Bezier&BSpline

`Bezier2.m` 包含了构建二阶（二次）贝塞尔曲线的源代码，而 `Bezier3.m` 专用于创建三阶（三次）贝塞尔曲线。`BSpline.m` 允许通过调整次数（`Degree`）和控制点的数量（`N`），生成B样条曲线。设置这些参数后，可以使用鼠标输入 `N` 个点来可视化结果B样条曲线。

Bezier曲线

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \quad t \in [0,1] \tag{1}$$

1. $P_i(i=0,1\ldots n)$ 是控制N边形的 $\mathrm{n}+1$个顶点。
2. $B_{i,n}(t)$ 是Bernstein基函数，P_i 代表空间中的点， $t \in [0,1]$，把 t 代进去可以算出一个数，就是平面或空间的一个点。
3. 随着 t 值的变化, 点也在变化,当 t 从 0 到 1 , 就得到了 Bezier曲线

一阶Bezier曲线

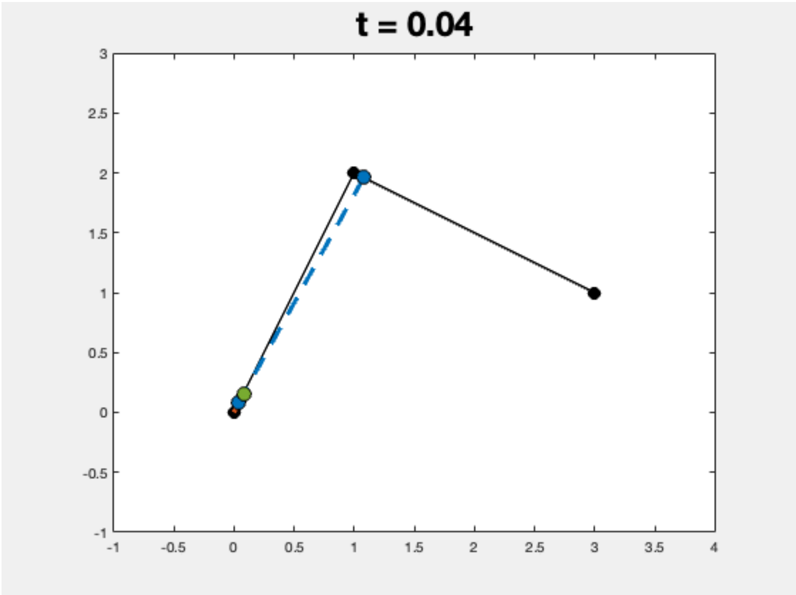
对于一阶贝塞尔曲线，很容易根据t的值得出线段上那个点的坐标：

$$B_1(t)=P_0+(P_1-P_0)t \tag{2}$$

然后可以得出:

$$B_1(t)=(1-t)P_0+tP_1, t \in [0,1] \tag{3}$$

二阶Bezier曲线



对于二阶贝塞尔曲线, 其实你可以理解为: 在 P_0P_1 上利用一阶公式求出点 P_0', 然后在 P_1P_2 上利用一阶公式求出点 P_1', 最后在 $P_0'P_1'$ 上再利用一阶公式就可以求出最终贝塞尔曲线上的点 P_0'' 。具体推导过程如下:
先求出线段上的控制点。

$$\begin{aligned} P_0' &= (1-t)P_0 + tP_1 \\ P_1' &= (1-t)P_1 + tP_2 \end{aligned} \tag{4}$$

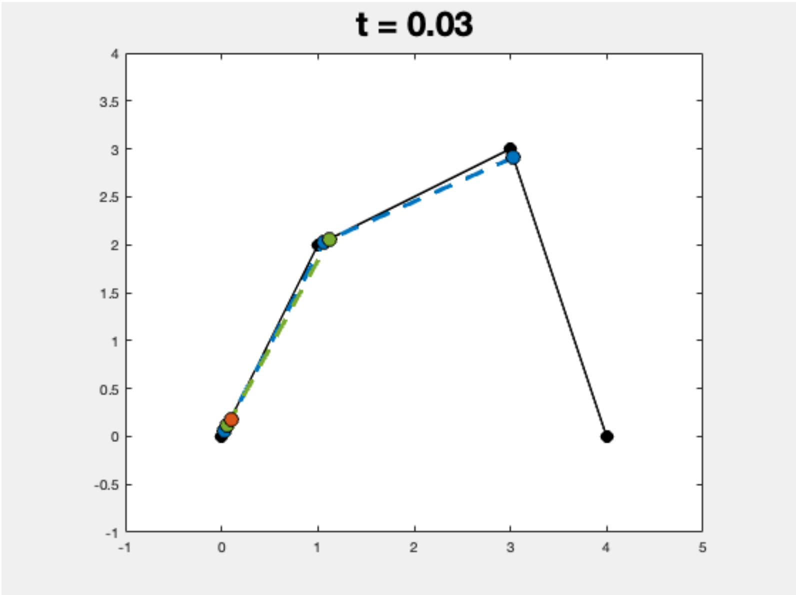
将上面的公式带入至下列公式中:

$$\begin{aligned} B_2(t) &= (1-t)P_0' + tP_1' \\ &= (1-t)\left((1-t)P_0 + tP_1\right) + t\left((1-t)P_1 + tP_2\right) \\ &= (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2 \end{aligned} \tag{5}$$

得出以下公式:

$$B_2(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2, t \in [0,1] \tag{6}$$

三阶Bezier曲线



与二阶贝塞尔曲线类似, 可以通过相同的方法得出以下坐标公式:

$$B_3(t)=(1-t)^3P_0+3t(1-t)^2P_1+3t^2(1-t)P_2+t^3P_3,t\in[0,1] \tag{7}$$

多阶Bezier曲线

以此类推可以得到n阶贝塞尔曲线

$$B(t)=\sum_{i=0}^{n}C_n^iP_i(1-t)^{n-i}t^i,t\in[0,1] \tag{8}$$

即:

$$B(t)=\sum_{i=0}^{n}P_ib_{i,n}(t),t\in[0,1] \tag{9}$$

BSpline

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iF_{i,k}(t)\quad t\in[t_{k-1},t_{n+1}] \tag{10}$$

公认的是de Boor-Cox递推定义。其内容简单来说是由0次构造 1 次, 由1次构造 2 次, 由 2 次构造 3 次,以此类推。

递推定义:

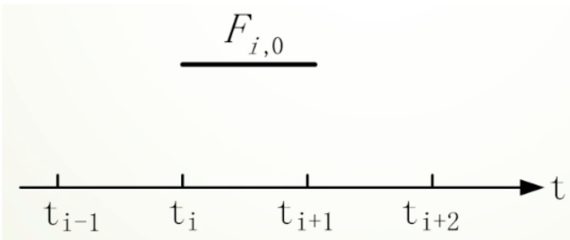
$$
\begin{aligned}
&\mathrm{F}_{i,0}(t)=\begin{cases}1, & if t_i \leq t \leq t_{i+1}\\ 0, & otherwise\end{cases}\\
&\mathrm{F}_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}\,\mathrm{F}_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\,\mathrm{F}_{i+1,k-1}(t)\\
&defining \frac{0}{0}=0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

其中`k`表示`k`次，`i`表示第`i`段时间。

零次BSpline

$$
F_{i,0}(t)=\begin{cases}1, & \text{if } t_i \leq t < t_{i+1}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}
\tag{12}
$$

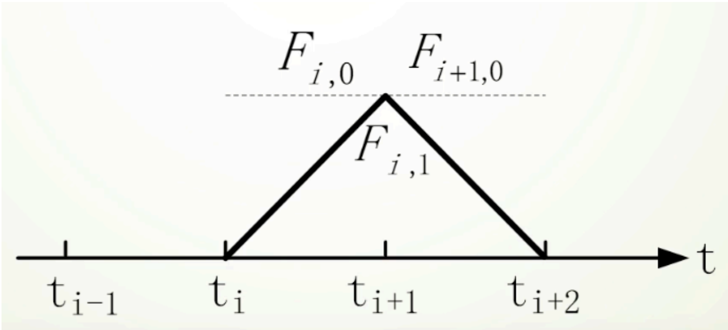
得到的曲线如下图所示，



一次BSpline

$$
\begin{aligned}
F_{i,1}(t)&=\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}F_{i,0}(t)+\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}F_{i+1,0}(t)\\
&=\begin{cases}\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}, & \text{if } t_i \leq t < t_{i+1}\\ \frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}, & \text{if } t_{i+1} \leq t < t_{i+2}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

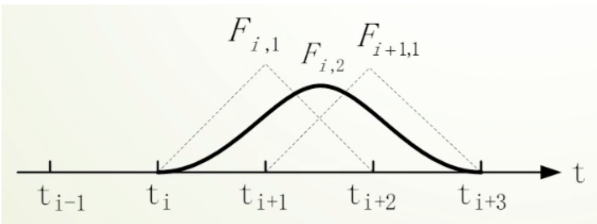
得到的曲线如下所示，



二次BSpline

$$
\begin{aligned}
F_{i,2}(t) &= \frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}F_{i,1}(t)+\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}F_{i+1,1}(t) \\
&= \begin{cases}
\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}\cdot\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}, & \text{if } t_i \le t < t_{i+1} \\
\frac{t-t_i}{t_{i+2}-t_i}\cdot\frac{t_{i+2}-t}{t_{i+2}-t_{i+1}}+\frac{t_{i+3}-t}{t_{i+3}-t_{i+1}}\cdot\frac{t-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}}, & \text{if } t_{i+1} \le t < t_{i+2} \\
\frac{(t_{i+3}-t)^2}{(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+3}-t_{i+2})}, & \text{if } t_{i+2} \le t < t_{i+3} \\
0, & \text{otherwise}
\end{cases}
\end{aligned} \tag{14}
$$

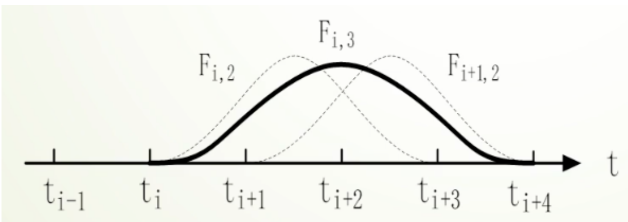
得到的结果如下所示，



三次BSpline

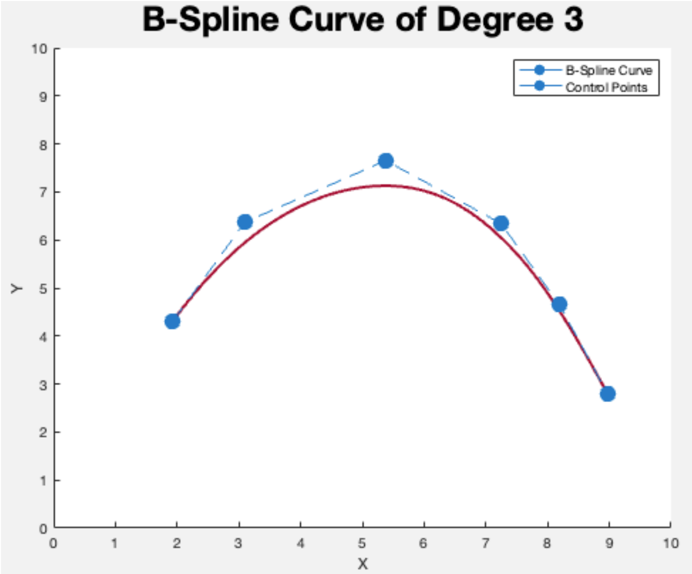
$$
F_{i,3}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+3}-t_i}F_{i,2}(t)+\frac{t_{i+4}-t}{t_{i+4}-t_{i+1}}F_{i+1,2}(t) \tag{15}
$$

得到的结果如下所示，

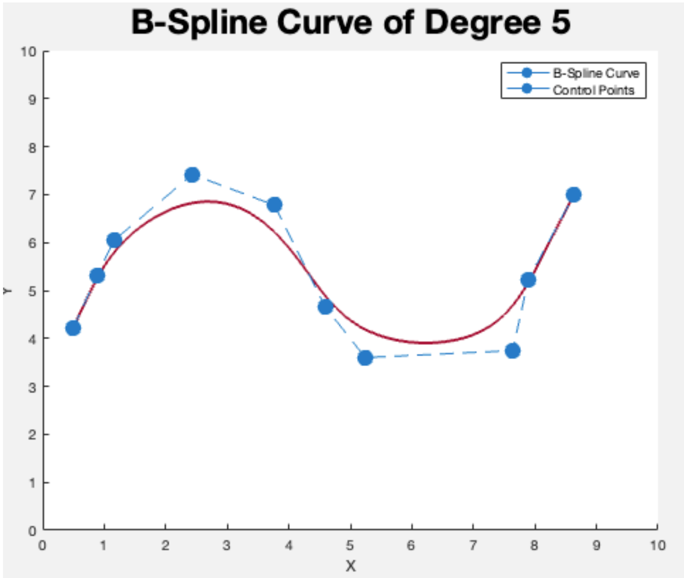


实际的程序运行结果如下图所示

例如，**3次BSpline**



5次BSpline，



Reference

https://juejin.cn/post/6844903666361565191

https://github.com/pjbarendrecht/BsplineLab.git