Minimum Snap Closed Form Solver

轨迹描述

由于每一段轨迹都是一个多项式，因此可以将轨迹表示为，

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t)\doteq\sum_{i=0}^{N}p_{1,i}t^i & T_0\le t\le T_1 \\ f_2(t)\doteq\sum_{i=0}^{N}p_{2,i}t^i & T_1\le t\le T_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_M(t)\doteq\sum_{i=0}^{N}p_{M,i}t^i & T_{M-1}\le t\le T_M \end{cases} \tag{1}$$

其中由于是最小化snap，也就至少需要7次多项式，因此取$N=7$表示每段多项式包括常数项共有8个参数；p_i表示该段多项式中的第i个参数，其中p_0是常数项，p_1是一次项依此类推；M表示总共有M段轨迹，并且要求序列$\mathbf{T}=\{T_0,T_1,\cdots,T_M\}$必须都是已知的。

封闭形式轨迹求解

假设采用 7 次多项式，一共有 K 段轨迹。 $p_{i,k}$ 表示第 k 段多项式的第 i 个系数，定义多项式向量$\mathrm{P}_{\mathrm{total}}$ 为，

$$\mathrm{P}_{\mathrm{total}}=\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_M \end{pmatrix}^T=\begin{bmatrix} p_{0,1} \\ p_{1,1} \\ \cdots \\ p_{7,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{0,K} \\ p_{1,K} \\ \cdots \\ p_{7,K} \end{bmatrix} \tag{2}$$

定义所有waypoints的状态向量为$\mathrm{d}_{\mathrm{total}}$，其中包含了K+1个点的状态

$$
\mathrm{d}_{\text{total}} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ v_0 \\ a_0 \\ j_0 \\ p_1 \\ v_1 \\ a_1 \\ j_1 \\ \cdots \\ p_K \\ v_K \\ a_K \\ j_K \end{bmatrix} \tag{3}
$$

根据$p_j = p_{0,j} + p_{1,j}t_j + p_{2,j}t_j^2 + p_{3,j}t_j^3 + p_{4,j}t_j^4 + p_{5,j}t_j^5 + p_{6,j}t_j^6 + p_{7,j}t_j^7$，可得

$$
\begin{cases} p_{1,j} + 2p_{2,j}t_j + 3p_{3,j}t_j^2 + 4p_{4,j}t_j^3 + 5p_{5,j}t_j^4 + 6p_{6,j}t_j^5 + 7p_{7,j}t_j^6 = v_j \\ 2p_{2,j} + 6p_{3,j}t_j + 12p_{4,j}t_j^2 + 20p_{5,j}t_j^3 + 30p_{6,j}t_j^4 + 42p_{7,j}t_j^5 = a_j \\ 6p_{3,j} + 24p_{4,j}t_j + 60p_{5,j}t_j^2 + 120p_{6,j}t_j^3 + 210p_{7,j}t_j^4 = j_j \end{cases} \tag{4}
$$

其中t_j表示第j段轨迹的末端时间，p_j, v_j, a_j, j_j为第j个waypoint所规定的状态，如果取$t=0$，那么就可以得到上一段轨迹的末端时候的状态也就是第$j-1$个waypoint的所规定的状态向量$p_{j-1}, v_{j-1}, a_{j-1}, j_{j-1}$，因此有，

$$
\begin{aligned} \mathrm{p_{0,j}} &= p_{j-1} \\ \mathrm{p_{1,j}} &= v_{j-1} \\ 2p_{2,j} &= a_{j-1} \\ 6p_{3,j} &= j_{j-1} \end{aligned} \tag{5}
$$

根据上述的8条等式，再根据所给定的P_{total} 向量，可以构建一条等式$\mathbf{MP} = \mathbf{d}$。但是为了将每一段轨迹都可以构建出来8条等式来满足连续性的约束，这里的$\mathbf{d}$需要重新定义一下，

$$
\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{K-2} \\ \mathbf{d}_{K-1} \\ \mathbf{d}_{K-1} \\ \mathbf{d}_K \end{bmatrix}_{8K\times 1} \quad , \quad \text{其中}\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} p_i \\ v_i \\ a_i \\ j_i \end{bmatrix} \tag{6}
$$

所以就可以根据8K条等式构建出矩阵$\mathbf{M}$。

此时可以先定义一个$G(t)$，

$$G(t)=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3 & t^4 & t^5 & t^6 & t^7\\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 & 4t^3 & 5t^4 & 6t^5 & 7t^6\\ 0 & 0 & 2 & 6t & 12t^2 & 20t^3 & 30t^4 & 42t^5\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24t & 60t^2 & 120t^3 & 210t^4\end{bmatrix} \tag{7}$$

且，容易得，

$$G(t)\cdot\mathbf{p}=\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3 & t^4 & t^5 & t^6 & t^7\\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 & 4t^3 & 5t^4 & 6t^5 & 7t^6\\ 0 & 0 & 2 & 6t & 12t^2 & 20t^3 & 30t^4 & 42t^5\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24t & 60t^2 & 120t^3 & 210t^4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\p_3\\p_4\\p_5\\p_6\\p_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(t)\\f^{(1)}(t)\\f^{(2)}(t)\\f^{(3)}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\v\\a\\j\end{bmatrix}=\mathbf{d} \tag{8}$$

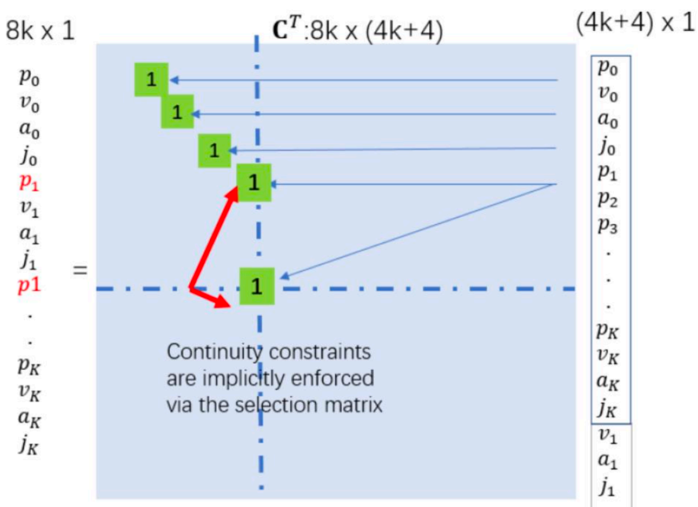
再定义一个$L(t)$，

$$L(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{9}$$

那么矩阵$\mathbf{M}$就可以这样定义，

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}L_1(t)_{4\times8} & \mathbf{0}_{4\times8} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{4\times8}\\ G_1(t)_{4\times8} & \mathbf{0}_{4\times8} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{4\times8}\\ \mathbf{0}_{4\times8} & L_2(t)_{4\times8} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{4\times8}\\ \mathbf{0}_{4\times8} & G_2(t)_{4\times8} & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\end{bmatrix}_{8M\times8M} \tag{10}$$

然后根据这个图的提示构建C^T矩阵，



注意左边的$8k\times1$维的向量等价于上述所说的$\mathbf{d}$向量，右边的$(4k+1)\times1$的向量是这样排布的，

定义 $\mathbf{d}_{\mathrm{F}}=\begin{bmatrix}p_0\\v_0\\a_0\\j_0\\p_1\\p_2\\\cdots\\p_{K-1}\\p_K\\v_K\\a_K\\j_K\end{bmatrix}$， $\mathbf{d}_{\mathrm{P}}=\begin{bmatrix}v_1\\a_1\\j_1\\\cdots\\v_{K-1}\\a_{K-1}\\j_{K-1}\end{bmatrix}$，那么右边的向量就是$\begin{bmatrix}\mathbf{d}_F\\\mathbf{d}_P\end{bmatrix}$,

综上所述，可以得到一条等式$\mathbf{d}=C^T\begin{bmatrix}\mathbf{d}_F\\\mathbf{d}_P\end{bmatrix}$。

再根据之前所说的$\mathbf{MP}=\mathbf{d}$,

就可以得到$\mathbf{P}=\mathbf{M}^{-1}C^T\begin{bmatrix}\mathbf{d}_F\\\mathbf{d}_P\end{bmatrix}$，那么就可以求到封闭形式的下的minimum snap的解。