② $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1)\cdot(\bar{x}_1 \vee x_3)\cdot(x_1)$ – не КНФ

③ $f(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$ – СКНФ

Теорема: (о разложении булевой функции в конъюнктивную форму от одной переменной)

Произвольную булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно представить:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, \dots, x_n))\cdot(\bar{x}_1 \vee f(1, x_2, \dots, x_n))$$

◇ по аналогии

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{\sigma_1 \in \{0,1\}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee f(\sigma_1, x_2, \dots, x_n))$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{\sigma_1, \dots, \sigma_k} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_k^{\bar{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n))$$

разложение по k переменным.

Если $k = n$: $f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\sigma_1 \dots \sigma_n} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \vee \underbrace{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}_{\text{если}=1/0})$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$$ – СКНФ ⊠

Теорема: (о существовании и единственности представления булевой ф. в виде СКНФ)

Произвольную булеву функцию, отличную от константы 1, единственным образом можно представить в виде СКНФ.

◇ принимаем без доказательства ⊠

II случай: Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

Метод 1: Строим СДНФ функции f

1) заменим в СДНФ все $\vee$ на $\oplus$
2) если $\overline{x_i}$ в формуле, то заменим $\overline{x_i}$ на $x_i \oplus 1$
3) раскрываем скобки и приводим подобные

Пр: $x_1 \to x_2 = (x_1 \cdot x_2) \vee (\overline{x_1} \cdot x_2) \vee (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) = [\text{меняем}] =$
$= x_1 \cdot x_2 \oplus \overline{x_1} \cdot x_2 \oplus \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = x_1 \cdot x_2 \oplus (x_1 \oplus 1) \cdot x_2 \oplus (x_1 \oplus 1) \cdot$
$\cdot (x_2 \oplus 1) = \cancel{x_1 x_2} \oplus \cancel{x_1 x_2} \oplus \cancel{x_2} \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus \cancel{x_2} \oplus 1 =$
$= x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus 1.$

Метод 2 построения полинома Жегалкина (метод неопределенных коэф.):

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$f(x_1, x_2) = C_{00} \cdot 1 \oplus C_{10} \cdot x_1 \oplus C_{01} x_2 \oplus C_{11} x_1 x_2$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 0: \ 0 = C_{00} \\ x_1 = 0,\ x_2 = 1: \ 1 = C_{00} \oplus C_{01} \\ x_1 = 1,\ x_2 = 0: \ 0 = C_{00} \oplus C_{10} \\ x_1 = 1,\ x_2 = 1: \ 1 = C_{00} \oplus C_{10} \oplus C_{01} \oplus C_{11} \end{cases}$$

Решаем систему и получаем: $C_{00} = 0,\ C_{01} = 1,\ C_{10} = 0,\ C_{11} = $

$f(x_1, x_2) = x_2$ – полином Жегалкина

Метод 3 построение полинома Жегалкина (метод деления таблицы пополам):

x_1	x_2	x_3	f				
0	0	0	0	0	0	0	$\leftarrow C_{000}$
0	0	1	1	1	1	1	$\leftarrow C_{001}$
0	1	0	1	1	1	1	$\leftarrow C_{010}$
0	1	1	0	0	1	0	$\leftarrow C_{011}$
1	0	0	1	1	1	1	$\leftarrow C_{100}$
1	0	1	1	0	0	1	$\leftarrow C_{101}$
1	1	0	0	1	0	0	$\leftarrow C_{110}$
1	1	1	0	0	0	0	$\leftarrow C_{111}$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 \cdot x_3$ – полином Жегалкина

Столбец значений ф. делим пополам: верхнюю часть переписываем как есть, а нижнюю соответственно складываем по модулю 2 с верхней, и значения записываем в полученный столбец. Продолжаем, пока „столбец" не станет = одному значению.

→ Метод 4: построение полинома Жегалкина (матричный метод)

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\omega(f)$ – столбец значений

нужно построить последовательность матриц $S_0, S_1, \dots, S_n$

$S_0 = (1)$ ← всегда такая ; $S_i = \left(\begin{array}{c|c} S_{i-1} & 0 \\ \hline S_{i-1} & S_{i-1} \end{array}\right)$

Матрицу получаем по записанному принципу. Затем перемножаем со столбцом значений булев ф.

$S_n \cdot \omega(f) = [\ ]$ ← столбец коэф. в полиноме Жегалкина

→ Метод 5 построения полинома Жегалкина (метод треугольника):

f, $\omega(f) = 01101110$

c_{000} – 0 1 1 0 1 1 1 0
c_{001} – 1 0 1 1 0 0 1
c_{010} – 1 1 0 1 0 1
c_{011} – 0 1 1 1 1
c_{100} ← 1 0 0 0
c_{101} ← 1 0 0
c_{110} ← 1 0
c_{011} ← 1

Идея: берем значения ф., и заполняем треугольник, складывая попарно соседние значения по модулю 2, а результат значения записываем ниже. Продолжаем вычисления, пока в строке не останется 1 цифра

Полином Жегалкина МЕТОД неопределенных коэффициентов.

Опубликовал Wikimatik , 24 Апреля 2017 по предмету "Дискретная математика"

Найдем полином Жегалкина для ф. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2 \vee x_3) \to \overline{x_2}$, используя метод неопред. коэф.

Поделиться

Для этого сначала необходимо построить таблицу истинности данной булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$.

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	$x_1x_2 \vee x_3$	$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2 \vee x_3) \to \bar{x}_2$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Общий вид полинома Жегалкина для функции $f(x_1, x_2, x_3)$ трех переменных x_1, x_2, x_3:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \bigoplus a_1x_1 \bigoplus a_2x_2 \bigoplus a_3x_3 \bigoplus a_{12}x_1x_2 \bigoplus a_{13}x_1x_3 \bigoplus a_{23}x_2x_3 \bigoplus a_{123}x_1x_2x_3.$$

Последовательно подставляем наборы значений переменных и находим коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{123}$.

$f(0, 0, 0) = a_0 = 1;$

$f(0, 0, 1) = a_0 \bigoplus a_3 = 1 \Rightarrow 1 \bigoplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0;$

$f(0, 1, 0) = a_0 \bigoplus a_2 = 1 \Rightarrow 1 \bigoplus a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0;$

$f(0, 1, 1) = a_0 \bigoplus a_2 \bigoplus a_3 \bigoplus a_{23} = 0 \Rightarrow 1 \bigoplus 0 \bigoplus 0 \bigoplus a_{23} = 0 \Rightarrow 1 \bigoplus a_{23} = 0 \Rightarrow a_{23} = 1;$

$f(1, 0, 0) = a_0 \bigoplus a_1 = 1 \Rightarrow 1 \bigoplus a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0.$

$f(1, 0, 1) = a_0 \bigoplus a_1 \bigoplus a_3 \bigoplus a_{13} = 1 \Rightarrow 1 \bigoplus 0 \bigoplus 0 \bigoplus a_{13} = 1 \Rightarrow 1 \bigoplus a_{13} = 1 \Rightarrow a_{13} = 0;$

$f(1, 1, 0) = a_0 \bigoplus a_1 \bigoplus a_2 \bigoplus a_{12} = 0 \Rightarrow 1 \bigoplus 0 \bigoplus 0 \bigoplus a_{12} = 0 \Rightarrow 1 \bigoplus a_{12} = 0 \Rightarrow a_{12} = 1;$

$f(1, 1, 1) = a_0 \bigoplus a_1 \bigoplus a_2 \bigoplus a_3 \bigoplus a_{12} \bigoplus a_{13} \bigoplus a_{23} \bigoplus a_{123} = 0 \Rightarrow 1 \bigoplus 0 \bigoplus 0 \bigoplus 0 \bigoplus 1 \bigoplus 0 \bigoplus 1 \bigoplus a_{123} = 0 \Rightarrow 1 \bigoplus a_{123} = 0 \Rightarrow a_{123} = 1;$

Подставляя найденные коэффициенты, получаем полином Жегалкина:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \bigoplus x_1x_2 \bigoplus x_2x_3 \bigoplus x_1x_2x_3.$$

Замыкание системы булевых функций. Полнота

P_2 - множ. всех булевых ф.

$F \subseteq P_2$

Замыканием системы булевых ф. F назыв. множество булевых ф., реализуемых булевыми формулами над множ. F.

Др. словами: замыкание системы булевых ф $[F]$ это множ. булевых ф., которые получаются из ф. системы F операциями замены переменных и суперпозиции ф.

Свойства замыкания:

1. $F \subseteq [F]$ -
2. $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow [F_1] \subseteq [F_2]$

$f \in \quad f \in$

Система булевых ф. F назыв. полной, если замыкание системы $[F]$ = множеству всех булев. ф. ($[F] = P_2$)

Др. словами: система булевых ф. F полна, если с помощью замены переменной и суперпозиции ф., из функций системы F можно получить любую булев. ф.

Лемма:

Пусть $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ и $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_m, \ldots\}$. Если система F полна и каждая ф. $f_i(\,)$ выразима через ф. системы G, то G полная система.

◇ Схема доказательства:

Пусть f - произвольная булева ф. ; $f = \mathcal{A}$

$$f = \underbrace{\mathcal{A}(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)}_{\text{булева формула над } F}$$

$$f_i = \underbrace{\mathcal{B}_i(g_1, g_2, \ldots, g_n)}_{\text{булева формула над } G}, \text{ для } \forall i$$

$$f = \underbrace{\mathcal{A}(\mathcal{B}_1(g_1, g_2, \ldots, g_n), B_2(g_1, g_2, \ldots, g_n), \ldots, B_n(g_1, \ldots, g_n))}_{\text{булева формула над множ. } G}$$

$\boxtimes$

Пр ① $F=\{\bar{x}_1,\ x_1\vee x_2,\ x_1\cdot x_2\}$ - полная система.

② $G_1=\{\bar{x}_1,\ x_1\vee x_2\}$ - полная система

$x_1\cdot x_2 = \overline{\bar{x}_1\vee \bar{x}_2}$

③ $G_2=\{\bar{x}_1,\ x_1\cdot x_2\}$ - полная система

$x_1\vee x_2 = \overline{\bar{x}_1\cdot \bar{x}_2}$

④ $G_3=\{x_1 | x_2\}$ - полная ф.

$\bar{x}_1 = x_1 | x_1$

$x_1\cdot x_2 = ((x_1|x_2)|(x_1|x_2))$

$\overline{x_1 | x_2} = \overline{\overline{x_1\cdot x_2}} =$

$x_1 | x_2 = \overline{x_1\cdot x_1} = \bar{x}_1$

$\overline{x_1 | x_2} = \underbrace{x_1\cdot x_2}_{y} =$

$= \bar{y} = y|y = (x_1|x_2)|(x_1|x_2)$

Замкнутые классы булевых функций

Опр: система булевых ф. F называется замкнутым классом булевых ф., если замыкание системы $[F]$ совпадает с F

$$[F]=F$$

Др. словами: система булевых ф. F - это замкнутый класс, если операциями замены переменной и суперпозиции ф. из ф. системы F можно получить только ф. ей принадлежащие (и никакие другие)

→ Замечательные замкнутые классы: (T_0, T_1, L, S, M):

① T_0 - класс булевых ф., сохраняющие 0

$$T_0=\{f(x_1,x_2,\dots,x_n) : f(0,0,\dots,0)=0\}$$

$0;\ x;\ x_1\vee x_2;\ x_1\cdot x_2;\ x_1\oplus x_2 \quad \in T_0$

$1;\ x_1\to x_2;\ x_1\sim x_2 \quad \notin T_0$

Лемма:

$$|T_0^{(n)}| = 2^{2^n-1}$$

◇

x_1	x_2	...	x_n	f	
0	0	...	0	0	1
0	0	...	1		2
...	...	...	...		
1	1	...	1		2

$$\underbrace{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^n-1} = 2^{2^n-1}$$

$\boxtimes$

Лемма:

класс T_0 - замкнут

◇ $x \in T_0$; $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot) \in T_0$

Хотим показать, что $\varphi(\cdot) = f(f_1(), f_2(), \ldots, f_n()) \in T_0$

$$\varphi(0,0,\ldots,0) = f(\underbrace{f_1(0,\ldots,0)}_{0}, \underbrace{f_2(0,\ldots,0)}_{0}, \ldots, \underbrace{f_n(0,\ldots,0)}_{0}) =$$
$$= f(0,0,\ldots,0) = 0 \Rightarrow \varphi(\cdot) \in T_0$$

$\boxtimes$

2. T_1 - класс булевых ф. сохраняющих 1.

$T_1 = \{ f(x_1, \ldots, x_n) : f(1,1,\ldots,1) = 1 \}$

0, $\bar{x}$, $x_1 \oplus x_2$ $\notin T_1$

1, x, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \cdot x_2$, $x_1 \to x_2$, $x_1 \sim x_2$ $\in T_1$

Лемма:

$$|T_1^{(n)}| = 2^{2^n-1}$$

Лемма:

T_1 замкнут

3. L - класс линейных булевых функций

$L = \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n \}$

$\bar{x}$ $0, 1$; x ; $x_1 \oplus x_2$ $\in L$

$x_1 \vee x_2$; $x_1 \cdot x_2$ $\notin L$ ф. не больше 1 сомножителя

Лемма

$$|L^{(n)}| = 2^{n+1}$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \boxed{\alpha_0} \oplus \boxed{\alpha_1} x_1 \oplus \boxed{\alpha_2} x_2 \oplus \dots \oplus \boxed{\alpha_n} x_n$

$\underset{2}{\alpha_0}\quad \underset{2}{\alpha_1}\quad \underset{2}{\alpha_2}\quad \underset{2}{\alpha_n}$

$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n+1}$

Лемма: L замкнут.

4 S - класс самодвойственных булевых ф.

$f(x_1, \dots, x_n)$ - булева ф.

$f^*(x_1, \dots, x_n)$ - булевая ф., двойственная булевой ф. f.

$\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$

$\rightarrow f \rightarrow f^* \rightarrow f^{**}$

$f^{**}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f^*}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \overline{\overline{f}}(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \dots, \overline{\overline{x}}_n) =$
$= f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\rightarrow$ Рассмотрим $f = x_1 \vee x_2$; $f^* = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} = x_1 \cdot x_2$

$\rightarrow$

x_1	x_2	..	x_{n-1}	x_n	f	f^*
0	0	...	0	0	f_0	$\overline{f}_{2^n-1}$
0	0	...	0	1	f_1	$\overline{f}_{2^n-2}$
...					...	⋮
середина 0	1	...	1	1	$f_{2^{n-1}-1}$	
1	0	..	0	0	$f_{2^{n-1}}$	
...						
1	1	...	1	0	f_{2^n-2}	
1	1	...	1	1	f_{2^n-1}	

$f^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \overline{f}(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_n)$

Лемма (о ф. двойственной суперпозиции):

Если ф. $\varphi(\ )$ получается суперпозицией ф. $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ и функций $f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p_1})$, $f_2(x_{21}, \dots, x_{2p_2})$, ..., $f_n(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np_n})$, то $\varphi^*(\ ) = f^*(f_1^*(\ ), f_2^*(\ ), \dots, f_n^*(\ ))$
(функция, двойственная суперпозиции, - суперпозиция двойственной ф.)

◇ Пусть $\varphi(\ ) = f(f_1(x_{11},\dots,x_{1p_1}), f_2(x_{21},\dots,x_{2p_2}),\dots,f_n(x_{n1},\dots$

тогда $\varphi^*(\ ) = \overline{f}((\overline{f_1}(\overline{x_{11}},\overline{x_{12}},\dots,\overline{x_{1p_1}}), \overline{f_2}(\overline{x_{21}},\overline{x_{22}},\dots,\overline{x_{2p_2}}),\dots,\overline{f_n}(\overline{x_{n1}},\overline{x_{n2}},\dots,\overline{x_{np_n}})) = \overline{f}(\overline{\overline{f_1}(\overline{x_{12}},\dots,\overline{x_{1p}})}, \overline{\overline{f_2}(\overline{x_{21}},\dots,\overline{x_{2p_2}})},\dots,\overline{\overline{f_n}(\dots)})$

$$= \overline{f}(\underbrace{f_1^*(\ )}_{y_1}, \underbrace{f_2^*(\ )}_{y_2},\dots,\underbrace{f_n^*(\ )}_{y_n}) = f^*(f_1^*(\ ), f_2^*(\ ),\dots)$$ ▯

Лемма (принцип двойственности):

Если булева ф. f реализуется булевой формулой Ф, состоящей из символов функций $f_1(\ ), f_2(\ ),\dots$, то f^* реализуется булевой формулой, которая получается из Ф заменой каждого символа каждой ф. f_i на символ ф. $f_i^*(\ )$

→ $f(x_1, x_2,\dots,x_n) \in S$ - самодвойственная, если $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = f^*(x_1,x_2,\dots,x_n)$

Пр: ① $f(x) = x \in S$
$f^*(x) = \overline{\overline{x}} = x$

② $f(x) = x_1 \vee x_2 \notin S$
$f^*(x) = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} = x_1 \cdot x_2$

$$f(x_1, x_2,\dots,x_n) = \overline{f}(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n})$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x_1, x_2,\dots,x_n) \neq f(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n})$$

Функция самодвойственна $\Longleftrightarrow$ она на противоположных наборах значений переменных принимает правные значения.

Лемма:

Кол-во самодвойственных ф. $|S^{(n)}| = 2^{2^{n-1}}$

Пр

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

4) Лемма:
класс S - замкнут

◇ $x \in S$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$

$f_1(), f_2(), f_3(), \dots, f_n() \in S$

построим суперпозицию ф. $\varphi()$:

$\varphi() = f(f_1(), f_2(), \dots, f_n())$

Докажем, что $\varphi()$ - двойственная ф.:

$\varphi^*() = f^*(f_1^*(), f_2^*(), \dots, f_n^*())$

$f^* = f$, $f_1^* = f_1$, $f_2^* = f_2$, $f_n^* = f_n$, т.к. $\in S$

$\varphi^*() = f(f_1(), f_2(), \dots, f_n()) = \varphi()$ $\boxtimes$

5 M - класс монотонных булев. ф.

Опр: Булева ф. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ назыв. монотонной, если для $\forall$ двух наборов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \{0, 1\}$ имеет место

$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \leq \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \Rightarrow f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$

$0, 1 \in M$

x	x
0	0
1	1

$\in M$

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

$\notin M$

$|M^{(1)}| = 3$, $|M^{(2)}| = 6$, $|M^{(3)}| = 20$

кол-во бул. ф. от 1 переменной; от 2-ух перен.; от 3-ёх переменных

$|M^{(4)}| = 168$ (→ Дедекинд (1897г.))

$|M^{(5)}| = 7581$, $|M^{(6)}| = 7828354$
(Чёрч, Чорд (1940-е гг.))

Лемма:
класс М-замкнут

◇ по аналогии ☒

→ **Методы определения монотонной ф.:**

1.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

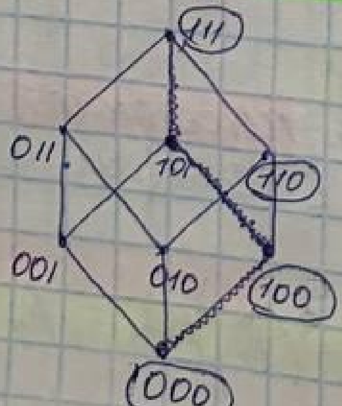
$1001 \leq 1111$

$10 \nleq 01$ $\quad 11 \leq 11$

ф. не монотонна!

$\begin{pmatrix} 10 \nleq 01 \\ 01 \nleq 10 \end{pmatrix}$ – несравнимые наборы

2. **Графическая представлении булев. ф.:**



на ~ = 1101 – немонотонная ф.

не обведен

обведен

Критерий полноты

Лемма (основная лемма крит. полноты): Если система булевых ф. F содержит булеву ф. $f_{\bar 0} \notin T_0$, $f_{\bar 1} \notin T_1$, $f_{\bar S} \notin S$, $f_{\bar M} \notin M$, то из ф. этой системы операциями замена переменной и суперпозиция ф. можно получить $0, 1, \overline{x}$

◊ $f_{\bar 0}(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin T_0$, $f_{\bar 0}(0, 0, \dots, 0) = 1$

Сл. 1: $f_{\bar 0}(1, 1, \dots, 1) = 0$
Сл. 2: $f_{\bar 0}(1, 1, \dots, 1) = 1$

Сл. 1: Пусть $f_{\bar 0}(1, 1, \dots, 1) = 0$

$$\varphi(x) = f_{\bar 0}(x, x, \dots, x) \quad ; \quad \left.\begin{aligned} \varphi(0) &= f_{\bar 0}(0, 0, \dots, 0) = 1 \\ \varphi(1) &= f_{\bar 0}(1, 1, \dots, 1) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \overline{x}$$

Лемма (о несамодвойственной ф): Если $f_{\bar S}(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin S$, то из неё с помощью замены переменной и суперпозиции с $\overline{x}$ можно получить константу.

◊ $f_{\bar S}(x_1, x_2, \dots x_n) \in S \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}^n$

$$f_{\bar S}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f_{\bar S}(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n})$$

$$x_i = \begin{cases} x, \text{ если } \alpha_i = 1 \\ \overline{x}, \text{ если } \alpha_i = 0 \end{cases} \quad , \quad x_i = x^{\alpha_i}, \ \underline{\varphi(x) = f_{\bar S}(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n})}$$

Докажем, что $\varphi(x)$ – константа:

$$\varphi(0) = f_{\bar S}(\underset{\overline{\alpha_1}}{0^{\alpha_1}}, \underset{\overline{\alpha_2}}{0^{\alpha_2}}, \dots, \underset{\overline{\alpha_n}}{0^{\alpha_n}}) = \underline{f_{\bar S}(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n})} =$$

$$= \underline{f_{\bar S}(\underset{1^{\alpha_1}}{\alpha_1}, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} = f_{\bar S}(1^{\alpha_1}, 1^{\alpha_2}, \dots, 1^{\alpha_n}) = \varphi(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) - \text{константа}$$

⊠

Имеем $\varphi(x) = \overline{x}$, $\psi(x) =$ константа

Возьмем суперпозицию $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\varphi(\psi(x)) = \overline{\psi(x)} \ - \text{вторая константа.}$$

$f_{\bar{0}}(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

Сл. 2: Пусть $f_{\bar{0}}$ — несохраняющую 0.

Возьмем ф. $f_{\bar{0}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow \psi_1(x) = f_{\bar{0}}(x, x, \ldots, x)$

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1(0) = f_{\bar{0}}(0, 0, \ldots, 0) = 1 \\ \psi_1(1) = f_{\bar{0}}(1, 1, \ldots, 1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \psi_1(x) \text{ — константа } 1.$$

$f_{\bar{T}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin T_1$; $\psi_0(x) = f_{\bar{T}}(\psi_1(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_1(x))$

$\psi_0(0) = f_{\bar{T}}(\underbrace{\psi_1(0), \psi_1(0), \ldots, \psi_1(0)}_{1}) = f_{\bar{T}}(1, 1, \ldots, 1) = f_{\bar{T}}(1, 1, \ldots, 1) = 0$

Покажем, что и в 1, тоже принимает 0:

$\psi_0(1) = f_{\bar{T}}(\underbrace{\psi_1(1)}_{1}, \underbrace{\psi_1(1)}_{1}, \ldots, \underbrace{\psi_1(1)}_{1}) = f_{\bar{T}}(1, 1, \ldots, 1) = 0$

$\Rightarrow \psi_0(x)$ — константа 0.

Лемма (о немонотонной ф.):

Если ф. $f_{\bar{M}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ немонотонна, то из нее с помощью замены переменной и суперпозиций с констан 0, 1, — можно получить $\bar{x}$.

◇ $f_{\bar{M}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — немонотонная ($\notin M$) $\Rightarrow \exists\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \in \{0,1\}^n$ и $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \in \{0,1\}^n$; $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \leq \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ и

$\underbrace{f_{\bar{M}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}_{1} > \underbrace{f_{\bar{M}}(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)}_{0}$

Зафиксируем позиции:

α_i	0	0	1
β_i	0	1	1

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i = \beta_i = 0 \\ 1, & \text{если } \alpha_i = \beta_i = 1 \\ x, & \text{если } \alpha_i = 0, \beta_i = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Обозначим эту переменную: $\varphi(x)$ — это ф., которая получается из $f_{\bar{M}}$ с помощью $(*)$

Хотим показать, что $\varphi(x)$ — отрицание

$x = 0$:

$$(*) \Rightarrow x_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i = 0 \\ 1, & \text{если } \alpha_i = 1 \end{cases} \Rightarrow x_i = \alpha_i$$

$\varphi(0) = f_{\bar{M}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$

$x=1$: $(*) \Rightarrow x_i = \begin{cases} 0, \text{ если } \beta_i = 0 \\ 1, \text{ если } \beta_i = 1 \end{cases} \Rightarrow x_i = \beta_i$

$\varphi(1) = f_{\overline{H}}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = 0$ $\boxed{\times}$

Лемма (о нелинейной ф.)

Если ф. $f_{\bar{L}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin L$, то из нее с помощью только переменных и суперпозиции с $0, 1$ и $\bar{x}$ можно получить $x_1 \cdot x_2$ или $\overline{x_1 \cdot x_2}$

◇ Рассмотрим полином Жегалкина ф. $f_{\bar{L}}$

Не теряя общности, можем полагать, что в полиноме есть x_1 и x_2.

$$f_{\bar{L}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{((x_1 \cdot x_2 \cdot \dots) \oplus \dots \oplus (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots))}_{\text{содержат } x_1, x_2} \oplus$$

$$\oplus \underbrace{((x_1 \cdot \dots) \oplus \dots \oplus (x_1 \cdot \dots))}_{\text{содержат } x_1, \text{ не содержат } x_2} \oplus \underbrace{((x_2 \cdot \dots) \oplus \dots \oplus (x_2 \cdot \dots))}_{\text{содерж. } x_2, \text{ не содержат } x_1} \oplus \underbrace{((\dots) \oplus \dots \oplus (\dots))}_{\text{не содержат } x_1, x_2}$$

Вынесем из первой пары скобок $x_1 \cdot x_2$:

$$f_{\bar{L}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot f_1(x_3, x_4, \dots, x_n) \oplus x_1 f_2(x_3, x_4, \dots, x_n) \oplus$$
$$\oplus x_2 f_3(x_3, x_4, \dots, x_n) \oplus f_4(x_3, x_4, \dots, x_n)$$

$f_{\bar{L}} \notin L \Rightarrow f_1(x_3, x_4, \dots, x_n)$ — не конст. $0 \Rightarrow \exists \ \underset{x_3}{\alpha_3} \ \underset{x_4}{\alpha_4} \dots \underset{x_n}{\alpha_n}$:

$f_1(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) = 1$.

$$f(x_1, x_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \underbrace{f_1(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_4)}_{=1} \oplus x_1 \underbrace{f_2(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)}_{\alpha} \oplus$$
$$\oplus x_2 \underbrace{f_3(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)}_{\beta} \oplus \underbrace{f_4(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n)}_{\gamma}$$

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma$$

$$\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) = (x_1 \oplus \beta) \cdot (x_2 \oplus \alpha) \oplus$$
$$\oplus \alpha(x_1 \oplus \beta) \oplus \beta(x_2 \oplus \alpha) \oplus \gamma = x_1 x_2 \oplus \cancel{\alpha x_1} \oplus \cancel{\beta x_2} \oplus \alpha\beta \oplus$$
$$\oplus \cancel{\alpha x_1} \oplus \cancel{\alpha\beta} \oplus \cancel{\beta x_2} \oplus \alpha\beta \oplus \gamma = x_1 x_2 \oplus \alpha\beta \oplus \gamma = \begin{cases} x_1 x_2, \text{ если } \alpha\beta \oplus \gamma = 0 \\ x_1 x_2 \oplus 1 = \overline{x_1 x_2}, \text{ если } \alpha\beta \oplus \gamma = 1 \end{cases}$$ $\boxed{\times}$

Эмиль Леон Пост (1897–1954)

Теорема (кр. полноты; Пост, 1921)

Для того, чтобы система булевых ф. F была полной $\Leftrightarrow$ чтобы она целиком не содержалась ни в одном из 5 замечательных замкнутых классов T_0, T_1, L, S, M и т.е. для каждого замечательного замкнутого класса среди функций системы F есть функция этому классу не принадлежащая.

◇ $\Rightarrow$ Пусть F – полная система, т.е. замыкание системы F совпадает с множ. всех булевых ф. ($[F]=P_2$)

От противного:

Допустим, что есть один из 5 замечат. замкнутых классов, который обозначим K:
$$F \subseteq K \Rightarrow \underbrace{[F]}_{P_2} \subseteq \underbrace{[K]}_{K} \Rightarrow P_2 \subseteq K \text{ – противоречие}$$

$\Leftarrow$ Пусть F не содержится целиком ни в одном из 5 замеч. замкнут. классов.

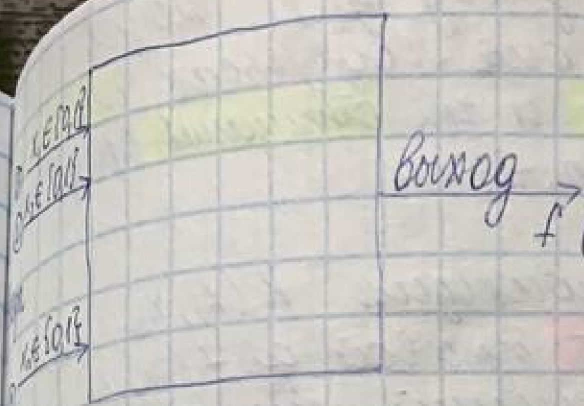
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} F \ni f_0 \notin T_0 \\ F \ni f_1 \notin T_1 \\ F \ni f_S \notin S \\ F \ni f_M \in M \end{array}\right\} \Rightarrow \text{[по основной лемме кр. полноты]: } 0, 1, \bar{x} \\ F \ni f_L \in L \end{array}\right\} \Rightarrow$$

[по лемме о нелинейной ф.] $= x_1 \cdot x_2,\ \overline{x_1 \cdot x_2}$

$\{x_1 \cdot x_2, \bar{x}\}$ – полная система $\Rightarrow F$ – полная система $\boxtimes$

Минимизация булевых функций в классе ДНФ

Дискретный преобразователь сигналов



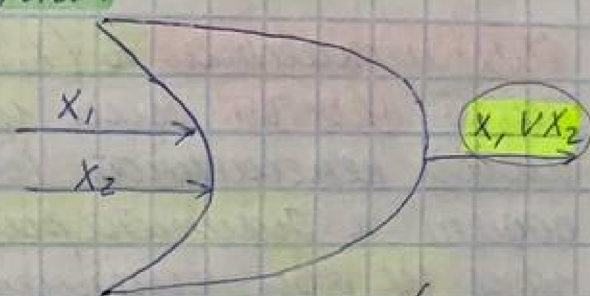
булева функция

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}$

Функциональные элементы – это дискретные преобразователи, реализующие элементарные булевы ф.

Пр: функциональных элементов:

инвектор



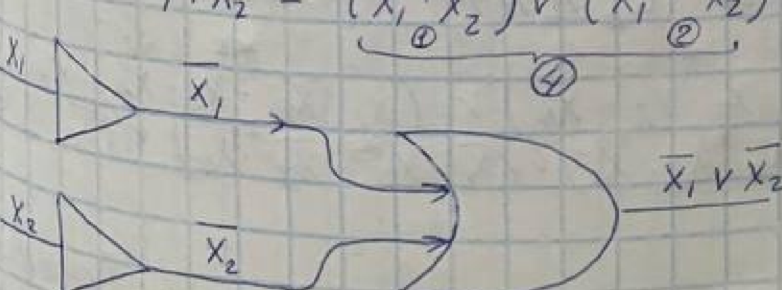
дизъюнктор.

конъюнктор.

Пр: Рассмотрим булеву ф. $f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$

$$x_1 \mid x_2 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 = \text{ДНФ}$$

$$x_1 \mid x_2 = \underbrace{(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2)_{1} \vee (\overline{x}_1 \cdot x_2)_{2}}_{4} \vee (x_1 \cdot \overline{x}_2)_{3} - \text{ДНФ}$$



– схема из функциональных элементов, реализующая штрих Шеффера

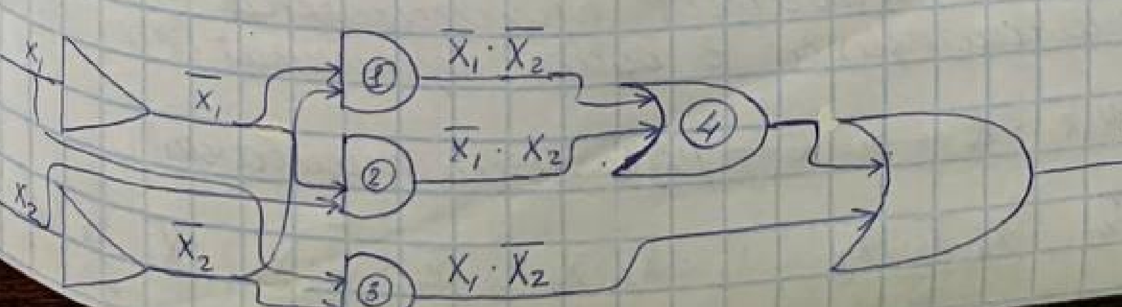


схема из функц. элем., реализующая штрих Шеффера

Опр: ДНФ, реализующая булеву ф. f, назыв. минимальной, если она содержит минимальное число переменных и их отрицаний среди всех ДНФ, реализующих ф. f.

Опр: Элементарная конъюнкция $k(x_1, x_2, .., x_n)$ назыв. импликантой булевой ф. $f(x_1, x_2, .., x_n)$, если на $\forall$ наборе значений переменных, на которой элемент конъюнкции k обращается в 1, булева ф. f также принимает значение 1, т.е. $k(x_1, x_2, .., x_n) = 1 \Rightarrow f(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) = 1$.

Опр: Импликанта $k(x_1, x_2, .., x_n)$ булевой ф. $f(x_1, x_2, ..)$ назыв. простой, если удаление из импликанты любой переменной (с отрицанием или без) приводят к элементарной конъюнкции, которая уже не явл. импликантой булевой ф. f.

Опр: Дизъюнкция всех простых импликант булевой ф. f назыв. сокращенной дизъюнктивной нормальной формой булевой ф. f. (C_k ДНФ)

Уиллард Куайн (1908-2000)

Задана булева ф. f в виде СДНФ
Найти: минимальную ДНФ ф. f.
I этап: находим СДНФ → C_kДНФ
2 этап: преобразовываем C_kДНФ → МДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_3) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}) \vee (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4) \vee (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4) \vee (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}) \vee (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) \vee (\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4) \vee (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4)$$

Этап I: Операция склеивания применяется к конъюнкциям, отличающихся в одной переменной (отриц. / без отриц.)

$$x_i \cdot k \vee \overline{x_i} \cdot k \longrightarrow k \leftarrow \text{результат склеивания.}$$

$$\underbrace{x_1 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}}_{\text{результ. } *},\ \underbrace{x_1\ \overline{x_2} \cdot x_3}_{\text{результ. } *1},\ \underbrace{\overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4}_{*2},\ \underbrace{\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_4}_{*3},\ \underbrace{\overline{x_1} \cdot x_3\ x_4}_{*4}$$

$\overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$

Произв

$\overline{x_1}\ x_4$,

Простые
(не пол

II этап:

$\overline{x_1}\ x_3\ \overline{x_4}$ ∨

$x_1\ \overline{x_2}\ x_3$ ∨

$\overline{x_2}\ x_3\ x_4$

$\overline{x_1}\ x_4$ ∨

Выдели
покрывают
строк и

Нужно
1)
2)

$(x_1 \cdot x_3$

$\underbrace{\overline{x_1}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4^{*1}}_{*5}$, $\underbrace{\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_4^{*}}_{*6}$.

Производим процесс склейки с полученными конъюнкциями.

$\underbrace{\overline{x_1}\,x_4}_{*}$, $\underbrace{\overline{x_1}\,x_4}_{*1}$

Простые импликанты ф. f: $x_1\, x_3\, \overline{x_4}$, $x_1\overline{x_2}\, x_3$, $\overline{x_2}\, x_3\, x_4$
(не помеченные *)
а также $\overline{x_1}\, x_4$ (те, что не клеятся).

II этап:	$x_1x_2x_3\overline{x_4}$	$x_1\overline{x_2}x_3x_4$	$x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$	$\overline{x_1}x_2x_3x_4$	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4$	$\overline{x_1}\overline{x_2}x_3x_4$	$\overline{x_1}\overline{x_2}\overline{x_3}x_4$
③ $x_1x_3\overline{x_4}$ √	*		*				
③ $x_1\overline{x_2}x_3$ √		*	*				
③ $\overline{x_2}x_3x_4$		*				*	
② $\overline{x_1}x_4$ √				*	*	*	*

Выделим строки в данной таблице. Выделенные строки покрывают j-ый столбец, если на пересечении выделенных строк и j-ого столбца есть хотя бы 1 *.

Нужно выбрать строки, которые:

1) покрывают все столбцы
2) сумма рангов простых импликант, соответствующих выбранным строкам минимальна

$(x_1\cdot x_3\cdot\overline{x_4})\vee(x_1\cdot\overline{x_2}\cdot x_3)\vee(\overline{x_2}\cdot x_4)$ – М ДНФ

Теория графов

Пусть V-конечное непустое множ.

$V^{(2)}$ -множ, состоящее из неупорядоченных пар разных элементов множ. V.

$V^{(2)} = \{ \underbrace{\{u, v\}}_{\text{неупоряд. пара}} : u \in V, v \in V, u \neq v \}$

Пр:
1. $V = \{a\}$, $V^{(2)} = \emptyset$.
2. $V = \{a, b\}$, $V^{(2)} = \{\{a, b\}\}$ $\{a,b\} = \{b,a\}$ (т.к. неупорядочен)
3. $V = \{a, b, c\}$, $V^{(2)} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
4. $V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $V^{(2)} = C_n^2$

Опр: Графом назыв. упорядоченная пара $G = (V, E)$, состоящая из непустого конечного множ. объектов V и некоторого множ. $E \subseteq V^{(2)}$ неупорядоченных пар разных объектов из V.

Элементы множ. V назыв. вершинами графа G.

Неупорядоченные пары из E назыв. ребрами графа G.

$V(G) = V$ - множ. вершин графа G
$E(G) = E$ - множ. ребер графа G

$|G| = $ ~~|V|~~ - порядок графа G, т.е. число вершин в нем

Граф (n, m) - это граф, в котором n вершин и m ребер.

Рассмотрим u, v - вершины графа G $(u \neq v)$
Если $e = \{u, v\} \in E(G)$, то мы говорим, что
1) вершины u, v - концевые вершины ребра e.
2) ребро соединяет вершины u, v.

Вершины u и v графа G назыв. смежными, если $\{u, v\} \in E(G)$ и несмежными в противном случ.

Ребра e и f графа G назыв. **смежными**, если они имеют общую концевую вершину ($e \cap f \neq \emptyset$) и **несмежными** в противном случае.

Вершина u и ребро e графа G назыв. **инцидентными**, если $u \in e$ (u - концевая вершина ребра e) и **неинцидентными** в противном случае.

Окружением вершины u графа G назыв. множ. вершин графа G, смежных с вершиной u.

$$N(u) = \{v \in V(G) : \{u, v\} \in E(G)\}$$

Замкнутое окружение вершины u:

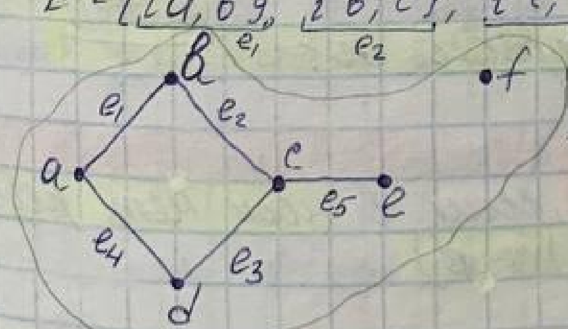
$$N[u] = N(u) \cup \{u\}$$

Степенью вершины u графа G назыв. множ. вершин графа G, смежных с вершиной u.

$$\deg(u) = |N(u)|$$

Вершина u графа G назыв.:
1) **изолированной**, $\deg(u) = 0$
2) **висячей (листовой)**, $\deg(u) = 1$

Пр: $G = (V, E)$ - $(6,5)$ - граф
$V = \{a, b, c, d, e, f\}$ - 6 вершин
$E = \{\underbrace{\{a, b\}}_{e_1}, \underbrace{\{b, c\}}_{e_2}, \underbrace{\{c, d\}}_{e_3}, \underbrace{\{a, d\}}_{e_4}, \underbrace{\{c, e\}}_{e_5}\}$ - 5 ребер



- графическое представление графа $(6,5)$

Вершины a и b смежные ($\{a, b\} \in E(G)$)
a и c несмежные ($\{a, c\} \notin E(G)$)
Ребра e_1 и e_2 смежные ($e_1 \cap e_2 = b \neq \emptyset$)
e_1 и e_3 несмежные ($e_1 \cap e_3 = \emptyset$)
Вершина a и ребро e_4 - инцидентные ($a \in e_4$)
Вершина a и ребро e_5 - не инцидентные ($a \notin e_5$)
Окружение вершины a = вершины b, d ($N(a) = \{d, b\}$).