傅里叶变换

Dwl2021

Oct. 2023

1 傅里叶级数

1.1 三角形傅里叶级数

周期函数 $f(t)$ 在区间 $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ 内可表示为:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right]=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\omega t+\phi_n\right)$$

其中,

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos(n\omega t)dt,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin(n\omega t)dt$$

$$A_0=a_0,\ A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\ \phi_n=-\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

可行性证明: 设有 n 个函数 $\phi_n(t)$ 在区间 (t_1,t_2) 构成一个正交函数集，即 $\int_{t_1}^{t_2}\phi_i\phi_j=0(i\neq j)$。将任一函数 $f(t)$ 用这 n 个正交函数的线性组合来近似:

$$f(t)\approx C_1\phi_1(t)+C_2\phi_2(t)+\cdots+C_n\phi_n(t)=\sum_{j=1}^{n}C_j\phi_j(t)$$

则均方误差为,

$$\overline{\varepsilon^2}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t)-\sum_{j=1}^{n}C_j\phi_j(t)\right]^2dt$$

求导计算最小值点,

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}}{\partial C_i}=\frac{\partial}{\partial C_i}\left\{\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t)-\sum_{j=1}^{n}C_j\phi_j(t)\right]^2dt\right\}=0$$

解得系数为,

$$C_i=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)\phi_i(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2}{\phi_i}^2(t)dt}=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\phi_i(t)dt,\quad \text{其中}K_i=\int_{t_1}^{t_2}\phi_i^2(t)dt$$

而在该情形下,

$$a_n=\frac{\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega t)dt}{\int_{-T/2}^{T/2}\cos^2(n\omega t)dt}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n=\frac{\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\omega t)dt}{\int_{-T/2}^{T/2}\sin^2(n\omega t)dt}=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\omega t)dt$$

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = C_0 = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt}{\int_{-T/2}^{T/2} 1^2 dt} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \overline{f(t)}}$$

1.2 指数型傅里叶级数

根据欧拉公式，可将三角形傅里叶级数转化为，

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1} \frac{A_n}{2}\left\{e^{j(n\omega t+\phi_n)} + e^{-j(n\omega t+\phi_n)}\right\} \\ &= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n e^{j\phi_n} e^{jn\omega t} + A_n e^{-j\phi_n} e^{-jn\omega t)}\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega t} \end{aligned}$$

其中，

$$F_n = F\left(n\omega_0\right) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt, \text{ 其中}\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

F_n 也称为信号的频谱.

1.3 周期信号频谱的性质

1.3.1 性质 1

对于实信号 $s(t)$，有 $s(t) = s^*(t)$

$$F_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{+j2\pi n f_0 t}dt = \left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt\right]^* = F_n^*$$

正频率部分和负频率部分间存在复数共轭关系.

1.3.2 性质 2

对于实偶信号 $s(t)$，

$$F_{-n} = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)e^{j2\pi n f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(-t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt = F_n$$

再根据性质 1 可得，

$$F_n = F_n^*$$

若 $s(t)$ 是实偶信号，则 F_n 为实函数.

1.4 部分常见周期信号的傅里叶级数

1.4.1 余弦信号 $cos(\omega_0 t+\theta)$

方法一：

$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} cos(\omega_0 t+\theta)e^{-jn\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} (\frac{e^{j(\omega_0 t+\theta)}+e^{-j(\omega_0 t+\theta)}}{2})e^{-jn\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{2T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j\theta}\cdot e^{j[(1-n)\omega_0 t]}dt + \frac{1}{2T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j\theta}\cdot e^{-j[(n+1)\omega_0 t]}dt \\
&= \frac{1}{2T_0}\left[\frac{e^{j\theta}}{j(1-n)\omega_0}e^{j(1-n)\omega_0 t}\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} - \frac{-e^{j\theta}}{j(n+1)\omega_0}e^{-j(1+n)\omega_0 t}\Big|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{2T_0}\left[\frac{2e^{j\theta}}{(1-n)\omega_0}sin[(1-n)\pi] + \frac{2e^{-j\theta}}{(n+1)\omega_0}sin[(n+1)\pi]\right] \\
&= \frac{e^{j\theta}}{2(1-n)\pi}sin[(1-n)\pi] + \frac{e^{-j\theta}}{2(n+1)\pi}sin[(n+1)\pi], \quad n=0,\pm1,\pm2,\dots
\end{aligned}
$$

因此可得，

$$
F_n = \begin{cases} e^{j\theta}, & n=1 \\ e^{-j\theta}, & n=-1 \\ 0, & other\ cases \end{cases}
$$

方法二：

通过傅里叶变换导出傅里叶级数。查傅里叶变换表可得，

$$
cos(\omega_0 t+\theta) = \frac{e^{j(\omega_0 t+\theta)}+e^{-j(\omega_0 t+\theta)}}{2} \leftrightarrow \pi e^{j\theta}\delta(\omega-\omega_0)+\pi e^{-j\theta}\delta(\omega+\omega_0) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)
$$

因此可以得到，当 $n=1$ 时，$F_n=e^{-j\theta}$；当 $n=-1$ 时，$F_n=e^{j\theta}$；否则 $F_n=0$，得到的结论与方法一相同。

2 傅里叶变换

2.1 从傅里叶级数推导傅里叶变换

周期信号的周期 $T\to\infty$，频谱间隔 $\omega=\frac{2\pi}{T}\to 0$，因此可以得到，

$$
F_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega t}dt \to 0
$$

此时，定义非周期信号的傅里叶变换为 F_nT，得

$$F_nT=\int_T f(t)e^{-jn\omega t}dt$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_nTe^{jn\omega t}\cdot\frac{1}{T}$$

当 $T\to\infty$ 时，有 $\omega\to 0$，F_nT 变成频谱的连续函数 $F(j\omega)$. 因此导出傅里叶变换定义的表达式，

傅里叶变换： $F(\omega)\overset{\text{def}}{=}\lim_{T\to\infty}F_nT=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

傅里叶逆变换： $f(t)=\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_nTe^{jn\omega t}\left(\frac{2\pi}{T}\right)\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$

2.2 傅里叶变换的性质

性质名称	时间函数	频谱函数	性质名称	时间函数	频谱函数
线性	$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF_1(\mathrm{j}\omega)+bF_2(\mathrm{j}\omega)$	时域微分	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}\omega)^nF(\mathrm{j}\omega)$
对称	$F(\mathrm{j}t)$	$2\pi f(-\omega)$	频域微分	$(-\mathrm{j}t)^nf(t)$	$\frac{\mathrm{d}^nF(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
频移	$f(t)e^{\pm j\omega_0 t}$	$F[j(\omega\mp\omega_0)]$	时域积分	$\int_{-\infty}^{t}f(x)\mathrm{d}x$	$\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
尺度变换	$f(at),a\neq 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$	频域积分	$\pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-jt}$	$\int_{-\infty}^{\omega}F(x)dx$
时移	$f\left(t\pm t_0\right)$	$F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}$	时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)$

2.2.1 线性性质

$$f_1(t)\leftrightarrow F_1(j\omega),f_2(t)\leftrightarrow F_2(j\omega)\quad\Rightarrow\quad af_1(t)+bf_2(t)\leftrightarrow aF_1(j\omega)+bF_2(j\omega)$$

2.2.2 对称性质

$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)\quad\Rightarrow\quad F(jt)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

2.2.3 时移特性

$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)\quad\Rightarrow\quad f\left(t\pm t_0\right)\leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0}F(j\omega)$$

2.2.4 尺度变换性质

$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)\quad\Rightarrow\quad f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F\left(j\frac{\omega}{a}\right),\ a\neq 0$$

2.2.5 频移特性

$$f(t)\leftrightarrow F(j\omega)\quad\Rightarrow\quad f(t)e^{\pm j\omega_0 t}\leftrightarrow F\left[j\left(\omega\mp\omega_0\right)\right]$$

2.2.6 卷积定理

$$f_1(t)\leftrightarrow F_1(j\omega),f_2(t)\leftrightarrow F_2(j\omega)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega)\\ f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)\end{cases}$$

2.2.7 时域微分

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega)$$

2.2.8 时域积分

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

2.2.9 频域微分

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad \Rightarrow \quad (-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$$

2.2.10 频域积分

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \pi f(0)\delta(t) + \frac{f(t)}{-jt} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(x)dx$$

2.3 常用傅里叶变换

表 1: 常用傅里叶变换表

信号	时间函数 $f(t)$	频谱函数 $F(\omega)$
单边指数脉冲	$Ee^{-\alpha t}u(t)(\alpha > 0)$	$\frac{E}{\alpha+j\omega}$
双边指数脉冲	$Ee^{\lvert\alpha\rvert t}u(t)(\alpha > 0)$	$\frac{2\alpha E}{\alpha^2+\omega^2}$
矩形脉冲	$\begin{cases} E, & \lvert t\rvert < \tau/2 \\ 0, & \lvert t\rvert \geq \tau/2 \end{cases}$	$E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$
冲激信号	$E\delta(t)$	E
阶跃信号	$Eu(t)$	$\frac{E}{j\omega} + \pi E\delta(\omega)$
直流信号	E	$2\pi E\delta(\omega)$
余弦信号	$Ecos(\omega_0 t)$	$\pi E[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$
正弦信号	$Esin(\omega_0 t)$	$j\pi E[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$
斜变信号	$tu(t)$	$j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$
符号函数	$Esgn(t)$	$\frac{2E}{j\omega}$
三角脉冲	$\begin{cases} E(1-\frac{2\lvert t\rvert}{\tau}), & \lvert t\rvert < \tau/2 \\ 0, & \lvert t\rvert \geq \tau/2 \end{cases}$	$\frac{E\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$
抽样脉冲	$Sa(\omega_c t)$	$\begin{cases} \frac{\pi}{\omega_c}, & \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 0, & \omega \geq \omega_c \end{cases}$

3 周期信号的傅里叶变换

3.1 傅里叶变换的导出形式 1

根据冲激序列的傅里叶变换导出周期信号的傅里叶变换。首先确定周期信号和非周期信号的关系，从周期信号 $f_T(t)$ 中截取一个周期得到非周期信号 $f_0(t)$, 则 $f_T(t)$ 可看成 $f_0(t)$ 与周期为 T 的冲激序列 $\delta_T(t)$ 的卷积:

$$\begin{aligned} f_T(t) = f_0(t) * \delta_T(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\tau)\delta_T(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau-mT)d\tau \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\tau)\delta[\tau-(t-mT)]d\tau = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_0(t-mT) \end{aligned}$$

将 $f_T(t) = f_0(t) * \delta_T(t)$ 两边同时取傅里叶变换得,

$$F_T(j\omega) = F_0(j\omega) \cdot \mathscr{F}[\delta_T(t)]$$

其中，$\delta_T(t)$ 是周期函数，可以展成傅里叶级数，

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T}\int_T \delta_T(t)e^{-jn\omega t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_T \delta(t)e^{-jn\omega t}dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned}$$

因此得到,

$$\delta_T = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0) = \omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0) = \omega_0\delta_\Omega(\omega)$$

将 $\delta_\Omega(\omega)$ 的展开式代入 $F_T(j\omega) = F_0(j\omega)\omega_0\delta_\Omega(\omega)$ 得,

$$F_T(j\omega) = F_0(j\omega)\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-n\omega_0\right) = \omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_0\left(jn\omega_0\right)\delta\left(\omega-n\omega_0\right)$$

其中 $F_0\left(jn\omega_0\right)$ 为周期信号的截断信号的傅里叶变换。

3.2 傅里叶变换的导出形式 2

根据傅里叶系数和傅里叶变换的公式可得,

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt,\quad F_0(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

由于在上述导出傅里叶变换的时候，将周期信号截断后进行傅里叶变换，即运用了右式。因此在周期以外的 $f(t)$ 均为 0，其积分区域等价为 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$。因此可以得到，

$$F_n=\frac{1}{T}F_0(jn\omega_0)=\left.\frac{1}{T}F_0(j\omega)\right|_{\omega=n\omega_0}$$

再根据上述导出的公式转换得，

$$F_T(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_0\left(jn\omega_0\right)\delta\left(\omega-n\omega_0\right)$$

其中 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$，F_n 为傅里叶系数，

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

综上所述，我们得到了两种周期信号傅里叶变换的导出形式。

3.3 部分常见周期信号的傅里叶变换

3.3.1 冲激序列 $\delta_T=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt)$

先求傅里叶级数，

$$F_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\delta_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\delta(t)dt=\frac{1}{T_0}$$

再代入周期函数傅里叶变换的公式得，

$$\delta_T(t)\leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}\delta(\omega-n\omega_0)=\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$$

4 补充

4.1 冲激函数的性质

$$\delta(t)=\left\{\begin{array}{ll}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{array}\right.,\quad 且\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)=1$$

4.1.1 筛选性质

设信号 $\mathrm{s(t)}$ 是一个在 $\mathrm{t=t_0}$ 处连续的函数, 则

$$\mathrm{s(t)\delta\left(t-t_0\right)=s\left(t_0\right)\delta\left(t-t_0\right)}$$

4.1.2 采样性质

设信号 $\mathrm{s(t)}$ 是一个在 $\mathrm{t=t_0}$ 处连续的函数, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{s(t)\delta\left(t-t_0\right)dt=s\left(t_0\right)}$$

4.1.3 偶函数性质

$$\delta(t)=\delta(-t)$$

4.1.4 尺度变换性质

$$\delta(at-b)=\frac{1}{|a|}\delta\left(t-\frac{b}{a}\right)$$

4.1.5 卷积性质

$$\mathrm{s}(t)*\delta(t-t_0)=\mathrm{s}(t-t_0)$$

4.2 微分特性

$$x(t)\delta^{\prime}\left(t-t_0\right)=x\left(t_0\right)\delta^{\prime}\left(t-t_0\right)-x^{\prime}\left(t_0\right)\delta\left(t-t_0\right)$$

4.3 卷积运算的性质

4.3.1 交换律

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

4.3.2 分配律

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

4.3.3 结合律

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$$

4.3.4 微分性质

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t)$$

4.3.5 积分性质

$$\int_{-\infty}^{t}\left[f_1(\lambda) * f_2(\lambda)\right]d\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)d\lambda * f_2(t)$$