Жесткие системы ОДУ

Один из тестов для численных методов, предназначенных для верификации численных методов решения ЖС ОДУ. Два связанных осциллятора Ван-дер-Поля описываются системой ОДУ

$$\begin{cases} {y_1}' = -a(\frac{y_1^3}{3} - y_1) + y_2, \\ {y_2}' = -y_1 - c_{12}y_3, \\ {y_3}' = -b(\frac{y_3^3}{3} - y_3) + y_4, \\ {y_4}' = -c_{22}y_3 - c_{21}y_1. \end{cases}$$

Значения параметров задачи $a \sim 10^3$, $b \sim 10^3$, отношение a/b — иррационально. Пусть набор констант связи удовлетворяет условиям $C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, $\det C \geq 0$, $SpC > 0$. Все постоянные c спорядка 1.

Начальные условия для задачи $y_1(0) = y_3(0) = 0$, $y_2(0) > 0$, $y_4(0) > 0$. Например, можно положить $y_2(0) = y_4(0) = 1$. Конечное время $T \sim 200$. Шаг τ не больше 0.1 (0.1 – 0.005).

Используются методы типа Руге-Кутты - Методы Радо IIA порядков 1, 3, 5, представлены соответственно в табл. 1, 2, 3. Метод первого порядка является неявным методом Эйлера.

Таблица 1.

1	1
	1

Таблица 2.

1/3	5/12	-1/12
1	3/4	1/4
	3/4	1/4

Таблица 3.

$\frac{4-\sqrt{6}}{10}$	$88 - 7\sqrt{6}$	$\frac{296-169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2+3\sqrt{6}}{225}$
$\frac{4+\sqrt{6}}{10}$	$\frac{296+169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2-3\sqrt{6}}{225}$
1	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$

Таблица 4.

$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	0
$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$
	1/2	1/2

Сравнить полученные численные результаты с результатами вычислений по однократно диагонально неявному методу (второго порядка аппроксимации, асимптотически устойчивому, таблица 4)

Построить функции устойчивости всех используемых численных методов