{r^4}{4}\Big|_0^5\right]\,dr-\frac{\sin^2(\phi)\cos(\theta)}{100}\left[\frac{r^6}{6}\Big|_0^5\right]\,dr)\,d\theta\,d\phi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\left(r^2\sin(\phi)-\frac{r^4\sin(\phi)}{100}\right)\,dr\,d\theta\,d\phi}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(\phi)\cos(\theta)625}{4}-\frac{\sin^2(\phi)\cos(\theta)15{,}625}{600}\,d\theta\,d\phi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\left(r^2\sin(\phi)-\frac{r^4\sin(\phi)}{100}\right)\,dr\,d\theta\,d\phi}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin^2(\phi)625}{4}\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\,d\theta-\frac{\sin^2(\phi)15{,}625}{600}\int_0^{2\pi}\cos(\theta)\,d\theta\right)\,d\phi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\left(r^2\sin(\phi)-\frac{r^4\sin(\phi)}{100}\right)\,dr\,d\theta\,d\phi}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin^2(\phi)625}{4}[-\sin(\theta)\Big|_0^{2\pi}]-\frac{\sin^2(\phi)15{,}625}{600}[-\sin(\theta)\Big|_0^{2\pi}]\right)\,d\phi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\left(r^2\sin(\phi)-\frac{r^4\sin(\phi)}{100}\right)\,dr\,d\theta\,d\phi}$$

$$=\frac{\int_0^{\pi}0\,d\phi}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\left(r^2\sin(\phi)-\frac{r^4\sin(\phi)}{100}\right)\,dr\,d\theta\,d\phi}$$

$$=\frac{0}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\left(r^2\sin(\phi)-\frac{r^4\sin(\phi)}{100}\right)\,dr\,d\theta\,d\phi}$$

Calculamos el denominador para evitar una posible indeterminación:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\left(r^2\sin(\phi)-\frac{r^4\sin(\phi)}{100}\right)dr\,d\theta\,d\phi \\
&=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin(\phi)\int_0^{5}r^2\,dr-\frac{\sin(\phi)}{100}\int_0^{5}r^4\,dr\right)d\theta\,d\phi \\
&=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\sin(\phi)[\frac{r^3}{3}\Big|_0^5]-\frac{\sin(\phi)}{100}[\frac{r^5}{5}\Big|_0^5])\,d\theta\,d\phi \\
&=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\phi)125}{3}-\frac{\sin(\phi)3{,}125}{500}\,d\theta\,d\phi \\
&=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\phi)125}{3}d\theta-\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\phi)3{,}125}{500}\,d\theta\,d\phi \\
&=\int_0^{\pi}\frac{\sin(\phi)250\pi}{3}-\frac{\sin(\phi)6{,}250\pi}{500}d\phi \\
&=\frac{250\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin(\phi)d\phi-\frac{6{,}250\pi}{500}\int_0^{\pi}\sin(\phi)d\phi \\
&=\frac{250\pi}{3}[-\cos(\phi)\Big|_0^{\pi}]-\frac{6{,}250\pi}{500}[-\cos(\phi)\Big|_0^{\pi}] \\
&=\frac{500\pi}{3}-\frac{12{,}500\pi}{500} \\
&=\frac{425\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Como el denominador es distinto de 0, podemos decir entonces que la coordenada x es igual a 0.

Calculamos la coordenada y:

Para este caso, al ser el mismo denominador para cada cálculo de coordenadas, podemos solamente calcular el valor del numerador y, posteriormente, reemplazarlo dentro de la fracción. Dicho esto, calculamos la siguiente integral triple:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5} r\sin(\phi)\sin(\theta)\left(1-\frac{r^2}{100}\right) r^2\sin(\phi)\,dr\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\left(r^3\sin^2(\phi)\sin(\theta)-\frac{r^5\sin^2(\phi)\sin(\theta)}{100}\right)dr\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{5} r^3\sin^2(\phi)\sin(\theta)\,dr-\int_0^{5}\frac{r^5\sin^2(\phi)\sin(\theta)}{100}\,dr\right)d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2(\phi)\sin(\theta)\int_0^{5} r^3\,dr-\frac{\sin^2(\phi)\sin(\theta)}{100}\int_0^{5} r^5\,dr\right)d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2(\phi)\sin(\theta)\left[\frac{r^4}{4}\Big|_0^5\right]-\frac{\sin^2(\phi)\sin(\theta)}{100}\left[\frac{r^6}{6}\Big|_0^5\right]\right)d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2(\phi)\sin(\theta)625}{4}-\frac{\sin^2(\phi)\sin(\theta)15{,}625}{600}\right)d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(\phi)\sin(\theta)625}{4}\,d\theta-\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(\phi)\sin(\theta)15{,}625}{600}\,d\theta\right)d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin^2(\phi)625}{4}\int_0^{2\pi}\sin(\theta)\,d\theta-\frac{\sin^2(\phi)15{,}625}{600}\int_0^{2\pi}\sin(\theta)\,d\theta\right)d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin^2(\phi)625}{4}\cdot 0-\frac{\sin^2(\phi)15{,}625}{600}\cdot 0\right)d\phi \\
&= \int_0^{\pi} 0\,d\phi = 0
\end{aligned}$$

Podemos concluir que el valor de la coordenada y es de 0.

Calculamos la coordenada z:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5} r\cos(\phi)\left(1-\frac{r^2}{100}\right) r^2\sin(\phi)\,dr\,d\theta\,d\phi \\
&=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{5}\left(r^3\cos(\phi)\sin(\phi)-\frac{r^5\cos(\phi)\sin(\phi)}{100}\right) dr\,d\theta\,d\phi \\
&=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos(\phi)\sin(\phi)\int_0^{5} r^3\,dr-\frac{\cos(\phi)\sin(\phi)}{100}\int_0^{5} r^5\,dr\right) d\theta\,d\phi \\
&=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos(\phi)\sin(\phi)625}{4}-\frac{\cos(\phi)\sin(\phi)15{,}625}{600}\right) d\theta\,d\phi \\
&=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\phi)\sin(\phi)625}{4}\,d\theta-\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\phi)\sin(\phi)15{,}625}{600}\,d\theta\right) d\phi \\
&=\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos(\phi)\sin(\phi)625\pi}{2}-\frac{\cos(\phi)\sin(\phi)15{,}625\pi}{300}\right) d\phi \\
&=\int_0^{\pi}\frac{\cos(\phi)\sin(\phi)625\pi}{2}\,d\phi-\int_0^{\pi}\frac{\cos(\phi)\sin(\phi)15{,}625\pi}{300}\,d\phi \\
&=\frac{625\pi}{2}\int_0^{\pi}\cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi-\frac{15{,}625\pi}{300}\int_0^{\pi}\cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi \\
&=\frac{625\pi}{2}\cdot 0-\frac{15{,}625\pi}{300}\cdot 0 \\
&=0
\end{aligned}$$

Podemos concluir que el valor de la coordenada z es de 0.

Finalmente podemos decir que el punto de centro de masa del cuerpo es la coordenada $(0, 0, 0)$.

Pregunta 4:

4. Calcule la integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Hint: Exprese I^2 como una integral doble y realice un cambio de variables apropiado.

R: Para resolver este problema, primero utilizaremos el hint que se nos presenta en el enunciado, quedando lo siguiente:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I^2 = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx)(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx)$$

Como la gráfica de la función es una función par, podemos expresar de la siguiente forma la integral:

$$I^2 = (2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx)(2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx)$$

Además, podemos ver que si realizamos un cambio en la variable de la integral, esta no se vería afectada siempre y cuando también se cambie su respectivo diferencial, por lo que podemos concluir lo siguiente:

$$I^2 = (2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx)(2\int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy)$$

Utilizando el teorema de fubini para la separación de las integrales de las funciones:

$$I^2 = (2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx)(2\int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy) = 4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dydx$$

Obteniendo así la integral doble.

Calculamos la integral:

Para poder calcular esta integral primeramente debemos modificar el exponente de la función ya que se nos es muy complicado el poder hallar su antiderivada, por lo que hacemos uso del cambio de variable:

$$\text{Sea } y = xu$$

al ser x una constante, obtenemos lo siguiente:

$$dy = xdu$$

resultando la siguiente integral:

$$4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2-x^2u^2} dudx$$

Factorizando el exponente:

$$4\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-x^2(1+u^2)}dudx$$

Aplicamos teorema de fubini para cambiar el orden de integración para poder así integrar respecto a x:

$$4\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-x^2(1+u^2)}dudx = 4\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-x^2(1+u^2)}dxdu$$

Como tenemos un exponente de una variable y estamos integrando con respecto de x, podemos tomar u como constante, teniendo como resultado lo siguiente:

$$4\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{-2x(1+u^2)e^{-x^2(1+u^2)}}{-2(1+u^2)}dxdu$$

$$4\int_0^\infty \frac{1}{-2(1+u^2)} \int_0^\infty -2x(1+u^2)e^{-x^2(1+u^2)}dxdu$$

Obteniendo la antiderivada:

$$-2\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}e^{-x^2(1+u^2)}\Big|_0^\infty du$$

Resolvemos utilizando la explicación de integral imparcial:

$$-2\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\left(\lim_{b\to\infty} e^{-b^2(1+u^2)} - e^0\right)du$$

$$= -2\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\Big(0-1\Big)du$$

$$= -2\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\cdot -1du$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}du$$

Podemos ver que la integral resultante es equivalente al arctan, por lo que:

$$2(\arctan(\infty) - \arctan(0))$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

$$= \pi$$

Como estamos analizando el resultado de I^2, aplicamos raíz y tomamos solo la parte positiva debido al intervalo de integración, dando como resultado final:

$$I^2 = \pi$$

$$I = \sqrt{\pi}$$