

Фильтр Калмана и расширенный фильтр Калмана

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра технологий программирования

Исполнитель:
студент 3 курса
факультета ПМ-ПУ
группы 21.Б02-пу
Смирнов Алексей Артёмович

сентябрь 2023

Основные формулы

1. Математическое ожидание (среднее значение) случайной величины $X \in \mathbb{R}^n$, при непрерывном распределении определяется как

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} X f(X) dX,$$

где $f(X)$ - плотность вероятности.

2. Ковариация двух случайных величин $X, Y \in \mathbb{R}^n$ на некотором вероятностном пространстве есть

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^T (Y - \mathbb{E}[Y])].$$

Ковариация дает численную характеристику того, насколько одна величина зависит от другой. В случае если величины являются независимыми, то их ковариация равна 0.

3. Матрица ковариации вектора $X \in \mathbb{R}^n$ есть

$$\Sigma = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T] = \{\sigma_{ij}\}$$

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] \quad i, j = \overline{1, n}.$$

В случае если координаты вектора X попарно независимы, матрица ковариации есть диагональная матрица, на диагонали которой находятся дисперсии соответствующих координат. Дисперсия есть численная характеристика разброса случайной величины относительно ее среднего значения.

3. Нормальное (гауссовское) распределение вектора $X \in \mathbb{R}^n$ имеет плотность вероятности

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu) \right),$$

где Σ - матрица ковариации вектора X , μ - вектор средних значений. Если X имеет нормальное распределение, то каждая координата X_i также имеет нормальное распределение по соответствующей оси. В одномерном случае

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

Фильтр Калмана

1. Пример одномерного случая.

Допустим, у вас есть некоторая дискретная линейная математическая модель одномерного движения объекта вида:

$$x_{k+1} = x_k + u_k, \quad (1)$$

где x_k - координата на прошлом шаге, u_k - управление, контролирующее эволюцию системы на k -том шаге.

Так как это лишь модель, то в действительности существуют неучтенные случайные факторы влияющие на нашу систему

$$x_{k+1} = x_k + u_k + \epsilon_k. \quad (2)$$

С помощью некоторого датчика на каждом шаге измеряем координату объекта с некоторой погрешностью

$$z_{k+1} = x_k + \eta_k. \quad (3)$$

Про величины ϵ_k, η_k известно следующее: данные величины имеют нормальное распределение для каждого шага k , среднее значение $E(\epsilon_k) = 0, E(\eta_k) = 0$ для каждого k , известны дисперсии данных величин $\sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2$.

Данный метод состоит из двух фаз: **Предсказания** и **Корректировки**.

Предположим, что на $k-1$ шаге мы рассчитали некоторое расположение x_{k-1} с дисперсией σ_{k-1}^2 , после чего на основе нашей модели (2) сделали предсказание координаты \hat{x}_k с дисперсией $\hat{\sigma}_k^2 = \sigma_{k-1}^2 + \sigma_\epsilon^2$. Также от датчика получем значение z_{k+1} с дисперсией $\sigma_z^2 = \sigma_\eta^2$. После чего на основе полученных данных делаем корректировку результата в виде:

$$\begin{cases} \hat{x}_k = x_{k-1} + u_{k-1}, \\ x_k = \hat{x}_k + K_k(z_{k+1} - \hat{x}_k). \end{cases} \quad (4)$$

%endfigure

Коэффициент K называют **ядром Калмана**, именно за счет его значения можно уточнить значение и уменьшить погрешность. В данном случае

$$\begin{cases} K_k = \hat{\sigma}_k^2(\hat{\sigma}_k^2 + \sigma_z^2)^{-1}, \\ \sigma_k^2 = (1 - K_k)\hat{\sigma}_k^2. \end{cases} \quad (5)$$

С обывательской точки зрения, коэффициент K показывает насколько мы ”доверяем” значениям модели и датчика. Если $K \approx 1$ это означает, что мы намного больше доверяем показателям датчика, чем расчетным показаниям модели, и берем значение ближе к значению датчика. Если же $K \approx 0$, то наоборот, мы намного больше доверяем модели и, соответственно, берем значение ближе к значению предсказанному моделью.

Также стоит отметить, что в пределе $\lim_{k \rightarrow \infty} K_k = K_{stab}$, при условии, что дисперсии шумов не меняются во времени, в связи с чем, можно упростить итерационный алгоритм тем, что после некоторого шага считать $K_k = K_{k-1}$.

2.Общий случай в многомерном пространстве.

Пусть имеется линейная модель и система измерений вида:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + \epsilon_k, \\ z_{k+1} = C_k x_k + \eta_k, \end{cases} \quad (6)$$

где A_k — матрица системы $(n \times n)$, описывающая эволюцию системы без управления и шумов на k -том шаге, B_k — матрица управления $(n \times l)$, описывающее действие управления на k -том шаге, C_k — матрица отображения состояния $(m \times n)$ на k -том шаге, ϵ_k, η_k — случайные переменные описывающие шум на k -том шаге, считаются независимыми величинами, распределенными по нормальному закону с нулевым медианным значением и известной матрицей ковариации $R_k(n \times n)$ и $Q_k(m \times m)$ соответственно.

Теорема 1 Если начальное представление системы (6) имеет вид нормального распределения, то оно, в силу линейности, будет нормальным на всех последующих шагах.

Теорема 2 Для минимизации среднеквадратичного отклонения $\sqrt{|\Sigma_k|}$ величины x_k в системе (6) достаточно считать x_k по следующим формулам:

$$\begin{cases} \hat{x}_k = A_k x_{k-1} + B_k u_{k-1}, \\ \hat{\Sigma}_k = A_k \Sigma_{k-1} A_k^T + R_k. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} K_k = \hat{\Sigma}_k C_k^T (C_k \hat{\Sigma}_k C_k^T + Q_k)^{-1}, \\ x_k = \hat{x}_k + K_k (z_{k+1} - C_k \hat{x}_k), \\ \Sigma_k = (I - K_k C_k) \hat{\Sigma}_k. \end{cases} \quad (8)$$

Условия применения фильтра Калмана:

- Модель и система измерений должны быть линейны.
- Случайные величины являются независимыми, распределенные по нормальному закону с нулевым медианным значением.

Сложность алгоритма фильтра Калмана:

- Шаг предсказания $O(n^2)$.
- Шаг коррекции $O(n^2 + m^{2.4})$.

Где n - размерность модели, m - размерность системы измерений.

Расширенный фильтр Калмана

В реальном мире большинство процессов описывается нелинейными функциями, для которых классический фильтр Калмана неприменим. Рассмотрим одно из решений данной проблемы - **локальная линеаризация**.

Пусть имеется нелинейная модель и нелинейная система измерений

$$\begin{cases} x_{k+1} = g(x_k, u_k) + \epsilon_k, \\ z_{k+1} = h(x_k) + \eta_k, \end{cases} \quad (9)$$

где $g(\cdot), h(\cdot)$ - нелинейные функции. Линеаризуем эти функции до первого члена ряда Тейлора

$$\begin{cases} g(x_k, u_k) \approx g(\hat{x}_k, u_k) + G_k|_{\hat{x}_k} (x_k - \hat{x}_k) \\ h(x_k) \approx h(\hat{x}_k) + H_k|_{\hat{x}_k} (x_k - \hat{x}_k), \end{cases} \quad (10)$$

где G_k, H_k - матрицы Якоби для $g(\cdot), h(\cdot)$ соответственно.

После данной процедуры линеаризованная модель движения будет иметь плотность вероятности вида:

$$f_k(x_{k+1}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |R_k|^{1/2}}. \quad (11)$$

$$\exp \left(-\frac{1}{2} (x_{k+1} - g(\hat{x}_k, u_k) - G_k|_{\hat{x}_k} (x_k - \hat{x}_k))^T R_k^{-1} (x_{k+1} - g(\hat{x}_k, u_k) - G_k|_{\hat{x}_k} (x_k - \hat{x}_k)) \right),$$

и формулы фильтра Калмана будут иметь вид:

$$\begin{cases} \hat{x}_k = g(x_{k-1}, u_{k-1}), \\ \hat{\Sigma}_k = G_k|_{\hat{x}_k} \Sigma_{k-1} G_k^T|_{\hat{x}_k} + R_k. \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} K_k = \hat{\Sigma}_k H_k^T|_{\hat{x}_k} (H_k|_{\hat{x}_k} \hat{\Sigma}_k H_k^T|_{\hat{x}_k} + Q_k)^{-1}, \\ x_k = \hat{x}_k + K_k (z_{k+1} - h(\hat{x}_k)), \\ \Sigma_k = (I - K_k H_k|_{\hat{x}_k}) \hat{\Sigma}_k. \end{cases} \quad (13)$$

Расширенный фильтр Калмана хорошо работает для небольших нелинейностей, при сильной нелинейности наибольший вклад в ошибку аппроксимации будет вносить не шум модели или системы измерений, а ошибка связанная с линеаризацией функций, что даже может привести к расхождению фильтра.

Другие разновидности фильтров Калмана:

Фильтр Калмана "без запаха" - другой метод построения линейного приближения по точкам с весами.

Непрерывный фильтр Калмана - для работы с непрерывной моделью и системой измерений.

Смешанный фильтр Калмана - для одновременной работы с непрерывной и дискретной моделью и системой предсказаний.

Область применения фильтров Калмана:

- Оценка параметров динамических систем по зашумленным измерениям.
- Сглаживание сигналов измерений.
- Прогнозирование будущих изменений сигнала.
- Системы навигации и управления.
- Экономическое моделирование.

Полезные ссылки:

- <https://www.unitedthc.com/DSP/Kalman1960.pdf> - оригинальная статья Калмана 1960г.
- Буре В. М., Парилина Е. М. - Теория вероятностей и математическая статистика.
- https://www.youtube.com/watch?v=QOW_qxgcdds - объясняющее видео.
- <https://habr.com/ru/articles/166693/> - статья на хабре с одномерным примером.
- https://github.com/Dx-by-Dy/Python-programs/blob/main/Numerical_methods/Kalman_filters.py - реализация на Python.