Множества и способы их задания

Когда мы даём определение какому-либо понятию, мы связываем его с другими понятиями. Те, в свою очередь, мы можем определить через другие понятия и т.д. Рано или поздно мы придём к таким первоначальным понятиям, которые уже нельзя или не нужно определять через другие. К таким основным, неопределяемым понятиям в математике относится понятие множества.

Можно сказать, что *множество* — собрание определённых и различных объектов нашей интуиции и интеллекта, мыслимое как единое целое.

Это предложение не следует принимать за точное определение, так как слово «собрание» ничуть не лучше, чем слово «множество». С тем же успехом мы могли бы вместо слова «собрание» использовать другой термин: «класс», «семейство» и т.д. Более того в некоторых случаях мы сами будем использовать эти слова как синонимы для слова «множество».

Пояснение значения слова «множество», приведённое выше, принадлежит немецкому математику Георгу Кантору (1845–1918). Немецкий математик Феликс Хаусдорф, желая подчеркнуть несостоятельность этих поясняющих слов как определения, говорил: «Это определение определяет тоже самое через тоже самое или даже тёмное делает ещё более тёмным».

Примеры множеств: множество натуральных чисел, множество точек на данной прямой, множество корней заданного уравнения, множество студентов 1-го курса 3-го потока ФПМИ и т.д. Можно рассматривать множества, элементами которых являются другие множества. Например, элементами множества групп 1-го курса 3-го потока являются три группы, которые, в свою очередь, являются множествами студентов.

Множества будем обозначать прописными латинскими буквами (A, B, $C, \ldots$), возможно с индексами ($A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$). Обьекты (или, как ещё говорят, элементы или предметы), из которых состоят множества, будем обозначать строчными латинскими буквами ($a, b, c, \ldots$), возможно с индексами ($a_1, a_2, a_3, \ldots$).

Мы будем работать только с такими множествами, для которых однозначно можно определить какие элементы входят в них, а какие нет. Если элемент a принадлежит множеству A, то пишем $a \in A$ (знак $\in$ называется символом принадлежности), в противном случае пишем $a \notin A$.

Существует несколько способов задать множество.

1. Во-первых, множество можно определить, просто перечислив его элементы. При этом список элементов, составляющих множество, заключается в фигурные скобки. Например, запись $A = \{1, 2, 3\}$ означает, что A — множество, элементами которого являются числа 1, 2 и 3 и только они. Запись $B = \{\{1, 2, 3\}\}$ «говорит» нам, что B — множество, единственным элементом которого является множество $\{1, 2, 3\}$.

Порядок следования элементов в множестве не важен. Множество $\{1, 2, 3\}$ и множество $\{3, 2, 1\}$ — это одно и то же множество. Каждый элемент множества входит в него один раз (даже если при перечислении элементов некоторые элементы указаны по нескольку раз). Таким образом, множество $\{1, 2, 3\}$ и множество $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 3\}$ — это одно и то же множество. Множество определяется только своими элементами.

Если список элементов слишком длинный или множество содержит бесконечно много элементов, то некоторые элементы могут быть заменены многоточием. При этом должно быть указано или ясно из контекста какие элементы множества пропущены.

Примеры.

а) $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ — множество цифр в десятичной системе счисления;

б) $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ — множество первых n натуральных чисел;

в) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ — множество натуральных чисел, т.е. множество чисел, которые используются при счёте (в рамках настоящего курса число 0 не считается натуральным числом);

г) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ — множество целых чисел;

д) {*а, б, в, …, э, ю, я*} — множество букв алфавита русского языка.

При записи множеств можно использовать многоточие, когда понятен принцип восстановления всех элементов множества по нескольким известным элементам. Однако здесь надо быть осторожным. Вообще говоря, любую последовательность можно продолжить как угодно. Например, известна шутка американского популяризатора науки Дугласа Хофштадтера, в которой утверждается, что последовательность $0, 1, 2, \ldots$ можно продолжить числом 720! (факториал числа 720). Попробуйте угадать закономерность.

Множество, в котором нет ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Например, множество вещественных корней уравнения $x^2 = -1$ представляет собой пустое множество.

2. Второй способ задания множества — задание множества как подмножества известного множества.

Если из множества удалить часть элементов, то мы получим снова множество, которое называется подмножеством исходного множества.

Определение 1. Множество B называется *подмножеством* множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A, т.е. имеет место следующая импликация $x \in B \Rightarrow x \in A$.

Если B есть подмножество A, то мы пишем $B \subseteq A$ (знак $\subseteq$ называется символом включения). При этом выражение $B \subseteq A$ читается так: «B — подмножество A» или «B целиком содержится в A».

По определению, каждое множество является подмножеством самого себя: $A \subseteq A$ для любого множества A. Примем следующее соглашение. Будем считать, что пустое множество является подмножеством любого множества (в том числе и самого себя): $\varnothing \subseteq A$ для любого множества A.

Часто множество можно определить как подмножество данного множества. Например, можно говорить о множестве студентов 1-го курса 3-го потока ФПМИ, родившихся в марте; о множестве автомобилей, окрашенных в чёрный цвет; о множестве букв русского алфавита, являющихся гласными. Во всех этих примерах новое множество определяется как множество элементов данного множества, обладающих каким-либо дополнительным свойством по сравнению со свойством быть элементом исходного множества. Это дополнительное свойство называется *характеристическим свойством* определяемого множества.

Примеры. Пусть A — множество студентов 1-го курса 3-го потока ФПМИ. Определим характеристическое свойство P быть рождённым в марте

$$P(x) = (x \text{ родился в марте}).$$

Тогда множество студентов 1-го курса 3-го потока ФПМИ, родившихся в марте, запишется так

$$B = \{x \in A : x \text{ родился в марте}\}.$$

В общем случае, если задано множество A и характеристическое свойство $P(x)$, которому одни элементы множества A удовлетворяют, а другие нет, то мы можем определить новое множество

$$\{x \in A : P(x)\}.$$

Это выражение читается так: «множество x, принадлежащих множеству A и удовлетворяющих характеристическому свойству P».

Примеры. Приведём примеры множеств, заданных посредством характеристических свойств.

а) $\{x \in \mathbb{N} : x \leq 3\}$ — множество натуральных чисел, не больших 3;

б) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 = 0\}$ — множество вещественных корней квадратного уравнения $x^2 + 2x + 1 = 0$;

в) $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q} \wedge p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$ — множество вещественных чисел, которые могут быть представлены в виде отношения целого числа и натурального числа.

Отметим, что характеристическое свойство должно однозначно определять какие элементы исходного множества входят в определяемое множество, а какие нет. Оно не должно быть «размытым». Например, пусть множество A определяется как множество богатых людей

$$A = \{x : x - \text{богатый человек}\}.$$

Характеристическое свойство в данном случае задано туманно и нет никакого ясного принципа, по которому можно определить принадлежит ли множеству A некоторый, вообще говоря, произвольный объект. То, что характеристическое свойство должно чётко разграничивать объекты, принадлежащие множеству, от остальных объектов, не означает, что оно должно легко проверяться. Рассмотрим множество упорядоченных четверок

$$\{(x, y, z, n) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3 \wedge x^n + y^n = z^n\}.$$

Это множество точно определено, но более 300 лет оставался открытым вопрос: пусто это множество или нет? В 1996 г. британский математик сэр Эндрю Уайлс доказал, что это множество пусто.

При задании множеств посредством характеристических свойств могут возникать проблемы другого сорта. Рассмотрим теоретико-множественную конструкцию, известную как *парадокс Рассела* (1902 г.). Пусть U — множество всех множеств и A — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве элемента

$$A = \{B \in U : B \notin B\}.$$

Зададимся вопросом: $A \in A$ (содержит ли множество A себя в качестве элемента)?

а) Предположим, что $A \in A$. Тогда множество A не удовлетворяет характеристическому свойству, которое определяет множество A. Следовательно, $A \notin A$. Противоречие.

б) Допустим, что $A \notin A$. Тогда множество A удовлетворяет характеристическому свойству, которое определяет множество A. Стало быть $A \in A$. Противоречие.

Рассмотрели все возможные случаи и в каждом из них получили противоречие. Множество A оказывается внутренне противоречивым и порождает парадокс.

С такими паталогическими ситуациями можно бороться двумя способами.

Первый способ принадлежит Георгу Кантору и приводит к так называемой «наивной» теории множеств. Идея проста и состоит в том, чтобы запретить множества, которые ведут к парадоксам. Для того, чтобы избежать конфликтов с существованием множества всех множеств и другими внутренне противоречивыми множествами, мы предполагаем, что у нас имеется некоторый заранее заготовленный класс «хороших» множеств. Мы работаем только с этими «хорошими» множествами. Более того, мы работаем с ними аккуратно и осторожно, производя с ними строго определённые действия, которые не выводят нас за границы класса «хороших» множеств.

Другой способ — аксиоматический. Суть этого способа состоит в том, что первичные понятия теории множеств описываются посредством списка аксиом, связывающих эти понятия друг с другом. Имеется несколько систем аксиом теории множеств: система аксиом Цермело-Френкеля, система аксиом Гёделя-Бернайса и др. Мы не будем рассматривать системы аксиом, поскольку это уведёт нас в глубь оснований математики, уведёт нас далеко от основного предмета изучения. Мы ограничимся рассмотрением «наивной» теорией множеств Кантора.

3. Третий способ задания множества — задание множества через другие с помощью теоретико-множественных операций. Мы уже отметили, что допущение о существовании множества всех множеств приводит к парадоксам. Чтобы избежать внутренне противоречивых множеств, будем считать, что все множества, которые рассматриваются в рамках какой-либо теории или задачи, являются подмножествами одного всеобъемлющего множества, называемого универсальным множеством.

Определение 2. *Универсальным множеством* называется множество U всех объектов рассматриваемых в данной теории или задаче.

Другими словами, универсальное множество — множество, объемлющее все объекты, рассматриваемые в данной теории или в данной конкретной задаче. Отметим, что универсальное множество не является раз и навсегда заданным. В каждой конкретной задаче, в каждом конкретном разделе математики есть своё универсальное множество, откуда берутся «изначальные» элементы. Например, в математическом анализе это множество вещественных чисел, в аналитической геометрии это множество точек пространства.

Из данных множеств можно получить новые множества с помощью теоретико-множественных операций.

Определение 3.

1. *Пересечением множеств* A и B называется множество $A \cap B$, которое состоит из элементов, принадлежащих обоим множествам A и B

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$

(множество x таких, что $x \in A$ и $x \in B$).

2. *Объединением множеств* A и B называется множество $A \cup B$, которое состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$

(множество x таких, что $x \in A$ или $x \in B$).

3. *Разностью множеств* A и B называется множество $A \setminus B$, которое состоит из элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B

$$A \setminus B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$$

(множество x таких, что $x \in A$ и $x \notin B$).

4. *Дополнением множества* A называется множество $\overline{A}$, которое состоит из элементов, не принадлежащих множеству A

$$\overline{A} = \{x \in U : x \notin A\}$$

(множество x таких, что $x \notin A$).

5. *Симметрической разностью множеств* A и B называется множество $A \triangle B$, которое состоит из элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A и B

$$A \triangle B = \{x \in U : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}.$$

Равенство множеств

Определение 4. Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. имеют место включения $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Другими словами, множества A и B равны, если каждый элемент множества A является элементом множества B и каждый элемент множества B является элементом множества A, т.е. имеет место следующая эквивалентность $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Если множества A и B равны, то мы пишем $A = B$.

Лемма 1. *Пустое множество единственно.*

Доказательство. Используем стандартный метод доказательства единственности объекта, который заключается в том, чтобы сначала предположить существование двух объектов, а затем показать, что они совпадают.

Допустим, что существуют два пустых множества $\varnothing_1$ и $\varnothing_2$. Пустое множество является подмножеством любого множества и в том числе пустого. Значит $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ и $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$. Следовательно, $\varnothing_1 = \varnothing_2$. $\square$

Отметим также, что единственность пустого множества можно доказать методом от противного. Допустим, что существует два неравных пустых множества. Поскольку множества не равны, то в одном из них есть элемент, которого нет в другом. Но в обоих множествах элементов нет. Противоречие.

В одном из учебников математики для младших школьников была задача, в которой требовалось привести несколько примеров пустых множеств. Вероятно, авторы имели в виду ответы типа «множество слонов в посудной лавке», «множество кошек в пустой комнате», «множество летающих крокодилов». Математики сказали бы, что это три разных способа задать одно и то же пустое множество.

Определение 5. Подмножество B множества A называется *собственным*, если $B \neq A$.

Вообще говоря, две разные серии теоретико-множественных операций могут давать одно и то же множество в независимости от того к каким множествам эти серии операций применяются. В таких случаях говорят о теоретико-множественных тождествах.

Теорема 1 (основные теоретико-множественные тождества)**.** *Для любых множеств A, B и C имеют место следующие равенства:*

1. *Законы коммутативности для объединения, пересечения и симметрической разности*
   а) $A \cup B = B \cup A$;
   б) $A \cap B = B \cap A$;
   в) $A \triangle B = B \triangle A$;
2. *Законы ассоциативности для объединения, пересечения и симметрической разности*
   а) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
   б) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
   в) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. *Законы дистрибутивности операций объединения и пересечения*
   а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. *Закон двойного дополнения*
   а) $\overline{\overline{A}} = A$.
5. *Законы де Моргана для множеств*
   а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
   б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
6. *Законы идемпотентности*
   а) $A \cup A = A$;
   б) $A \cap A = A$.
7. *Законы «нуля» и «единицы»*
   а) $A \cup \varnothing = A$;
   б) $A \cap U = A$;
   в) $A \cup U = U$;
   г) $A \cap \varnothing = \varnothing$.
8. *Законы исключённого третьего и непротиворечивости для множеств*
   а) $A \cup \overline{A} = U$;
   б) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
9. *Свойства разности*
   а) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
   б) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$.
10. *Свойства симметрической разности*
   а) $A \triangle \varnothing = A$;
   б) $A \triangle A = \varnothing$;
   в) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
11. *Законы поглощения для множеств*
   а) $A \cup (A \cap B) = A$;
   б) $A \cap (A \cup B) = A$.
12. *Законы склеивания для множеств*
   а) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;
   б) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$;
13. *Законы обобщённого склеивания для множеств*
   а) $(A \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) = (A \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) \cap (A \cup B)$;
   б) $(A \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B)$.

Мы не будем доказывать все приведённые здесь тождества, а лишь некоторые из них для того, чтобы продемонстрировать основные методы доказательства.

Докажем тождество 1a) по определению равенства двух множеств. По определению, два множества равны, если каждое из множеств является подмножеством другого. Таким образом, нам достаточно показать справедливость двух включений

$$A \cup B \subseteq B \cup A, \tag{1}$$
$$B \cup A \subseteq A \cup B. \tag{2}$$

Покажем включение (1), используя свойство коммутативности дизъюнкции:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in A \Rightarrow x \in B \cup A.$$

Покажем обратное включение (2)

$$x \in B \cup A \Rightarrow x \in B \vee x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B.$$

Докажем тождество 3*б*), используя определение равенства множеств. Нам достаточно показать два включения — включение множества, стоящего слева от знака $=$, в множество, стоящее справа от знака $=$, а также включение множества, стоящего справа от знака $=$, в множество, стоящее слева от знака $=$:

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{3}$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C). \tag{4}$$

Покажем включение (3), используя свойство дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Rightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Покажем обратное включение (4)

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) &\Rightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \\ &\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C). \end{aligned}$$

Докажем тождество 11*a*), используя равносильные преобразования. Идея состоит в том, чтобы одну из двух частей тождества равносильными преобразованиями привести к виду другой части.

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A.$$

Докажем тождество 11*б*), используя равносильные преобразования

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) = A \cup (\varnothing \cap B) = A \cup \varnothing = A.$$

Докажем тождество 12*a*)

$$A = A \cup \varnothing = A \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}).$$

Докажем тождество 12*б*)

$$A = A \cap U = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$

Докажем тождество 13*a*)

$$\begin{aligned}
(A \cup C) \;\cap\; & (B \cup \overline{C}) \cap (A \cup B) = (A \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) \cap (A \cup B \cup \varnothing) = \\
= \;& (A \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) \cap (A \cup B \cup (C \cap \overline{C})) = \\
= \;& (A \cup C) \cap (B \cup \overline{C}) \cap (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup \overline{C}) = \\
= \;& ((A \cup C) \cup (\varnothing \cap B)) \cap \big((B \cup \overline{C}) \cup (\varnothing \cap A)\big) = \\
= \;& ((A \cup C) \cup \varnothing) \cap \big((B \cup \overline{C}) \cup \varnothing\big) = \\
= \;& (A \cup C) \cap (B \cup \overline{C}).
\end{aligned}$$

Докажем тождество 13*б*)

$$\begin{aligned}
(A \cap C) \;\cup\; & (B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B) = (A \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap U) = \\
= \;& (A \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap (C \cup \overline{C})) = \\
= \;& (A \cap C) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = \\
= \;& ((A \cap C) \cap (U \cup B)) \cup \big((B \cap \overline{C}) \cap (U \cup A)\big) = \\
= \;& ((A \cap C) \cap U) \cup \big((B \cap \overline{C}) \cap U\big) = (A \cap C) \cup (B \cap \overline{C}).
\end{aligned}$$