Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Matemática Computacional
IMT2220 - Cálculo para Ciencia de Datos

Tarea 2

21 de septiembre de 2023

2º semestre 2023 - Profesor Joaquín Valenzuela

Benjamín Ismael Ruiz Salvatierra

Respuestas:

1. Determine si los siguientes límites existen. Si existen, diga cuanto vale, en caso contrario de un contraejemplo de por qué no existe.

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2}$
(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x)-2x+y}{x^3+y}$
(d) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x^2y\cos(z)}{x^2+y^2+z^2}$

Solución:
Para demostrar la existencia de cada uno de los límites podemos utilizar multiples herramientas, siendo estas las de $y = mx$, evaluando como límites iterados o con coordenadas polares. Utilizaremos la mejor opción en relación a la conveniencia:

1. PD) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Utilizando la expresión $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}$$
$$\to \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)}$$
$$\to \lim_{x\to 0} \frac{1-m^2}{1+m^2}$$
$$\to \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

Como el límite depende de una pendiente m, podemos decir de que el límite no existe.

2. PD) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2+2}$

Evaluamos el límite de la función de forma iterada, por lo que:

Evaluamos con $y \to 0$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2+2}$$
$$\to \lim_{y\to 0} \frac{x0}{x^2+0^2+2}$$
$$\to \lim_{y\to 0} \frac{0}{x^2+2}$$

Evaluamos con $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{0}{0^2+2}$$
$$\to \lim_{x\to 0} \frac{0}{2}$$
$$\to 0$$

Como el límite es 0, debemos evaluar ahora con $x \to 0$ primero para posteriormente evaluar en $y \to 0$, esperando a que nuevamente nos dé el valor de 0, por lo que:

Evaluamos con $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2+2}$$
$$\to \lim_{x\to 0} \frac{0y}{0^2+y^2+2}$$
$$\to \lim_{x\to 0} \frac{0}{y^2+2}$$

Evaluamos con $y \to 0$:

$$\lim_{y\to 0} \frac{0}{0^2+2}$$
$$\to \lim_{y\to 0} \frac{0}{2}$$
$$\to 0$$

Como el límite es el mismo sin importar el punto de tendencia inicial, podemos concluír de que el límite existe y es 0.

3. PD) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x)-2x+y}{x^3+y}$
Evaluamos el límite de forma iterada, tal que:

Evaluamos con $x \to 0$:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)-2x+y}{x^3+y} \\ &\to \lim_{x\to 0} \frac{\sin(0)-0+y}{0^3+y} \\ &\to \lim_{x\to 0} \frac{y}{y} \\ &\to 1 \end{aligned}$$

Evaluamos con $y \to 0$:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)-2x+y}{x^3+y} \\ &\to \lim_{y\to 0} \frac{\sin(2x)-2x+0}{x^3+0} \\ &\to \lim_{y\to 0} \frac{\sin(2x)-2x}{x^3} \end{aligned}$$

4. PD) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x^2y\cos(z)}{x^2+y^2+z^2}$

Utilizando el hint de las coordenadas esféricas, podemos decir que:

$x = rcos(\theta)sin(\varphi)$
$y = rsin(\theta)sin(\varphi)$
$z = rcos(\varphi)$

tal que: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Reemplazando las coordenadas esféricas en el límite:

$$\lim_{r\to 0} \frac{2r^2cos^2(\theta)sin^2(\varphi)rsin(\theta)sin(\varphi)cos(rcos(\varphi))}{r^2} \text{ (Por propiedad de coordenada esférica)}$$
$$\to \lim_{r\to 0} \frac{2r^3cos^2(\theta)sin^2(\varphi)sin(\theta)sin(\varphi)cos(rcos(\varphi))}{r^2}$$
$$\to \lim_{r\to 0} 2rcos^2(\theta)sin^2(\varphi)sin(\theta)sin(\varphi)cos(rcos(\varphi))$$
$$\to 0$$

Podemos concluír de que el límite existe y su valor es 0.

2. Calcule el gradiente de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$
b) $f(x) = x^T\mathbf{A}x$, para $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$ matriz dada.
c) $f(x) = \|x\|_2^2 \ln{(1 + \|x\|_2^2)}$
d) $f(x) = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{1+\|x\|_2^2}$

a. Calcular gradiente de $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|x\|_2^2 \\ \to &\frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots x_n^2) \\ \to &\frac{(x_1^2 + \cdots x_n^2)}{2} \end{aligned}$$

Derivamos parcialmente:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{(2x_1 + \cdots + 2x_n)2}{4} \\ \to &\frac{4(x_1 + \cdots + x_n)}{4} \\ \to &x_1 + \cdots + x_n \end{aligned}$$

Expresado como vector:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

b. Calcular gradiente de $f(x) = x^T\mathbf{A}x$, para $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$ matriz dada.

Definimimos la matriz A como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por lo que, representando la multiplicación completa nos quedaría:

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Aplicando las propiedades de la multiplicación de vectores, nos quedaría la siguiente expresión:

$$x_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + x_n(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)$$

Por lo que puede expresarse como:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i A_{ij} x_j$$

Por lo tanto, al derivar parcialmente la función $f(x)$ con respecto a un x_k donde k son todos los valores de x en la expresión, nos quedaría:

$$\nabla f = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_{i1} x_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{1j} x_j, \cdots, \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_{in} x_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{nj} x_j \right)$$

Donde A_{ij} son elementos de la matriz dada y x_i son los componentes del vector x de dim = n.

c. Calcular gradiente de $f(x) = \|x\|_2^2 \ln(1 + \|x\|_2^2)$

Utilizando la propiedad de la derivada de una multiplicación, nos queda:

$$\begin{aligned}
\|x\|_2^2 \ln(1 + \|x\|_2^2) &= (\|x\|_2^2)' \ln(1 + \|x\|_2^2) + \ln(1 + \|x\|_2^2)'(\|x\|_2^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2x_i \ln(1 + \sum_{i=1}^{n} x^2) + \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i}{1 + \sum_{i=1}^{n} x^2} \|x\|_2^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2x_i \ln(1 + \sum_{i=1}^{n} x^2) + \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i^3}{1 + \sum_{i=1}^{n} x^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos decir que nuestra gradiente resultante será de tipo:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} 2x_i \ln(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2) + \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i^3}{1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} 2x_n \ln(1 + \sum_{i=1}^{n} x_n^2) + \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_n^3}{1+\sum_{i=1}^{n} x_n^2} \end{pmatrix}$$

d. Calcular gradiente de $f(x) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{1+\|x\|_2^2}$

3. Considere $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función tal que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|^\alpha$$

Sea L y α constantes mayores a 0, demuestre que f es continua.