# Minimum Snap QP Solver

## 轨迹描述

由于每一段轨迹都是一个多项式，因此可以将轨迹表示为，

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t)\doteq\sum_{i=0}^{N}p_{1,i}t^i & T_0\le t\le T_1 \\ f_2(t)\doteq\sum_{i=0}^{N}p_{2,i}t^i & T_1\le t\le T_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_M(t)\doteq\sum_{i=0}^{N}p_{M,i}t^i & T_{M-1}\le t\le T_M \end{cases} \tag{1}$$

其中由于是最小化snap，也就至少需要7次多项式，因此取$N=7$表示每段多项式包括常数项共有8个参数；$p_i$表示该段多项式中的第i个参数，其中$p_0$是常数项，$p_1$是一次项依此类推；$M$表示总共有M段轨迹，并且要求序列$\mathbf{T}=\{T_0,T_1,\cdots,T_M\}$必须都是已知的。

## 目标函数

$$\begin{aligned} &\min \quad J=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{P} \\ &\text{where} \quad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1\\ \vdots \\ \mathbf{p}_{\mathrm{M}}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{Q}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{Q}_{\mathrm{M}}\end{bmatrix} \\ &\text{s.t.} \quad \mathbf{A}_{\mathrm{eq}}\mathbf{P}=\mathbf{d}_{\mathrm{eq}}, \quad \mathbf{p}_i\in\mathbb{R}^8, \quad \mathbf{Q}_i\in\mathbb{R}^{8\times 8}, \quad i\in\{1,2,\cdots,M\} \end{aligned} \tag{2}$$

这是一个用来凸优化求解的模型，其中$\mathbf{p}_i$是第$i$段轨迹的参数，是8维的向量。$\mathbf{Q}_i$后续会提到。

## 代价函数

对于每一段轨迹$f(t)$都有，其中$N$为最高次数7，

$$\begin{aligned} &f(t)=\sum_{i=0}^{N}p_it^i \\ &\Rightarrow f^{(4)}(t)=\sum_{i\ge 4}i(i-1)(i-2)(i-3)t^{i-4}p_i \\ &\Rightarrow \left(f^{(4)}(t)\right)^2=\sum_{i\ge 4,l\ge 4}i(i-1)(i-2)(i-3)l(l-1)(l-2)(l-3)t^{i+l-8}p_ip_l \\ &\Rightarrow J(T)=\int_{T_{j-1}}^{T_j}\left(f^4(t)\right)^2dt=\sum_{i\ge 4,l\ge 4}\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)j(l-1)(l-2)(l-3)}{i+l-7}\left(T_j^{i+l-7}-T_{j-1}^{i+l-7}\right)p_ip_l \end{aligned} \tag{3}$$

因此第$j$段轨迹的代价函数$J(T)$可以使用矩阵的形式表示为，

$$J(T)=\int_{T_{j-1}}^{T_j}\left(f^4(t)\right)^2dt=\begin{bmatrix}\vdots\\ p_i\\ \vdots\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)l(l-1)(l-2)(l-3)}{i+l-7}\Delta T^{i+l-7} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ p_l\\ \vdots\end{bmatrix}=\mathbf{p}_j^TQ_j\mathbf{p}_j \tag{4}$$

其中$j$表示第$j$段轨迹，总共有$M$段；$\mathbf{p}_j\in\mathbb{R}^8$，而且对于矩阵$Q_j\in\mathbb{R}^{8\times 8}$，由$J(T)$原来的表达式中可以看到，当且仅当，$i\ge 4$且$l\ge 4$的时候才有值，所以Q矩阵只有`Q(4:7,4:7)`为非零，并且在非零的部分按照$i$和$l$的值代入公式即可。

## 连续性约束

对于每一段轨迹，

$$\mathrm{f(t)=p_7t^7+p_6t^6+p_5t^5+p_4t^4+p_3t^3+p_2t^2+p_1t^1+p_0} \tag{5}$$

那么先定义一个$G(t)$，

$$G(t)=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{t} & \mathrm{t}^2 & \mathrm{t}^3 & \mathrm{t}^4 & \mathrm{t}^5 & \mathrm{t}^6 & \mathrm{t}^7\\ 0 & 1 & 2\mathrm{t} & 3\mathrm{t}^2 & 4\mathrm{t}^3 & 5\mathrm{t}^4 & 6\mathrm{t}^5 & 7\mathrm{t}^6\\ 0 & 0 & 2 & 6\mathrm{t} & 12\mathrm{t}^2 & 20\mathrm{t}^3 & 30\mathrm{t}^4 & 42\mathrm{t}^5\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24\mathrm{t} & 60\mathrm{t}^2 & 120\mathrm{t}^3 & 210\mathrm{t}^4\end{bmatrix} \tag{6}$$

且，容易得，

$$G(t)\cdot\mathbf{p}=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{t} & \mathrm{t}^2 & \mathrm{t}^3 & \mathrm{t}^4 & \mathrm{t}^5 & \mathrm{t}^6 & \mathrm{t}^7\\ 0 & 1 & 2\mathrm{t} & 3\mathrm{t}^2 & 4\mathrm{t}^3 & 5\mathrm{t}^4 & 6\mathrm{t}^5 & 7\mathrm{t}^6\\ 0 & 0 & 2 & 6\mathrm{t} & 12\mathrm{t}^2 & 20\mathrm{t}^3 & 30\mathrm{t}^4 & 42\mathrm{t}^5\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24\mathrm{t} & 60\mathrm{t}^2 & 120\mathrm{t}^3 & 210\mathrm{t}^4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{p}_0\\ \mathrm{p}_1\\ \mathrm{p}_2\\ \mathrm{p}_3\\ \mathrm{p}_4\\ \mathrm{p}_5\\ \mathrm{p}_6\\ \mathrm{p}_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(t)\\ f^{(1)}(t)\\ f^{(2)}(t)\\ f^{(3)}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{v}\\ \mathrm{a}\\ \mathrm{j}\end{bmatrix} \tag{7}$$

导数约束要求满足边界条件以及经过中间的waypoints。那么先满足边界条件，

$$\mathrm{G(0)\bullet p_1}=\begin{bmatrix}\mathrm{x_{start}}\\ \mathrm{v_{start}}\\ \mathrm{a_{start}}\\ \mathrm{j_{start}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}\left(\mathbf{T_M}\right)\bullet\mathbf{p_M}=\begin{bmatrix}\mathrm{x_{stop}}\\ \mathrm{v_{stop}}\\ \mathrm{a_{stop}}\\ \mathrm{j_{stop}}\end{bmatrix} \tag{8}$$

然后中间条件是，

$$\begin{gathered}\mathrm{G}\left(\mathrm{T}_1\right)\cdot\mathrm{p}_1=\mathrm{x}_1\\ \mathrm{G}\left(\mathrm{T}_2\right)\cdot\mathrm{p}_2=\mathrm{x}_2\\ \vdots\\ \mathrm{G}\left(\mathrm{T}_{M-1}\right)\cdot\mathrm{p}_{M-1}=\mathrm{x}_{M-1}\end{gathered} \tag{9}$$

综上所述可以构建为$\mathbf{A}_d\mathbf{p}_d=\mathbf{d}_d$的形式，其中$G_0(t)$表示$G(t)$的第一行，

$$\mathbf{A}_d\mathbf{p}_d=\begin{bmatrix}\mathrm{G}(0)_{4\times8} & \mathbf{0_{4\times8}} & \cdots & \mathbf{0_{4\times8}}\\ \mathbf{0_{4\times8}} & \mathbf{0_{4\times8}} & \cdots & \mathrm{G}(\mathrm{T}_M)_{4\times8}\\ \mathrm{G}_0(\mathrm{T}_1)_{1\times8} & \mathbf{0}_{1\times8} & \cdots & \mathbf{0}_{1\times8}\\ \mathbf{0}_{1\times8} & \mathrm{G}_0(\mathrm{T}_2)_{1\times8} & \cdots & \mathbf{0}_{1\times8}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{p}_{1,0}\\ \vdots\\ \mathrm{p}_{1,7}\\ \mathrm{p}_{2,0}\\ \vdots\\ \mathrm{p}_{2,7}\\ \vdots\\ \vdots\\ \mathrm{p}_{M,0}\\ \vdots\\ \mathrm{p}_{M,7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{x_{start}}\\ \mathrm{v_{start}}\\ \mathrm{a_{start}}\\ \mathrm{j_{start}}\\ \mathrm{x_{stop}}\\ \mathrm{v_{stop}}\\ \mathrm{a_{stop}}\\ \mathrm{j_{stop}}\\ \mathrm{x}_1\\ \mathrm{x}_2\\ \vdots\\ \mathrm{x}_{M-1}\end{bmatrix} \tag{10}$$

其中，$\mathbf{p}\in\mathcal{R}^{8M\times1}$，边缘条件的也就上面中的前两行矩阵大小是$8\times8M$，然后中间点有M-1个，所以下面有M-1行，因此$A_d\in\mathcal{R}^{(M+7)\times8M}$。

# 导数约束

对于第$j$个点来说，其上一段轨迹的终点和下一段轨迹的起点的状态应该是要相同的，也就是说，要满足，

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x}_j(\mathrm{T}_j) \\ \mathrm{v}_j(\mathrm{T}_j) \\ \mathrm{a}_j(\mathrm{T}_j) \\ \mathrm{j}_j(\mathrm{T}_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_{j+1}(0) \\ \mathrm{v}_{j+1}(0) \\ \mathrm{a}_{j+1}(0) \\ \mathrm{j}_{j+1}(0) \end{bmatrix} \tag{11}$$

再引用之前定义过的$G(t)$函数，可以简化为，

$$\begin{bmatrix} \mathrm{G}_j(\mathrm{T}_j) & -\mathrm{G}_{j+1}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_j \\ \mathbf{p}_{j+1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{12}$$

因此可以将所有轨迹的连续性约束补充合并为$\mathbf{A}_c\mathbf{p}_c = \mathbf{d_c}$的形式，

$$\mathbf{A}_c\mathbf{p}_c = \begin{bmatrix} \mathrm{G}_1(\mathrm{T}_1)_{4\times8} & -\mathrm{G}_2(0)_{4\times8} & \mathbf{0}_{4\times8} & \cdots & \mathbf{0}_{4\times8} \\ \mathbf{0}_{4\times8} & \mathrm{G}_2(\mathrm{T}_2)_{4\times8} & -\mathrm{G}_3(0)_{4\times8} & \cdots & \mathbf{0}_{4\times8} \\ \mathbf{0}_{4\times8} & \mathbf{0}_{4\times8} & \mathrm{G}_3(\mathrm{T}_3)_{4\times8} & \cdots & \mathbf{0}_{4\times8} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{4\times8} & \mathbf{0}_{4\times8} & \cdots & \mathrm{G}_{M-1}(\mathrm{T}_{M-1})_{4\times8} & -\mathrm{G}_M(0)_{4\times8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{p}_{1,0} \\ \vdots \\ \mathrm{p}_{1,7} \\ \mathrm{p}_{2,0} \\ \vdots \\ \mathrm{p}_{2,7} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{p}_{M,0} \\ \vdots \\ \mathrm{p}_{M,7} \end{bmatrix} = [\mathbf{0}]_{4M\times1} \tag{13}$$

# 合并所有约束

其中导数约束总共有M+1个点，那么状态矩阵$\mathbf{A}_d \in \mathbb{R}^{4(M+7)\times8M}$，而对于连续性约束，总共有M段轨迹，那么状态矩阵$\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{4M\times8M}$，因此可以纵向合并状态矩阵为$\mathbf{A}$，和$\mathbf{p}$，因此可以得到总的约束为，

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{d} \tag{14}$$

# 模型求解

根据得到的最小化的代价函数$J(t)$以及约束条件$\mathbf{Ap} = \mathbf{d}$，就可以放到`qp`求解器中直接算到最优的状态向量$\mathbf{p}$，表示的是每段轨迹的多项式参数，然后根据参数画出曲线即可得到minimum snap的轨迹。