$N[a] = \{d, b, a\}$
Степень вершины $a = 2$ ($\deg(a) = 2$)
$\deg(e) = 1 \Rightarrow e$ – висячая (листовая) вершина
$\deg(f) = 0 \Rightarrow f$ – изолированная вершина.

(простейшие)
Основные классы графов

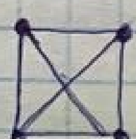
1) Граф $G = (V, E)$ назыв. **полным**, если $\forall$ две его вершины смежны, т.е. соединены ребром. ($E = V^{(2)}$)

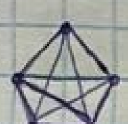
K_n – полный граф порядка n.

• – полный граф порядка 1 (K_1)
(0 ребер)


– полный граф порядка 2 (K_2)
(1 ребро)


– полный граф порядка 3 (K_3) – треугольник
(3 ребра)


– полный граф порядка 4 (K_4)
(6 ребер)


– полный граф порядка 5 (K_5)
(10 ребер)

Кол-во ребер в графе порядка n: $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

2) Граф назыв. **пустым**, если в нем нет ребер (G – пустой, если $E(G) = \emptyset$)

O_n – пустой граф порядка n.
каждая вершина – изолированная

• – пустой граф порядка 1 (O_1)

• • – пустой граф порядка 2 (O_2)

• • • – пустой граф порядка 3 (O_3).

(3) Простой цепью порядка n назыв. граф P_n с множ. вершин $V(P_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$ и множ. ребер $E(P_n) = \{\{i, i+1\} : i \in \{1, \ldots, n-1\}\}$


— простая цепь порядка 1 (P_1)


— простая цепь порядка 2 (P_2)


— простая цепь порядка 3 (P_3)


— простая цепь порядка 4 (P_4)

(4) Простым циклом порядка $n \geq 3$ назыв. граф C_n с множ. вершин $V(C_n) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ и множ. ребер $E(C_n) = E(P_n) \cup \{\{1, n\}\}$ ← ребро соединяет 1-ую вершину и последнюю

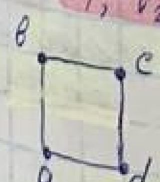

— простой цикл порядка 3 (C_3)


— простой цикл порядка 4 (C_4)

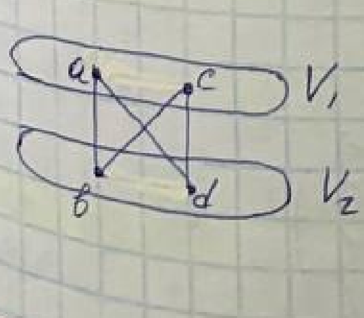

— простой цикл порядка 5 (C_5)

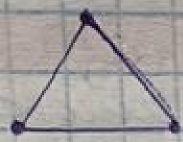
(5) Граф $G = (V, E)$ назыв. двудольным, если множ. V можно разбить на два непересекающихся множ. V_1 и V_2 так, что в каждом ребре $\{u, v\} \in E$ одна вершина принадлежит V_1, а другая — V_2.

V_1, V_2 — доли графа G.



C_4 — двудольный граф

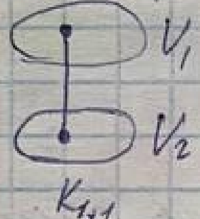


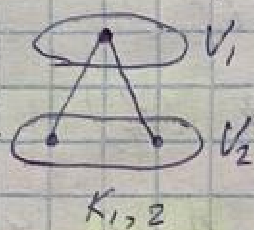


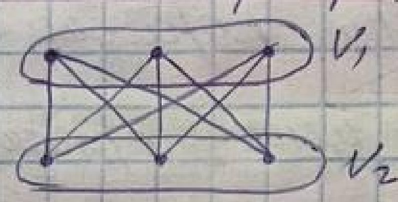
C_3 – не двудольный граф

Двудольный граф с долями V_1 и V_2 назыв. полным, если каждая вершина доли V_1 смежна с каждой вершиной доли V_2

$K_{p,q}$ – полный двудольный граф, $|V_1| = p$, $|V_2| = q$



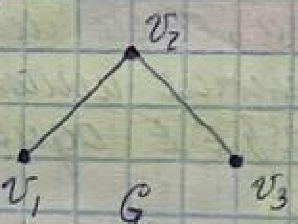




Опр: Пусть $G = (V, E)$ – граф порядка n. v_1, v_2, v_n – вершины графа G. Матрицей смежности графа G назыв. квадратная матрица $A(G)$ порядка n, в которой:

$$(A(G))_{i=j} = \begin{cases} 0, & i=j \text{ или } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ 1, & \{v_i, v_j\} \in E(G) \end{cases}$$

Пр:

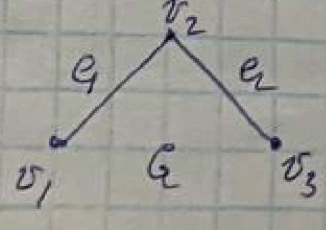


$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Опр: Пусть $G = (V, E)$ – (n, m)-граф. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – вершины графа G, $e_1, e_2, \ldots, e_m$ – ребра графа G. Матрицей инцидентности графа G назыв. матрица $I(G)$ размера $n \times m$, в которой:

$$I(G) = \begin{cases} 0, & \text{если } v_i \notin e_j \\ 1, & \text{если } v_i \in e_j \end{cases}$$

Пр:

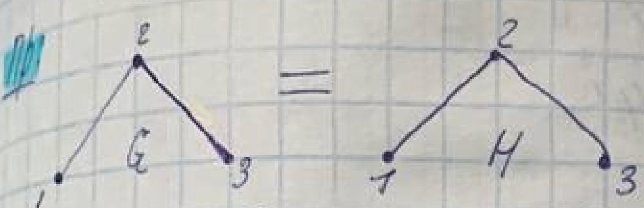


$$I(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Помеченные графы и абстрактные графы

Опр: Графы G и H назыв. **равными** ($H=G$), если $V(G)=V(H)$ и $E(G)=E(H)$

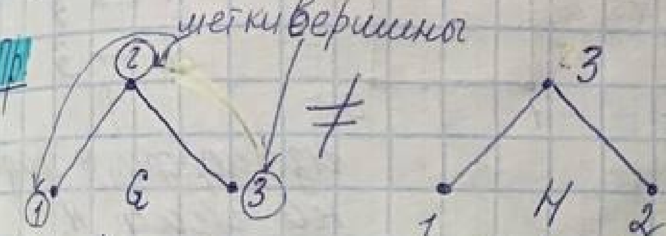
Пр:



$V(G)=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $V(H)=\{1,2,3\}$

$E(G)=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ $\qquad$ $E(H)=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$

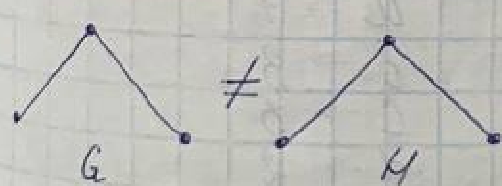
Пр:



$V(G)=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $V(H)=\{1,3,2\}$

$E(G)=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ $\qquad$ $V(G)=\{\{1,3\},\{3,2\}\}$.

Если вершинам графов приписаны метки и равенство графов понимается как равенство множ. вершин и множ. ребер, то мы говорим о таких **графах**, как о **помеченных**.



— два графа **равны (изоморфны)**, если при наложении **картинки совпадут.**

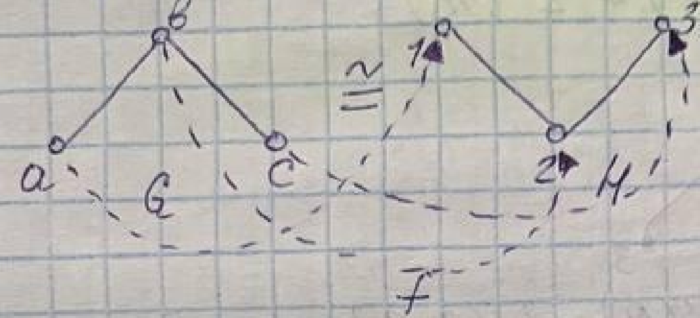
Опр: Граф G назыв. **изоморфным** графу H ($G \cong H$), если $\exists$ изоморфизм графа G на граф H, т.е. биективное отображение $f: V(G) \to V(H)$, сохраняющее отношение смежности. (для $\forall$ двух вершин u и $v \in V(G)$ $\{u,v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$)

Все графы **разбиваются** на **непересекающиеся** классы так, что графы, принадлежащие одному классу изоморфны друг другу (т.е. **они могут быть изображены одной картинкой**), а графы, принадлежащие разным классам — **неизоморфны.**

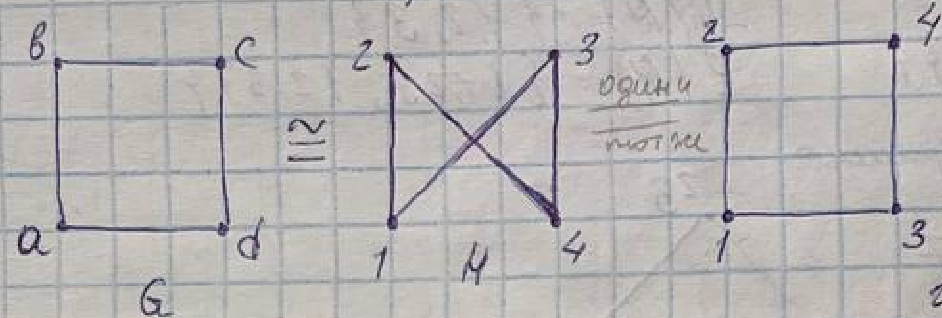
Абстрактный граф – класс изоморфных графов

Примеры пар изоморфных графов:

1.



2.

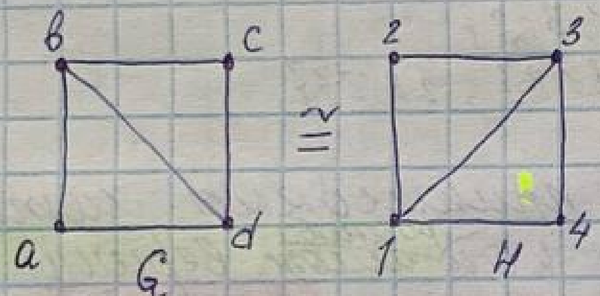


a → 1
b → 2
c → 4
d → 3

↑

изоморфизм графа G на граф H.

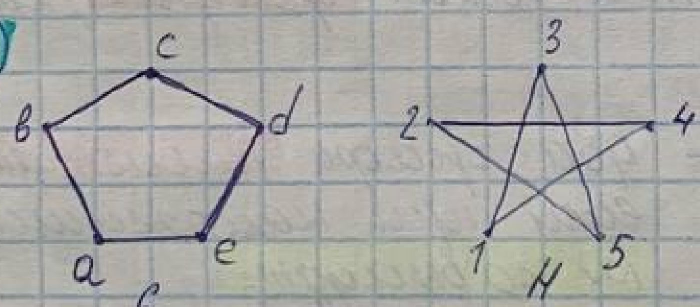
3.



$G \cong H$

1 ← b
2 ← a
3 ← d
4 ← c

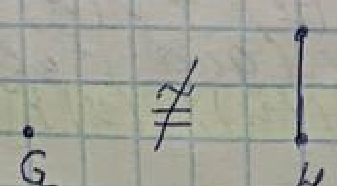
4.



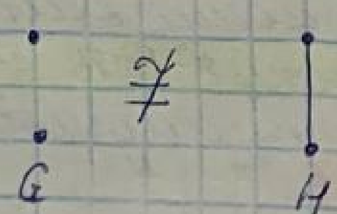
a → 1
b → 3
c → 5
d → 2
e → 4

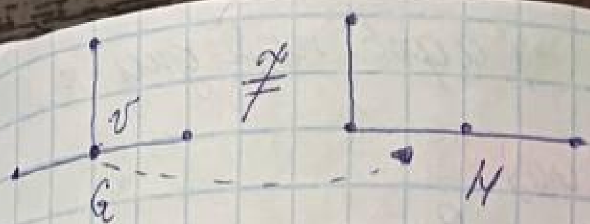
Примеры неизоморфных графов:

1.

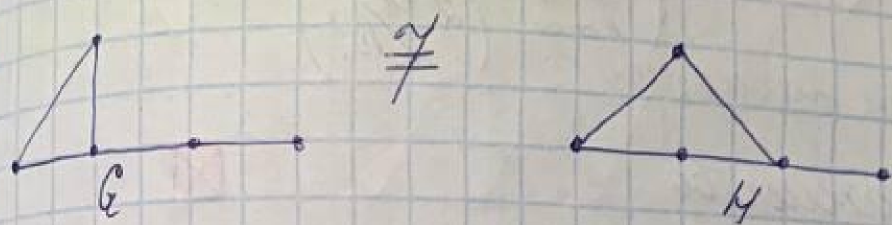


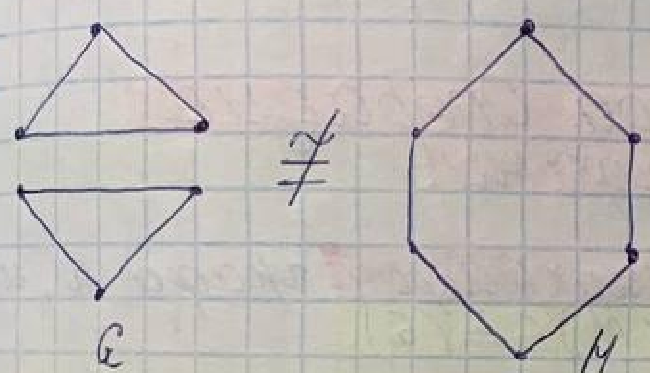
2.



3. 

$deg(v) = 3$ – v - вершина степени 3.

4. 

5. 

Сертификатом того, что они неизоморфны, явл. наличие треугольника в одном из них.

Лемма:

Число помеченных графов с множ. вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$: $2^{C_n^2}$

◊ Рассмотрим 2 графа: G и H - помеченные и $V(G) = V(H) = V$

$G \neq H \iff E(G) \neq E(H)$

Рассмотрим полный граф K_n порядка n с множ. V.

C_n^2 - кол-во ребер в K_n.

$e_1, e_2, \dots, e_{C_n^2}$ - ребра K_n.

Рассмотрим произвольный помеченный граф G с множ. вершин $V = \{1, 2, \dots n\}$.

$G \to \alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_{C_n^2}$ - последоват., в которой $\alpha_i = \begin{cases} 0, \text{ если } e_i \notin E(G) \\ 1, \text{ если } e_i \in E(G) \end{cases}$

$2^{C_n^2}$ $\boxtimes$

g_n - кол-во абстрактных графов порядка n.

Теорема: (формула Пойа):

$$g_n \sim \frac{2^{C_n^2}}{n!} \qquad \left(\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{\left(2^{C_n^2}/n!\right)} = 1 \right)$$

асимптотически равно, или

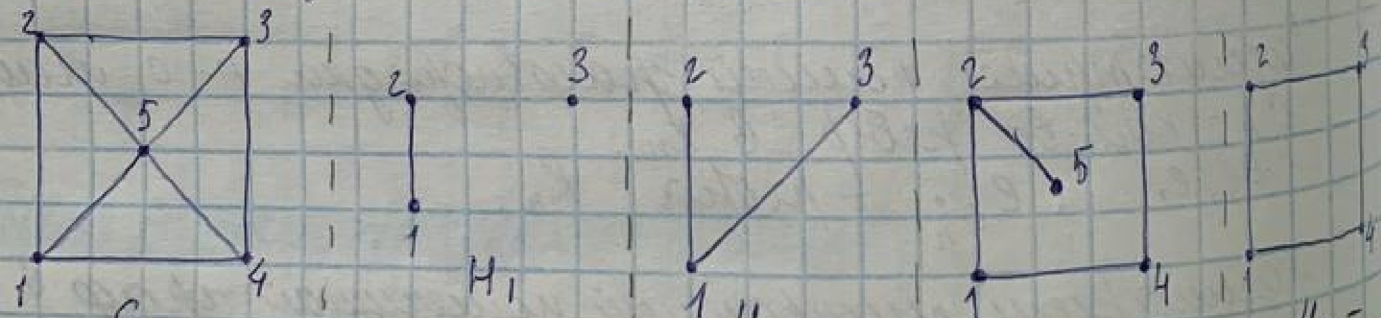
◇ без доказательства ☒

Подграф графа. Операции над графами.

Опр: граф H назыв. подграфом графа G, если $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$

Опр. подграф H графа G назыв. остовным, если $V(H) = V(G)$.

Опр: Пусть имеется граф $G = (V, E)$, $X \subseteq V$, $X \neq \emptyset$. Граф H такой, что множ. вершин $V(H) = X$, а множ. ребер графа H $E(H) = \{\{u, v\} \in E(G) : u \in X, v \in X\}$ назыв. подграфом графа G, порожденным множ. X и обозначается $G(X)$.



G

H_1 подграф графа G

H_2 — не подграф графа G

H_3 — подграф графа G (остовный)

H_4 — подграф графа G, порожденный множ. $X = \{1, 2, 3, 4\}$

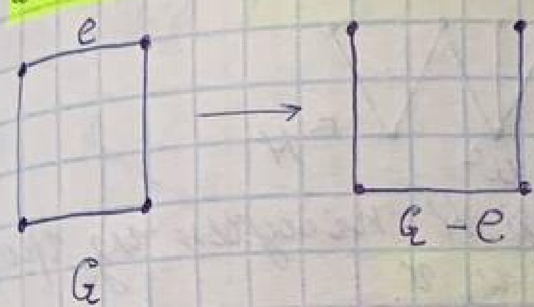
$H_4 = G(X)$

Операции над графами

1) Удаление ребра

$G = (V, E)$; $E \neq \varnothing$, $e \in E$

$G - e = (V, E \setminus \{e\})$

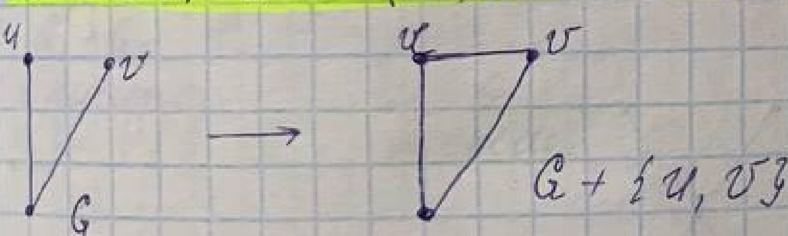


2) Добавление ребра

$G = (V, E)$, $E \neq V^{(2)}$ (= граф неполный)

$u, v \in V$ — не смежные ($\{u, v\} \notin E$)

$G + \{u, v\} = (V, E \cup \{\{u, v\}\})$

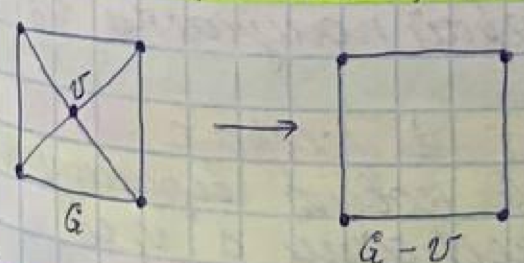


3) Удаление вершины

$G = (V, E)$, $|V| \geq 2$

$v \in V$ (удаляются автоматически все инцидентные ребра)

$G - v = (V \setminus \{v\}, \{\{u, w\} \in E : u \neq v, w \neq v\})$



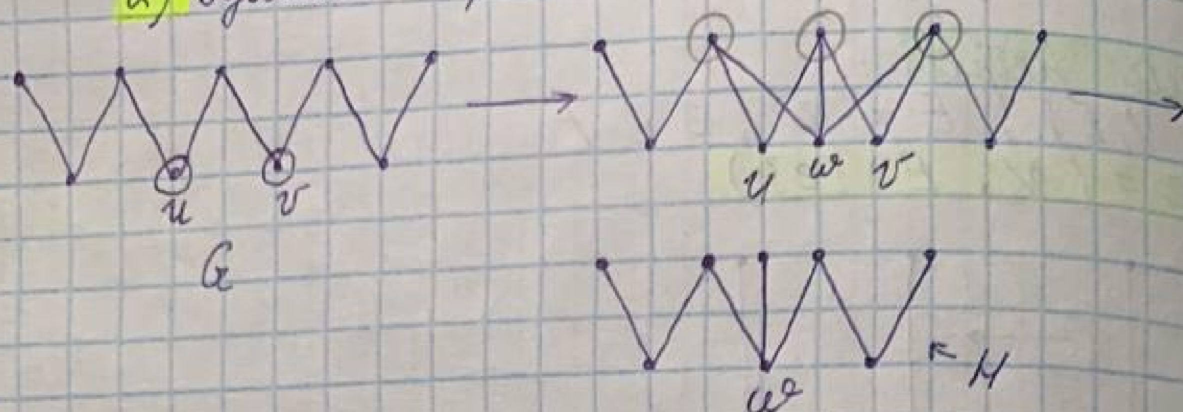
4) Отождествление вершин

$G = (V, E)$, $|V| \geq 2$.

Рассмотрим граф H, который получается из G так:

1) Добавим в граф новую вершину w, которую соединяем ребрами с вершинами, принадлежащими $N(u)$ и $N(v)$.

2) Удаляем вершины u, v.



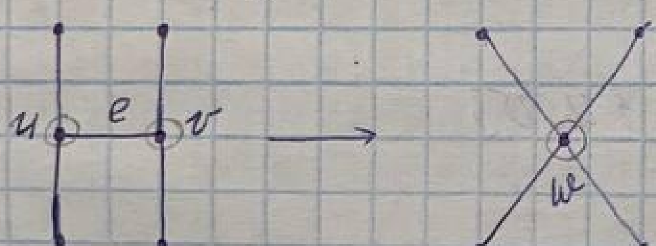
Будем говорить, что граф H получен из графа G отождествлением вершин u, v.

5. Стягивание ребра.

$G = (V, E)$, $E \neq \varnothing$

$e = \{u, v\} \in E$

Стягивание ребра E — это отождествление его концевых вершин.



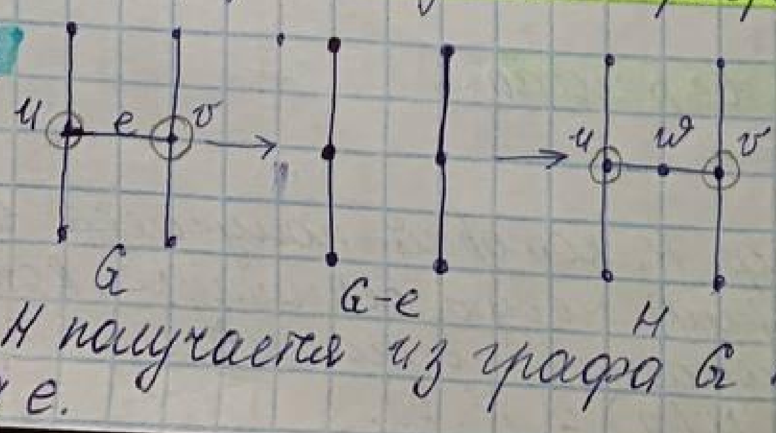
6. Подразбиение ребра.

$G = (V, E)$, $E \neq \varnothing$, $e \in E$

Рассмотрим граф H, который получается из графа G след. образом:

1) удалим из графа G ребро e;
2) добавим в граф G новую вершину w, которую соединим ребрами с v, u.

Пр:



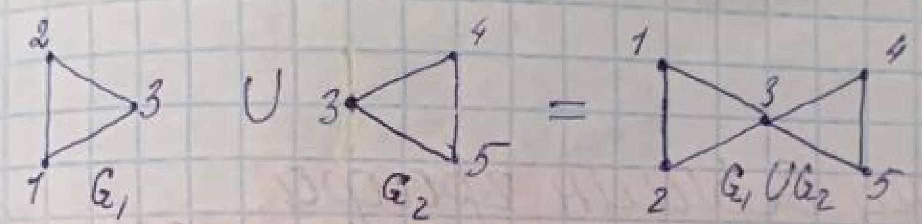
Граф H получается из графа G подразбиением ребра e.

7. Объединение графов:

Пусть G_1 и G_2 – графы

Объединением графов G_1 и G_2 назыв. граф $G_1 \cup G_2$ с множ. вершин $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и множ. ребер $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$

Пр:



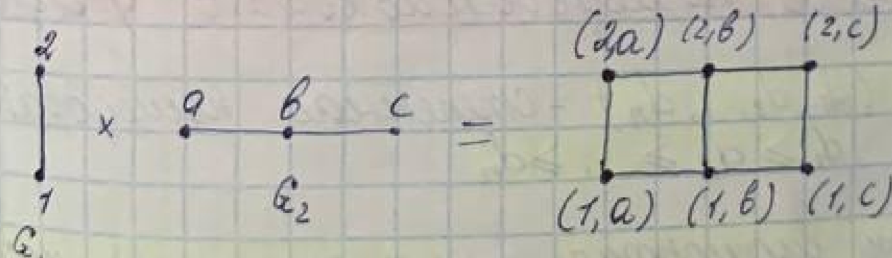
8. Декартово произведение графов.

Пусть G_1 и G_2 – графы. $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ – это графы, $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$.

Декартовым произведением графов G_1 и G_2 назыв. граф $G_1 \times G_2$, в котором множ. вершин $V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2$ и 2 вершины $(u_1, u_2) \in V(G_1 \times G_2)$ и 2 вершины $(v_1, v_2) \in V(G_1 \times G_2)$ смежны, если 1) $u_1 = v_1$ и $\{u_2, v_2\} \in E_2$

или 2) $u_2 = v_2$ и $\{u_1, v_1\} \in E_1$

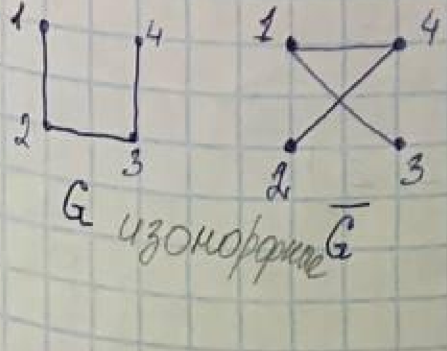
Пр:



9. Дополнение графа:

Дополнением графа $G = (V, E)$ назыв. граф $\bar{G}$ такой, что $V(\bar{G}) = V$, $\{u, v\} \in E(\bar{G}) \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$

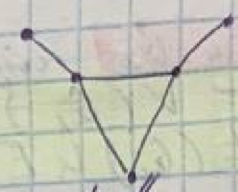
Пр:



G изоморфно $\bar{G}$

Опр: Граф G назыв. самодополнительным, если $G \cong \overline{G}$

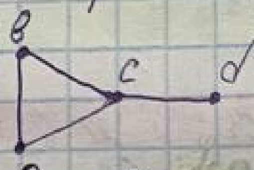
Пр: P_4, C_5



bull

Степени вершин графа. Графические последовательности

Рассмотрим граф:



G

$deg(a) = 2$
$deg(b) = 2$
$deg(c) = 3$
$deg(d) = 1.$

$(3, 2, 2, 1)$ – степенная последов. графа G.

Опр. Список степеней вершин графа назыв. **степенной последовательностью графа**.

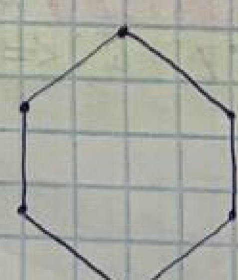
Если $d = (d_1, d_2, .., d_n)$ – степенная последовательность графа, то $d_1 \geqslant d_2 \geqslant ... \geqslant d_n$

Если графы изоморфны, то их степенные последов. совпадают. Обратное неверно.

Пр:

$(2, 2, 2, 2, 2, 2)$

$\not\cong$



$(2, 2, 2, 2, 2, 2)$

Лемма (о рукопожатиях):
В любом графе:

$$\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = 2\cdot |E(G)|$$

◇ $\deg(v)$ – число ребер, содержащих вершину v.

Каждое ребро графа содержит ровно 2 вершины. Каждое ребро графа вносит в сумму вклад равный двум. ☒

Следствие 1:
Сумма степеней вершин графа – четное число.

Следствие 2:
Число вершин нечетной степени четно.

◇ Следствие 2:

$$\sum_{v\in V}\deg(v) = \sum_{\substack{v\in V \\ \deg(v)\text{ четная}}}\deg(v) + \sum_{\deg(v)\text{ нечетная}}\deg(v) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sum_{v\in V}\deg(v)}_{\text{четное число}} - \underbrace{\sum_{\substack{v\in V \\ \deg(v)\text{ четная}}}\deg(v)}_{\text{четное число}} = \sum_{\deg(v)\text{ нечет.}}\deg(v)$$

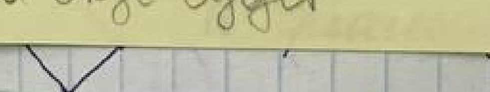
На экзе будет ☒

◇ ... ☒

Опр: ...тельность $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ... называется ... степенная последо- ... с d.

Пр: ... ...ная последов.

...едов. d.



(2.) $d=(2,2,1)$ – не графическая последов.

Теорема (кр. графичности):
Рассмотрим последов. $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ – невозрастающ. послед. целых неотрицательных чисел $n > d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$.
Последовательность d' получается из d удалением d_1 и уменьшением на 1 первых d_1 членов.

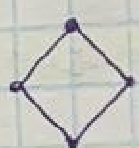
$$d' = (d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n).$$

… четное число

… четно.

Опр: Невозрастающая последовательность $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ целых неотрицательных чисел называется **графической**, если $\exists$ граф G, степенная последовательность которого совпадает с d.

Пр: 1. $d'=(2,2,2,2)$ — графическая последов.



G реализует последов. d.

2. $d=(2,2,1)$ — не графическая последов.

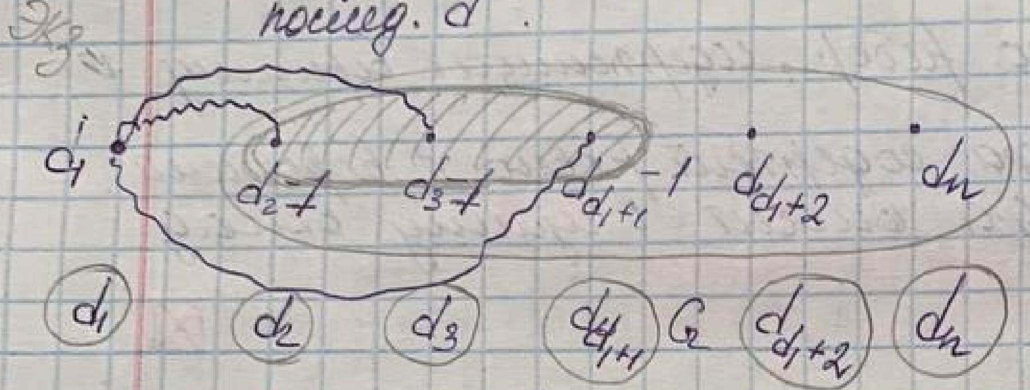
Теорема (кр. графичности):
Рассмотрим последов. $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ — невозрастающ. послед. целых неотрицательных чисел, $n > d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. Последовательность d' получается из d удалением d_1 и уменьшением на 1 первых d_1 членов.

$$d'=(d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, d_n).$$

d-графич. $\Longleftrightarrow$ d'-графическая

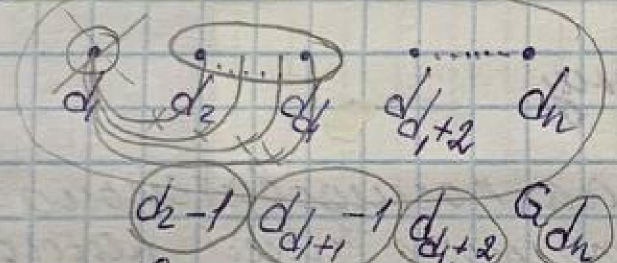
◇ $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, $d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots)$

$\Leftarrow$ Пусть d'-графич. $\exists$ граф G реализующ. послед. d'.



$\Rightarrow$ Пусть d-графич. $\exists$ граф G, который реализует послед. d.

<u>Случай 1:</u> d_1-смежна со всеми d_1-вершинами.

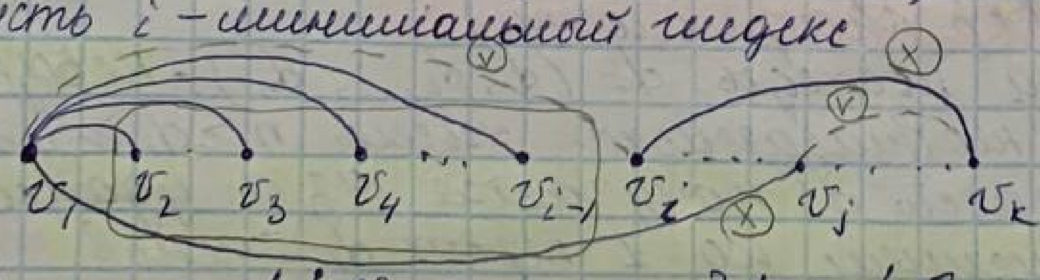


удалим вершину d_1 $\Rightarrow$ удаляются все ребра, соединяющие вершину d_1.

<u>Случай 2:</u> (сводим к первому)

Пусть $v_1, v_2, \dots, v_n$ – вершины графа G
$d_1, d_2, \dots, d_n$

Пусть $\exists$ вершина v_i, где $i \le d_1 + 1$, такая, что $\{v_1, v_i\} \notin E(G)$ (не смежна)
Пусть i – минимальный индекс



В множ. $\left.\begin{array}{l} |\{v_2, v_3, \dots, v_{i-1}\}| < d_1 \\ \deg(v) = d_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists v_j, j > i, \\ \{v_1, v_j\} \in E(G) \end{array}$

т.к. $j > i$: $deg(v_j) \le deg(v_i)$

$\{v_1, v_i\} \notin E(G)$ — не смежна
$\{v_1, v_j\} \in E(G)$ — смежна $\Big\}$ $\exists v_k$:

$\{v_i, v_k\} \in E(G)$
$\{v_j, v_k\} \notin E(G)$ $\boxtimes$

Маршруты, цепи, циклы графов. Связность

Опр: Чередующаяся последов. вершин $v_i \in V(G)$ и ребер $e_j \in E(G)$ $P = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{i-1} e_i v_i \ldots v_{k-1} e_k v_k$,
начальная вершина — v_0, заключ. вершина — v_k,
в которой $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ для $\forall i = \overline{1,k}$ назыв. **маршрутом**, соединяющим вершину v_0 и вершину v_k
(v_0, v_k)-маршрут

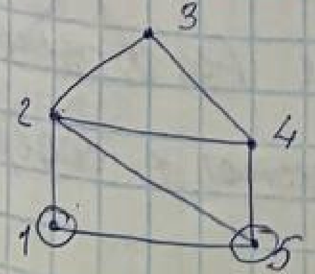
Длина маршрута — кол-во ребер в последовательности.

(v_0, v_k)-маршрут назыв. **открытым**, если $v_0 \ne v_k$
замкнутым, если $v_0 = v_k$

Открытый (v_0, v_k)-маршрут, в котором ни одно (никакое) ребро не встречается 2 и более раз, назыв. (v_0, v_k)-**цепью**, при этом (v_0, v_k) цепь, в которой никакая вершина не встречается 2 и более раз, назыв. **простой**.

Замкнутый маршрут, в котором никакое ребро не встречается 2 и более раз, назыв. **циклом**. (нет повторяющихся ребер.). При этом цикл, в котором никакая вершина не встречается 2 или более раз назыв. **простым**. (нет повторяющихся вершин).

Пр:



начало: 1
конечный пункт: 5
1) путь: 1, $\{1,2\}$, 2, $\{2,4\}$, 4, $\{4,2\}$, 2, $\{2,5\}$, 5 — $(1,5)$-маршрут
(открытый, длина марш. = 4, не цепь

г) 1, {1,2}, 2, {2,4}, 4, {4,3}, 3, {3,2}, 2, {2,5}, 5

(1,5)-маршрут, длина = 5, цепь

з) 1, {1,2}, 2, {2,5}, 5

простая цепь длины 2

Замечание:

Если в открытом маршруте есть повторяющиеся ребра, то в этом маршруте есть и повторяющиеся вершины.

Рассмотрим граф $G = (V, E)$, $u, v \in V$

P - открытый (u, v) маршрут графа G

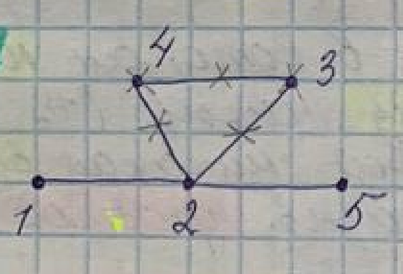
Q - открытый (u, v) маршрут графа G

Будем говорить, что маршрут P содержит маршрут Q, если из маршрута P можно удалить вершины и ребра так, что в результате получится маршрут Q

Лемма:

Любой открытый (u, v) маршрут содержит простую (u, v) цепь.

Пр:



1, {1,2}, 2, ~~{2,3}, 3, {3,4}, 4, {4,2}~~

{2,5}, 5

удалим вершины и ребра между 2, а также копию 2 =>

получаем: 1, {1,2}, 2, {2,5}, 5 — простая цепь.

◊ По индукции по длине маршрута (k)

Пусть k - длина открытого маршрута.

База индукции: Пусть $k = 1$

u, {u, v}, v - простая (u, v)-цепь

Любой открытый маршрут длины 1 содержит сам себя.

Пусть $k \geq 2$:

Индуктивное предположение:
Любой открытый маршрут (u,v) длины $< k$ содержит простую (u,v) цепь.

Рассмотрим произвольный открытый (u,v) маршрут P длины k.

Сл. 1: Пусть маршрут P не содежит повторяющихся вершин $\Rightarrow$ в P нет повторяющихся ребер $\Rightarrow$ P - простая (u,v) цепь.

Сл. 2: Пусть P содержит повторяющиеся вершины. А именно, пусть вершина w встречается в P 2 и более раз.

$P = u \dots w \dots w \dots v$

Пусть P' - маршрут, полученный из P удалением всех вершин и ребер между двумя копиями вершин w и удалением одной вершины w.

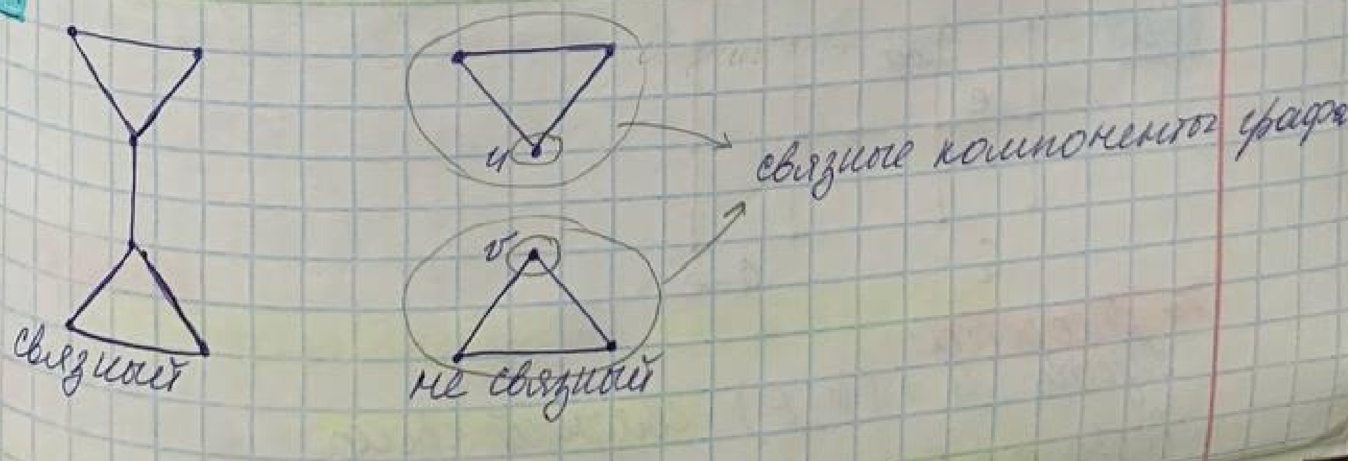
$\rightarrow$ P содержит P', длина P' < длина $P = k$

По индуктивному предположению: P' содержит простую (u,v)-цепь Q $\Rightarrow$ маршрут P содержит Q

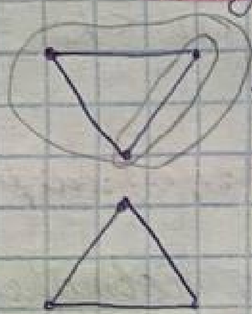
$\boxtimes$

Опр. Граф назыв. связным, если для $\forall$ двух различных вершин u и v существует открытый (u,v)-маршрут (т.е. простая (u,v) цепь)

Пр.:



Опр: Максимальный по включению связный подграф графа G назыв. компонентой связности графа G.



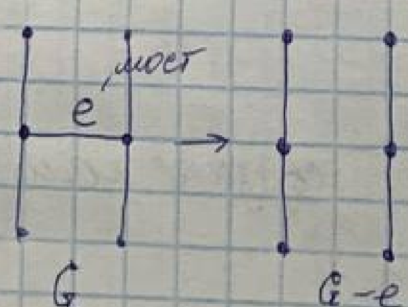
Лемма:
Любой граф G — единственным образом представляется в виде объединения непересекающихся связных компонент.

◇ $G=(V,E)$, $R \subseteq V \times V$ — бинарное отношение достижимости
$(u,v) \in R \Leftrightarrow u=v$ или $\exists$ простая цепь (u,v)
R = отношение эквивалентности.

Значит, множ. вершин V разбивается на непересекающиеся классы достижимых друг из друга вершин.
$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots \cup V_k$, $V_i \cap V_j \neq \emptyset$
$G(V_1), G(V_2), \ldots, G(V_k)$ — все связные компоненты графа G.
$G = G(V_1) \cup G(V_2) \cup \ldots \cup G(V_k)$ ⊠

Опр: Пусть G — связный граф. Ребро $e \in E(G)$ назыв. мостом, если $G-e$ — не связный граф.

Пр:

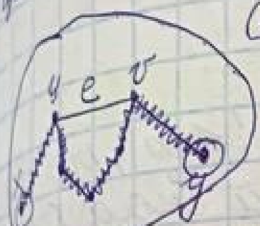


Теорема:
Пусть $G=(V,E)$ — связный граф.
Ребро $e \in E$ — мост $\Leftrightarrow$ ребро e не содержится в цикле

$A \to B = \overline{B} \to \overline{A}$

(⇒) Докажем контрапозицию: если ребро e содержится в цикле, то ребро e – не мост (т.е. граф G-e – связный граф)

G – связный граф.

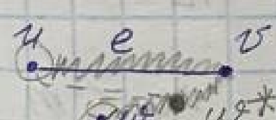


(⇐) Докажем контрапозицию: если ребро e – не мост (т.е. G-e – связный граф), то ребро e содержится в некотором цикле

Тут должен быть какой-то рисунок с графом ☒

Теорема:
Пусть G – связный граф, $e = \{u, v\} \in E(G)$ – мост в G.
Тогда G-e имеет ровно 2 связные компоненты.

◇ Рассмотрим в графе G:



Разобьем множ. вершин графа G на 2 множ. A и B.

$A = \{w \in V(G)$: ∃ простая (u, w)-цепь, содержащая мост e$\}$

$B = \{w \in V(G)$: ∃ простая (u, w) цепь, не содержащая мост e$\}$

$A \cap B = \emptyset$
Допустим, $A \cap B \neq \emptyset$, т.е. $\exists w: w \in A, w \in B$

G(A), G(B) – связные компоненты графа G. ☒

Теорема.
Если (m, n) граф связен, то $m \geq n-1$ (*)

◇ По индукции по m.

База индукции: Пусть $m=0$. Тогда граф пустой, в нем ни одного ребра. Т.к. граф связный, то в графе ровно 1 вершина. Тогда $n=1$. Очевидно, (*) выполняется.

Пусть $m \geqslant 1$.

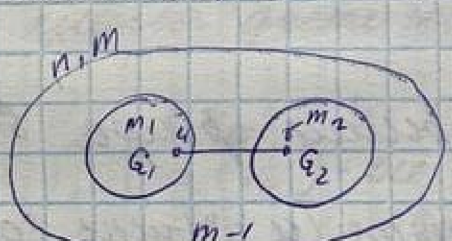
Индуктивное предположение:
Если (n,m')-граф связный и $m' \leq m$, то $m' \geqslant n-$

Рассмотрим произвольный связный граф (n,m) G, ребро $e \in E(G)$ — произвольное.

Сл. 1: Пусть ребро e — не мост графа G. Тогда граф $(G-e)$ — это связный граф.
$G-e$ — это $(n, m-1)$-граф.
то по индукт. предполож.: $m-1 \geqslant n-1$, $m \geqslant$
$\Rightarrow m \geqslant n-1$

Сл. 2: Пусть e — мост графа G
G_1, G_2 — компонент связности графа $G-e$
(n_1, m_1) (n_2, m_2)

Заметим, что $n_1+n_2=n$



$m_1 < m$
$m_2 < m$

по индукт. предполож. $m_1 \geqslant n_1-1$
$+$ $m_2 \geqslant n_2-1$

$$\underbrace{m_1+m_2}_{= m-1} \geqslant \underbrace{n_1+n_2}_{= n} -2$$

$m-1 \geqslant n-2 \Rightarrow$

$m \geqslant n-1$

☒