Наша ближайшая задача – сформулировать и доказать необходимые и достаточные условия гамильтоновости графа в терминах замыкания графа.

Введем понятие замыкания графа G. Рассмотрим граф G порядка n. По графу G построим последовательность графов:

$$G_0 \to G_1 \to G_2 \to \ldots \to G_{k-1} \to G_k$$

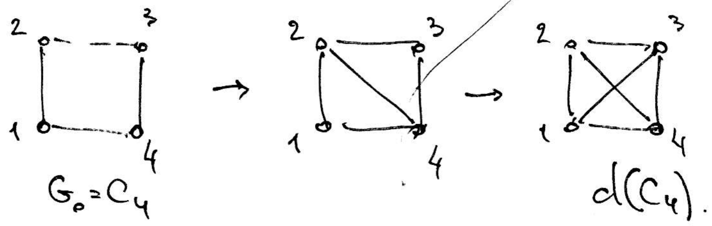
В этой последовательности первый граф – граф G_0 – совпадает с графом G. Граф G_i получается из графа G_{i-1} так:

$$G_i = G_{i-1} + \{u,v\}, \text{ где } \{u,v\} \notin E(G_{i-1}) : \deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

$i = 1, 2, \ldots, k,$

Если в графе G_k нет двух различных несмежных вершин сумма степеней которых $\geq n$, то граф G_k наз-ся замыканием графа G. ~~[illegible]~~ и в этом случае используем обозначение $cl(G)$.

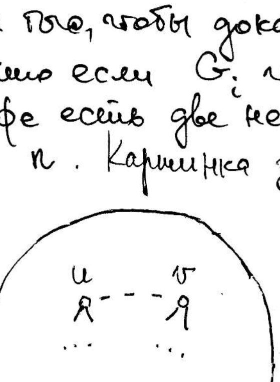
Пример:



Теорема. Граф G гамильтонов $\Leftrightarrow$ $cl(G)$ гамильтонов

Док-во. "$\Rightarrow$" Пусть G – гамильтонов граф, т.е. в графе G есть гамильтонов цикл C. Мы добавляем в граф G ребра определённым образом и получаем замыкание графа G. Ясно, что цикл C содержится в замыкании. Более того он будет гамильтоновым и в замыкании. Поэтому замыкание графа G является гамильтоновым.

"$\Leftarrow$" Для того, чтобы доказать утверждение в обратную сторону достаточно показать, что если G_i гамильтонов, то и граф G_{i-1} также гамильтонов. В $(i-1)$-м графе есть две несмежные вершины u и v сумма степеней которых не меньше n. Картинка здесь такая



$\deg(u) + \deg(v) \geq n$

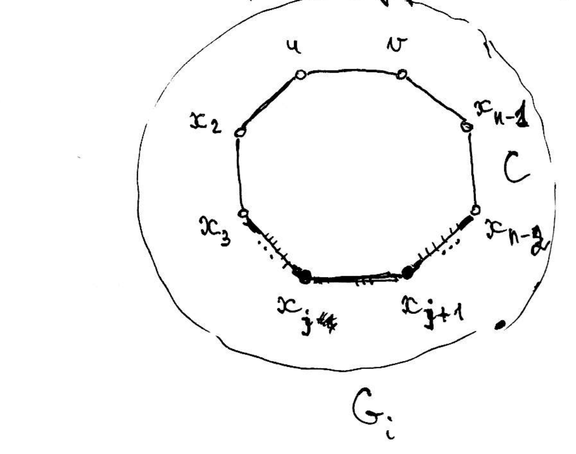
G_{i-1}

Мы соединяем ребром вершины u, v и получаем ~~[illegible]~~ граф G_i:

Пусть граф G_i гамильтонов, т.е. в графе G_i есть гамильтонов цикл C.

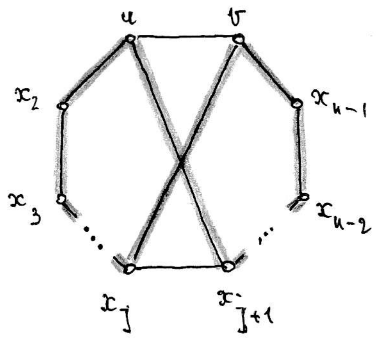
Если этот цикл C не проходит по ребру $\{u,v\}$, то этот цикл есть и в графе G_{i-1}. Более того этот цикл является гамильтоновым в $(i-1)$-м графе и $(i-1)$-й граф гамильтонов.

Пусть теперь цикл C в i-м графе содержит ребро $\{u,v\}$. Картинка здесь такая.



В i-м графе есть вершины u, v. Остальные вершины графа обозначим так $x_2, x_3, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}$.

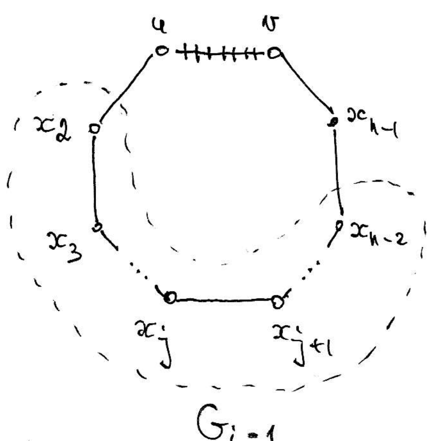
Утверждается, что существуют две соседние вершины цикла – вершины x_j и x_{j+1} такие, что $\{u, x_{j+1}\} \in E(G_i)$ и $\{v, x_j\} \in E(G_i)$. Этот факт мы докажем чуть позже. Учитывая этот факт, мы можем перестроить гамильтонов цикл так, чтобы в нем не будет ребра $\{u,v\}$.



Ясно, что новый гамильтонов цикл будет гамильтоновым в $(i-1)$-м графе и $(i-1)$-й граф гамильтонов. Утверждение доказано.

Почему найдутся такие две вершины x_j и x_{j+1}? Допустим, что таких двух вершин нет. Хотим получить противоречие.

Рассмотрим исходный гамильтонов цикл C, который содержит ребро $\{u,v\}$. Т.к. в $(i-1)$-м графе нет ребра $\{u,v\}$, то в $(i-1)$-м графе цикл C превращается в простую цепь



Рассмотрим мн-во вершин $U = \{x_2, x_3, \ldots, x_{n-2}\}$.

Нас интересуют не все вершины мн-ва U. Вершины мн-ва U, смежные с вершиной v, обозначим P

$$P = \{x_i \in U : \{x_i, v\} \in E(G_{i-1})\}.$$

$\deg(v) = |P| + 1$ (+1, потому что вершина v смежна с x_{n-1}, которое не входит в мн-во P).

Если вершина x_j принадлежит мн-ву P, то она смежна с вершиной v, и, следовательно, следующая вершина x_{j+1} не смежна с вершиной u. Значит вершина u не смежна по крайней мере с $|P|$ вершинами, т.е

$\deg(u) \leq (n-2) - |P|$ // всего вершин в графе n, минус вершина
// на u, минус вершина v (т.к. u не смежна
// на с v) и минус $|P|$ вершин

$$\deg(u) + \deg(v) \leq n - 2 - |P| + |P| + 1 = n - 1.$$

Противоречие с тем, что в G_{i-1} $\deg(u) + \deg(v) \geq n$

Следствие (достаточное условие гамильтоновости, О. Оре). Если в графе G, $|G| = n \geq 3$ для любых несмежных вершин u, v выполняется

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n,$$

то граф G гамильтонов.

Док-во: Замыкание графа G представляет собой полный граф, т.е. $cl(G) \cong K_{|G|}$. Полный граф ~~граф~~ гамильтонов, т.е. замыкание графа G – гамильтонов. граф. Следов. и сам граф G гамильтонов.

Следствие (достаточное условие гамильтоновости, Г. Дирак). Если в графе G, $|G| = n$ степень каждой вершины не меньше, чем $n/2$

$$\deg(v) \geq n/2$$

то граф G гамильтонов.