Жесткие системы ОДУ

Система Ван-дер-Поля и траектории-утки.

Рассмотрим неавтономную систему уравнений Ван-дер-Поля:

$$y'_1 = y_2,$$

$$y'_2 = -a(y_2(y_1^2 - 1) + y_1),$$

или в представлении Льенара:

$$y'_1 = -a(\frac{y_1^3}{3} - y_1) + y_2,$$

$$y'_2 = -ay_1.$$

Считаем, что параметр a — большой. В расчетах рассмотреть два случая: $a = 10^3$ и $a = 10^6$. Для тестов обычно полагают $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$. Конечное время интегрирования системы $T_k = 20$.

Периодические решения жестких систем ОДУ иногда называют релаксационными автоколебаниями.

Исследовать задачу качественно, оценить показатель жесткости. Численно решить задачу с использованием следующих методов Рунге-Кутты, основанных на квадратурных формулах Гаусса.

Методы Гаусса соответственно 2-го, 4-го, и 6-го порядков представлены в табл. 1, 2, 3. Первый метод совпадает с правилом средней точки. Второй метод (4-го порядка) носит название метода Хаммера–Холлинсворта.

Таблица 1.

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Таблица 2.

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Таблица 3.

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} & \frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24} & \frac{2}{9} & \frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30} & \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{5}{36} \\ \hline & \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & \frac{5}{18} \end{array}$$

Таблица 4.

$$\begin{array}{c|cc} \frac{2+\sqrt{2}}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$