Отображения. Основные классы отображений.

Отображение (или *функция*) f из множества A в множество B — правило, по которому каждому элементу множества A ставится в соответствие в точности один элемент множества B. Эти слова поясняют значение понятия отображение, но не служат его определением. Тот факт, что отображение f действует из множества A в множество B, обозначают так

$$f : A \mapsto B$$

Примеры. Рассмотрим множества $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Схематично изобразим элементы этих множеств точками.

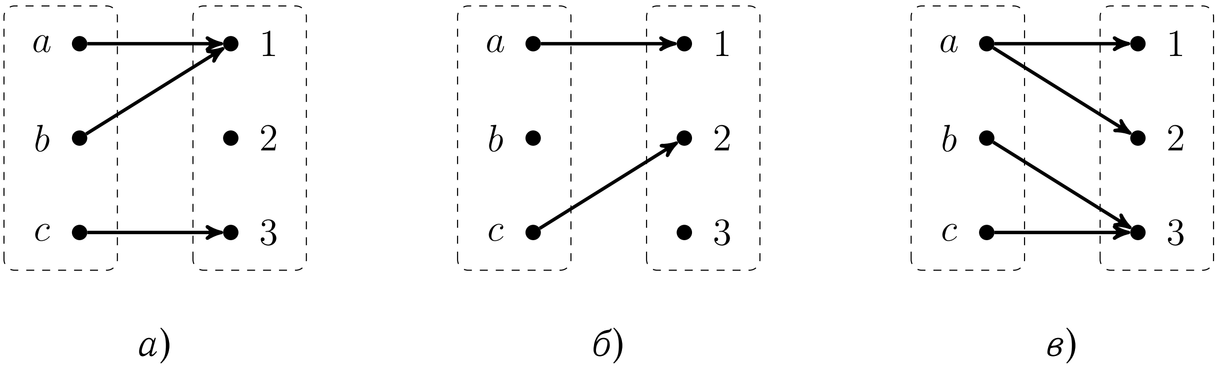

Рис. 1: *а*) отображение, *б*) не отображение, *в*) не отображение

Поставим в соответствие элементу a элемент 1, элементу b элемент 1, а элементу c элемент 3 (см. рис.1*а*). Получим отображение из множества A в множество B, или, как ещё говорят, отображение, переводящее элементы множества A в элементы множества B.

Рассмотрим другую ситуацию (см. рис. 1*б*). Поставим в соответствие элементу a элемент 1, элементу c элемент 2. Эта картинка не определяет отображение, поскольку элементу b не соответствует никакой элемент множества B.

Рассмотрим третью ситуацию (см. рис. 1*в*). Поставим в соответствие элементу a элементы 1 и 2, элементу b элемент 3 и элементу c элемент 2. Эта картинка не задаёт отображение, поскольку элементу a соответствует два элемента из множества B.

Рассмотрим произвольное отображение $f : A \mapsto B$. По определению, каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие некоторый элемент из множества B. Элемент множества B, сопоставленный элементу $a \in A$, называется *образом* элемента a и обозначается так $f(a)$. При этом говорят, что отображение f переводит элемент a в элемент $f(a)$ или, что при отображении f элемент a переходит в элемент $f(a)$. Элемент a называется *прообразом* элемента $f(a) \in B$. У произвольного элемента из множества B может не быть прообраза, а может быть несколько.

Отображение f из множества A в множество B устанавливает соответствие между элементами множества A и элементами множества B. Это соответствие можно естественным образом продолжить до соответствия между подмножествами множеств A и B.

Определение 1. Пусть $f : A \mapsto B$ — отображение, $X \subseteq A$ и $X \neq \varnothing$. *Образом* $f(X)$ множества X называется множество образов элементов из X,

$$f(X) = \{f(a) : a \in X\}.$$

Определение 2. Пусть $f : A \mapsto B$ — отображение, $Y \subseteq B$ и $Y \neq \varnothing$. *Полным прообразом* $f^{-1}(Y)$ множества Y называется множество элементов из A, образы которых принадлежат множеству Y

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}.$$

Определение 3. Если $f : A \mapsto B$ — отображение, то A называется *областью определения*, а $f(A)$ называется *областью значений* отображения f.

Определение 4. Два отображения $f : A \mapsto B$ и $g : X \mapsto Y$ называются *равными*, если $A = X$, $B = Y$ и для всякого элемента $a \in A$ $f(a) = g(a)$.

Равные отображения действуют на одни и те же элементы и результаты их действий одинаковы.

Определение 5. Отображение $f : A \mapsto B$ называется *инъективным*, если разным элементам множества A соответствуют разные элементы множества B, т.е. для любых двух элементов $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ имеет место импликация

$$a_1 \neq a_2 \quad \Rightarrow \quad f(a_1) \neq f(a_2). \tag{1}$$

По правилу контрапозиции, импликация (1) равносильна импликации

$$f(a_1) = f(a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2. \tag{2}$$

Поэтому в определении инъективного отображения импликацию (1) можно заменить импликацией (2).

Лемма 1. *Отображение $f : A \mapsto B$ инъективно тогда и только тогда, когда каждый элемент из множества B имеет не более одного прообраза.*

Инъективное отображение также называют *отображением «в»*. В частности, желая подчеркнуть, что отображение $f : A \mapsto B$ инъективно, говорят «отображение f множества A в множество B».

Примеры.

а) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ — не инъективное отображение, так как можно предъявить два разных вещественных числа, образы которых совпадают: $f(-1) = f(1)$;

б) $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ $f(x) = x^2$ — инъективное отображение. Покажем, что, если $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 = x_2$:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Rightarrow \quad x_1^2 = x_2^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Определение 6. Отображение $f : A \mapsto B$ называется *сюръективным*, если любой элемент из множества B имеет хотя бы один прообраз, т.е. для любого элемента $b \in B$ найдётся элемент $a \in A$ такой, что $f(a) = b$.

Сюръективное отображение также называют *отображением «на»*. В частности, желая подчеркнуть, что отображение $f : A \mapsto B$ сюръективно, говорят «отображение f множества A на множество B».

Примеры.

а) $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ $f(x) = x + 1$ — не сюръективное отображение. Можно указать натуральное число, для которого нет прообразов. Рассмотрим $y = 1 \in \mathbb{N}$. Попытаемся найти натуральное число x такое, что $f(x) = y$

$$x + 1 = 1.$$

Посмотрим на это равенство как на уравнение относительно переменной x. Это уравнение не имеет решений в натуральных числах. Стало быть, нет $x \in \mathbb{N}$ такого, что $f(x) = y$.

б) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $f(x) = x + 1$ — сюръективное отображение. Покажем, что для всякого вещественного числа y есть хотя бы один прообраз. Пусть y — произвольное вещественное число. Попытаемся найти вещественное число x такое, что $f(x) = y$

$$x + 1 = y.$$

Посмотрим на это равенство как на уравнение относительно переменной x. Это уравнение имеет решение в вещественных числах: $x = y - 1 \in \mathbb{R}$. Таким образом, любое вещественное число y имеет прообраз $y - 1$. Следовательно, отображение f сюръективно.

Определение 7. Отображение $f : A \mapsto B$ называется *биективным*, если оно является инъективным и сюръективным.

Лемма 2. *Отображение $f : A \mapsto B$ биективно тогда и только тогда, когда каждый элемент множества B имеет в точности один прообраз.*

Примеры. Рассмотрим три отображения из множества $A = \{a, b, c\}$ в множество $B = \{1, 2, 3\}$.

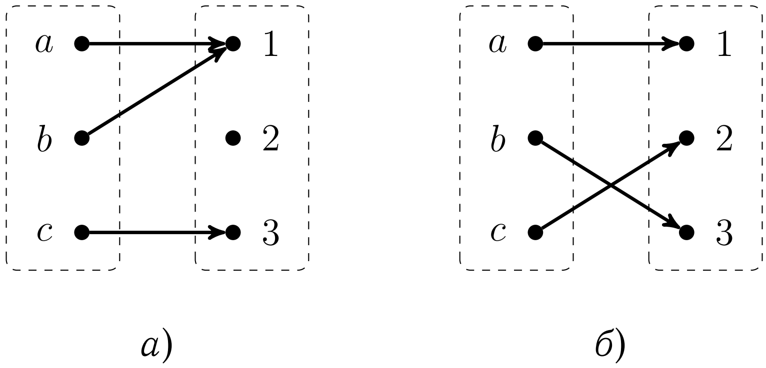

Рис. 2: *а*) не инъективное и не сюръективное отображение, *б*) биективное отображение

При наглядном представлении отображения $f : A \mapsto B$ как совокупности стрелок, переводящих элементы множества A в элементы множества B, случай биективного отображения характеризуется тем, что из каждого элемента множества A выходит одна стрелка и в каждый элемент множества B входит одна стрелка. Таким образом, стрелки, которые определяют отображение f, разбивают элементы множеств A и B на пары, соответствующих друг другу. При биективном отображении не только каждому элементу множества A соответствует ровно один элемент из множества B, но и наоборот каждый элемент множества B соответствует ровно одному элементу множества A, т.е. соответствие f является однозначным в обе стороны. Учитывая это обстоятельство, говорят, что биективное отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами множества A и элементами множества B.

Равномощные множества

Все множества делятся на два типа: конечные и бесконечные. Неформально говоря, конечное множество — множество, в котором есть n элементов и нет $(n + 1)$ элементов для некоторого натурального числа n. При этом число n — число элементов в этом множестве. Примеры конечных множеств: множество студентов 1-го курса 3-го потока ФПМИ, множество молекул воды на планете Земле. Каждое из этих множеств содержит конечное, хотя, быть может, и неизвестное нам число элементов.

С другой стороны существуют множества, состоящие из бесконечного числа элементов, — бесконечные множества. Неформально говоря, бесконечное множество — множество, в котором можно найти n элементов для любого натурального числа n. Примеры бесконечных множеств: множество натуральных чисел, множество точек на данной прямой, множество прямых на плоскости.

Два конечных множества мы можем сравнить по числу элементов и судить одинаково это число или же в одном из множеств элементов больше, чем в другом. Возникает естественный вопрос. Можно ли подобным образом сравнивать бесконечные множества?

Посмотрим как мы сравниваем между собой два конечных множества. Можно, например, сосчитать число элементов в каждом из них и, таким образом, эти два множества сравнить. Но можно поступить иначе. А именно попытаться установить взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств. Например, чтобы проверить одинаково ли число студентов и стульев в аудитории, можно не пересчитывая ни тех, ни других, посадить каждого студента на определённый стул. Если мест хватит всем и не останется ни одного лишнего стула, т.е. если будет установлено биективное соответствие между этими двумя множествами, то это будет означать, что число элементов в них одинаково. Рассмотрим ещё один пример. Как узнать поровну ли юношей и девушек, пришедших на дискотеку? Можно поступить так. Можно попросить юношей отойти в одну сторону, а девушек — в другую и заняться подсчётом как тех, так и других. Можно поступить и по-другому. Можно попросить юношей и девушек образовать танцующие пары так, что в каждой паре будет один юноша и одна девушка. Если окажется, что каждый юноша в паре с девушкой и каждая девушка в паре с юношей, т.е. будет установлено биективное соответствие между юношами и девушками, то это будет означать, что на дискотеке юношей столько же сколько девушек. Дадим ещё один пример, иллюстрирующий идею применимости взаимно однозначного соответствия для сравнения двух конечных множеств. Вообразим кавалерийский отряд. На каждого всадника приходится одна лошадь, на каждой лошади сидит один всадник. Таким образом, определено биективное отображение множества всех всадников в множество всех лошадей данного отряда. Делаем вывод, что в отряде всадников столько же сколько и лошадей.

Существование взаимно однозначного соответствия между двумя конечными множествами равносильно тому, что у них поровну элементов.

Важнейшим поворотным пунктом в развитии теории множеств был момент, когда Георг Кантор предложил применить идею взаимно однозначного соответствия для сравнения бесконечных множеств. Иными словами, по Кантору, два (не обязательно конечных) множества A и B имеют поровну элементов, если между этими множествами можно установить взаимно однозначное соответствие. Обычно математики не говорят, что «множества A и B имеют поровну элементов», а говорят, что «множества A и B равномощны (имеют одинаковую мощность)».

Определение 8. Непустое множество A называется *равномощным* непустому множеству B, если существует биективное отображение $f : A \mapsto B$.

Если A равномощно B, то пишем $|A| = |B|$. Примем соглашение. Будем считать, что пустое множество равномощно только самому себе.

Дадим формальные определения понятий конечного множества и бесконечного множества.

Определение 9. Непустое множество A называется *конечным*, если найдётся такое натуральное число n, что множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ равномощно множеству A, т.е. $|\{1, 2, \ldots, n\}| = |A|$. При этом говорят, что *мощность* множества A равна n и пишут $|A| = n$.

Если $|A| = n$, то о множестве A говорят, как об n-элементном множестве или, как о множестве, состоящем из n элементов. Примем соглашение. Будем считать, что пустое множество — конечное множество мощности 0.

Отметим также, что установить взаимно однозначное соответствие между элементами множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и элементами множества A — это то же самое, что занумеровать все элементы множества A, используя все натуральные числа от 1 до n.

Примеры. Рассмотрим множество $A = \{a, b, c\}$. Элементы множества A можно занумеровать первыми тремя натуральными числами. Элементу a

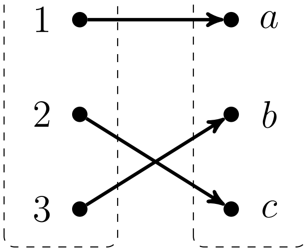

Рис. 3: Нумерация элементов множества A

припишем номер 1, элементу c припишем номер 2 и элементу b припишем номер 3. Мы занумеровали элементы множества A первыми тремя натуральными числами и тем самым установили взаимно однозначное соответствие, т.е. равномощность множества первых трёх натуральных чисел множеству A. Значит множество A — конечное множество мощности 3 ($|A| = 3$).

Определение 10. Множество A называется *бесконечным*, если оно не является конечным, т.е. для любого натурального числа n множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ не равномощно множеству A.

Мы определили понятие мощности для конечного множества. Докажем корректность этого определения. Наша ближайшая задача — доказать, что мощность конечного непустого множества не может равняться двум разным натуральным числам. Для доказательства этого факта нам понадобятся три вспомогательные леммы, которые мы сформулируем и докажем.

Лемма 3 (лемма об инъективном отображении)**.** *Если*

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m\}$$

— инъективное отображение, то $n \leq m$.

Доказательство. Докажем эту лемму по индукции по n.

База индукции. Пусть $n = 1$. Так как $1 \leq m$, то $n \leq m$.

Пусть теперь $n \geq 2$.

Индуктивное предположение: если $f : \{1, 2, \ldots, n-1\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m'\}$ — инъективное отображение, то $n - 1 \leq m'$.

Совершим *индуктивный переход*. Для этого рассмотрим произвольное инъективное отображение

$$f : \underbrace{\{1, 2, \ldots, n\}}_{A} \mapsto \underbrace{\{1, 2, \ldots, m\}}_{B}.$$

Так как $n \geq 2$ и f — инъективное отображение, то $m \geq 2$. Возможны три случая, которые мы рассмотрим по отдельности.

Случай 1. Пусть $f(n) = m$. Поскольку отображение f инъективно, то в элемент m переходит только элемент n и никакой другой элемент множества A. Удалим из множества A элемент n, а из множества B элемент m. Тем самым мы сузим области действия отображения f

$$f : \{1, 2, \ldots, n-1\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m-1\}. \tag{3}$$

Так как до удаления элементов отображение f было инъективно (разные элементы переходят в разные), то и после удаления отображение f останется инъективным (разные элементы по-прежнему будут переходить в разные). К отображению (3) применимо индуктивное предположение, из которого получаем, что $n-1 \leq m-1$. Следовательно, $n \leq m$ и в этом случае мы совершили индуктивный переход и доказали лемму.

Случай 2. Пусть $f(n) = i$, $i \neq m$ и $f^{-1}(\{m\}) \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольный элемент $j \in f^{-1}(\{m\})$, т.е. элемент такой, что $f(j) = m$.

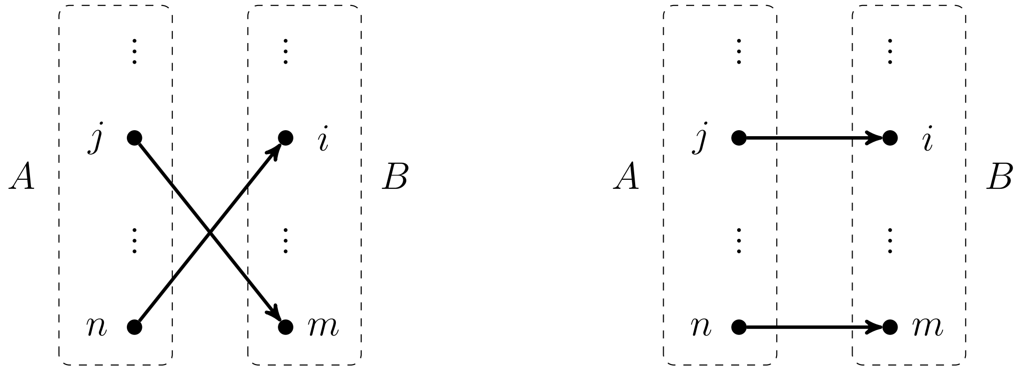

Рис. 4: Перестройка отображения f

Так как f — инъективное отображение, то в элемент i переходит только один элемент n, а в элемент m переходит только один элемент j. Перестроим отображение f следующим образом (см. рис. 4). Поставим в соответствие элементу j элемент i, а элементу n элемент m. В результате получим новое отображение

$$f^* : \{1, 2, \dots, n\} \mapsto \{1, 2, \dots, m\}, \quad f^*(x) = \begin{cases} i, & \text{если } x = j, \\ m, & \text{если } x = n, \\ f(x), & \text{если } x \neq j \wedge x \neq n; \end{cases}$$

которое, очевидно, будет инъективным. Удалим из множества A элемент n, а из множества B элемент m. Тем самым сузим области действия отображения f^*:

$$f^* : \{1, 2, \dots, n-1\} \mapsto \{1, 2, \dots, m-1\}.$$

По индуктивному предположению, $n-1 \leq m-1$. Следовательно, $n \leq m$.

Случай 3. Пусть $f(n) = i$, $i \neq m$ и $f^{-1}(\{m\}) = \varnothing$. Удалим из множества A элемент n, а из множества B элемент m. В результате получим отображение

$$f : \{1, 2, \dots, n-1\} \mapsto \{1, 2, \dots, m-1\},$$

для которого справедливо индуктивное предположение, по которому $n-1 \leq m-1$. Из этого следует $n \leq m$. $\square$

Лемма 4 (лемма о сюръективном отображении). *Если*

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \mapsto \{1, 2, \dots, m\}$$

— сюръективное отображение, то $n \geq m$.

Доказательство. Докажем лемму по индукции по m.

База индукции. Пусть $m = 1$. Так как $1 \leq n$, то $n \geq m$.

Пусть $m \geq 2$.

Индуктивное предположение: если $f : \{1, 2, \ldots, n'\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m-1\}$ — сюръективное отображение, то $n' \geq m - 1$.

Совершим *индуктивный переход*. Для этого рассмотрим произвольное сюръективное отображение

$$f : \underbrace{\{1, 2, \ldots, n\}}_{A} \mapsto \underbrace{\{1, 2, \ldots, m\}}_{B}.$$

Так как $m \geq 2$ и f — сюръективное отображение, то $n \geq 2$. Возможны два случая, которые мы рассмотрим по отдельности.

Случай 1. Пусть $f(n) = m$. Подправим отображение f. Выберем в множестве A все элементы, которым соответствует элемент m. Выбранным элементам поставим в соответствие элемент 1. Получим отображение

$$f^* : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m\} \quad f^*(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } f(x) = m, \\ f(x), \text{ если } f(x) \neq m; \end{cases}.$$

Удалим из множества A элемент n, а из множества B элемент m. В результате сузим область действия отображения

$$f^* : \{1, 2, \ldots, n-1\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m-1\}.$$

Очевидно, что f^* — сюръективное отображение. По индуктивному предположению $n - 1 \geq m - 1$. Следовательно, $n \geq m$.

Случай 2. Пусть $f(n) = i$, $i \neq m$. Так как f — сюръективное отображение, то $f^{-1}(\{m\}) \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольный элемент $j \in f^{-1}(\{m\})$. Перестроим отображение f. Поставим в соответствие элементу n элемент m, а элементу i элемент j. Получим в результате сюръективное отображение, которое переводит элемент m в элемент n. Случай такого отображения мы уже рассмотрели и доказали, что $n \geq m$. □

Лемма 5 (лемма о биективном отображении)**.** *Если*

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, m\}$$

—биективное отображение, то $n = m$.

Доказательство.

$$f \text{ биективно} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f \text{ инъективно} \quad \Rightarrow \quad n \leq m \\ f \text{ сюръективно} \quad \Rightarrow \quad n \geq m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad n = m.$$

□