2) $h$ - сюръективное:
$y \in \{1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}$.

→ Случай 1: $y \le n$; $f$-сюръект => найдется $x_1 \in A$:
$f(x_1) = y$, $h(x_1) = f(x_1) = y$.

→ Случай 2: $y \ge n+1$, $y - n \in \{1, 2, \dots, m\}$
- $g$ - сюръект отображ. => найдется $x_2 \in B$:
$g(x_2) = y - n$; $h(x_2) = g(x_2) + n = y - n + n = y$
- $h$ - биективное отображ. => $A \cup B$ - конеч множ.
и $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$

$\boxtimes$

→ Теорема: (правило суммы для произвольного числа множ.):
Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ - конечные множества, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, тогда $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ - конечное множ. и $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$.

◇ по индукции: по числу множеств $k$
База индукции: если $k = 1$ => тривиально
, если $k = 2$, то теорема о правиле суммы 2-ух множеств
Пусть $k \ge 3$:
Индуктивное предположение:
Если $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ - конечные множ.: - $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $\forall i, j$ : - $i \neq j$, то $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k-1}$ - конечное множ. и $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k-1}| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_{k-1}|$.
Совершим индукционный переход.
Рассмотрим объединение $k$ конечных попарно непересекающихся множ. $A_1, A_2, \dots, A_k$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k-1} \cup A_k = \underbrace{(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k-1})}_{A} \cup A_k = A \cup A_k$$

По индукционному предположению множ. $A$ - конечно.
Т.к. $A_i \cap A_k = \emptyset$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, то $A \cap A_k = \emptyset$
По индукцион. предполож. множ. $A \cup A_k$ - конечное, $|A \cup A_k| = |A| + |A_k|$.

$$|A| + |A_k| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k-1}| + |A_k| = (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_{k-1}|) + |A_k|$$

$\boxtimes$

# БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

**Счетное множ.** – множ., равномощное множ. натуральных чисел.

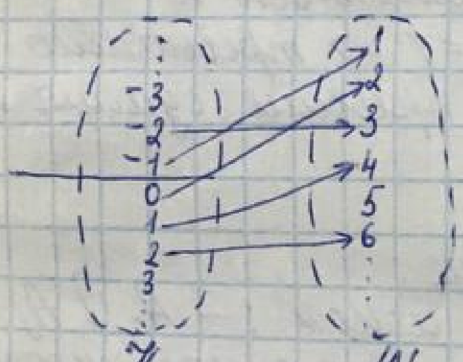
Другими словами: все элементы счетного множ. $A$ можно занумеровать натуральными числами и определить таким образом бесконечную посл. вида: $((a_n)_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, \dots)$; $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$

**Пр**

1) $\mathbb{N}$ – счетное множ.
$id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ; $id_{\mathbb{N}}(n) = n$ , $n \in \mathbb{N}$

2) $\mathbb{N} \cup \{0\}$ – счетное множ.
$f: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$
$f(n) = n+1$ – биективное отображение

3) $\mathbb{Z}$ – счетное множ.




$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$f(m) = \begin{cases} -2m-1, & \text{если } m<0 \\ 2m+2, & \text{если } m \geq 0 \end{cases}$$

биективное отображение

4) $\mathbb{Q}$ – счетное множ.
$\alpha \in \mathbb{Q}$ , $\alpha = p/q$ – несократимая дробь, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

**Опр:** **Несчетные множества** – бесконечные множ., не являющиеся счетными.

**Теорема:**
множ. $R$ действительных чисел несчетно.

**Теорема:**
$(0,1) = \{x \in R : 0 < x < 1\}$ – несчетное множ.

◇ $f: R \to (0,1)$ – биективное отображ.

От противного: допустим, $(0,1)$ - счетное множ.
$g: (0,1) \to \mathbb{N}$ - биективное отображ.
$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ - биективное отображ., т.к. $g$ и $f$ - биект.
$|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}| \Rightarrow \mathbb{R}$ - счетное множ. (?!) $\Rightarrow (0,1)$ - несчетное

$\boxtimes$

Теорема:
I = Множ. всех бесконечных посл-ей 0 и 1 - несчетное множ.

Диагональный метод Кантора:
От противного: пусть $\exists$ взаимно-однознач-ное соответствие между множ. $N$ и $I$. тогда числа из $I$ можно выписать по порядку:

$N1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots a_{1n} \dots)$
$N2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots)$
$N3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n}, \dots)$
$\dots$
$Nn = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots, a_{nn}, \dots)$

$$\alpha = (\underset{\neq a_{11}}{1-a_{11}}, \underset{\neq a_{22}}{1-a_{22}}, \underset{\neq a_{33}}{1-a_{33}}, \dots, \underset{\neq a_{nn}}{1-a_{nn}}, \dots)$$

последовательность $\alpha$ не имеет своего №. (?!)

$\boxtimes$

Пр: множ. иррациональных чисел несчетно

Следствия: (общие)

- Если $A$ и $B$ - счетные множ., то их объединение $A \cup B$ - тоже счетное.
- Любое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно.
- Если $S$ - счетное, то $S \times S$ - тоже счетное.

# Декартово произведение множеств. Правило произведения для множеств.

Пусть $A$ и $B$ – непустые множ., $a \in A$, $b \in B$, $a \neq b$. При множ. из 2-ух элем. $\{a, b\}$ важно учитывать порядок взаимного располож. элем. друг относ. друга.

$\{a, b\}$ – неупорядоч. пара элем. $\{a, b\} = \{b, a\}$
$(a, b)$ – упорядоч. пара элем. $(a b) \neq (b, a)$

→ **Следствие:**
$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$

→ **Опр:** Декартово произведение множ. $A$ и $B$ – множ. $A \times B$ всех упорядоченных пар: –
а) если $\exists\ \emptyset$ между $A$ и $B \Rightarrow A \times B = \emptyset$ $(A = \emptyset, B = \emptyset)$
б) если $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$, то $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
(1-ый элемент каждой пары $\in A$, второй $\in B$ : $A \times B = ?$)

→ Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – непустые множ.,
$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – упорядоченный набор из $n$ элем; вектор или кортеж.
$a_i$ – $i$-ый компонента, координата

→ $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, если $n = m$, и соответству. элементы равны.

→ **Опр:** Декартово произведение множ. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – множ. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$: –
1) Если $\exists\ A_i = \emptyset$, $i = \overline{1, n}$, то $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \emptyset$
2) Если все $A_i \neq \emptyset$, $i = \overline{1, n}$, то $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$
$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$

→ **Теорема:** (правило произведения для 2-ух множ.)
Пусть $A$ и $B$ – конечные множ. $\Rightarrow A \times B$ – конечное множ. и $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

◇ → Пусть $A = \emptyset$, тогда $|A| = 0$

$A\times B=\emptyset$ – конечное множ. ; $|A\times B| = 0 = 0\cdot|B| = |A|\cdot|B|$.

→ Пусть $B=\emptyset$, тогда $|B|=0$.
$A\times B = \emptyset$ – конечное множ., $|A\times B|=0=0\cdot|A|=|B|\cdot|A|$.

→ Пусть $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$, то $\exists f: A\to\{1,2,\dots,n\}$ – биект. отоб.
$|A|=n$, $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$

$\{a_1\}\times B=\{(a_1,b): b\in B\}$ – конечное множ. и $|\{a_1\}\times B|=|B|$
$\{a_2\}\times B = \{(a_2,b): b\in B\}$ – конечное множ. и $|\{a_2\}\times B|=|B|$

$\forall$ 2 из этих множ. не пересекаются:
$$(\{a_i\}\times B)\cap(\{a_j\}\times B)=\emptyset,\quad i\neq j$$
$$A\times B = (\{a_1\}\times B)\cup(\{a_2\}\times B)\cup\dots\cup(\{a_n\}\times B)$$

по правилу суммы множ.:
$A\times B$ – конечное множ. и $|A\times B| = |(\{a_1\}\times B)\cup\dots\cup(\{a_n\}\times B)| =$
$= |\underbrace{(\{a_1\}\times B)}_{|B|}|+\dots+|\underbrace{\{a_1\}\times B}_{|B|}| = n\cdot|B| = |A|\cdot|B|$. $\boxtimes$

→ Теорема: (правило произведения для произвол. числа множ.):
Пусть $A_1, A_2, \dots A_n$ – конечные множ. =>
$A_1\times A_2\times\dots\times A_n$ – конечное множ., и $|A_1\times A_2\times\dots\times A_n| = |A_1|\cdot|A_2|\times\dots\times|A_n|$

# ОТНОШЕНИЯ

Пусть $A$ - множ.

**Унарное отношение во множ. $A$** - любое подм... $R$ множ. $A$, $a \in A$

$a \in R$ = "элемент $a$ находится в отношении ..."

Пр: $A = \mathbb{N}$

1) $R_1$: "быть четным числом"
   $R_1 = \{ n \in N, n$ - четное число $\}$
2) $R_2$: "не превосходить числа 5"
   $R_2 = \{ n \in N \mid n \leq 5 \}$
3) $R_3$: "быть меньше чем 1"
   $R_3 = \varnothing$

→ Пусть $R_1$ - унарное отношение в $A$,
$R_2$ - унарное отношение в $B$.
Тогда отношения $R_1$ и $R_2$ - **равные**, если:
$R_1 = R_2$, $A = B$ состоят из одних и тех же элементов

→ Пусть $R_1$ и $R_2$ - унарные отношения в $A$
$\overline{R_1} = A \setminus R_1$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_1 \Delta R_2$ - унарные отношения в множ. $A$.

→ Пусть $A$ и $B$ - множ.
**Бинарное отношение в паре множ. $(A, B)$** - важен порядок следования
любое подмножество $R$ декартового произвед. $A \times B$.

→ Если $A = B$, то $R$ - бинарное отношение в $A$.
$a \in A$, $b \in B$:
$(a, b) \in R$ => "элемент $a$ находится в отношении $R$ с элементом $b$". $(a R b)$
бинарное = отношений между двумя множ

→ Пусть $R$ - бинарное отношение в паре множ $(A, B)$
$R \subseteq A \times B$

**Область определения** - множ. $D_R = \{ a \in A \mid$ найдется $b \in B \mid a R b \}$ $(a, b) \in R$

**Область значения** - множ. $E_R = \{ b \in B \mid$ найдется $a \in A \mid (a, b) \in R \}$

**Пр:** Пусть $A = \{2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$.

1) $R_1$: "отношение делимости";

$n \in A$, $m \in B$; $n R_1 m \iff n / m$

$R_1 = \{ (n, m) \in A \times B \mid n / m \}$

$R_1 = \{ (2, 4), (2, 6), (3, 6) \}$.

$D_{R_1} = \{2, 3\}$, $E_{R_1} = \{4, 6\}$.

2) $R_2$: "отношение: меньше либо равно"

$n \in A$, $m \in B$; $n R_2 m \iff n \leq m$.

$R_2 = \{ (n, m) \in A \times B \mid m \leq m \}$

$R_2 = \{ (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6) \} = A \times B$.

$D_{R_2} = \{2, 3\} = A$, $E_{R_2} = \{4, 5, 6\} = B$.

3) $R_3$: "отношение взаимной простоты";

$n \in A$, $m \in B$; $n R_3 m \iff \text{НОД}(n, m) = 1$

$R_3 = \{ (n, m) \in A \times B \mid \text{НОД}(n, m) = 1 \}$.

$R_3 = \{ (3, 4), (2, 5), (3, 5) \}$.

$D_{R_3} = \{2, 3\}$, $E_{R_3} = \{4, 5\}$.

→ Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – множ. Тогда **n-арное (n-местное) отношение** в системе множ. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – любое подмножество декартов. произведения $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$.

→ Пусть $R_1 \subseteq A \times B$ – бинарное отнош. в $(A, B)$

$R_2 \subseteq C \times D$ – бинарное отнош. в $(C, D)$

$R_1$ и $R_2$ – **равные**, если $A = C$, $B = D$ и $R_1 = R_2$ (как множ.)

→ Пусть $R_1, R_2 \subseteq A \times B$ – бинарное отнош. в $(A, B)$

$\overline{R_1} = (A \times B) \setminus R_1$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, … – бинарное отнош. в $(A, B)$.

**Пр:** $A$ – множ. всех людей, живущих в Минске.

$R_1 = \{ (a, b) \in A \times A \mid a \text{ – отец } b \text{ в Минске} \}$

$R_2 = \{ (a, b) \in A \times A \mid a \text{ – мама } b \text{ в Минске} \}$ $\quad R_1 \cup R_2 = R_3$

$R_3 = \{ (a, b) \in A \times A \mid a \text{ родитель } b \text{ в Минске} \}$

→ Пусть $R$ – бинарное отношение в $(A,B)$, $R\subseteq A\times B$. Обратное отношение в $R$ – бинарное отнош. в паре множ. $(B,A)$
$R^{-1}$ в паре множ. $(B,A)$
$R^{-1} = \{(b,a)\in B\times A \mid (a,b)\in R\}$.

→ Пусть $R\subseteq A\times B$, $S\subseteq B\times C$.
Произведение бинар. отнош. $R$ и $S$ – бинар. отн. $R\cdot S$ в паре $(A,C)$.
$R\cdot S = \{(a,c)\in A\times C \mid$ найдется $b\in R$: $-(a,b)\in R$ и $(b,c)\in S\}$

→ Пусть $R\subseteq A\times A$ – бинарное отнош. в $A$. Тогда отношение $R$:
а) Рефлексивное, если $\forall a\in A$, $(a,a)\in R$
б) Симметричное, если $\forall a,b\in A$: $(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$
в) Транзитивное, если $\forall a,b,c\in A$: $(a,b)\in R$ и $(b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$

→ $R\subseteq A\times A$ – бинарное отнош. в $A$ – отношение эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

→ Отношение эквивалентности $R\subseteq A\times A$
$R$ – симметрично, $(a,b)\in R \Leftrightarrow (b,a)\in R$

→ Если $R$ – отношение эквивалентности и $(a,b)\in R$, то пишут $a\sim b$ или $a\equiv b$ и говорят, что $a$ и $b$ эквивалентны по отношению $R$

→ Пусть $R\subseteq A\times A$ – отношение эквивалентности в $A$, $a\in A$. Тогда класс эквивалентности с представ. $a$ – множ. $\overline{a} = \{b\in A \mid b\sim a\}$.

→ Лемма:
$\overline{a}\neq\emptyset \quad \forall a\in A$.

◇ $R\subseteq A\times A$ – отнош. эквивалентности $\Rightarrow$
$R$ – рефлексивно $\Rightarrow (a,a)\in R \Rightarrow a\sim a \Rightarrow$
$a\in\overline{a} \Rightarrow \overline{a}\neq\emptyset$

⊠

**Лемма:**
$\forall$ 2 класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

◇ $a, b \in A$, $\overline{a}$, $\overline{b}$.
- Если $\overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing$, то лемма доказана.
- Пусть $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \varnothing$, тогда найдется $c \in \overline{a} \cap \overline{b} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} c \in \overline{a} \Rightarrow a \sim c \\ c \in \overline{b} \Rightarrow b \sim c \end{array}\right\} a \sim b.$$

Докажем, $\overline{a} = \overline{b}$. Покажем, что $\overline{a} \subseteq \overline{b}$ (*), $\overline{b} \subseteq \overline{a}$ (**)

$$\left.\begin{array}{ll} (*) & x \in \overline{a} \Rightarrow x \sim a,\ a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in \overline{b} \\ (**) & x \in \overline{b} \Rightarrow x \sim b,\ a \sim b \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \in \overline{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{a} = \overline{b}$$

$\boxtimes$

$R$ – отношение эквивалентности в $A$, $a \in A$:
$b \in \overline{a}$, $b \in \overline{b} \Rightarrow \overline{a} = \overline{b}$

$A$ – непустое множ. Система подмнож. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ множ. $A$ – разбиение множ., если

Все элементы, входящие в 1 класс эквивалентности, взаимозаменяемы, равноправны и могут выступать в роли представителя

Опр: Пусть $A \neq \varnothing$. Система подмнож. $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ множ. $A$ – разбиение множ. $A$, если
1) $A_i \neq \varnothing$, где $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$
2) $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$
3) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = A$

**Теорема:** (
Пусть $A$ – непустое множ. и $R$ – отношение эквивалентности в $A$. Тогда множ. всех классов эквивалентности является разбиением множ. $A$

◇ Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}, \ldots$ – совокупность всех различных классов эквивалентности.

По лемме 1: $\overline{a_i} \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

по лемме 2: $\overline{a_i} \cap \overline{a_j} = \emptyset \quad , i \neq j$.

Каждый элемент множ. A содержится хотя бы в одном классе эквивалентности (в противном случае, мы рассматриваем не все классы эквивалентности):

$\overline{a_1} \cup \overline{a_2} \cup \ldots \cup \overline{a_n} \cup \ldots = A$ $\boxtimes$

Пр: 1 Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Рассмотрим бинарное отношение в множ. A:

$R = \{(a, b) \in A \times A : a+b$ — четное число$\}$

Докажем, что это бинарное отношение — отношение эквивалентности.

1) R — рефлексивное отношение.

произвол. $a \in A$ : $a+a = 2a$ — четное $\Rightarrow (a, a) \in R$

2) симметричное отношение — R:

$a, b \in A$ — произвольные, $(a, b) \in R \Rightarrow a+b$ — четное $\Rightarrow$ $b+a$ = четное число $\Rightarrow (b, a) \in R$.

3) R — транзитивное отношение:

произвольн. элементы $a, b, c \in A$ : $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow$ $a+b$ — четное число и $b+c$ — четное число $\Rightarrow$ $a+2b+c$ — четное $\Rightarrow a+c$ — четное $\Rightarrow (a, c) \in R$.

$\left.\begin{array}{l}\overline{1} = \{1, 3\} \\ \overline{2} = \{2, 4\}\end{array}\right\}$ — классы эквивалент. отн. R.

2 Пусть U — универсальное множ. Определим бинарное отношение R:

$R = \{(A, B) \in 2^U \times 2^U : |A| = |B|\}$

Докажем, что это бинарное отнош. — отношение эквивалентности.

1) R — рефлексивное отнош.

Пусть $A \subseteq U$ — произвольное подмнож. множ. U

$id_A : A \to A \Rightarrow |A| = |A| \Rightarrow (A, A) \in R$

(сущ. биект. отоб. из A в A)

2) R — симметричное отношение.

Пусть $A, B \subseteq U$ — произвольные подмнож. множ U

$(A, B) \in R \Rightarrow |A| = |B| \Rightarrow \exists f: A \to B$ — биективное отображ. $\Rightarrow f^{-1}: B \to A$ — биект. отображ. $\Rightarrow |B| = |A| \Rightarrow (B, A) \in R$

3) $R$-транзитивное отнош.

Пусть $A, B, C \subseteq U$ - произвольные подмнож. множ. $U$.
$(A,B) \in R$ и $(B,C) \in R \Rightarrow |A| = |B|$ и $|B| = |C| \Rightarrow \exists\, f: A \to B$ и $g: B \to C$ - биект. отображ. $\Rightarrow g \circ f: A \to C$ - биект. отображ. $\Rightarrow |A| = |C| \Rightarrow (A,C) \in R$

⇉ **Теорема:**

Пусть $A \neq \varnothing$ множ., система подмнож. $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n, \ldots$ множ. $A$ - разбиение множ. $A$. $\Rightarrow \exists$ единственное отношение эквивалентности $R$ в множ. $A$, для которого множ. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ - классы эквивалентности.

◇ Пусть система множ. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ - разбиение множ. $A$. Построим бинарное отношение $R \subseteq A \times A$ в множ. $A$: $a, b \in A$ - произвольные эл. множ. $A$.

$(a,b) \in R \Leftrightarrow a \in A_i$ и $b \in A_i$, $i = \overline{1,n}$ (эл. $a$ и $b \in$ одному и тому же множ. $A_i$ разбиения)

Докажем, что отнош. $R$ - отнош. эквивалентности:

1) $R$-рефлексивное отнош: рассмотрим произвольный элемент $a \in A$.
$a \in A_i$ и $a \in A_i$, $i = \overline{1,n}$ (элем. $a$ и тот же эл. $a$ находятся в одном и том же множ. $A_i$ разбиения) $\Rightarrow (a,a) \in R$

2) $R$-симметричное отнош.
Рассмотрим произвольные эл. $a, b \in A$.
$a, b \in R \Rightarrow a \in A_i$ и $b \in A_i$ $(i = \overline{1,n}) \Rightarrow b \in A_i$ и $a \in A_i$ $(i = \overline{1,n}) \Rightarrow (b,a) \in R$

3) $R$-транзитивное отнош.
Рассмотрим произвольные эл. $a, b, c \in A$
$(a,b) \in R$ и $(b,c) \in R \Rightarrow a \in A_i$, $b \in A_i$ и $c \in A_i$ $(i = \overline{1,n}) \Rightarrow (a,c) \in R$

Единственность отношения эквивалентности вытекает из определения равенства двух бинарных отношений.

⊠

# КОМБИНАТОРИКА

## БАЗОВЫЕ ПРИНЦИПЫ КОМБИНАТОРИКИ

→ Правило суммы:

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Число способов выбрать 1 элемент из A или B равно $|A| + |B| = n + m$.

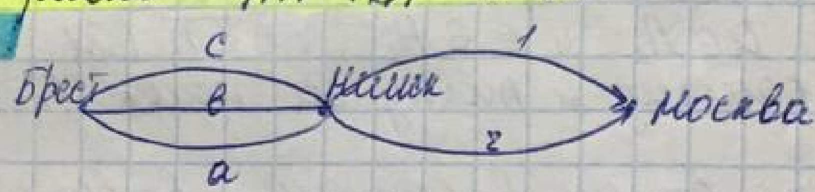
Пр: есть 5 яблок и 9 груш.

число способов выбрать 1 фрукт: $5 + 9 = 14$

→ Правило произведения

Число способов выбрать 1 эл. из A и вслед за ним из B равно $|A| \cdot |B| = n \cdot m$.

Пр:




число способов (москва-брест) $= 2 \cdot 3 = 6$.

→ Основной принцип комбинаторики:

Пусть необходимо выполнить друг за другом k действий. Если 1-ое действие можно выполнить $n_1$ способами; 2-ое действие – $n_2$ способами, 3-ье – $n_3$, …, k-ое действие – $n_k$ способами, то k действий можно выполнить $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

→ Лемма

Число упорядоченных наборов из n нулей и единиц равно $2^n$

◇ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i \in \{0,1\}$

$\{0,1\}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0,1\}\}$

$|\{0,1\}^n| = 2^n$ (хотим показать)

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

$\underset{1}{\boxed{2}}\ \ \underset{2}{\boxed{2}}\ \ \underset{3}{\boxed{2}}\ \ \dots\ \ \underset{n-1}{\boxed{2}}\ \ \underset{n}{\boxed{2}}$

По основ. принципу комбинаторики $|\{0,1\}^n| = 2\cdot 2\cdot 2 \dots 2 = 2^n$ ⊠

**Правило биективного соответствия**

Если $\exists$ биективное отображ. $f: A \to B$ (из $A$ в $B$), то $|A| = |B| \Rightarrow n = m$.

**Лемма:**

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, тогда $|2^A| = 2^n$ (число всех подмнож.)

◇ Построим биективное отображ: $f: 2^A \to \{0,1\}^n$

$2^A: B \to f(B) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i \notin B \\ 1, & \text{если } a_i \in B \end{cases}$$

По правилу биектив. соответствия $|2^A| = |\{0,1\}^n| = 2^n$ ⊠

## Основные комбинаторные величины. Сочетания и размещение.

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$

→ **Размещение** с повторениями из $n$ элементов по $k$ элементам — упорядоченный набор, состоящий из $k$ необязательно различных элементов из $A$.

→ **Размещение** без повторений из $n$ эл. по $k$ элем. — упорядоченный набор, состоящий из $k$ обязательно различных элем. множ. $A$.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

размещения $x = y \Leftrightarrow x_i = y_i$, $i = \overline{1,k}$

→ **Сочетания** с повторениями из $n$ элементов по $k$ — неупорядоченный набор, состоящий из $k$ необязательно различных элементов множ. $A$.

→ **Сочетания без повторений** из $n$ по $k$ – неупорядоченный набор, состоящий из $k$ обязательно различных элем. множ. $A$.

сочетания $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$x = y \Leftrightarrow$ найдется биектив. отображ. $\pi: \{1, 2, \ldots, k\}$

$$x_i = y_{\pi(i)}, \quad i = \overline{1,k}$$

$A_n^k$ – число всех возможных **размещений без повторений** из $n$ по $k$.

$\overline{A}_n^k$ – число всех возможных **размещений с повторениями** из $n$ по $k$

$C_n^k$ – число всех возможных **сочетаний без повторений** из $n$ по $k$.

$\overline{C}_n^k$ – число всех возможных **сочетаний с повторениями** из $n$ по $k$

**Теорема:**

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

◇ $\underset{1}{\underline{n}}$ $\underset{2}{\underline{n}}$ $\underset{3}{\underline{n}}$ … $\underset{k-1}{\underline{n}}$ $\underset{k}{\underline{n}}$

По основн. принц. комбинаторики:

$$\overline{A}_n^k = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$$

⊠

**Теорема:**

$$A_n^k = n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$$

◇ $\underset{1}{\underline{n}}$ $\underset{2}{\underline{n-1}}$ $\underset{3}{\underline{n-2}}$ … $\underset{k}{\underline{n-(k-1)}}$

По основ. принц. комбинаторики:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$$

1) $k=0$ : $A_n^0 = 1$ ; 2) $k = n$ ; $P_n = A_n^n = n!$ ⊠

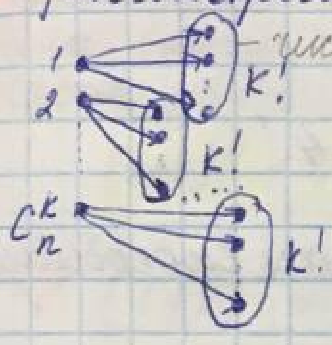
→ **Перестановка** эл. множ. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – упорядоченный набор, состоящий из всех эл. $A$, взятых по 1-ому разу

$A_n^n = P_n$ – число всех перестановок n элементов.

$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n(n-1)) = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$

**Теорема:** $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$   размещений > сочетаний

◇ рассмотрим конеч. множ. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.




число размещений без повторений, которые получаются перестановкой элементов 1-го сочетания

$$A_n^k = \underbrace{k! + k! + \ldots + k!}_{C_n^k} = k!\cdot C_n^k \Rightarrow$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$

⊠

**Теорема:** $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$   $k>n$

◇ Рассмотрим конечное множ. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
составляем всевозможные сочетания с повторениями из n по k.
Построим биективное отображение из множ. сочетаний с повторениями из n по k в множ. упорядоченных наборов, состоящих из k нулей и $(n-1)$ единиц.
Рассмотрим произвольное сочетание с повторениями из n по k.

$$\underbrace{00\ldots0}_{\text{столько раз, сколько раз встречается } a_1 \text{ в сочетании}}\ 1\ \underbrace{00\ldots0}_{\text{кол-во включений } a_2 \text{ в сочетан.}}\ 1\ \underbrace{00\ldots0}_{-a_3-}\ 1\ldots 1\ \underbrace{00\ldots0}_{-a_n-}$$

$(n-1)$ – единиц
k – нулей

$\overline{C_n^k}$ – кол-во упорядоч. наборов, состоящ. из k нулей и $(n-1)$ единиц $= C_{k+n-1}^k$

⊠

**Пр:** 1) Сколько $\exists$ 5-знач. натур. чисел, десятичная запись которых не содержит 0

{повторения есть
{порядок важен

$A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$.

по основ. принц. комбинаторики

$\underset{1}{\underline{9}} \quad \underset{2}{\underline{9}} \quad \underset{3}{\underline{9}} \quad \underset{4}{\underline{9}} \quad \underset{5}{\underline{9}} \quad \Rightarrow \underbrace{9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9}_{5} = 9^5$

2) есть 4 разноцветных шара: красный, зеленый, синий и желтый. Сколькими способами их можно выложить в ряд?

{повторений нет
{порядок важен

$\underset{1}{\underline{4}} \quad \underset{2}{\underline{3}} \quad \underset{3}{\underline{2}} \quad \underset{4}{\underline{1}} \qquad 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

3) В классе 28 учеников. Сколькими способами можно выбрать 4-х учеников?

$A = \{1, 2, \dots, 28\}$.

$C_{28}^{4} = \dfrac{28!}{4! \cdot (28-4)!}$

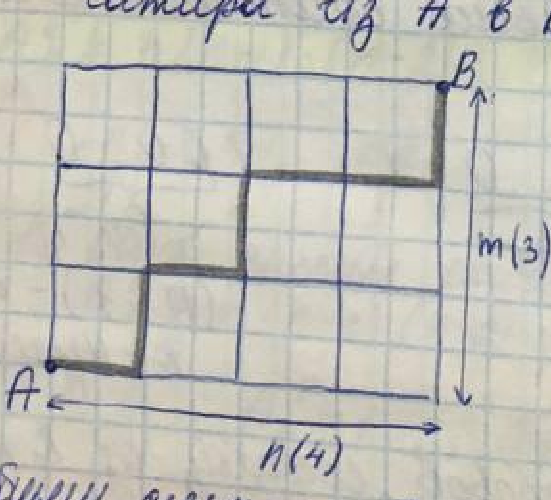
4) Бросают 20 одинаковых игральных костей. Сколькими способами могут выпасть кости?

$A = \{1, 2, \dots, 6\}$

$\overline{C}_{6}^{20} = C_{20+6-1}^{20}$

{порядок – не важен
{повторения есть

5) Такси едет либо на север, либо на восток. Сколькими способами можно перевести пассажира из А в В.




В – восток
С – север.

ВСВСВВС

Букв В равно n штук
букв С равно m штук

В общем случае: $\exists$ биективное отображ. из множ. допустимых маршрутов в множ. упоряд. наборов, состоящих из n букв В и m букв С.

# БИНОМ НЬЮТОНА.

## СВОЙСТВА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦ.

$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$

**Теорема:**

Для любого натурального числа $n$ и $\forall$ вещественного числа $x \neq 0$.

$$(1+x)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

◊ $(1+x)^n = \underbrace{(1+x)\cdot(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x)}_{n}$

$\underset{\uparrow}{?}\, x^k$, $k \in \{0, 1, .., n\}$ ; $C_n^k$ – кол-во способов выбрать $n$ скобок из $k$ скобок. $\Rightarrow$

какой коэффиц при $x^k$

$C_n^k$ – искомый коэф. : $C_n^k x^k$ $\boxtimes$

**Следствие: (Бином Ньютона).**

Для любого натурального числа $n$ и $\forall$ вещественн. чисел $a$ и $b \neq 0$ справедливо:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^n a^n b^{n-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

◊ $x = \frac{a}{b}$

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n = C_n^0 \left(\frac{a}{b}\right)^0 + C_n^1 \left(\frac{a}{b}\right)^1 + C_n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \ldots + C_n^n \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Умножим данное равенство на $b^n$:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^0 b^{n-0} + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^n a^n b^{n-n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$\boxtimes$

$C_n^k$ - биномиальный коэффициент

## Свойства биномиальных коэффициентов.

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$, для $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$

◇ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ; $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k!)k!}$ ☒

2. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, для $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$

◇ $A = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$

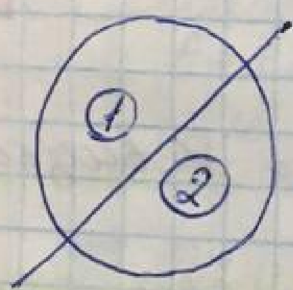
Подсчитаем кол-во всех возможных $k$-элементных подмножеств множ. $A$:

I способ: Каждое $k$-элементное подмнож. множ. $A$ - сочетание без повторений из $n$ по $k$.

$C_n^k$ - кол-во $k$-элементных подмнож. множ. $A$.

II способ:

$k$-элементные подмнож. $A$




$\exists$ 2 типа таких подмнож.:

1) $k$-элементное подмнож. $A$, содержащие элемент $n$.
2) $k$-элементное подмнож. $A$, не содержащее элемент $n$.

Кол-во $k$-элементных подмнож. $A$ 1-ого типа $= C_{n-1}^{k-1}$

Кол-во $k$-элементных подмнож. $A$ 2-ого типа $= C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

$\Rightarrow$ из I и II способа $\Rightarrow C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ ☒

3) $\underbrace{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n}_{\text{сумма всех биномиальных коэффициентов}} = 2^n$

◇ $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n$

Положим $x = 1$:

$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n$ ☒

4) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + C_n^n (-1)^n = 0$

◇ $(-1+x)^n = C_1^0 + C_n^1 x_1 + C_n^2 x^2 + \dots + x^k C_n^k + \dots + C_n^n (x)^n$

Положим $x = -1$:

$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$ ⊠

5) $n$ - четное натуральное число

$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = 2^{n-1}$

◇ = свойство 3 + свойство 4.

$$+\begin{cases} 3)\ C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = 2^n \\ 4)\ C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1) C_n^k + \dots + C_n^n (-1)^n = 0 \end{cases}$$

$$2C_n^0 + 2C_n^2 + \dots + 2C_n^n = 2^n \quad | \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = 2^{n-1}$$ ⊠

# ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ФОРМУЛА

Полиномиальная формула - обобщенный бином Ньютона

Задача: Пусть имеется $n_1$ экземпляр буквы $a_1$
$n_2$ экземпляр буквы $a_2$
. . .
$n_k$ экземпляр буквы $a_k$

$a_1, a_2, \dots, a_k$ - попарно различные буквы
$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

Вопрос: Сколько различных слов можно составить используя все буквы?

$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ - полиномиальн. коэф.

Решение:

$\underset{1}{\sqcup}\ \underset{2}{\sqcup}\ \underset{3}{\sqcup}\ \dots\ \underset{n-1}{\sqcup}\ \underset{n}{\sqcup}$

$C_n^{n_1}$ - кол-во способов расположить $n_1$ экземпляров буквы $a_1$

$C_{n-n_1}^{n_2}$ - кол-во способов расположить $n_2$ экземпляров буквы $a_2$

$C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$ - кол-во способов расположить $n_3$ экземпляров буквы $a_3$

$C_{n-n_1-\ldots-n_k}^{n_k}$ - кол-во способ. расположить $n_k$ экземпляров буквы $a_k$

По основному принципу комбинаторики: число искомых слов, используя все буквы:

$$C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_k}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\ldots-n_{k-1}-n_k)!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_k! \underbrace{(n-n_1-\ldots-n_{k-1}-n_k)!}_{=0!=1}} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

**Теорема (полиномиальная формула):**

Для $\forall \neq 0$ вещ. чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ справедливо:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, \ldots, n_k \\ n_i \geq 0,\ i=\overline{1,k} \\ n_1+n_2+\ldots+n_k=n}} C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$$

◊ без доказательства ⊠

**Пр:** Найти коэф. при $x_1^3 x_2 \cdot x_4^5 \cdot x_5$ в разложении $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$, коэф. = полиномиальный коэф.

$x_1^3 \cdot x_2^1 \cdot x_3^0 \cdot x_4^5 \cdot x_5^1$

$$C_{10}^{3,1,0,5,1} = \frac{10!}{3! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 5! \cdot 1!}$$

**Пр:** Пусть у нас есть 10-а, 5-б, 2-в.

$$C_{17}^{10,5,2} = \frac{17!}{10! \, 5! \, 2!}$$