

И.И.Ляшко, А.К.Боярчук, Я.Г.Гай, Г.П.Головач
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ:
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ**

Справочное пособие по высшей математике. Т. 3

М.: Едиториал УРСС, 2001. — 224 с.

«Справочное пособие по высшей математике» выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 3 по содержанию соответствует второй половине второго тома «Справочного пособия по математическому анализу». В нем рассматриваются интегралы, зависящие от параметра, кратные и криволинейные интегралы, а также элементы векторного анализа.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и работников физико-математических, экономических и инженерно-технических специальностей, специалистов по прикладной математике, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.

Оглавление

Глава 1. Интегралы, зависящие от параметра	3
§1. Собственные интегралы, зависящие от параметра	3
§2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов	15
§3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла	34
§4. Эйлеровы интегралы	51
§5. Интегральная формула Фурье	60
Глава 2. Кратные и криволинейные интегралы	68
§1. Интеграл Римана на компакте. Приведение кратных интегралов к повторным и их вычисление	68
§2. Несобственные кратные интегралы	99
§3. Приложение кратных интегралов к решению задач геометрии и физики	112
§4. Интегрирование на многообразиях	148
§5. Формулы Остроградского, Грина и Стокса	184
§6. Элементы векторного анализа	201
§7. Запись основных дифференциальных операций векторного анализа в ортогональных криволинейных координатах	214
Ответы	222

Глава 1

Интегралы, зависящие от параметра

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1.1. Непрерывность функции

$$F : y \mapsto \int_a^A f(x, y) dx. \quad (1)$$

Теорема 1. Если функция $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, где $\Pi = \{(x, y) \mid a \leq x \leq A, b \leq y \leq B\}$, непрерывна, то функция F непрерывна на отрезке $[b, B]$.

Теорема 2. Если функция f непрерывна на Π , а кривые $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, $y \in [b, B]$, непрерывны и не выходят за его пределы, то функция

$$I : y \mapsto \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \quad (2)$$

непрерывна на отрезке $[b, B]$.

1.2. Предельный переход под знаком интеграла.

Теорема 1. При условиях теорем п.1.1 справедливы формулы

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx,$$
$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0) dx.$$

Определение. Семейство функций $x \mapsto f(x, y)$, где y — параметр семейства, $y \in Y$, равномерно стремится к предельной функции g при $y \rightarrow y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что при $0 < |y - y_0| < \delta$ будет $|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon$ для всех тех x , для которых функции f и g определены.

Если $y_0 = \infty$, то неравенства $0 < |y - y_0| < \delta$ следует заменить неравенством $|y| > \delta$; если же $y_0 = +\infty(-\infty)$, то тогда неравенством $y > \delta$ ($y < -\delta$).

Теорема 2. Если функция f при фиксированном $y \in Y$ непрерывна по $x \in [a, A]$ и при $y \rightarrow y_0$ стремится к предельной функции g равномерно относительно x , то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A g(x) dx.$$

1.3. Дифференцирование под знаком интеграла.

Теорема 1. Если функции f и f'_y непрерывны на Π , то функция F дифференцируема на отрезке $[b, B]$ и ее производную можно найти по формуле Лейбница

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A f'_y(x, y) dx.$$

Теорема 2. Если, кроме условий теоремы 2, п.1.1, функции φ и ψ дифференцируемы при $b < y < B$, то

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx, \quad y \in]b, B[.$$

1.4. Интегрирование под знаком интеграла.

Теорема. Если функция f непрерывна на Π , то

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$F : y \mapsto \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx,$$

где $f \in C[0, 1]$ и $f(x) > 0$.

◀ Функции $\varphi : x \mapsto \frac{y}{x^2 + y^2}$ и f интегрируемы по x на $[0, 1]$ и знакопостоянны при $0 < x < 1$. Кроме того, функция f непрерывна; следовательно, все условия первой теоремы о среднем в интегральном исчислении выполнены, поэтому

$$F(y) = f(c(y)) \operatorname{arctg} \frac{1}{y}, \quad 0 \leq c(y) \leq 1.$$

Пусть $\epsilon > 0$. Тогда

$$|F(\epsilon) - F(-\epsilon)| = \left| (f(c(\epsilon)) + f(c(-\epsilon))) \operatorname{arctg} \frac{1}{\epsilon} \right| \geq 2 \min_{x \in [0, 1]} f(x) \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{\epsilon} \right| \rightarrow \pi \min_{x \in [0, 1]} f(x) > 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, функция F разрывна в нуле.

Далее, поскольку функция $\psi : (x, y) \mapsto \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}$ непрерывна в каждом из прямоугольников $[0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq A]$, $[0 \leq x \leq 1; -A \leq y \leq -\delta]$, где $\delta > 0$, $A > 0$, то, согласно теореме 1, п.1.1, функция F непрерывна на каждом из отрезков $[\delta, A]$ и $[-A, -\delta]$. Поскольку δ и A произвольны, то отсюда следует, что функция F непрерывна $\forall y \neq 0$. ►

2. Найти: а) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx$; б) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2}$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + \frac{x}{n})^n}$; г) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{\ln(x + |\alpha|)}{\ln(x^2 + \alpha^2)} dx$.

◀ Поскольку функции $(x, \alpha) \mapsto \sqrt{x^2 + \alpha^2}$, $\alpha \mapsto 1 + \alpha$, $(x, \alpha) \mapsto \frac{1}{1 + x^2 + \alpha^2}$ непрерывны, то, согласно теореме 1, п.1.2, возможен предельный переход по α под знаком интеграла, когда $\alpha \rightarrow \alpha_0$ и α_0 — конечное.

a) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx = \int_{-1}^1 |x| dx = 1;$

b) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}, \alpha_0 = 0.$

Поскольку функции $x \mapsto \frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$ и $x \mapsto \frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}$ при фиксированных $n, n \in \mathbb{N}$ и $\alpha, |\alpha| > 1$, непрерывны по x ($0 \leq x \leq 1$ и $1 \leq x \leq 2$ соответственно) и $f_n(x) = \frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n} \Rightarrow \frac{1}{1+e^x}$, когда $n \rightarrow \infty$, а $f(x, \alpha) = \frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)} \Rightarrow \frac{1}{2}$, когда $\alpha \rightarrow \infty$ (см. ниже), то, согласно теореме 2, п.1.2, получаем:

v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n} = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \ln \frac{2e}{e+1};$

г) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)} dx = \int_1^2 \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)} dx = \frac{1}{2}.$

Равномерная сходимость последовательности $(f_n(x))$ и семейства функций $x \mapsto f(x, \alpha)$ вытекает из следующих оценок:

$$\left| \frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n} - \frac{1}{1+e^x} \right| = \frac{\left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right|}{(1+e^x)(1+(1+\frac{x}{n})^n)} \leq \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty \forall x \in [0, 1]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\left| \frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{\ln\left(1 + \frac{2x|\alpha|}{x^2+\alpha^2}\right)}{2\ln(x^2+\alpha^2)} \right| \leq \frac{x|\alpha|}{(x^2+\alpha^2)\ln(x^2+\alpha^2)} \leq \frac{2|\alpha|}{(1+\alpha^2)\ln(1+\alpha^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+\alpha^2)} < \varepsilon$$

$\forall x \in [1, 2]$, как только $|\alpha| > \left(e^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$. ►

3. Найти $A = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta.$

◀ Поскольку $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, то $e^{-R \sin \theta} \leq e^{-\frac{2}{\pi} R \theta}$. Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R \theta} d\theta = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R})$$

и $0 \leq A \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) = 0$, т. е. $A = 0$. ►

4. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[A, B]$. Доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x (f(t+h) - f(t)) dt = f(x) - f(a), \quad A < a < x < B.$$

Гл. 1. Интегралы, зависящие от параметра

◀ Вводя в рассмотрение первообразную F функции f , согласно формуле Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_a^x (F'(t+h) - F'(t)) dt = (F(t+h) - F(t))|_a^x = F(x+h) - F(x) - (F(a+h) - F(a)).$$

Следовательно,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x (f(t+h) - f(t)) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \\ = F'(x) - F'(a) = f(x) - f(a). ▶$$

5. Пусть: 1) $\varphi_n(x) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, на $[-1, 1]$; 2) $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если $0 < \epsilon \leq |x| \leq 1$;
 3) $\int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что если $f \in C[-1, 1]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) \varphi_n(x) dx = f(0).$$

◀ Пусть $\delta > 0$ задано. Рассмотрим неравенство

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) \varphi_n(x) dx - f(0) \right| \leq \left| \int_{-1}^{-\epsilon} f(x) \varphi_n(x) dx + \int_{-\epsilon}^1 f(x) \varphi_n(x) dx \right| + \left| \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x) \varphi_n(x) dx - f(0) \right|. \quad (1)$$

Первое слагаемое в правой части (1) оценивается следующим образом:

$$\left| \int_{-1}^{-\epsilon} f(x) \varphi_n(x) dx + \int_{-\epsilon}^1 f(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq 2M \sup_{0 < \epsilon \leq |x| \leq 1} \varphi_n(x), \quad (2)$$

где $M = \max_{|x| \leq 1} |f(x)| \neq 0$ (заметим, что при $f(x) \equiv 0$ на $[-1, 1]$ утверждение теоремы становится тривиальным).

Пользуясь первой теоремой о среднем, а также условием 1), оцениваем второе слагаемое в правой части неравенства (1):

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(x) \varphi_n(x) dx - f(0) \right| &= \left| f(\xi_n) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi_n(x) dx - f(0) \right| \leq \\ &\leq |f(\xi_n) - f(0)| \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx + M \left| 1 - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi_n(x) dx \right| \leq \\ &\leq |f(\xi_n) - f(0)| \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx + M \left| 1 - \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx \right| + 2M \sup_{0 < \epsilon \leq |x| \leq 1} \varphi_n(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где $|\xi_n| < \epsilon$.

В силу непрерывности функции f , всегда можно выбрать число ϵ так, что будет выполняться неравенство

$$|f(\xi_n) - f(0)| < \frac{\delta M}{4M + \delta}. \quad (4)$$

После того как число ε уже выбрано, из условий 2) и 3) находим

$$0 < \sup_{0 < \varepsilon \leq |x| \leq 1} \varphi_n(x) < \frac{\delta}{8M}, \quad \left| \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx - 1 \right| < \frac{\delta}{4M}, \quad 0 < \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx < 1 + \frac{\delta}{4M}, \quad (5)$$

если n достаточно велико.

Используя теперь оценки (2) — (5), из (1) получаем

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) \varphi_n(x) dx - f(0) \right| < \delta$$

при всех достаточно больших n . ▶

6. Можно ли совершить предельный переход под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx?$$

◀ Нет, нельзя. Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем нуль. Если же вычислить интеграл, а затем перейти к пределу, то получим

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}} d\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left(1 - e^{-\frac{1}{y^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Отметим, что в точке $(0, 0)$ функция $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$ терпит разрыв. ▶

7. Найти $F'(\alpha)$, если: а) $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(x+\alpha, x-\alpha) dx$; б) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy$.

◀ а) Допуская существование непрерывных частных производных функций $(u, v) \mapsto f(u, v)$, где $u = x + \alpha$, $v = x - \alpha$, согласно формуле Лейбница, имеем

$$F'(\alpha) = f(2\alpha, 0) + \int_0^\alpha (f'_u(u, v) - f'_v(u, v)) dx.$$

Замечая, что $\frac{df}{dx} = f'_u + f'_v$, можем записать

$$\int_0^\alpha (f'_u - f'_v) dx = 2 \int_0^\alpha f'_u dx - f(2\alpha, 0) + f(\alpha, -\alpha).$$

Следовательно, $F'(\alpha) = f(\alpha, -\alpha) + 2 \int_0^\alpha f'_u dx$.

б) Обозначим $f(x, \alpha) = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy$. Тогда

$$F'(\alpha) = 2f(\alpha^2, \alpha)\alpha + \int_0^{\alpha^2} f'_\alpha(x, \alpha) dx,$$

$$f'_\alpha(x, \alpha) = \sin(x^2 + (x + \alpha)^2 - \alpha^2) + \sin(x^2 + (x - \alpha)^2 - \alpha^2) -$$

$$-2\alpha \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy.$$

Таким образом, получаем

$$F'(\alpha) = 2\alpha \int_{\alpha^2 - \alpha}^{\alpha^2 + \alpha} \sin(y^2 + \alpha^4 - \alpha^2) dy + 2 \int_0^{\alpha^2} \sin 2x^2 \cos 2\alpha x dx - 2\alpha \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy. \blacksquare$$

8. Найти $F''(x)$, если $F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta$, $h > 0$, где f — непрерывная

функция.

◀ Очевидно, если функция f непрерывна, то справедливо равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t + \omega) dt = \int_{\alpha+\omega}^{\beta+\omega} f(t) dt.$$

Пользуясь этим равенством и возможностью дифференцирования по параметру, получаем

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_{x+\xi}^{h+x+\xi} f(\eta) d\eta \right) = \frac{1}{h^2} \int_0^h (f(h+x+\xi) - f(x+\xi)) d\xi = \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\int_{x+h}^{x+2h} f(\xi) d\xi - \int_x^{x+h} f(\xi) d\xi \right), \end{aligned}$$

$$F''(x) = \frac{1}{h^2} (f(2h+x) - 2f(h+x) + f(x)). \blacksquare$$

9. Доказать формулу

$$I_n = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \psi_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad \psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos \left(y + \frac{n\pi}{2} \right) dy, & x \neq 0, \\ \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n+1}, & x = 0, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Пользуясь формулой (1), получить оценку $\left| \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right| \leq \frac{1}{n+1}$ при $x \in]-\infty, +\infty[$.

◀ Справедливость формулы (1) при $x \neq 0$ устанавливается методом математической индукции. Действительно, при $n = 1$ соотношение (1) справедливо. Предполагая, что формула (1) правильна при некотором $n = k$, дифференцированием обеих ее частей по x с последующим применением интегрирования по частям получаем

$$I_{k+1} = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{x} \cos \left(x + \frac{k\pi}{2} \right) - \frac{k+1}{x^{k+2}} \int_0^x y^k \cos \left(y + \frac{k\pi}{2} \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x} \cos \left(x + \frac{k\pi}{2} \right) - \frac{k+1}{x^{k+2}} \left(\frac{y^{k+1}}{k+1} \cos \left(y + \frac{k\pi}{2} \right) \Big|_0^x + \frac{1}{k+1} \int_0^x y^{k+1} \sin \left(y + \frac{k\pi}{2} \right) dy \right) = \\
 &= -\frac{1}{x^{k+2}} \int_0^x y^{k+1} \sin \left(y + \frac{k\pi}{2} \right) dy = \frac{1}{x^{k+2}} \int_0^x y^{k+1} \cos \left(y + \frac{(k+1)\pi}{2} \right) dy, \quad x \neq 0.
 \end{aligned}$$

Покажем теперь справедливость формулы (1) при $x = 0$. Используя разложение $\sin x$ в ряд Маклорена, получаем $\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$, если $x \neq 0$. Очевидно, сумма этого ряда при $x = 0$ равна единице. Поэтому $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$ при всех x . Отсюда находим $f^{(n)}(0) = \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n+1}$, что и требовалось доказать.

Далее, поскольку при $x \neq 0$

$$\left| \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos \left(y + \frac{n\pi}{2} \right) dy \right| \leqslant \frac{1}{|x|^{n+1}} \int_0^{|x|} y^n dy = \frac{1}{n+1},$$

а при $x = 0$ имеем $|f^{(n)}(0)| = \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n+1} \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$, то $\forall x \in]-\infty, +\infty[$

$$\left| \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right| \leqslant \frac{1}{n+1}. \blacktriangleright$$

10. Функцию $f : x \mapsto x^2$ на отрезке $[1, 3]$ приближенно заменить линейной функцией $x \mapsto a + bx$ так, чтобы

$$I(a, b) = \int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx = \min.$$

◀ Поскольку подынтегральная функция имеет непрерывные частные производные при любых a и b , то можно применять формулу Лейбница. Дифференцируя под знаком интеграла по a и по b и учитывая необходимые условия экстремума функции I , получаем

$$I'_a(a, b) = 2 \int_1^3 (a + bx - x^2) dx = 0, \quad I'_b(a, b) = 2 \int_1^3 (a + bx - x^2)x dx = 0.$$

Отсюда находим $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$. Легко убедиться, что $I''_{a^2}(a, b) = 4$. Таким образом,

$$d^2I(a, b) = 4da^2 + 16da db + \frac{52}{3}db^2 = 4(da + 2db)^2 + \frac{4}{3}db^2 > 0,$$

т. е. при $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$ функция I принимает минимальное значение. Следовательно, линейная функция $y = 4x - \frac{11}{3}$ удовлетворяет поставленной задаче. ►

11. Найти производные от полных эллиптических интегралов

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad 0 < k < 1,$$

и выразить их через функции E и F .

Гл. 1. Интегралы, зависящие от параметра

Показать, что $E(k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1 - k^2} = 0.$$

◀ Будем считать, что $k \in [k_0, k_1] \subset]0, 1[$. Тогда функции $(k, \varphi) \mapsto \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, $(k, \varphi) \mapsto \frac{k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(\varphi, k) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, k_0 \leq k \leq k_1\}$. Следовательно, к интегралу применима формула Лейбница. Имеем

$$E'(k) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad (1)$$

Умножая обе части этого равенства на k и пользуясь выражениями для $E(k)$ и $F(k)$, находим

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k) - F(k)}{k}. \quad (2)$$

Интегрируя в (1) по частям, получаем

$$E'(k) = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi d(\cos \varphi)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cos^2 \varphi d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} + k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Но поскольку

$$F'(k) = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad (kF(k))' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

(дифференцирование здесь возможно по причине, аналогичной изложенной выше), то $E'(k) = F'(k) = -k(kF(k))'$. Пользуясь формулой (2), из последнего соотношения находим

$$F'(k) = \frac{E(k)}{k(1 - k)} - \frac{F(k)}{k}. \quad (3)$$

Из формулы (2) следует, что $F(k) = E(k) - kE'(k)$, $F' = -kE''$. Подставляя $F(k)$ и $F'(k)$ в (3), приходим к указанному дифференциальному уравнению.

Наконец, так как числа k_0 и k_1 могут быть как угодно близкими к нулю и единице соответственно, то отсюда следует, что все полученные выше результаты справедливы при $0 < k < 1$. ►

12. Доказать, что функция Бесселя

$$I_n : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2 I_n''(x) + x I_n'(x) + (x^2 - n^2) I_n(x) = 0.$$

◀ Вычисляя производную от данного интеграла и интегрируя по частям, находим

$$I_n'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\varphi - x \sin \varphi) d(\cos \varphi) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n}{\pi} \int_0^\pi \cos \varphi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi - \frac{x}{\pi} \int_0^\pi (1 - \sin^2 \varphi) \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{n}{\pi} \int_0^\pi \cos \varphi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi - x I_n(x) - x I_n''(x). \quad (1)
 \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi)(n - x \cos \varphi) d\varphi = 0$, то

$$\frac{x}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = n I_n(x). \quad (2)$$

Умножая обе части соотношения (1) на x и учитывая тождество (2), получаем уравнение Бесселя. ►

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

$$13. I(a) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

◀ Пусть $||a| - 1| \geq \epsilon > 0$. Тогда функции $f : (a, x) \mapsto \ln(1 - 2a \cos x + a^2)$, $f'_a : (a, x) \mapsto \frac{2(a - \cos x)}{1 - 2a \cos x + a^2}$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(\epsilon, x) \mid ||a| - 1| \geq \epsilon > 0, 0 \leq x \leq \pi\}$ и, в соответствии с теоремой 1, п.1.3, возможно дифференцирование по параметру a под знаком интеграла. Имеем

$$I'(a) = 2 \int_0^\pi \frac{a - \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx.$$

Используя подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, приводим интеграл к виду

$$I'(a) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{a - 1 + (a + 1)t^2}{(1 + t^2)((1 - a)^2 + (1 + a)^2 t^2)} dt.$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов и формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$I'(a) = \begin{cases} \frac{2\pi}{a}, & \text{если } |a| \geq 1 + \epsilon, \\ 0, & \text{если } |a| \leq 1 - \epsilon. \end{cases}$$

Отсюда

$$I(a) = \begin{cases} 2\pi \ln |a| + C_1, & \text{если } |a| \geq 1 + \epsilon, \\ C_2, & \text{если } |a| \leq 1 - \epsilon, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Поскольку полученный результат справедлив при сколь угодно малом $\epsilon > 0$, то

$$I(a) = \begin{cases} 2\pi \ln |a| + C_1, & \text{если } |a| > 1, \\ C_2, & \text{если } |a| < 1. \end{cases} \quad (1)$$

Для вычисления $I(\pm 1)$ используем исходный интеграл:

$$I(\pm 1) = \int_0^\pi \ln(2(1 \pm \cos x)) dx = 2\pi \ln 2 + 4 \int_0^\pi \ln \sin t dt = 0. \quad (2)$$

Поскольку $I(0) = 0$, то $C_2 = 0$. Кроме того, как видим из (1), $\lim_{|a| \rightarrow 1^-} I(a) = 0$. Следовательно, с учетом тождества (2) находим, что функция I непрерывна в точках $a = 1$, $a = -1$ соответственно слева и справа.

Замечая, что

$$I\left(\frac{1}{a}\right) = \int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{a^2}(a^2 - 2a \cos x + 1)\right) dx = -2\pi \ln|a| + I(a), \quad a \neq 0, \quad (3)$$

приходим к выводу, что функция I непрерывна в указанных точках также справа и слева. Действительно, в этом случае из соотношения (3) находим

$$\lim_{|a| \rightarrow 1+0} I(a) = 2\pi \lim_{|a| \rightarrow 1+0} \ln|a| + \lim_{|a| \rightarrow 1+0} I\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{|a| \rightarrow 1+0} I(a) = 0.$$

Таким образом, функция I непрерывна при всех a . Поэтому, полагая $C_1 = 0$, имеем

$$I(a) = \begin{cases} 2\pi \ln|a|, & \text{если } |a| > 1, \\ 0, & \text{если } |a| \leq 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

$$14. \quad I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$$

◀ Пусть $a \geq \varepsilon > 0$. Тогда функции

$$f : (x, a) \mapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}, & x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = 0, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad f'_a : (x, a) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(x, \varepsilon) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, a \geq \varepsilon > 0\}$. Поэтому, согласно теореме 1, п.1.3, при $a \geq \varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2 t^2)} = \frac{\pi}{2(1+a)};$$

из которого интегрированием находим

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + C, \quad (1)$$

где C — произвольная постоянная.

Поскольку $\varepsilon > 0$ может быть произвольно мало, то полученный результат справедлив при всяком $a > 0$. Тогда из (1) следует, что

$$C = \lim_{a \rightarrow +0} I(a). \quad (2)$$

Таким образом, если исходный интеграл представляет собой непрерывную функцию параметра a , то, с учетом (2), имеем $C = I(0)$. Но интеграл действительно непрерывен по a в силу теоремы 1, п.1.1. Следовательно, $C = 0$ и $I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)$ при $a \geq 0$.

Учитывая еще очевидное равенство $I(a) = I(|a|) \operatorname{sgn} a$, окончательно находим $I(a) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \cdot \ln(1+|a|) \forall a$. ▶

$$15. \quad I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \frac{dx}{\cos x}; \quad |a| < 1.$$

◀ Функции

$$f : (x, a) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 2a, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad f'_a : (x, a) \mapsto \frac{1}{1-a^2 \cos^2 x}$$

непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(x, a) \mid |a| \leq 1 - \varepsilon < 1, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$. Поэтому, в соответствии с п.1.3,

$$I'(a) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2 \cos^2 x} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1-a^2+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

откуда $I(a) = \pi \arcsin a + C$.

Устремляя ε к нулю, замечаем, что этот ответ правилен при $|a| < 1$. Так как $I(0) = 0$, то $C = 0$. Таким образом, $I(a) = \pi \arcsin a$. ►

16. Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}, \quad x \neq 0, \quad (1)$$

вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (2)$$

◀ Интеграл (2) является несобственным, поэтому его следует понимать как предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Подставляя сюда интеграл (1), получаем

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}. \quad (3)$$

Так как функция $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{(1+x^2 y^2)\sqrt{1-x^2}}$ является непрерывной на прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 - \varepsilon, 0 \leq y \leq 1\}$, то из (3), используя теорему п.1.4, находим

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^1 dy \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1+x^2 y^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Сделав в интеграле $A = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2 y^2)}$, $|x| < 1$, подстановку $t = \arcsin x$, получаем

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \left(z \sqrt{1+y^2} \right), \quad z = \operatorname{tg}(\arcsin x).$$

Следовательно,

$$B(\varepsilon, y) = A|_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1+y^2} \operatorname{tg}(\arcsin(1-\varepsilon)) \right).$$

Поскольку функция B при $0 \leq \epsilon \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ является непрерывной (при $\epsilon = 0$ полагаем $B(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} B(\epsilon, y)$), то в соответствии с теоремой 1, п.1.2, имеем

$$I = \int_0^1 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} B(\epsilon, y) dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}). \blacktriangleright$$

17. Вычислить интегралы:

$$I_1 = \int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx; \quad I_2 = \int_0^1 \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

◀ Используя представление (1) из предыдущего примера, вместо данных интегралов рассматриваем повторные:

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_a^b x^y \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) dy; \quad I_2 = \int_0^1 dx \int_a^b x^y \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) dy.$$

Функции

$$f_1 : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^y \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right), & 0 < x \leq 1, \quad a \leq y \leq b, \\ 0, & x = 0, \quad a \leq y \leq b, \end{cases}$$

$$f_2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^y \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right), & 0 < x \leq 1, \quad a \leq y \leq b, \\ 0, & x = 0, \quad a \leq y \leq b, \end{cases}$$

непрерывны, поэтому можно выполнить перестановку интегралов:

$$I_1 = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx, \quad I_2 = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) dx.$$

Произведя подстановку $x = e^{-t}$, получаем

$$I_1 = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \sin t dt, \quad I_2 = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \cos t dt,$$

Выполняя внутреннее интегрирование, находим

$$I_1 = \int_a^b \frac{dy}{(y+1)^2 + 1}, \quad I_2 = \int_a^b \frac{(y+1) dy}{(y+1)^2 + 1},$$

откуда

$$I_1 = \operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2}. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Доказать, что функция $F : y \mapsto \int_a^b \varphi(x) f(x, y) dx$ является непрерывной на $[c, d]$, если выполнены условия:

- 1) функция f непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$;
- 2) функция φ абсолютно интегрируема на интервале $[a, b]$.

Исследовать на непрерывность следующие функции:

$$2. F : y \mapsto \int_0^1 \frac{dx}{x^4(x^2+y^2+1)}. \quad 3. F : y \mapsto \begin{cases} \int_0^\pi \frac{y^2 dx}{(x+|y|)\sqrt{\operatorname{tg} \frac{y}{2}}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

$$4. F : y \mapsto \begin{cases} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{\frac{1}{3}} dx}{\operatorname{arctg}(x^2+y^2)\sin x}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Найти пределы:

$$5. \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^2 \frac{\sin(x+y) dx}{x^2 y^2 + xy + 1}. \quad 6. \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^2 \frac{y}{y+x} e^{-x^2 y} dx.$$

$$7. \lim_{y \rightarrow 0} \int_{y^2}^{y^2+1} \frac{\arcsin x dx}{xy + (1+y^2)\frac{1}{y^2}}. \quad 8. \lim_{y \rightarrow +0} \int_{[y]}^{\operatorname{sgn} y} \frac{\sin(xy)}{(x+y)y+1} dx.$$

Доказать, что в следующих случаях возможен предельный переход под знаком интеграла:

$$9. \int_0^2 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x+y^2}} dx, \quad y \rightarrow +\infty. \quad 10. \int_{-1}^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{xy}{1+y}\right) dx, \quad y \rightarrow 0.$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} \sin \frac{x^2}{y} dx, \quad y \rightarrow \infty. \quad 12. \int_0^1 \frac{\arccos(x+y) dx}{x+y+2}, \quad y \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

13. Пусть: 1) функция $\psi : (x, y) \mapsto \frac{\partial f(x, y)}{dy}$ непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$;

2) функция φ абсолютно интегрируема на $]a, b[$. Тогда функция $F : y \mapsto \int_a^b \varphi(x) f(x, y) dx$ непрерывно дифференцируема на $]c, d[$. Доказать это.

Исследовать на непрерывную дифференцируемость функцию F и возможность дифференцирования по параметру под знаком интеграла, если:

$$14. F : y \mapsto \int_0^2 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx. \quad 15. F : y \mapsto \int_{-1}^1 \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^2+|y|+2}.$$

Доказать, что в следующих повторных интегралах можно изменить порядок интегрирования:

$$16. \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\cos(xy)}{x+y} dx. \quad 17. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^1 \frac{\operatorname{tg}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dx.$$

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов

2.1. Определение равномерной сходимости.

Пусть несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \tag{1}$$

где функция f определена в области $\Pi = \{(x, y) \mid a \leq x < +\infty, y_1 < y < y_2\}$, сходится на интервале $]y_1, y_2[$. Говорят, что интеграл (1) равномерно сходится на $]y_1, y_2[$, если $\forall \epsilon > 0$

$\exists B > a$ такое, что $\forall b > B \wedge \forall y \in [y_1, y_2]$ выполняется неравенство

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

2.2. Критерий Коши.

Для того чтобы интеграл (1), п.2.1, сходился равномерно на $[y_1, y_2]$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists A > a$ такое, что $\forall \alpha > A \wedge \forall \beta > A \wedge \forall y \in [y_1, y_2]$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

2.3. Признак Вейерштрасса.

Несобственный интеграл (1), п.2.1, сходится абсолютно и равномерно на $[y_1, y_2]$, если $\exists F : [a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $|f(x, y)| \leq F(x) \forall x \in [a, +\infty] \wedge \forall y \in [y_1, y_2]$ и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ сходится. Функция F называется *мажорирующей* по отношению к функции f .

2.4. Предельный переход под знаком интеграла.

Теорема 1. Если 1) функция $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна по переменной x и при $y \rightarrow y_0 \in [y_1, y_2]$ равномерно относительно x стремится к предельной функции g на каждом отрезке $[a, A]$; 2) интеграл (1), п.2.1, сходится равномерно на $[y_1, y_2]$, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Теорема 2. Если функция f непрерывна при $a \leq x < +\infty, y_1 \leq y \leq y_2$ и интеграл (1), п.2.1, сходится равномерно на $[y_1, y_2]$, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0 \in [y_1, y_2]} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx.$$

2.5. Непрерывность несобственного интеграла.

Теорема 1. Если функция f непрерывна в области $a \leq x < +\infty, y_1 \leq y \leq y_2$ и интеграл (1), п.2.1, сходится равномерно на отрезке $[y_1, y_2]$, то он представляет собой значение непрерывной функции на этом отрезке.

Теорема 2. Если: 1) функция f непрерывна и ограничена в указанной области; 2) функция φ интегрируема на каждом отрезке $a \leq x \leq A$; 3) интеграл $\int_a^{+\infty} |\varphi(x)| dx$ сходится, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \varphi(x) dx$$

сходится равномерно и является значением равномерно-непрерывной функции параметра y на отрезке $[y_1, y_2]$.

Аналогичные определение и теоремы справедливы и для интегралов от неограниченных функций.

Определить области сходимости интегралов:

$$18. \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx.$$

◀ Положим для определенности, что $p \geq q$. Функция

$$x \mapsto \int_{\pi}^x \cos t dt = \sin x$$

ограничена. Функция $x \mapsto \frac{1}{x^{p-1}}$ монотонно стремится к нулю при $p > 1$. Следовательно, интеграл

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} dx,$$

в силу признака Дирихле, сходится при $p > 1$. Так как функция $x \mapsto \frac{1}{1+x^{q-p}}$ монотонна и ограничена при $x > \pi$, то интеграл

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} \cdot \frac{dx}{1+x^{q-p}}$$

по признаку Абеля, сходится при $p > 1$, т. е. при $\max(p, q) > 1$.

Это условие является и необходимым. Действительно, представляя интеграл в виде ряда и пользуясь теоремой о среднем, получаем

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1} + x^{q-1}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2}(2n+1)}^{\frac{\pi}{2}(2n+3)} \frac{\cos x dx}{x^{p-1} + x^{q-1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\xi_n^{p-1} + \xi_n^{q-1}}, \quad \frac{\pi}{2}(2n+1) \leq \xi_n < \frac{\pi}{2}(2n+3).$$

Из необходимого условия сходимости ряда вытекает неравенство $\max(p, q) > 1$, что и требовалось доказать. ►

$$19. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx.$$

◀ Произведем замену переменной x по формуле $x = t^{\frac{1}{q}}$, $t > 0$, $q > 0$, и разобьем полученный интеграл на два интеграла. Тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx = \frac{1}{q} \int_0^a \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt + \frac{1}{q} \int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt, \quad \alpha = \frac{p-1}{q} + 1, \quad a > 0.$$

Так как $\frac{\sin t}{t^{\alpha}} = O^*\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)$ при $t \rightarrow +0$, то первый интеграл, в силу признака сравнения, сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geq 2$. Второй интеграл, в силу признака Дирихле, сходится при $\alpha < 2$. При $\alpha \leq 0$ этот интеграл расходится, так как при этом условии расходится соответствующий числовой ряд. Действительно, поскольку

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin t|}{t} dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\xi_n^{\alpha}}, \quad \pi n \leq \xi_n \leq \pi(n+1),$$

то это утверждение становится очевидным.

Следовательно, если $q > 0$, то исходный интеграл сходится при условии $0 < \frac{p+q-1}{q} < 2$, или, что то же самое, при $|p - 1| < q$.

Гл. 1. Интегралы, зависящие от параметра

Если $q < 0$, то, полагая $q = -q_1$, $q_1 > 0$, и производя аналогичные выкладки и рассуждения, приходим к такому условию сходимости данного интеграла: $|p-1| < q_1$, или $|p-1| < -q$. Объединяя оба случая и учитывая, что при $q = 0$ интеграл расходится, приходим к выводу, что данный интеграл может сходиться только при условии $\left| \frac{p-1}{q} \right| < 1$. ►

$$20. \int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}.$$

◀ Положим $x = e^{-t}$. Тогда получим

$$\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p} = \int_{-\ln 2}^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{|t|^p} = \int_{-\ln 2}^1 \frac{e^{-t} dt}{|t|^p} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^p}. \quad (1)$$

Поскольку $\frac{e^{-t}}{|t|^p} = O^* \left(\frac{1}{|t|^p} \right)$ при $t \rightarrow 0$, то первый интеграл в правой части равенства (1), в силу признака сравнения, сходится лишь при $p < 1$. Второй интеграл сходится при всяком p , так как $e^{-t} > t^{2-p}$ при достаточно большом t . Последнее неравенство вытекает из того, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{2-p}}{e^{-t}} = 0$. Следовательно, данный интеграл сходится лишь при $p < 1$. ►

$$21. \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx.$$

◀ Положим $t = (1-x)^{-1}$, $x \neq 1$. Тогда получим

$$\int_0^1 \frac{\cos(1-x)^{-1}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t dt}{t^{2-n-1} (2 - \frac{1}{t})^{\frac{1}{n}}}.$$

Поскольку функция $f : t \mapsto \frac{1}{(2 - \frac{1}{t})^{\frac{1}{n}}}$, $t > 1$, монотонна и ограничена, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t dt}{t^{2-n-1}}$, в силу признака Дирихле, сходится при $n < 0$ или при $n > \frac{1}{2}$, то рассматриваемый интеграл сходится, в силу признака Абеля, при этом же условии. Пользуясь приемом, примененным в примере 18, можно показать, что это условие является необходимым. ►

$$22. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx, p > 0.$$

◀ Разобьем данный интеграл на два

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx. \quad (1)$$

Так как $f(x) = \frac{\sin x}{x^p + \sin x} \sim \frac{1}{x^{p-1} + 1}$ при $x \rightarrow +0$, то первый интеграл в правой части равенства (1) сходится при любом p (точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва функции f). Поскольку

$$\frac{\sin x}{x^p + \sin x} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} + o \left(\frac{1}{x^{2p}} \right) = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{1}{2x^{2p}} + \frac{\cos 2x}{2x^{2p}} + o \left(\frac{1}{x^{2p}} \right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

и интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{2p}} dx$, $p > 0$, в силу признака Дирихле, сходятся, а интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p}} \text{ сходится лишь при } p > \frac{1}{2}, \text{ то второй интеграл из (1) сходится лишь при } p > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, исходный интеграл сходится при этом же условии. ►

Исследовать сходимость интегралов путем сравнения их с рядами:

$$23. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x}, n > 0.$$

◀ Поскольку

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(k\pi+t) dt}{1+(k\pi+t)^n \sin^2 t},$$

то будем исследовать сходимость последнего ряда.

Легко видеть, что

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{k\pi dt}{1+(k+1)^n \pi^n \sin^2 t} < \int_0^{\pi} \frac{(k\pi+t) dt}{1+(k\pi+t)^n \sin^2 t} < \int_0^{\pi} \frac{(k+1)\pi dt}{1+k^n \pi^n \sin^2 t} = I_2,$$

где $I_1 = \frac{k\pi^2}{\sqrt{1+(k+1)^n \pi^2}}, I_2 = \frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+k^n \pi^2}}$. Так как $I_1 = O^* \left(\frac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}} \right), I_2 = O^* \left(\frac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}} \right)$ при $k \rightarrow \infty$, то, по признаку сравнения, ряд, а значит и интеграл, сходится лишь при $n > 4$. ►

$$24. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

◀ Представив данный интеграл в виде

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}},$$

будем рассматривать последний ряд. Полагая $x = n\pi + t$, имеем

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{(n\pi+t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}}.$$

Заметим попутно, что этот интеграл является несобственным и сходится по признаку сравнения $\left(\frac{1}{(n\pi+t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}} = O^* \left(\frac{1}{t^{\frac{p}{3}}} \right) \text{ при } t \rightarrow +0, \frac{1}{(n\pi+t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}} = O^* \left(\frac{1}{(\pi-t)^{\frac{p}{3}}} \right), t \rightarrow \pi - 0 \right)$.

В силу оценок

$$\frac{1}{\pi^p (n+1)^p} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}} < \int_0^{\pi} \frac{dt}{(n\pi+t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}} < \frac{1}{\pi^p n^p} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}},$$

исследуемый ряд (интеграл) сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ который сходится только при $p > 1$. Следовательно, исходный интеграл сходится при этом же условии. ►

25. Доказать, что если: 1) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на $[y_1, y_2]$ и 2)

функция φ ограничена и монотонна по x , то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \varphi(x, y) dx \quad (1)$$

сходится равномерно на $]y_1, y_2[$.

◀ Пусть произвольное число $\varepsilon > 0$ задано. В силу условия 1) согласно критерию Коши, $\exists B(\varepsilon)$ такое, что $\forall b', \xi, b'' > B(\varepsilon)$ независимо от $y \in]y_1, y_2[$ выполняются неравенства

$$\left| \int_{b'}^{\xi} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \left| \int_{\xi}^{b''} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad (2)$$

где $M = \sup_{x, y} |\varphi(x, y)| \neq 0$ (при $M = 0$ теорема, очевидно, справедлива).

Далее, поскольку функция φ монотонна по x , а функция f интегрируема, то, по второй теореме о среднем, имеем

$$\int_{b'}^{b''} f(x, y) \varphi(x, y) dx = \varphi(b' + 0, y) \int_{b'}^{\xi} f(x, y) dx + \varphi(b'' - 0, y) \int_{\xi}^{b''} f(x, y) dx,$$

где $b' \leq \xi \leq b''$. Отсюда, учитывая неравенства (2), получаем оценку

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x, y) \varphi(x, y) dx \right| \leq |\varphi(b' + 0, y)| \left| \int_{b'}^{\xi} f(x, y) dx \right| + |\varphi(b'' - 0, y)| \left| \int_{\xi}^{b''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

$\forall y \in]y_1, y_2[$. А это, по критерию Коши, и означает, что интеграл (1) сходится равномерно в указанной области. ►

26. Доказать, что если: 1) функция $\varphi(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, $y \in]y_1, y_2[$, и монотонна по x , $x \in]a, +\infty[$; 2) первообразная $\int_a^x f(t, y) dt$, $y_1 < y < y_2$, ограничена абсолютной постоянной M , то интеграл

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x, y) f(x, y) dx \quad (1)$$

равномерно сходится в области $]y_1, y_2[$.

◀ К интегралу

$$\int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y) dx, \quad b', b'' \in]a, +\infty[,$$

применим вторую теорему о среднем. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y) dx \right| &= \left| \varphi(b' + 0, y) \int_{b'}^{\xi} f(x, y) dx + \varphi(b'' - 0, y) \int_{\xi}^{b''} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq M (|\varphi(b' + 0, y)| + |\varphi(b'' - 0, y)|). \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi(x, y)$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ равномерно по параметру $y \in]y_1, y_2[$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists B(\varepsilon)$ такое, что $|\varphi(b' + 0, y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ и $|\varphi(b'' - 0, y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ при $y_1 < y < y_2$, если только $b' > B \wedge b'' > B$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists B(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \forall y \in]y_1, y_2[,$$

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость 21
если только $b' > B$ и $b'' > B$. В силу критерия Коши, интеграл (1) сходится равномерно в области $]y_1, y_2[$, что и требовалось доказать. ►

27. Доказать, что равномерно сходящийся интеграл

$$I = \int_1^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y} \right)^2 \right\} dx, \quad 0 < y < 1,$$

нельзя мажорировать сходящимся интегралом, не зависящим от параметра.

◀ Интеграл $L = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ сходится, а поэтому $\forall \epsilon > 0 \exists B(\epsilon)$ такое, что

$$\int_{B(\epsilon)}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \epsilon. \quad (1)$$

Выберем число A так, чтобы

$$A > \frac{2L}{\epsilon} + B(\epsilon). \quad (2)$$

Произведя в интеграле $\int_A^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y} \right)^2 \right\} dx$ замену $t = \frac{1}{y} \left(x - \frac{1}{y} \right)$ и используя неравенства (1) и (2), получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y} \right)^2 \right\} dx &= y \int_{\frac{1}{y} \left(A - \frac{1}{y} \right)}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \\ &< \begin{cases} y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2Ly < \epsilon, & 0 < y < \frac{\epsilon}{2L}, \\ \int_{\frac{1}{y} \left(A - \frac{1}{y} \right)}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \int_{A - \frac{2L}{\epsilon}}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \int_B^{+\infty} e^{-t^2} dt < \epsilon, & \frac{\epsilon}{2L} \leq y < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

из которой непосредственно следует равномерная сходимость интеграла на $]0, 1[$.

Что же касается мажорирования, то здесь можно привести следующие соображения. Предположим, что такая мажорантная функция F существует. Тогда должно быть

$$f(x, y) = \exp \left\{ -\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y} \right)^2 \right\} \leq F(x).$$

Легко видеть, что благодаря конструкции области определения функции $f :]1, +\infty[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ $\forall x \exists y = \frac{1}{x}$ такое, что $f(x, y) = 1$. Таким образом, $F(x) \geq 1 \forall x$. Очевидно, соответствующий несобственный интеграл от $F(x)$ расходится. ►

28. Показать, что интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

1) сходится равномерно в любом промежутке $0 < a \leq \alpha \leq b$ и 2) сходится неравномерно в промежутке $0 \leq \alpha \leq b$.

◀ В первом случае легко построить мажорирующую функцию $F : x \mapsto b e^{-\alpha x}$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно.

Гл. 1. Интегралы, зависящие от параметра

Во втором случае, произведя замену $t = \alpha x$, $x > 0 \wedge \alpha > 0$, получим

$$\int_B^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \int_{\alpha B}^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-\alpha B}.$$

Отсюда следует, что $\forall B > 0 \exists \alpha, \alpha \in]0, b[$, такое, что $e^{-\alpha B} > \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Например, число α можно выбрать из неравенства $0 < \alpha < \frac{1}{B} \ln \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, в этом случае интеграл сходится иеравномерно. ►

29. Доказать, что интеграл Дирихле

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

1) сходится равномерно на каждом отрезке $[a, b]$, не содержащем значения $\alpha = 0$, и 2) сходится иеравномерно на каждом отрезке $[a, b]$, содержащем значение $\alpha = 0$.

◀ В первом случае воспользуемся примером 25. Здесь функция $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow +\infty$ монотонно стремится к нулю (и равномерно относительно параметра α). Первообразная

$$\int_a^x \sin \alpha t dt = \frac{1}{\alpha} (\cos \alpha a - \cos \alpha x)$$

ограничена числом $\frac{2}{\min(|a|, |b|)}$. Следовательно, согласно примеру 25, данный интеграл сходится равномерно.

Во втором случае положим $x = \alpha t$, $\alpha > 0 \wedge t > 0$. Тогда получим

$$\int_B^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{B\alpha}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Отсюда следует, что $\forall B > 0 \exists \alpha \in [a, b]$ такое, что

$$\left| \int_B^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \right| > \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \int_{0,1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Действительно, для этого достаточно взять $\alpha \leq \frac{0,1}{B}$.

При $\alpha < 0$ применяем подстановку $x = -\alpha t$ и, проводя аналогичные рассуждения, приходим к такому же выводу.

Таким образом, в этом случае интеграл сходится иеравномерно. ►

30. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ в следующих промежутках:

a) $1 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$; б) $1 < \alpha < +\infty$.

◀ а) Легко видеть, что $\frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}}$ при $1 \leq x < +\infty$, $\alpha_0 \leq \alpha < +\infty$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно.

б) Поскольку $\int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ и $\lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1} = +\infty$, то $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall B_0 \exists B >$

$B_0 \wedge \exists \alpha \in]1, +\infty[$ такие, что $\int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} > \varepsilon$. Следовательно, интеграл в этом случае сходится иеравномерно. ►

31. Показать, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$ сходится неравномерно на интервале $1 < \alpha < +\infty$.

◀ Пусть $B > 1$. Тогда справедлива оценка

$$\int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1} > \frac{1}{2} \int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \rightarrow +\infty, \alpha \rightarrow 1+$$

указывающая на то, что данный интеграл сходится неравномерно (см. пример 30). ►

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие интегралы:

32. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, -\infty < \alpha < +\infty.$

◀ Поскольку $\frac{|\cos \alpha x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}, -\infty < \alpha < +\infty$, и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно. ►

33. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1}, 0 \leq \alpha < +\infty.$

◀ В интеграле $I(B, \alpha) = \int_B^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1}$ произведем замену $x = \alpha + t$. Тогда $I(B, \alpha) = \int_{B-\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1}$. Если положить $\alpha = B > 0$, то при любом B будет $I(B, \alpha) > \epsilon$, где $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, данный интеграл сходится неравномерно. Заметим, что сходимость рассматриваемого интеграла при фиксированном α , $0 \leq \alpha < +\infty$, следует из признака сравнения $\left(\frac{1}{(x-\alpha)^2 + 1} \sim \frac{1}{x^2}, x \rightarrow +\infty \right)$. ►

34. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, 0 \leq \alpha < +\infty.$

◀ Воспользуемся примером 25. Здесь $f(x, \alpha) = \frac{\sin x}{x}$, $\varphi(x, \alpha) = e^{-\alpha x}$. Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, согласно признаку Дирихле, сходится, а функция $x \mapsto e^{-\alpha x}$ монотонна по x ($(e^{-\alpha x})'_x = -\alpha e^{-\alpha x} \leq 0$) и ограничена единицей. Следовательно, согласно указанному примеру, данный интеграл сходится равномерно. ►

35. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx, 0 \leq p \leq 10.$

◀ Поскольку $\frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \leq \left(\frac{40}{e}\right)^{10} \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$ при $x \geq e$, то, согласно признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно. ►

36. $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx, 0 \leq \alpha < +\infty$, где $p > 0$ фиксировано.

◀ В силу того, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ при $p > 0$ сходится (по признаку Дирихле), а функция $x \mapsto e^{-\alpha x}$ монотонна по x и ограничена единицей, то, согласно примеру 25, данный интеграл сходится равномерно. ►

$$37. \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx, \quad 0 \leq \alpha < +\infty.$$

◀ Полагая $\sqrt{\alpha}x = t$ в интеграле $\int_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx$, имеем

$$\int_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{B\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Взяв $\alpha = \frac{1}{B^2}$, $B > \alpha$, получаем неравенство $\int_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx > \varepsilon$, справедливо при любом

B , если

$$0 < \varepsilon < \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Следует заметить, что данный интеграл при $\alpha \geq 0$ сходится по признаку сравнения. ►

$$38. I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy, \quad -\infty < x < +\infty.$$

◀ Очевидно, $I(0) = 0$. Полагая в данном интеграле $t = |x|y$, $x \neq 0$, получаем $I(x) = C \frac{\sin x}{|x|} e^{-x^2} \left(C = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \neq 0 \right)$. Так как $\lim_{x \rightarrow -0} I(x) = -C$, $\lim_{x \rightarrow +0} I(x) = C$, то функция I

разрывна в нуле. А тогда, согласно теореме 1, п. 2.5, интеграл сходится неравномерно (если бы он сходился равномерно, то, в силу непрерывности подынтегральной функции, представлял бы собой непрерывную функцию). ►

$$39. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx, \quad p \geq 0.$$

◀ Произведя замену $x = \sqrt{t}$, получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t dt}{2 \left(1+t^{\frac{p}{2}} \right) \sqrt{t}}.$$

Поскольку интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, в силу признака Дирихле, сходится, а функция $t \mapsto \frac{1}{2 \left(1+t^{\frac{p}{2}} \right)}$, $p \geq 0$, монотонна по t и ограничена числом 0,5, то, согласно примеру 25, данный интеграл сходится равномерно. ►

$$40. \int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx, \text{ если: а) } p \geq p_0 > 0; \text{ б) } p > 0, q > -1.$$

◀ Произведем замену переменной x по формуле $x = e^{-t}$, $t > 0$. Тогда получим

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx = \int_0^{+\infty} t^q e^{-pt} dt.$$

а) Поскольку $t^q e^{-pt} \leq t^q e^{-p_0 t}$ и интеграл $\int_0^{+\infty} t^q e^{-p_0 t} dt$, в силу признака сравнения, сходится, то, согласно признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно.

б) В интеграле $I(B, p) = \int_B^{+\infty} t^q e^{-pt} dt$, $B > 0$, положим $z = pt$. Тогда получим

$$I(B, p) = \frac{1}{p^{q+1}} \int_{Bp}^{+\infty} z^q e^{-z} dz.$$

Пусть числа $B > 0$ и $\epsilon > 0$ заданы. Тогда в силу того, что

$$\lim_{p \rightarrow +0} \frac{1}{p^{q+1}} \int_{Bp}^{+\infty} z^q e^{-z} dz = +\infty,$$

всегда можно выбрать число $p > 0$ так, что $I(B, p) > \epsilon$.

Итак, данный интеграл сходится неравномерно. ►

41. $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad 0 \leq n \leq +\infty.$

◀ Поскольку $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно. ►

42. $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n}, \quad 0 < n < 2.$

◀ Положим $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$. Тогда

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-n}} dt.$$

Далее, интегрированием по частям находим

$$\int_B^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-n}} dt = \frac{\cos B}{B^{2-n}} + (n-2) \int_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-n}} dt. \quad (1)$$

Последний интеграл, в силу примера 26, сходится равномерно (здесь функция $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t^{3-n}} \leq \frac{1}{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и монотонна по t , первообразная $\int_a^x \cos t dt = \sin x - \sin a$ ограничена числом

2). Поэтому при достаточно большом B справедлива оценка $\left| \int_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-n}} dt \right| < \epsilon_1$, где $\epsilon_1 > 0$ — наперед заданное число.

Что же касается слагаемого $\frac{\cos B}{B^{2-n}}$ в (1), то оно не может быть сделано как угодно малым при всех достаточно больших $b \geq B$ равномерно относительно параметра n . Действительно, пусть $B > 0$ задано. Пусть, кроме этого, $0 < \epsilon_2 \leq \frac{1}{2}$. Тогда, выбирая число $b = 2k\pi > B$, $k \in \mathbb{N}$, значение параметра n из неравенства $0 < 2 - n < \frac{\ln \epsilon_2^{-1}}{\ln 2k\pi}$, получаем $\left| \frac{\cos b}{b^{2-n}} \right| = \frac{1}{(2k\pi)^{2-n}} > \epsilon_2$.

Следовательно, исследуемый интеграл сходится неравномерно.

Заметим, что сходимость данного интеграла при $0 < n < 2$ вытекает из признака Дирихле. ►

43. $\int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, \quad |\alpha| < \frac{1}{2}.$

◀ Поскольку

$$0 \leq \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \leq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, & 0 < x < 1, \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

то

$$\int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} + \int_1^2 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}.$$

В силу оценок

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} &= O^* \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right), \quad x \rightarrow +0, \\ \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} &= O^* \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \right), \quad x \rightarrow 1, \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} &= O^* \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} \right), \quad x \rightarrow 2, \end{aligned}$$

и признака сравнения, два последних интеграла сходятся. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, исследуемый интеграл сходится равномерно. ►

44. Подобрать число $b > 0$ так, чтобы $0 < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < \epsilon$ при $1,1 \leq n \leq 10$, где $\epsilon = 10^{-6}$.

◀ Поскольку $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{1,1}}$, то

$$0 < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^{1,1}} = \frac{10}{b^{0,1}}.$$

Таким образом, решая неравенство $\frac{10}{b^{0,1}} < 10^{-6}$, находим, что если $b > 10^{70}$, то указанное в условии примера неравенство будет обеспечено. ►

45. Пусть интеграл

$$\int_a^b f(x, y) dx, \quad c < y < d, \tag{1}$$

является несобственным сходящимся интегралом и $x = \varphi(y)$, $\varphi(y) \in]a, b[$, есть кривая бесконечного разрыва функции f (подвижная особенность). Интеграл (1) будем называть *равномерно сходящимся на интервале $]a, b[$* , если $\forall \epsilon > 0 \exists \Delta > 0$ такое, что для любых δ_1 и δ_2 из неравенств $0 < \delta_1 < \Delta \wedge 0 < \delta_2 < \Delta$ следует неравенство

$$\left| \int_{\varphi(y)-\delta_1}^{\varphi(y)+\delta_2} f(x, y) dx \right| < \epsilon \quad \forall y \in]c, d[.$$

Показать, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin(x, y)}{\sqrt{|x-y|}} dx, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

◀ Пусть $\epsilon > 0$ задано. Покажем, что

$$\left| \int_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{\sin(x, y)}{\sqrt{|x-y|}} dx \right| < \epsilon \quad \forall y \in [0, 1] \quad (2)$$

в смысле данного выше определения.

Имеем

$$\left| \int_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{\sin(x, y)}{\sqrt{|x-y|}} dx \right| \leq \int_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x-y|}} = \int_{y-\delta_1}^y \frac{dx}{\sqrt{y-x}} + \int_y^{y+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{x-y}} = 2(\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}) < 4\sqrt{\Delta} \quad (3)$$

для любых δ_1 и δ_2 таких, что $0 < \delta_1 < \Delta$ и $0 < \delta_2 < \Delta$.

Если теперь $\forall \epsilon > 0$ взять $\Delta = \frac{\epsilon^2}{16}$, то из (3) получим неравенство (2). Следовательно, данный интеграл сходится равномерно. ►

46. Несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} M(x, y) dx, \quad y \in Y, \quad (1)$$

где M — матричная функция, называется *равномерно сходящимся на множестве Y* , если $\forall \epsilon > 0 \exists A_0 \geq a$ такое, что $\forall A > A_0 \wedge \forall y \in Y$ выполняется неравенство

$$\left\| \int_A^{+\infty} M(x, y) dx \right\| < \epsilon,$$

где $M(x, y) = (a_{ij}(x, y))$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Доказать, что равномерная сходимость интеграла (1) эквивалентна равномерной сходимости всех интегралов

$$\int_a^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \text{ на } Y. \quad (2)$$

◀ 1. Пусть интегралы (2) сходятся равномерно. Тогда $\forall \epsilon > 0 \exists A_0 \geq a$ такое, что $\forall A > A_0 \wedge \forall y \in Y$ выполняются неравенства

$$\left| \int_A^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \right| < \epsilon, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

С учетом этих неравенств имеем оценку

$$\left\| \int_A^{+\infty} M(x, y) dx \right\| = \left\| \left(\int_A^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \right) \right\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\int_A^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon \sqrt{mn},$$

которая показывает, что несобственный интеграл (1) сходится равномерно.

2. Пусть интеграл (1) сходится равномерно на Y . Тогда выполняется данное в условии определение, а значит, справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\int_A^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \right)^2} < \epsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \int_A^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \right| < \epsilon \quad \forall y \in Y, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n,$$

т. е. несобственные интегралы от всех элементов матрицы $M(x, y)$ сходятся равномерно. ►

47. Исследовать на равномерную сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} M(x, y) dx, \quad y \in Y, \quad Y = [0, +\infty[, \quad M(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-x(y+1)} \sin x & \frac{\cos x(y+0,1)}{x+y} \\ x^{1-y} e^{-x} & \ln \left(1 + \frac{y}{x^2+y^3} \right) \end{pmatrix}.$$

◀ Согласно доказанному выше, равномерная сходимость данного интеграла эквивалентна равномерной сходимости интегралов от элементов матрицы $M(x, y)$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x(1+y)} \sin x dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x(y+0,1)}{x+y} dx, \quad \int_1^{+\infty} x^{1-y} e^{-x} dx, \quad \int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{y}{x^2+y^3} \right) dx.$$

Первый, третий и четвертый интегралы сходятся равномерно по признаку Вейерштрасса, поскольку мажорируются соответствующими сходящимися интегралами

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx, \quad \int_1^{+\infty} x e^{-x} dx, \quad \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

Второй интеграл также равномерно сходится, поскольку: 1) семейство функций $x \mapsto \frac{1}{x+y} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$; 2) функция $x \mapsto \frac{1}{x+y}$ при каждом фиксированном y монотонно убывает к нулю;

3) $\left| \int_1^x \cos t(y+0,1) dy \right| \leq 20$, т. е. выполняются все условия примера 26. Таким образом, несобственный интеграл от матрицы $M(x, y)$ сходится равномерно. ►

48. Функция f интегрируема в промежутке $]0, +\infty[$. Доказать формулу

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

◀ Оценим разность

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx = \\ &= \int_0^B (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx + \int_B^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть $\epsilon > 0$ задано. Тогда, замечая, что интеграл $\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx$, согласно примеру 25, сходится равномерно при $\alpha \geq 0$ (здесь функция $|x| \mapsto e^{-\alpha x} - 1$ ограничена единицей и монотонна по $x \geq 0$, а интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, по условию, сходится), при достаточно большом

фиксированном B можем записать

$$\left| \int_B^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall \alpha \geq 0. \quad (2)$$

По данному ϵ и фиксированному B найдем α такое, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \int_0^B (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3)$$

Имеем

$$\left| \int_0^B (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx \right| \leq (1 - e^{-\alpha B}) M B < \frac{\epsilon}{2},$$

откуда

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{B} \ln \frac{2MB}{2MB - \epsilon}, \quad 0 < \epsilon < 2MB, \quad (4)$$

где $M = \sup_{0 \leq x \leq B} |f(x)| \neq 0$ (при $M = 0$ теорема тривиальна).

Тогда из (1), с учетом неравенств (2), (3), находим

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx \right| < \epsilon,$$

если B достаточно велико, а число α удовлетворяет условию (4). ►

49. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0$, если f абсолютно интегрируема в промежутке $[0, +\infty[$.

◀ Данный интеграл, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно относительно параметра n . Поэтому $\forall \epsilon > 0 \exists A_0(\epsilon) > 0$ такое, что $\forall A > A_0(\epsilon) \wedge \forall n$

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x) \sin nx dx \right| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (1)$$

Промежуток $[0, A]$ разобьем на $k+1$ частей точками $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{k+1} = A$ и представим интеграл $\int_0^A f(x) \sin nx dx$ в виде

$$\int_0^A f(x) \sin nx dx = \sum_{i=0}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - m_i) \sin nx dx + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^k m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nx dx, \quad m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \{f(x)\}. \quad (2)$$

Поскольку $f(x) - m_i \leq \omega_i$, где ω_i — колебание функции f на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, то из (2) получаем оценку

$$\left| \sum_{i=0}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin nx dx \right| \leq \sum_{i=0}^k \omega_i \Delta x_i + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^k |m_i|. \quad (3)$$

В силу интегрируемости функции f , для каждого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение сегмента $[0, A]$, для которого

$$\sum_{i=0}^k \Delta x_i \omega_i < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4)$$

При выбранном разбиении числа m_i фиксированы; поэтому если возьмем $n > \frac{6}{\varepsilon} \sum_{i=0}^k |m_i|$, то из неравенств (3), (4) и (1) получим окончательно $\left| \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx \right| < \varepsilon$. ►

50. Доказать, что если: 1) $f(x, y) \equiv f(x, y_0)$ на каждом интервале $]a, b[$; 2) $|f(x, y)| \leq F(x)$, где $\int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty$, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

◀ Оценим по абсолютной величине разность

$$\int_0^{+\infty} f(x, y) dx - \int_0^{+\infty} f(x, y_0) dx = \int_a^b (f(x, y) - f(x, y_0)) dx + \int_a^b f(x, y) dx - \int_b^{+\infty} f(x, y_0) dx, \quad b > a. \quad (1)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. В силу условия 2), при достаточно большом b справедливы оценки

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \int_b^{+\infty} F(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \int_b^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (2)$$

а в силу условия 1), — оценка

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \forall x \in]a, b[, \quad (3)$$

если разность $|y - y_0|$ достаточно мала.

Таким образом, из (1), с учетом оценок (2) и (3), получаем

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| < \varepsilon$$

при достаточной близости y к y_0 . ►

51. Пусть f — непрерывная и ограниченная на $[0, +\infty[$ функция. Доказать, что

$$I = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx = \pm f(0).$$

◀ Положим $x = ty$, $t > 0$, $y > 0$. Тогда

$$I = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2 + 1} dt.$$

Так как $\frac{|f(ty)|}{t^2+1} \leq \frac{M}{t^2+1}$, где $|f(ty)| \leq M = \text{const}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$ (сходится), а в силу непрерывности функции f дробь $\frac{f(ty)}{t^2+1} \Rightarrow \frac{f(0)}{t^2+1}$ при $y \rightarrow +0$ на каждом конечном интервале $[a, b]$, то, согласно примеру 50, получаем

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2+1} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \lim_{y \rightarrow +0} \frac{f(ty)}{t^2+1} dt = f(0). \quad (1)$$

В силу нечетности интеграла по переменной y и равенства (1), имеем

$$\lim_{y \rightarrow -0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx = -f(0). \blacktriangleright$$

52. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1}$.

◀ Представляя данный интеграл в виде

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} = 1 - \int_0^1 \frac{x^n dx}{x^n+1} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1}$$

и замечая, что

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{x^n+1} < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}, \quad n \geq 2,$$

получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} = 1. \blacktriangleright$$

53. Показать, что $F : \alpha \mapsto \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx$ есть непрерывная функция на интервале $-\infty < \alpha < 2$.

◀ Выполняя замену $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$, получаем

$$F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t^{2-\alpha}} dt.$$

Пусть $-\infty < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Тогда, в силу оценки $\left| \frac{\sin \alpha t}{t^{2-\alpha}} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ и признака Вейерштрасса, рассматриваемый интеграл сходится равномерно. Если учесть еще, что функция $t \mapsto \frac{\sin \alpha t}{t^{2-\alpha}}$ при $-\infty < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $t \geq 1$ непрерывна, то на основании теоремы 1, п.2.5, можно утверждать, что функция F непрерывна в указанном промежутке.

Пусть $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 2 - \epsilon$, $\epsilon > 0$. Тогда $\left| \int_1^x \frac{\sin \alpha t}{t^{2-\alpha}} dt \right| < \frac{2}{\alpha} \leq 4$; функция $t \mapsto \frac{1}{t^{2-\alpha}}$ при фиксированном α монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Это стремление, как показывает оценка $\frac{1}{t^{2-\alpha}} \leq \frac{1}{t^\epsilon}$, равномерно по α . Поэтому, в соответствии с утверждением примера 26, данный интеграл сходится равномерно. Принимая еще во внимание непрерывность подынтегральной

функции при $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 2 - \varepsilon$, устанавливаем, что функция F непрерывна на рассматриваемом отрезке.

Таким образом, функция F непрерывна при $-\infty < \alpha \leq 2 - \varepsilon$. Поскольку число $\varepsilon > 0$ произвольно, то требуемое доказано. ►

54. Определить точки разрыва функции

$$F : a \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin((1-a^2)x^2)}{x} dx.$$

◀ Полагая $t = (1-a^2)x$, $a \neq \pm 1$, получаем

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \operatorname{sgn}(1-a^2).$$

Очевидно, это выражение справедливо и при $|a| = 1$. Точки $a = 1$ и $a = -1$ являются точками разрыва первого рода функции F . ►

Исследовать на непрерывность в указанных промежутках следующие функции:

$$55. F : \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^\alpha}, \quad \alpha > 2.$$

◀ Можно показать (см. пример 31), что этот интеграл сходится неравномерно в указанной области (сходимость его вытекает из признака сравнения). Поэтому о непрерывности функции F сказать пока что ничего нельзя.

Пусть $\alpha \geq 2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. В случае $x \geq 1$ имеем $\frac{x}{2+x^\alpha} \leq \frac{x}{2+x^{2+\varepsilon}}$. Поскольку $\frac{x}{2+x^{2+\varepsilon}} = O^*\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$, то, на основании признака Вейерштрасса, интеграл

$$\Phi(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^\alpha}$$

сходится равномерно. Учитывая еще непрерывность подынтегральной функции, согласно теореме 1, п. 2.5, устанавливаем непрерывность функции Φ при $\alpha \geq 2 + \varepsilon$, т. е. при $\alpha > 2$.

Принимая во внимание, что функция

$$\Psi : \alpha \mapsto \int_0^1 \frac{x dx}{2+x^\alpha},$$

в силу п. 1.1, непрерывна при $\alpha > 2$, приходим к выводу, что функция $F : \alpha \mapsto \Psi(\alpha) + \Phi(\alpha)$ также непрерывна при $\alpha > 2$. ►

$$56. F : \alpha \mapsto \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi-x)^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha < 2.$$

◀ Пусть $0 < \varepsilon \leq \alpha \leq 2 - \varepsilon < 2$. Тогда, разбивая данный интеграл на три интеграла и оценивая подынтегральную функцию, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi-x)^\alpha} dx &< \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1} (\pi-x)^\alpha} + \int_1^{\pi-1} \frac{dx}{x^\alpha (\pi-x)^\alpha} + \int_{\pi-1}^\pi \frac{dx}{x^\alpha (\pi-x)^{\alpha-1}} \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} + \pi - 2 + \int_{\pi-1}^\pi \frac{dx}{(\pi-x)^{1-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Поскольку последние интегралы, в силу признака сравнения, являются сходящимися, то, согласно признаку Вейерштрасса, исходный интеграл равномерно сходится при $\epsilon \leq \alpha \leq 2 - \epsilon$. Учитывая еще непрерывность функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha}$$

в области $0 < x < \pi, \epsilon \leq \alpha \leq 2 - \epsilon$, в соответствии с теоремой 1, п.2.5, заключаем, что функция F непрерывна на каждом отрезке $\epsilon \leq \alpha \leq 2 - \epsilon$. Следовательно, она непрерывна в интервале $0 < \alpha < 2$. ►

$$57. F : \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{|\sin x|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

► Замена переменной x по формуле $x = k\pi + t$ в интеграле под знаком суммы

$$F(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{e^{-x} dx}{|\sin x|^\alpha}$$

преобразует данный интеграл к следующему:

$$F(\alpha) = \frac{1}{1 - e^{-\pi}} \int_0^{\pi} \frac{e^{-t} dt}{\sin^\alpha t}.$$

Поскольку $\frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t} \leq (\frac{\pi}{2t})^\alpha \leq (\frac{\pi}{2})^{1-\epsilon} \frac{1}{t^{1-\epsilon}}$, $0 < t \leq 1$, где $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, то, в силу признака Вейерштрасса, интеграл $\int_0^1 \frac{e^{-t} dt}{\sin^\alpha t}$ равномерно сходится на отрезке $[\epsilon, 1 - \epsilon]$.

Аналогично можно показать, что интеграл $\int_{\pi-1}^{\pi} \frac{e^{-t} dt}{\sin^\alpha t}$ также равномерно сходится на этом отрезке. Так как, кроме того, функция $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t}$ непрерывна в области $0 < t < \pi$, $0 < \epsilon \leq \alpha \leq 1 - \epsilon$, то, согласно теореме 1, п.2.5, функция F непрерывна при $\alpha \in [\epsilon, 1 - \epsilon]$. В силу произвольности $\epsilon > 0$, эта функция непрерывна при $\alpha \in]0, 1[$. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на равномерную сходимость в указанных интервалах следующие несобственные интегралы:

$$18. \int_0^{+\infty} \frac{R(x+y)}{x+y+1} dx, \quad 0 < y < +\infty, \quad R — функция Римана.$$

$$19. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x\sqrt{x}} dx, \quad 0 < y \leq A. \quad 20. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{y}{y+1} \operatorname{arctg}(xy) dx, \quad 0 < y < +\infty.$$

$$21. \int_1^{+\infty} x \frac{\cos(x^2+y)}{x+y} dx, \quad y > 0. \quad 22. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{yx^y} dx, \quad 1 < y < +\infty.$$

$$23. \int_0^1 x^{y-1} \ln(1-x) dx, \quad y > 0. \quad 24. \int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{xy} dx, \quad -\infty < y < 2.$$

$$25. \int_0^1 y \cos \frac{1}{x^2} dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Найти пределы:

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx, \quad \text{где } f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^2} e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin 2tx}{t} dt. \quad 28. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt.$$

Показать, что следующие функции непрерывны:

$$29. F : y \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{(x+y)^2} dx}{\sqrt{x+y+1}}, \quad 1 \leq y \leq 2. \quad 30. F : y \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(xy)}{\sqrt{x+y}} dx, \quad y \geq 1.$$

§ 3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла

3.1. Дифференцирование по параметру.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: 1) функция f'_y непрерывна в области $a \leq x < +\infty, y_1 \leq y \leq y_2$; 2) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится; 3) интеграл $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ сходится равномерно на отрезке $[y_1, y_2]$. Тогда

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

на отрезке $[y_1, y_2]$.

Теорема 2. Если функции f и f'_y непрерывны и ограничены в указанной области, а интеграл $\int_a^{+\infty} |\varphi(x)| dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)\varphi(x) dx$ представляет собой значение дифференцируемой функции на отрезке $[y_1, y_2]$ и

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y)\varphi(x) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y)\varphi(x) dx.$$

3.2. Интегрирование по параметру.

Теорема 1. Если функция f непрерывна при $x \geq a$ и $y \in [y_1, y_2]$, а интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ равномерно сходится на $[y_1, y_2]$, то справедлива формула

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy.$$

Эта формула справедлива также и в том случае, когда $y_1 = -\infty, y_2 = +\infty$, если $f(x, y) \geq 0$, интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ непрерывны и один из повторных интегралов $\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ или $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ сходится.

Теорема 2. Если функция f непрерывна при $a \leq x < +\infty, c \leq y < +\infty$, а интегралы

$$\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

сходятся равномерно: первый — на каждом отрезке $[a, A]$, а второй — на каждом отрезке $[c, C]$, и если хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$$

сходится, то сходятся и равны между собой повторные интегралы

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Теорема 3. Если f непрерывна и ограничена при $a \leq x < +\infty$, $y \in [y_1, y_2]$, а интеграл $\int_a^{+\infty} |\varphi(x)| dx$ сходится, то

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) \varphi(x) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

58. Пользуясь формулой $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$, $n > 0$, вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx,$$

где $m \in \mathbb{N}$.

◀ Формально дифференцируя m раз по параметру n обе части указанной формулы, получаем

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx = \left(\frac{1}{n} \right)^{(m)} = (-1)^m \frac{m!}{n^{m+1}}.$$

Покажем, что m -кратное дифференцирование под знаком интеграла возможно. Для этого, полагая $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$, преобразуем данные в условии интегралы к следующим:

$$\int_0^1 x^{n-1} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+1}}, \quad I = (-1)^m \int_1^{+\infty} \frac{\ln^m t}{t^{n+1}} dt.$$

Поскольку функции $t \mapsto t^{-n-1}$ и $t \mapsto t^{-n-1} \ln^m t$ непрерывны в области $0 < \varepsilon \leq n < +\infty$, $1 \leq t < +\infty$ и интеграл $\int_0^1 x^{n-1} dx$ сходится, то, в силу п. 3.1, остается показать, что интеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^m t}{t^{n+1}} dt$ сходится равномерно на полуинтервале $0 < \varepsilon \leq n < +\infty$. Действительно, так как

$$\left| \frac{\ln^m t}{t^{n+1}} \right| \leq \frac{\ln^m t}{t^{1+\varepsilon}} = \frac{\ln^m t}{t^{\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{t^{\frac{n+1-\varepsilon}{2}}} \leq \left(\frac{2m}{e^\varepsilon} \right)^m \frac{1}{t^{\frac{n+1-\varepsilon}{2}}},$$

то, в силу признака Вейерштрасса, интеграл I равномерно сходится на указанном полуинтервале. Следовательно, при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$, согласно теореме 1, п. 3.1, дифференцирование по параметру n , $n \geq \varepsilon$, справедливо, т. е. справедливо при $n > 0$. ►

59. Пользуясь формулой $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, $a > 0$, вычислить интеграл

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

◀ Формально дифференцируя n раз по a левую и правую части данной в условии формулы, имеем

$$(-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} = \frac{\pi}{a} \left(a^{-\frac{1}{2}} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! (2n - 1)!!}{(2n)!! a^n 2\sqrt{a}} \pi,$$

откуда следует значение интеграла I_{n+1} .

Возможность n -кратного дифференцирования вытекает из п.3.1. Действительно, функции $(x, a) \mapsto \frac{1}{x^2 + a}$ и $(x, a) \mapsto \frac{1}{(x^2 + a)^{n+1}}$ непрерывны в области $0 < \varepsilon \leq a < +\infty$, $0 \leq x < +\infty$.

Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a}$ сходится при $a > 0$. Интеграл I_{n+1} сходится равномерно по признаку

Вейерштрасса $\left(\frac{1}{(x^2 + a)^{n+1}} \leq \frac{1}{(x^2 + \varepsilon)^{n+1}} \text{ при } x \geq 0 \right)$ на полуинтервале $\varepsilon \leq a < +\infty$. Поэтому на этом полуинтервале, а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и на интервале $0 < a < +\infty$ дифференцирование возможно. ►

60. Доказать, что интеграл Дирихле $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ имеет при $\alpha \neq 0$ производную,

однако ее нельзя найти с помощью правила Лейбница.

◀ Положим $\alpha x = t$. Тогда $I(\alpha) = \text{const}$. Следовательно, при $\alpha \neq 0$ имеем $I'(\alpha) = 0$. Если же формально продифференцировать по α под знаком интеграла, то получим расходящийся интеграл

$$\int_0^{+\infty} \cos \alpha x dx. \blacktriangleright$$

61. Доказать формулу Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \quad a > 0, b > 0,$$

где f — непрерывная функция и интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ сходится $\forall A > 0$.

◀ В силу условий теоремы имеем

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt, \quad \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt,$$

откуда

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Применяя к последнему интегралу первую теорему о среднем, получаем

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(\xi) \int_{Aa}^{Ab} \frac{dt}{t} = f(\xi) \ln \frac{b}{a}, \quad Aa \leq \xi \leq Ab. \quad (1)$$

Поскольку функция f непрерывна, то $\lim_{A \rightarrow +0} f(\xi) = f(0)$, в силу чего из (1) вытекает, что существует

$$\lim_{A \rightarrow +0} \int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}. \blacktriangleright$$

Замечание. Может случиться, что интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, $A > 0$, расходится, но существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$, а также сходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f^*(x)}{x} dx$, где $f^*(x) = f(x) - f(+\infty)$.

Тогда на основании изложенного выше

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

Вычислить интегралы:

$$62. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

◀ Пусть $\alpha \geq \varepsilon > 0$, $\beta \geq \varepsilon > 0$. Тогда функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f'_\alpha : (x, \alpha) \mapsto -xe^{-\alpha x^2}$$

непрерывны в области $\alpha \geq \varepsilon > 0$; интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx,$$

в силу признака сравнения, сходится, а интеграл $\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2} dx$, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно (здесь $x \mapsto xe^{-\alpha x^2}$ мажорантная функция) на полуинтервале $\alpha \geq \varepsilon$. Поэтому дифференцирование по α под знаком интеграла по теореме 1, п.3.1, возможно. Имеем

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha}, \quad \alpha \geq \varepsilon > 0.$$

Отсюда находим $I(\alpha) = -\frac{1}{2} \ln \alpha + \varphi(\beta)$. Очевидно, $I(\beta) = 0$. Поэтому $\varphi(\beta) = \frac{1}{2} \ln \beta$, $\beta \geq \varepsilon > 0$.

Итак, $I(\alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha \geq \varepsilon > 0$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, этот ответ справедлив $\forall \alpha > 0, \beta > 0$. \blacktriangleright

$$63. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Гл. 1. Интегралы, зависящие от параметра

◀ Как и в предыдущем примере, легко показать, что дифференцирование по α возможно (полагаем сначала, что $\alpha \geq \epsilon > 0, \beta \geq \epsilon > 0$). Тогда имеем

$$I'(\alpha) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\alpha+\beta)x} - e^{-2\alpha x}}{x} dx.$$

Применяя формулу Фруллани (см. пример 61), находим $I'(\alpha) = 2 \ln \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}$. Отсюда интегрированием по α получаем

$$I(\alpha) = -2(\alpha + \beta)(\ln(\alpha + \beta) - 1) + 2\alpha(\ln 2\alpha - 1) + \varphi(\beta).$$

Из условия $I(\beta) = 0$ следует, что $\varphi(\beta) = 2\beta(\ln 2\beta - 1)$. Поэтому

$$I(\alpha) = \ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha} (2\beta)^{2\beta}}{(\alpha + \beta)^{2\alpha+2\beta}}, \quad \alpha \geq \epsilon > 0, \quad \beta \geq \epsilon > 0.$$

В силу произвольности $\epsilon > 0$ этот результат справедлив при $\alpha > 0, \beta > 0$. ►

$$64. I(m) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

◀ Дифференцируя по параметру m , получаем

$$I'_m(m) = \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx dx. \quad (1)$$

Дифференцирование под знаком интеграла по теореме 1, п.3.1, возможно, так как функции

$$f : (m, x) \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f'_m : (m, x) \mapsto (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx$$

непрерывны в области $-\infty < m < +\infty, 0 \leq x < +\infty$; интеграл (1), в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно, а данный интеграл сходится.

Выполняя интегрирование в (1), находим $I'_m(m) = \frac{\alpha}{\alpha^2+m^2} - \frac{\beta}{\beta^2+m^2}$, откуда $I(m) = \arctg \frac{m}{\alpha} - \arctg \frac{m}{\beta} + C$. Так как $I(0) = 0$, то $C = 0$. Следовательно, $I(m) = \arctg \frac{m(\beta-\alpha)}{\alpha\beta+m^2}$. ►

$$65. I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx, \quad |\alpha| \leq 1.$$

◀ Пусть $|\alpha| \leq 1 - \epsilon, 0 < \epsilon < 1$. Тогда при фиксированном ϵ функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}, & x \neq 0, \\ -\alpha^2, & x = 0, \end{cases} \quad f'_\alpha : (x, \alpha) \mapsto \frac{-2\alpha}{(1 - \alpha^2 x^2) \sqrt{1 - x^2}}$$

непрерывны в области $|\alpha| \leq 1 - \epsilon, |x| < 1$. Интеграл $I(\alpha)$ сходится по признаку сравнения, а интеграл

$$I'(\alpha) = -2 \int_0^1 \frac{\alpha dx}{(1 - \alpha^2 x^2) \sqrt{1 - x^2}}, \quad (1)$$

в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно $\left(|f'_\alpha(x, \alpha)| \leq \frac{2}{(1 - (1 - \epsilon)^2 x^2) \sqrt{1 - x^2}} \right)$ иа отрезке $|\alpha| \leq 1 - \epsilon$. Следовательно, дифференцирование по параметру α под знаком интеграла возможно при $|\alpha| \leq 1 - \epsilon$ (см. теорему 1, п.3.1).

Полагая в (1) $x = \sin t$, получаем

$$I'(\alpha) = -2\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - \alpha^2 \sin^2 t} = -\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Отсюда находим $I(\alpha) = \pi\sqrt{1 - \alpha^2} + C$. Так как $I(0) = 0$, то $C = -\pi$. Следовательно,

$$I(\alpha) = \pi \left(\sqrt{1 - \alpha^2} - 1 \right). \quad (2)$$

В силу произвольности ϵ , заключаем, что этот ответ пригоден при $|\alpha| < 1$.

Нетрудно видеть, что функция f непрерывна в области $|\alpha| \leq 1$, $|x| < 1$. В силу признака Вейерштрасса, интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на сегменте $|\alpha| \leq 1$ ($|f(x, a)| \leq \frac{|\ln(1-x^2)|}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$). Следовательно, функция I непрерывна при $|\alpha| \leq 1$. Поэтому $I(\pm 1) = \lim_{|\alpha| \rightarrow 1^-} I(\alpha)$, т. е. формула (2) справедлива при $\alpha = \pm 1$. ►

$$66. I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad |\alpha| \leq 1.$$

◀ Аналогично предыдущему (см. пример 65) получаем

$$I'(\alpha) = -2\alpha \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 - \alpha^2 x^2) \sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right), & 0 < |\alpha| < 1, \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $I(\alpha) = -\pi \ln(1 + \sqrt{1 - \alpha^2}) + C$, $|\alpha| < 1$. Поскольку $I(0) = 0$, то $C = \pi \ln 2$. Следовательно,

$$I(\alpha) = -\pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2}.$$

В силу непрерывности исходного интеграла при $|\alpha| \leq 1$ это выражение справедливо также при $|\alpha| \leq 1$. ►

$$67. I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

◀ Функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}, \quad f'_\alpha : (x, \alpha) \mapsto \frac{1}{x(1 + \alpha^2 x^2) \sqrt{x^2 - 1}}$$

непрерывны в области $1 < x < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$; интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + \alpha^2 x^2) \sqrt{x^2 - 1}}$$

равномерно сходятся по признаку Вейерштрасса, так как

$$\frac{|\operatorname{arctg} \alpha x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{\pi}{2x^2 \sqrt{x^2 - 1}}, \quad \frac{1}{x(1 + \alpha^2 x^2) \sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

и соответствующие интегралы от мажорирующих функций сходятся. Следовательно, функции f и f'_α непрерывны при всех α и дифференцирование под знаком данного интеграла возможно. Имеем

$$I'(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + \alpha^2 x^2) \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Гл. 1. Интегралы, зависящие от параметра

Полагая здесь $x = \operatorname{ch} t$, получаем $I'(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$, откуда $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}(\alpha - \sqrt{1+\alpha^2}) + C$, $\alpha \geq 0$. Поскольку $I(0) = 0$, то $C = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}(1 + \alpha - \sqrt{1+\alpha^2})$, $\alpha \geq 0$.

Аналогично при $\alpha \leq 0$ получаем $I(\alpha) = -\frac{\pi}{2}(1 - \alpha - \sqrt{1+\alpha^2})$. Окончательно имеем $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}(1 + |\alpha| - \sqrt{1+\alpha^2}) \operatorname{sgn} \alpha$, $|\alpha| < \infty$. ►

$$68. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx.$$

◀ Пусть $\beta \neq 0$. Тогда функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2}, \quad f'_\alpha : (x, \alpha) \mapsto \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)}$$

непрерывны при $0 < x < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$; интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно, в силу признака Вейерштрасса, на любом отрезке $[-A, A]$,

$$\frac{|\ln(\alpha^2 + x^2)|}{\beta^2 + x^2} \leq \frac{\varphi(x)}{\beta^2 + x^2}, \quad \varphi(x) = \max \{ |\ln(A^2 + x^2)|, |\ln x^2| \}.$$

Интеграл

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha dx}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \tag{1}$$

также сходится равномерно, но только на отрезке $0 < \varepsilon \leq |\alpha| \leq A$.

Действительно, в этом случае

$$\frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \leq \frac{2A}{(\varepsilon^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \equiv \psi(x)$$

и интеграл $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx$ сходится.

Таким образом, функция I непрерывна $\forall \alpha \in]-\infty, +\infty[$, а функция I' непрерывна при $|\alpha| > 0$.

Выполняя интегрирование в (1), получаем $I'(\alpha) = \frac{\pi \alpha}{|\alpha \beta|(|\alpha| + |\beta|)}$, $\alpha \beta \neq 0$, откуда $I(\alpha) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|) + C$.

Поскольку

$$I(0) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\beta^2 + x^2} dx = \frac{2}{|\beta|} \int_0^{+\infty} \frac{\ln |\beta|}{1+t^2} dt + \frac{2}{|\beta|} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t dt}{1+t^2} = \frac{2 \ln |\beta|}{|\beta|} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi \frac{\ln |\beta|}{|\beta|},$$

то $C = 0$. Окончательно имеем $I(\alpha) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|)$, $\beta \neq 0$.

Заметим, что если $\beta = 0$, то данный интеграл сходится только при $|\alpha| = 1$. В этом случае интегрированием по частям легко установить, что $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx = \pi$. ►

$$69. I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} dx.$$

◀ Очевидно, $I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} f(x, \alpha, \beta) dx$, где

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} \beta x, & x \neq 0, \\ \alpha \beta, & x = 0. \end{cases}$$

Функция f непрерывна в области $0 \leq x < +\infty$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$, и данный интеграл, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно (мажорантная функция φ строится так: при $0 \leq x \leq 1$ будет $|f(x, \alpha, \beta)| \leq |\alpha\beta|$, а при $x \geq 1$ имеем $|f(x, \alpha, \beta)| \leq \frac{\pi^2}{4x^2}$; т.е. $\varphi(x) = |\alpha\beta|$ при $0 \leq x \leq 1$ и $\varphi(x) = \frac{\pi^2}{4x^2}$ при $x \geq 1$). Следовательно, по п.2.5 функция I непрерывна $\forall \alpha, \beta \in]-\infty, +\infty[$.

Далее, пусть $0 < \epsilon \leq \alpha \leq A < +\infty$, $0 < \delta \leq \beta \leq B < +\infty$. Тогда, как нетрудно проверить, справедливы формулы

$$I'_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx, \quad I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)},$$

откуда находим $I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}$. Интегрируя это равенство по β и α последовательно, получаем

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}(\alpha + \beta)(\ln(\alpha + \beta) - 1) + \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad (1)$$

где φ, ψ — функции, подлежащие определению. В силу произвольности чисел $\epsilon > 0, \delta > 0, A > 0, B > 0$ последнее соотношение справедливо при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Заметим, что (1) есть сужение функции I на область положительных значений параметров α и β . Для нахождения ее для всех $\alpha, \beta \in]-\infty, +\infty[$ нужно подобрать функции φ и ψ таким образом, чтобы функция I оказалась непрерывной $\forall \alpha, \beta$, как и должно быть по доказанному выше.

Соотношение непрерывности

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow +0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} I(\alpha, \beta) = I(0, \beta) = I(\alpha, 0) = I(0, 0)$$

приводит к равенству

$$\varphi(\alpha) + \psi(\beta) = \frac{\pi}{2}(\beta(1 - \ln \beta) + \alpha(1 - \ln \alpha)). \quad (2)$$

Таким образом, учитывая тождество $I(\alpha, \beta) = I(|\alpha|, |\beta|) \operatorname{sgn}(\alpha\beta)$ и равенство (2), окончательно получаем

$$I(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\alpha\beta) \ln \frac{(|\alpha|+|\beta|)^{|\alpha|+|\beta|}}{|\alpha||\alpha||\beta||\beta|}, & \text{если } \alpha\beta \neq 0, \\ 0, & \text{если } \alpha\beta = 0. \end{cases} \blacksquare$$

При решении следующих примеров считается известным значение интеграла Эйлера—

$$\text{Пуассона: } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$70. I = \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2+2bx+c)} dx, \quad a > 0.$$

◀ Приводя трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ к виду $\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}$ и полагая $\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}} = t$, получаем

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (At^2 + 2Bt + C) e^{-t^2} dt,$$

где

$$A = \frac{a_1}{a\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}}, \quad B = \frac{b_1 a - a_1 b}{a^2} e^{\frac{b^2-ac}{a}}, \quad C = \frac{a^2 c_1 - 2ab b_1 + a_1 b^2}{a^2 \sqrt{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \quad 2 \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} d(t^2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

то

$$I = \sqrt{\pi} \left(\frac{A}{2} + C \right) = \frac{1}{2a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} ((a + 2b^2)a_1 - 4abb_1 + 2a^2c_1) e^{-\frac{ac-b^2}{a}}. \blacktriangleright$$

$$71. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx, \quad a > 0.$$

◀ Имеем

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx} dx.$$

Замечая, что оба эти интеграла можно найти как частные случаи общего интеграла из предыдущего примера, получаем $I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$. ▶

$$72. I(|a|) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx.$$

◀ Представляя данный интеграл в виде

$$\int_0^1 e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx + \int_1^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx$$

производя замену $y = \frac{1}{x}$ в первом интеграле, получаем

$$I(|a|) = \int_1^{+\infty} e^{-\left(a^2y^2 + \frac{1}{y^2}\right)} \frac{dy}{y^2} + \int_1^{+\infty} e^{-\left(y^2 + \frac{a^2}{y^2}\right)} dy.$$

Так как подынтегральные функции f_1 и f_2 здесь непрерывны при всех a и $1 \leq y < +\infty$, а соответствующие интегралы, по признаку Вейерштрасса, сходятся равномерно ($|f_1(a, y)| \leq \frac{1}{y^2}$, $|f_2(a, y)| \leq e^{-y^2}$) и интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}$ и $\int_1^{+\infty} e^{-y^2} dy$ сходятся, то функция I непрерывна $\forall |a| \in \mathbb{R}$.

Пусть $|a| \geq \epsilon > 0$. Поскольку функции $\frac{\partial f_1}{\partial a}$, $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ непрерывны в области $|a| \geq \epsilon$, $1 \leq y < +\infty$ а соответствующие интегралы от них, в силу мажорантного признака, сходятся равномерно на каждом отрезке $\epsilon \leq |a| \leq A$, то функция I' непрерывна при $|a| > 0$. Следовательно,

$$\frac{dI(|a|)}{d|a|} = -2|a| \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} \frac{dx}{x^2}. \quad (1)$$

Кроме того, положив в исходном интеграле $x = \frac{|a|}{y}$, $y > 0$, можем написать

$$I(|a|) = |a| \int_0^{+\infty} e^{-\left(y^2 + \frac{a^2}{y^2}\right)} \frac{dy}{y^2}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем дифференциальное уравнение $I'(|a|) + 2I(|a|) = 0$, решая которое, находим $I(|a|) = Ce^{-2|a|}$, $|a| > 0$.

Но функция $I(|a|)$ непрерывна, поэтому должно быть $I(0) = \lim_{|a| \rightarrow 0} (Ce^{-2|a|})$. Учитывая, что $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, отсюда находим $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Итак, окончательно получаем $I(|a|) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|a|}$. ►

$$73. I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

◀ Функции $f : (b, x) \mapsto e^{-ax^2} \cos bx$ и $f'_b : (b, x) \mapsto -xe^{-ax^2} \sin bx$ непрерывны в области $0 \leq x < +\infty$, $-\infty < b < +\infty$; интегралы

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx, \quad \int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin bx dx,$$

в силу признака Вейерштрасса, сходятся равномерно относительно параметра b . Следовательно, функции I и I' непрерывны $\forall b \in \mathbb{R}$ и

$$I'(b) = - \int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin bx dx = \frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin bx \Big|_0^{+\infty} - \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx = -\frac{b}{2a} I(b).$$

Отсюда $I'(b) + \frac{b}{2a} I(b) = 0$. Решая это уравнение, находим $I(b) = Ce^{-\frac{b^2}{4a}}$. Поскольку $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, то $I(b) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. ►

$$74. \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

◀ Дифференцируя $2n$ раз интеграл из предыдущего примера и полагая $a = 1$, получаем

$$\frac{d^{2n}}{db^{2n}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = (-1)^n 2^{2n} \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \right)^{(2n)},$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx dx = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \left(e^{-b^2} \right)^{(2n)}. ►$$

75. Исходя из интеграла $I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$, $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, вычислить интеграл

$$\text{Дирихле } D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

◀ Поскольку функция

$$f : (\alpha, x) \mapsto \begin{cases} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}, & x \neq 0, \\ \beta, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывна при каждом конечном $\alpha \geq 0$, $0 \leq x < +\infty$, а интеграл $\int_0^{+\infty} f(\alpha, x) dx$, в силу примера 25, сходится равномерно по $\alpha \geq 0$, то функция I непрерывна по переменной $\alpha \geq 0$ и поэтому $I(+0, \beta) = D(\beta)$.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда функция $\varphi : (\beta, x) \mapsto e^{-\alpha x} \cos \beta x$, $x \geq 0$, $-\infty < \beta < +\infty$, непрерывна и интеграл

$$I'_\beta(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx, \quad (1)$$

в силу мажорантного признака, сходится равномерно относительно параметра β , поскольку $|e^{-\alpha x} \cos \beta x| \leq e^{-\alpha x}$. Следовательно, дифференцирование по β возможно, и после выполнения интегрирования в (1) получаем $I'_\beta(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$, $\alpha > 0$. Отсюда находим $I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha)$. Так как $I(\alpha, 0) = 0$, то $C(\alpha) \equiv 0$ и $I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$.

Таким образом, окончательно имеем

$$D(\beta) = I(+0, \beta) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta. \blacktriangleright$$

Используя интеграл Дирихле и формулу Фруллани, вычислить интегралы:

$$76. I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - \cos \beta x}{x^2} dx, \quad \alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

◀ При $\alpha \geq \epsilon > 0$, $|\beta| \geq \epsilon > 0$ и $0 \leq x < +\infty$ функции

$$f : (\alpha, \beta, x) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2}(e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x), & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}\beta^2 - \alpha, & x = 0, \end{cases}$$

$$f'_\alpha : (\alpha, \beta, x) \mapsto -e^{-\alpha x^2}, \quad f'_\beta : (\alpha, \beta, x) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin \beta x}{x}, & x \neq 0, \\ \beta, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывны. Данный интеграл, а также интегралы $I'_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} f'_\alpha(\alpha, \beta, x) dx$, $I'_\beta(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} f'_\beta(\alpha, \beta, x) dx$ сходятся равномерно (первый — в силу признака Вейерштрасса, второй — в силу примера 26). Следовательно, функции I , I'_α , I'_β непрерывны и существует дифференциал

$$dI(\alpha, \beta) = \left(- \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right) d\alpha + \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx \right) d\beta = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} d\alpha + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta d\beta$$

(см. интегралы Дирихле и Эйлера—Пуассона), откуда интегрированием находим

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} |\beta| - \sqrt{\pi \alpha} + C. \quad (1)$$

В силу произвольности $\epsilon > 0$, этот результат справедлив при $\alpha > 0$, $|\beta| > 0$. Покажем, что он справедлив также и при $\alpha \geq 0$, $-\infty < \beta < +\infty$.

Разбив исходный интеграл на два интеграла

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 f(\alpha, \beta, x) dx + \int_1^{+\infty} f(\alpha, \beta, x) dx,$$

видим, что первый интеграл — непрерывная функция α и β при любых α и β . Второй интеграл равномерно сходится при $\alpha \geq 0$ и любом β , так как $|f(\alpha, \beta, x)| \leq \frac{2}{x^2}$. Кроме

того, функция f непрерывна, поэтому и второй интеграл — также непрерывная функция при $\alpha \geq 0, \beta$ — любое.

Используя непрерывность функции I , находим постоянную C из соотношения $I(0, 0) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} \left(\frac{\pi}{2} |\beta| - \sqrt{\pi \alpha} + C \right) = 0$.

Таким образом, из (1) окончательно имеем $I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} |\beta| - \sqrt{\pi \alpha}$, $\alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}$. ►

$$77. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

◀ Представляя данный интеграл в виде

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{x} dx$$

и пользуясь интегралом Дирихле (см. пример 75), получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{4} (\operatorname{sgn}(\alpha + \beta) + \operatorname{sgn}(\alpha - \beta)). ►$$

$$78. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq \pm \beta.$$

◀ Пользуясь формулой Фруллани (см. пример 61), находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} (\cos |\alpha - \beta|x - \cos |\alpha + \beta|x) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right|, \quad \alpha \neq \pm \beta. ►$$

$$79. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

◀ Используя тождество $\sin^3 \alpha x = \frac{3}{4} \sin \alpha x - \frac{1}{4} \sin 3\alpha x$, а также интеграл Дирихле (см. пример 75), имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx = \frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx - \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3\alpha x}{x} dx = \frac{3\pi}{8} \operatorname{sgn} \alpha - \frac{\pi}{8} \operatorname{sgn} 3\alpha = \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha. ►$$

$$80. I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx.$$

◀ Преобразовывая разность $\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x$ к виду

$$\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x = \frac{1}{4} ((1 - \cos 2\alpha x)^2 - (1 - \cos 2\beta x)^2) = \frac{1}{4} (f(|\beta|x) - f(|\alpha|x)),$$

$$f(x) = 2 \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x,$$

залишем

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{f(|\beta|x) - f(|\alpha|x)}{x} dx.$$

Гл. 1. Интегралы, зависящие от параметра

Теперь применим формулу Фруллани (см. пример 61). Поскольку функция f непрерывна и интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, по признаку Дирихле, сходится $\forall A > 0$, то по указанной формуле $I(\alpha, \beta) = \frac{3}{8} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$, если $\alpha \beta \neq 0$. Если $\alpha = 0, \beta \neq 0$ или $\beta = 0, \alpha \neq 0$, то данный интеграл расходится. Наконец, если $\alpha = \beta = 0$, то интеграл существует и равен нулю. Поэтому окончательно имеем

$$I(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{3}{8} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|, & \text{если } \alpha \beta \neq 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = \beta = 0. \end{cases} \blacksquare$$

81. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx.$

◀ После замены переменной x по формуле $x = \sqrt{t}, t > 0$, получаем интеграл Дирихле (см. пример 75):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}. \blacksquare$$

82. Найти разрывный множитель Дирихле $D(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

◀ Полагая в примере 77 $x = \lambda, \alpha = 1, \beta = x$ получаем

$$D(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(1+x) + \operatorname{sgn}(1-x)), \quad D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = \pm 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases} \blacksquare$$

83. Вычислить интеграл $I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx.$

◀ Положим $t = x+b$. Тогда

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{t} \cos(ab) dt - \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at}{t} \sin ab dt = 2 \cos(ab) \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \pi \cos(ab) \operatorname{sgn} a,$$

так как

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at}{t} dt = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{-A}^{-\epsilon} \frac{\cos at}{t} dt + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^A \frac{\cos at}{t} dt = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции, а

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{-A}^{-\epsilon} \frac{\sin at}{t} dt + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^A \frac{\sin at}{t} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t} dt$$

в силу четности подынтегральной функции. □

84. Пользуясь формулой $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy$, вычислить интеграл Лапласа $L(\alpha) =$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx.$$

◀ Согласно условию имеем

$$L(\alpha) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} \cos \alpha x dy.$$

Введя множитель e^{-kx^2} , $k > 0$, рассмотрим интеграл

$$L^*(k, \alpha) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x dx. \quad (1)$$

Функция $f : (x, y) \mapsto e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x$ непрерывна в области $0 \leq x < +\infty, 0 \leq y < +\infty$; интегралы

$$\int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x dy \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x dx$$

сходятся равномерно в силу мажорантного признака Вейерштрасса (действительно, имеют место неравенства $|e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x| \leq e^{-y}$, $|e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x| \leq e^{-kx^2}$, а интегралы $\int_0^{+\infty} e^{-y} dy$, $\int_0^{+\infty} e^{-kx^2} dx$ сходятся); интеграл (1), как следует из оценки

$$\left| \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x dy \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-kx^2} dx,$$

сходится. Следовательно, по теореме 2, п.3.2, можно в (1) изменить порядок интегрирования. Тогда получим

$$L^*(k, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-(k+y)x^2} \cos \alpha x dx.$$

Используя решение примера 73, находим

$$L^*(k, \alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y+k}} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4(y+k)}+y\right)} dy = \sqrt{\pi} e^k \int_{\sqrt{k}}^{+\infty} e^{-\gamma(t)} dt, \quad \gamma(t) = \frac{\alpha^2}{4t^2} + t^2. \quad (2)$$

Поскольку интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-kx^2} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ равномерно сходится при $k \geq 0$ и подынтегральная функция непрерывна, то функция L^* непрерывна по переменной k (см. теорему 1, п.2.5). Поэтому

$$L(\alpha) = \lim_{k \rightarrow +0} L^*(k, \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4t^2}+t^2\right)} dt.$$

Гл. 1. Интегралы, зависящие от параметра

Последний интеграл был вычислен в примере 72. Таким образом, окончательно имеем $L(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ►

Вычислить следующие интегралы:

$$85. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$$

◀ Используя тождество $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ и интеграл Лапласа, получаем $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2})$. ►

$$86. \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx.$$

◀ Вводя функцию f по формуле

$$f : y \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{y^2 + x^2} dx, \quad |y - 1| \leq \frac{1}{2},$$

замечаем (после замены $x = yt$), что $f(y) = \frac{1}{y} L(|\alpha|y)$, а также $f'_y(1) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx$, L — интеграл Лапласа. Следовательно (см. пример 84), имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)} dx = -\frac{1}{2} f'(1) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} L(|\alpha|y) \right)_{y=1} = \frac{\pi}{4}(1 + |\alpha|)e^{-|\alpha|}. ►$$

$$87. I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x dx}{ax^2 + 2bx + c}, \quad a > 0, \quad ac - b^2 > 0.$$

◀ Выделяя полный квадрат в знаменателе и производя замену по формуле $\sqrt{ax + \frac{b}{\sqrt{a}}} = t$, имеем

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\alpha t}{\sqrt{a}} \cos \frac{\alpha b}{a}}{t^2 + y^2} dt + \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{\alpha t}{\sqrt{a}} \sin \frac{\alpha b}{a}}{t^2 + y^2} dt,$$

где $y^2 = c - \frac{b^2}{a} > 0$.

Замечая, что в силу нечетности подынтегральной функции второй интеграл равен нулю, а первый легко вычисляется через интеграл Лапласа, получаем

$$I(\alpha) = \frac{2}{|y|\sqrt{a}} \cos \frac{\alpha b}{a} \cdot L \left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{a}} |y| \right) = \frac{\pi \cos \frac{\alpha b}{a}}{\sqrt{ac - b^2}} e^{-\frac{|\alpha|}{a} \sqrt{ac - b^2}}. ►$$

88. С помощью интегралов Френеля

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

вычислить следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx, \quad a \neq 0.$$

◀ Приводя квадратный трехчлен к каноническому виду и производя затем замену переменной по формуле $\sqrt{ax} + \frac{b}{\sqrt{a}} = t$, $a > 0$, имеем

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx = \frac{\cos y}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t^2 dt + \frac{\sin y}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right),$$

где $y = c - \frac{b^2}{a}$. При $a < 0$ следует положить $a = -a_1$, $a_1 > 0$, и провести аналогичные выкладки. В общем случае получаем

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin\left(\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} a + \frac{ac - b^2}{a}\right), \quad a \neq 0. \blacksquare$$

89. Доказать формулы:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \sin(|\alpha|a);$$

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \cos(\alpha a) \operatorname{sgn} \alpha,$$

где $a \neq 0$ и интегралы понимаются в смысле главного значения Коши.

◀ 1) Легко видеть, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a+x} dx + \frac{1}{4a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a-x} dx.$$

Вычисля эти интегралы способом, изложенным в примере 83, получаем формулу 1).

2) Представляя значение подынтегральной функции в виде $\frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \frac{\sin \alpha x}{-a+x} - \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha x}{a+x}$ и используя указанный пример, получаем формулу 2). ▶

90. Найти преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p > 0,$$

для функции f , если: а) $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$; б) $f(t) = \sqrt{t}$; в) $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$; г) $f(t) = \sin(\alpha \sqrt{t})$.

◀ а) Функция $\psi : (p, t) \mapsto e^{-pt} t^n$ непрерывна при $p > 0$, $0 \leq t < +\infty$ и при любом $n > 0$. Данный интеграл равномерно сходится при $p \geq \epsilon > 0$ и при любой интегрируемой функции, для которой справедлива оценка $|f(t)|e^{-\epsilon t} \leq \text{const}$. В нашем случае $t^n e^{-\epsilon t} \leq \left(\frac{n}{\epsilon}\right)^n e^{-n}$. Следовательно, дифференцирование под знаком интеграла по параметру p , $p > 0$, возможно.

Пусть $f(t) \equiv 1$. Тогда $F(p) = \frac{1}{p}$ и

$$\frac{d^n}{dp^n} F(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt,$$

откуда $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

6) Выполнив замену $\sqrt{t} = x$, находим:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sqrt{t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-px^2} x^2 dx,$$

откуда интегрированием по частям получаем

$$F(p) = -\frac{x}{p} e^{-px^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-px^2} dx = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

в) В этом случае воспользуемся формулой Фруллани. Имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt} - e^{-(p+1)t}}{t} dt = \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right).$$

г) После замены $\sqrt{t} = z$ приходим сначала к интегралу

$$F(p) = 2 \int_0^{+\infty} z e^{-pz^2} \sin \alpha z dz,$$

а после интегрирования по частям — к интегралу

$$F(p) = \frac{\alpha}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pz^2} \cos \alpha z dz,$$

который вычислен в примере 73. Окончательно имеем

$$F(p) = \frac{\alpha \sqrt{\pi}}{2p \sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}. \blacktriangleright$$

91. Доказать формулу (интеграл Липшица)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} I_0(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a > 0,$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого индекса (см. пример 12).

◀ Функция $\psi : (t, \varphi) \mapsto \cos(bt \sin \varphi)$ непрерывна при $0 \leq t < +\infty, 0 \leq \varphi \leq \pi$. Интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ сходится, поэтому данный интеграл сходится равномерно по параметру.

Следовательно, по теореме 1, п.3.2, справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-at} dt \int_0^\pi \cos(bt \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt \sin \varphi) dt,$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} I_0(bt) dt = \frac{2a}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \blacktriangleright$$

92. Найти преобразование Вейерштрасса

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y) dy,$$

если $f(y) = \cos ay$.

◀ Полагая $x - y = t$, получаем

$$F(x) = \frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos at dt + \frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin at dt.$$

В силу нечетности подынтегральной функции, второй интеграл равен нулю, а первый вычислен в примере 73. Таким образом, имеем

$$F(x) = e^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax. ▶$$

Упражнения для самостоятельной работы

Применяя метод дифференцирования и интегрирования по параметру под знаком интеграла, вычислить интегралы:

31. $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx, \alpha \geq 0.$ 32. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^4} dx.$ 33. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin^2 x}{x^3} dx.$

34. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} dx.$ 35. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{\operatorname{ch} x} dx.$ 36. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \frac{\sin x}{x} dx.$ 37. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}(1 - \cos ax)}{x} dx.$

38. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cdot \ln(\sin x) dx.$ 39. $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^\alpha \ln \left(\ln \frac{1}{x}\right) dx.$ 40. $\int_0^{+\infty} e^{-|a|x^2} \sin^2 bx \frac{dx}{x}.$

Вычислить:

41. v. p. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a - b \cos x}, 0 < a < b.$ 42. v. p. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 - x^3}.$ 43. v. p. $\int_0^{2\pi} \frac{x dx}{1 - a \cos x}, a > 1.$

44. $\lim_{a \rightarrow b} \left(\text{v. p.} \int_a^b \frac{\varphi(s) ds}{x-s} \right), a < b;$ функция φ удовлетворяет условию Гельдера: $\exists \alpha, L$

такие, что $\forall x_1, x_2 \in]a, b[$ выполняется неравенство $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < L|x_1 - x_2|^\alpha, 0 < \alpha \leq 1.$

Найти преобразование Лапласа для функций:

45. $f : x \mapsto \frac{\cos^2 \sqrt{kx}}{\sqrt{\pi x}}, x > 0.$ 46. $f : x \mapsto \frac{\operatorname{ch}^2 \sqrt{kx}}{\sqrt{\pi x}}, x > 0.$

§ 4. Эйлеровы интегралы

4.1. Гамма-функция.

Определение. Функция

$$\Gamma : p \mapsto \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad 0 < p < +\infty,$$

называется гамма-функцией, а ее значение — эйлеровым интегралом.

Функция Γ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка при $p > 0$ и для них справедлива формула

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln x)^k e^{-x} dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4.2. Основные формулы.

Если $p > 0$, то

$$\Gamma(p+1) = p \Gamma(p) \quad (1)$$

(формула понижения). Если $n \in \mathbb{N}$, то

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad (2)$$

а также

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}. \quad (3)$$

Если $0 < p < 1$, то

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \quad (4)$$

(формула дополнения).

4.3. Бета-функция.

Определение. Функция

$$B : (p, q) \mapsto \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0 \wedge q > 0,$$

называется бета-функцией, а ее значение — эйлеровым интегралом.

Бета-функция непрерывна в области определения и обладает частными производными любого порядка, которые можно найти путем дифференцирования по переменным p, q под знаком интеграла. Полезно представление

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}} dz. \quad (1)$$

Связь между B - и Γ -функциями выражается формулой

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (2)$$

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

$$93. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0.$$

◀ Полагая $x = a\sqrt{t}$, $t > 0$, и пользуясь формулами (2), (3), п.4.2, и формулой (2), п.4.3, получаем

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^4}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^4 \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}. ▶$$

$$94. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$$

◀ Используя представление (1) и формулу (2), п.4.3, имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} dx}{(1+x)^2} = B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}.$$

Далее, применяя формулы понижения (1) и дополнения (4), п.4.2, находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} dx}{(1+x)^2} = \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

95. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

◀ Полагая $x = \sqrt{t}$, $t > 0$, получаем

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}. \blacktriangleright$$

Выразить через эйлеровы интегралы:

96. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx, \quad n > 0.$

◀ Замена $x = t^{\frac{1}{n}}$, $t > 0$, приводит к интегралу

$$\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, 1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} \Gamma\left(1 - \frac{m}{n}\right) \Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi m}{n}}.$$

Этот результат справедлив при $0 < m < n$. \blacktriangleright

97. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}, \quad a > 0, b > 0, n > 0.$

◀ Полагая $x = \left(\frac{b}{a}t\right)^{\frac{1}{n}}$, $t > 0$, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^p} dt = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \frac{1}{na^p} B\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right).$$

Следовательно, данный интеграл сходится при условии $0 < \frac{m+1}{n} < p$. \blacktriangleright

98. $I = \int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}} dx, \quad 0 < a < b, c > 0.$

◀ Выполняя замену $\frac{x-a}{x+c} = \frac{b-a}{b+c}t$, получаем

$$I = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}} \int_0^1 t^m (1-t)^n dt = \frac{(b-a)^{m+n+1} B(m+1, n+1)}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}.$$

Отсюда следует, что данный интеграл сходится, если $m > -1, n > -1$. \blacktriangleright

$$99. I_{mn} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx.$$

◀ Положим $\sin x = \sqrt{t}$, $t > 0$. Тогда

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Очевидно, интеграл сходится, если $m > -1$, $n > -1$. ►

$$100. \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k \cos x)^n} dx, \quad 0 < |k| < 1.$$

◀ Вводя новую переменную по формуле $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, имеем

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k \cos x)^n} dx = \frac{2^n}{(1+k)^n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1} dt}{(1+\alpha^2 t^2)^n}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}.$$

Полагая далее $\alpha t = \sqrt{z}$, получаем

$$I = \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right), \quad n > 0. ►$$

$$101. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx.$$

◀ Применяя подстановку $\ln \frac{1}{x} = t$, получаем

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = \Gamma(p+1), \quad p > -1. ►$$

$$102. I(p) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx, \quad a > 0.$$

◀ После замены $x = \frac{t}{a}$ получаем

$$I(p) = \frac{1}{a^{p+1}} \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} \ln t dt - \frac{\ln a}{a^{p+1}} \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt.$$

Легко видеть, что первый интеграл есть значение производной от гамма-функции аргумента $p+1$, $p+1 > 0$, а второй равен $\Gamma(p+1)$. Следовательно,

$$I(p) = \frac{\Gamma'(p+1)}{a^{p+1}} - \frac{\ln a}{a^{p+1}} \Gamma(p+1) = \frac{d}{dp} \left(\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}} \right). ►$$

$$103. I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx.$$

◀ Очевидно, функция I является производной от бета-функции (см. п.4.3). Поэтому

$$I(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{d}{dp} B(p, 1-p) = \frac{d}{dp} (\Gamma(p)\Gamma(1-p)) = \frac{d}{dp} \left(\frac{\pi}{\sin p\pi} \right) = -\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi},$$

$0 < p < 1.$ ▶

104. $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx.$

◀ Полагая $x = t^{\frac{1}{3}}$ и используя результат предыдущего примера, получаем

$$I = \frac{1}{9} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{3}-1}}{1+t} \ln t dt = -\frac{1}{9} \cdot \frac{\pi^2 \cos \frac{2\pi}{3}}{\sin^2 \frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi^2}{27}. ▶$$

105. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx.$

◀ Применяя подстановку $x = t^{\frac{1}{4}}, t > 0$, приходим к интегралу

$$I = \frac{1}{64} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}} \ln^2 t}{1+t} dt,$$

являющемуся второй производной от бета-функции

$$p \mapsto \frac{1}{64} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1} dt}{(1+t)^{p+(1-p)}},$$

вычисленной в точке $p = \frac{1}{4}$. Следовательно,

$$I = \frac{1}{64} \cdot \frac{d^2}{dp^2} (B(p, 1-p)) \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{1}{64} \cdot \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{\pi}{\sin \pi p} \right) \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{64} \pi^3. ▶$$

106. $I(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{(1+x) \ln x} dx.$

◀ Очевидно, если $p = q$, то интеграл равен нулю. Используя признак сравнения, нетрудно установить, что данный интеграл сходится, если $0 < p < 1, 0 < q < 1$.

Далее, замечая, что

$$I(p, q) = \int B(p, 1-p) dp - \int B(q, 1-q) dq + C,$$

где C — постоянная, имеем

$$I(p, q) = \pi \int \frac{dp}{\sin \pi p} - \pi \int \frac{dq}{\sin \pi q} + C = \pi \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi q}{2}} \right| + C.$$

Полагая здесь $p = q$, находим, что $C = 0$.

Таким образом, имеем

$$I(p, q) = \pi \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi q}{2}} \right|, \quad 0 < p < 1, \quad 0 < q < 1. ▶$$

$$107. I = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx, \quad 0 < p < 1.$$

◀ Рассмотрим интеграл

$$F(\varepsilon) = \int_0^1 (x^{p-1} - x^{-p})(1-x)^{-1+\varepsilon} dx, \quad \varepsilon \geq 0. \quad (1)$$

Поскольку функция $f : (x, \varepsilon) \mapsto \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}$ при $0 < x < 1$ и $\varepsilon \geq 0$ непрерывна, а интеграл (1) сходится равномерно при $\varepsilon \geq 0$, в силу признака Вейерштрасса

$$\left(|f(x, \varepsilon)| \leq \frac{|x^{p-1} - x^{-p}|}{1-x}, \quad \int_0^1 \frac{|x^{p-1} - x^{-p}|}{1-x} dx < +\infty \right).$$

то функция F непрерывна и возможен предельный переход под знаком интеграла (1) при $\varepsilon \rightarrow +0$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx. \quad (2)$$

Принимая во внимание, что $F(\varepsilon) = B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon)$, из (2) находим

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)} \right).$$

Отсюда, используя формулу $\Gamma(\varepsilon) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$ и применяя правило Лопиталля, получаем

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{\Gamma'(1-p+\varepsilon)}{\Gamma(1-p)} - \frac{\Gamma'(p+\varepsilon)}{\Gamma(p)} \right) = (\ln(\Gamma(1-p)\Gamma(p)))_{p=0}^1 = \pi \operatorname{ctg} \pi p. \blacktriangleright$$

$$108. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \beta x} dx, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

◀ Полагая $e^{-2\beta x} = t$, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \beta x} dx = \frac{1}{2\beta} \int_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{-p}}{1-t} dt,$$

где $p = \frac{\beta-\alpha}{2\beta}$. Поскольку $0 < p < \frac{1}{2}$, то можно воспользоваться результатом предыдущего примера. Имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \beta x} dx = \frac{\pi}{2\beta} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2\beta}. \blacktriangleright$$

$$109. I = \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx.$$

◀ Производя замену $x = 1-t$, получаем интеграл

$$I = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) \sin \pi x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(\Gamma(x)\Gamma(1-x)) \sin \pi x dx,$$

откуда с помощью формулы дополнения (см. п.4.2) находим

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 (\ln \pi - \ln \sin \pi x) \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi} \ln \pi - \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \sin \pi x \sin \pi x dx = \\ = \frac{1}{\pi} \ln \pi - \frac{1}{2\pi} (\cos \pi x + (1 - \cos \pi x) \ln \sin \pi x - \ln(1 + \cos \pi x)) \Big|_{+0}^{1-0} = \frac{1}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right). \blacksquare$$

110. Доказать равенство

$$\prod_{m=1}^n \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

◀ Полагая $x = t^{\frac{1}{n}}$, $t > 0$, получаем

$$\int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{m}{n}\right),$$

откуда

$$\prod_{m=1}^n \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n^n} \prod_{m=1}^n \Gamma\left(\frac{m}{n}\right). \quad (1)$$

При $n = 1$ равенство (1), очевидно, справедливо. Поэтому далее считаем, что $n \geq 2$. Записывая произведение (1) в прямом и обратном порядках, замечаем, что

$$\left(\prod_{m=1}^n \Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\right)^2 = \left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\ = \left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \left(\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\right) \dots \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Отсюда, используя формулу дополнения, находим

$$\prod_{m=1}^n \Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n}}}. \quad (2)$$

Для вычисления произведения синусов разложим двучлен $z^n - 1$ на множители. Имеем $z^n - 1 = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$, z_k — нули этого двучлена, т. е. $\sqrt[n]{1} = \exp\left(ik\frac{2\pi}{n}\right)$, $i^2 = -1$, $k = \overline{0, n-1}$. Следовательно, $\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k)$, откуда

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^n - 1}{z - 1} = n = \lim_{z \rightarrow 1} \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right). \quad (3)$$

Поскольку $\left|1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right| = 2 \sin \frac{\pi k}{n}$, то из (3) получаем формулу

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (4)$$

Наконец, подставляя (4) в (2), а затем (2) в (1), получаем доказываемое тождество. ▶

111. Используя равенство $\frac{1}{x^m} - \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt, x > 0$, найти интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m} dx$,

$0 < m < 1, a \neq 0$.

◀ Имеем

$$I = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} \cos ax dx \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt = \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow +0}} \int_\delta^A \cos ax dx \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt. \quad (1)$$

Функция $f : (x, t) \mapsto t^{m-1} e^{-xt} \cos ax$ непрерывна при $0 < t < +\infty, \delta \leq x \leq A$. Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} t^{m-1} \cos ax dt,$$

в силу мажорантного признака ($|f(x, t)| \leq t^{m-1} e^{-\delta t}$), сходится равномерно относительно $x \in [\delta, A]$. Тогда, по теореме 1, п.3.2, в (1) можно выполнить перестановку интегралов:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow +0}} \int_0^{+\infty} t^{m-1} dt \int_\delta^A e^{-xt} \cos ax dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow +0}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}(a \sin aA - t \cos aA)}{a^2 + t^2} e^{-tA} dt + \right. \\ &\quad \left. + \cos a\delta \int_0^{+\infty} \frac{t^m e^{-\delta t}}{a^2 + t^2} - a \sin a\delta \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} e^{-\delta t}}{a^2 + t^2} dt \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Первый интеграл в (2), как следует из оценки

$$\left| \int_0^1 \dots + \int_1^{+\infty} \dots \right| < \frac{1+|a|}{a^2} \int_0^1 e^{-tA} dt + e^{-A} \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}(|a|+t)}{a^2+t^2} dt,$$

стремится к нулю при $A \rightarrow +\infty$. Второй интеграл, в силу равномерной (по признаку Вейерштрасса) сходимости его относительно δ ($0 \leq \delta \leq \delta_0$) и непрерывности подынтегральной функции в области $0 < t < +\infty, 0 \leq \delta \leq \delta_0$, согласно теореме 1, п.4.2, при $\delta \rightarrow +0$ стремится к интегралу

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m dt}{a^2 + t^2} = \frac{|a|^{m-1}}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, 1 - \frac{m+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2|a|^{1-m} \cos \frac{\pi m}{2}}.$$

По той же причине третий интеграл (вместе с $\sin a\delta$) стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$.

Таким образом, окончательно получаем $I = \frac{\pi |a|^{m-1}}{2\Gamma(m) \cos \frac{\pi m}{2}}, a \neq 0$. ►

112. Доказать формулы Эйлера:

$$a) \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x;$$

$$b) \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x, \quad \lambda > 0, x > 0, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

◀ Нетрудно видеть, что подынтегральные функции в а) и б) и их производные по α непрерывны при $0 < t < +\infty$ и $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Кроме того, данные интегралы (обозначим их через $F(\alpha)$ и $\Phi(\alpha)$ соответственно) при $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ сходятся по признаку сравнения. Интегралы

$$F'(\alpha) = -\lambda \int_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha - \alpha) dt, \quad (1)$$

$$\Phi'(\alpha) = \lambda \int_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha - \alpha) dt, \quad (2)$$

по признаку Вейерштрасса, сходятся равномерно на каждом отрезке $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Действительно, функция $t \mapsto t^x e^{-\lambda t \sin \alpha}$ является мажорирующей для подынтегральных функций в (1) и (2), а интеграл $\int_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t \sin \alpha} dt$ сходится по признаку сравнения. Следовательно, дифференцирование в (1), (2) возможно при $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$.

Выполняя в (1) и (2) интегрирование по частям (придав $t^x = u$, $e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha - \alpha) dt = dv$, $t^x = u$, $e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha - \alpha) dt = dv$ соответственно), получаем систему дифференциальных уравнений

$$F'(\alpha) = -x \Phi(\alpha), \quad \Phi'(\alpha) = x F(\alpha).$$

Решая эту систему, находим

$$F(\alpha) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \quad \Phi(\alpha) = -A \cos \alpha x + B \sin \alpha x, \quad (3)$$

где A, B — постоянные; $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Замечая что

$$F(0) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}, \quad \Phi(0) = 0,$$

из (3) определяем эти постоянные: $A = 0$, $B = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}$.

Подставляя найденные значения постоянных в (3), получаем

$$F(\alpha) = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x, \quad \Phi(\alpha) = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

47. $\int_0^1 x^3 (1-x^3)^{\frac{1}{3}} dx$. 48. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} x dx$. 49. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x^3)^2} dx$.

50. $\int_0^1 \frac{x(1-x)^6 dx}{(1-3x+3x^2)^3}$. 51. $\int_0^1 x^3 (\ln \frac{1}{x})^5 dx$. 52. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{ch} \beta x} dx$.

53. Используя формулу понижения, построить продолжение функции Γ для отрицательных значений аргумента.

54. Построить эскиз графика функции B .

§ 5. Интегральная формула Фурье

5.1. Представление функции интегралом Фурье.

Теорема. Если функция $f :]-\infty; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ является кусочно-гладкой на каждом конечном отрезке числовой прямой и абсолютно интегрируема на $]-\infty, +\infty[$, то справедлива формула

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^l d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)), \quad (1)$$

или

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если f — непрерывная функция, то $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = f(x)$ и интегральная формула (1) принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Для упрощения записи вид формулы (2) сохраняют и в том случае, когда функция f разрывна. Интеграл в (2) называют интегралом Фурье функции f .

Часто формулу (2) используют в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi, \quad i^2 = -1. \quad (3)$$

Интеграл в (3) называют комплексным интегралом Фурье функции f .

5.2. Преобразования Фурье.

Теорема. Если функция $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ является кусочно-гладкой на каждом отрезке полупрямой $x > 0$ и абсолютно интегрируема на $]0, +\infty[$, то

$$\bar{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{f}_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad (1)$$

$$\bar{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{f}_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda. \quad (2)$$

Равенства (1) называют синус-преобразованием Фурье функции f , а равенства (2) — косинус-преобразованием; причем, первые формулы в (1) и (2) называют прямым преобразованием, а вторые — обратным.

Из формулы (3), п.5.1, следует прямое комплексное преобразование Фурье:

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\lambda s} ds \quad (3)$$

и обратное комплексное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (4)$$

Представить интегралом Фурье следующие функции:

$$113. f : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

◀ Данная функция удовлетворяет условиям теоремы п.5.1 и, следовательно, ее можно представить интегралом Фурье. Легко видеть, что $b(\lambda) = 0$ (в силу четности функции f), а

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \lambda x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \lambda}{\lambda}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda, \quad |x| \neq 1,$$

что и требовалось.

Следует заметить, что в точках $x = \pm 1$ разрыва функции f интеграл Фурье, согласно теории, равен $\frac{1}{2}$. Действительно, поскольку

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(1+x)}{\lambda} d\lambda + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(1-x)}{\lambda} d\lambda \right),$$

то, применяя формулу Дирихле (см, пример 75), имеем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(1+x) + \operatorname{sgn}(1-x)),$$

откуда и следует указанный результат. ►

$$114. f : x \mapsto \operatorname{sgn}(x - \alpha) - \operatorname{sgn}(x - \beta), \quad \beta > \alpha.$$

◀ Замечая, что

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha, \\ 1, & \text{если } x = \alpha, \\ 2, & \text{если } \alpha < x < \beta, \\ 1, & \text{если } x = \beta, \\ 0, & \text{если } x > \beta, \end{cases}$$

имеем

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b \cos \lambda x dx = \frac{2}{\pi \lambda} (\sin \lambda \beta - \sin \lambda \alpha),$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b \sin \lambda x dx = \frac{2}{\pi \lambda} (\cos \lambda \alpha - \cos \lambda \beta).$$

Следовательно, представление интегралом Фурье имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} ((\sin \lambda \beta - \sin \lambda \alpha) \cos \lambda x + (\cos \lambda \alpha - \cos \lambda \beta) \sin \lambda x) d\lambda = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(\beta - x) + \sin \lambda(x - \alpha)}{\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

В данном примере значение функции f совпадает с ее интегралом Фурье во всех точках числовой прямой. ►

115. $f : x \mapsto \frac{1}{a^2 + x^2}$.

◀ Функция f при $a \neq 0$ дифференцируема и абсолютно интегрируема на интервале $]-\infty, +\infty[$. Следовательно, она представима интегралом Фурье. Имеем $b(\lambda) = 0$ (в силу четности функции f),

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x dx}{a^2 + x^2} (x = |a|t) = \frac{2}{\pi |a|} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda |a| t) dt}{1 + t^2} = \frac{1}{|a|} e^{-\lambda |a|}, \quad a \neq 0$$

(см. пример 84). Запишем теперь интегральную формулу Фурье данной функции:

$$f(x) = \frac{1}{|a|} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda |a|} \cos \lambda x d\lambda, \quad \text{если } a \neq 0. \blacktriangleright$$

116. $f : x \mapsto \frac{x}{a^2 + x^2}, \quad a \neq 0$.

◀ Функция f дифференцируема и не является абсолютно интегрируемой на интервале $]-\infty, +\infty[$, однако она интегрируема на нем в смысле главного значения Коши и может быть представлена интегралом Фурье.

Легко видеть, что $a(\lambda) = 0$, $b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{a^2 + x^2} dx$.

Этот интеграл равномерно сходится по параметру $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ в силу примера 26 (здесь $\frac{x}{a^2 + x^2}$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, а $\left| \int_0^x \sin \lambda t dt \right| \leqslant \frac{2}{\lambda_0}$). Следовательно, его можно найти как производную (с точностью до знака) от функции, рассмотренной в предыдущем примере, т. е.

$$b(\lambda) = - \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x dx}{a^2 + x^2} \right)'_{\lambda} = e^{-\lambda |a|}.$$

Интеграл Фурье функции $x \mapsto \frac{x}{a^2 + x^2}$ имеет вид

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda |a|} \sin \lambda x d\lambda, \quad a \neq 0. \blacktriangleright$$

117. $f : x \mapsto \begin{cases} \sin x, & \text{если } |x| \leqslant \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi. \end{cases}$

◀ Эта функция непрерывна, кусочно-гладкая и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой. Кроме того, она нечетна;

$$a(\lambda) = 0, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin \lambda x \, dx = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\sin \pi \lambda}{1 - \lambda^2}, & \lambda \neq 1, \\ 1, & \lambda = 1. \end{cases}$$

Итак, $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi \lambda}{1 - \lambda^2} \sin \lambda x \, d\lambda$. ▶

118. $f : x \mapsto e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0$.

◀ Рассматриваемая функция непрерывна, дифференцируема всюду, за исключением точки $x = 0$, и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой. Следовательно, она представима интегралом Фурье.

Поскольку функция f четная, то $b(\lambda) = 0$,

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \lambda x \, dx = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}.$$

Таким образом, искомое представление данной функции интегралом Фурье имеет вид

$$e^{-\alpha|x|} = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\alpha^2 + \lambda^2} \, d\lambda; \quad \alpha > 0. \quad ▶$$

119. $f : x \mapsto e^{-\alpha|x|} \sin \beta x, \quad \alpha > 0$.

◀ Нетрудно проверить, что эта функция дифференцируема всюду и абсолютно интегрируема на $]-\infty, +\infty[$ ($|e^{-\alpha|x|} \sin \beta x| \leq e^{-\alpha|x|}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}$ сходится). Поэтому ее можно представить интегралом Фурье.

Учитывая нечетность функции, имеем

$$a(\lambda) = 0, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \sin \lambda x \, dx.$$

Переходя под интегралом от произведения синусов к разности косинусов, получаем

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta - \lambda)x \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta + \lambda)x \, dx = \\ &= \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + (\beta - \lambda)^2)} - \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2)} = \frac{4\alpha\beta\lambda}{\pi(\alpha^2 + (\beta - \lambda)^2)(\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e^{-\alpha|x|} \sin \beta x = \frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x \, d\lambda}{(\alpha^2 + (\beta - \lambda)^2)(\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2)}, \quad \alpha > 0. \quad ▶$$

120. $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

◀ Замечая, что все условия теоремы о представимости функции интегралом Фурье здесь выполняются, имеем

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \lambda x \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \quad (\text{см. пример 73}),$$

$$b(\lambda) = 0 \quad (\text{в силу четности функции } x \mapsto e^{-x^2}).$$

Таким образом, представление интегралом Фурье имеет вид

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \cos \lambda x \, d\lambda. \blacktriangleright$$

121. Функцию $f : x \mapsto e^{-x}$, $0 < x < +\infty$, представить интегралом Фурье, продолжая ее:
а) четным образом; б) нечетным образом.

◀ В случае а) в выражении для функции f вместо x подставим $|x|$; в случае б) будем рассматривать функцию $F : x \mapsto f(|x|) \operatorname{sgn} x$. Очевидно, при $x > 0$ функции $\Phi : x \mapsto e^{-|x|}$ и $F : x \mapsto e^{-|x|} \operatorname{sgn} x$ совпадают с данной функцией, а при $x < 0$ первая из них является четным продолжением, вторая же — нечетным продолжением функции f , т. е. $\Phi(-x) = \Phi(x)$, $F(-x) = -F(x)$.

Поскольку функции Φ и F удовлетворяют условиям представимости их интегралом Фурье, то по соответствующим формулам находим

$$a_{\Phi}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \lambda x \, dx = \frac{2}{\pi(\lambda^2 + 1)}, \quad b_{\Phi}(\lambda) = 0,$$

$$a_F(\lambda) = 0, \quad b_F(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin \lambda x \, dx = \frac{2\lambda}{\pi(\lambda^2 + 1)}.$$

Таким образом, в первом случае

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} \, d\lambda,$$

а во втором

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x \, d\lambda}{\lambda^2 + 1}. \blacktriangleright$$

Найти прямое комплексное преобразование Фурье функции f , если:

122. $f : x \mapsto e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.

◀ Подставляя данную функцию в указанную формулу преобразования (см. (3), п.5.2), получаем

$$\begin{aligned} \bar{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t| - it\lambda} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} \cos t\lambda \, dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} \sin t\lambda \, dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos t\lambda \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}, \quad \alpha > 0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

123. $f : x \mapsto xe^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.

◀ Как и в предыдущем примере, находим

$$\begin{aligned}\bar{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|-it\lambda} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|} \cos t\lambda dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|} \sin t\lambda dt = \\ &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} te^{-\alpha t} \sin t\lambda dt = -i\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha\lambda}{(\lambda^2 + \alpha^2)^2}, \quad \alpha > 0.\end{aligned}$$

Заметим, что последний интеграл можно получить дифференцированием интеграла Фурье из предыдущего примера по параметру λ (дифференцирование под знаком интеграла справедливо в силу равномерной сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} te^{-\alpha t} \sin t\lambda dt$ относительно λ). ►

124. Найти прямое синус-преобразование Фурье функции

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 2, \\ 3, & 2 < x < 4, \\ 0, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

◀ Функция f удовлетворяет условиям теоремы п.5.2, поэтому она допускает прямое синус-преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}\bar{f}_s(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^2 \sin \lambda x dx + 3 \int_2^4 \sin \lambda x dx \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} (1 - \cos 2\lambda + 3(\cos 2\lambda - \cos 4\lambda)) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + 2 \cos 2\lambda - 3 \cos 4\lambda). \blacksquare\end{aligned}$$

125. Найти прямое косинус-преобразование Фурье функции

$$f : x \mapsto \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ e^{1-x}, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

◀ Функция f является кусочно-гладкой на любом отрезке полуинтервала $x > 0$ и абсолютно интегрируемой на $[0, +\infty[$, поэтому к ней можно применить косинус-преобразование Фурье. По первой формуле (1), п.5.2, имеем

$$\begin{aligned}\bar{f}_c(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^1 x \cos \lambda x dx + \int_1^{+\infty} e^{1-x} \cos \lambda x dx \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^2} + \frac{\cos \lambda - \lambda \sin \lambda}{\lambda^2 + 1} \right).\blacksquare\end{aligned}$$

Применяя преобразования Фурье, решить следующие дифференциальные задачи:

126. $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = \varphi(x), & 0 < x < +\infty, \\ y(0) = 0, \quad y(+\infty) = y'(+\infty) = 0, & \omega = \text{const}. \end{cases}$

◀ Применим синус-преобразование Фурье. Для этого умножим обе части уравнения на $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda x$ и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} y''(x) \sin \lambda x dx + \omega^2 \bar{y}_s(\lambda) = \bar{\varphi}_s(\lambda). \quad (1)$$

К интегралу применим интегрирование по частям и учтем при этом краевые условия:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} y''(x) \sin \lambda x \, dx &= y'(x) \sin \lambda x \Big|_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{+\infty} y'(x) \cos \lambda x \, dx = \\ &= -\lambda \left(y(x) \cos \lambda x \Big|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} y(x) \sin \lambda x \, dx \right) = -\lambda^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{y}_s(\lambda). \end{aligned}$$

Подставив это значение в (1) и решив полученное уравнение относительно $\bar{y}_s(\lambda)$, найдем

$$\bar{y}_s(\lambda) = \frac{\bar{\varphi}_s(\lambda)}{\omega^2 - \lambda^2}.$$

Для восстановления функции y используем обратное синус-преобразование Фурье:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\bar{\varphi}_s(\lambda)}{\omega^2 - \lambda^2} \sin \lambda x \, d\lambda. \blacktriangleright$$

$$127. \begin{cases} y'' + \omega^2 y = \varphi(x), & 0 < x < +\infty, \\ y'(0) = 0, \quad y(+\infty) = y'(+\infty) = 0, & \omega = \text{const}. \end{cases}$$

◀ Применим косинус-преобразование Фурье. Для этого умножим обе части уравнения на $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \lambda x$ и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} y''(x) \cos \lambda x \, dx + \omega^2 \bar{y}_c(\lambda) = \bar{\varphi}_c(\lambda). \quad (1)$$

Учитывая краевые условия, преобразуем интеграл:

$$\int_0^{+\infty} y''(x) \cos \lambda x \, dx = y'(x) \cos \lambda x \Big|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} y'(x) \sin \lambda x \, dx = -\lambda^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{y}_c(\lambda).$$

А тогда из (1) аналогично проделанному выше получим

$$\bar{y}_c(\lambda) = \frac{\bar{\varphi}_c(\lambda)}{\omega^2 - \lambda^2}.$$

Применяя к функции \bar{y}_c обратное преобразование Фурье, приходим к решению данной задачи:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\bar{\varphi}_c(\lambda)}{\omega^2 - \lambda^2} \cos \lambda x \, d\lambda. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти прямое синус-преобразование Фурье следующих функций:

$$55. f : x \mapsto \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < +\infty. \end{cases} \quad 56. f : x \mapsto \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi < x < +\infty. \end{cases}$$

$$57. f : x \mapsto \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & 2\pi < x < +\infty. \end{cases} \quad 58. f : x \mapsto \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2, \\ e^{-x}, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

Найти прямое косинус-преобразование Фурье следующих функций:

§ 5. Интегральная формула Фурье

59. $f : x \mapsto \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi < x < +\infty. \end{cases}$ 60. $f : x \mapsto \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ e^{-x}, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$

61. $f : x \mapsto \begin{cases} \arcsin(\sin x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi < x < +\infty. \end{cases}$

62. Найти прямое комплексное преобразование Фурье производных f' , f'' , если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0.$$

63. Применяя комплексное преобразование Фурье, решить следующую дифференциальную задачу:

$$y'' + 3y' + y = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad y(\pm\infty) = y'(\pm\infty) = 0.$$

Глава 2

Кратные и криволинейные интегралы

§ 1. Интеграл Римана на компакте. Приведение кратных интегралов к повторным и их вычисление

1.1. Мера m -мерного параллелепипеда.

Если в евклидовом пространстве \mathbb{R}^m задана система векторов $y_j, j = \overline{1, m}$, и на ней построен m -мерный параллелепипед $\bar{\mathcal{J}}$, то его мерой (объемом) $\mu\bar{\mathcal{J}} = |\bar{\mathcal{J}}|$ будем называть число

$$|\bar{\mathcal{J}}| = \sqrt{\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_m)}, \quad (1)$$

где

$$\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_m) = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_1, y_2 \rangle & \dots & \langle y_1, y_m \rangle \\ \langle y_2, y_1 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \dots & \langle y_2, y_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle y_m, y_1 \rangle & \langle y_m, y_2 \rangle & \dots & \langle y_m, y_m \rangle \end{vmatrix} \quad (2)$$

— определитель Грама от этих векторов. Параллелепипед $\bar{\mathcal{J}} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$ называется m -мерным бруском. Его ребра взаимно перпендикулярны, так как он построен на векторах $y_j = (b_j - a_j)e_j, j = \overline{1, m}$, где e_j — векторы стандартного базиса пространства \mathbb{R}^m , у которых j -я координата равна единице, а все остальные — нули. Для скалярного произведения $\langle y_j, y_k \rangle$ имеем

$$\langle y_j, y_k \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq j, \\ (b_j - a_j)^2, & \text{если } k = j, \end{cases}$$

в силу чего равенство (1) принимает вид

$$|\bar{\mathcal{J}}| = \prod_{j=1}^m (b_j - a_j). \quad (3)$$

Кроме бруса $\bar{\mathcal{J}}$ рассматривают также открытый брус $\mathcal{J} =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_m, b_m[$ и полуоткрытые брусы $\mathcal{J} = [a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_m, b_m[, \mathcal{J} =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_m, b_m]$. В каждом случае полагают $\mu\mathcal{J} = |\mathcal{J}| = |\bar{\mathcal{J}}|$.

Если каждое ребро $[a_j, b_j], j = \overline{1, m}$, бруса $\bar{\mathcal{J}}$ разбить на n_j частей точками $x_0^{(j)} = a_j < x_1^{(j)} < \dots < x_{n_j}^{(j)} = b_j$ и провести через эти точки гиперплоскости $x_j = x_k^{(j)}, k = \overline{0, n_j}$, то получим так называемое сеточное разбиение $\Pi = \{\bar{\mathcal{J}}_1, \bar{\mathcal{J}}_2, \dots, \bar{\mathcal{J}}_n\}$ ($n = n_1 n_2 \dots n_m$) бруса $\bar{\mathcal{J}}$ на элементарные брусы (ячейки) $\bar{\mathcal{J}}_i, i = \overline{1, n}$. В качестве ячеек можно брать не только замкнутые брусы $\bar{\mathcal{J}}_i$, но и открытые брусы \mathcal{J}_i .

Если Π — сеточное разбиение бруса $\bar{\mathcal{J}}$, то

$$\mu\bar{\mathcal{J}} = \sum_{i=1}^n \mu\bar{\mathcal{J}}_i = \sum_{i=1}^n |\bar{\mathcal{J}}_i|. \quad (4)$$

Пусть $f : \bar{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная на m -мерном брусе $\bar{\mathcal{J}}$ функция, $\Pi = \{\bar{\mathcal{J}}_i; i = \overline{1, n}\}$ — сеточное разбиение бруса $\bar{\mathcal{J}}$ на ячейки, мерами которых являются их евклидовые объемы $|\bar{\mathcal{J}}_i|$. Обозначим

$$M_i = \sup_{x \in \bar{\mathcal{J}}_i} \{f(x)\}, \quad m_i = \inf_{x \in \bar{\mathcal{J}}_i} \{f(x)\} \quad (5)$$

и введем в рассмотрение суммы

$$\bar{S}_\Pi(f) = \sum_{i=1}^n M_i |\bar{\mathcal{J}}_i|, \quad \underline{S}_\Pi(f) = \sum_{i=1}^n m_i |\bar{\mathcal{J}}_i|, \quad (6)$$

которые называются соответственно *верхней и нижней интегральными суммами* функции f , соответствующими сеточному разбиению Π бруса $\bar{\mathcal{J}}$.

Пусть $\{\Pi\}$ — множество всех возможных сеточных разбиений бруса $\bar{\mathcal{J}}$ на ячейки $\bar{\mathcal{J}}_i$. Числа

$$\int f dx = \inf_{\{\Pi\}} \{\bar{S}_\Pi(f)\}, \quad \int f dx = \sup_{\{\Pi\}} \{\underline{S}_\Pi(f)\} \quad (7)$$

называются соответственно *верхним и нижним интегралами Римана* функции f на брусе $\bar{\mathcal{J}}$.

Определение. Функция f называется *интегрируемой по Риману на брусе $\bar{\mathcal{J}}$* , если выполняется равенство

$$\int f dx = \int f dx, \quad (8)$$

а общее значение верхнего и нижнего интегралов называется *m -кратным интегралом Римана* этой функции на брусе $\bar{\mathcal{J}}$ и обозначается

$$\int_{\bar{\mathcal{J}}} f(x) dx = \iint_{\bar{\mathcal{J}}} \cdots \int_{\bar{\mathcal{J}}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (9)$$

Множество всех функций f , интегрируемых по Риману на брусе $\bar{\mathcal{J}}$, обозначим $R(\bar{\mathcal{J}})$.

Теорема (критерий интегрируемости). Для того чтобы ограниченная функция $f : \bar{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$ была интегрируемой на брусе $\bar{\mathcal{J}}$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \epsilon > 0$ существовало такое сеточное разбиение Π этого бруса, что $0 \leq \bar{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \epsilon$.

Сокращенно критерий интегрируемости функции f записывают следующим образом:

$$(f \in R(\bar{\mathcal{J}})) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \exists \Pi : 0 \leq \bar{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \epsilon).$$

1.2. Интеграл Римана как предел интегральных сумм.

Пусть $\Pi = \{\bar{\mathcal{J}}_i; i = \overline{1, n}\}$ — произвольное сеточное разбиение бруса $\bar{\mathcal{J}}$. Диаметром $d(\bar{\mathcal{J}}_i)$ ячейки $\bar{\mathcal{J}}_i$ будем называть точную верхнюю грань множества всех расстояний между ее точками. Обозначим $d(\Pi) = \max_{1 \leq i \leq n} d(\bar{\mathcal{J}}_i)$. Пусть $f : \bar{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция.

Возьмем произвольные точки $\xi_i \in \bar{\mathcal{J}}_i$, $i = \overline{1, n}$, и образуем интегральную сумму

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |\bar{\mathcal{J}}_i|. \quad (1)$$

Полагаем $\lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} S_\Pi(f) \stackrel{\text{def}}{=} I$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для всякого сеточного разбиения Π бруса $\bar{\mathcal{J}}$, для которого $d(\Pi) < \delta$, выполняется неравенство

$$|S_\Pi(f) - I| < \epsilon. \quad (2)$$

Теорема. Если: 1) при $d(\Pi) \rightarrow 0$ $\exists \lim S_\Pi(f) = I$, то $f \in R(\bar{\mathcal{J}})$ и при этом

$$\int_{\bar{\mathcal{J}}} f(x) dx = I.$$

$$2) f \in R(\bar{\mathcal{J}}), \text{ то } \exists \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} S_\Pi(f) = \int_{\bar{\mathcal{J}}} f(x) dx.$$

Эта теорема устанавливает два эквивалентных определения интеграла Римана на брусе.

1.3. Мера 0 Лебега и мера 0 Жордана.

Определение 1. Множество E точек евклидова пространства \mathbb{R}^m имеет лебегову меру 0, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такое счетное покрытие $\bar{W} = \{\bar{\mathcal{J}}_j; j \in \mathbb{N}\}$ этого множества брусами $\bar{\mathcal{J}}_j$ (счетное покрытие $W = \{\mathcal{J}_j; j \in \mathbb{N}\}$ открытыми брусами \mathcal{J}_j), меры которых $\mu \bar{\mathcal{J}}_j = \mu \mathcal{J}_j = |\bar{\mathcal{J}}_j|$, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\bar{\mathcal{J}}_j| < \varepsilon. \quad (1)$$

Определение 2. Множество E точек евклидова пространства \mathbb{R}^m имеет жорданову меру 0, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие $\bar{W} = \{\bar{\mathcal{J}}_j; j = \overline{1, n}\}$ ($W = \{\mathcal{J}_j; j = \overline{1, n}\}$) этого множества брусами $\bar{\mathcal{J}}_j$ (открытыми брусами \mathcal{J}_j), меры которых $|\bar{\mathcal{J}}_j|$, что

$$\sum_{j=1}^n |\bar{\mathcal{J}}_j| < \varepsilon. \quad (2)$$

Из определения 2 следует, что всякое множество жордановой меры 0 имеет лебегову меру 0.

Теорема (Лебега). Пусть $f : \bar{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная на брусе $\bar{\mathcal{J}}$ функция и $A \subset \bar{\mathcal{J}}$ — множество ее точек разрыва. Функция f интегрируема на брусе $\bar{\mathcal{J}}$ тогда и только тогда, когда A — множество лебеговой меры 0.

1.4. Интегралы функций, заданных на произвольных множествах точек евклидова пространства \mathbb{R}^m .

Определение 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ и $A \supset E$. Функция $\chi_E : A \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \in A \setminus E, \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества E .

Определение 2. Пусть $E \subset \bar{\mathcal{J}} \subset \mathbb{R}^m$, где $\bar{\mathcal{J}}$ — некоторый брус, $f : \bar{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Полагаем

$$\int_E f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\bar{\mathcal{J}}} f(x) \chi_E(x) dx, \quad (1)$$

если $f \chi_E \in R(\bar{\mathcal{J}})$. При этом пишем $f \in R(E)$.

Определение 3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция $\bar{\mathcal{J}} \supset E$ — произвольный брус. Продолжим функцию f в каждую точку множества $\bar{\mathcal{J}} \setminus E$, образовав при этом функцию $F : \bar{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \in \bar{\mathcal{J}} \setminus E. \end{cases}$$

Если $F \in R(\overline{\mathcal{J}})$, то полагаем

$$\int_E f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\overline{\mathcal{J}}} F(x) dx. \quad (2)$$

Определение 4. Ограничено множество E точек евклидова пространства \mathbb{R}^m , граница которого имеет лебегову меру 0, называется измеримым по Жордану (или жордановым), а интеграл

$$\mu E = \int_E dx \quad (3)$$

называется в этом случае m -мерным объемом множества E .

Пересечение $E_1 \cap E_2$ и объединение $E_1 \cup E_2$ двух жордановых множеств E_1 и E_2 есть жорданово множество. Если E_1 и E_2 не пересекаются, то

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2. \quad (4)$$

Дополнение $E \setminus G$ жорданова множества G до жорданова множества $E \supset G$ есть жорданово множество, и

$$\mu(E \setminus G) = \mu E - \mu G. \quad (5)$$

1.5. Основные свойства интеграла Римана на компакте.

Пусть K — компакт в евклидовом пространстве \mathbb{R}^m , $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемая на этом компакте функция. Тогда:

- 1) сужение функции f на компакт $K_1 \subset K$ интегрируемо на K_1 ;
- 2) если $K = K_1 \cup K_2$, где K_1 и K_2 — компакты без общих внутренних точек, то

$$\int_K f(x) dx = \int_{K_1} f(x) dx + \int_{K_2} f(x) dx \quad (1)$$

(свойство аддитивности);

- 3) если $f_1 \in R(K)$, $f_2 \in R(K)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $(\alpha f_1 + \beta f_2) \in R(K)$ и

$$\int_K (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) dx = \alpha \int_K f_1(x) dx + \beta \int_K f_2(x) dx \quad (2)$$

(свойство линейности);

- 4) если $f_1 \in R(K)$ и $f_2 \in R(K)$, то $f_1 f_2 \in R(K)$;
- 5) если $f_1 \in R(K) \wedge f_2 \in R(K)$ и $f_1(x) \leq f_2(x) \quad \forall x \in K$, то

$$\int_K f_1(x) dx \leq \int_K f_2(x) dx; \quad (3)$$

- 6) если $f \in R(K)$, то $|f| \in R(K)$, и при этом

$$\left| \int_K f(x) dx \right| \leq \int_K |f(x)| dx; \quad (4)$$

- 7) если $f \in R(K)$, $g \in R(K) \wedge g(x) \geq 0$ ($g(x) \leq 0$) $\forall x \in K$, $m = \inf_{x \in K} \{f(x)\}$, $M = \sup_{x \in K} \{f(x)\}$, то существует такое $\mu \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$, что справедлива формула

$$\int_K f(x)g(x) dx = \mu \int_K g(x) dx; \quad (5)$$

если, кроме того, $f \in C(K)$, то найдется такая точка $\xi \in K$, что

$$\int_K f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_K g(x) dx \quad (6)$$

(теорема о среднем).

1.6. Приведение кратного интеграла к повторному.

Следующая теорема позволяет свести вычисление кратного интеграла к повторному интегрированию.

Теорема (Фубини). Пусть $\bar{\mathcal{J}}_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathcal{J}}_2 \subset \mathbb{R}^m$ — брусы в евклидовых пространствах и $f : \bar{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{\mathcal{J}} = \bar{\mathcal{J}}_1 \times \bar{\mathcal{J}}_2$ — интегрируемая на брусе $\bar{\mathcal{J}}$ функция. Обозначим

$$\varphi(x) = \int_{\bar{\mathcal{J}}_2} f(x, y) dy, \quad \psi(x) = \int_{\bar{\mathcal{J}}_1} f(x, y) dx, \quad x \in \bar{\mathcal{J}}_1.$$

Тогда функции φ и ψ интегрируемы на брусе $\bar{\mathcal{J}}_1$ и при этом справедливы равенства

$$\int_{\bar{\mathcal{J}}} f(x, y) dx dy = \int_{\bar{\mathcal{J}}_1} \varphi(x) dx = \int_{\bar{\mathcal{J}}_1} \psi(x) dx, \quad (1)$$

где $\int_{\bar{\mathcal{J}}} f(x, y) dx dy$ — интеграл Римана функции f на брусе $\bar{\mathcal{J}}$.

Интегралы $\int_{\bar{\mathcal{J}}_1} \varphi(x) dx$, $\int_{\bar{\mathcal{J}}_1} \psi(x) dx$ называются повторными интегралами функции f .

Справедливы также равенства

$$\int_{\bar{\mathcal{J}}} f(x, y) dx dy = \int_{\bar{\mathcal{J}}_2} \left(\int_{\bar{\mathcal{J}}_1} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\bar{\mathcal{J}}_2} \left(\int_{\bar{\mathcal{J}}_1} f(x, y) dx \right) dy, \quad (2)$$

в которых интегралы называются повторными, взятыми в обратном порядке по сравнению с повторными интегралами (1).

Следствие 1. Если функция $y \mapsto f(x, y)$ интегрируема на брусе $\bar{\mathcal{J}}_2$, то при выполнении условий теоремы Фубини справедливо равенство

$$\int_{\bar{\mathcal{J}}} f(x, y) dx dy = \int_{\bar{\mathcal{J}}_1} \left(\int_{\bar{\mathcal{J}}_2} f(x, y) dy \right) dx. \quad (3)$$

Если, кроме того, функция $x \mapsto f(x, y)$ интегрируема на брусе $\bar{\mathcal{J}}_1$, то справедливо равенство

$$\int_{\bar{\mathcal{J}}} f(x, y) dx dy = \int_{\bar{\mathcal{J}}_1} \left(\int_{\bar{\mathcal{J}}_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\bar{\mathcal{J}}_2} \left(\int_{\bar{\mathcal{J}}_1} f(x, y) dx \right) dy, \quad (4)$$

т.е. повторные интегралы, взятые в обратном порядке по отношению друг к другу, равны между собой и каждый из них равен кратному интегралу функции f на брусе $\bar{\mathcal{J}} = \bar{\mathcal{J}}_1 \times \bar{\mathcal{J}}_2$. В частности, формула (4) справедлива в случае, когда $f \in C(\bar{\mathcal{J}})$.

Следствие 2. Пусть функция $f : \bar{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на брусе $\bar{\mathcal{J}} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_m, b_m]$, а также на каждом из брусов $\bar{\mathcal{J}}_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_{m-2}, b_{m-2}]$, $\bar{\mathcal{J}}_2 =$

$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{m-3}, b_{m-3}], \dots, \overline{\mathcal{J}}_{m-3} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ и на сегментах $[a_j, b_j], j = \overline{2, m}$. Применив теорему Фубини $m - 1$ раз, получим равенство

$$\int_{\overline{\mathcal{J}}} f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_m, \quad (5)$$

посредством которого интегрирование по брусу $\overline{\mathcal{J}}$ сводится к повторному интегрированию. При этом все переменные, кроме той, по которой производится интегрирование, фиксируются.

1.7. Некоторые конкретные реализации интеграла Римана на компакте.

Рассмотрим два важных случая.

1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — компакт с краем ∂K . Множество ∂K точек границы компакта K является гладкой или кусочно-гладкой кривой класса C^1 и поэтому имеет лебегову меру 0, в силу чего измеримо по Жордану.

Если $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемая по Риману на множестве K функция, то ее интеграл

$$\int_K f(x) dx$$

называется *двойным интегралом* и обозначается

$$\iint_K f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Предположим, что K — выпуклое в направлении оси Oy множество, т.е. что его можно представить в виде

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}, \quad (2)$$

где y_1, y_2 — кусочно-гладкие функции. Согласно определению 3, п.1.4, и следствию 2 из теоремы Фубини, справедливо равенство (в предположении, что внутренний интеграл существует)

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (3)$$

позволяющее вычислить двойной интеграл как повторный.

Если множество K выпукло в направлении оси Ox , т.е. его можно представить в виде

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}, \quad (4)$$

где x_1, x_2 — кусочно-гладкие функции, и, кроме того, существует интеграл

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx,$$

то двойной интеграл выражается через повторный следующим образом:

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (5)$$

Если множество K выпукло, то при выполнении условий, сформулированных в следствии 2 из теоремы Фубини, справедливы одновременно равенства (3) и (5):

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (6)$$

2. Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ — компакт с краем ∂K , являющимся гладкой или кусочно-гладкой поверхностью класса C^1 . Если $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемая на компакте K функция, то ее интеграл Римана

$$\int_K f(x) dx$$

называется *тройным интегралом* функции f и обозначается

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz. \quad (7)$$

Пусть $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, где y_1, y_2, z_1, z_2 — гладкие или кусочно-гладкие функции, и двойной интеграл

$$\iint_{\substack{y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)}} f(x, y, z) dy dz$$

существует $\forall x \in [a, b]$. Применив теорему Фубини, получаем

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{\substack{y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)}} f(x, y, z) dy dz.$$

Если, кроме того, $\forall (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ существует

$$\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

то, согласно следствию 2 из теоремы Фубини, справедливо равенство

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (8)$$

Если компакт K не является выпуклым множеством, но его можно представить в виде объединения выпуклых множеств без общих внутренних точек, то следует воспользоваться свойством аддитивности кратного интеграла и представить его в виде суммы интегралов по этим множествам, заменив каждое слагаемое повторным интегралом.

1.8. Замена переменных в интеграле Римана.

Теорема. Пусть \mathcal{O} и \mathcal{O}' — выпуклые области евклидова пространства \mathbb{R}^m с фиксированным базисом, $K \subset \mathcal{O}$ — компакт с краем ∂K (гиперповерхность размерности $m-1$ класса C^1) и ξ — C^1 -диффеоморфизм \mathcal{O}' на \mathcal{O} . Если $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная на компакте K функция, то справедлива формула замены переменных в m -кратном интеграле Римана

$$\int_K f(x) dx = \int_{K'} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt, \quad (1)$$

где $K' = \xi^{-1}(K)$, $\xi'(t)$ — матрица Остроградского—Якоби отображения ξ .

Определитель матрицы Остроградского—Якоби ξ' (полной производной отображения ξ) называется **якобианом** и обозначается через $\frac{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)}$. Поскольку при замене переменной $x = \xi(t)$ имеем $x_j = \xi_j(t)$, то $\frac{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)} = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)}$, и формула (1) принимает вид

$$\int_K f(x) dx = \int_{K'} f(\xi(t)) \left| \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)} \right| dt, \quad (2)$$

в котором она обычно употребляется.

Если $\xi : (t_1, t_2) \mapsto (x, y)$ — C^1 -диффеоморфизм пространства \mathbb{R}^2 на \mathbb{R}^2 , и в плоскости xOy задана измеримая по Жордану область D , а на ее замыкании \overline{D} определена непрерывная функция f , причем D является образом при отображении ξ измеримой по Жордану области D' , лежащей в плоскости $t_1O't_2$, то согласно формуле (2) имеем

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\xi_1(t_1, t_2), \xi_2(t_1, t_2)) \left| \frac{D(x, y)}{D(t_1, t_2)} \right| dt_1 dt_2. \quad (3)$$

В частности, если $p : (\rho, \varphi) \mapsto (x, y)$ — отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определяемое равенствами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (4)$$

которые называют **формулами перехода к полярным координатам**, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi, \quad (5)$$

поскольку $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho$. Заметим, что в формулах (3), (5) вместо областей D и D' можно взять их замыкания \overline{D} и \overline{D}' , так как границы этих областей имеют двумерный объем 0.

Довольно часто при замене переменных в двойных интегралах переходят от декартовых координат к обобщенным полярным координатам по формулам

$$x = a\rho \cos^\alpha \varphi, \quad y = b\rho \sin^\alpha \varphi \quad (\rho > 0, 0 < \varphi < 2\pi), \quad (6)$$

где параметр α выбирается надлежащим образом. В этом случае

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = ab\alpha \rho \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\alpha-1} \varphi.$$

Пусть $p : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ — отображение $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ определяемое системой

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \quad (\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (7)$$

которую называют **формулами перехода к сферическим координатам**. Предположим, что в пространстве переменных x, y, z задана измеримая по Жордану область \mathcal{O} , а на ее замыкании $\overline{\mathcal{O}}$ определена непрерывная функция f , причем \mathcal{O} является образом при отображении p измеримой по Жордану области \mathcal{O}' , лежащей в пространстве переменных ρ, θ, φ . При замене переменных в интеграле

$$\iiint_{\mathcal{O}} f(x, y, z) dx dy dz$$

по формулам (7), принимая во внимание, что $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin \theta$, получим

$$\iiint_{\mathcal{O}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{O}'} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi. \quad (8)$$

Иногда вместо системы (7) берут систему

$$x = a\rho \sin^\alpha \theta \cos^\beta \varphi, \quad y = b\rho \sin^\alpha \theta \sin^\beta \varphi, \quad z = c\rho \cos^\alpha \theta \quad (\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (9)$$

Гл. 2. Кратные и криволинейные интегралы

которую называют *формулами перехода к обобщенным сферическим координатам*. В этом случае имеем

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc\alpha\beta\rho^2 \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{2\alpha-1} \theta \sin^{\beta-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi. \quad (10)$$

В некоторых случаях при вычислении тройных интегралов удобно переходить от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z по формулам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (\rho > 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi) \quad (11)$$

или к обобщенным цилиндрическим координатам, полагая

$$x = a\rho \cos^\alpha \varphi, \quad y = b\rho \sin^\alpha \varphi, \quad z = z \quad (\rho > 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi), \quad (12)$$

где параметр α выбирается надлежащим образом. В последнем случае имеем

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = ab\alpha\rho \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\alpha-1} \varphi. \quad (13)$$

При вычислении m -кратного интеграла Римана часто оказывается полезным переход в интеграле от декартовых координат к сферическим координатам в пространстве \mathbb{R}^m по формулам

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-1}, \\ x_j = \rho \cos \varphi_{j-1} \prod_{i=j}^{m-1} \sin \varphi_i, \quad j = \overline{2, m-1}, \\ x_m = \rho \cos \varphi_{m-1}, \\ (\rho > 0, \quad 0 < \varphi_1 < 2\pi, \quad 0 < \varphi_j < \pi \text{ при } j = \overline{2, m-1}). \end{cases} \quad (14)$$

Якобиан преобразования координат, задаваемого системой (14), имеет вид

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1})} = \rho^{m-1} \prod_{j=1}^{m-1} \sin^{j-1} \varphi_j. \quad (15)$$

1. Вычислить интеграл $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy \, dx \, dy$, рассматривая его как предел интегральной суммы

при сеточном разбиении квадрата $D = [0, 1] \times [0, 1]$ на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая при этом в качестве точек ξ_i правые вершины ячеек.

◀ Разбиение области интегрирования на ячейки производится прямыми $x = \frac{i}{n}$, $y = \frac{j}{n}$ ($i, j = \overline{1, n-1}$), а значение функции $f(x, y) = xy$, $(x, y) \in D$ в каждой правой вершине ячейки равно $\frac{ij}{n^2}$ ($i, j = \overline{1, n}$). Вполне очевидно, что $d(\Pi) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}. \quad \blacktriangleright$$

2. Составить нижнюю $\underline{S}_\Pi(f)$ и верхнюю $\bar{S}_\Pi(f)$ интегральные суммы для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in D$, $D = [1, 2] \times [1, 3]$, разбивая прямоугольник D на ячейки прямыми $x = 1 + \frac{i}{n}$, $y = 1 + \frac{2j}{n}$ ($i, j = \overline{1, n}$). Чему равны пределы этих сумм при $n \rightarrow \infty$?

◀ Ячейки разбиения Π — прямоугольники, длина сторон которых $\frac{1}{n}$ и $\frac{2}{n}$; поэтому площадь ячейки равна $\frac{2}{n^2}$.

Рассмотрим ячейку

$$\bar{J}_{ij} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + \frac{i}{n} \leq x \leq 1 + \frac{i+1}{n}, \quad 1 + \frac{2j}{n} \leq y \leq 1 + \frac{2(j+1)}{n} \right\}.$$

Так как $f(x, y)$ — квадрат расстояния точки (x, y) от начала координат, то

$$f_{\min} = f\left(1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{2j}{n}\right), \quad f_{\max} = f\left(1 + \frac{i+1}{n}, 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right)$$

при $(x, y) \in \bar{\mathcal{J}}_{ij}$, в силу чего имеем

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\Pi}(f) &= \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{2j}{n}\right) = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}, \\ \bar{S}_{\Pi}(f) &= \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{i+1}{n}, 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right) = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{\Pi}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_{\Pi}(f) = 13\frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

3. Какой знак имеет интеграл

$$I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy?$$

◀ Представим исследуемый интеграл I в виде

$$I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 0}} \arcsin(x+y) dx dy + \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy = I_1 + I_2.$$

Вполне очевидно, что $I_2 > 0$. Исследуем интеграл I_1 . В точках квадрата $D = [0, 1] \times [-1, 0]$, симметричных относительно его диагонали $y = -x$, функция $f(x, y) = \arcsin(x+y)$ принимает значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку, поэтому при любом разбиении Π множества D на ячейки — квадраты $\bar{\mathcal{J}}_i$ — в каждой паре симметричных ячеек, лежащих по обе стороны диагонали, найдутся такие точки (ξ_i, η_i) , (ξ'_i, η'_i) , что $f(\xi_i, \eta_i) + f(\xi'_i, \eta'_i) = 0$. Рассмотрим такое сеточное разбиение $\Pi = \{\bar{\mathcal{J}}_i; i = \overline{1, n}\}$ на квадраты, чтобы сумма площадей ячеек, объединение которых $\bigcup_k \bar{\mathcal{J}}_k$ содержит диагональ квадрата D , была

меньше произвольного $\epsilon > 0$. Тогда при указанном выше выборе точек (ξ_i, η_i) , (ξ'_i, η'_i) и произвольном выборе точек $(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) \in \bar{\mathcal{J}}_k$ интегральная сумма $S_{\Pi}(f)$ имеет вид

$$S_{\Pi}(f) = \sum_k f(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) |\bar{\mathcal{J}}_k|.$$

Пусть $\sup_{(x, y) \in D} |f(x, y)| = M$. Тогда справедлива оценка

$$|S_{\Pi}(f)| \leq M\epsilon,$$

из которой следует, что $I_1 = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} S_{\Pi}(f) = 0$. Поэтому $I > 0$.

При решении примера воспользовались тем, что интеграл Римана интегрируемой функции f не зависит от способа выбора точек (ξ_i, η_i) при сеточном разбиении квадрата D . ▶

4. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$I = \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}.$$

◀ Площадь области интегрирования равна 200. Согласно формуле (6), п.1.5, имеем

$$I = \frac{200}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta}, (\xi, \eta) \in D, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 10\}.$$

Принимая во внимание неравенства $100 < 100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 102$, получаем оценку $1,96 < I < 2$. ▶

5. Заменить двойной интеграл $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ соответствующими ему повторными

интегралами, если: а) D — замкнутый треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$; б) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq y\}$; в) D — компакт с краем ∂D , заданным уравнением $(x - y)^2 + x^2 = a^2$, $a > 0$.

◀ а) Если внешнее интегрирование в повторном интеграле производить по переменной x , то следует представить область интегрирования в виде $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, -\frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$. В этом случае воспользуемся свойством аддитивности двойного интеграла и формулой (3), п.1.7:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-2}^0 dx \int_{-\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Если внешнее интегрирование производить по переменной y , то, применив формулу (5), п.1.7, получим

$$I = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx.$$

б) Из представлений компакта D :

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leq y \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y - y^2} \leq x \leq \sqrt{y - y^2} \right\} \end{aligned}$$

следует, что при замене двойного интеграла повторными можно применить формулы (3) и (5), п.1.7. При этом получим

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx.$$

в) После несложного исследования убеждаемся в том, что компакт D является выпуклым в направлении осей Ox и Oy множеством, имеющим следующие представления:

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, x - \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq x + \sqrt{a^2 - x^2} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a\sqrt{2} \leq y \leq a\sqrt{2}, \frac{y - \sqrt{2a^2 - y^2}}{2} \leq x \leq \frac{y + \sqrt{2a^2 - y^2}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Согласно формулам (3) и (5), п.1.7, справедливы равенства

$$I = \int_{-a}^a dx \int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-a\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y-\sqrt{2a^2-y^2}}{2}}^{\frac{y+\sqrt{2a^2-y^2}}{2}} f(x, y) dx. \blacksquare$$

6. Доказать формулу Дирихле

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx, \quad a > 0.$$

◀ Предположим, что повторные интегралы, равенство которых требуется доказать, существуют. Можем предположить, например, что функция f непрерывна на множестве

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq a, y \leq x \leq a\}$$

или имеет разрывы в D лишь на конечном числе гладких кривых, оставаясь ограниченной.

Рассмотрим функцию $F : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $D_1 = [0, a] \times [0, a]$, где

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in D_1 \setminus D. \end{cases}$$

Для функции F существуют повторные интегралы

$$I_1 = \int_0^a dx \int_0^a F(x, y) dy, \quad I_2 = \int_0^a dy \int_0^a F(x, y) dx.$$

Произведем разбиение Π квадрата D_1 на ячейки — прямоугольники \bar{J}_{ij} ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$), выберем произвольную точку $(\xi_i, \eta_j) \in \bar{J}_{ij}$ и составим интегральные суммы

$$S_\Pi^{(1)}(F) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F(\xi_i, \eta_j) |\bar{J}_{ij}|, \quad S_\Pi^{(2)}(F) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_j) |\bar{J}_{ij}|,$$

где $|\bar{J}_{ij}| = \Delta x_i \Delta y_j$. Из существования интегралов I_1, I_2 следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \Pi \wedge d(\Pi) < \delta \Rightarrow |I_1 - S_\Pi^{(1)}(F)| < \varepsilon \wedge |I_2 - S_\Pi^{(2)}(F)| < \varepsilon$. Так как $S_\Pi^{(1)}(F) = S_\Pi^{(2)}(F)$, то $I_1 = I_2$. Пусть $x \in]0, a[$. Тогда имеем

$$\int_0^a F(x, y) dy = \int_0^x F(x, y) dy + \int_x^a F(x, y) dy = \int_0^x f(x, y) dy.$$

Если $y \in]0, a[$, то получим

$$\int_0^a F(x, y) dx = \int_0^y F(x, y) dx + \int_y^a F(x, y) dx = \int_y^a f(x, y) dx.$$

Поскольку $I_1 = I_2$, то

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx. \blacksquare$$

Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$7. \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$

◀ При изменении y от 0 до 1 переменная x пробегает в области интегрирования значения от $2-y$ до $1+\sqrt{1-y^2}$, в силу чего получаем повторный интеграл

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. ▶$$

$$8. \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy, \quad a > 0.$$

◀ Разобьем замкнутую область

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2a, \sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax} \right\}$$

отрезком прямой $y = a$ на три области (рис. 1). При изменении порядка интегрирования получим сумму повторных интегралов

$$\int_0^a \left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx \right) dy + \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx. ▶$$

$$9. \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

◀ Из свойства аддитивности интеграла Римана и его свойства изменять знак на противоположный при изменении направления интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_\pi^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \\ &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy - \int_\pi^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

В каждом из интегралов, входящих в правую часть полученного равенства, изменим порядок интегрирования.

При изменении y от 0 до 1 переменная x изменяется от $\arcsin y$ до $\pi - \arcsin y$; а при изменении y от -1 до 0 переменная x изменяется от $\pi - \arcsin y$ до $2\pi + \arcsin y$, в силу чего получим разность интегралов

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx. ▶$$

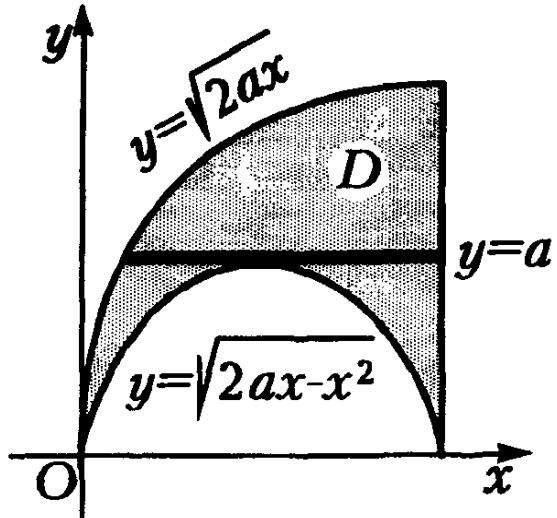


Рис. 1

В двойном интеграле $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам ρ и φ и расставить пределы интегрирования, если:

$$10. D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2 (a < 0)\}.$$

◀ При переходе к полярным координатам в интеграле I по формуле (5), п. 1.8, переменная φ изменяется в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а ρ изменяется от 0 до $a \cos \varphi$. Следовательно,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \blacktriangleright$$

$$11. D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, \frac{x^2}{a} \leq y \leq a \right\}.$$

◀ Отрезками лучей $y = x$ и $y = -x$, $y > 0$, разобьем область интегрирования на три множества (рис. 2): два параболических сегмента

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, \frac{x^2}{a} \leq y \leq x \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq 0, \frac{x^2}{a} \leq y \leq -x \right\}$$

и треугольник $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, |x| \leq y \leq a\}$. В силу свойства аддитивности двойного интеграла, имеем

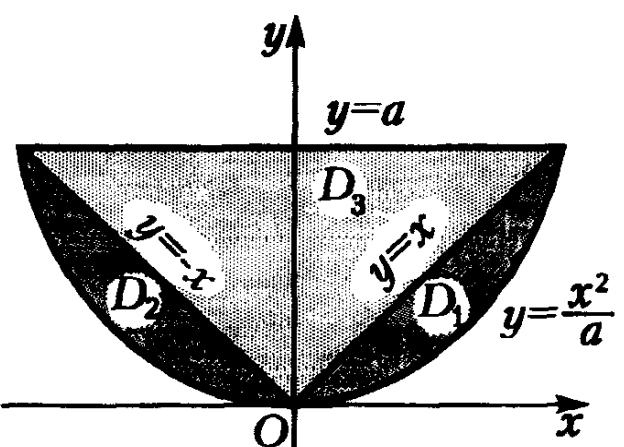


Рис. 2

$$I = \sum_{j=1}^3 \iint_{D_j} f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

В D_1 переменная φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а ρ изменяется от 0 до $\rho = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$. В D_2 имеем $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$, а в D_3 , очевидно, $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$, $0 \leq \rho \leq a \operatorname{cosec} \varphi$.

Переходя к полярным координатам в каждом интеграле, входящем в сумму (1), получим

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a \operatorname{cosec} \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \blacktriangleright$$

Перейти к полярным координатам в повторных интегралах, считая подынтегральную функцию непрерывной в области определения:

$$12. I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

◀ функция f непрерывна в круговом сегменте

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\},$$

поэтому повторный интеграл I равен двойному интегралу

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получаем представление множества D в виде

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi} \leq \rho \leq 1 \right\},$$

или в виде

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \rho \leq 1, \arcsin \frac{1}{\rho\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\rho\sqrt{2}} \right\}.$$

Соответственно каждому из этих представлений после замены переменных интеграл I принимает вид

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}} \csc(\varphi + \frac{\pi}{4})}^1 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \rho d\rho \int_{\arcsin \frac{1}{\rho\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\rho\sqrt{2}}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi. \blacktriangleright$$

$$13. I = \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{2}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy.$$

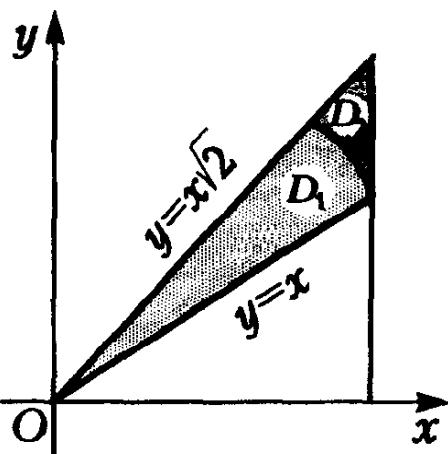


Рис. 3

◀ Как и в предыдущем примере, повторный интеграл I равен двойному интегралу от функции $(x, y) \mapsto f(\sqrt{x^2 + y^2})$, $(x, y) \in D$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x\sqrt{2}\}$, на компакте D .

Предположим, что при переходе от декартовых координат к полярным после замены двойного интеграла повторным внешнее интегрирование производится по переменной φ . Представляя в этом случае множество D в виде

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{2}, 0 \leq \rho \leq \frac{2}{\cos \varphi} \right\},$$

получим

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg \sqrt{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi}} \rho f(\rho) d\rho.$$

Если при замене переменных в двойном интеграле и переходе затем к повторному интегралу внешнее интегрирование будет производиться по переменной ρ , то предварительно представим множество D в виде $D = D_1 \cup D_2$ (рис. 3), где

$$D_1 = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{2} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 2\sqrt{2} \leq \rho \leq 2\sqrt{3}, \arccos \frac{2}{\rho} \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{2} \right\},$$

и воспользуемся свойством аддитивности двойного интеграла:

$$I = \iint_{D_1} \rho f(\rho) d\rho d\varphi + \iint_{D_2} \rho f(\rho) d\rho d\varphi = \int_0^{2\sqrt{2}} \rho f(\rho) d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg \sqrt{2}} d\varphi + \int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \rho f(\rho) d\rho \int_{\arccos \frac{2}{\rho}}^{\arctg \sqrt{2}} d\varphi =$$

$$= \left(\operatorname{arctg} \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \right) \int_0^{2\sqrt{2}} \rho f(\rho) d\rho + \int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \rho \left(\operatorname{arctg} \sqrt{2} - \arccos \frac{2}{\rho} \right) f(\rho) d\rho. \blacksquare$$

14. $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, где край ∂D компакта D задан неявно уравнением $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geq 0$.

◀ Полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получаем уравнение края ∂D в виде $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Если после замены переменных и перехода к повторному интегралу внешнее интегрирование производится по φ , то, очевидно,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Из представления компакта D

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq a, -\frac{1}{2} \arccos \frac{\rho^2}{a^2} \leq \varphi \leq \frac{1}{2} \arccos \frac{\rho^2}{a^2} \right\}$$

следует, что интеграл I можно записать также в виде

$$I = \int_0^a \rho d\rho \int_{-\frac{1}{2} \arccos \frac{\rho^2}{a^2}}^{\frac{1}{2} \arccos \frac{\rho^2}{a^2}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi. \blacksquare$$

15. Считая, что ρ и φ — полярные координаты, изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, \rho) d\rho, \quad a > 0.$$

◀ На рис. 4 показано, что область, в которой задана подынтегральная функция f , определяется неравенствами

$$0 \leq \rho \leq a, \quad \frac{1}{2} \arcsin \frac{\rho^2}{a^2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\rho^2}{a^2}.$$

После изменения порядка интегрирования получим интеграл

$$\int_0^a d\rho \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{\rho^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\rho^2}{a^2}} f(\varphi, \rho) d\varphi. \blacksquare$$

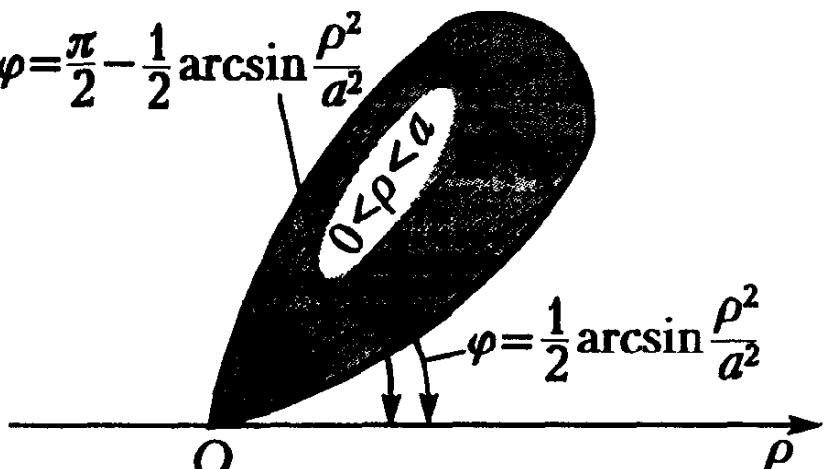


Рис. 4

16. Квадрат $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < a+h, b < y < b+h\}$, $a > 0$, $b > 0$, посредством системы функций $u = y^2 x^{-1}$, $v = \sqrt{xy}$ преобразуется в область D' . Найти отношение площади области D' к площади области D . Чему равен предел этого отношения при $h \rightarrow 0$?

◀ Пусть $P_{D'}$, P_D соответственно площади областей D' и D . Под площадями открытых областей понимаем меры Жордана множеств D' и D или их замыканий. Согласно формуле замены переменной и определения жордановой меры множества, имеем

$$P_{D'} = \iint_{D'} du dv = \iint_D \left| \frac{\mathcal{D}(u, v)}{\mathcal{D}(x, y)} \right| dx dy,$$

где $\frac{\mathcal{D}(u, v)}{\mathcal{D}(x, y)} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}$.

Заменяя двойной интеграл повторным, получаем

$$P_{D'} = \frac{3}{2} \int_a^{a+h} x^{-\frac{3}{2}} dx \int_b^{b+h} y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{6}{5} \frac{\left(b^2 + (b+h)^2 + b(b+h) + (2b+h)\sqrt{b(b+h)} \right) h^2}{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})\sqrt{a(a+h)}}.$$

Поскольку $P_D = h^2$,

$$\frac{P_{D'}}{P_D} = \frac{6}{5} \frac{b^2 + (b+h)^2 + b(b+h) + (2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})\sqrt{a(a+h)}}.$$

Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, находим

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{D'}}{P_D} = \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}. \blacktriangleright$$

17. В интеграле $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, где край ∂D компакта D задан уравнениями

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$ ($a > 0$), произвести замену переменных по формулам $x = u \cos^4 v$, $y = u \sin^4 v$ и перейти от двойного интеграла к повторному, считая функцию f непрерывной.

◀ При заданном отображении имеем

$$\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos^4 v & -4u \cos^3 v \sin v \\ \sin^4 v & 4u \sin^3 v \cos v \end{vmatrix} = 4u \sin^3 v \cos^3 v,$$

в силу чего получаем

$$I = 4 \iint_{D'} f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) |u| |\sin^3 v \cos^3 v| du dv,$$

где D' — компакт, внутренние точки которого отображаются на множество всех внутренних точек компакта D .

Чтобы заменить полученный двойной интеграл повторным, найдем пределы изменения переменных u и v . При заданном отображении край компакта, заданный уравнением $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, переходит в отрезок прямой $u = a$. Если $(0, y)$ — любая точка, лежащая на отрезке оси Oy , где $0 \leq y \leq a$, то $v = \frac{\pi}{2}$. Если точка $(x, 0)$ лежит на оси Ox и $0 \leq x \leq a$, то $v = 0$. Таким образом, справедливо равенство

$$I = 4 \int_0^a u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) \sin^3 v \cos^3 v dv. \blacktriangleright$$

18. Показать, что замена переменных $x + y = \xi$, $y = \xi\eta$ переводит треугольник $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$ в квадрат $D' = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$.

◀ Началу координат в плоскости xOy соответствует множество точек $\gamma_1 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1\}$. Если $y = 1-x$, то $\xi = 1$, $\eta = 1-x$, откуда следует, что множество

$\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 1 - x\}$ отображается на множество $\gamma'_2 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi = 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$, причем при возрастании x от 0 до 1 переменная η убывает от 1 до 0. Совершенно аналогично убеждаемся в том, что множество $\gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$ отображается на множество $\gamma'_3 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq 1, \eta = 1\}$, а множество $\gamma_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ — на множество $\gamma'_4 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq 1, \eta = 0\}$. Таким образом, край компакта D отображается в край компакта D' . Осталось показать, что при заданном отображении любая внутренняя точка компакта D переходит во внутреннюю точку компакта D' . Если $0 < x < 1, 0 < y < 1 - x$, то $0 < \xi < 1, 0 < \xi(1 - \eta) < 1$, откуда следует, что $0 < \eta < 1$, т.е. что точка $(\xi, \eta) \in D'$ — внутренняя. ►

19. Пусть функция $(x, y) \mapsto f(x, y)$ непрерывна на компакте D , край которого ∂D задан уравнениями $xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x$ ($x > 0, y > 0$). Посредством замены переменных свести двойной интеграл $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ к однократному.

◀ Произведем в интеграле I замену переменных по формулам $xy = u, y = vx$. Тогда $1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4$, т.е. отображение, определяемое системой $x = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}, y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$, осуществляет C^1 -диффеоморфизм квадрата $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$ на криволинейный четырехугольник D . Согласно формуле замены переменных, имеем

$$I = \iint_{D'} f(u) \left| \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 f(u) du \int_1^4 \frac{dv}{v} = \ln 2 \int_1^2 f(u) du.$$

Заметим, что якобиан взятого отображения легко вычислить по формуле

$$\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} = \left(\frac{\mathcal{D}(u, v)}{\mathcal{D}(x, y)} \right)^{-1} = \left(\begin{vmatrix} \cdot & y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} \right)^{-1} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}. \blacktriangleright$$

Вычислить двойные интегралы:

20. $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$.

◀ Переходя к полярным координатам ρ, φ , получим уравнение края ∂D компакта D в виде $\rho^4(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = 1$, откуда

$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

После замены переменных и перехода от двойного интеграла к повторному получим

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^4 \varphi} d(\operatorname{tg} \varphi).$$

Полагая в интеграле $\operatorname{tg}^4 \varphi = t$, имеем

$$I = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{(1 + t^2)t^{-\frac{3}{4}}}{1 + t} dt = \frac{1}{4} \left(B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \right) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

21. $I = \iint_D (x + y) dx dy$, где D — компакт, край которого ∂D задан уравнениями $y^2 = 2x, x + y = 4, x + y = 12$.

◀ Решая системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y = 12, \end{cases}$$

получим соответственно $x_1 = 2$, $x_2 = 8$ и $x_1 = 8$, $x_2 = 18$. Поэтому справедливо представление $D = D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 8, 4 - x \leq y \leq \sqrt{2x}\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 8 \leq x \leq 18, -\sqrt{2x} \leq y \leq 12 - x\}.$$

Используя свойство аддитивности двойного интеграла и заменяя двойные интегралы повторными, получим

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (x + y) dx dy + \iint_{D_2} (x + y) dx dy = \int_2^8 dx \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x + y) dy + \int_8^{12} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x + y) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_2^8 (x + y)^2 \Big|_{y=4-x}^{y=\sqrt{2x}} dx + \frac{1}{2} \int_8^{12} (x + y)^2 \Big|_{y=-\sqrt{2x}}^{y=12-x} dx = \\ &= \int_2^8 \left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{2x} \frac{3}{2} + x - 8 \right) dx + \int_8^{12} \left(72 - \frac{x^2}{2} + \sqrt{2x} \frac{3}{2} - x \right) dx = 543 \frac{11}{15}. \end{aligned} \blacktriangleright$$

22. $I = \iint_D |\cos(x + y)| dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$.

◀ В точках квадрата D , симметричных относительно его диагонали, определяемой уравнением $x + y = \pi$, подынтегральная функция принимает равные значения, в силу чего справедливо равенство

$$I = 2 \iint_{D'} |\cos(x + y)| dx dy,$$

где $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi - x\}$. С помощью отрезка $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, y = \frac{\pi}{2} - x\}$ разобьем множество D' на два множества, на одном из которых подынтегральная функция положительная, а на другом — отрицательная. Указанные области в полярных координатах определяются соответственно неравенствами

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2(\sin \varphi + \cos \varphi)}; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2(\sin \varphi + \cos \varphi)} \leq \rho \leq \frac{\pi}{\sin \varphi + \cos \varphi}.$$

После перехода к полярным координатам и замены двойных интегралов повторными получим

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2(\sin \varphi + \cos \varphi)}} \rho \cos \rho (\sin \varphi + \cos \varphi) d\rho - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{(\sin \varphi + \cos \varphi)}} \rho \cos \rho (\sin \varphi + \cos \varphi) d\rho \right) d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(\sin \varphi + \cos \varphi)^2} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi + \frac{\pi}{4})} = \pi \operatorname{ctg} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{aligned} \blacktriangleright$$

23. $I = \iint_D \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

◀ Функция $f : (x, y) \mapsto \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2$, $(x, y) \in D$, положительна на множестве $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{x+y}{\sqrt{2}}\}$ и отрицательна на множестве $D_2 = D \setminus D_1$, вследствие чего имеем

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy - \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = - \iint_D f(x, y) dx dy + 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_D \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) dx dy + 2 \iint_{D_1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right) dx dy = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

После замены переменных в интегралах I_1 и I_2 соответственно по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $x - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \rho \cos \varphi$, $y - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \rho \sin \varphi$, получим

$$\begin{aligned} I &= - \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi + 2 \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}}} f\left(\rho \cos \varphi + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \rho \sin \varphi + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^2 - \frac{\rho}{\sqrt{2}}(\sin \varphi + \cos \varphi) \right) \rho d\rho + 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - \rho^2 \right) \rho d\rho = \frac{\pi}{2} + 4\pi \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64} \right) = \frac{9}{16}\pi. \blacksquare \end{aligned}$$

24. $I = \iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$.

◀ Выражение под знаком модуля неотрицательно на множестве $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, x^2 \leq y \leq 2\}$ и неположительно на множестве $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y < x^2\}$. Принимая во внимание, что $D = D_1 \cup D_2$, и свойство аддитивности двойного интеграла, имеем

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} \sqrt{y-x^2} dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{x^2-y} dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y-x^2} dy + \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2-y} dy = \\ &= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \left((y-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=x^2}^{y=2} + (x^2-y)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=x^2}^{y=0} \right) dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \left(x^2|x| + (2-x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx. \end{aligned}$$

Полагая в последнем интеграле $t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}$, окончательно получим

$$I = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2t + \frac{\cos 4t}{2} \right) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}. \blacksquare$$

Вычислить интегралы от разрывных функций:

25. $I = \iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

◀ Исходя из симметрии, следует равенство

$$I = 4 \iint_{D_1} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy,$$

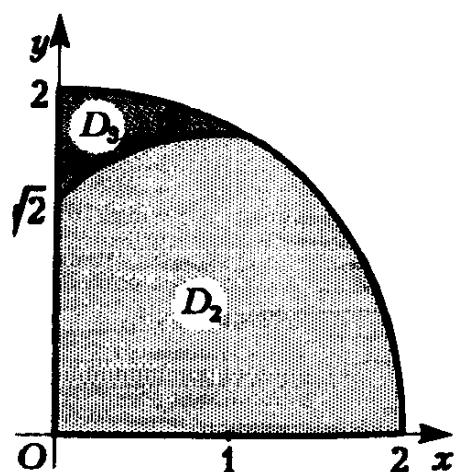


Рис. 5

где $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0, y \geq 0\}$.

Обозначим через f функцию под знаком интеграла на компакте D_1 . Эта функция разрывна в каждой точке кривой $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = \sqrt{x^2 + 2}\}$, разделяющей компакт D_1 на множества D_2 и D_3 (рис. 5), где

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \sqrt{x^2 + 2} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x^2 + 2} < y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\}.$$

Поскольку $f(x, y) = 1$, если $(x, y) \in D_2$, $f(x, y) = 0$, если $(x, y) \in \gamma$, $f(x, y) = -1$, если $(x, y) \in D_3$, то

$$\begin{aligned} I &= 4 \left(\iint_{D_2} dx dy - \iint_{D_3} dx dy \right) = 4 \left(\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy - \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) = \\ &= 4 \left(\int_0^1 \left(2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{4-x^2} \right) dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx \right) = \\ &= 4 \left(\left(x\sqrt{x^2+2} + 2 \ln \left(x + \sqrt{x^2+2} \right) \right) \Big|_0^1 - 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt + 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \right) = \\ &= 4 \left(\sqrt{3} + 2 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{2} - 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = 8 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

(в интеграле $\int \sqrt{4-x^2} dx$ производилась замена $x = 2 \sin t$). ►

$$26. \quad I = \iint_D [x+y] dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}.$$

◀ Отрезками прямых, заданных уравнениями $x+y=j$ ($j=1, 2, 3$), разобьем компакт D на множества D_k ($k=1, 2, 3, 4$) (рис. 6). Если (x, y) — внутренняя точка множества D_k , то $[x+y]=k-1$, $k=1, 4$, в силу чего имеем

$$I = \sum_{k=1}^4 \iint_{D_k} [x+y] dx dy = \sum_{k=1}^4 (k-1) P_k = P_2 + 2P_3 + 3P_4,$$

где P_k — жорданова мера множества D_k . Поскольку $P_2 = P_3 = \frac{3}{2}$, $P_4 = P_1 = \frac{1}{2}$, то окончательно получаем

$$I = 3 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 6. \quad \blacktriangleright$$

$$27. \quad I = \iint_D \sqrt{[y-x^2]} dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}.$$

◀ Исходя из симметрии заключаем, что

$$I = 2 \iint_{D_1} \sqrt{[y-x^2]} dx dy,$$

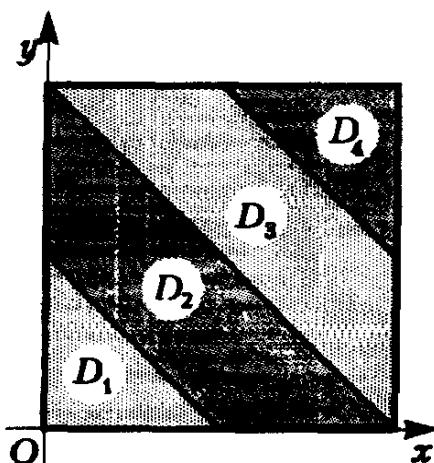


Рис. 6

где $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$. Части кривых $\gamma_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y = x^2 + j\}, j = 1, 2, 3$, лежащие внутри компакта D_1 , разбивают его на множества $D_k (k = \overline{1, 4})$ (рис. 7). Если (x, y) — внутренняя точка множества D_k , то $\sqrt{|y - x^2|} = \sqrt{k - 1}, k = \overline{1, 4}$. Из свойства аддитивности двойного интеграла следует равенство

$$I = 2 \sum_{k=1}^4 \sqrt{k-1} \iint_{D_k} dx dy = 2 \sum_{k=1}^4 \sqrt{k-1} P_k,$$

где P_k — жорданова мера множества D_k . Из представления множества D_k в виде

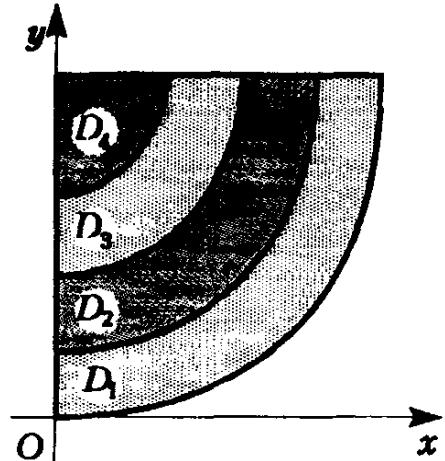


Рис. 7

$$D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{4-k}, x^2 + k - 1 \leq y \leq x^2 + k\} \cup \\ \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{4-k} \leq x \leq \sqrt{4-(k-1)}, x^2 + k - 1 \leq y \leq 4 \right\},$$

имеем

$$P_k = \int_0^{\sqrt{4-k}} dx \int_{x^2+k-1}^{x^2+k} dy + \int_{\sqrt{4-k}}^{\sqrt{5-k}} dx \int_{x^2+k-1}^4 dy = \\ = \sqrt{4-k} + (5-k)(\sqrt{5-k} - \sqrt{4-k}) - \frac{1}{3} \left((5-k)^{\frac{3}{2}} - (4-k)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Следовательно,

$$I = 2 \sum_{k=1}^4 \sqrt{k-1} P_k = 2(P_2 + \sqrt{2}P_3 + \sqrt{3}P_4) = 2 \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \right) = \frac{4}{3} (4 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}). \blacktriangleright$$

28. Вычислить $F'(t)$, если $F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{-\frac{tx}{y^2}} dx dy$.

◀ Произведя в интеграле замену переменных по формулам $x = tu, y = tv, t > 0$, получаем $F(t) = ct^2$, где

$$c = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{-\frac{u}{v^2}} du dv.$$

Дифференцируя по t , имеем

$$F'(t) = 2ct = \frac{2}{t} \cdot ct^2 = \frac{2F(t)}{t}, \quad t > 0. \blacktriangleright$$

29. Найти $F'(t)$, если $F(t) = \iint_{D(t)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, где $D(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1, t \in \mathbb{R}\}$.

◀ Заменяя в интеграле переменные по формулам $x-t = \rho \cos \varphi, y-t = \rho \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, получим

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \sqrt{(t+\rho \cos \varphi)^2 + (t+\rho \sin \varphi)^2} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi, t) d\varphi,$$

где $\Phi(\varphi, t) = \int_0^1 \sqrt{(t + \rho \cos \varphi)^2 + (t + \rho \sin \varphi)^2} \rho d\rho$.

Согласно формуле Лейбница (формуле дифференцирования интеграла по параметру), имеем

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi(\varphi, t)}{\partial t} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{(t + \rho \cos \varphi) + (t + \rho \sin \varphi)}{\sqrt{(t + \rho \cos \varphi)^2 + (t + \rho \sin \varphi)^2}} \rho d\rho = \iint_{D(t)} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy. \blacktriangleright$$

30. Пусть линии уровня функции f — простые замкнутые кривые, и область $S(v_1, v_2)$ ограничена кривыми

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = v_1\}, \quad \gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = v_2\}, \quad v_1 < v_2.$$

Доказать, что

$$I = \iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv,$$

где $F(v)$ — переменная площадь фигуры, ограниченной кривой γ_1 и кривой $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = v, v_1 \leq v \leq v_2\}$.

◀ Предположим, что функция F дифференцируема на сегменте $[v_1, v_2]$. Тогда $F'(v) \geq 0 \forall v \in [v_1, v_2]$, так как F — возрастающая функция. Пусть $\Pi = \{v_1 = \bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n = v_2\}$ — произвольное разбиение сегмента $[v_1, v_2]$, где $\bar{v}_i < \bar{v}_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$. Принимая во внимание неравенства $\bar{v}_i \leq f(x, y) \leq \bar{v}_{i+1}$, $(x, y) \in S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1})$ и свойство аддитивности двойного интеграла, имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \bar{v}_i \Delta S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \iint_{S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1})} f(x, y) dx dy = I \leq \sum_{i=0}^{n-1} \bar{v}_{i+1} \Delta S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}), \quad (1)$$

где $\Delta S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}) = F(\bar{v}_{i+1}) - F(\bar{v}_i)$ — площадь компакта $S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1})$. Согласно формуле конечных приращений, получаем

$$\Delta S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}) = F'(\tilde{v}_i) \Delta \bar{v}_i, \quad \text{где } \bar{v}_i < \tilde{v}_i < \bar{v}_{i+1}.$$

Из очевидных соотношений $\bar{v}_i = \tilde{v}_i + \alpha_i^{(1)}(\Delta \bar{v}_i)$, $\bar{v}_{i+1} = \tilde{v}_i + \alpha_i^{(2)}(\Delta \bar{v}_i)$, где $\alpha_i^{(1)}$ и $\alpha_i^{(2)}$ — бесконечно малые при $\Delta \bar{v}_i \rightarrow 0$ функции, следует, что неравенства (1) можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(1)} F'(\tilde{v}_i) \Delta v_i + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{v}_i F'(\tilde{v}_i) \Delta v_i \leq I \leq \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{v}_i F'(\tilde{v}_i) \Delta \bar{v}_i + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(2)} F'(\tilde{v}_i) \Delta \bar{v}_i.$$

После перехода к пределу в этих неравенствах получим

$$I = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv.$$

Пусть, например, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v_1 = 1$, $v_2 = 3$. Тогда $F(v) = \pi(v - 1)$, $F'(v) = \pi$,

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \pi \int_1^3 v dv = \frac{\pi}{2} v^2 \Big|_1^3 = 4\pi. \blacktriangleright$$

Вычислить следующие тройные интегралы:

$$31. I = \iiint_K \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz, \text{ где } \partial K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

◀ Переходя к обобщенным сферическим координатам по формулам $x = a\rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = c\rho \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и заменяя тройной интеграл повторным, получим, принимая во внимание, что $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc\rho^2 \sin \theta$,

$$I = abc \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{2}{5} \pi abc \cos \theta \Big|_0^\pi = \frac{4}{5} \pi abc. ▶$$

32. $I = \iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $x^2 + y^2 = z^2$,

$$z = 1.$$

◀ Край ∂K состоит из части конической поверхности и части плоскости, заданной уравнением $z = 1$; а компакт K проектируется на круг

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Перейдем в интеграле к цилиндрическим координатам и заменим тройной интеграл повторным. Принимая во внимание, что $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho \leq z \leq 1$, $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho$, получим

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_{\rho}^1 dz = 2\pi \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho) d\rho = \frac{\pi}{6}. ▶$$

33. $I = \iiint_K \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, где $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$.

◀ Переайдем в интеграле к сферическим координатам, приняв во внимание, что $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq \cos \theta$, $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin \theta$.

Тогда получим

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos \theta} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{10} \cos^5 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{10}. ▶$$

34. $I = \iiint_K x^2 dx dy dz$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ ($0 < a < b$), $z = \alpha x$, $z = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$), $z = h$ ($h > 0$).

◀ Представив множество K в виде

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h, \sqrt{\frac{z}{b}} \leq y \leq \sqrt{\frac{z}{a}}, \frac{z}{\beta} \leq x \leq \frac{z}{\alpha} \right\}$$

и заменяя тройной интеграл повторным, получим

$$I = \int_0^h dz \int_{\sqrt{\frac{z}{b}}}^{\sqrt{\frac{z}{a}}} dy \int_{\frac{z}{\beta}}^{\frac{z}{\alpha}} x^2 dx = \frac{1}{3} (\alpha^{-3} - \beta^{-3}) \left(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} \right) \int_0^h z^{\frac{7}{2}} dz = \frac{2}{27} (\alpha^{-3} - \beta^{-3}) \left(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} \right) h^{\frac{9}{2}}. ▶$$

35. $I = \iiint_K xyz dx dy dz$, где компакт K расположен в октанте $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

и ограничен поверхностями, заданными уравнениями $z = \frac{x^2 + y^2}{m}$, $z = \frac{x^2 + y^2}{n}$, $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y = \beta x$ ($0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$, $0 < m < n$).

◀ Произведем в интеграле замену, полагая $xy = u$, $y = vx$, $z = z$. Тогда получим

$$I = \iiint_{K'} x(u, v) y(u, v) z \left| \frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(u, v, z)} \right| du dv dz,$$

где K' — компакт, отображающийся на компакт K , причем

$$K' = \left\{ (u, v, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq u \leq b^2, \alpha \leq v \leq \beta, \frac{u(v+v^{-1})}{n} \leq z \leq \frac{u(v+v^{-1})}{m} \right\}.$$

Поскольку при указанной замене $x = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}$, $y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$, $z = z$, то $\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(u, v, z)} = \frac{1}{2v}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} u du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{v} \int_{\frac{u(v+v^{-1})}{n}}^{\frac{u(v+v^{-1})}{m}} z dz = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \int_{a^2}^{b^2} u^3 du \int_{\alpha}^{\beta} \left(v + \frac{1}{v} \right)^2 \frac{dv}{v} = \\ &= \frac{1}{16} (m^{-2} - n^{-2})(b^8 - a^8) \int_{\alpha}^{\beta} \left(v + \frac{2}{v} + \frac{1}{v^3} \right) dv = \\ &= \frac{1}{16} (m^{-2} - n^{-2})(b^8 - a^8) \left(\frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2}(\alpha^{-2} - \beta^{-2}) \right) = \\ &= \frac{1}{32} (m^{-2} - n^{-2})(b^8 - a^8) \left((\beta^2 - \alpha^2)(1 + \alpha^{-2}\beta^{-2}) + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

36. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}, \quad \text{где } a^2 + b^2 + c^2 > r^2.$$

◀ Согласно теореме о среднем для кратных интегралов, имеем

$$I = f(M)\mu K = f(M) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

где $f(M)$ — значение подынтегральной функции в некоторой точке шара $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$. Поскольку $a^2 + b^2 + c^2 > r^2$, то функция $\varphi : (x, y, z) \mapsto \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, $(x, y, z) \in K$, не принимает экстремальных значений внутри шара K , а достигает наибольшего и наименьшего значений на его крае $\partial K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Составим функцию Лагранжа

$$F(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$$

и найдем ее экстремальные точки. Имеем

$$F'_x = \frac{x-a}{\varphi} + 2\lambda x = 0, \quad F'_y = \frac{y-b}{\varphi} + 2\lambda y = 0, \quad F'_z = \frac{z-c}{\varphi} + 2\lambda z = 0.$$

Решая полученную систему уравнений совместно с уравнением связи $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, найдем λ и точки M_1, M_2 условного экстремума функции φ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm \frac{1}{2r}, \quad M_1 = \left(\frac{ra}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{rb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{rc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right), \\ M_2 &= \left(-\frac{ra}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, -\frac{rb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, -\frac{rc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\varphi(M_1) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - r, \quad \varphi(M_2) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + r,$$

то справедливы неравенства $\varphi(M_1) < \varphi(M) < \varphi(M_2)$, которые можно записать как одно неравенство

$$|\varphi(M) - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}| < r, \quad M \in K \setminus \partial K.$$

Обозначая $\theta = \frac{\varphi(M) - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{r}$, получим равенство $\varphi(M) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + r\theta$, где $|\theta| < 1$.

Принимая во внимание, что $f(M) = \frac{1}{\varphi(M)}$, имеем оценку

$$I = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + r\theta}, \quad |\theta| < 1. \blacksquare$$

37. Доказать, что если функция $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^3$ и $\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$ для любой области $\omega \subset K$, то $f(x, y, z) \equiv 0$, $(x, y, z) \in K$.

◀ Пусть P — любая внутренняя точка множества K и $S(P, \epsilon)$ — открытый шар. По теореме о среднем и из условия задачи имеем

$$f(\bar{P}) = \frac{3}{4\pi\epsilon^2} \iiint_{S(P, \epsilon)} f(x, y, z) dx dy dz = 0, \quad \bar{P} \in S(P, \epsilon).$$

Стягивая шар $S(P, \epsilon)$ к точке P , получаем, что $f(P) = 0$. Таким образом, функция f обращается в нуль в каждой внутренней точке множества K . В силу ее непрерывности на компакте K она будет равна нулю и в точках, принадлежащих его краю ∂K . Следовательно, $f(x, y, z) \equiv 0$, если $(x, y, z) \in K$. ◀

38. Найти $F'(t)$, если:

a) $F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, где f — непрерывная функция;

б) $F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f(xyz) dx dy dz$, где f — дифференцируемая функция.

◀ а) Перейдя в интегrale к сферическим координатам и заменив после этого тройной интеграл повторным, получим

$$F(t) = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2) d\rho = 4\pi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2) d\rho.$$

Дифференцируя функцию F , находим $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$.

б) Заменим тройной интеграл повторным

$$F(t) = \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t f(xyz) dz$$

и вычислим производную функции F по параметру t :

$$F'(t) = \int_0^t dy \int_0^t f(tyz) dz + \int_0^t dx \left(\int_0^t f(xtz) dz + \int_0^t f(xyt) dy \right) =$$

Гл. 2. Кратные и криволинейные интегралы

$$= \int_0^t dy \int_0^t f(tyz) dz + \int_0^t dx \int_0^t f(xtz) dz + \int_0^t dx \int_0^t f(xyt) dy. \quad (1)$$

Поскольку функция f дифференцируема, то можем вычислить повторный интеграл $F(t)$, применив формулу интегрирования по частям, полагая при этом $dv = dz$, $u = f(xyz)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t dx \int_0^t dy \left(z f(xyz) \Big|_{z=0}^t - \int_0^t z f'(xyz) xy dz \right) = \\ &= t \int_0^t dx \int_0^t f(xyz) dy - \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t xyz f'(xyz) dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Заменяя тройной интеграл $F(t)$ повторными

$$F(t) = \int_0^t dx \int_0^t dz \int_0^t f(xyz) dy = \int_0^t dy \int_0^t dz \int_0^t f(xyz) dx$$

и применив формулу интегрирования по частям, получим

$$F(t) = t \int_0^t dx \int_0^t f(xtz) dz - \int_0^t dx \int_0^t dz \int_0^t xyz f'(xyz) dy, \quad (3)$$

$$F(t) = t \int_0^t dy \int_0^t f(tyz) dz - \int_0^t dy \int_0^t dz \int_0^t xyz f'(xyz) dx. \quad (4)$$

Складывая левые и правые части равенств (2), (3), (4) и принимая во внимание равенство (1), имеем

$$\frac{3}{t} \left(F(t) + \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t xyz f'(xyz) dz \right) = F'(t),$$

откуда получаем

$$F'(t) = \frac{3}{t} \left(F(t) + \iiint_{K(t)} xyz f'(xyz) dx dy dz \right),$$

где $K(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, 0 \leq z \leq t\}$. ►

39. Пусть $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на множестве $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x_j \leq x, j = \overline{1, m}\}$. Доказать равенство

$$I(\mathbf{x}) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{m-1}} f(\mathbf{x}) dx_m = \int_0^x dx_m \int_{x_m}^x dx_{m-1} \dots \int_{x_2}^x f(\mathbf{x}) dx_1.$$

◀ Из непрерывности функции f и теоремы Фубини следует равенство

$$I(\mathbf{x}) = \int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Представляя множество K в виде

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x_m \leq x, x_{i+1} \leq x_i \leq x, i = m-1, m-2, \dots, 1\}$$

§ 1. Интеграл Римана на компакте. Приведение кратных интегралов к повторным 95
и применив теорему Фубини, получим

$$I(x) = \int_0^x dx_m \int_{x_m}^x dx_{m-1} \dots \int_{x_2}^x f(x) dx_1. \blacktriangleright$$

40. Доказать, что

$$I(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} f(t_1) f(t_2) \dots f(t_m) dt_m = \frac{1}{m!} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)^m,$$

где f — непрерывная функция.

◀ Запишем $I(t)$ в виде

$$I(t) = \int_0^t f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} f(t_m) dt_m$$

и обозначим

$$\varphi(t_{m-2}) = \int_0^{t_{m-2}} f(t_{m-1}) dt_{m-1} \int_0^{t_{m-1}} f(t_m) dt_m.$$

Представив $\varphi(t_{m-2})$ в виде

$$\varphi(t_{m-2}) = \frac{1}{2} \int_0^{t_{m-2}} d \left(\int_0^{t_{m-1}} f(t_m) dt_m \right)^2,$$

получим

$$\varphi(t_{m-2}) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{t_{m-2}} f(y) dy \right)^2.$$

Предполагая справедливым равенство

$$\varphi(t_1) = \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} f(t_m) dt_m = \frac{1}{(m-1)!} \left(\int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right)^{m-1},$$

имеем

$$I(t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^t f(t_1) dt_1 \left(\int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right)^{m-1} = \frac{1}{m!} \int_0^t d \left(\int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right)^m = \frac{1}{m!} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)^m.$$

Методом математической индукции формула доказана. ▶

41. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{m-1}} x_1 x_2 \dots x_m dx_m.$$

◀ Применив формулу, доказанную в примере 40, получим

$$I = \frac{1}{m!} \left(\int_0^1 x dx \right)^m = \frac{1}{2^m m!}. \blacktriangleright$$

42. Привести к однократному интегралу m -кратный интеграл

$$I = \int_K f(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x},$$

где $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$, f — непрерывная функция,

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\|^2 \leq r^2\}.$$

◀ Произведем в интеграле замену переменных по формулам (14), п.1.8. Принимая во внимание формулу (15), п.1.8, получим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \dots \int_0^\pi \sin^{m-2} \varphi_{m-1} d\varphi_{m-1} \int_0^r f(\rho) \rho^{m-1} d\rho = \\ &= 2^{m-1} \pi \prod_{j=2}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j \int_0^r f(\rho) \rho^{m-1} d\rho. \end{aligned}$$

В каждом интеграле, входящем в произведение, произведем замену переменной $\sin \varphi_j = t_j^{\frac{1}{2}}$.

Тогда $d\varphi_j = \frac{1}{2} t_j^{-\frac{1}{2}} (1 - t_j)^{-\frac{1}{2}} dt_j$, в силу чего получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \frac{1}{2} \int_0^1 t_j^{\frac{j}{2}-1} (1 - t_j)^{-\frac{1}{2}} dt_j = \frac{1}{2} B\left(\frac{j}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)},$$

$$\prod_{j=2}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2} \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\dots\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(2)\dots\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

$$I = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^r f(\rho) \rho^{m-1} d\rho = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^r f(\rho) \rho^{m-2} d\rho^2.$$

Полагая в последнем интеграле $\rho^2 = t$, имеем

$$I = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{r^2} f(\sqrt{t}) t^{\frac{m}{2}-1} dt. ▶$$

43. Доказать равенство

$$I = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{m-1}} f(x_m) dx_m = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!} du,$$

где f — непрерывная функция.

◀ Согласно формуле, доказанной в примере 39, имеем

$$I = \int_0^x f(x_m) dx_m \int_{x_m}^x dx_{m-1} \int_{x_{m-1}}^x dx_{m-2} \dots \int_{x_3}^x dx_2 \int_{x_2}^x dx_1.$$

Поскольку

$$\int_{x_3}^x dx_2 \int_{x_2}^x dx_1 = \frac{(x - x_3)^2}{2},$$

то можем предположить, что справедливо равенство

$$\int_{x_{m-1}}^x dx_{m-2} \int_{x_{m-2}}^x dx_{m-3} \dots \int_{x_3}^x dx_2 \int_{x_2}^x dx_1 = \frac{(x - x_{m-1})^{m-2}}{(m-2)!}.$$

При таком предположении получаем

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^x dx_{m-1} \dots \int_{x_3}^x dx_2 \int_{x_2}^x dx_1 &= \frac{1}{(m-2)!} \int_{x_m}^x (x - x_{m-1})^{m-2} dx_{m-2} = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} (x - x_{m-1})^{m-1} \Big|_{x_{m-1}=x}^{x_{m-1}=x_m} = \frac{(x - x_m)^{m-1}}{(m-1)!}. \end{aligned}$$

Таким образом, применив метод математической индукции, имеем

$$I = \int_0^x f(x_m) \frac{(x - x_m)^{m-1}}{(m-1)!} dx_m = \int_0^x f(u) \frac{(x - u)^{m-1}}{(m-1)!} du. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Приближенно вычислить интеграл

$$\iint_{x^2+y^2 \leqslant 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

разбивая область интегрирования на квадраты, вершины которых находятся в целочисленных точках, и выбирая значения подынтегральной функции в вершинах этих квадратов, наиболее удаленных от начала координат. Сравнить полученный результат с точным значением интеграла.

2. Компакт $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ разбит на конечное число квадрируемых частей K_i , $i = \overline{1, n}$, диаметром меньше чем δ каждая, без общих внутренних точек. При каком значении δ будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left| \iint_K \sin(x+y) dx dy - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \mu K_i \right| < 0,001,$$

где $(x_i, y_i) \in K_i$, μK_i — жорданова мера множества K_i ?

3. Доказать равенство

$$\iint_K P(x)Q(y) dx dy = \int_a^A P(x) dx \int_b^B Q(y) dy,$$

где $K = [a, A] \times [b, B]$, а функции P и Q непрерывны соответственно на сегментах $[a, A]$, $[b, B]$.

4. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Доказать неравенство

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leqslant (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

где знак равенства возможен лишь при $f(x) = \text{const}$.

5. Какой знак имеет интеграл

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy?$$

Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

$$6. \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^0 f(x, y) dy. \quad 7. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

$$8. \int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy. \quad 9. \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy.$$

Ввести вместо x и y новые переменные и произвести замену переменных в следующих интегралах, предполагая, что подынтегральная функция непрерывная:

$$10. I = \iint_K f(x, y) dx dy, \text{ где: а) } K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}; \text{ б) } K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}, \text{ если } x = u \cos v, y = u \sin v.$$

$$11. I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ \alpha x \leq y \leq \beta x}} f(x, y) dx dy, \text{ если } u = x + y, uv = y.$$

$$12. I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} f(x, y) dx dy, \text{ если } u = y + \alpha x, uv = y.$$

$$13. I = \iint_K f(x, y) dx dy, \text{ если } x = \rho \cos^3 \varphi, y = \rho \sin^3 \varphi, \text{ где}$$

$$\partial K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \right\}.$$

14. В интеграле $\iint_K f(x, y) dx dy$ край ∂K компакта K задан уравнениями $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $x = a$ ($\alpha < \beta$). Произвести в интеграле такую замену переменных, чтобы после нее интегрирование производилось в прямоугольнике.

$$15. \text{ В интеграле } \iint_K f(x, y) dx dy, \text{ где } K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

произвести такую замену переменных, чтобы после нее интегрирование производилось: а) в прямоугольнике; б) в равнобедренном прямоугольном треугольнике.

Вычислить двойные интегралы:

$$16. I = \iint_{|x|+|y| \leq 1} x^2 dx dy.$$

$$17. \iint_K xy^2 dx dy, \text{ где край } \partial K \text{ компакта } K \text{ задан уравнениями } y^2 = 2px, x = \frac{p}{2} (p > 0).$$

$$18. \iint_K \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}, a > 0, \text{ если край } \partial K \text{ компакта } K \text{ состоит из кратчайшей дуги окружности}$$

с центром в точке (a, a) радиуса a , касающейся осей координат и отрезков осей координат.

$$19. \iint_K (x^2 + y^2) dx dy, \text{ если } K \text{ — параллелограмм со сторонами, заданными уравнениями}$$

$$y = x, y = x + a, y = a \text{ и } y = 3a (a > 0).$$

$$20. \iint_K y^2 dx dy, \text{ если край } \partial K \text{ компакта } K \text{ состоит из отрезка оси абсцисс и одной арки}$$

циклоиды

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

$$21. \iint_K \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \text{ где } K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}.$$

22. $\iint\limits_K (x+y) dx dy$, где $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x + y\}$.

Вычислить тройные интегралы:

23. $\iiint\limits_K xy^2 z^3 dx dy dz$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$,

$$z = 0.$$

24. $\iiint\limits_K \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $x + y + z = 1$, $x = 0$,

$$y = 0, z = 0.$$

25. $\iiint\limits_K \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $x^2 + y^2 = z^2$,

$$z = 1.$$

26. $\iiint\limits_K \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, где край ∂K компакта K — поверхность в \mathbb{R}^3 , заданная

$$\text{уравнением } x^2 + y^2 + z^2 = z.$$

27. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz$, где m, n, p — целые неотрицательные числа.

Вычислить следующие m -кратные интегралы:

28. $\int\limits_K \|x\|^2 dx$, где $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2$, $K = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$.

29. $\int\limits_K \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 dx$, где $K = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$.

30. $\int\limits_K dx$, где $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}), \sum_{i=1}^m x_i \leq a \right\}.$

31. $\int\limits_K \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i} dx$, $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}), \sum_{i=1}^m x_i \leq 1 \right\}.$

32. Доказать равенство

$$\int\limits_0^x x_1 dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \dots \int\limits_0^{x_m} f(x_{m+1}) dx_{m+1} = \frac{1}{2^m m!} \int\limits_0^x (x^2 - u^2)^m f(u) du.$$

33. Найти потенциал на себя однородного шара радиуса r и плотности μ_0 , т.е. вычислить интеграл

$$U = \frac{\mu_0}{2} \iiint\limits_{\substack{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq r^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \leq r^2}} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 - y_2 dx_2}{\rho_{1,2}},$$

где $\rho_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

§ 2. Несобственные кратные интегралы

2.1. Несобственный m -кратный интеграл Римана.

Определение 1. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^m$ называется особой точкой для интегрирования функции $f : \mathbb{R}^m \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (функции $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$), если f не ограничена в любой окрестности $S(x_0, \delta)$.

Предположим, что все особые точки функции $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ образуют замкнутое множество Z меры 0 (которое, в частности, может быть пустым). Возьмем последовательность множеств (E_n) , $n \in \mathbb{N}$, обладающих свойствами: 1) каждое множество E_n является открытым, измеримым по Жордану; 2) $\bar{E}_n \subset E_{n+1}$ и $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}^m \setminus Z$, где \bar{E}_n — замыкание множества E_n .

Такую последовательность множеств назовем допустимой для интегрирования функции f с множеством особых точек Z , или, короче, допустимой.

Пусть функция f непрерывна почти всюду в области определения, т.е. разрывна лишь на множестве лебеговой меры 0. Так как $\bar{E}_n \subset E_{n+1}$ и $E_{n+1} \cap Z = \emptyset$, то у каждой точки $x \in E_n$ есть окрестность $S(x, \delta(x))$, в которой значения функции f ограничены. По теореме Гейне–Бореля, из указанного семейства окрестностей можно выбрать их конечное число $S(x_i, \delta_i)$, $i = 1, k$, покрывающих множество \bar{E}_n . Пусть в окрестности $S(x_i, \delta_i)$, $i = 1, k$, значения функции f ограничены числом M_i . Тогда на множестве E_n значения функции f ограничены числом $M = \max\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$. Поскольку функция f непрерывна почти всюду в области определения и ограничена на каждом множестве E_n , то ее сужение на это множество интегрируемо по Риману.

Рассмотрим последовательность m -кратных интегралов Римана

$$I_n = \int_{E_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1)$$

Определение 2. Если для произвольной допустимой последовательности множеств (E_n) последовательность интегралов Римана (I_n) имеет при $n \rightarrow \infty$ конечный предел I , не зависящий от выбора допустимой последовательности, то существует (сходится) несобственный m -кратный интеграл Римана

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2)$$

рабный числу I . Если $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty$ или вообще не существует, то несобственный интеграл (2) не существует (расходится).

Согласно определению, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3)$$

Определение 3. Несобственный интеграл (2) называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть функция $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна почти всюду и неотрицательна. Если существует такая допустимая последовательность множеств (E_n) , что последовательность (1) ограничена, то интеграл (2) сходится.

Эта теорема значительно упрощает исследование абсолютной сходимости несобственного интеграла. Для решения вопроса об абсолютной сходимости интеграла (2) достаточно исследовать на ограниченность последовательности

$$\left(\int_{E_n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right) \quad (5)$$

для какой-нибудь одной, специально выбранной допустимой последовательности множеств (E_n) . Если при этом последовательность (5) окажется ограниченной, то несобственный интеграл (2) абсолютно сходится; если последовательность (5) не ограничена, то интеграл (4) равен $+\infty$, и интеграл (2) не является абсолютно сходящимся.

Теорема 2. Пусть функция $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна почти всюду в области определения. Если несобственный интеграл (2) сходится абсолютно, то он сходится.

Следующая теорема сводит проблему сходимости несобственного m -кратного интеграла Римана к проблеме его абсолютной сходимости.

Теорема 3. Пусть функция $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна почти всюду. Если несобственный интеграл (2) сходится, то он сходится абсолютно.

2.2. Несобственный m -кратный интеграл Римана функции, заданной на подмножестве пространства \mathbb{R}^m .

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывная почти всюду на множестве E функция, не интегрируема по Риману в собственном смысле. Рассмотрим функцию $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{если } \mathbf{x} \in E, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus E. \end{cases}$$

Определение. Несобственный m -кратный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

назовем несобственным интегралом той же кратности от функции f и обозначим символом

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

2.3. Некоторые признаки сходимости m -кратных несобственных интегралов.

Признак 1. Если $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ почти всюду непрерывная, локально ограниченная функция и существует предел

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) \|\mathbf{x}\|^\alpha = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

то несобственный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

сходится при $\alpha > m$.

Признак 2. Если $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — почти всюду непрерывная функция, ограниченная вне некоторой окрестности начала координат O , и существует предел

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} f(\mathbf{x}) \|\mathbf{x}\|^\alpha = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

то несобственный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

сходится при $\alpha < m$.

Признак 3 (сравнения). Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, — почти всюду непрерывные неотрицательные функции и $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in E$. Тогда из сходимости интеграла

$$\int_E g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

следует сходимость интеграла $\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ а из расходимости интеграла

$$\int_E g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

следует расходимость интеграла $\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

2.4. Замена переменных в несобственном m -кратном интеграле.

Теорема. Пусть $\xi = C^1$ -диффеоморфизм открытого множества E' евклидова пространства \mathbb{R}^m на открытое множество E того же пространства. Если функция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна всюду на E , за исключением замкнутого множества точек Z меры 0, и несобственный интеграл

$$\int_E f(x) dx \quad (1)$$

существует, то интеграл

$$\int_{E'} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt \quad (2)$$

сходится и справедливо равенство

$$\int_E f(x) dx = \int_{E'} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt. \quad (3)$$

Исследовать на сходимость следующие несобственные интегралы:

$$44. \iint_E \frac{\varphi(x, y)}{(x^2 + y^2)^p} dx dy, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}, \quad 0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M.$$

◀ Обозначим подынтегральную функцию через f . Поскольку $\frac{m}{(x^2 + y^2)^p} \leq |f(x, y)| \leq \frac{M}{(x^2 + y^2)^p}$ и сходимость несобственного двойного интеграла эквивалентна его абсолютной сходимости, то по признаку сравнения исследуемый интеграл сходится или расходится вместе с интегралом

$$I = \int_E \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}.$$

Поскольку $\frac{1}{(x^2 + y^2)^p} = O\left(\frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{2p}}\right)$ при $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$, то, согласно признаку 1, интеграл I сходится при $2p > 2$, т.е. при $p > 0$. Поэтому исследуемый интеграл также сходится при $p > 1$. ►

$$45. I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)}.$$

◀ Пусть (E_n) — допустимая последовательность областей такая, что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}^2$. Возьмем такой квадрат $K_{1n} \subset E_n$, сторона которого равна $2\alpha_{1n}$, и такой квадрат $K_{2n} \supset E_n$, сторона которого равна $2\alpha_{2n}$, чтобы $\alpha_{jn} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, $j = 1, 2$. Тогда справедлива оценка

$$\iint_{K_{1n}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)} \leq \iint_{E_n} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)} \leq \iint_{K_{2n}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)},$$

из которой следуют неравенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_{1n}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)} \leq I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_{2n}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)}.$$

Поскольку подынтегральная функция непрерывна, то

$$\iint_{K_{jn}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)} = \int_{a - \alpha_{jn}}^{a + \alpha_{jn}} \frac{dx}{1 + |x|^p} \int_{b - \alpha_{jn}}^{b + \alpha_{jn}} \frac{dy}{1 + |y|^q},$$

где (a, b) — центр всех квадратов K_{jn} . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_{jn}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + |x|^p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1 + |y|^q}.$$

Таким образом, сходимость интеграла I эквивалентна одновременной сходимости двух одномерных несобственных интегралов, сходящихся лишь при $p > 1$ и $q > 1$. Заметим, что поскольку подынтегральная функция положительная, то исследование интеграла I достаточно провести при выборе фиксированной допустимой последовательности (E_n) . ►

46. $I = \iint_E \frac{\varphi(x, y) dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^p}$, $E = \mathbb{R} \times [0, 1]$, $0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$.

◀ Вполне очевидно, интеграл I сходится и расходится одновременно с интегралом

$$I_1 = \iint_E \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^p} = \iint_E f(x, y) dx dy.$$

Согласно определению п.2.2, имеем

$$I_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E. \end{cases}$$

Так как функция F неотрицательна, то достаточно рассмотреть и исследовать на сходимость последовательность интегралов

$$\left(\iint_{E_n} F(x, y) dx dy \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

для одной допустимой последовательности множеств (E_n) .

Возьмем $E_n = [-n, n] \times [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда получим

$$\iint_{E_n} F(x, y) dx dy = \int_{-n}^n dx \int_0^1 \frac{dy}{(1 + x^2 + y^2)^p} = \int_0^1 dy \int_{-n}^n \frac{dx}{(1 + x^2 + y^2)^p}.$$

Если $p \leq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} F(x, y) dx dy = +\infty$ и интеграл I_1 , а вместе с ним и интеграл I расходятся. При $p > 0$ справедливы оценки

$$\int_{-n}^n \frac{dx}{(2 + x^2)^p} = \int_0^1 dy \int_{-n}^n \frac{dx}{(2 + x^2)^p} \leq \int_0^1 dy \int_{-n}^n \frac{dx}{(1 + x^2 + y^2)^p} \leq \int_0^1 dy \int_{-n}^n \frac{dx}{(1 + x^2)^p} = \int_{-n}^n \frac{dx}{(1 + x^2)^p}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(2 + x^2)^p} \leq I_1 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^p}, \quad p > 0,$$

откуда получаем, что I_1 сходится, если $2p > 1$, т.е. если $p > \frac{1}{2}$, и расходится, если $p \leq \frac{1}{2}$. Таким образом, интеграл I сходится, если $p > \frac{1}{2}$, и расходится, если $p \leq \frac{1}{2}$. ►

$$47. I = \iint_E \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}, p > 0, q > 0, \text{ где } E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\}.$$

◀ Очевидно, сходимость интеграла I эквивалентна сходимости интеграла

$$I_1 = \iint_{E'} \frac{dx dy}{x^p + y^q},$$

где $E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^p + y^q \geq 1, x > 0, y > 0\}$. Согласно определению п.2.2, имеем

$$I_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^p + y^q}, & \text{если } (x, y) \in E', \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E'. \end{cases}$$

Поскольку $F(x, y) \geq 0$, то

$$I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} F(x, y) dx dy,$$

где (E_n) — произвольная фиксированная последовательность допустимых множеств такая, что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}^2$. Возьмем

$$E_n = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} < \rho < n, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Произведя в интеграле

$$I_n = \iint_{E_n} F(x, y) dx dy$$

замену переменных по формулам $x = \rho^p \cos^p \varphi, y = \rho^q \sin^q \varphi$, получим

$$I_n = \frac{2}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi d\varphi \int_1^n \rho^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} d\rho = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} \left(n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} - 1 \right).$$

Следовательно, последовательность (I_n) имеет конечный предел при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 < 0$. Таким образом, интеграл I сходится, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. ►

$$48. I = \iint_E \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy, E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 1\}.$$

◀ Заменяя в интеграле переменные по формулам $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, получим

$$I = \frac{1}{2^{1+\frac{p}{2}}} \iint_{E'} \frac{\cos \sqrt{2}v - \cos \sqrt{2}u}{u^p} du dv, \quad E' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Согласно определению п.2.2, имеем

$$I = \frac{1}{2^{1+\frac{p}{2}}} \iint_{\mathbb{R}^2} F(u, v) du dv,$$

где

$$F(u, v) = \begin{cases} \frac{\cos \sqrt{2}v - \cos \sqrt{2}u}{u^p}, & \text{если } (u, v) \in E', \\ 0, & \text{если } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus E'. \end{cases}$$

Множества $E_n = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -n < u < n, -n < v < n\}$ допустимые для интегрирования функции F , а последовательность двойных интегралов

$$I_n = \iint_{E_n} F(u, v) du dv$$

можно заменить последовательностью повторных интегралов, так как F — непрерывная функция. Таким образом,

$$I_n = \int_1^n \frac{du}{u^p} \int_{-n}^n (\cos \sqrt{2}v - \cos \sqrt{2}u) dv = \sqrt{2} \sin \sqrt{2}n \int_1^n \frac{du}{u^p} - 2n \int_1^n \frac{\cos \sqrt{2}u}{u^p} du.$$

Поскольку последовательность (I_n) не имеет предела при $n \rightarrow \infty$, то интегралы $\iint_{\mathbb{R}^2} F(u, v)$ и I расходятся. ►

49. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi,$$

где $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < n, |y| < n\}$, тогда как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E'_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0,$$

где

$$E'_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2n\pi\}.$$

◀ Из непрерывности функции $(x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, следует равенство

$$\iint_{E_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_{-n}^n dx \int_{-n}^n \sin(x^2 + y^2) dy = 2 \int_{-n}^n \sin x^2 dx \int_{-n}^n \cos y^2 dy,$$

в силу которого получаем после перехода к пределу произведение интегралов Френеля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2 dy = \pi.$$

Для проверки второго предельного соотношения достаточно перейти к полярным координатам и вычислить интеграл:

$$\iint_{\substack{0 < \rho < \sqrt{2\pi n} \\ 0 < \varphi < 2\pi}} \rho \sin \rho^2 d\rho d\varphi = 2\pi \int_0^{\sqrt{2\pi n}} \rho \sin \rho^2 d\rho = \pi \cos \rho^2 \Big|_0^{\sqrt{2\pi n}} = 0.$$

Этот пример показывает, что двойной несобственный интеграл

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

расходится. ►

50. Показать, что интеграл:

$$I = \iint_E \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1\},$$

расходится, хотя повторные интегралы

$$I_1 = \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

существуют.

◀ Для доказательства первой части утверждения достаточно показать, что интеграл I абсолютно расходится, т.е. что интеграл

$$I' = \iint_E \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{если } (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E. \end{cases}$$

расходится.

В качестве допустимой последовательности множеств E_n возьмем $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -n < x < n, -n < y < n\}$. Тогда получим, принимая во внимание, что $|x^2 - y^2| = \begin{cases} x^2 - y^2, & \text{если } x > y, \\ y^2 - x^2, & \text{если } x < y: \end{cases}$

$$\begin{aligned} I'_n &= \iint_{E_n} F(x, y) dx dy = \int_1^n dx \int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy + \int_1^n dx \int_x^n \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \\ &= \int_1^n \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^{y=x} + \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=n}^{y=x} \right) dx = \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{n}{x^2 + n^2} \right) dx = \ln n - \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} I'_n = +\infty$, то интеграл I расходится.

Вычислим интегралы I_1 и I_2 . Имеем

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=1}^{y=+\infty} \right) dx = \int_{+\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4}, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=1}^{x=+\infty} \right) dy = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Этот пример показывает, что существование лишь повторных интегралов не обеспечивает сходимости соответствующего двойного несобственного интеграла. ►

Вычислить следующие интегралы:

$$51. \quad I = \iint_E \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

◀ Подынтегральная функция принимает положительные значения, поэтому достаточно вычислить интеграл

$$I' = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, & \text{если } (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E, \end{cases}$$

для любой фиксированной допустимой последовательности множеств (E_n) . Возьмем $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} < x^2 + y^2 < 1 - \frac{1}{n}, n = 2, 3, \dots\}$.

Тогда получим

$$I_n = \iint_{E_n} F(x, y) dx dy = \int_0^\pi d\varphi \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = 2\pi \sqrt{1-\rho^2} \Big|_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} = 2\pi \left(\sqrt{1-\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \right),$$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 2\pi. \blacksquare$$

52. $I = \iint_E \frac{dx dy}{x^4 + y^2}, E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 + 1\}.$

◀ Согласно определению п.2.2, имеем

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^4+y^2}, & \text{если } (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E. \end{cases}$$

Так как подынтегральная функция F неотрицательная, то достаточно вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, где

$$I_n = \iint_{E_n} F(x, y) dx dy,$$

для любой фиксированной последовательности допустимых множеств (E_n) . Возьмем $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -n < x < n, -n < y < n\}$. Тогда получим

$$I_n = \int_{-\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n-1}} dx \int_{1+x^2}^n \frac{dy}{x^4 + y^2} = 2 \int_{+0}^{\sqrt{n-1}} \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x^2} \Big|_{y=1+x^2}^{y=n} dx = 2 \int_{+0}^{\sqrt{n-1}} \frac{1}{x^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{x^2} - \operatorname{arctg} \frac{1+x^2}{x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{x} \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{x^2} - \operatorname{arctg} \frac{1+x^2}{x^2} \right) \Big|_{\sqrt{n-1}}^{+0} + 4 \int_0^{\sqrt{n-1}} \left(\frac{1}{2x^4 + 2x^2 + 1} - \frac{n}{x^4 + n^2} \right) dx.$$

Внеинтегральный член стремится к нулю при $x \rightarrow +0$ и при $n \rightarrow \infty$. Принимая во внимание оценку $\int_0^{\sqrt{n-1}} \frac{n}{x^4+n^2} dx < \frac{1}{n} \int_0^{\sqrt{n-1}} dx = \frac{\sqrt{n-1}}{n}$, получаем

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n-1}} \frac{dx}{2x^4 + 2x^2 + 1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n-1}} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}}.$$

Представляя подынтегральную функцию в виде суммы простых дробей и интегрируя эти дроби, имеем

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{\sqrt{2}-1}x + \frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2 - \sqrt{\sqrt{2}-1}x + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \right) \right) \right) \Big|_0^{\sqrt{n-1}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}. \blacksquare \right)$$

53. $I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f} dx dy$, где $a < 0$, $ac - b^2 > 0$.

◀ Применив известное преобразование координат по формулам $x = x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$, $y = y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$, где числа x_0, y_0, α удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + d = 0, \\ bx_0 + cy_0 + e = 0, \end{cases} \quad b \operatorname{tg}^2 \alpha - (c - a) \operatorname{tg} \alpha - b = 0,$$

квадратичную форму $\varphi = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$ приведем к каноническому виду:

$$\varphi = Ax'^2 + Cy'^2 + f',$$

где

$$A = -(a \cos^2 \alpha - 2b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin^2 \alpha) < 0, \quad f' = \frac{\Delta}{\delta},$$

$$C = -(a \sin^2 \alpha - 2b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha) < 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0.$$

Между коэффициентами a, b, c и A, C существует следующая связь

$$AC = ac - b^2 = \delta, \quad A + C = a + c.$$

После указанной выше замены переменных интеграл I принимает вид

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{Ax'^2 + Cy'^2 + f'} dx' dy' = e^{f'} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{Ax'^2 + Cy'^2} dx' dy'.$$

В качестве допустимой последовательности множеств (E_n) выберем

$$E_n = \left\{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 : -n < Ax'^2 + Cy'^2 < -\frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заменяя в интегралах $I_n = \iint_{E_n} e^{Ax'^2 + Cy'^2} dx' dy'$ переменные по формулам

$$x' = \frac{\rho}{\sqrt{-A}} \cos \varphi, \quad y' = \frac{\rho}{\sqrt{-C}} \sin \varphi,$$

получим, принимая во внимание, что $\frac{D(x', y')}{D(\rho, \varphi)} = \frac{\rho}{\sqrt{AC}}$:

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{AC}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{n}} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{-\rho^2} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{n}} = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \left(e^{-\frac{1}{n}} - e^{-n} \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Окончательно имеем

$$I = e^{f'} \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\Delta}{\delta}}. \blacktriangleright$$

Исследовать на сходимость следующие несобственные тройные интегралы:

54. $\iiint_E \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} dx dy dz$, где $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$, $0 < m \leq | \varphi(x, y, z) | \leq M$.

◀ В силу оценки для функции φ и теоремы об абсолютной сходимости несобственного кратного интеграла требуется фактически исследовать на сходимость интеграл

$$I = \iiint_E \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^p}.$$

Поскольку подынтегральная функция под знаком интеграла положительная, то в качестве допустимой последовательности множеств (E_n) можно взять любую фиксированную последовательность, например $E_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + \frac{1}{n} < x^2 + y^2 + z^2 < n\}$. В интегралах

$$I_n = \iiint_{E_n} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

перейдем к сферическим координатам по формулам

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \quad (0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi).$$

Тогда $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} < \rho < \sqrt{n}$ и, заменив тройные интегралы повторными, получим

$$I_n = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{n}} \rho^{2(1-p)} d\rho = \frac{4\pi}{3-2p} \rho^{3-2p} \Big|_{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{n}} = \frac{4\pi}{3-2p} \left(n^{\frac{3}{2}-p} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}-p} \right).$$

Если $p > \frac{3}{2}$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{4\pi}{2p-3}$ и интеграл I сходится, а вместе с ним сходится и исследуемый интеграл. Если $p \leq \frac{3}{2}$, то исследуемый интеграл расходится. ►

55. $\iiint_E \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \geq 1\}$, $p > 0, q > 0, r > 0$.

◀ Сходимость интеграла I эквивалентна сходимости интеграла

$$I_1 = \iiint_{E'} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}, \quad p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0,$$

где $E' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|^p + |y|^q + |z|^r \geq 1\}$.

Согласно определению п.2.2, имеем

$$I_1 = \iiint_{\mathbb{R}^3} F(x, y, z) dx dy dz,$$

где

$$F(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}, & \text{если } (x, y, z) \in E', \\ 0, & \text{если } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus E'. \end{cases}$$

Поскольку $F(x, y, z) \geq 0$ на всем пространстве \mathbb{R}^3 , то в качестве допустимой последовательности множеств (E_n) можно взять любую фиксированную последовательность, например, $E_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + \frac{1}{n} < |x|^p + |y|^q + |z|^r < n\}$. Тогда $I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, где

$$I_n = \iiint_{E_n} F(x, y, z) dx dy dz = 8 \iiint_{E'_n} F(x, y, z) dx dy dz,$$

E'_n — вся часть множества E_n , лежащая в первом октанте. После замены переменных в интегралах I_n по формулам

$$x = \rho^p \sin^{\frac{2}{p}} \theta \cos^{\frac{2}{p}} \varphi, \quad y = \rho^q \sin^{\frac{2}{q}} \theta \sin^{\frac{2}{q}} \varphi, \quad z = \rho^r \cos^{\frac{2}{r}} \theta,$$

принимая во внимание, что

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \frac{4}{pqr} \rho^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1} \sin^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \theta \sin^{\frac{2}{q} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{p} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{r} - 1} \theta,$$

получим

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{32}{pqr} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{r} - 1} \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{p} - 1} \varphi d\varphi \int_{1 + \frac{1}{n}}^n \rho^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 2} d\rho = \\ &= \frac{8}{pqr} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \left. \frac{\rho^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1} \right|_{1 + \frac{1}{n}}^n. \end{aligned}$$

Вполне очевидно, что конечный предел последовательности (I_n) существует лишь при выполнении условия $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Тогда и исследуемый интеграл сходится при выполнении этого условия. ►

56. Доказать формулу Дирихле

$$I = \iint_E \cdots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_m^{p_m-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_m = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_m)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_m + 1)},$$

где

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i \leq 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, m} \right\}, \quad p_i > 0, i = \overline{1, m}.$$

◀ При $m = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} dx_1 dx_2 &= \int_0^1 x_1^{p_1-1} dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{p_2-1} dx_2 = \\ &= \frac{1}{p_2} \int_0^1 x_1^{p_1-1} (1-x_1)^{p_2} dx_1 = \frac{1}{p_2} B(p_1, 1+p_2) = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2 + 1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $m = 2$ формула Дирихле справедлива. Допустим, что она справедлива для $(m-1)$ -кратного интеграла. При таком предположении получим

$$I = \int_0^1 x_m^{p_m-1} dx_m \iint_{E'} \cdots \int x_1^{p_1-1} \cdots x_{m-1}^{p_{m-1}-1} dx_1 \cdots dx_{m-1},$$

где

$$E' = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} x_i \leq 1 - x_m, x_i \geq 0, i = \overline{1, m-1} \right\}.$$

Отображение, определяемое системой

$$x_1 = (1 - x_m)\xi_1, \quad x_2 = (1 - x_m)\xi_2, \dots, x_{m-1} = (1 - x_m)\xi_{m-1},$$

является C^1 -диффеоморфизмом множества

$$E'' = \left\{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i \leq 1, \xi_i \geq 0, i = \overline{1, m-1} \right\}$$

на множество E' . Принимая во внимание равенства

$$\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1})} = (1 - x_m)^{m-1},$$

$$x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_{m-1}^{p_{m-1}-1} = \xi_1^{p_1-1} \xi_2^{p_2-1} \dots \xi_{m-1}^{p_{m-1}-1} (1 - x_m)^{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}-m+1},$$

в силу предположения индукции, получим

$$\begin{aligned} & \iint_{E'} \dots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_{m-1}^{p_{m-1}-1} dx_1 dx_2 \dots dx_{m-1} = \\ & = (1 - x_m)^{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}} \iint_{E''} \dots \int \xi_1^{p_1-1} \xi_2^{p_2-1} \dots \xi_{m-1}^{p_{m-1}-1} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{m-1} = \\ & = (1 - x_m)^{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}} \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_{m-1})}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} + 1)}. \end{aligned}$$

Тогда интеграл I примет вид

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_{m-1})}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} + 1)} \int_0^1 x_m^{p_{m-1}} (1 - x_m)^{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}} dx_m = \\ &= \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_{m-1})}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} + 1)} B(p_m, p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} + 1) = \\ &= \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_{m-1}) \Gamma(p_m) \Gamma(p_1 + \dots + p_{m-1} + 1)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_{m-1} + 1) \Gamma(p_1 + \dots + p_m + 1)} = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_m)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_m + 1)}. \end{aligned}$$

Методом математической индукции формула Дирихле доказана. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

34. $I = \iint_E \frac{\varphi(x, y) dx dy}{(1-x^2-y^2)^p}$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$, $(x, y) \in E$.

35. $I = \iint_E \frac{\varphi(x, y) dx dy}{(x^2+xy+y^2)^p}$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$, $0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$,

$(x, y) \in E$.

36. $I = \iiint_E \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{((y-\varphi(x))^2+(z-\psi(x))^2)^p}$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$,

$0 < m \leq |f(x, y, z)| \leq M$, $(x, y, z) \in E$, φ, ψ --- непрерывные на сегменте $[0, a]$ функции.

37. $I = \iiint_E \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}$, $E = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Вычислить несобственные интегралы:

38. $I = \iint_E \frac{dx dy}{x^p y^q}$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, xy \geq 1\}$, $p > 0, q > 0$.

39. $I = \iint_E \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$.

40. $I = \iint_E e^{-(x+y)} dx dy$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$.

41. $I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + y^2)} \cos(x^2 + y^2) dx dy$.

42. $\iint_E \exp \left\{ - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right\} dx dy$, $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \right\}$, $a > 0, b > 0$.

43. $\iint_{\mathbb{R}^2} xy \exp \left\{ - \left(\frac{x^2}{a^2} + 2\varepsilon \frac{x}{a} \frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right\} dx dy$, $0 < |\varepsilon| < 1$.

44. $\iint_E \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

45. $\iiint_E \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

46. $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} dx dy dz$.

47. $\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3$ где $P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$, $a_{ij} = a_{ji}$ — положительно-определенная квадратичная форма.

48. Доказать обобщенную формулу Дирихле

$$\iint \cdots \int_E x_1^{p_1-1} \cdots x_m^{p_m-1} dx_1 \cdots dx_m = \frac{a_1^{p_1} \cdots a_m^{p_m}}{\alpha_1 \cdots \alpha_m} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{p_m}{\alpha_m}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{p_m}{\alpha_m} + 1\right)},$$

где $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\alpha_i} \leq 1 \right\}$, $a_i > 0, \alpha_i > 0, p_i > 0$.

49. Доказать формулу Лиувилля

$$\iint \cdots \int_E \varphi \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) x_1^{p_1-1} \cdots x_m^{p_m-1} dx_1 \cdots dx_m = \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_m)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_m)} \int_0^1 \varphi(u) u^{p_1 + \cdots + p_m - 1} du,$$

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m x_i \leq 1 \right\}, p_i > 0, i = \overline{1, m},$$

в предположении абсолютной сходимости интеграла в правой части равенства.

§ 3. Приложение кратных интегралов к решению задач геометрии и физики

3.1. Вычисление меры множества, измеримого по Жордану.

Если E — жорданово множество (см. определение 4, п. 1.4), то его жордановой мерой μE (или m -мерным объемом) называется интеграл

$$\mu E = \int_E d\mathbf{x}. \quad (1)$$

При $m = 2$ жорданова мера множества называется его площадью и обозначается через P . В этом случае

$$P = \iint_E dx dy. \quad (2)$$

При $m = 3$ объем обозначают через V , а формула (1) принимает вид

$$V = \iiint_E dx dy dz. \quad (3)$$

Объемы тел, лежащих в пространстве \mathbb{R}^3 , можно также вычислять с помощью двойных интегралов. Если

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

где D — компакт, $f \in C(D)$, то

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (4)$$

3.2. Вычисление площади куска гладкой поверхности, лежащей в пространстве \mathbb{R}^3 .

Если множество точек $S = \Phi(D)$ пространства \mathbb{R}^3 задано двухпараметрическим векторным уравнением

$$\Phi = \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

где D — область пространства \mathbb{R}^2 , то S называется *многообразием* размерности $p = 2$ класса C^1 , или гладкой поверхностью, если компоненты отображения Φ являются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов. В каждой точке $M = (x, y, z)$ гладкой поверхности S существует касательная плоскость, определяемая векторами

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right).$$

Определение 1. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\partial \Phi}{\partial u} du, \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv$, называется *элементом площади поверхности S* и обозначается через dS .

Согласно этому, элемент площади поверхности dS определяется через определитель Грама (см. п.1.1):

$$dS = \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} du, \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv \right)},$$

$$\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} du, \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv \right) = \begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle du^2 & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle du dv \\ \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle du dv & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle dv^2 \end{vmatrix} = (EG - F^2) du^2 dv^2,$$

где $E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle$, $G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle$, $F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle$ — коэффициенты Гаусса.

Таким образом, согласно определению, имеем

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (1)$$

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, т.е.

$$\Phi = \Phi(x, y) = (x, y, z(x, y)),$$

то формула (1) принимает вид

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy. \quad (2)$$

Определение 2. Площадью P куска гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ называется интеграл

$$P = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (3)$$

Если $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$, то формула (3) принимает вид

$$P = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy. \quad (4)$$

3.3. Приложения двойных и тройных интегралов к решению задач механики.

Если x_0 и y_0 — координаты центра тяжести пластиинки $D \subset \mathbb{R}^2$ и $\mu = \mu(x, y)$ — поверхностия плотность вещества пластиинки, то x_0 и y_0 можно найти по формулам

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint_D x \mu(x, y) dx dy, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint_D y \mu(x, y) dx dy, \quad (1)$$

где $m = \iint_D \mu(x, y) dx dy$ — масса пластиинки.

Если пластиинка однородная, то $\mu(x, y)$ является константой, которую принимают равной единице.

Моменты инерции I_x, I_y пластиинки D относительно осей координат Ox и Oy можно вычислить по формулам

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Центробежный момент инерции I_{xy} вычисляется по формуле

$$I_{xy} = \iint_D xy \mu(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Полагая в формулах (2) и (3) $\mu = 1$, получим геометрические моменты инерции однородной пластиинки — замкнутой области D .

Если x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести тела $T \subset \mathbb{R}^3$ и $\mu = \mu(x, y, z)$ — его объемная плотность, то x_0, y_0, z_0 можно найти по формулам

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \iiint_T x \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iiint_T y \mu(x, y, z) dx dy dz, \\ z_0 &= \frac{1}{m} \iiint_T z \mu(x, y, z) dx dy dz, \end{aligned} \quad (4)$$

где $m = \iiint_T \mu(x, y, z) dx dy dz$ — масса тела.

Если тело T однородное, то в формулах (4) полагаем $\mu = 1$.

Моментами инерции тела T относительно координатных плоскостей называются соответственно интегралы

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_T z^2 \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad I_{yz} = \iiint_T x^2 \mu(x, y, z) dx dy dz, \\ I_{zx} &= \iiint_T y^2 \mu(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (5)$$

Моментом инерции тела T относительно некоторой прямой l называется интеграл

$$I_l = \iiint_T r^2 \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad (6)$$

где r — расстояние от точки $M = (x, y, z)$ тела до прямой l . Для осей координат имеем

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}. \quad (7)$$

Моментом инерции тела T относительно начала координат называется интеграл

$$I_0 = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz. \quad (8)$$

Из формул (5) получаем

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}. \quad (9)$$

Ньютоновским потенциалом, или потенциалом поля тяготения тела T в точке $P = (x, y, z)$ называется интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}, \quad (10)$$

где $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ — объемная плотность тела, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Материальная точка массы m притягивает тело T с силой \mathbf{F} , проекции которой F_x, F_y, F_z на оси координат Ox, Oy и Oz выражаются формулами

$$\begin{aligned} F_x &= \gamma m \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma m \iiint_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \\ F_y &= \gamma m \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma m \iiint_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \quad (11) \\ F_z &= \gamma m \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma m \iiint_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

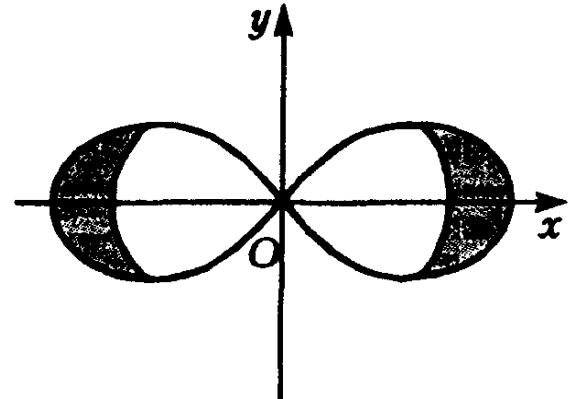


Рис. 8

где γ — гравитационная постоянная.

Найти площади плоских фигур D , края которых заданы уравнениями:

$$57. (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad (x^2 + y^2 \geq a^2).$$

◀ Перейдя к полярным координатам ρ и φ , получим уравнения края компакта D в виде $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ и $\rho^2 = a^2$. Требуется вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной частью лемнискаты Бернулли и частью окружности радиуса a , лежащей вне круга радиуса a (рис. 8). Легко убедиться в том, что точка $(a, \frac{\pi}{6})$ является одной из четырех точек пересечения лемнискаты с окружностью. Принимая во внимание симметрию фигуры, площадь которой требуется найти, приходим к выводу, что искомая площадь равна четверенной площади фигуры

$$D_1 = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \rho \leq a\sqrt{2 \cos 2\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} \right\}.$$

Согласно формуле (2), п. 3.1, имеем

$$P = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2 \cos 2\varphi}} \rho d\rho = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos 2\varphi - 1) d\varphi = 2a^2 (\sin 2\varphi - \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2. \blacktriangleright$$

$$58. (x - y)^2 + x^2 = a^2, \quad a > 0.$$

◀ Для вычисления площади P плоской фигуры воспользуемся решением примера 5, в), полагая там $f(x, y) = 1$. При этом получим

$$P = \int_{-a}^a dx \int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}} dy = 2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Полагая в интеграле $t = \arcsin \frac{x}{a}$, имеем

$$P = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2a^2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^2. \blacktriangleright$$

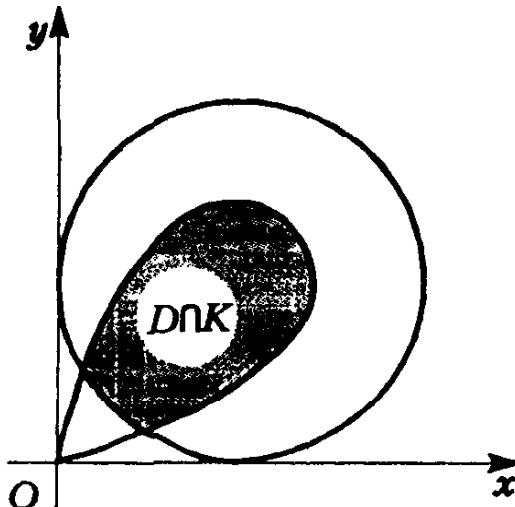


Рис. 9

$$59. (x^2 + y^2)^2 = 8a^2 xy, (x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2 \\ (a > 0, (x - a)^2 + (y - a)^2 \leq a^2).$$

◀ Требуется вычислить площадь общей части круга $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - a)^2 \leq a^2\}$ и компакта $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 8a^2 xy\}$. Пересечение этих множеств $D \cap K$ лежит в первом квадранте плоскости xOy (рис. 9). Переходя к полярным координатам, получим представление множества $D \cap K$ в виде

$$D \cap K = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : a \left((\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{\sin 2\varphi} \right) \leq \right. \\ \left. \leq \rho \leq 2a\sqrt{\sin 2\varphi}, \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \right\}.$$

Принимая во внимание симметрию точек множества $D \cap K$ относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$, получим

$$P = \iint_{D \cap K} dx dy = 2 \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{a((\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{\sin 2\varphi})}^{2a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = a^2 \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2 \sin 2\varphi + 2(\sin \varphi + \cos \varphi) \sqrt{\sin 2\varphi} - 1 \right) d\varphi = \\ = a^2 \left(\cos \left(\arcsin \frac{1}{8} \right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \right) + 2a^2 \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin \varphi + \cos \varphi) \sqrt{\sin 2\varphi} d\varphi.$$

Принимая во внимание равенства

$$\cos \left(\arcsin \frac{1}{8} \right) = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \quad -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{8} \right) = -\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8}$$

и произведя в интеграле замену переменной $\varphi + \frac{\pi}{4} = t$, получим

$$P = a^2 \left(\frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} + 2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\cos 2t} \sin t dt \right).$$

Вычислим

$$I = 2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\cos 2t} \sin t dt = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{8} \right)} \sqrt{1 - (\sqrt{2} \cos t)^2} d(\sqrt{2} \cos t).$$

После замены переменной $\sqrt{2} \cos t = \sin z$ имеем

$$I = 2 \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}} \cos^2 z dz = \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

Таким образом,

$$P = a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right).$$

Обозначив $\arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} = \alpha$, получим

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{8}, \quad \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

Окончательно имеем

$$P = a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} \right). \blacktriangleright$$

60. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $h > 0$, $k > 0$.

◀ Записав уравнение края ∂D компакта $D \subset \mathbb{R}^2$ в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{2h} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{b}{2k} \right)^2 = \frac{a^2}{4h^2} + \frac{b^2}{4k^2}$$

и произведя в двойном интеграле

$$P = \iint_D dx dy$$

замену переменных по формулам

$$\frac{x}{a} - \frac{a}{2h} = \rho \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} - \frac{b}{2k} = \rho \sin \varphi,$$

а также принимая во внимание, что

$$\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} = ab\rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}},$$

получим

$$P = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}}} \rho d\rho = \frac{\pi ab}{4} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \blacktriangleright$$

61. $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$, $x = 0$, $y = 0$ ($a > 0$, $b > 0$, $h > 0$, $k > 0$).

◀ Плоская фигура, площадь которой требуется вычислить, лежит в первом квадранте.

Перейдем к обобщенным полярным координатам по формулам

$$x = a\rho \cos^{\frac{2}{3}} \varphi, \quad y = b\rho \sin^{\frac{2}{3}} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тогда уравнения границы фигуры примут вид

$$\rho = \frac{a^2}{h^2} \cos^{\frac{4}{3}} \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^{\frac{4}{3}} \varphi \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right), \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

а якобиан $\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)}$ будет равен $\frac{2}{3} ab\rho \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi$.

После замены переменных в интеграле $\iint_D dx dy$ и замены двойного интеграла повторным получим

$$P = \frac{2}{3} ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi d\varphi \int_0^{\frac{a^2}{h^2} \cos^{\frac{4}{3}} \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^{\frac{4}{3}} \varphi} \rho d\rho = \frac{ab}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^{\frac{4}{3}} \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^{\frac{4}{3}} \varphi \right)^2 d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{ab}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^4}{h^4} \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{7}{3}} \varphi + \frac{b^4}{k^4} \sin^{\frac{7}{3}} \varphi \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi + \frac{2a^2 b^2}{h^2 k^2} \sin \varphi \cos \varphi \right) d\varphi = \\
 &= \frac{ab}{3} \left(\frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} + \frac{a^4}{2h^4} B\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) + \frac{b^4}{2k^4} B\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) \right) = \frac{ab}{3} \left(\frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right) B\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \right) = \\
 &= \frac{ab}{3} \left(\frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} + \frac{1}{6} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) \right) = \frac{ab}{3} \left(\frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right) \right). \blacksquare
 \end{aligned}$$

62. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$, $x \geq 0, y \geq 0, a > 0, b > 0$.

◀ В интегrale

$$P = \iint_D dx dy$$

произведем замену переменных по формулам

$$x = a\rho \cos^2 \varphi, \quad y = b\rho \sin^2 \varphi.$$

Тогда уравнение кривой, являющейся частью края компакта D , примет вид

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} - \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2}}, \quad \text{где } \frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} - \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2} \geq 0.$$

Из условий $x \geq 0, y \geq 0, |\operatorname{tg} \varphi| \leq \sqrt{\frac{ak}{bh}}$ имеем $0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}$. После замены переменных перейдем от двойного интеграла к повторному. При этом получим

$$\begin{aligned}
 P &= 2ab \int_0^{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} - \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2}}} \rho d\rho = \\
 &= ab \int_0^{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}} \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^5 \varphi \sin \varphi - \frac{b^2}{k^2} \sin^5 \varphi \cos \varphi \right) d\varphi = \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^6 \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^6 \varphi \right) \Big|_{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}}^0 = \\
 &= \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} \left(1 - \cos^6 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}} \right) \right) - \frac{b^2}{k^2} \sin^6 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}} \right) \right) = \frac{a^4 b k (ak + 2bh)}{6h^2 (ak + bh)^2}
 \end{aligned}$$

(так как $\cos(\operatorname{arctg} \alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\sin(\operatorname{arctg} \alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$). \blacksquare

63. $x^2 = ay, x^2 = by, x^3 = cy^2, x^3 = dy^2$ ($0 < a < b, 0 < c < d$).

◀ Из уравнений границы области видно, что она лежит в первом квадранте. Заменяя в интегrale

$$P = \iint_D dx dy$$

переменные по формулам $x^2 = uy, x^3 = vy^2$, получим

$$a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d, \quad x = u^2 v^{-1}, \quad y = u^3 v^{-2}, \quad \left| \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} \right| = u^4 v^{-4},$$

$$P = \iint_{\substack{a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d}} u^4 v^{-4} du dv = \int_a^b u^4 du \int_c^d v^{-4} dv = \frac{1}{15} (b^5 - a^5) (c^{-3} - d^{-3}). \blacktriangleright$$

64. $y = ax^p$, $y = bx^p$, $y = cx^q$, $y = dx^q$ ($0 < p < q$, $0 < a < b$, $0 < c < d$).

◀ Запишем уравнения края компакта D в виде $y = ax^p$, $y = bx^p$, $x = c^{-\frac{1}{q}} y^{\frac{1}{q}}$, $x = d^{-\frac{1}{q}} y^{\frac{1}{q}}$ и в интеграле

$$P = \iint_D dx dy$$

произведем замену переменных по формулам $y = ux^p$, $x = vy^{\frac{1}{q}}$, задающим взаимно однозначное соответствие между точками прямоугольника

$$D' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : a \leq u \leq b, d^{-\frac{1}{q}} \leq v \leq c^{-\frac{1}{q}} \right\}$$

и компакта D . Поскольку $x = u^{\frac{1}{q-p}} v^{\frac{q}{q-p}}$, $y = u^{\frac{p}{q-p}} v^{\frac{pq}{q-p}}$, $\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \frac{q}{q-p} u^{\frac{p+1}{q-p}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}}$, то

$$P = \frac{q}{q-p} \int_a^b u^{\frac{p+1}{q-p}} du \int_{d^{-\frac{1}{q}}}^{c^{-\frac{1}{q}}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}} dv = \frac{q-p}{(p+1)(q+1)} \left(b^{\frac{q+1}{q-p}} - a^{\frac{q+1}{q-p}} \right) \left(c^{-\frac{p+1}{q-p}} - d^{-\frac{p+1}{q-p}} \right). \blacktriangleright$$

65. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $8 \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, $x > 0$, $y > 0$.

◀ В интеграле $P = \iint_D dx dy$ заменим переменные согласно формулам $x = a\rho \cos^3 \varphi$, $y = b\rho \sin^3 \varphi$. Тогда

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = 3ab\rho \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, 1 \leq \rho \leq 8, \arctg 1 \leq \varphi \leq \arctg 2,$$

$$\begin{aligned} P &= 3ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_1^8 \rho d\rho = \frac{189}{2} ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{189}{8} ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{189}{16} ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{189}{16} ab \left(\arctg 2 - \arctg 1 - \sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \Big|_{\arctg 1}^{\arctg 2} \right) = \frac{189}{16} ab \left(\arctg \frac{1}{3} + \frac{6}{25} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

66. Найти площадь области D , ограниченной эллипсом, заданным уравнением $(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1$, где $\delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

◀ В интеграле $P = \iint_D dx dy$ произведем замену переменных по формулам $a_1 x + b_1 y + c_1 = u$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = v$, отображающим круг $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ на область D . Используя известное свойство якобиана, выраженное формулой $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{|\delta|}$, получаем, что $\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \frac{1}{|\delta|}$. Таким образом, имеем $P = \frac{1}{|\delta|} \iint_{D'} du dv = \frac{\pi}{|\delta|}$. \blacktriangleright

Применяя формулу (4), п. 3.1, вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

$$67. z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$$

◀ Тело T , объем V которого требуется вычислить, представляет собой замкнутое множество

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

Согласно формуле (4), п.3.1, имеем

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}.$$

Следовательно,

$$V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \int_{-1}^1 \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{88}{105}. \blacktriangleright$$

$$68. z = xy, x + y + z = 1, z = 0.$$

◀ Поверхность $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ пересекается с плоскостью $\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ по кривой, уравнение проекции которой на плоскость xOy имеет вид $y = \frac{1-x}{1+x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Поэтому множество D в формуле (4), п.3.1, представляет собой замкнутый треугольник $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$, который запишем в виде $D = D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \frac{1-x}{1+x} \leq y \leq 1-x \right\}.$$

На множестве D_1 функция f в формуле (4), п.3.1, имеет вид $f(x, y) = xy$, а на множестве D_2 $f(x, y) = 1 - (x + y)$. Представив интеграл

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

в виде суммы интегралов по множествам D_1 и D_2 и перейдя от двойных интегралов к повторным, получим

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y dy + \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^2 - 3x + 4 - \frac{4}{1+x} \right) dx = \frac{17}{12} - 2 \ln 2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$69. z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2.$$

◀ Тело ограничено сверху и снизу относительно плоскости xOy конической поверхностью $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = xy\}$, а с боков — цилиндрической поверхностью $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2, z \in \mathbb{R}\}$. В силу симметрии точек тела относительно плоскостей, заданных уравнениями $z = 0$, $z = x + y$, можем вычислить значение $\frac{1}{4}$ части объема V и умножить

полученный результат на 4. При этом множеством D в формуле (4), п.3.1, является $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$. Таким образом, имеем

$$V = 4 \iint_D \sqrt{xy} dx dy.$$

Переходя в интеграле к полярным координатам и заменяя двойной интеграл повторным, находим

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi \cos^{\frac{1}{2}} \varphi d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi \cos^{\frac{1}{2}} \varphi d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} a^3 B\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} a^3 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4 a^3}{3\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

70. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

◀ Тело ограничено сверху параболоидом вращения $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$, снизу — плоскостью xOy , извне — цилиндрической поверхностью $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$, изнутри — цилиндрической поверхностью $S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z \in \mathbb{R}\right\}$. Эти цилиндрические поверхности вырезают из плоскости xOy замкнутую область D , которая в полярной системе координат определяется неравенствами $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos \varphi \leq \rho \leq 2 \cos \varphi$. Согласно формуле (4), п.3.1, имеем

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \rho^3 d\rho = \frac{15}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{15}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{15}{4} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{45}{32} \pi. \blacksquare \end{aligned}$$

71. $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

◀ Параболоид вращения и плоскость пересекаются по кривой, уравнение проекции которой на плоскость xOy имеет вид $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$. Поэтому тело T является множеством:

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}, x^2 + y^2 \leq z \leq x + y\right\},$$

а формула (4), п.3.1, запишется в виде

$$V = \iint_D (x + y - x^2 - y^2) dx dy, \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Заменяя в интеграле переменные по формулам $x - \frac{1}{2} = \rho \cos \varphi$, $y - \frac{1}{2} = \rho \sin \varphi$, получаем

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{\rho}{2} - \rho^3\right) d\rho = \frac{\pi}{8}. \blacksquare$$

$$72. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (z > 0, a > 0, b > 0, c > 0).$$

◀ Тело ограничено конической поверхностью и поверхностью эллипсоида. Коническая поверхность вырезает из поверхности эллипсоида кусок, проекция которого на плоскость xOy ограничена кривой $\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2} \right\}$. Из геометрических соображений и формулы (4), п.3.1, заключаем, что искомый объем тела может быть найден с помощью интеграла

$$V = \iint_D (z_1(x, y) - z_2(x, y)) dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{1}{2} \right\},$$

где

$$z_1(x, y) = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad z_2(x, y) = c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Переходя в интеграле к обобщенным полярным координатам по формулам $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$, получим

$$V = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\rho \sqrt{1 - \rho^2} - \rho^2 \right) d\rho = \frac{2}{3}\pi abc \left((1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} + \rho^3 \right) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{3}abc(2 - \sqrt{2}). \blacktriangleright$$

$$73. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0, y = 0, z = 0 \quad (a > 0, b > 0).$$

◀ Если $z = 0$, то $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1$, т.е. $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Требуется вычислить объем тела

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a}\right), 0 \leq z \leq c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2} \right\}.$$

В интеграле

$$V = c \iint_D \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2} dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right\}$$

произведем замену переменных по формулам $x = a\rho \cos^2 \varphi$, $y = b\rho \sin^2 \varphi$. Принимая во внимание равенство $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = 2ab\rho \sin \varphi \cos \varphi$, а также пределы изменения φ и ρ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 1$), получим

$$V = 2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^1 \rho \sqrt{1 - \rho^2} d\rho = \frac{abc}{3} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{abc}{3}. \blacktriangleright$$

$$74. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

◀ Тело ограничено частью поверхности эллипсоида и частью цилиндрической поверхности, вырезающей из плоскости xOy замкнутую область

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

Принимая во внимание симметрию точек тела относительно координатных плоскостей, а также симметрию точек области D относительно осей Ox и Oy , можем вычислить величину V объема тела по формуле

$$V = 8c \iint_{D_1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \quad D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

После замены переменных по формулам $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$ находим

$$\begin{aligned} V &= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho \sqrt{1 - \rho^2} d\rho = \frac{8}{3}abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\sqrt{\cos 2\varphi}}^0 d\varphi = \frac{8}{3}abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sqrt{2} \sin^3 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{8}{3}abc \left(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 \varphi - 1) d(\cos \varphi) \right) = \frac{8}{3}abc \left(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2} \left(\frac{\cos^3 \varphi}{3} - \cos \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \\ &= \frac{2}{9}abc(3\pi + 20 - 16\sqrt{2}). \blacksquare \end{aligned}$$

75. $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$.

◀ Тело T , объем которого требуется вычислить, представим в виде $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq xy\}$, где D — криволинейный четырехугольник, край которого задан уравнениями $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$.

В интегrale

$$V = \iint_D xy dx dy$$

заменим переменные по формулам $x^2 = uy$, $y^2 = vx$, отображающим квадрат $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\}$ на множество D . Тогда $\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} = \frac{1}{3}$,

$$V = \frac{1}{3} \iint_{D'} uv du dv = \frac{1}{3} \int_1^2 u du \int_1^2 v dv = \frac{3}{4}. \blacksquare$$

76. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($n > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

◀ Требуется вычислить объем тела

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq c \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} \right)} \right\},$$

где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \sqrt[n]{1 - \frac{x^n}{a^n}}\}$. Согласно формуле (4), п.3.1, имеем

$$V = c \iint_D \sqrt[n]{1 - \frac{x^n}{a^n} - \frac{y^n}{b^n}} dx dy.$$

Полагая в интеграле $x = a\rho \cos^{\frac{2}{n}} \varphi$, $y = b\rho \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$, получим

$$\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} = \frac{2}{n} ab \rho \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi.$$

$$V = \frac{2}{n} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi \int_0^1 \rho \sqrt[n]{1-\rho^n} d\rho = \frac{abc}{n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \int_0^1 \rho \sqrt[n]{1-\rho^n} d\rho.$$

В интеграле $I = \int_0^1 \rho \sqrt[n]{1-\rho^n} d\rho$ заменим переменную по формуле $\rho = t^{\frac{1}{n}}$. Тогда

$$I = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{2}{n}-1} (1-t)^{\frac{1}{n}} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right).$$

Окончательно имеем

$$V = \frac{abc}{n^2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) B\left(\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{abc}{3n^2} \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}. \blacktriangleright$$

Применяя формулу (4), п.3.2, найти:

77. Площадь поверхности тела, ограниченного полыми цилиндрами

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\}, \\ S_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = a^2, x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

◀ Из рис. 10 видно, что $\frac{1}{16}$ часть поверхности тела, образованного в результате пересечения двух цилиндров, проектируется в плоскости xOy на множество

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x\},$$

поэтому

$$P = 16 \iint_D \sqrt{1+z_x'^2 + z_y'^2} dx dy,$$

где $z = \sqrt{a^2 - x^2}$. Поскольку $1+z_x'^2 + z_y'^2 = \frac{a^2}{a^2-x^2}$, то

$$P = 16a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^x dy = 16a \int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 16a \sqrt{a^2-x^2} \Big|_0^a = 16a^2. \blacktriangleright$$

78. Площадь части сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, заключенной внутри цилиндрической поверхности

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z \in \mathbb{R} \right\}, \quad b \leq a.$$

◀ Цилиндрическая поверхность, пересекаясь со сферой, вырезает из нее симметричные относительно плоскости xOy куски, каждый из которых рассекается координатными плоскостями xOz и yOz на четыре равные части. При $z \geq 0$ имеем

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad 1+z_x'^2 + z_y'^2 = \frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}.$$

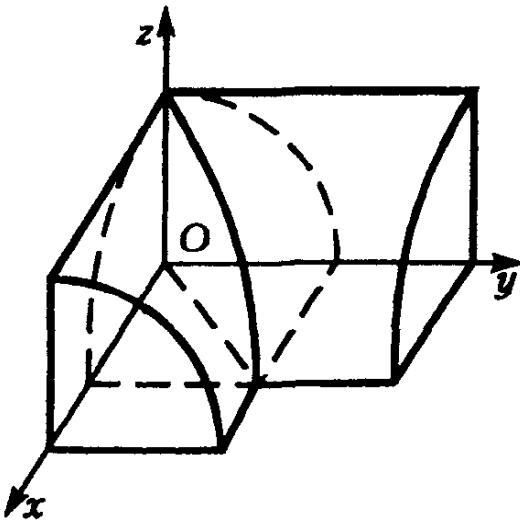


Рис. 10

Согласно формуле (4), п.3.2, получаем

$$\begin{aligned}
 P = 8a \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} &= 8a \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \\
 &= 8a \int_0^a \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \right) dx = 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

79. Площадь части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 2xy\}$, отсекаемой плоскостями, заданными уравнениями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

◀ Дифференцируя левую и правую части равенства $z^2 = 2xy$, получаем $z dz = y dx + x dy$, откуда $z'_x = \frac{y}{z}$, $z'_y = \frac{x}{z}$, $1 + z'^2_x + z'^2_y = \frac{(x+y)^2}{z^2} = \frac{(x+y)^2}{2xy}$.

Принимая во внимание, что точки поверхности S симметричны относительно плоскости xOy и что верхняя ее часть относительно этой плоскости проектируется на множество $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$, находим

$$\begin{aligned}
 P = 2 \iint_D \frac{x+y}{\sqrt{2xy}} dx dy &= \sqrt{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \right) dy = \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}} \right) dx = 2\sqrt{2} \left(B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \right) = \\
 &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} + \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)} \right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

80. Площадь части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, заключенной внутри полого цилиндра $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2x, z \in \mathbb{R}\}$.

◀ Поверхность, площадь которой требуется определить, вырезается цилиндром S_1 из конической поверхности S . Цилиндр S_1 пересекается с плоскостью xOy по окружности $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, которая является краем компакта D — круга радиуса 1 с центром в точке $(1, 0)$. На поверхности S имеем $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, поэтому $z'_x = \frac{x}{z}$, $z'_y = \frac{y}{z}$, $1 + z'^2_x + z'^2_y = 1 + \frac{x^2+y^2}{z^2} = 2$. Следовательно, $P = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \pi\sqrt{2}$. ▶

81. Площадь части S_1 поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 - y^2}\}$, заключенной внутри полого цилиндра

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), z \in \mathbb{R}\}.$$

◀ Цилиндр S_2 вырезает из конической поверхности S симметричные относительно плоскости yOz и равные между собой куски, а $\frac{1}{4}$ часть поверхности S_1 проектируется в плоскость xOy на замкнутую область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2), x \geq 0, y \geq 0\}$. Поскольку для рассматриваемого случая $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, то

$$P = 4\sqrt{2} \iint_D \frac{x dx dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

После перехода в интеграле к полярным координатам получим

$$P = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 2\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - (\sqrt{2} \sin \varphi)^2} d(\sqrt{2} \sin \varphi).$$

Полагая в последнем интеграле $\sqrt{2} \sin \varphi = t$, имеем

$$P = 2a^2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{\pi a^2}{2}. \blacktriangleright$$

82. Площадь части S_1 поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\}$, вырезанной плоскостями, заданными уравнениями $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

◀ Четвертая часть поверхности S_1 проектируется в плоскость xOy на замкнутую область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Поскольку $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, то

$$P = 4 \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

Переходя в интеграле к полярным координатам, получим

$$\begin{aligned} P &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}} \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}} \right) d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(1 + \frac{1}{2 \sin^2(\varphi + \frac{\pi}{4})} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) d\varphi = -\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\operatorname{cosec}^2(\varphi + \frac{\pi}{4})}{2} \right)^{\frac{3}{2}} d\varphi = \\ &= -\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 + \operatorname{ctg}^2(\varphi + \frac{\pi}{4}) \right)^{\frac{3}{2}} d\varphi. \end{aligned}$$

Полагая в интеграле $\operatorname{ctg}(\varphi + \frac{\pi}{4}) = t$, имеем

$$P = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} I, \quad \text{где } I = \int_{-1}^1 \frac{(3 + t^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + t^2} dt.$$

Для вычисления интеграла I представим его в виде

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{2}{1 + t^2} \right) \sqrt{3 + t^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{3 + t^2} dt + 2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3 + t^2}}{1 + t^2} dt = \\ &= \left(\frac{t}{2} \sqrt{3 + t^2} + \frac{3}{2} \ln(t + \sqrt{3 + t^2}) \right) \Big|_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{3 + t^2}} + 4 \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1 + t^2)\sqrt{3 + t^2}} = \\ &= 2 + \frac{3}{2} \ln 3 + 2 \ln \left(t + \sqrt{3 + t^2} \right) \Big|_{-1}^1 + 4 \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1 + t^2)\sqrt{3 + t^2}} = 2 + \frac{7}{2} \ln 3 + 4J_1, \end{aligned}$$

где $I_1 = \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}}$. Осталось вычислить интеграл I_1 . Полагая в нем $t = \sqrt{3} \operatorname{tg} z$, получим

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos z dz}{\cos^2 z + 3 \sin^2 z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\sqrt{2} \sin z)}{1 + (\sqrt{2} \sin z)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \sin z) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно имеем

$$P = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7}{4} \ln 3 \right) + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

83. Площадь части поверхности S , заданной уравнением $\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ и отсекаемой плоскостями, уравнения которых $x = 1$ и $x = 2$ ($y \geq 0$).

◀ Из условия следует, что $0 \leq \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \leq 1$, откуда $0 \leq y \leq \operatorname{arsh} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} \right)$. Дифференцируя обе части равенства $\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, получаем $\cos z dz = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y dx + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y dy$, откуда $z'_x = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y}{\cos z}$, $z'_y = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y}{\cos z}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 + z'_x^2 + z'_y^2 &= 1 + \frac{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{\cos^2 z} = 1 + \frac{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\operatorname{ch}^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y)}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (4), п.3.2, имеем

$$\begin{aligned} P &= \int_1^2 \operatorname{ch} x dx \int_0^{\operatorname{arsh} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} \right)} \frac{\operatorname{ch} y dy}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}} = \int_1^2 \operatorname{ch} x dx \int_0^{\operatorname{arsh} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} \right)} \frac{d(\operatorname{sh} y)}{\sqrt{1 - (\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y)^2}} = \\ &= \int_1^2 \operatorname{cth} x \left(\operatorname{arcsin}(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y) \Big|_{y=0}^{y=\operatorname{arsh} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} \right)} \right) dx = \int_1^2 \operatorname{arcsin} 1 \cdot \operatorname{cth} x dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{d(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi}{2} \ln(\operatorname{sh} x) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{e^2 - e^{-2}}{e - e^{-1}} = \frac{\pi}{2} \ln \left(e + \frac{1}{e} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

84. Площадь части сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами.

◀ Пусть φ_1, φ_2 — долготы меридианов ($\varphi_2 > \varphi_1$), а ψ_1, ψ_2 — широты параллелей ($\psi_2 > \psi_1$). Тогда координаты любой точки $M = (x, y, z)$, принадлежащей указанной части сферы, можно записать в параметрической форме

$$x = a \cos \varphi \cos \psi, \quad y = a \sin \varphi \cos \psi, \quad z = a \sin \psi \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2).$$

Найдем коэффициенты Гаусса E, G и F :

$$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = a^2 \cos^2 \psi, \quad G = (x'_\psi)^2 + (y'_\psi)^2 + (z'_\psi)^2 = a^2,$$

$$F = x'_\varphi x'_\psi + y'_\varphi y'_\psi + z'_\varphi z'_\psi = 0.$$

Таким образом, $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \cos \psi$ и, согласно формуле (3), п.3.2, имеем

$$P = a^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos \psi d\psi = a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) (\sin \psi_2 - \sin \psi_1). \blacktriangleright$$

85. Площадь части поверхности тора, заданного векторным уравнением

$$\Phi = \Phi(\varphi, \psi) = ((b + a \cos \psi) \cos \varphi, (b + a \cos \psi) \sin \varphi, a \sin \psi), \quad 0 < a \leq b,$$

ограниченной двумя меридианами $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ и двумя параллелями $\psi = \psi_1, \psi = \psi_2$. Чему равна площадь поверхности всего тора?

◀ Вычислим гауссовые коэффициенты тора:

$$E = \langle \Phi'_\varphi, \Phi'_\varphi \rangle = (b + a \cos \psi)^2, \quad G = \langle \Phi'_\psi, \Phi'_\psi \rangle = a^2, \quad F = \langle \Phi'_\varphi, \Phi'_\psi \rangle = 0.$$

Следовательно, $\sqrt{EG - F^2} = a(b + a \cos \psi)$ и, применив формулу (3), п.3.2, имеем

$$P = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} (b + a \cos \psi) d\psi = a(\varphi_2 - \varphi_1)(b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)).$$

Подставляя в полученное выражение $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi, \psi_1 = 0, \psi_2 = 2\pi$, находим, что площадь всей поверхности тора равна $4\pi^2 ab$. ▶

Применяя формулу (3), п.3.1, вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

86. $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2$.

◀ Тело T , объем которого требуется вычислить, представляет собой следующее множество точек:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq z \leq 2(x^2 + y^2)\}.$$

Применяя формулу (3), п.3.1, получим

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{3}{35}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

87. $z = x + y, z = xy, x + y = 1, x = 0, y = 0$.

◀ Поскольку $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, xy \leq z \leq x + y\}$, то

$$V = \iiint_T dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{xy}^{x+y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y - xy) dy = \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{(1-x)^3}{2} \right) dx = \frac{7}{24}. \blacktriangleright$$

88. $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}, a > 0$.

◀ Тело T ограничено частью поверхности параболоида вращения и частью конической поверхности, пересекающихся по кривой, проекция которой на плоскость xOy является окружностью $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$. Поэтому

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, \frac{x^2 + y^2}{a} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

В интеграле $V = \iiint_T dx dy dz$ перейдем к цилиндрическим координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. Принимая во внимание симметрию точек тела относительно плоскостей xOz и yOz , а также равенство $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho$, получим

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{a}}^{\rho} dz = 2\pi \int_0^a \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{a} \right) d\rho = \frac{\pi a^3}{6}. \blacktriangleright$$

89. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

◀ Тело T лежит в первом октанте и ограничено частью параболоида вращения, заданного уравнением $az = a^2 - x^2 - y^2$ (с вершиной в точке $(0, 0, a)$), и частью плоскости, уравнение которой $z = a - x - y$, в силу чего его можно представить в виде $T = T_1 \cup T_2$, где

$$T_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, a - x \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq z \leq a - \frac{x^2 + y^2}{a} \right\},$$

$$T_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x, a - x - y \leq z < a - \frac{x^2 + y^2}{a} \right\}.$$

Формула (3), п. 3.1, принимает вид

$$V = \iiint_{T_1} dx dy dz + \iiint_{T_2} dx dy dz.$$

После перехода к цилиндрическим координатам получим

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}}^a \rho d\rho \int_0^{a - \frac{\rho^2}{a}} dz + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}} \rho d\rho \int_{a - \rho(\sin \varphi + \cos \varphi)}^{a - \frac{\rho^2}{a}} dz = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}}^a \rho \left(a - \frac{\rho^2}{a} \right) d\rho + \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}} \rho \left(\rho(\sin \varphi + \cos \varphi) - \frac{\rho^2}{a} \right) d\rho \right) d\varphi = \\ &= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6(\sin \varphi + \cos \varphi)^2} \right) d\varphi = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12 \sin^2(\varphi + \frac{\pi}{4})} \right) d\varphi = \\ &= \frac{a^3}{24} \left(6\varphi + 2 \operatorname{ctg} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{24} (3\pi - 4). \blacktriangleright \end{aligned}$$

90. $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

◀ Тело T ограничено конической поверхностью $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ и поверхностью параболоида вращения, заданного уравнением $z = 6 - x^2 - y^2$ (с вершиной в точке $(0, 0, 6)$).

Решая уравнение $6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ относительно $\sqrt{x^2 + y^2}$, получаем, что $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ откуда следует, что конус и параболоид пересекаются по кривой, проекцией которой на

плоскость xOy является окружность $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$. Следовательно, множество точек тела T имеет вид

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2 \right\}.$$

В интеграле $V = \iiint_T dx dy dz$ перейдем к цилиндрическим координатам и заменим тройной интеграл повторным. Принимая во внимание симметрию точек тела T относительно плоскостей xOz и yOz , получим

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^2 \rho(6 - \rho^2 - \rho) d\rho = \frac{32}{3}\pi. \blacktriangleright$$

$$91. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$$

◀ Точки тела T симметричны относительно всех координатных плоскостей, поэтому в первом октанте находится его $\frac{1}{8}$ часть. Переходя в интеграле $V = \iiint_T dx dy dz$ к сферическим координатам по формулам (7), п.1.8, получим

$$V = 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} \rho^2 d\rho = \frac{4\pi a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\sqrt{-\cos 2\theta})^3 d\theta.$$

Полагая в интеграле $\frac{\pi}{2} - \theta = t$, находим

$$V = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \cos^{\frac{3}{2}} 2t dt = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}} d(\sin t) = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2u^2)^{\frac{3}{2}} du,$$

где $u = \sin t$. Замена переменной $\sqrt{2}u = \sin z$ приводит к интегралу

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 z dz = \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

$$92. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}, a > 0, b > 0, c > 0, h > 0.$$

◀ Для вычисления объема тела, ограниченного данной поверхностью, удобно перейти к обобщенным сферическим координатам, полагая в формулах (9), п.1.8, $\alpha = \beta = 1$. Тогда $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (так как $x \geq 0$). Принимая во внимание, что $0 \leq \rho \leq \sqrt[3]{\frac{a \sin \theta \cos \varphi}{h}}$, $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc\rho^2 \sin \theta$, имеем

$$V = \iiint_T dx dy dz = abc \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a \sin \theta \cos \varphi}{h}}} \rho^2 d\rho = \frac{a^2 bc}{3h} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi a^2 bc}{3h}. \blacktriangleright$$

$$93. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

◀ Из уравнения границы тела T видно, что его точки симметричны относительно координатных плоскостей, поэтому

$$V = 8 \iiint_{T'} dx dy dz,$$

где T' — восьмая часть тела, лежащая в первом октанте. Заменим в этом интеграле переменные по формулам (9), п.1.8, полагая в них $\alpha = \beta = 1$. В сферических координатах уравнение границы тела принимает вид $\rho^2 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$, откуда заключаем, что $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. После замены переменных и перехода к повторному интегралу получим

$$\begin{aligned} V &= 8abc \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}} \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{4}{3}\pi abc \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta (1 - 2\cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta = \frac{4}{3}\pi abc \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d(\cos \theta). \end{aligned}$$

Произведем в интеграле замену $\sqrt{2}\cos \theta = \sin t$. Тогда

$$V = \frac{8}{3\sqrt{2}}\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{4}{3\sqrt{2}}\pi abc B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}abc. ▶$$

$$94. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

◀ Найдем уравнение проекции на плоскость xOy кривой, по которой пересекаются данные поверхности. Для этого подставим $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ в уравнение поверхности эллипсоида. Решив полученное уравнение относительно $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, имеем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таким образом, тело T представляет собой множество точек

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \leq z \leq c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right\},$$

$$\text{где } D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}.$$

В интеграле

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

целесообразно перейти к обобщенным цилиндрическим координатам по формулам

$$x = a\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\rho \cos \varphi, \quad y = b\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

Тогда $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \frac{ab}{2}(\sqrt{5}-1)\rho$. Принимая во внимание симметрию точек тела относительно плоскостей xOz и yOz , после замены переменных и перехода от тройного интеграла к

повторному имеем

$$\begin{aligned}
 V &= 2ab(\sqrt{5}-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{c\rho^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)}^{\sqrt{1-\frac{\rho^2(\sqrt{5}-1)}{2}}} dz = \pi abc(\sqrt{5}-1) \int_0^1 \left(\rho \sqrt{1-\frac{\rho^2(\sqrt{5}-1)}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \rho^3 \right) d\rho = \\
 &= \pi abc(\sqrt{5}-1) \left(\frac{2}{3(\sqrt{5}-1)} \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^0 - \frac{\sqrt{5}-1}{8} \right) = \\
 &= \pi abc \left(\frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^3 \right) - \frac{3-\sqrt{5}}{4} \right) = \frac{5}{12} \pi abc(3-\sqrt{5}). \blacksquare
 \end{aligned}$$

$$95. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$

◀ Принимая во внимание симметрию точек тела T относительно координатных плоскостей, имеем

$$V = 8 \iiint_{T'} dx dy dz,$$

где

$$\begin{aligned}
 T' &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq c \sqrt[4]{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2} \right\}, \\
 D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

Затем приходим к выводу о целесообразности перехода в тройном интеграле к обобщенным цилиндрическим координатам по формулам (12), п.1.8, полагая там $\alpha = 1$. Заменив переменные, получим

$$V = 8ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{c \sqrt[4]{1-\rho^4}} dz = 4\pi abc \int_0^1 \rho (1-\rho^4)^{\frac{1}{4}} d\rho.$$

Полагая $\rho = t^{\frac{1}{4}}$, выразим объем V через Γ -функцию Эйлера:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi abc \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} (1-t)^{\frac{1}{4}} dt = \pi abc B \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right) = \\
 &= \pi abc \frac{\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \Gamma \left(\frac{5}{4} \right)}{\Gamma \left(\frac{7}{4} \right)} = \frac{\pi \sqrt{\pi} abc \Gamma \left(\frac{1}{4} \right)}{3 \Gamma \left(\frac{3}{4} \right)} = \frac{abc}{3} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma^2 \left(\frac{1}{4} \right) \sin \frac{\pi}{4}}{3} = \frac{abc}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma^2 \left(\frac{1}{4} \right). \blacksquare
 \end{aligned}$$

$$96. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, h > 0, k > 0.$$

◀ Множество всех точек тела T принадлежит первому октанту. В интеграле

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п. 1.8, полагая в них $\alpha = \beta = 2$. Из условия $\frac{x}{h} - \frac{y}{k} \geq 0$ получаем неравенство $\frac{a \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{h} - \frac{b \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{k} \geq 0$, откуда $0 \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{\frac{ak}{bh}}$. После замены переменных в тройном интеграле перейдем к повторному интегралу. Получим

$$\begin{aligned}
 V &= 4abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\arctg \sqrt{\frac{ak}{bh}}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{a \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{h} - \frac{b \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{k}} \rho^2 d\rho = \\
 &= \frac{2abc}{3(\frac{b}{k} + \frac{a}{h})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 \theta d(\sin \theta) \int_{\arctg \sqrt{\frac{ak}{bh}}}^0 \left(\frac{a \cos^2 \varphi}{h} - \frac{b \sin^2 \varphi}{k} \right)^3 d\left(\frac{a \cos^2 \varphi}{h} - \frac{b \sin^2 \varphi}{k} \right) = \\
 &= \frac{2abc}{3(\frac{b}{k} + \frac{a}{h})} \frac{\sin^{10} \theta}{10} \left| \frac{\left(\frac{a \cos^2 \varphi}{h} - \frac{b \sin^2 \varphi}{k} \right)^4}{4} \right|_0^{\arctg \sqrt{\frac{ak}{bh}}} = \frac{abc}{60} \frac{\left(\frac{a}{h} \right)^4}{\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right)}. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

97. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

◀ В интеграле

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, полагая там $\alpha = \beta = 4$. Тогда

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1,$$

$$V = 16abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin^7 \theta d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} abc B(4, 2) B(2, 2) = \frac{abc}{90}. \blacktriangleright$$

98. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$

◀ Точки тела T симметричны относительно координатных плоскостей, поэтому

$$V = 8 \iiint_{T'} dx dy dz,$$

где T' — восьмая часть тела, лежащая в первом октанте.

Заменяя в тройном интеграле переменные по формулам (9), п.1.8 (полагая там $\alpha = \beta = 3$), получим

$$\begin{aligned}
 V &= 72abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^5 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \\
 &= 6abc B\left(3, \frac{3}{2}\right) B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 6abc \frac{\Gamma(3)\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{4}{35}\pi abc. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

$$99. x^2 + z^2 = a^2, x^2 + z^2 = b^2, x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (x > 0, a < b).$$

◀ Точки тела T , объем которого требуется вычислить, симметричны относительно плоскостей xOz и xOy , которые разделяют его на четыре равные части. Граница тела состоит из частей конической и цилиндрических поверхностей. В силу всего сказанного выше имеем

$$V = 4 \iiint_{T'} dx dy dz,$$

где множество точек T' принадлежит первому октанту.

Заменив в тройном интеграле переменные по формулам $z = \rho \cos \varphi, x = \rho \sin \varphi, y = y$, получим

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad a \leq \rho \leq b, \quad 0 \leq y \leq \rho \sqrt{-\cos 2\varphi}, \quad \frac{D(z, x, y)}{D(\rho, \varphi, y)} = \rho,$$

$$V = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^b \rho d\rho \int_0^{\rho \sqrt{-\cos 2\varphi}} dy = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\cos 2\varphi} d\varphi \int_a^b \rho^2 d\rho = \frac{4}{3} (b^3 - a^3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\cos 2\varphi} d\varphi.$$

Произведем в интеграле замену переменной, полагая $t = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Тогда

$$V = \frac{4}{3} (b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2t} dt.$$

В полученном интеграле целесообразно произвести замену $\sin 2t = z^{\frac{1}{2}}$, после чего имеем $dt = \frac{z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}}{4} dz$,

$$V = \frac{b^3 - a^3}{3} \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{4}} dz = \frac{b^3 - a^3}{3} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} (b^3 - a^3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right). \blacktriangleright$$

$$100. \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right), \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad x = 0, \quad x = a \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

◀ Полагая в уравнении поверхности $z = 0$, получаем уравнение прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, по которой поверхность пересекается с плоскостью xOy . В тройном интеграле

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

произведем замену переменных, полагая $\frac{x}{a} = u, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = v, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = w$. При этом получим

$$0 \leq u \leq 1, \quad \frac{2w}{\pi} \arcsin w \leq v \leq 1, \quad -1 \leq w \leq 1, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}} = abc,$$

$$V = abc \int_0^1 du \int_{-\frac{2w}{\pi} \arcsin w}^1 dw \int_{-1}^1 dv = abc \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{2}{\pi} w \arcsin w\right) dw = 2abc \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 w \arcsin w dw\right) = \\ = 2abc \left(1 - \frac{1}{\pi} \left(\frac{w^2}{2} \arcsin w \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{w^2 dw}{\sqrt{1-w^2}}\right)\right) = abc \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w^2 dw}{\sqrt{1-w^2}}\right) =$$

$$= abc \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-w^2} dw + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} \right) = abc \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} abc. \blacktriangleright$$

101. $(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2,$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

◀ В интегrale

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

заменим переменные по формулам $a_i x + b_i y + c_i z = u_i$ ($i = 1, 2, 3$), отображающим шар $T' = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq h^2\}$ на тело T . Тогда, принимая во внимание, что $\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(u_1, u_2, u_3)} = \frac{1}{\Delta}$, получим

$$V = \frac{1}{|\Delta|} \iiint_{T'} du_1 du_2 du_3 = \frac{4}{3} \frac{\pi h^3}{|\Delta|}. \blacktriangleright$$

102. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{n-2}, n > 1, a > 0, b > 0, c > 0, h > 0.$

◀ Тело T находится в полупространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ и его точки симметричны относительно плоскостей xOz и yOz , в силу чего имеем

$$V = 4 \iiint_{T'} dx dy dz,$$

где T' — четвертая часть тела, находящаяся в первом октанте.

Перейдем в интегrale к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, полагая в них $\alpha = \beta = 1$. Тогда

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq \sqrt[3]{\frac{c \cos \theta \sin^{2n-4} \theta}{h(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}} = \rho(\theta),$$

$$V = 4abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\rho(\theta)} \rho^2 d\rho = \frac{2\pi}{3h} abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \sin^{2n-3} \theta}{\sin^{2n} \theta + \cos^{2n} \theta} d\theta = \frac{2\pi}{3h} abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{2n-3} \theta d(\operatorname{tg} \theta)}{1 + \operatorname{tg}^{2n} \theta}.$$

Полагая $\operatorname{tg}^{2n} \theta = t$, получаем

$$d(\operatorname{tg} \theta) = \frac{t^{\frac{1}{2n}-1}}{2n} dt,$$

$$V = \frac{\pi abc^2}{3nh} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{n}}}{1+t} dt = \frac{\pi abc^2}{3nh} B\left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi abc^2}{3nh} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi^2 abc^2}{3nh \sin \frac{\pi}{n}}. \blacktriangleright$$

103. Найти объем m -мерной пирамиды

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{a_i} \leq 1, x_i \geq 0 (i = \overline{1, m}) \right\}, a_i > 0, i = \overline{1, m}.$$

◀ Объем тела T вычисляется по формуле

$$V = \int_T d\mathbf{x} = \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} dx_2 \dots \int_0^{a_m \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \dots - \frac{x_{m-1}}{a_{m-1}}\right)} dx_m.$$

Заменим в интеграле переменные по формулам $x_i = a_i t_i$, $i = \overline{1, m}$. Тогда получим, принимая во внимание, что $\frac{\mathcal{D}(x_1, \dots, x_m)}{\mathcal{D}(t_1, \dots, t_m)} = a_1 a_2 \dots a_m$:

$$\begin{aligned} V &= a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{m-1}} dt_m = \\ &= a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{m-2}} (1 - (t_1 + \dots + t_{m-1})) dt_{m-1} = \\ &= a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{m-3}} \frac{(1 - (t_1 + \dots + t_{m-1}))^2}{2} \Big|_{\substack{t_{m-1}=0 \\ t_{m-1}=1-(t_1+\dots+t_{m-2})}} dt_{m-2} = \\ &= \frac{1}{2} a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{m-3}} (1 - (t_1 + \dots + t_{m-2}))^2 dt_{m-2} = \\ &= \frac{1}{3!} a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{m-4}} (1 - (t_1 + \dots + t_{m-3}))^3 dt_{m-3} = \dots = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 (1 - t_1)^{m-1} dt_1 = \frac{1}{m!} a_1 a_2 \dots a_m. \blacktriangleright \end{aligned}$$

104. Найти объем M -мерного шара

$$T = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq a^2 \right\}.$$

◀ Заменяя в интеграле

$$V = \int_T d\mathbf{x}$$

переменные по формулам (14), п.1.8, и принимая во внимание формулу (15) того же пункта, получим

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \dots \int_0^\pi \sin^{m-2} \varphi_{m-1} d\varphi_{m-1} \int_0^a \rho^{m-1} d\rho = \\ &= 2^{m-1} \frac{\pi a^m}{m} \prod_{j=2}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j. \end{aligned}$$

Каждый интеграл, входящий в произведение, является B -функцией Эйлера:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \frac{1}{2} B\left(\frac{j}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}.$$

Следовательно,

$$\prod_{j=2}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2} \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\dots\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(2)\dots\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, \quad V = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}} a^m}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

При $m = 2$ получим $V = \pi a^2$, а при $m = 3$ имеем $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, что известно из элементарного курса геометрии. ►

105. Найти объем m -мерного конуса, ограниченного поверхностью, заданной уравнением $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_{m-1}^2}{a_{m-1}^2} = \frac{x_m^2}{a_m^2}$, и гиперплоскостью, уравнение которой $x_m = a_m$.

◀ В интеграле $V = \int_T dx$ заменим переменные по формулам

$$x_1 = a_1 \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}, \quad x_j = a_j \rho \cos \varphi_{j-1} \prod_{i=j}^{m-2} \sin \varphi_i \quad (j = 2, m-2), \\ x_{m-1} = a_{m-1} \rho \cos \varphi_{m-2}, \quad x_m = x_m.$$

Принимая во внимание равенство

$$\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}, x_m)} = a_1 a_2 \dots a_{m-1} \rho^{m-2} \prod_{j=1}^{m-2} \sin^{j-1} \varphi_j$$

и решение предыдущего примера, получим

$$V = a_1 a_2 \dots a_{m-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \sin \varphi_2 d\varphi_2 \dots \int_0^\pi \sin^{m-3} \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^1 \rho^{m-2} d\rho \int_{\rho a_m}^{a_m} dx_m = \\ = \frac{2\pi}{(m-1)m} a_1 a_2 \dots a_m \cdot 2^{m-3} \prod_{j=2}^{m-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \\ = \frac{2\pi}{(m-1)m} a_1 a_2 \dots a_m \cdot 2^{m-3} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-3} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}} a_1 a_2 \dots a_m}{(m-1)m\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}} a_1 a_2 \dots a_m}{m\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}. ▶$$

Применяя формулы (1), п.3.3, найти координаты центра тяжести:

106. Однородной пластинки D , граница которой задана уравнениями

$$ay = x^2, \quad x + y = 2a \quad (a > 0).$$

◀ Прямая $\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2a\}$ и кривая $\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ay = x^2\}$ пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = -2a$, $x_2 = a$. Однородная пластинка D является плоской замкнутой областью $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2a \leq x \leq a, \frac{x^2}{a} \leq y \leq 2a - x\}$, а ее масса

$$m = \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \int_{-2a}^a \left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) dx = \frac{9}{2}a^2.$$

По формулам (1), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_{-2a}^a x dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \frac{1}{m} \int_{-2a}^a \left(2ax - x^2 - \frac{x^3}{a} \right) dx = -\frac{a}{2},$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y dy = \frac{1}{m} \int_{-2a}^a \left(\frac{(2a-x)^2}{2} - \frac{x^4}{2a^2} \right) dx = \frac{8}{5}a. \blacktriangleright$$

107. Однородной пластинки D , ограниченной частью кривой

$$\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \right\}$$

и отрезками $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$.

◀ Вычислим массу пластинки D :

$$m = \iint_D dx dy = \int_0^a dx \int_0^{y(x)} dt = \int_0^a y(x) dx,$$

где $y(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$. Полагая $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) и принимая во внимание, что возрастанию параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ соответствует убывание переменной x от a до 0, получим

$$m = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t (-3a \cos^2 t \sin t) dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 B \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} a^2 \frac{\Gamma(2 + \frac{1}{2}) \Gamma(1 + \frac{1}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{3}{32} \pi a^2.$$

Применив формулы (1), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_0^a x dx \int_0^{y(x)} dt = \frac{1}{m} \int_0^a xy(x) dx = \frac{3a^3}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \sin^4 t dt = \frac{3a^3}{2m} B \left(\frac{5}{2}, 3 \right) = \frac{256a}{315\pi},$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_0^a dx \int_0^{y(x)} t dt = \frac{1}{2m} \int_0^a y^2(x) dx = \frac{3a^3}{2m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt = \frac{3a^3}{4m} B \left(4, \frac{3}{2} \right) = \frac{256a}{315\pi}. \blacktriangleright$$

108. Однородной пластинки D , ограниченной кривой, заданной уравнением $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, и отрезком луча $\varphi = 0$.

◀ Применяя формулы пункта 3.3, получим

$$m = \iint_D dx dy = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho d\rho = \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi) d\varphi = \frac{3}{4}\pi a^2,$$

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{1}{m} \iint_D x \, dx \, dy = \frac{1}{m} \int_0^\pi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} \rho^2 \, d\rho = \frac{a^3}{3m} \int_0^\pi \cos \varphi (1 + \cos \varphi)^3 \, d\varphi = \\
 &= \frac{a^3}{3m} \int_0^\pi (3 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi) \, d\varphi = \frac{2a^3}{3m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi) \, d\varphi = \frac{a^3}{3m} \left(3B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \right) = \frac{5}{6}a, \\
 y_0 &= \frac{1}{m} \iint_D y \, dx \, dy = \frac{1}{m} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} \rho^2 \, d\rho = \\
 &= \frac{a^3}{3m} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{a^3}{3m} \int_{\pi}^0 (1 + \cos \varphi)^3 d(\cos \varphi) = \frac{16a}{9\pi}.
 \end{aligned}$$

При решении примера использовали переход в двойном интеграле от декартовых координат к полярным координатам. ►

109. Найти координаты центра тяжести круглой пластинки $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, если плотность ее вещества в точке (x, y) пропорциональна расстоянию от этой точки до точки $(a, 0)$.

◀ Из условия задачи следует, что плотность μ вещества пластинки D выражается формулой $\mu(x, y) = c\sqrt{(x - a)^2 + y^2}$, где $c > 0$ — постоянная. Согласно формулам (1), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint_D x \mu(x, y) \, dx \, dy, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint_D y \mu(x, y) \, dx \, dy,$$

где $m = \iint_D \mu(x, y) \, dx \, dy$. После замены переменных по формулам $x - a = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получим

$$\begin{aligned}
 m &= c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-2a \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho = \frac{8}{3}ca^3 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \\
 &= \frac{8}{3}ca^3 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{8}{3}ca^3 \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}ca^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{c}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-2a \cos \varphi} (a + \rho \cos \varphi) \rho^2 \, d\rho = \frac{c}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(-\frac{8}{3}a^4 \cos^3 \varphi + 4a^4 \cos^5 \varphi \right) d\varphi = \\
 &= \frac{4ca^4}{3m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3 \cos^5 \varphi - 2 \cos^3 \varphi) d\varphi = \frac{4ca^4}{3m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - 4 \sin^2 \varphi + 3 \sin^4 \varphi) d(\sin \varphi) = -\frac{a}{5},
 \end{aligned}$$

$$y_0 = \frac{c}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^{-2a \cos \varphi} \rho^3 d\rho = \frac{4ca^4}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi/2} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi = 0. \blacksquare$$

110. Найти моменты инерции относительно осей координат Ox и Oy однородной пластиинки

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - \sqrt{2ax - x^2} \right\}.$$

◀ Заменяя в формуле (2), п.3.3, для вычисления I_x двойной интеграл повторным, при $\mu(x, y) = 1$ получаем

$$I_x = \int_0^a dx \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^a \left(a - \sqrt{2ax - x^2} \right)^3 dx.$$

Полагая $x = 2a \sin^2 t$, находим

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{a^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t (1 - \sin 2t)^3 d(2t) = \frac{a^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u (1 - \sin u)^3 du = \\ &= \frac{a^4}{6} \left(B\left(1, \frac{1}{2}\right) - 3B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + 3B\left(2, \frac{1}{2}\right) - B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \right) = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi). \end{aligned}$$

Интеграл $I_y = \iint_D x^2 dx dy$ заменим повторным, в котором внешнее интегрирование производится по переменной y . При этом получим

$$I_y = \int_0^a dy \int_0^{a-\sqrt{2ay-y^2}} x^2 dx = I_x = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi). \blacksquare$$

111. Доказать формулу $I_l = I_{l_0} + md^2$, где I_l, I_{l_0} — моменты инерции плоской пластиинки D относительно параллельных осей l и l_0 , из которых l_0 проходит через центр тяжести пластиинки, d — расстояние между осями, m — масса пластиинки.

◀ Выберем систему координат xOy так, чтобы ее начало O совпадало с центром тяжести $M_0 = (x_0, y_0)$ пластиинки D , а ось

Ox — с прямой l_0 (рис. 11). Тогда, очевидно, $y_0 = 0$. Пусть $\mu(x, y)$ — плотность вещества пластиинки. Расстояние точки $(x, y) \in D$ от прямой l равно $d - y$, в силу чего можем написать

$$I_l = \iint_D (d - y)^2 \mu(x, y) dx dy = d^2 \iint_D \mu(x, y) dx dy - 2d \iint_D y \mu(x, y) dx dy + \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy.$$

Из равенств

$$\iint_D \mu(x, y) dx dy = m, \quad \iint_D y \mu(x, y) dx dy = my_0 = 0, \quad \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy = I_x = I_{l_0}$$

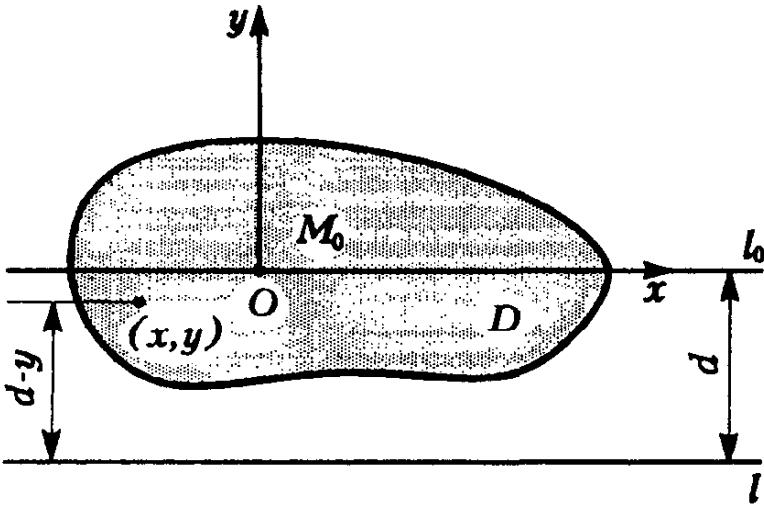


Рис. 11

следует доказываемая формула.

112. Доказать, что момент инерции I плоской пластинки D относительно прямой, проходящей через центр тяжести $O = (0, 0)$ пластинки и составляющей угол α с осью Ox , определяется формулой

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

где I_x и I_y — моменты инерции пластинки относительно осей Ox и Oy , I_{xy} — центробежный момент инерции (см. формулы (2) и (3), п. 3.3).

◀ По условию центр тяжести пластинки D находится в начале координат системы xOy . Фиксируем точку (x, y) . Ее расстояние до заданной прямой равно $(x - y \operatorname{ctg} \alpha) \sin \alpha = x \sin \alpha - y \cos \alpha$ (рис. 12), в силу чего имеем

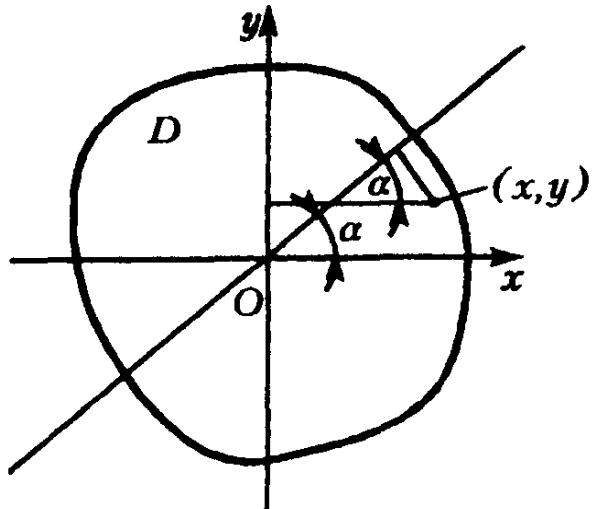


Рис. 12

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 \mu(x, y) dx dy = \\ &= \sin^2 \alpha \iint_D \mu(x, y) x^2 dx dy - 2 \sin \alpha \cos \alpha \iint_D x y \mu(x, y) dx dy + \cos^2 \alpha \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy = \\ &= I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_x \cos^2 \alpha. \blacksquare \end{aligned}$$

113. Определить силу давления воды на боковую стенку цилиндрического сосуда $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$, $x \geq 0$, если уровень воды $z = h$.

◀ Согласно основному закону гидростатики, на элемент $d\sigma(M)$ цилиндрической поверхности, площадь которого $dS(M)$, действует сила давления $dP(M)$, равная по величине произведению $dS(M)$ на плотность $\mu(M)$ жидкости и на расстояние элемента $d\sigma(M)$ от свободной поверхности жидкости. Эта сила направлена в сторону единичной внешней нормали к боковой поверхности цилиндра. Следовательно,

$$dP(M) = dS(M)\mu(M)(h - z)n(M), \quad M \in d\sigma.$$

Поскольку образующие цилиндра параллельны оси Oz , то

$$dP(M) = dX(M)i + dY(M)j,$$

где $dX(M) = dS(M)(h - z)\mu(M) \cos(\widehat{n, i})$, $dY(M) = dS(M)(h - z)\mu(M) \cos(\widehat{n, j})$. Суммируя по всем элементам $d\sigma(M)$ и принимая во внимание равенства

$$dS = \sqrt{1 + x'_y^2 + x'_z^2} dy dz,$$

$$(\cos \widehat{n, i}) = \frac{1}{\sqrt{1 + x'_y^2 + x'_z^2}}, \quad (\cos \widehat{n, j}) = -\frac{x'_y}{\sqrt{1 + x'_y^2 + x'_z^2}}, \quad \mu(M) = 1,$$

получаем следующие значения компонент X и Y вектора P — суммарного давления на стенку цилиндрического сосуда при $x \geq 0$:

$$X = \iint_{\substack{-a \leq y \leq a \\ 0 \leq z \leq h}} \sqrt{1 + x'_y^2 + x'_z^2} (h - z) \cos(\widehat{n, i}) dy dz = \int_{-a}^a dy \int_0^h (h - z) dz = a(h - z)^2 \Big|_0^h = ah^2,$$

$$Y = \iint_{\substack{-a \leq y \leq a \\ 0 \leq z \leq h}} \sqrt{1 + x'_y^2 + x'_z^2} (h - z) \cos(\widehat{n, j}) dy dz = \int_{-a}^a y dy \int_0^h (h - z) dz = 0. \blacksquare$$

Найти координаты центров тяжести однородных тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

$$114. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c.$$

◀ Тело T однородно, ограничено частью конической поверхности $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right\}$, частью плоскости $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = c\}$ и симметрично относительно оси Oz . Следовательно, его центр тяжести $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ лежит на этой оси и $x_0 = 0, y_0 = 0$. Согласно одной из формул (4), п. 3.3, имеем, полагая $\mu(x, y, z) = 1$:

$$z_0 = \frac{1}{V} \iiint_T z \, dx \, dy \, dz,$$

где V — объем тела T .

В интеграле $V = \iiint_T dx \, dy \, dz$ перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам, полагая $x = a\rho \cos \varphi, y = b\rho \sin \varphi, z = z$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). После замены получим

$$V = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{c\rho}^c dz = 2\pi abc \int_0^1 \rho(1 - \rho) \, d\rho = \frac{\pi}{3} abc.$$

Таким образом, имеем

$$z_0 = \frac{ab}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{c\rho}^c z \, dz = \frac{\pi abc^2}{V} \int_0^1 \rho(1 - \rho^2) \, d\rho = \frac{\pi abc^2}{4V} = \frac{3}{4}c. ▶$$

$$115. x^2 = 2pz, y^2 = 2px, x = \frac{p}{2}, z = 0 (p > 0).$$

◀ Точки тела T симметричны относительно плоскости xOz , поэтому

$$V = 2 \iiint_{T'} dx \, dy \, dz,$$

где $T' = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \frac{p}{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2px}, 0 \leq z \leq \frac{x^2}{2p} \right\}$. Заменяя тройной интеграл повторным, получим

$$V = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = \frac{1}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} x^2 dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \frac{1}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} x^2 \sqrt{2px} dx = \frac{p^3}{28}.$$

Применив формулы (4), п. 3.3, найдем

$$x_0 = \frac{2}{V} \int_0^{\frac{p}{2}} x \, dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = \frac{28}{p^4} \int_0^{\frac{p}{2}} x^3 \sqrt{2px} dx = \frac{7}{18}p,$$

$$y_0 = \frac{1}{V} \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y \, dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = \frac{7}{p^4} \int_0^{\frac{p}{2}} \left(x^2 y^2 \Big|_{y=-\sqrt{2px}}^{y=\sqrt{2px}} \right) dx = 0,$$

$$z_0 = \frac{2}{V} \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} z dz = \frac{7}{p^5} \int_0^{\frac{p}{2}} x^4 \sqrt{2px} dx = \frac{7}{176} p. \blacktriangleright$$

$$116. \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x = 0, y = 0, z = 0, (n > 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

◀ Точки тела T принадлежат первому октанту. В интеграле

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, полагая там $\alpha = \beta = \frac{2}{n}$. Тогда

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad \frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \theta, \varphi)} = \frac{4}{n^2} abc \rho^2 \cos^{\frac{2}{n}-1} \theta \sin^{\frac{4}{n}-1} \theta \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi,$$

$$V = \frac{4}{n^2} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1} \theta \sin^{\frac{4}{n}-1} \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{abc}{3n^2} B\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{abc}{3n^2} \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

Применив формулы (4), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{V} \iiint_T x dx dy dz = \frac{4a^2 bc}{n^2 V} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{6}{n}-1} \theta \cos^{\frac{2}{n}-1} \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{4}{n}-1} \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{1}{V} \frac{a^2 bc}{4n^2} B\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n}\right) B\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{3a}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)},$$

$$y_0 = \frac{1}{V} \iiint_T y dx dy dz = \frac{3b}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}, \quad z_0 = \frac{1}{V} \iiint_T z dx dy dz = \frac{3c}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}. \blacktriangleright$$

117. Определить координаты центра тяжести тела, имеющего форму куба $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, если его плотность в точке (x, y, z) определяется формулой

$$\mu(x, y, z) = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}, \text{ где } 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1.$$

◀ Найдем массу m тела T :

$$m = \iiint_T \mu(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha \beta \gamma}.$$

Согласно одной из формул (4), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{m} \iiint_T x \mu(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{m} \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz =$$

$$= \frac{1}{m} \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta \gamma} = \alpha.$$

Аналогично находим $y_0 = \beta$, $z_0 = \gamma$. ►

118. Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела T , ограниченного поверхностью, заданной уравнением

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

◀ Применим формулы (5), п.3.3, и в интеграле

$$I_{xy} = \iiint_T z^2 dx dy dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, при $\alpha = \beta = 1$. Уравнение границы тела T в сферических координатах примет вид $\rho^2 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$, откуда следует, что $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. Множество $T' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sqrt{-\cos 2\theta}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ отображается на множество T . Принимая во внимание равенство $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc \rho^2 \sin \theta$, после замены переменных и перехода от тройного интеграла к повторному получим

$$I_{xy} = abc^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{-\cos 2\theta}} \rho^4 d\rho = \frac{2}{5} \pi abc^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta \cos^2 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^{\frac{5}{2}} d\theta.$$

Полагая в интеграле $\sqrt{2} \cos \theta = t^{\frac{1}{2}}$, имеем

$$I_{xy} = \frac{\pi abc^3}{5\sqrt{2}} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1} (1-t)^{\frac{5}{2}} dt = \frac{\pi abc^3}{5\sqrt{2}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{\pi^2 abc^3}{128\sqrt{2}}.$$

Аналогично получим

$$I_{yz} = \frac{15\pi^2 a^3 bc}{256\sqrt{2}}, \quad I_{zx} = \frac{15\pi^2 ab^3 c}{256\sqrt{2}}. \quad \blacktriangleright$$

119. Найти момент инерции неоднородного шара $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ массы m относительно его диаметра, если плотность шара в текущей точке $M = (x, y, z)$ пропорциональна расстоянию этой точки от центра шара.

◀ По условию задачи имеем

$$\mu(x, y, z) = \gamma \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \gamma = \text{const}, \quad \gamma > 0.$$

Постоянную γ определим из условия

$$m = \gamma \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz.$$

Перейдя в интеграле к сферическим координатам, получим

$$m = \gamma \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^3 d\rho = \pi \gamma r^4,$$

откуда $\gamma = \frac{m}{\pi r^4}$.

Считая, что диаметр шара является отрезком оси Oz и применяя одну из формул (7), п.3.3, найдем

$$I_z = \frac{m}{\pi r^4} \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{m}{\pi r^4} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^5 d\rho =$$

$$= \frac{2\pi m r^6}{3\pi r^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} m r^2 B\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{1}{3} m r^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2)}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{9} m r^2. \blacksquare$$

120. Доказать, что момент инерции тела $T \subset \mathbb{R}^3$ относительно оси l , проходящей через его центр тяжести $O = (0, 0, 0)$ и образующей углы α, β, γ с осями координат, определяется по формуле

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma,$$

где I_x, I_y, I_z — моменты инерции тела относительно осей координат (см. формулы (7), п.3.3) и

$$K_{xy} = \iiint_T xy \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

$$K_{xz} = \iiint_T xz \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

$$K_{yz} = \iiint_T yz \mu(x, y, z) dx dy dz$$

— центробежные моменты.

◀ Найдем квадрат расстояния от точки $M = (x, y, z)$ тела до прямой l (т.е. до точки N — проекции точки M на прямую l , рис. 13). Пусть $r = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки M , а e — орт прямой l . Очевидно, $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, $d^2 = |r|^2 - (r, e)^2$, где (r, e) — скалярное произведение векторов r и e . Принимая во внимание равенства $|r|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $(r, e) = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, имеем

$$d^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2 =$$

$$= (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma.$$

Пусть $\mu(x, y, z)$ — плотность вещества тела T . Из определения момента инерции тела относительно некоторой оси (см. формулу (6), п.3.3) следует равенство

$$I_l = \iiint_T d^2 \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

Подставив в интеграл найденное выше значение d^2 и пользуясь свойством аддитивности тройного интеграла, получим доказываемую формулу. □

121. Найти момент инерции относительно начала координат одиородного тела T плотности μ_0 , ограниченного поверхностью, заданной уравнением $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

◀ Применив формулу (8), п.3.3, получим

$$I_0 = \mu_0 \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

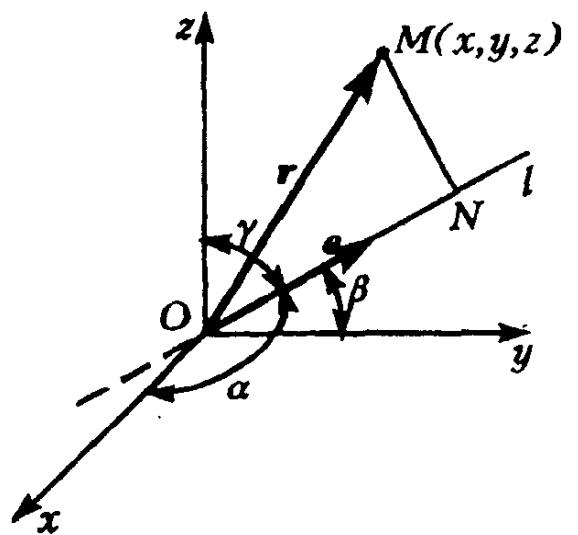


Рис. 13

Перейдем в интеграле к сферическим координатам по формулам (7), п.1.8. Очевидно, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq a \sin \theta$. После замены тройного интеграла повторным найдем

$$I_0 = 8\mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sin \theta} \rho^4 d\rho = \frac{4}{5}\pi \mu_0 a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta = \frac{2}{5}\pi \mu_0 a^5 B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8} \mu_0 a^5. \blacksquare$$

122. Найти ньютона потенциал в точке $P = (x, y, z)$ сферического слоя $T = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : r_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq r_2^2\}$, если плотность $\mu = f(r)$, где f — известная функция, $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

◀ Повернем систему координат так, чтобы ось $O\xi_1$ системы координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ проходила через точку P . В новых координатах сферический слой является множеством точек, определяемым неравенствами $r_1^2 \leq \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \leq r_2^2$, по которому будем интегрировать, применяя формулу (10), п.3.3. Имеем

$$u(x, y, z) = u_1(0, 0, r) = \iiint_{r_1^2 \leq \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \leq r_2^2} \frac{f(\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2})}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + (\zeta_1 - z)^2}} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1.$$

Перейдем к сферическим координатам по формулам (7), п.1.8. Легко убедиться в том, что $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $r_1 \leq \rho \leq r_2$. Принимая это во внимание и переходя к повторному интегралу, получим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 f(\rho) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos \theta + r^2}} = \\ &= 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 f(\rho) \left(\frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos \theta + r^2}}{\rho r} \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right) d\rho = \frac{2\pi}{r} \int_{r_1}^{r_2} \rho f(\rho) (\rho + r - |\rho - r|) d\rho = \\ &= \begin{cases} 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho f(\rho) d\rho, & \text{если } \rho > r, \\ \frac{4\pi}{r} \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 f(\rho) d\rho, & \text{если } \rho < r, \end{cases} \end{aligned}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответ можно записать в более компактной форме. Если $\rho > r$, то $\frac{\rho^2}{r} > \rho$; если $\rho < r$, то $\frac{\rho^2}{r} < \rho$. Поэтому

$$u(x, y, z) = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \min \left\{ \frac{\rho^2}{r}, \rho \right\} f(\rho) d\rho. \blacksquare$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти площади плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными уравнениями:

50. $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 = a\sqrt{3}y$ (внутри каждой из кривых).

51. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$. 52. $x^4 + y^4 = 2a^2 xy$. 53. $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$.

54. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, $y > 0$. 55. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{h^2}$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

56. $\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^6 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$. 57. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$, $x > 0$, $y > 0$.

58. $x^2 = ay, x^2 = by, y = m, y = n \quad (0 < a < b, 0 < m < n).$

59. $y^2 = a^2 - 2ax, y^2 = b^2 - 2bx, y^2 = m^2 + 2mx, y^2 = n^2 + 2nx \quad (0 < m < n, 0 < a < b).$

60. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2), a > 0.$ 61. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0.$

62. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^5 = \frac{x^2 y^2}{c^4}.$ 63. $x + y = a, x + y = b, y = \alpha x, y = \beta x \quad (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta).$

64. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, 4\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (a > 0, b > 0).$

С помощью двойных интегралов найти объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

65. $x + y + z = a, x^2 + y^2 = b^2, z = 0, \quad (a > b\sqrt{2}).$ 66. $x^2 z^2 + a^2 y^2 = c^2 x^2, 0 < x < a.$

67. $y^2 + z^2 = x, x = y \quad (z > 0).$ 68. $z = \sin(x^2 + y^2), z = 0, n\pi < x^2 + y^2 < (n+1)\pi.$

69. $x^2 + y^2 = \alpha z^2, x^2 + y^2 = \alpha x \quad (z > 0).$

70. $z(x+y) = ax + by, z = 0, 1 < x^2 + y^2 < 4, \quad (x > 0, y > 0, a > 0, b > 0).$

71. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^k + \frac{z}{c} = 1, z > 0.$ 72. $z^2 = 2xy, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

73. $z = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}, x + y = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

74. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} \quad (y > 0, z > 0).$

75. $z = x^2 y, y^2 = a^2 - 2ax, y^2 = m^2 + 2mx, y = 0, z = 0.$

Найти площади:

76. Части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : az = xy\}$, заключенной внутри цилиндра $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2, z \in \mathbb{R}\}.$

77. Части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, расположенной вне цилиндров $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = ax, z \in \mathbb{R}\}, S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = -ax, z \in \mathbb{R}\}, a > 0.$

78. Части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2az\}$, заключенной внутри цилиндра $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy, z \in \mathbb{R}\}.$

79. Части цилиндра $S \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2, z \in \mathbb{R}\}$, вырезанной плоскостями, заданными уравнениями $x+z=0, x-z=0 \quad (x > 0, y > 0).$

80. Части поверхности $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1\right\}$, отсекаемой плоскостью $xOy.$

81. Части поверхности $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z}{c} = 1\right\}$, вырезанной плоскостями, заданными уравнениями $x = 0, y = 0, z = 0.$

82. Части поверхности $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z\right\}$, вырезанной поверхностью $S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z \geq 0\right\}.$

83. Части поверхности $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z\right\}$, заключенной внутри цилиндра $S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, z \in \mathbb{R}\right\}.$

С помощью тройных интегралов найти объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

84. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3(x^3 + y^3 + z^3), a > 0, y > 0, z > 0.$ 85. $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3(x - y).$

86. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^8 = \frac{z^4}{h^4}.$ 87. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \alpha^2\right)^2 = 4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right), \alpha^2 < 1.$

88. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{h}, x > 0, y > 0, z > 0.$

89. $(a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 = 1, a_3 x + b_3 y + c_3 z = \pm h,$ где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

90. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz.$

91. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0, 0 < a < b).$

92. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. 93. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

94. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

95. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^4 = \frac{xyz}{abc}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

96. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

97. $\sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0. 98. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}.$

Найти координаты центров тяжести однородных пластинок $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченных кривыми, заданными уравнениями:

99. $x^4 + y^4 = x^2 y. 100. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{xy}{ab}. 101. \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0.$

102. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}. 103. (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy, x > 0, y > 0.$

Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей координат Ox и Oy однородных пластинок $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченных кривыми, заданными уравнениями:

104. $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, y = 0 (b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0). 105. \rho = a(1 + \cos \varphi).$

106. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2). 107. xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y (x > 0, y > 0).$

108. Найти момент инерции правильного треугольника со стороной a относительно прямой, проходящей через центр тяжести треугольника и составляющей угол α с его высотой.

Найти координаты центров тяжести однородных тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

109. $h^2(x^2 + y^2) = a^2 z^2, 0 < z < h. 110. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax.$

111. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \pm 1, \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \pm 1, z = 0.$

112. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0). 113. x^2 + y^2 = 2z, x + y = z.$

Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородных тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями (параметры положительны):

114. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c. 115. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{a}.$

116. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$

117. Найти ньютона потенциал в точке $P = (0, 0, z)$ цилиндра $T = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 \leq a^2, 0 \leq \zeta \leq h\}$ постоянной плотности μ_0 .

118. Найти силу притяжения однородным шаровым сектором плотности μ_0 материальной точки с массой, равной единице, помещенной в его вершине, если радиус шаровой поверхности равен r , а угол осевого сечения сектора равен 2α .

§ 4. Интегрирование на многообразиях

4.1. Многообразия в евклидовом пространстве \mathbb{R}^m и их ориентация.

Определение 1. Множество $M \subset \mathbb{R}^m$ называется многообразием размерности $p \leq m$, принадлежащим классу C^1 , если для каждой точки $a = (a_1, \dots, a_m)$, $a \in M$, и некоторой окрестности $S(a, \delta)$ существует окрестность $S(a_p, \delta_1)$ точки $a_p = (a_1, \dots, a_p)$ и такое отображение $\varphi : S(a_p, \delta_1) \rightarrow M \cap S(a, \delta)$ класса C^1 , что $\varphi_j(a_p) = a_j$, $j = \overline{p+1, m}$, причем координаты точек $x \in M \cap S(a, \delta)$ удовлетворяют уравнениям

$$x_j = \varphi_j(x_p) = \varphi_j(x_1, \dots, x_p), \quad x_p \in S(a_p, \delta_1), j = \overline{p+1, m}. \quad (1)$$

Определение 2. Параметрическим представлением множества $M \subset \mathbb{R}^m$ размерности $p \leq m$, принадлежащим классу C^1 , называется отображение $u \mapsto \Phi(u)$ открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$ в пространство \mathbb{R}^m , обладающее следующими свойствами:

1) Φ является гомоморфизмом \mathcal{O} на M ;

2) Φ является отображением $\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$, принадлежащим классу C^1 ;

3) в каждой точке $u = (u_1, \dots, u_p)$, $u \in \mathcal{O}$. отображение $d\Phi(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^m)$ имеет ранг p .

Последнее условие в определении 2 означает, что образ векторного пространства \mathbb{R}^p при этом отображении является векторным подпространством в \mathbb{R}^m размерности p , т.е. векторы $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$, линейно независимы в \mathbb{R}^m , в силу чего хотя бы один из определителей p -го порядка матрицы $\Phi'(u)$, составленной из элементов $\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}(u)$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, p}$), отличен от нуля.

Теорема. Для того чтобы множество $M \subset \mathbb{R}^m$ было многообразием класса C^1 размерности $p \leq m$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in M$ существовала такая открытая окрестность $S(a, \delta)$, чтобы множество $M \cap S(a, \delta)$ допускало параметрическое представление размерности p , принадлежащее классу C^1 .

Если $p = 1$, то говорят, что M есть кривая класса C^1 (или гладкая кривая), а в случае $p = 2$ многообразие M называют поверхностью класса C^1 (или гладкой поверхностью).

В случае, когда $p = m - 1$, многообразие $M \subset \mathbb{R}^m$ называется гиперповерхностью. Если $m = 3$, $p = 2$, то, для того чтобы в окрестности точки $a \in M$ множество $M \subset \mathbb{R}^3$ было гладкой поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два эквивалентных условия:

1) с точностью до перестановки координат x_1, x_2, x_3 в окрестности точки $a = (a_1, a_2, a_3)$ множество M задается уравнением $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$, где φ — функция класса C^1 в окрестности точки (a_1, a_2) и $\varphi(a_1, a_2) = a_3$;

2) в окрестности точки a множество M допускает параметризацию класса C^1

$$x_j = \varphi_j(u_1, u_2), \quad 1 \leq j \leq 3, \quad (u_1, u_2) \in S(a, \delta), \quad x_j(a) = a_j,$$

и при этом хотя бы один из определителей

$$\frac{D(\varphi_2, \varphi_3)}{D(u_1, u_2)}, \quad \frac{D(\varphi_3, \varphi_1)}{D(u_1, u_2)}, \quad \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u_1, u_2)}$$

отличен от нуля для всех точек $(u_1, u_2) \in S(a, \delta)$.

Определение 3. Пусть отображение $u \mapsto \Phi(u)$, $u \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, является параметрическим представлением множества $M \subset \mathbb{R}^m$ размерности $p \leq m$ класса C^1 в окрестности точки $a \in M$, причем $\Phi(a) = a$, $a \in \mathcal{O}$. Тогда образ линейного отображения $d\Phi(a) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть векторное подпространство размерности p . Это подпространство называется касательным пространством к многообразию M в точке a и обозначается $T_a(M)$.

Определение 4. Системой ориентаций \mathcal{U} дифференцируемого многообразия M называется выбор для каждой точки $a \in M$ некоторой ориентации его векторного касательного пространства $T_a(M)$.

Определение 5. Многообразие $M \subset \mathbb{R}^m$ размерности $p \leq m$ класса C^1 называется ориентируемым, если оно имеет хотя бы одну непрерывную систему ориентаций, а выбор такой фиксированной системы ориентаций называется ориентацией многообразия M .

Если многообразие M является связным и ориентируемым, то оно обладает двумя возможными ориентациями, определяемыми выбором ориентации пространства $T_a(M)$.

Если $M \subset \mathbb{R}^m$ — гиперповерхность класса C^1 , то ее трансверсально ориентируют выбором непрерывного поля единичных нормалей $n(x)$, $x \in M$, а выбор одного из двух возможных направлений вектора n в произвольной точке $x \in M$ определяет трансверсальную ориентацию в целом.

Трансверсально ориентируемые гиперповерхности называются двусторонними.

Если, например, гладкая поверхность размерности $p = 2$ в пространстве \mathbb{R}^3 задана уравнением

$$f(x, y, z) = z - \varphi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad D \subset \mathbb{R}^2,$$

то

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y), 1 \right).$$

следовательно, векторы

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \left(\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}} \right), \quad (2)$$

где $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$, определяют два непрерывных поля единичных нормалей к поверхности в каждой ее точке. Выбор определенного знака перед радикалом $\sqrt{1+p^2+q^2}$ в произвольной точке поверхности фиксирует одно из этих полей, а значит, и определенную сторону поверхности, т.е. ориентирует ее трансверсально.

Если гладкая поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ задана параметрически в виде

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2,$$

то

$$\mathbf{n} = \left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right),$$

где

$$A = \frac{\mathcal{D}(y, z)}{\mathcal{D}(u, v)}, \quad B = \frac{\mathcal{D}(z, x)}{\mathcal{D}(u, v)}, \quad C = \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)}.$$

Если $M \subset \mathbb{R}^m$ — гладкая кривая, то ее касательная ориентация называется *направлением обхода кривой*, а положительным считается обход, при котором вектор скорости $\Phi'(t)$, $t \in]a, b[$, в каждой точке t является положительным в смысле ориентации в этой точке. Трансверсальная ориентация этой кривой определяется заданием направления вращения вокруг нее.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ — ориентированное многообразие размерности $p = 2$ класса C^1 , а K — компакт, лежащий на этом многообразии. Обозначим через ∂K границу компакта K .

Определение 6. Компакт $K \subset M$ называется *компактом с краем класса C^1* , если выполнены следующие условия:

1) ∂K в пространстве \mathbb{R}^m является кусочно-гладкой кривой класса C^1 (эта кривая лежит

на многообразии M и имеет в общем случае конечное множество угловых точек);

2) всякая точка $a \in \partial K$, отличная от угловой, имеет такую открытую окрестность $S(a, \delta)$ на многообразии M , что множество $S(a, \delta) \cap \partial K$ распадается на две связные компоненты, одна из которых состоит из точек $S(a, \delta) \cap \partial K$, а другая — из точек окрестности $S(a, \delta)$, принадлежащих компакту K .

Ориентации многообразия M сопоставляем ориентацию гладких дуг края ∂K по следующему правилу: в каждой регулярной точке $a \in \partial K$ рассмотрим в касательной плоскости к многообразию вектор $\tau(a)$, касательный к ∂K в точке a , направленный в сторону, определяемую ориентацией края ∂K , и вектор $\nu(a)$, ортогональный к вектору $\tau(a)$, направленный в ту сторону, где лежат внутренние точки компакта K . В случае, когда $M \subset \mathbb{R}^3$, векторы $\tau(a)$, $\nu(a)$ и $N = [\tau(a), \nu(a)]$ образуют базис пространства \mathbb{R}^3 , ориентирующий его так же, как и канонический базис $\{i, j, k\}$ (рис. 14).

Если $M \subset \mathbb{R}^m$ — многообразие размерности $p \leq m$ класса C^1 , то всякое параметрическое представление Φ класса C^1 открытого множества $M \cap S(a, \delta)$ этого многообразия называется *локальной картой класса C^1* , или просто *картой*. Множество $\Phi(\mathcal{O}) = M \cap S(a, \delta)$ называется *образом* этой карты. Атласом многообразия M называется множество карт открытых множеств из M , образы которых покрывают M .

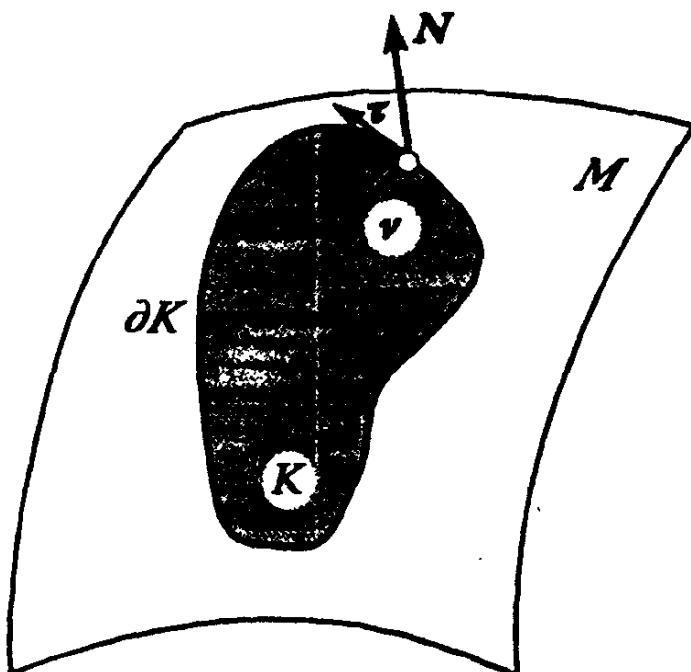


Рис. 14

4.2. Элемент p -мерного объема на многообразии $M \subset \mathbb{R}^m$ размерности $p \leq m$ класса C^1 .

Пусть $u \mapsto \Phi(u)$, $u \in \mathcal{O}$, — C^1 -гомеоморфизм области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$ на область $\Phi(\mathcal{O})$ евклидова пространства \mathbb{R}^m , а отображение $d\Phi(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^m)$ имеет ранг p в каждой точке $u \in \mathcal{O}$. Тогда множество $M = \Phi(\mathcal{O})$ является многообразием размерности p класса C^1 . Отображение $d\Phi(u)$ в точке $u \in \mathcal{O}$ переводит систему p векторов базиса пространства \mathbb{R}^p в систему линейно независимых векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$, из \mathbb{R}^m .

Рассмотрим на множестве \mathcal{O} брус B с вершиной в точке $u \in \mathcal{O}$, построенный на векторах $du_j = e_j$, du_j , $j = \overline{1, p}$, $du_j > 0$, где e_j — векторы стандартного базиса пространства \mathbb{R}^p . Объем этого бруса $V(B)$ равен произведению длин его ребер:

$$dV(B) = du_1 du_2 \dots du_p. \quad (1)$$

Образом вектора du_j при отображении $d\Phi(u)$ является вектор $\Phi'(u)e_j du_j = \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u) du_j$. Следовательно, дифференциал $d\Phi(u)$ отображает брус B на параллелепипед H с вершиной в точке $\Phi(u)$, построенный на векторах $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$.

Определение. Объем $dV(H)$ параллелепипеда H называется элементом p -мерного объема на многообразии M .

Согласно определению, имеем

$$dV(H) = \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}(u), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_p}(u) \right)} du_1 du_2 \dots du_p, \quad (2)$$

где $\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}(u), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_p}(u) \right)$ — определитель Грама от векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$.

Пусть $m = 3$, $p = 2$, S — гладкая двусторонняя поверхность в пространстве \mathbb{R}^3 . Обозначим через x , y , z координаты точки в \mathbb{R}^3 со стандартным базисом $\{i, j, k\}$. В окрестности каждой точки поверхности M рассмотрим ее параметрическое представление $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$, определяемое тремя функциями класса C^1

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

Так как поверхность S является многообразием размерности 2, то ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

равен 2. Поэтому по меньшей мере один из якобианов

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

отличен от нуля во всех точках открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$.

Обозначим через dS элемент двумерного объема многообразия S и будем называть его элементом площади поверхности S^1). Согласно формуле (2), получим

$$dS = \sqrt{\begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle \end{vmatrix}} du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (4)$$

где

$$E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

¹⁾ Об этом уже говорилось в пункте 3.2. Здесь строится мера на произвольном многообразии, частным случаем которой является dS .

— коэффициенты Гаусса.

Из тождества Лагранжа

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$

следует, что $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$, в силу чего имеем

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv. \quad (5)$$

В случае явного задания поверхности

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z(x, y), (x, y) \in D, D \subset \mathbb{R}^2\}$$

получаем

$$\Phi(x, y) = (x, y, z(x, y)), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2, \quad F^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2, \quad EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2.$$

Следовательно,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy. \quad (6)$$

Пусть $m = 3, p = 1, \gamma$ — ориентированная кривая. Элемент одномерного объема называется элементом длины кривой γ . Если координаты x, y, z точек кривой γ являются функциями $x(t), y(t), z(t)$ класса C^1 , производные которых $x'(t), y'(t), z'(t)$ нигде одновременно не обращаются в нуль в области изменения параметра t , то элемент длины кривой $dl(t)$ имеет вид

$$dl(t) = \sqrt{\langle \Phi'(t), \Phi'(t) \rangle} dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt, \quad (7)$$

где $\Phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (в предположении, что обход кривой γ в положительном направлении соответствует возрастанию параметра t).

4.3. Интегрирование на многообразии с краем. Криволинейные и поверхностные интегралы и их применение.

Пусть $K \subset M$ — многообразие с краем ∂K и $K = \Phi(D)$, где $D \subset \mathcal{O}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, — замкнутая область с гладкой границей ∂D , $x \mapsto f(x), x \in K$, — ограниченная числовая функция.

Определение 1. Если функция $\varphi = f \circ \Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на множестве D , то интеграл

$$\int_D \varphi(u) dV(H), \quad (1)$$

где $dV(H)$ — элемент p -мерного объема на многообразии M , называется интегралом от функции f на компакте $K \subset M$ и обозначается

$$\int_K f(x) dK. \quad (2)$$

Таким образом,

$$\int_K f(x) dK \stackrel{\text{def}}{=} \iint_D \cdots \int f(\Phi(u)) \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_p}(u) \right)} du_1 \dots du_p. \quad (3)$$

При $p = 1$ интеграл (3) называется криволинейным интегралом первого рода от функции f на гладкой кривой $\gamma = \Phi(D)$, где $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$, и обозначается

$$\int_{\gamma} f(x) dl. \quad (4)$$

Поскольку $dl(t) = \sqrt{\langle \Phi'(t), \Phi'(t) \rangle} dt = \|\Phi'(t)\| dt = \sqrt{\sum_{i=1}^p \left(\frac{d\Phi_i}{dt}(t) \right)^2} dt$, $a \leq t \leq b$, то

$$\int_{\gamma} f(x) dl = \int_a^b f(\Phi(t)) \sqrt{\sum_{i=1}^p \left(\frac{d\Phi_i}{dt}(t) \right)^2} dt. \quad (5)$$

Если $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), a \leq t \leq b\}$, то

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt. \quad (6)$$

Если $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leq t \leq b\}$, то

$$\int_{\gamma} f(x, y) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (7)$$

Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой γ .

Если $p = 2$, то интеграл (3) называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции f на компакте K . Он не зависит от ориентации многообразия M .

При $p = 2, m = 3$ поверхностный интеграл первого рода обозначается

$$\iint_S f(x, y, z) dS. \quad (8)$$

Если $S = \Phi(D)$, $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $D \subset \mathbb{R}^2$, то, согласно формуле (4), п.4.2, и формуле (3) настоящего пункта, имеем

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (9)$$

Если $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z(x, y), (x, y) \in D\}$, то

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \right)^2} dx dy. \quad (10)$$

Теорема. Интеграл (3) не зависит от выбора параметризации многообразия M .

Поскольку интеграл на многообразии сводится к интегралу Римана, то он обладает свойствами интеграла Римана.

Если кривая $\gamma = \Phi([a, b])$ кусочно-гладкая, то существует такое разбиение $\Pi = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$ сегмента $[a, b]$, что $\gamma = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$, где $\gamma_i = \Phi([t_i, t_{i+1}[)$ — гладкие кривые. Для этого случая полагаем

$$\int_{\gamma} f(x) dl \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} f(x) dl. \quad (11)$$

Если поверхность $M = \Phi(O)$, $O \subset \mathbb{R}^2$, не является гладкой, но существует такое представление $O = \bigcup_{i=1}^n O_i$, где O_i — области в \mathbb{R}^2 без общих внутренних точек, что каждое множество $M_i = \Phi(O_i)$ является поверхностью класса C^1 , то множество M будем называть

кусочно-гладкой поверхностью. Если $K \subset M$ и $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то полагаем

$$\int_K f(x) dK \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{K_i} f(x) dK_i, \quad (12)$$

в предположении, что внутренность каждого компакта K_i является поверхностью класса C^1 и что все интегралы, входящие в сумму в правой части этой формулы, существуют.

Пусть вдоль гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ ($\gamma \subset \mathbb{R}^2$) распределена масса с линейной плотностью $f(x, y, z)$ ($f(x, y)$), интегрируемой на γ . Тогда масса m этой кривой численно равна криволинейному интегралу первого рода

$$m = \int_{\gamma} f(x, y, z) dl \quad \left(m = \int_{\gamma} f(x, y) dl \right). \quad (13)$$

Если на гладкой или кусочно-гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ распределена масса с поверхностью плотностью $f(x, y, z)$, интегрируемой на S , то интеграл (8) равен численному значению массы этой поверхности.

Статическими моментами M_x, M_y и *моментами инерции* I_x, I_y относительно осей координат Ox и Oy гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, вдоль которой распределена масса с линейной плотностью $p(x, y)$, интегрируемой на γ , называются интегралы

$$M_x = \int_{\gamma} yp(x, y) dl, \quad M_y = \int_{\gamma} xp(x, y) dl, \quad I_x = \int_{\gamma} y^2 p(x, y) dl, \quad I_y = \int_{\gamma} x^2 p(x, y) dl, \quad (14)$$

а координаты центра тяжести этой кривой вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{1}{m} \int_{\gamma} xp(x, y) dl, \quad y_C = \frac{1}{m} \int_{\gamma} yp(x, y) dl, \quad (15)$$

где $m = \int_{\gamma} p(x, y) dl$ — масса кривой γ .

Если кривая γ однородна, то полагают $p(x, y) = 1$, а ее статические моменты и моменты инерции относительно осей координат называются *геометрическими*.

Статическими моментами $M_{xOy}, M_{yOz}, M_{zOx}$ относительно координатных плоскостей гладкой или кусочно-гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, по которой распределена масса с поверхностью плотностью $p(x, y, z)$, интегрируемой на S , называются интегралы

$$M_{xOy} = \iint_S zp(x, y, z) dS, \quad M_{yOz} = \iint_S xp(x, y, z) dS, \quad M_{zOx} = \iint_S yp(x, y, z) dS, \quad (16)$$

а координаты центра тяжести $C(x_C, y_C, z_C)$ этой поверхности вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{1}{m} \iint_S xp(x, y, z) dS, \quad y_C = \frac{1}{m} \iint_S yp(x, y, z) dS, \quad z_C = \frac{1}{m} \iint_S zp(x, y, z) dS, \quad (17)$$

где $m = \iint_S p(x, y, z) dS$ — масса поверхности S .

Пусть m_0 — масса, сосредоточенная в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, не лежащей на поверхности S . Тогда сила \mathbf{F} , с которой материальная поверхность S притягивает материальную точку с массой m_0 , может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{F} = \kappa m_0 \iint_S p(x, y, z) \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS, \quad (18)$$

где κ — постоянная тяготения,

$$\tau = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \tau = |\tau| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Моментом инерции I_z материальной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ относительно оси Oz называется интеграл

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) p(x, y, z) dS. \quad (19)$$

Дадим определение криволинейных и поверхностных интегралов второго рода.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ — ориентированное многообразие размерности $p < m$ класса C^1 , заданное в виде $M = \Phi(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, где Φ — отображение класса C^1 области \mathcal{O} в евклидово пространство \mathbb{R}^m . Если M — многообразие размерности $p = 1$ и $\gamma \in M$, где $\gamma = \Phi([a, b])$ — гладкая кривая, то касательная ориентация этой кривой называется *направлением ее обхода*, а *положительным* считается обход, при котором вектор $\Phi'(t)$ в каждой точке $t \in [a, b]$ является положительным в смысле ориентации в этой точке. Поскольку кривая γ принадлежит классу C^1 , то

$$\|\Phi'(t)\| \neq 0 \forall t \in [a, b], \text{ где } \|\Phi'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\Phi'_i(t))^2}.$$

Пусть $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(x)$, $x \in \gamma$, — вектор-функция с ограниченными компонентами F_i ($i = 1, m$), $\tau(x) = \frac{\Phi'(t)}{\|\Phi'(t)\|} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m)$ — единичный касательный вектор к кривой γ в точке $x = \Phi(t)$, $t \in [a, b]$, положительный в смысле ориентации этой кривой. Рассмотрим числовую функцию $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{F}(x), \tau(x) \rangle$, $x \in \gamma$, где $\langle \mathbf{F}, \tau \rangle$ — скалярное произведение векторов \mathbf{F} и τ , и предположим, что существует криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}(x), \tau(x) \rangle dl = \int_{\gamma} (F_1(x) \cos \alpha_1 + F_2(x) \cos \alpha_2 + \dots + F_m(x) \cos \alpha_m) dl. \quad (20)$$

Определение 2. Интеграл (20) называется *общим криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции \mathbf{F} на ориентированной кривой γ* и обозначается

$$\int_{\gamma} F_1(x) dx_1 + F_2(x) dx_2 + \dots + F_m(x) dx_m. \quad (21)$$

Исходя из определения криволинейного интеграла первого рода, получаем

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}(x), \tau(x) \rangle dl = \int_a^b \left\langle \mathbf{F}(\Phi(t)), \frac{\Phi'(t)}{\|\Phi'(t)\|} \right\rangle \|\Phi'(t)\| dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m F_i(\Phi(t)) \Phi'_i(t) dt, \quad (22)$$

если положительному обходу кривой γ соответствует возрастание параметра t .

Таким образом, согласно определению, имеем

$$\int_{\gamma} \sum_{i=1}^m F_i(x) dx_i = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m F_i(\Phi(t)) \Phi'_i(t) \right) dt. \quad (23)$$

Наряду с общим криволинейным интегралом второго рода рассматривают также криволинейные интегралы частного вида

$$\int_{\gamma} F_i(x) dx_i. \quad (24)$$

Если кривая γ замкнута, то криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_{\gamma} \langle \mathbf{F}(x), \tau(x) \rangle dl \quad (25)$$

называется циркуляцией вектора \mathbf{F} вдоль кривой γ .

Если $M \subset \mathbb{R}^m$ — многообразие размерности $p = m - 1$, т.е. гиперповерхность класса C^1 , трансверсально ориентированная выбором одного из двух непрерывных полей единичных нормалей $n(x)$, $x \in M$, то $\dot{n}(x) = \frac{N(x)}{\pm \|N(x)\|}$, где $N(x)$ — вектор нормали к гиперповерхности M в точке $x = \Phi(u)$, $u \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{m-1}$,

$$\|N(x)\| = \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m-1}}(u) \right)}, \quad \Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m-1}}(u) \right)$$

— определитель Грама от векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, m-1}$.

Предположим, что на компакте $K \subset M$ с краем ∂K , где $K = \Phi(D)$, $D \subset \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{m-1}$, задана вектор-функция $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x})$ с ограниченными компонентами $F_i(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, m}$, и что существует поверхностный интеграл первого рода

$$\int_K \langle \mathbf{F}(x), n(x) \rangle dK. \quad (26)$$

Определение 3. Интеграл (26) называется общим поверхностным интегралом второго рода на ориентированной гиперповерхности K и обозначается

$$\int_K F_1(x) dx_2 dx_3 \dots dx_m + F_2(x) dx_1 dx_3 \dots dx_m + \dots + F_m(x) dx_1 dx_2 \dots dx_{m-1}. \quad (27)$$

Если $K \subset \mathbb{R}^3$, $K = S = \Phi(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$, $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, то, согласно определению, имеем

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy &= \iint_S \langle \mathbf{F}(x, y, z), n(x, y, z) \rangle dS = \\ &= \pm \iint_D (P(\Phi(u, v))A + Q(\Phi(u, v))B + R(\Phi(u, v))C) du dv, \end{aligned} \quad (28)$$

поскольку $dS = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, $B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$, $C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $n(x, y, z) = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C)$ (см. формулу (3), п.4.1, и формулу (5), п.4.2).

Если $S = \Phi(D)$, где $\Phi(x, y) = (x, y, z(x, y))$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, то формула (28) принимает вид

$$\begin{aligned} \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \\ &= \pm \iint_D \left(-\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)P(x, y, z(x, y)) - \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)Q(x, y, z(x, y)) + R(x, y, z(x, y)) \right) dx dy, \end{aligned} \quad (29)$$

поскольку в рассматриваемом случае имеем

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial y}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Криволинейный интеграл второго рода имеет физический смысл работы силового векторного поля \mathbf{F} , а поверхностный интеграл второго рода — потока векторного поля \mathbf{F} через поверхность S .

Заметим, что криволинейные и поверхностные интегралы второго рода зависят от ориентации кривой γ и поверхности S : при изменении направления обхода кривой γ и изменении трансверсальной ориентации поверхности S скалярные произведения $\langle \mathbf{F}, \tau \rangle, \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle$ меняют знаки на противоположные.

4.4. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора пути интегрирования.

Если дифференциальная форма $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u , т.е. в некоторой области, содержащей кривую $\gamma = AB$, выполняется равенство $Pdx + Qdy = du$, то интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy = u(B) - u(A) \quad (1)$$

не зависит от выбора пути интегрирования, соединяющего точку A с точкой B .

Если функции P и Q определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, в которой выполняется равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2)$$

то дифференциальная форма $\omega = Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции u и криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy \quad (3)$$

не зависит от выбора пути интегрирования из точки A в точку B , лежащего в D . Равенство (2) является необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла (3) от пути интегрирования, лежащего в односвязной области D .

Для того чтобы дифференциальная форма

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

была полным дифференциалом некоторой функции w в замкнутой односвязной области $K \subset \mathbb{R}^3$, необходимо и достаточно, чтобы в K выполнялись условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (4)$$

В этом случае интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz \quad (5)$$

не зависит от выбора пути интегрирования, если кривая $\gamma = AB$ лежит в K .

Если в односвязных замкнутых областях $D \subset \mathbb{R}^2$ и $K \subset \mathbb{R}^3$ выполняются условия (2) и (4), то

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du, \quad P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = dw,$$

а функции u и w можно найти по формулам

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t)dt + C, \quad (6)$$

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt + C, \quad (7)$$

где (x_0, y_0) и (x_0, y_0, z_0) — фиксированные точки областей D и K , C — произвольная постоянная.

Вычислить следующие криволинейные интегралы первого рода:

$$123. I = \int_{\gamma} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) dl, \text{ где } \gamma \text{ — дуга астроиды, заданной уравнением } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

$a > 0$.

◀ Параметрические уравнения астроиды имеют вид

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

поэтому, согласно формуле (7), п.4.3, имеем

$$I = 3a^{\frac{7}{3}} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) |\sin t \cos t| dt,$$

так как

$$x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}} (\cos^4 t + \sin^4 t), \quad dl = \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = 3a |\sin t \cos t| dt.$$

Поскольку подынтегральная функция является $\frac{\pi}{2}$ -периодической, то

$$I = 12a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sin t \cos t dt = 2a^{\frac{7}{3}} (\cos^6 t - \sin^6 t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^{\frac{7}{3}}. \blacktriangleright$$

$$124. I = \int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl, \text{ где } \gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = ax\}, a > 0.$$

◀ Перейдя к полярным координатам, получим уравнение окружности γ в виде $\rho = a \cos \varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Взяв в качестве параметра полярный угол φ , найдем параметрические уравнения окружности γ :

$$x = a \cos^2 \varphi, \quad y = a \cos \varphi \sin \varphi \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

На окружности γ имеем $\sqrt{x^2 + y^2} = a \cos \varphi$. Поскольку $dl = a d\varphi$, то, согласно формуле (7), п.4.3, получим

$$I = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2a^2. \blacktriangleright$$

$$125. I = \int_{\gamma} x^2 dl, \text{ где } \gamma \text{ — окружность, полученная в результате пересечения сферы}$$

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ и плоскости, заданной уравнением $x + y + z = 0$.

◀ Плоскость проходит через начало координат и пересекается со сферой S по окружности радиуса a , длина которой равна $2\pi a$. Производя циклические перестановки, легко убедиться в справедливости равенств

$$\int_{\gamma} x^2 dl = \int_{\gamma} y^2 dl = \int_{\gamma} z^2 dl,$$

из которых получаем интеграл I в виде

$$I = \frac{1}{3} \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) dl.$$

На окружности γ выполнено равенство $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, в силу которого имеем $I = \frac{2}{3}\pi a^3$, так как

$$\int_{\gamma} dl = 2\pi a. \blacktriangleright$$

126. $I = \int_{\gamma} z dl$, где γ — кривая, полученная в результате пересечения поверхностей,

заданных уравнениями $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$, пробегаемая от точки $O = (0, 0, 0)$ до точки $A = (a, a, a\sqrt{2})$.

◀ В качестве параметра выберем переменную x . Тогда параметрические уравнения кривой γ примут вид

$$x = x, \quad y = \sqrt{ax}, \quad z = \sqrt{x^2 + ax} \quad (0 \leq x \leq a).$$

Поскольку

$$dz = \frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax}} dx, \quad dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}} dx, \quad dl = \sqrt{1+(y'(x))^2+(z'(x))^2} dx,$$

то, применив формулу (6), п.4.3, получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{\left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{17}{32}a^2} dx = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right) \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2} - \frac{17}{32}a^2 \ln \left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}} + \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}\right) \right) \Big|_0^a = \\ &= \frac{a^2}{256\sqrt{2}} \left(100\sqrt{38} - 72 - 17 \ln \frac{25+4\sqrt{38}}{17} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

Найти длины пространственных кривых (параметры считать положительными), заданных уравнениями:

127. $(x-y)^2 = a(x+y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ от точки $O = (0, 0, 0)$ до точки $A = (x_0, y_0, z_0)$.

◀ Параметризуем кривую, полагая $x+y = t(x-y)$. Тогда из уравнений кривой получаем $x-y = at$, $x+y = at^2$, $\frac{9}{8}z^2 = a^2t^3$ ($t \geq 0$), откуда

$$x = \frac{a}{2}(t^2 + t), \quad y = \frac{a}{2}(t^2 - t), \quad |z| = \frac{2\sqrt{2}}{3}at^{\frac{3}{2}}.$$

При этом точке O соответствует значение $t = 0$, точке A — значение $t_0 = \frac{1}{2}(\frac{3}{a})^{\frac{2}{3}}z_0^{\frac{2}{3}}$. Обозначая через L искомую длину кривой, получим

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{t_0} \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2} = \sqrt{2}a \int_0^{t_0} \left(t + \frac{1}{2}\right) dt = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}(t^2 + t) \Big|_0^{t_0} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

128. $x^2 + y^2 = cz$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ от точки $O = (0, 0, 0)$ до точки $A = (x_0, y_0, z_0)$.

◀ Параметризуем кривую, взяв в качестве параметра полярный угол φ . Полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получаем $\rho^2 = cz$, $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$, откуда $z = c\varphi$, $\rho^2 = c^2\varphi$. Параметрические уравнения кривой принимают вид

$$x = c\sqrt{\varphi} \cos \varphi, \quad y = c\sqrt{\varphi} \sin \varphi, \quad z = c\varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{z_0}{c}\right).$$

Вычисляя дифференциал кривой $dl = c \left(\sqrt{\varphi} + \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \right) d\varphi$ и интегрируя полученное выражение в пределах от 0 до $\frac{z_0}{c}$, находим

$$L = \sqrt{cz_0} \left(\frac{2z_0}{3c} + 1 \right). \blacksquare$$

129. Найти массу m дуги параболы $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 2px, 0 \leq x \leq \frac{p}{2}\}$, если ее линейная плотность $p(x, y)$ в текущей точке (x, y) равна $|y|$.

◀ Вычислим дифференциал dl по формуле $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx$. Принимая во внимание равенство $p(x, y) = |y| = \sqrt{2px}$ и симметрию точек параболы относительно оси Ox , находим

$$m = \int_{\gamma} \rho(x, y) dl = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px + p^2} dx = \frac{2}{3p} (2px + p^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{2}{3} p^2 (2\sqrt{2} - 1). \blacksquare$$

130. Найти массу m кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, заданной уравнениями $x = at$, $y = \frac{at^2}{2}$, $z = \frac{at^3}{3}$ ($0 \leq t \leq 1$), линейная плотность которой меняется по формуле $p(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

◀ Согласно формуле (13), п.4.3, имеем

$$m = \int_{\gamma} p(x, y, z) dl = \int_0^1 p(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Поскольку $p(x(t), y(t), z(t)) = t$, $dl = a\sqrt{1+t^2+t^4} dt$, то

$$\begin{aligned} m &= a \int_0^1 t \sqrt{1+t^2+t^4} dt = \frac{a}{2} \int_0^1 \sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} d\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{a}{4} \left(\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1+t^2+t^4} + \frac{3}{4} \ln \left(t^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{1+t^2+t^4} \right) \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{a}{8} \left((3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2} \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

131. Найти координаты центра тяжести однородной кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, заданной уравнением $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ от точки $A = (0, a)$ до точки $B = (b, h)$ ($a > 0$, $b > 0$, $h > 0$).

◀ Воспользуемся формулами (15), п.4.3. Поскольку кривая γ однородна, то в формулах (15), п.4.3, следует взять $p(x, y) = 1$. Имеем

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx,$$

$$m = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = a \sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1} = \sqrt{h^2 - a^2},$$

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_{\gamma} x dl = \frac{1}{m} \int_0^b x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{m} \left(ax \operatorname{sh} \frac{x}{a} - a^2 \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right) \Big|_0^b = \frac{a}{m} \left(b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a} + a \right) =$$

$$= \frac{a}{m} \left(b \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} - h + a \right) = \frac{a}{m} \left(\frac{b}{a} \sqrt{h^2 - a^2} - h + a \right) = b - a \sqrt{\frac{h-a}{h+a}},$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_{\gamma} y dl = \frac{1}{m} \int_0^b y(x) \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{a}{m} \int_0^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{a}{2m} \int_0^b \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a} \right) dx =$$

$$= \frac{a}{2m} \left(x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \right) \Big|_0^b = \frac{a}{2m} \left(b + a \operatorname{sh} \frac{b}{a} \operatorname{ch} \frac{b}{a} \right) = \frac{a}{2m} \left(b + \frac{h \sqrt{h^2 - a^2}}{a} \right) = \frac{h}{2} + \frac{ab}{2 \sqrt{h^2 - a^2}}. \blacktriangleright$$

132. Найти координаты центра тяжести контура однородного сферического треугольника

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

◀ Сферический треугольник однороден, в силу чего имеем

$$x_C = \frac{1}{m} \int_{\gamma} x dl, \quad y_C = \frac{1}{m} \int_{\gamma} y dl, \quad z_C = \frac{1}{m} \int_{\gamma} z dl,$$

где γ — контур треугольника, $m = \frac{3}{2}\pi a$ — его длина.

В плоскости yOz выполняется тождество $x \equiv 0$, поэтому

$$x_C = \frac{1}{m} \left(\int_{\gamma_1} x dl + \int_{\gamma_2} x dl \right),$$

где γ_1 — часть кривой γ , лежащая в плоскости xOy , γ_2 — та ее часть, которая лежит в плоскости xOz . Кривые γ_1 и γ_2 можно задать соответственно параметрическими уравнениями

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

$$x = a \cos \psi, \quad y = a \sin \psi \quad \left(0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

причем $dl = a d\varphi$ на γ_1 и $dl = a d\psi$ на γ_2 . Поэтому

$$\begin{aligned} & \text{6 Зак. 117} \\ & \text{--- III} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \right) = \frac{2a^2}{m} = \frac{4a}{3\pi}. \end{aligned}$$

Аналогично, $y_C = z_C = \frac{4a}{3\pi}$. ◀

133. Найти статические моменты дуги γ однородной астроиды, заданной уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, относительно осей координат.

◀ Воспользуемся формулами (14), п. 4.3, полагая в них $p(x, y) = 1$. Записав параметрические уравнения астроиды в виде $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) и принимая во внимание решение примера 123, имеем

$$M_x = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \frac{3}{5}a^2, \quad M_y = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt = \frac{3}{5}a^2. \blacktriangleright$$

134. Найти момент инерции однородной окружности $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$ относительно ее диаметра.

◀ Момент инерции однородной окружности γ совпадает с I_x или I_y (см. формулы (14), п. 4.3), если система координат xOy выбрана так, что диаметр окружности γ является огрезком оси Ox , а начало координат совпадает с центром окружности. Принимая во внимание однородность окружности γ , имеем

$$I = I_x = \int_{\gamma} y^2 dl = a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi a^3$$

(при вычислении интеграла воспользовались параметрическими уравнениями окружности $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, и равенством $dl = a d\varphi$). ►

135. Найти полярный момент инерции

$$I_0 = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) dl$$

относительно точки $O = (0, 0)$ однородного контура квадрата

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = a\}.$$

◀ Контур квадрата γ образован отрезками прямых, заданных уравнениями $y = \pm a$, $x = \pm a$. Если $x = \pm a$, то $x^2 + y^2 = a^2 + y^2$, $-a \leq y \leq a$, $dl = dy$. Если же $y = \pm a$, то $x^2 + y^2 = x^2 + a^2$, $-a \leq x \leq a$, $dl = dx$.

Заменив криволинейный интеграл I_0 соответствующим интегралом Римана, получим

$$I_0 = 2 \left(\int_{-a}^a (a^2 + y^2) dy + \int_{-a}^a (a^2 + x^2) dx \right) = \frac{32}{3} a^3. \blacktriangleright$$

136. Найти моменты инерции относительно координатных осей одного витка однородной винтовой линии

$$\gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{ht}{2\pi}, 0 \leq t \leq 2\pi \right\}.$$

◀ Обозначив через r_x , r_y , r_z расстояния от точки $M = (x, y, z)$, лежащей на однородной кривой γ , до соответствующих осей координат, можем написать формулы для вычисления моментов инерции:

$$I_x = \int_{\gamma} r_x^2 dl, \quad I_y = \int_{\gamma} r_y^2 dl, \quad I_z = \int_{\gamma} r_z^2 dl.$$

Воспользуемся очевидными равенствами $r_x^2 = y^2 + z^2$, $r_y^2 = x^2 + z^2$, $r_z^2 = x^2 + y^2$; следовательно, $r_x^2 = a^2 \sin^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2}$, $r_y^2 = a^2 \cos^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2}$, $r_z^2 = a^2$. Поскольку

$$dl = \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2} = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi} dt,$$

то

$$I_x = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a^2 \sin^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2} \right) dt = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2},$$

$$I_y = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cos^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2} \right) dt = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}.$$

$$I_s = \frac{a^2 \sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = a^2 \sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}. \blacktriangleright$$

137. Вычислить логарифмический потенциал простого слоя

$$u(x, y) = \oint_{\gamma} \times \ln \frac{1}{r} dl,$$

где $\times = \text{const}$, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ и контур γ является окружностью, заданной уравнением $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

◀ Перейдем к новой системе координат $\xi' O \eta'$, выбрав последнюю так, чтобы ее начало совпадало с началом координат системы $\xi O \eta$ и чтобы точка (x, y) находилась на оси $O\xi'$. Тогда получим

$$u(x, y) = \oint_{\gamma'} \times \ln \frac{1}{r'} dl',$$

где $\gamma' = \{(\xi', \eta') \in \mathbb{R}^2 : \xi'^2 + \eta'^2 = R^2\}$, $r' = \sqrt{(\xi' - \rho)^2 + \eta'^2}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Параметрические уравнения окружности имеют вид $\xi' = R \cos \varphi$, $\eta' = R \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а $dl = R d\varphi$. Следовательно,

$$u(x, y) = -\frac{R \times}{2} \int_0^{2\pi} \ln(R^2 - 2R\rho \cos \varphi + \rho^2) d\varphi = -2\pi R \times \ln R - \frac{R \times}{2} \int_0^{2\pi} \ln \left(1 - \frac{2\rho}{R} \cos \varphi + \frac{\rho^2}{R^2}\right) d\varphi.$$

Обозначив $\frac{\rho}{R} = \alpha$, вычислим интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2) d\varphi.$$

Дифференцируя по параметру α , получаем

$$I'(\alpha) = 2 \int_0^{2\pi} \frac{(\alpha - \cos \varphi) d\varphi}{1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{2z\bar{z} - (z + \bar{z})}{(1 - z)(1 - \bar{z})} d\varphi,$$

где $z = \alpha e^{i\varphi}$, $\bar{z} = \alpha e^{-i\varphi}$. Если $\alpha < 1$, то

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(\frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} \right) d\varphi = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} (z + z^2 + \dots + z^n + \dots + \bar{z} + \bar{z}^2 + \dots + \bar{z}^n + \dots) d\varphi = \\ &= -\frac{2}{\alpha} \int_0^{2\pi} (\alpha \cos \varphi + \alpha^2 \cos 2\varphi + \dots + \alpha^n \cos n\varphi + \dots) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Почленное интегрирование ряда возможно, поскольку он сходится равномерно. Таким образом, $I(\alpha) = C$, $C = I(0) = 0$, в силу чего имеем $u(x, y) = -2\pi R \times \ln R = 2\pi R \times \ln \frac{1}{R}$, если $\rho < R$. Если $\rho > R$, то $\alpha > 1$, и при этом получим

$$I'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{1}{\bar{z}}} \right) d\varphi = \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots + \frac{1}{\bar{z}} + \dots + \frac{1}{\bar{z}^n} + \dots \right) d\varphi =$$

Гл. 2. Кратные и криволинейные интегралы

$$= \frac{2}{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\cos \varphi}{\alpha} + \frac{\cos 2\varphi}{\alpha^2} + \dots + \frac{\cos n\varphi}{\alpha^n} + \dots \right) d\varphi = \frac{4\pi}{\alpha},$$

$$I(\alpha) = 4\pi \ln \alpha + C, \quad C = I(1) = 0, \quad I(\alpha) = 4\pi \ln \alpha,$$

$$u(x, y) = -2\pi R \kappa \ln R - 2\pi R \kappa \ln \frac{\rho}{R} = 2\pi R \kappa \ln \frac{1}{\rho}. \blacktriangleright$$

Вычислить следующие криволинейные интегралы второго рода, взятые вдоль указанных кривых в направлении возрастания параметра:

$$138. I = \int_{\gamma} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy, \text{ где } \gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, |x| \leq 1\}.$$

◀ Воспользуемся формулой (7), п.4.3, где роль параметра t играет переменная x . Подставляя в подынтегральное выражение $y = x^2$ и $dy = 2x dx$, получаем интеграл Римана

$$I = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4) dx = -\frac{14}{15}. \blacktriangleright$$

$$139. I = \int_{\gamma} (2a - y) dx + x dy, \text{ где } \gamma \text{ — арка циклоиды, заданной уравнениями } x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

◀ На кривой γ выполняется равенство

$$(2a - y) dx + x dy = (2a - a(1 - \cos t)) d(a(t - \sin t)) + a(t - \sin t) d(a(1 - \cos t)) = a^2 t \sin t dt.$$

Применив формулу (23), п.4.3, получим

$$I = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = a^2 (t \cos t|_0^{2\pi} + \sin t|_0^{2\pi}) = -2\pi a^2. \blacktriangleright$$

$$140. \oint_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}, \text{ где } ABCDA \text{ — контур квадрата с вершинами } A = (1, 0), B = (0, 1), C = (-1, 0), D = (0, -1).$$

◀ Из свойства аддитивности криволинейного интеграла следует равенство

$$I = \int_{AB} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{BC} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{CD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{DA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}.$$

На отрезках AB и CD выполняются соответственно равенства $x + y = 1$ и $x + y = -1$, $dx + dy = 0$, откуда следует, что криволинейные интегралы на этих отрезках равны нулю. На отрезках BC и DA соответственно имеем $y - x = 1$ и $y - x = -1$, $dy = dx$, $|x| + |y| = 1$. Если $(x, y) \in BC$, то x убывает от 0 до -1 ; если $(x, y) \in DA$, то x возрастает от 0 до 1. Следовательно,

$$I = 2 \int_0^{-1} dx + 2 \int_0^1 dx = -2 + 2 = 0. \blacktriangleright$$

141. Доказать, что для криволинейного интеграла справедлива оценка

$$\left| \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \right| \leq LM,$$

где L — длина кривой γ и $M = \max_{(x, y) \in \gamma} \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}$.

◀ Без ограничения общности можно считать кривую γ гладкой (если γ — кусочно-гладкая кривая, то интеграл можно представить в виде суммы интегралов по гладким кривым). Согласно определению криволинейного интеграла второго рода, имеем

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\gamma} (\mathbf{F}, \tau) dl,$$

где $\mathbf{F} = (P, Q)$, τ — единичный касательный вектор к кривой γ . Из оценки $|(\mathbf{F}, \tau)| \leq |F| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ получаем неравенство

$$\left| \int_{\gamma} P dx + Q dy \right| \leq \int_{\gamma} \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)} dl \leq \max_{(x, y) \in \gamma} \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)} \int_{\gamma} dl = LM. ▶$$

142. Оценить интеграл $I_R = \oint_{\gamma} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$.

Доказать, что $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0$.

◀ Для оценки интеграла воспользуемся неравенством, доказанным в предыдущем примере. Здесь

$$P(x, y) = \frac{y}{(x^2 + xy + y^2)^2}, \quad Q(x, y) = \frac{-x}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

$$\sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

Следовательно, $I_R \leq 2\pi R \cdot \max_{(x, y) \in \gamma} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + xy + y^2)^2}$.

Приняв во внимание параметрические уравнения окружности $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, получим оценку

$$\max_{(x, y) \in \gamma} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + xy + y^2)^2} = \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \frac{1}{R^3 (1 + \sin \varphi \cos \varphi)^2} = \frac{4}{R^3},$$

которая следует из неравенства

$$\frac{1}{(1 + \sin \varphi \cos \varphi)^2} = \frac{4}{(2 + \sin 2\varphi)^2} \leq 4, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Окончательно получаем оценку $|I_R| \leq \frac{8\pi}{R^3}$, из которой следует предельное соотношение $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0$. ▶

Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

143. $I = \int_{\gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, где

γ — окружность, полученная в результате пересечения сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ и плоскости S_1 , заданной уравнением $y = x \operatorname{tg} \alpha$, пробегаемая в направлении против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x .

◀ Окружность γ с центром в начале координат лежит в плоскости S_1 , и ее радиус равен a . Пусть φ — угол между радиусом окружности и прямой, заданной уравнениями $y = x \operatorname{tg} \alpha$, $z =$

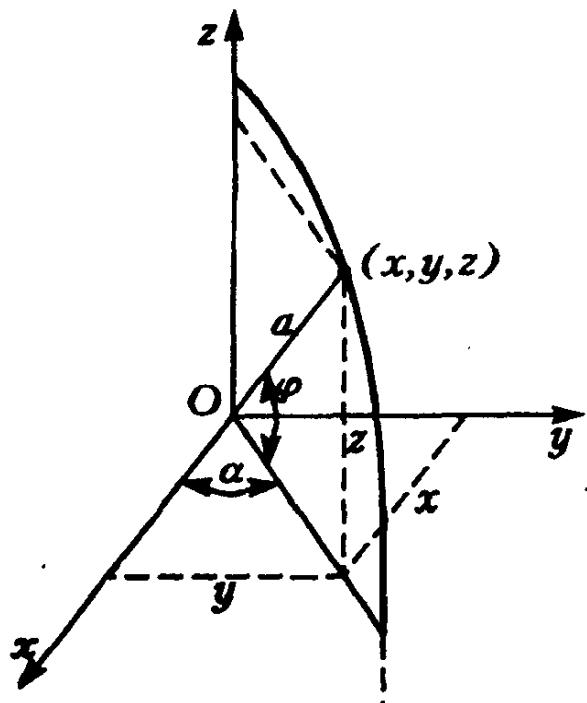


Рис. 15

0 (рис. 15). Тогда можем параметризовать окружность γ следующим образом:

$$\begin{aligned}x &= a \cos \alpha \cos \varphi, \quad y = a \sin \alpha \cos \varphi, \quad z = a \sin \varphi \\(0 &\leq \varphi \leq 2\pi).\end{aligned}$$

Приводя криволинейный интеграл к интегралу Римана, получим

$$I = a^2 \int_0^{2\pi} (\cos \alpha - \sin \alpha) d\varphi = 2\sqrt{2}\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right). \blacktriangleright$$

144. $I = \int_{\gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, где γ — часть кривой Вивиани $\gamma = S_1 \cap S_2$, $S_1 =$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = ax\}$, $z \geq 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной части ($x > a$) оси Ox .

◀ Переходя к полярным координатам, получим уравнение кривой Вивиани в виде

$$\rho = a \cos \varphi, \quad z = \sqrt{a^2 - \rho^2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Принимая во внимание это уравнение и выбирая в качестве параметра полярный угол φ , имеем

$$x = a \cos^2 \varphi, \quad y = a \sin \varphi \cos \varphi, \quad z = a |\sin \varphi| \quad \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Для вычисления криволинейного интеграла I приведем его к интегралу Римана, вычислив значение подынтегрального выражения в точках параметризованной кривой γ . Получим

$$\begin{aligned}dx &= -2a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \quad dy = a(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi, \quad dz = \operatorname{sgn} \varphi (a \cos \varphi) d\varphi, \quad \varphi \neq 0, \\y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= a^3 (-2 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \sin^4 \varphi + \operatorname{sgn} \varphi \cos^5 \varphi) d\varphi, \quad \varphi \neq 0.\end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \operatorname{sgn} \varphi \cos^5 \varphi) d\varphi = 0,$$

находим

$$\begin{aligned}I &= a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi - 2 \sin^4 \varphi) d\varphi = \\&= a^3 \left(B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - 2B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \right) = a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\pi a^3}{4}. \blacktriangleright\end{aligned}$$

145. $I = \int_{\gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$,

где γ — контур, который ограничивает часть сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, пробегаемый так, что внешняя сторона этой поверхности остается слева.

◀ Представим интеграл на ориентированной кривой γ в виде суммы интегралов по ориентированным кривым γ_j , $j = 1, 2, 3$, лежащим в координатных плоскостях (рис. 16). Каждая кривая γ_j представляет собой четверть

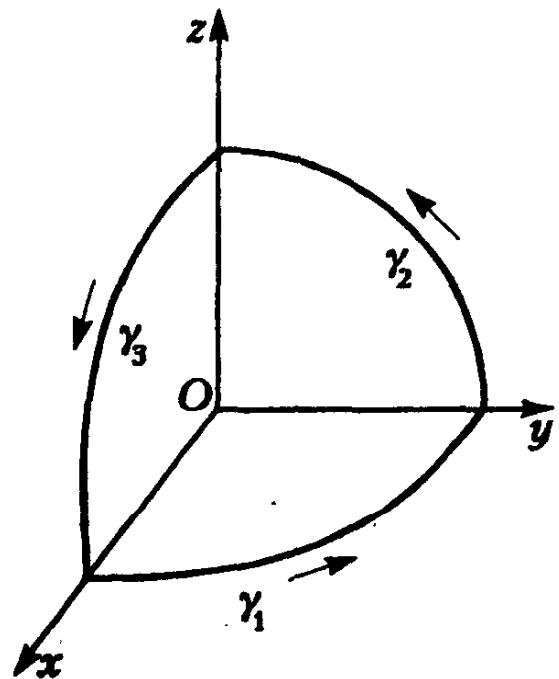


Рис. 16

окружности радиуса 1 с центром в начале координат. В плоскости xOy выполняются равенства $z = 0$, $dz = 0$, в силу чего на кривой γ подынтегральное выражение ω принимает вид $\omega = y^2 dx - x^2 dy$. Записав параметрические уравнения кривой γ_1 в виде

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

получим

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_1} y^2 dx - x^2 dy = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi) d\varphi = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = -\frac{4}{3}.$$

Вполне очевидно, $\int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = -\frac{4}{3}$. Следовательно, $I = 3 \int_{\gamma_1} \omega = -4$. ►

При решении примеров 146—151 будем пользоваться независимостью криволинейного интеграла второго рода от выбора пути интегрирования, соединяющего две точки, если подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции в односвязной области D , содержащей кривую, по которой вычисляется интеграл. Если известна такая функция u , что $du = P dx + Q dy$, то можем сразу написать

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy = u(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0).$$

Если вид функции u нам неизвестен и в данной односвязной области D выполнено равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то, пользуясь свойством независимости криволинейного интеграла от выбора пути интегрирования из точки (x_0, y_0) в точку (x_1, y_1) , лежащего в D , будем брать в качестве пути ломаную, состоящую из отрезков прямых, параллельных координатным осям и не пересекающих границу области D . Тогда, в силу того что $dy = 0$, если $y = y_0$, и $dx = 0$, если $x = x_1$, получим формулу

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy. \quad (\text{A})$$

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

$$146. I = \int_{(0, 1)}^{(3, -4)} x dx + y dy.$$

◀ Поскольку $x dx + y dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2)$, то

$$I = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \Big|_{(0, 1)}^{(3, -4)} = 12. \quad \blacktriangleright$$

$$147. I = \int_{(1, -1)}^{(1, 1)} (x - y)(dx - dy).$$

◀ Из равенства $(x - y)(dx - dy) = (x - y) d(x - y) = \frac{1}{2} d(x - y)^2$ получаем

$$I = \frac{(x - y)^2}{2} \Big|_{(1, -1)}^{(1, 1)} = -2. \quad \blacktriangleright$$

$$148. \int_{(2, 1)}^{(1, 2)} \frac{y dx - x dy}{x^2}$$

вдоль путей, не пересекающих оси Oy .

◀ Здесь $P(x, y) = \frac{y}{x^2}$, $Q(x, y) = -\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, поэтому $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$. Следовательно, в любой односвязной области, не содержащей точек оси Oy , подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции. Применив формулу (A), получим

$$I = \int_2^1 \frac{dx}{x^2} - \int_1^2 dy = -\frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

149. $I = \int_{(1, 0)}^{(6, 8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ вдоль путей, не проходящих через начало координат.

◀ Поскольку $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)$, то

$$I = \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{(1, 0)}^{(6, 8)} = 9. \blacktriangleright$$

150. $I = \int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{x dy - y dx}{(x - y)^2}$ вдоль путей, не пересекающих биссектрису первого координатного угла.

◀ Здесь $P(x, y) = -\frac{y}{(x-y)^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x+y}{(x-y)^3}$, и мы убеждаемся в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции во всякой односвязной области, содержащей точки $(0, -1)$, $(1, 0)$ и не содержащей точек прямой $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. Применив формулу (A), получим

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int_{-1}^0 \frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{1}{x+1} \Big|_1^0 + \frac{1}{1-y} \Big|_{-1}^0 = 1. \blacktriangleright$$

151. $I = \int_{(1, \pi)}^{(2, \pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy$ вдоль путей, не пересекающих оси Oy .

◀ В силу равенства

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x},$$

можем применить формулу (A), в которой интеграл по переменной y равен нулю (так как путь интегрирования параллелен оси Ox):

$$I = \int_1^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{x^2} \cos \frac{\pi}{x} \right) dx = \left(x + \pi \sin \frac{\pi}{x} \right) \Big|_1^2 = 1 + \pi. \blacktriangleright$$

В примерах 152—156 будем находить первообразную функцию по известному ее дифференциальному du , пользуясь при этом формулами (6) и (7), п.4.4, или видоизменениях их. Например, иногда вместо формулы (6) бывает полезна формула

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt + C. \quad (\text{B})$$

если путь из точки (x_0, y_0) в точку (x, y) выбран в виде ломаной, состоящей из отрезка, параллельного оси Oy и отрезка, параллельного оси Ox (рис. 17).

Найти первообразную функцию u , если:

$$152. du = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy.$$

◀ Применим формулу (6), п.4.4, взяв $x_0 = 0, y_0 = 0$.

Получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x t^2 dt + \int_0^y (x^2 - 2xt - t^2) dt + C = \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C. \end{aligned}$$

$$153. du = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy}{(x + y)^3}.$$

◀ Применим формулу (B) считая, что $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ — любое фиксированное. Приняв во внимание равенства

$$P(x, y) = \frac{1}{x+y} + \frac{4y^2}{(x+y)^3}, \quad Q(x, y) = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3},$$

получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x \left(\frac{1}{t+y} + \frac{4y^2}{(t+y)^3} \right) dt + \int_{y_0}^y \frac{dt}{t} + C = \\ &= \ln|x+y| - \ln|y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + 2 + \ln|y| - \ln|y_0| + C = \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C_1, \quad C_1 = \text{const.} \end{aligned}$$

$$154. du = e^x (e^y(x-y+2)+y) dx + e^x (e^y(x-y)+1) dy.$$

◀ Применим формулу (6), п.4.4, полагая $x_0 = 0, y_0 = 0$. Получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x e^t (t+2) dt + e^x \int_0^y (e^t (x-t)+1) dt + C = (t+1)e^t \Big|_0^x + e^x (e^t (x-t+1)+t) \Big|_0^y + C = \\ &= e^{x+y}(x-y+1) + e^x y + C_1, \quad C_1 = C - 1. \end{aligned}$$

Найти первообразную функцию w , если:

$$155. dw = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz.$$

◀ Записав dw в виде

$$dw = x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz - 2(yz dx + xz dy + xy dz) = d \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz \right),$$

имеем

$$w(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C, \quad C = \text{const.}$$

$$156. dw = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z} \right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2} \right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$$

◀ Выражение w является полным дифференциалом в любой области, не содержащей начала координат и точек плоскостей xOy, xOz . Применив формулу (7), п.4.4, получим

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^x \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0} \right) dt + \int_{y_0}^y \left(\frac{x}{z_0} + \frac{x}{t^2} \right) dt - \int_{z_0}^z \frac{xy}{t^2} dt + C,$$

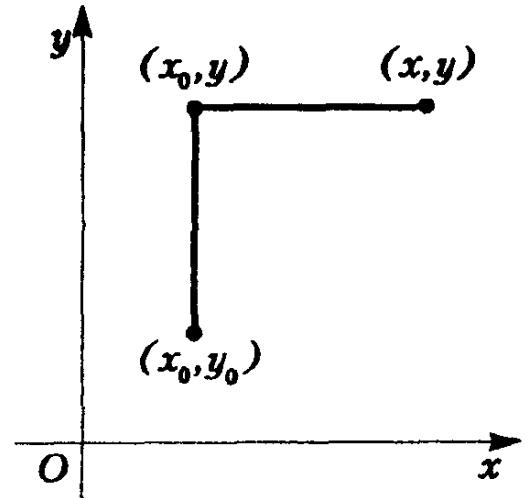


Рис. 17

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка, $C = \text{const}$. Интегрируя, находим

$$w(x, y, z) = x \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0} \right) - x_0 \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0} \right) + \frac{xy}{z_0} - \frac{x}{y} - \frac{xy_0}{z_0} + \frac{x}{y_0} + \frac{xy}{z} - \frac{xy}{z_0} + C.$$

Взяв, например, $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, получим

$$w(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C_1, \quad C_1 = \text{const.} \blacktriangleright$$

157. Найти работу, производимую силой тяжести, когда материальная точка массы m перемещается из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2) . Ось Oz направлена вертикально вверх.

◀ Сила тяжести есть вектор-функция

$$\mathbf{F} = (P, Q, R) = (0, 0, -mg),$$

где g — ускорение свободного падения, а выражение $P dx + Q dy + R dz = -mg dz$ является полным дифференциалом функции $u = -mgz$. Поэтому работа силы \mathbf{F} по перемещению материальной точки из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2) не зависит от формы траектории и равна величине

$$A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} P dx + Q dy + R dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1) = -mg(z_2 - z_1). \blacktriangleright$$

158. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению материальной точки от начала координат, если эта точка описывает в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, положительную четверть эллипса $\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$.

◀ Пусть $M = (x, y)$ — произвольная точка на кривой γ_1 , положительной четверти эллипса γ , а $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от этой точки до начала координат. Тогда упругая сила \mathbf{F} , направленная из точки M в начало координат, имеет вид $\mathbf{F}(x, y) = \mu r e(M, O)$, где μ — некоторая постоянная, $e(M, O)$ — орт, направленный из точки M в начало координат. Поскольку $e(M, O) = -\frac{r}{r}$, где $r = (x, y)$ — радиус-вектор точки M , то $\mathbf{F}(x, y) = -\mu r = (-\mu x, -\mu y)$.

Значение работы A найдем, вычислив интеграл

$$A = -\mu \int_{\gamma_1} x dx + y dy = -\frac{\mu}{2} \int_{\gamma_1} d(x^2 + y^2).$$

Как и в предыдущей задаче, работа A не зависит от формы траектории точки и равна разности значений потенциала $u(x, y) = -\frac{\mu}{2}(x^2 + y^2)$ силовой функции \mathbf{F} в точках $(0, b)$ и $(a, 0)$:

$$A = -\frac{\mu}{2}(b^2 - a^2). \blacktriangleright$$

159. Найти работу силы тяготения $|\mathbf{F}| = \frac{k}{r^2}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, действующей на единичную массу, когда последняя перемещается из точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ в точку $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

◀ Сила тяготения \mathbf{F} является центральной силой; поскольку ее линия действия проходит через начало координат. Поэтому можем ее представить в виде

$$\mathbf{F} = \frac{k}{r^2} e(M, O) = -\frac{k}{r^2} \frac{r(O, M)}{r} = -k \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right),$$

где $M = (x, y, z)$ — произвольная точка, $r(O, M) = (x, y, z)$ — радиус-вектор этой точки. Значение работы A получим с помощью интеграла, взятого вдоль любой гладкой кривой, соединяющей точки M_1 и M_2 :

$$A = -k \int_{M_1}^{M_2} \frac{x}{r^3} dx + \frac{y}{r^3} dy + \frac{z}{r^3} dz = k \int_{M_1}^{M_2} d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{k}{r} \Big|_{M_1}^{M_2} = k \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

где $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$, $i = 1, 2$. ►

Вычислить следующие поверхностные интегралы первого рода:

$$160. I = \iint_S (x + y + z) dS, \text{ где } S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}.$$

◀ Интегрирование производится по верхней полусфере, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Так как в точках множества S выполняются равенства

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad z'_x = -\frac{x}{z}, \quad z'_y = -\frac{y}{z}, \quad z > 0,$$

то

$$dS = \sqrt{1 + z'_x^2 + z'_y^2} dx dy = \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Применив формулу (10), п. 4.3, получим

$$I = a \iint_D \left(\frac{x + y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}.$$

После перехода в интеграле к полярным координатам имеем

$$I = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a-0} \left(\frac{\rho(\sin \varphi + \cos \varphi)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + 1 \right) \rho d\rho = \pi a^3,$$

так как

$$\int_0^{2\pi} (\sin \varphi + \cos \varphi) d\varphi \int_0^{a-0} \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 0. ▶$$

$$161. I = \iint_S (x^2 + y^2) dS, \text{ где } S \text{ — граница тела } T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}.$$

◀ Интегрирование производится по боковой поверхности и основанию конуса T , в силу чего можем записать

$$I = \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS,$$

где S_1 — боковая поверхность конуса, S_2 — его основание. На множество S_2 имеем $dS = dx dy$, поэтому

$$\iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

На боковой поверхности конуса $dS = \sqrt{2} dx dy$, следовательно,

$$\iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS = \sqrt{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно получаем $I = \frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$. ►

162. $I = \iint_S \frac{dS}{h}$, где S — поверхность эллипсоида с полуосами a, b, c , а h — расстояние от центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу $d\sigma$ поверхности эллипсоида.

◀ Расстояние h определяется формулой

$$h = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней единичной нормали n к поверхности эллипсоида в точке (x, y, z) . Запишем параметрические уравнения поверхности эллипсоида в виде

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = b \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Применим формулу (9), п. 4.3, полагая там $u = \theta, v = \varphi$. Исходя из симметрии, можем написать равенство

$$I = 8 \iint_{S_1} \frac{dS}{h},$$

где S_1 — восьмая часть поверхности эллипсоида, лежащая в первом октанте. Если $(x, y, z) \in S_1$, то $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Вычислим направляющие косинусы вектора внешней единичной нормали n в точке $(x, y, z) \in S_1 \setminus \partial S_1$, где ∂S_1 — край поверхности S_1 . Для этого найдем

$$A = \frac{\mathcal{D}(y, z)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)}, \quad B = \frac{\mathcal{D}(z, x)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)}, \quad C = \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)}.$$

Имеем

$$A = bc \sin^2 \theta \cos \varphi, \quad B = ac \sin^2 \theta \sin \varphi, \quad C = ab \sin \theta \cos \theta.$$

Так как $C > 0$ при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ и указанный вектор единичной нормали n в каждой точке множества $S_1 \setminus \partial S_1$ образует с положительным направлением оси Oz острый угол, то $\cos \gamma > 0$, следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Заменив поверхностный интеграл соответствующим ему двойным, получим, принимая во внимание, что $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} d\theta d\varphi$,

$$I = 8 \iint_{\Omega} \frac{A^2 + B^2 + C^2}{Ax(\theta, \varphi) + By(\theta, \varphi) + Cz(\theta, \varphi)} d\theta d\varphi,$$

где $\Omega = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$.

Сделав элементарные преобразования, находим

$$Ax(\theta, \varphi) + By(\theta, \varphi) + Cz(\theta, \varphi) = abc \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= b^2 c^2 \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + a^2 c^2 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + a^2 b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \\ &= a^2 b^2 c^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$I = 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right) d\varphi =$$

$$= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin^2 \theta + \frac{\pi}{2c^2} \cos^2 \theta \right) \sin \theta d\theta =$$

$$= 4\pi abc \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) B \left(\frac{1}{2}, 2 \right) + \frac{1}{c^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \theta d(\cos \theta) \right) = \frac{4}{3}\pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). \blacktriangleright$$

163. $I = \iint_S z dS$, где S — часть поверхности геликоида, заданного параметрическими уравнениями

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v \quad (0 < u < a, 0 < v < 2\pi).$$

◀ Применим формулу (9), п.4.3. Для этого рассмотрим отображение $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ и вычислим коэффициенты Гаусса

$$E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = 1 + u^2,$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0.$$

Таким образом, $EG - F^2 = 1 + u^2$ и по формуле (9), п.4.3, поверхностный интеграл I выражается через повторный:

$$I = \int_0^a \sqrt{1+u^2} du \int_0^{2\pi} v dv = 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1+u^2} du = \\ = \pi^2 \left(u \sqrt{1+u^2} + \ln \left(u + \sqrt{1+u^2} \right) \right) \Big|_0^a = \pi^2 \left(a \sqrt{1+a^2} + \ln \left(a + \sqrt{1+a^2} \right) \right). \blacktriangleright$$

164. $I = \iint_S (xy + yz + zx) dS$, где S — часть конической поверхности $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, вырезанная цилиндром $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2ax, z \in \mathbb{R}\}$.

◀ Поверхность S проектируется на круг $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$, а $dS = \sqrt{2} dx dy$, поэтому, применив формулу (9), п.4.3, получим

$$I = \sqrt{2} \iint_D \left(xy + (x+y)\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy.$$

Перейдем в интеграле к полярным координатам ρ, φ . Тогда

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi \right\}$$

и после замены переменных найдем

$$I = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi + \cos \varphi) d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^3 d\rho = 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ((\cos^5 \varphi + \cos^4 \varphi) \sin \varphi + \cos^5 \varphi) d\varphi = \\ = 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = 4\sqrt{2}a^4 B \left(3, \frac{1}{2} \right) = 4\sqrt{2}a^4 \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3 + \frac{1}{2})} = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4. \blacktriangleright$$

165. Доказать формулу Пуассона

$$I = \iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f\left(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right) du,$$

где S — поверхность сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

◀ Запишем подынтегральную функцию f в виде

$$f(ax + by + cz) = f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$$

и перейдем к новым переменным u, v, w , выбрав плоскость, заданную уравнением $ax + by + cz = 0$, в качестве плоскости переменных u, v , полагая $w = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. При таком выборе новой прямоугольной системы координат единичная сфера S перейдет в единичную сферу S' и при этом $dS' = dS$. Поэтому можем написать равенство

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = \iint_{S'} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}w\right) dS'.$$

Из уравнения $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ находим $u^2 + v^2 = 1 - w^2$. Полагая $\frac{u}{\sqrt{1-w^2}} = \cos \varphi$, $\frac{v}{\sqrt{1-w^2}} = \sin \varphi$, получим параметрические уравнения сферы S' в виде

$$u = \sqrt{1 - w^2} \cos \varphi, \quad v = \sqrt{1 - w^2} \sin \varphi, \quad w = w \quad (|w| \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Таким образом, $S' = \Phi(D)$, где

$$\Phi(w, \varphi) = \left(\sqrt{1 - w^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - w^2} \sin \varphi, w \right), \quad D =]-1, 1[\times [0, 2\pi[.$$

Вычислим коэффициенты Гаусса

$$E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial w}, \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right\rangle = \frac{1}{1 - w^2}, \quad G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = 1 - w^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial w}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = 0$$

и найдем площадь dS' элемента поверхности S' :

$$dS' = \sqrt{EG - F^2} dw d\varphi = dw d\varphi.$$

Заменяя поверхностный интеграл соответствующим двойным, получим

$$I = \iint_{S'} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}w\right) dS' = \int_{-1}^1 dw \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}w\right) d\varphi = 2\pi \int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}w\right) dw. \blacktriangleright$$

166. Найти массу параболической оболочки

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq 1 \right\},$$

плотность которой меняется по закону $p(x, y, z) = z$.

◀ Масса m данной поверхности вычисляется по формуле

$$m = \iint_S z dS.$$

На поверхности S выполняется равенство $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, а сама поверхность проектируется на множество $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Принимая во внимание равенство

§ 4. Интегрирование на многообразиях

$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$, заменим поверхностный интеграл соответствующим ему двойным и перейдем в последнем к полярным координатам. Имеем

$$m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho.$$

После замены переменной $1 + \rho^2 = t^2$, окончательно получим

$$m = \pi \int_1^{\sqrt{3}} t^2 (t^2 - 1) dt = \pi \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{15} \pi (6\sqrt{3} + 1). \blacktriangleright$$

167. Найти статические моменты однородной треугольной пластинки $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = a (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)\}$ относительно координатных плоскостей.

◀ Применим формулы (16), п.4.3. Полагая $p(x, y, z) = 1$, имеем

$$M_{xOy} = \iint_S z dS, \quad M_{yOz} = \iint_S x dS, \quad M_{zOx} = \iint_S y dS.$$

Принимая во внимание равенства $z|_S = a - x - y$, $(x, y) \in D$, $dS = \sqrt{3} dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x\}$, получим

$$M_{xOy} = \sqrt{3} \iint_D (a - x - y) dx dy = \sqrt{3} \int_0^a dx \int_0^{a-x} (a - x - y) dy = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^a (a - x)^2 dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} (a - x)^3 \Big|_0^a = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}.$$

Вполне очевидно, что $M_{yOz} = M_{zOx} = M_{xOy} = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. ▶

168. Найти момент инерции относительно оси Oz однородной сферической оболочки $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)\}$ с поверхностной плотностью вещества p_0 .

◀ Согласно формуле (19), п.4.3, имеем

$$I_z = p_0 \iint_S (x^2 + y^2) dS,$$

где $dS = \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $(x, y) \in D$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$.

Заменяя поверхностный интеграл двойным, получим

$$I_z = p_0 a \iint_D \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

В двойном интеграле перейдем к полярным координатам ρ и φ и заменим полученный интеграл повторным. Имеем

$$\begin{aligned} I_z &= p_0 a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2\pi p_0 a \left(\rho^2 \sqrt{a^2 - \rho^2} \Big|_0^a + 2 \int_0^a \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho \right) = \\ &= \frac{4}{3} \pi p_0 a (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi p_0 a^4. \blacktriangleright \end{aligned}$$

169. Найти момент инерции однородной конической оболочки

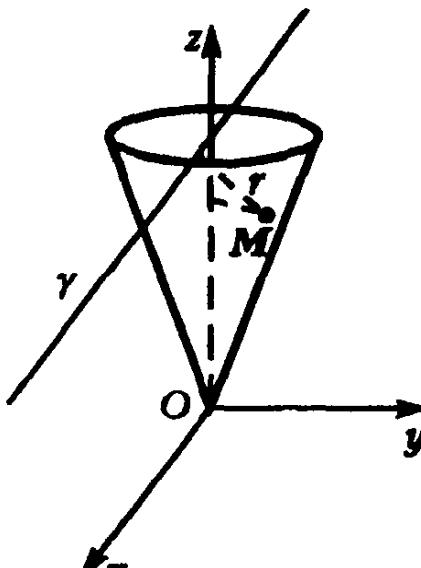


Рис. 18

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, \quad 0 \leq z \leq b \right\}$$

с поверхностью плотностью p_0 относительно прямой γ , заданной в пространстве \mathbb{R}^3 уравнениями $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$.

◀ Прямая γ параллельна оси Ox и лежит в плоскости xOz , отсекая на оси Oz отрезок длины b . Пусть точка $M = (x, y, z)$ принадлежит элементу dS поверхности S , площадь которого равна dS (рис. 18). Квадрат расстояния от точки M до прямой γ определяется по формуле $r^2 = x^2 + y^2 + (b-z)^2$, поэтому искомый момент инерции равен поверхностному интегралу

$$I_\gamma = p_0 \iint_S (x^2 + y^2 + (b-z)^2) dS.$$

Принимая во внимание равенства

$$z|_S = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in D, \quad dS = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx dy,$$

где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, получим

$$I_\gamma = \frac{p_0 \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \iint_D \left(x^2 + y^2 + b^2 \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right)^2 \right) dx dy.$$

Переходя к полярным координатам, окончательно найдем

$$\begin{aligned} I_\gamma &= p_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho \left(\rho^2 + b^2 \left(1 - \frac{\rho}{a} \right)^2 \right) d\rho = \\ &= 2\pi p_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^a \left(\rho^3 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) + b^2 \rho - \frac{2b^2 \rho^2}{a} \right) d\rho = \\ &= 2\pi p_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \left(\frac{a^4}{4} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{a^2 b^2}{2} - \frac{2}{3} a^2 b^2 \right) = \frac{\pi}{6} p_0 a \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + b^2). \end{aligned}$$

170. Найти координаты центра тяжести части однородной поверхности

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\},$$

вырезанной цилиндром $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = ax, z \in \mathbb{R}\}$.

◀ Для вычисления координат центра тяжести указанной части поверхности S воспользуемся формулами (17), п. 4.3, полагая в них $p(x, y, z) = 1$, так как поверхность однородна. Имеем

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy = \sqrt{2} dx dy,$$

$$(x, y) \in D, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq ax\},$$

$$m = \iint_S dS = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \frac{\pi \sqrt{2}}{4} a^2,$$

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{1}{m} \iint_S x dS = \frac{\sqrt{2}}{m} \iint_D x dx dy = \frac{\sqrt{2}}{m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{\pi a^3}{m} = \frac{a}{2}, \\
 y_C &= \frac{1}{m} \iint_S y dS = \frac{\sqrt{2}}{m} \iint_D y dx dy = \frac{\sqrt{2}}{m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = 0, \\
 z_C &= \frac{1}{m} \iint_S z dS = \frac{\sqrt{2}}{m} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{\sqrt{2}}{m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 B\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 \frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{16a}{9\pi}. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

171. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x + y \leq a \ (x \geq 0, y \geq 0) \right\}.$$

◀ Рассматриваемая часть сферы проектируется на множество $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x\}$, поэтому

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = a \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a \int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \\
 &= a \int_0^a \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_{y=0}^{y=a-x} \right) dx = a \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx.
 \end{aligned}$$

Полагая в интегrale $\arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = t$, найдем

$$\begin{aligned}
 m &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{2 \sin t \cos t}{(1 + \sin^2 t)^2} dt = 2a^2 \left(\frac{t}{1 + \sin^2 t} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \sin^2 t} \right) = \\
 &= 2a^2 \left(-\frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d(\operatorname{ctg} t)}{2 + \operatorname{ctg}^2 t} \right) = 2a^2 \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} t}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{2} a^2 (\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

Применив формулы (17), п. 4.3, вычислим сначала координату x_C . Имеем

$$x_C = \frac{a}{m} \int_0^a dy \int_0^{a-y} \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{m} \left(\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy - \sqrt{2} \int_0^a \sqrt{y} \sqrt{a-y} dy \right).$$

Полагая в первом интеграле $y = a \sin \varphi$, а во втором $y = a \sin^2 \theta$, получим

$$x_C = \frac{a^3}{m} \left(\int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta \right) = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}m} (\sqrt{2} - 1) = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Далее,

$$y_C = \frac{a}{m} \int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{y dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = x_C = \frac{a}{2\sqrt{2}}, \quad z_C = \frac{a}{m} \iint_D dx dy = \frac{a^3}{2m} = \frac{a(1+\sqrt{2})}{\pi}. \blacktriangleright$$

172. Найти полярные моменты инерции

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

следующих поверхностей S : а) поверхности куба $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} = a\}$;

б) полной поверхности цилиндра $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R, 0 \leq z \leq H\}$.

◀ а) Можем представить I_0 в виде

$$I_0 = \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} (x^2 + y^2 + z^2) dS,$$

где $S_i, i = \overline{1, 6}$, — грани куба. Рассмотрим грань $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a, z = a\}$. На ней $dS = dx dy$, в силу чего получим

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2) dS &= \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a (x^2 + y^2 + a^2) dy = \\ &= 4 \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2 + a^2) dy = 4 \int_0^a \left(ax^2 + \frac{4}{3}a^3 \right) dx = \frac{20}{3}a^4. \end{aligned}$$

Интегралы, входящие в сумму, определяющую I_0 , равны между собой, поэтому имеем

$$I_0 = 6 \cdot \frac{20}{3}a^4 = 40a^4.$$

б) Представим I_0 в виде

$$I_0 = \iint_{S_n} (x^2 + y^2 + z^2) dS + \iint_{S_s} (x^2 + y^2 + z^2) dS + \iint_{S_b} (x^2 + y^2 + z^2) dS,$$

где S_n — нижнее основание цилиндра S , S_s — его верхнее основание, S_b — его боковая поверхность.

На S_5 и S_6 выполняется равенство $dS = dx dy$, в силу чего первые два интеграла в правой части равенства являются двойными интегралами в замкнутой области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Принимая во внимание равенства $z|_{S_5} = 0, z|_{S_6} = H$, получим

$$\begin{aligned} \iint_{S_5} (x^2 + y^2 + z^2) dS + \iint_{S_6} (x^2 + y^2 + z^2) dS &= \\ &= \iint_D (2(x^2 + y^2) + H^2) dx dy = \pi R^2 H^2 + 2 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам, находим

$$2 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \pi R^4.$$

На S_6 выполняются равенства $x^2 + y^2 = R^2, dS = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, причем S_6 проектируется на прямоугольник $D_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R, 0 \leq z \leq H\}$, в силу чего имеем

$$\begin{aligned} \iint_{S_6} (x^2 + y^2 + z^2) dS &= 2R \int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int_0^H (R^2 + z^2) dz = 4RH \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right) \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \\ &= 4RH \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right) \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = 2\pi RH \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Складывая полученные равенства, окончательно находим

$$I_0 = \pi R \left(R(R+H)^2 + \frac{2}{3} H^3 \right). \blacktriangleright$$

173. С какой силой притягивает однородная усеченная коническая поверхность

$$S = \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = \rho; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq b \leq \rho \leq a\}$$

с поверхностью плотностью ρ_0 материальную точку массы m , помещенную в вершине этой поверхности?

◀ Применив формулу (18), п.4.3, получим

$$\mathbf{F} = \kappa m \rho_0 \iint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS,$$

где κ — постоянная тяготения,

$$\mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Здесь следует взять $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, так как материальная точка находится в вершине конуса. Обозначая $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, имеем

$$F_x = \kappa m \rho_0 \iint_S \frac{x}{r^3} dS, \quad F_y = \kappa m \rho_0 \iint_S \frac{y}{r^3} dS, \quad F_z = \kappa m \rho_0 \iint_S \frac{z}{r^3} dS.$$

Параметризуем поверхность S , полагая $S = \Phi(D)$, где $\Phi(r, \varphi) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \cos \varphi, \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \varphi, \frac{r}{\sqrt{2}} \right)$, $D = \{(t, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : b\sqrt{2} \leq r \leq a\sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Тогда

$$E = 1, \quad G = \frac{r^2}{2}, \quad F = 0, \quad dS = \sqrt{EG - F^2} dr d\varphi = \frac{r}{\sqrt{2}} dr d\varphi.$$

Заменяя поверхностные интегралы соответствующими двойными, найдем

$$F_x = \frac{1}{2} \times m p_0 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = 0,$$

$$F_y = \frac{1}{2} \times m p_0 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = 0,$$

$$F_z = \frac{1}{2} \times m p_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = \pi \times m p_0 \ln \frac{a}{b}.$$

Из физических соображений можно было сразу сделать вывод о том, что $F_x = 0$, $F_y = 0$, так как однородная поверхность S имеет ось симметрии Oz , на которой находится центр тяжести поверхности, в силу чего

$$F = \pi \times m p_0 \ln \frac{a}{b} k,$$

где k — орт оси Oz . ▶

174. Найти потенциал однородной сферической поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ плотности p_0 в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, т.е. вычислить интеграл

$$U = \iint_S \frac{p_0}{r} dS,$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

◀ Перейдем от системы координат $Oxyz$ к системе $O\xi\eta\zeta$, совершив поворот осей так, чтобы точка M_0 находилась на положительной полуоси $O\zeta$. В новой системе координат точка M_0 имеет координаты $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = r_0$, где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. При указанном переходе к новой системе координат сфера S перейдет в сферу $S' = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2\}$. Таким образом, требуется вычислить интеграл

$$U = p_0 \iint_{S'} \frac{dS'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r_0)^2}}.$$

Представим множество S' в виде $S' = \Phi(D)$, где $\Phi(\theta, \varphi) = (a \sin \theta \cos \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta)$, $D = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, и вычислим коэффициенты Гаусса, а также dS' . Имеем $E = a^2$, $G = a^2 \sin^2 \theta$, $F = 0$, $dS' = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Принимая во внимание равенство $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r_0)^2 = a^2 - 2ar_0 \cos \theta + r_0^2$, получим

$$\begin{aligned} U &= a^2 p_0 \iint_D \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{a^2 - 2ar_0 \cos \theta + r_0^2}} = a^2 p_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{a^2 - 2ar_0 \cos \theta + r_0^2}} = \\ &= 2\pi a^2 p_0 \left. \frac{\sqrt{a^2 - 2ar_0 \cos \theta + r_0^2}}{ar_0} \right|_0^\pi = \frac{2\pi a p_0}{r_0} (a + r_0 - |a - r_0|). \end{aligned}$$

Если $a < r_0$, то $U = \frac{4\pi a^2 p_0}{r_0}$. Если $a > r_0$, то $U = 4\pi a p_0$. Оба случая объединяются одной формулой. Действительно, неравенство $a < r_0$ эквивалентно неравенству $\frac{a^2}{r_0} < a$, а неравенство $a > r_0$ — неравенству $\frac{a^2}{r_0} > a$. Следовательно, $U = 4\pi p_0 \min \left\{ a, \frac{a^2}{r_0} \right\}$. ▶

175. Вычислить интеграл

$$F(t) = \iint_{S(t)} f(x, y, z) dS,$$

где

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{если } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & \text{если } z < \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases} \quad S(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = t^2\}.$$

◀ Из условия примера следует, что функция f отлична от нуля на той части поверхности $S(t)$, которая находится внутри части пространства \mathbb{R}^3 , ограниченной конической поверхностью $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, поэтому имеем

$$F(t) = \iint_{\substack{x^2+y^2+z^2=t^2 \\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}}} (x^2 + y^2) dS = |t| \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq \frac{t^2}{2}}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

После перехода в двойном интеграле к полярным координатам получим

$$F(t) = 4|t| \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = \pi|t| \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{\rho^2 d(\rho^2)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = \frac{2}{3} \pi |t| (2t^2 + \rho^2) \sqrt{t^2 - \rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{6} (8 - 5\sqrt{2}) t^4. ▶$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго рода:

176. $I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, где S — внешняя сторона сферы, заданной

уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

◀ Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \iint_S z dx dy.$$

Плоскость $z = 0$ пересекается со сферой S по окружности $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$, являющейся гладким краем компактов $S^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^+ = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$, $S^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^- = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Ориентация кривой γ должна быть согласована с ориентацией многообразий $S^+ \setminus \gamma$ и $S^- \setminus \gamma$ по правилу, указанному в п.4.1. Эти ориентации противоположны, поэтому

$$I_1 = \iint_{S^+} z dx dy + \iint_{S^-} z dx dy = \iint_D z^+ dx dy - \iint_D z^- dx dy = 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

После перехода в интеграле к полярным координатам получим

$$I_1 = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho = \frac{4}{3} \pi (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Из очевидных равенств

$$\iint_S x dy dz = \iint_S y dz dx = I_1$$

окончательно находим $I = 4\pi a^3$. ▶

$$177. I = \iint_S (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy, \text{ где } S \text{ — внешняя сторона}$$

конической поверхности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq h$.

◀ Коническая поверхность S проектируется на круг $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq h^2\}$. Из-за особой точки в начале координат множество S называют *псевдомногобразием*. В начале координат вектор нормали n к S не определен, поэтому

$$I = \iint_{S \setminus \{(0, 0, 0)\}} ((y - z) \cos \alpha + (z - x) \cos \beta + (x - y) \cos \gamma) dS,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора единичной нормали n в точках множества $S \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Множеством $\{(0, 0, 0)\}$ можно пренебречь при интегрировании в любом случае, поскольку оно имеет меру нуль.

Множество $S \setminus \{(0, 0, 0)\}$ трансверсально ориентируем выбором одного из двух возможных направлений вектора единичной нормали n . Поскольку речь идет о внешней стороне поверхности S , то вектор n образует с ортом k оси Oz тупой угол, в силу чего имеем

$$\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{z_x'}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad \cos \beta = \frac{z_y'}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}},$$

где $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Заменяя поверхностный интеграл двойным и принимая во внимание, что

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy,$$

получим

$$\begin{aligned} I &= \iint_D ((y - z(x, y))z_x' + (z(x, y) - x)z_y' + y - x) dx dy = \\ &= 2 \iint_D (y - x) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} (\sin \varphi - \cos \varphi) d\varphi \int_0^h \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} h^3 \int_0^{2\pi} (\sin \varphi - \cos \varphi) d\varphi = 0. \end{aligned} \blacktriangleright$$

$$178. I = \iint_S \left(\frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z} \right), \text{ где } S \text{ — внешняя сторона эллипсоида, заданного}$$

уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

◀ Множество S представим в виде

$$S = \Phi(D), \Phi(\theta, \varphi) = (a \sin \theta \cos \varphi, b \sin \theta \sin \varphi, c \cos \theta),$$

где $D = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Согласно определению поверхностного интеграла по ориентированной поверхности S , имеем

$$I = \iint_S \left(\frac{\cos \alpha}{x} + \frac{\cos \beta}{y} + \frac{\cos \gamma}{z} \right) dS,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ A &= \frac{\mathcal{D}(y, z)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)}, \quad B = \frac{\mathcal{D}(z, x)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)}, \quad C = \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)}, \end{aligned}$$

x, y, z — компоненты вектора Φ (в примере 162 найдены следующие значения: $A = bc \sin^2 \theta \cos \varphi$, $B = ac \sin^2 \theta \sin \varphi$, $C = ab \sin \theta \cos \theta$). Поскольку $C > 0$ при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ и $C < 0$ при $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, то в формулах для вычисления $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ перед радикалом выбираем знак “+”, в силу того что на верхней половине поверхности эллипсона $\cos \gamma > 0$, а на нижней его половине $\cos \gamma < 0$. Принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} d\theta d\varphi$, приводим поверхностный интеграл к двойному:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{A}{x(\theta, \varphi)} + \frac{B}{y(\theta, \varphi)} + \frac{C}{z(\theta, \varphi)} \right) d\theta d\varphi = \iint_D \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) = 4\pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). \end{aligned} \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

119. $\int_{\gamma} \frac{dl}{x-y}$, где γ — отрезок прямой, заданный уравнением $y = \frac{x}{2} - 2$, заключенный между точками $A = (0, -2)$ и $B = (4, 0)$.
120. $\int_{\gamma} y dl$, где γ — дуга параболы, заданной уравнением $y^2 = 2px$, отсеченная кривой, уравнение которой $x^2 = 2py$.

121. $\int_{\gamma} xyz dl$, где γ — четверть окружности, лежащей в первом оваланте, полученной в результате пересечения сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ и поверхности цилиндра $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}, z \in \mathbb{R}\}$.

122. $\int_{\gamma} \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dl$, где γ — первый виток конической винтовой линии, заданной уравнениями $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$.

123. Найти массу дуги кривой, заданной уравнением $y = \ln x$, между точками с абсциссами x_1 и x_2 , если плотность кривой в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

124. Найти массу кривой γ , заданной уравнениями $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, от точки, соответствующей $t = 0$, до произвольной точки, если плотность кривой обратно пропорциональна квадрату полярного радиуса и в точке $(1, 0, 1)$ равна единице.

125. Вычислить статический момент первого витка конической винтовой линии, заданной уравнениями $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, относительно плоскости xOy , считая плотность пропорциональной квадрату расстояния от этой плоскости: $\mu = kz^2$, $k = \text{const}$.

126. Вычислить площадь данной цилиндрической поверхности, заключенной между плоскостью xOy и поверхностями, заданными уравнениями $y = \sqrt{2px}$, $z = y$, $x = \frac{8}{9}p$, $p > 0$.

Вычислить криволинейные интегралы:

127. $\int_{\gamma} x dy$, где γ — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника, образованного отрезками осей координат и прямой, заданной уравнением $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

128. $\int_{\gamma} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, где γ — четвертая часть астроиды, заданной уравнениями $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (от точки $(a, 0)$ до точки $(0, a)$).

129. $\int_{\gamma} x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, где γ — отрезок прямой линии, от точки $(1, 1, 1)$ до точки $(2, 3, 4)$.

130. Доказать, что величина интеграла

$$\int\limits_{\gamma} (2xy - y) dx + x^2 dy.$$

где γ — замкнутый контур, выражает площадь области, ограниченной этим контуром.

131. Доказать, что интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \varphi(y) dx + (x\varphi'(y) + x^3) dy$$

равен утроенному моменту инерции однородной плоской фигуры, ограниченной контуром γ , относительно оси ординат.

Найти функции по данным полным дифференциалам:

$$132. du = \left(\frac{x-2y}{(y-x)^2} + x \right) dx + \left(\frac{y}{(y-x)^2} - y^2 \right) dy. \quad 133. du = \frac{2(xz dy + xy dz - yz dx)}{(x-yz)^2}.$$

Вычислить поверхностные интегралы:

134. $\iint\limits_S \frac{dS}{r^2}$, где S — цилиндр, заданный уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченный плоскостями, уравнения которых $z = 0$ и $z = H$, а r — расстояние от точки поверхности до начала координат.

135. $\iint\limits_S \frac{dS}{\rho^n}$, где S — сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ а ρ — расстояние элемента поверхности до точки $(0, 0, c)$, расположенной вне сферы.

136. $\iint\limits_S yz dx dy + xz dy dz + xy dx dz$, где S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра, заданного уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, и плоскостей, уравнения которых $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $z = H$.

137. $\iint\limits_S y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz$, где S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения, заданного уравнением $z = x^2 + y^2$, цилиндра, заданного уравнением $x^2 + y^2 = 1$, и координатных плоскостей.

138. $\iint\limits_S ((z^n - y^n) \cos \alpha + (x^n - z^n) \cos \beta + (y^n - x^n) \cos \gamma) dS$, где S — верхняя половина сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, а $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней единичной нормали n к поверхности S .

§ 5. Формулы Остроградского, Грина и Стокса

Пусть K — компакт с краем ∂K в евклидовом пространстве \mathbb{R}^m с фиксированным базисом.

Определение 1. Компакт K называется элементарным, если каждая прямая в пространстве \mathbb{R}^m , параллельная оси Ox_i , $i = \overline{1, m}$, либо не пересекается с K , либо имеет с K один общий сегмент, который может вырождаться в точку.

Указанный в определении сегмент можно задать в виде

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m) \leq x_i \leq \psi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m), \quad (1)$$

где φ_i , ψ_i — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Определение 2. Компакт $K \subset \mathbb{R}^m$ с краем ∂K называется простым, если существует его представление в виде

$$K = \bigcup_{j=1}^n K_j, \quad (2)$$

где K_j — элементарные компакты без общих внутренних точек с краями ∂K_j , $j = \overline{1, m}$.

Теорема Остроградского. Пусть на простом компакте $K \subset \mathbb{R}^3$ с ориентированным краем $\partial K = S$ определена вектор-функция $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, непрерывная на K вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$. Тогда справедлива формула Остроградского

$$\iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \quad (3)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора единичной нормали n в точках поверхности S .

Если в равенстве (3) взять $P = x, Q = y, R = z$, то получим следующую формулу для вычисления объема V компакта K посредством поверхностного интеграла второго рода:

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS. \quad (4)$$

Если D — простой компакт с ориентированным краем $\partial D = \gamma$ в евклидовом пространстве \mathbb{R}^2 , а вектор-функция $\mathbf{F} = (P', Q')$ непрерывна на D вместе с частными производными $\frac{\partial P'}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q'}{\partial y}$, то формула Остроградского принимает вид

$$\iint_D \left(\frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} (\mathbf{F}, n) dl. \quad (5)$$

Если $\tau = (\cos \alpha', \cos \beta')$ — единичный касательный вектор к гладкой кривой γ , указывающий положительное направление ее обхода, то, принимая во внимание, что $n = [\tau, k]$, где k — орт оси Oz пространства \mathbb{R}^3 , и пользуясь правилом циклической перестановки в смешанном произведении, имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}, n \rangle dl &= (\langle P' i, [\tau, k] \rangle + \langle Q' j, [\tau, k] \rangle) dl = (P' \langle \tau, [k, i] \rangle + Q' \langle \tau, [k, j] \rangle) dl = \\ &= (P' \langle \tau, j \rangle - Q' \langle \tau, i \rangle) dl = \langle -Q' i + P' j, \tau \rangle dl. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно определению криволинейного интеграла второго рода, равенство (5) принимает вид

$$\iint_D \left(\frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} -Q' dx + P' dy. \quad (6)$$

Полагая $P' = x, Q' = y$, получим формулу для вычисления площади плоской фигуры, ограниченной гладким контуром γ , посредством криволинейного интеграла второго рода:

$$P = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx. \quad (7)$$

Из теоремы Остроградского и формулы (6) получаем, как следствие, теорему и формулу Грина.

Теорема Грина. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — простой компакт с ориентированным краем γ , на котором определена вектор-функция $\mathbf{F} = (P, Q)$, непрерывная на D вместе с частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда справедлива формула Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} P dx + Q dy. \quad (8)$$

Для доказательства формулы (8) следует взять в формуле (6) $P' = Q, Q' = -P$.

Определение 3. Гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ с краем γ' называется элементарной, если ее можно задать уравнением $z = z(x, y), (x, y) \in D$, а также уравнением

Гл. 2. Кратные и криволинейные интегралы

$x = x(y, z)$, $(y, z) \in D'$, где D и D' — компакты в пространстве \mathbb{R}^2 с краями λ и λ' , а функции z и x непрерывно дифференцируемы в D и D' .

Определение 4. Гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ с краем γ' называется простой, если существует ее представление в виде $S = \bigcup_{j=1}^n S_j$, где S_j — элементарные поверхности без общих внутренних точек с краями γ_j .

Если простая поверхность S трансверсально ориентирована и ориентации контуров γ' и γ_j , $j = 1, n$, согласованы с ориентацией поверхности, то общие части границ двух смежных поверхностей S_j и S_{j+1} будут противоположно ориентированными.

Теорема Стокса. Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая простая поверхность с ориентированным краем γ' , $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ — непрерывная на S вектор-функция, компоненты которой имеют непрерывные на S частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$. Тогда справедлива формула Стокса

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_{\gamma'} P dx + Q dy + R dz, \quad (9)$$

где под умножением символов $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ на функцию будем понимать выполнение соответствующей операции дифференцирования, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора единичной нормали n .

179. Применяя формулу Грина (8), вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_{\gamma} e^x ((1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy),$$

где γ — пробегаемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \sin x\}$.

◀ По формуле Грина (8) имеем

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^x (\sin y - y)) - \frac{\partial}{\partial y} (e^x (1 - \cos y)) \right) dx dy = - \iint_D y e^x dx dy = - \int_0^\pi e^x dx \int_0^{\sin x} y dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx = -\frac{1}{4} \int_0^\pi e^x (1 - \cos 2x) dx = -\frac{1}{4} e^x \left(1 - \frac{1}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) \right) \Big|_0^\pi = -\frac{1}{5} (e^\pi - 1). \blacksquare \end{aligned}$$

180. На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы

$$I_1 = \int_{A \# B} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy, \quad I_2 = \int_{A \# B} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy,$$

где $A \# B$ — отрезок прямой, соединяющий точки $A = (1, 1)$ и $B = (2, 6)$, и $A \# B$ — дуга параболы с вертикальной осью, проходящая через те же точки A, B и начало координат?

◀ Уравнение параболы, проходящей через начало координат и точки A, B , имеет вид $y = 2x^2 - x$, а разность $I_2 - I_1$ является криволинейным интегралом по замкнутому контуру $A \# B \# A$, ограничивающему область $D \subset \mathbb{R}^2$ и пробегаемому в положительном направлении, в силу чего можем применить формулу (8):

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= \oint_{A \# B \# A} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (-(x - y)^2) - \frac{\partial}{\partial y} (x + y)^2 \right) dx dy = \\ &= -4 \iint_D x dx dy = -4 \int_1^2 x dx \int_{2x^2-x}^{5x-4} dy = -4 \int_1^2 (6x^2 - 4x - 2x^3) dx = (2x^4 + 8x^2 - 8x^3) \Big|_1^2 = -2. \end{aligned}$$

Следовательно, $I_1 - I_2 = 2$. ▶

181. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{A \rightarrow O} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

где $A \rightarrow O$ — верхняя полуокружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = ax$, пробегаемая от точки $A = (a, 0)$ до точки $O = (0, 0)$.

◀ На сегменте $[0, a]$ подынтегральное выражение равно нулю, поэтому интеграл по кривой $A \rightarrow O$ равен интегралу по замкнутому контуру $A \rightarrow O \rightarrow A$, состоящему из кривой $A \rightarrow O$ и сегмента $[0, a]$, ограничивающему область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{ax - x^2}\}$, в силу чего можем применить формулу (8):

$$\begin{aligned} I &= \int_{A \rightarrow O \rightarrow A} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y - m) - \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y - my) \right) dx dy = \\ &= m \iint_D dx dy = \frac{m}{8} \pi a^2. \blacksquare \end{aligned}$$

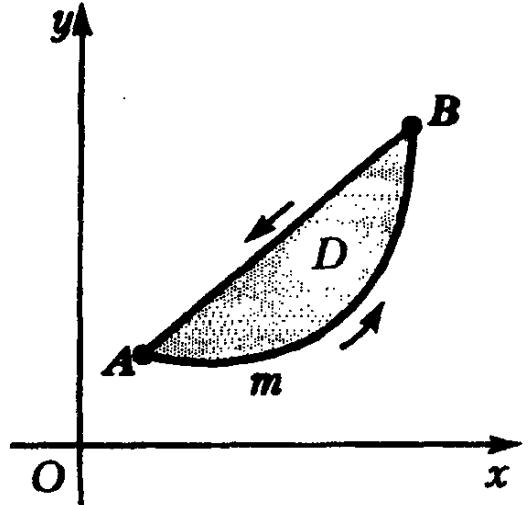


Рис. 19

182. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{A \rightarrow B} (\varphi(y)e^x - my) dx + (\varphi'(y)e^x - m) dy,$$

где φ, φ' — непрерывные функции, $A \rightarrow B$ — произвольный путь, соединяющий точки $A = (x_1, y_1)$ и $B = (x_2, y_2)$, но ограничивающий вместе с отрезком AB фигуру D , площадь которой равна данной величине P .

◀ Интеграл по кривой $A \rightarrow B$ представим в виде суммы интегралов по замкнутому контуру $A \rightarrow B \rightarrow A$ и по отрезку AB (рис. 19):

$$I = \oint_{A \rightarrow B \rightarrow A} (\varphi(y)e^x - my) dx + (\varphi'(y)e^x - m) dy + \int_{AB} (\varphi(y)e^x - my) dx + (\varphi'(y)e^x - m) dy = I_1 + I_2.$$

Интеграл I_1 вычислим, применив формулу (8):

$$I_1 = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (\varphi'(y)e^x - m) - \frac{\partial}{\partial y} (\varphi(y)e^x - my) \right) dx dy = m \iint_D dx dy = mP.$$

Для вычисления интеграла I_2 преобразуем подынтегральное выражение к виду

$$\begin{aligned} (\varphi(y)e^x - my) dx + (\varphi'(y)e^x - m) dy &= \\ &= (\varphi(y)e^x - my) dx + (\varphi'(y)e^x - mx) dy + m(x - 1) dy = du + m(x - 1) dy, \end{aligned}$$

где du — полный дифференциал некоторой функции. Следовательно,

$$I_2 = \int_{AB} du + m \int_{AB} (x - 1) dy,$$

где первый интеграл в правой части этого равенства не зависит от выбора пути интегрирования, соединяющего точки A и B . Таким образом,

$$\int_{AB} du = \int_{x_1}^{x_2} (\varphi(y_1)e^x - my_1) dx + \int_{y_1}^{y_2} (\varphi'(y)e^{x_2} - mx_2) dy = \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - m(x_2y_2 - x_1y_1).$$

На отрезке AB выполняется равенство $y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, в силу чего имеем

$$\begin{aligned} m \int_{AB} (x - 1) dy &= m \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} (x - 1) dx = m \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \frac{(x - 1)^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = \\ &= \frac{m}{2} (y_2 - y_1)(x_1 + x_2 - 2) = \frac{m}{2} (y_2 - y_1)(x_1 + x_2) - m(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Складывая полученные значения интегралов, окончательно найдем

$$I = mP + \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - m(y_2 - y_1). \blacksquare$$

183. Определить дважды непрерывно дифференцируемые функции $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint_{\gamma} P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy$$

для любого замкнутого контура γ не зависел от постоянных α и β .

◀ Если функции P и Q удовлетворяют поставленному условию, то должно выполняться равенство

$$\oint_{\gamma} P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy = \oint_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

для любого замкнутого контура γ , в силу чего имеем

$$I_1 = \oint_{\gamma} \bar{P} dx + \bar{Q} dy = 0,$$

где $\bar{P} = P(x + \alpha, y + \beta) - P(x, y)$, $\bar{Q} = Q(x + \alpha, y + \beta) - Q(x, y)$.

Для того чтобы криволинейный интеграл I_1 по любому замкнутому контуру γ был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы в односвязной области, ограниченной этим контуром, и на самом контуре выполнялось равенство $\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial y}$ (которое следует из формулы Грина). Обозначив $x + \alpha = \xi$, $y + \beta = \eta$, получим написанное условие в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi, \eta) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial \eta}(\xi, \eta) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y),$$

откуда имеем равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi, \eta) - \frac{\partial P}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

Левая часть этого равенства не зависит от ξ и η , поскольку правая его часть зависит только от x и y , следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C, \quad C = \text{const.}$$

Из условия $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C$ получаем равенство $\frac{\partial}{\partial x}(Q(x, y) - Cx) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$, справедливое лишь в том случае, когда $Q(x, y) - Cx = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \psi(y)$, $P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x)$, где u, φ, ψ — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Окончательно находим

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x), \quad Q = Cx + \frac{\partial u}{\partial y} + \psi(y), \quad C = \text{const.} \blacktriangleright$$

184. Вычислить интеграл $I = \oint_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, где γ — простой замкнутый контур, не проходящий через начало координат, пробегаемый в положительном направлении.

◀ Если контур γ не окружает начало координат, то, применив формулу Грина, получим

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) dx dy = \iint_D \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = 0.$$

Если контур γ окружает начало координат, то применять формулу Грина нельзя, поскольку область D в этом случае неодносвязна. В этом случае будем вычислять интеграл I непосредственно.

Обозначим через ω дифференциальное выражение под знаком интеграла I . Покажем, что интеграл

$$I = \oint_{\gamma} \omega$$

не зависит от выбора кривой γ , окружающей начало координат.

Пусть γ_1 и γ_2 — произвольные непересекающиеся замкнутые гладкие или кусочно-гладкие контуры, окружающие начало координат и ограничивающие простую область $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. При положительной ориентации границы $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ области D направления обхода кривых γ_1 и γ_2 будут противоположны (рис. 20). Двухсвязная простая область D не содержит особой точки подынтегрального выражения ω , поэтому, согласно формуле Грина, имеем

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) dx dy = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0,$$

откуда следует равенство

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega,$$

показывающее, что интеграл I не зависит от выбора замкнутой кривой γ , окружающей начало координат. Взяв окружность $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \epsilon \cos \varphi, y = \epsilon \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, получим

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 \cos^2 \varphi + \epsilon^2 \sin^2 \varphi}{\epsilon^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi. \blacktriangleright$$

185. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой γ , заданной уравнением $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$, $a > 0, b > 0, n > 0$, и отрезками осей координат.

◀ Для решения примера воспользуемся формулой (7).

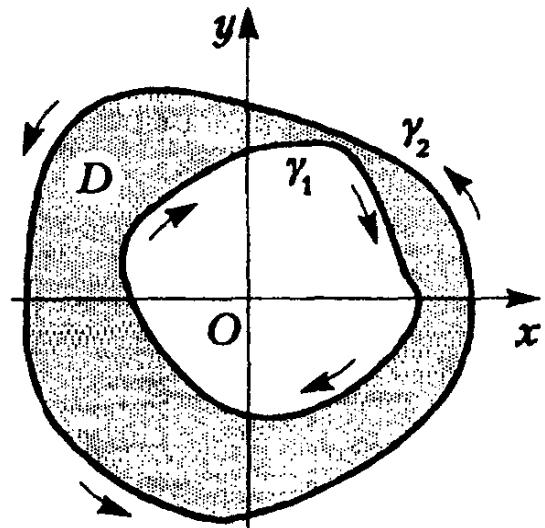


Рис. 20

Полагая $x = a\rho \cos^{\frac{2}{n}} \varphi$, $y = b\rho \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), получим уравнение заданной кривой в полярных координатах, используя которое, находим ее параметрические уравнения

$$x = \frac{a \left(\cos^2 \varphi \sin^{\frac{2}{n}} \varphi + \sin^2 \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \right)}{\sin^{\frac{2}{n}} \varphi}, \quad y = \frac{b \left(\cos^2 \varphi \sin^{\frac{2}{n}} \varphi + \sin^2 \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \right)}{\cos^{\frac{2}{n}} \varphi}.$$

Из равенства $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \operatorname{tg}^{\frac{2}{n}} \varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} d\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{2b}{na} \frac{\sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi}{\cos^{\frac{2}{n}+1} \varphi} d\varphi, \\ \frac{1}{2}(x dy - y dx) &= \frac{1}{2}x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{ab}{n} \left(\sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{3-\frac{2}{n}} \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi + \sin^{3-\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \right) d\varphi, \\ 0 < \varphi &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку $x dy - y dx = 0$ на отрезках осей координат, ограничивающих фигуру, то формула (7) принимает вид

$$P = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx.$$

Заменим криволинейный интеграл определенным, приняв во внимание равенство

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{3-\frac{2}{n}} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{3-\frac{2}{n}} \varphi d\varphi.$$

Получим

$$\begin{aligned} P &= \frac{2ab}{n} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{3-\frac{2}{n}} \varphi d\varphi \right) = \\ &= \frac{ab}{n} \left(\sin^2 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + B \left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{ab}{n} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \right). \end{aligned} \blacktriangleright$$

186. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой γ , заданной уравнением

$$\left(\frac{x}{a} \right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b} \right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a} \right)^n \left(\frac{y}{b} \right)^n, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad n > 0.$$

◀ Переходя к обобщенным полярным координатам по формулам $x = a\rho \cos^{\frac{2}{n+1}} \varphi$, $y = b\rho \sin^{\frac{2}{n+1}} \varphi$, получим уравнение кривой γ в виде $\rho = c \cos^{\frac{2n}{2n+1}} \varphi \sin^{\frac{2n}{2n+1}} \varphi$, из которого заключаем, что при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ кривая выходит из начала координат и возвращается в него, т.е. является петлей. Используя уравнение кривой γ в полярной системе координат, получим ее параметрические уравнения, в которых параметром служит угол φ :

$$x = a c \cos^{\frac{2n+2}{2n+1}} \varphi \sin^{\frac{2n}{2n+1}} \varphi, \quad y = b c \cos^{\frac{2n}{2n+1}} \varphi \sin^{\frac{2n+2}{2n+1}} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Далее действуем по той же схеме, что и при решении предыдущего примера:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \operatorname{tg}^{\frac{2}{2n+1}} \varphi, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2b}{a(2n+1)} \frac{\sin^{\frac{2}{2n+1}-1} \varphi}{\cos^{\frac{2}{2n+1}-1} \varphi} d\varphi,$$

$$\frac{1}{2}(x dy - y dx) = \frac{1}{2}x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{abc^2}{2n+1} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi,$$

$$P = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx = \frac{abc^2}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{abc^2}{2(2n+1)}. \blacktriangleright$$

187. Показать, что если γ — замкнутый контур и e — произвольное направление, то

$$I = \oint_{\gamma} \cos(\widehat{e, n}) dl \approx 0,$$

где n — внешняя единичная нормаль к контуру γ .

◀ Пусть $e = (\cos \alpha_0, \cos \beta_0)$ — произвольное направление. Поскольку $\|e\| = 1$ и $\|n\| = 1$, то $\cos(\widehat{e, n}) = \langle e, n \rangle$. Если кривая γ ограничивает область $D \subset \mathbb{R}^2$, то, применив формулу Остроградского (5), в которой $F = e$, получим

$$I = \oint_{\gamma} \langle e, n \rangle dl = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha_0 + \frac{\partial}{\partial y} \cos \beta_0 \right) dx dy = 0. \blacktriangleright$$

188. Найти значение интеграла

$$I = \oint_{\alpha} \left(x \cos(\widehat{n, i}) + y \cos(\widehat{n, j}) \right) dl,$$

где γ — простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область D , и n — внешняя нормаль к ней (i, j — орты осей координат).

◀ Поскольку $\cos(\widehat{n, i}) = \langle n, i \rangle$, $\cos(\widehat{n, j}) = \langle n, j \rangle$, то интеграл I преобразовывается к виду

$$I = \oint_{\gamma} (x \langle n, i \rangle + y \langle n, j \rangle) dl = \oint_{\gamma} \langle F, n \rangle dl,$$

где $F = xi + yj = (x, y)$. Осталось применить формулу (5):

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y \right) dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2P,$$

где P — площадь области D . \blacktriangleright

189. Найти $\lim_{d(D) \rightarrow 0} \frac{1}{B} \oint_{\gamma} \langle F, n \rangle dl$, где B — площадь области D , ограниченной контуром γ , окружающим точку (x_0, y_0) , $d(D)$ — диаметр области D , n — единичный вектор внешней нормали к контуру γ и $F = (P, Q)$ — вектор, непрерывно дифференцируемый в $D \cup \gamma$.

◀ Согласно формуле (5), имеем

$$\frac{1}{B} \oint_{\gamma} \langle F, n \rangle dl = \frac{1}{B} \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.$$

При стягивании контура γ в точку (x_0, y_0) получим, применив теорему о среднем и пользуясь непрерывной дифференцируемостью функций P и Q :

$$\lim_{d(D) \rightarrow 0} \frac{1}{B} \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Следовательно,

$$\lim_{d(D) \rightarrow 0} \frac{1}{B} \oint_{\gamma} \langle F, n \rangle dl = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0). \blacktriangleright$$

190. Доказать, что если S — замкнутая простая поверхность и e — любое постоянное направление, то

$$I = \iint_S \cos(\widehat{n, e}) dS = 0,$$

где n — внешняя единичная нормаль к поверхности S .

◀ Пусть $e = (\cos \alpha_0, \cos \beta_0, \cos \gamma_0)$ — единичный фиксированный вектор. Тогда можно написать равенство

$$\cos(\widehat{n, e}) = \langle n, e \rangle = \cos \alpha \cos \alpha_0 + \cos \beta \cos \beta_0 + \cos \gamma \cos \gamma_0,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали n . Применив формулу Остроградского (3), получим

$$I = \iint_S \langle n, e \rangle dS = \iiint_K \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha_0 + \frac{\partial}{\partial y} \cos \beta_0 + \frac{\partial}{\partial z} \cos \gamma_0 \right) dx dy dz = 0. \blacktriangleright$$

191. Доказать, что объем V конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью S , заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, и плоскостью, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вычисляется по формуле $V = \frac{PH}{3}$, где P — площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, H — его высота.

◀ Не ограничивая общности, можем считать, что вершина конуса находится в начале координат, а плоскость, в которой расположено основание конуса, пересекает положительную полуось Oz (этого всегда можно добиться путем линейного преобразования координат). Для вычисления объема конуса воспользуемся формулой (4), которую запишем в виде

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \langle r, n \rangle dS = \frac{1}{3} \iint_{S_1} \langle r, n \rangle dS + \frac{1}{3} \iint_{S_2} \langle r, n \rangle dS,$$

где S_1 — основание конуса, S_2 — его боковая поверхность, $r = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M = (x, y, z)$ на поверхности конуса, $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ — единичный вектор нормали к поверхности конуса (рис. 21). На боковой поверхности конуса векторы r и n ортогональны, поэтому

$$\iint_{S_2} \langle r, n \rangle dS = 0.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{3} \iint_{S_1} \langle r, n \rangle dS$.

На множестве S_1 выполняется равенство

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C},$$

откуда получаем

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$V = -\frac{D}{3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \iint_{S_1} dS = -\frac{DP}{3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где P — площадь основания конуса S . Из рис. 21 видно, что $H = -\frac{D}{C} \cos \gamma = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где H — высота конуса.

Таким образом, $V = \frac{PH}{3}$. ►

192. Найти объем тела T , ограниченного поверхности-ми, заданными параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, & y &= a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, \\ z &= c \sin u, & z &= \pm c \quad (a > 0, b > 0). \end{aligned}$$

◀ Пусть $c > 0$. В плоскости xOy имеем

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad u = 0, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Если $z = \pm c$, то $u = \pm \frac{\pi}{2}$, $x^2 + y^2 \leq b^2$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Следовательно, верхним и нижним основаниями тела T являются круги радиуса b . Таким образом,

$$T = \Phi(D), \text{ где } \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

$$D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi \right\}.$$

Если $a^2 > b^2$, то при $z > 0$ единичный вектор нормали n в каждой точке верхней части боковой поверхности образует с ортом k оси Oz острый угол, если же $a^2 < b^2$ — то тупой угол (рис. 22, 23).

Для вычисления объема V тела T воспользуемся формулой (4), записав ее в виде

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \langle r, n \rangle dS,$$

где $r = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M = (x, y, z)$, S — полная поверхность тела T . Разобъем интеграл на сумму интегралов

$$V = \frac{1}{3} \left(\iint_{S_1} \langle r, n \rangle dS + \iint_{S_2} \langle r, n \rangle dS + \iint_{S_3} \langle r, n \rangle dS \right),$$

где S_1 и S_2 — соответственно верхнее и нижнее основания тела, S_3 — его боковая поверхность. На поверхности S_1 выполняются равенства $n = (0, 0, 1)$, $r = (x, y, c)$, $\langle r, n \rangle = c$, а на поверхности S_2 имеем $n = (0, 0, -1)$, $r = (x, y, -c)$, $\langle r, n \rangle = -c$. Принимая во внимание, что на S_1 и на S_2 справедливо равенство $dS = dx dy$, получим

$$\iint_{S_1} \langle r, n \rangle dS = \iint_{S_2} \langle r, n \rangle dS = c \iint_{x^2+y^2 \leq b^2} dx dy = \pi b^2 c.$$

Для вычисления интеграла по поверхности S_3 нам понадобятся направляющие косинусы вектора n . Вычислим $C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = (b^2 - a^2) \sin u \cos v$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$. Если $a^2 > b^2$, то $C < 0$, и поскольку $\cos \gamma > 0$, то

$$\cos \gamma = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

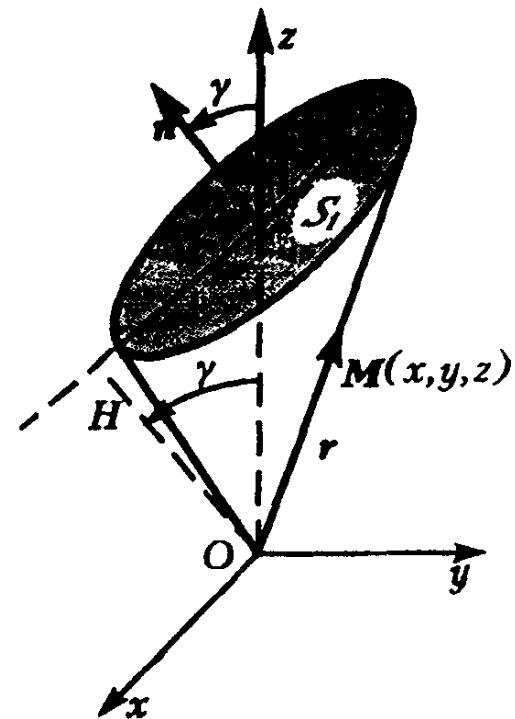


Рис. 21

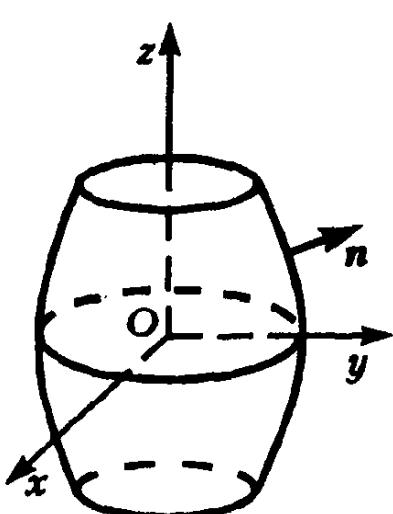


Рис. 22

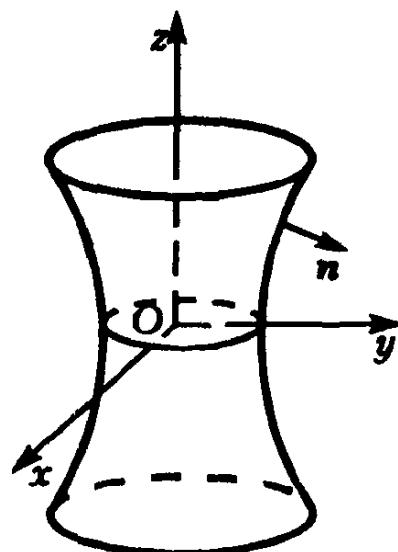


Рис. 23

Если $a^2 < b^2$, то $C > 0$, и поскольку $\cos \gamma < 0$, то

$$\cos \gamma = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Следовательно, принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$, имеем

$$\iint_{S_3} \langle r, n \rangle dS = - \iint_D (x(u, v)A + y(u, v)B + z(u, v)C) du dv,$$

где

$$A = \frac{\mathcal{D}(y, z)}{\mathcal{D}(u, v)} = -cx(u, v) \cos u, \quad B = \frac{\mathcal{D}(z, x)}{\mathcal{D}(u, v)} = -cy(u, v) \cos u.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \langle r, n \rangle dS &= \iint_D (c(x^2(u, v) + y^2(u, v)) \cos u + (a^2 - b^2)z(u, v) \sin u \cos u) du dv = \\ &= a^2 c \iint_D \cos u du dv = a^2 c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du \int_0^{2\pi} dv = 4\pi a^2 c. \end{aligned}$$

Складывая полученные значения, при $c > 0$ имеем

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 c + \frac{2}{3}\pi b^2 c = \frac{4}{3}\pi c \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right).$$

Если $c < 0$, то, очевидно, получим

$$V = -\frac{4}{3}\pi c \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right).$$

Окончательно имеем

$$V = \frac{4}{3}\pi |c| \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right). \blacktriangleright$$

Рассмотрим несколько примеров на применение формулы Остроградского (3).
Вычислить интегралы:

193. $I = \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, где S — внешняя сторона сферы, заданной

уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

◀ Используя формулу Остроградского (3), находим

$$I = 3 \iiint_K (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

где $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ — шар радиуса a . После перехода в интеграле к сферическим координатам получим

$$I = 3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^4 d\rho = \frac{12}{5} \pi a^5. \blacktriangleright$$

194. $I = \iint_S (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dz dx + (z - x + y) dx dy$, где S — внешняя

сторона поверхности, заданной уравнением $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

◀ Обозначим через T тело, ограниченное поверхностью S . Применив формулу (3), получим

$$I = \iiint_T \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - y + z) + \frac{\partial}{\partial y}(y - z + x) + \frac{\partial}{\partial z}(z - x + y) \right) dx dy dz = 3 \iiint_T dx dy dz.$$

Произведем в интеграле замену переменных, полагая $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$. Принимая во внимание равенство

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{\mathcal{D}(u, v, w)}{\mathcal{D}(x, y, z)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4},$$

находим

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{4} \iiint_{\substack{|u|+|v|+|w|\leq 1 \\ u+v+w\leq 1 \\ u\geq 0, v\geq 0, w\geq 0}} du dv dw = 6 \iiint_{\substack{u+v+w\leq 1 \\ u\geq 0, v\geq 0, w\geq 0}} du dv dw = 6 \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^{1-u-v} dw = \\ &= 6 \int_0^1 du \int_0^{1-u} (1-u-v) dv = 6 \int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2} du = (1-u)^3 \Big|_0^1 = 1. \blacktriangleright \end{aligned}$$

195. $I = \iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$, где S — часть конической поверхности,

заданной уравнением $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$, и $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали n к этой поверхности.

◀ Поскольку поверхность S незамкнута, то воспользоваться формулой Остроградского (3) нельзя. Рассмотрим замкнутую поверхность S_1 , которую получим, присоединив ко всем точкам поверхности S множество точек круга $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq h^2, z = h\}$. Множество S_1 является псевдомногообразием, поскольку в вершине конуса и на окружности $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = h^2, z = h\}$ вектор n не определен. Этими множествами можно пренебречь, так как они имеют меру 0, и рассматривать интеграл на множество

$S_3 = S_1 \setminus (\gamma \cup \{0, 0, 0\})$. Имеем равенство

$$I = \iint_{S_3} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS - \iint_{S_2 \setminus \gamma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS.$$

К интегралу на множестве S_3 можем применить формулу Остроградского (3), а на множестве $S_2 \setminus \gamma$ имеем $\cos \alpha = \cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 1$, $z^2 = h^2$, $dS = dx dy$. Поэтому получим

$$I = 2 \iiint_T (x + y + z) dx dy dz - h^2 \iint_{x^2 + y^2 < h^2} dx dy = 2 \iiint_T (x + y + z) dx dy dz - \pi h^4,$$

где $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < h^2, \sqrt{x^2 + y^2} < z < h\}$.

В тройном интеграле перейдем к цилиндрическим координатам и заменим полученный интеграл повторным. Найдем

$$\begin{aligned} \iiint_T (x + y + z) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho d\rho \int_{-\rho}^h (\rho(\sin \varphi + \cos \varphi) + z) dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(\rho(h - \rho)(\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{h^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho d\rho = \frac{\pi}{4} h^4. \end{aligned}$$

Окончательно имеем $I = \frac{\pi}{2} h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2} h^4$. ►

196. Вычислить интеграл Гаусса

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\widehat{r, n})}{r^2} dS,$$

где S — простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая компакт $T \subset \mathbb{R}^3$, n — внешняя нормаль к поверхности S в ее точке (ξ, η, ζ) , r — радиус-вектор, соединяющий точку (x, y, z) с точкой (ξ, η, ζ) , и $z = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

◀ Рассмотрим два случая: а) поверхность S не окружает точку (x, y, z) ; б) поверхность S окружает точку (x, y, z) .

В случае а) можем применить формулу Остроградского (3). Приняв во внимание равенство $\cos(\widehat{r, n}) = \frac{\langle r, n \rangle}{r}$, получим

$$\begin{aligned} I(x, y, z) &= \iint_S \left(\frac{\xi - x}{r^3} \cos \alpha + \frac{\eta - y}{r^3} \cos \beta + \frac{\zeta - z}{r^3} \cos \gamma \right) dS = \\ &= \iiint_T \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi - x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta - y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta - z}{r^3} \right) \right) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \iiint_T \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2 + 3(\eta - y)^2 + 3(\zeta - z)^2}{r^5} \right) d\xi d\eta d\zeta = \iiint_T \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) d\xi d\eta d\zeta = 0. \end{aligned}$$

В случае б) формулу Остроградского применять нельзя, так как интеграл $I(x, y, z)$ становится несобственным. Поэтому вычислим его непосредственно. Для этого рассмотрим произвольный простой компакт T_1 с краем S_1 , лежащий строго внутри тела T . Предположим, что $(x, y, z) \in T_1$, где T_1 — внутренность компакта T_1 . Множество $T \setminus T_1$ не содержит точку (x, y, z) и является компактом с ориентированным краем $S \cup S_1^-$, где S_1^- — ориентированная граница компакта T_1 , в каждой точке которой единичный вектор нормали n

направлен внутрь T_1 . Применив формулу Остроградского (3) на компакте $T \setminus T_1$, получим равенство

$$\iint_S \left\langle \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \mathbf{n} \right\rangle dS + \iint_{S_1^-} \left\langle \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \mathbf{n} \right\rangle dS = 0,$$

из которого следует, что

$$I(x, y, z) = \iint_{S_1} \left\langle \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \mathbf{n} \right\rangle dS,$$

где S_1 — произвольная гладкая поверхность, все точки которой являются внутренними точками компакта T . Таким образом, интеграл $I(x, y, z)$ не зависит от вида поверхности, окружающей точку (x, y, z) . Поэтому можем взять в качестве поверхности S_1 сферу достаточно малого радиуса $\epsilon > 0$. При этом получим

$$I(x, y, z) = \iint_{S_1} \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{r^3} dS = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{S_1} dS = \frac{4\pi\epsilon^2}{\epsilon^2} = 4\pi,$$

поскольку на сфере S_1 векторы \mathbf{r} и \mathbf{n} коллинеарны и выполняется равенство $r = \epsilon$. ►

197. Тело T целиком погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, доказать, что выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости в объеме тела и направлена вертикально вверх (закон Архимеда).

◀ Согласно закону Паскаля, погруженная в жидкость площадка испытывает давление, направленное по нормали к ней и равное весу столбика жидкости, основанием которого служит площадка, а высота столбика равна глубине погружения.

Пусть тело T ограничено гладкой или кусочно-гладкой поверхностью S и μ — удельный вес жидкости. Выберем систему координат $Oxyz$ так, чтобы свободная поверхность жидкости совпадала с плоскостью xOy , а ось Oz была направлена вверх. Рассмотрим элемент поверхности $d\sigma$, площадь которого равна dS , и пусть $M = (x, y, z) \in d\sigma$ — произвольная точка. Согласно закону Паскаля, можем написать приближенное равенство $dF(M) = \mu z n dS$, где $n(M)$ — единичный вектор нормали к поверхности S в точке M , z — аппликата этой точки.

Суммируя по всем элементам $d\sigma$ и совершая предельный переход, когда диаметры этих элементов стремятся к нулю, получим формулу для вычисления силы \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mu \iint_S z \mathbf{n}(M) dS = i\mu \iint_S z \cos \alpha dS + j\mu \iint_S z \cos \beta dS + k\mu \iint_S z \cos \gamma dS.$$

Применив к каждому поверхностному интегралу формулу Остроградского (3), найдем

$$\iint_S z \cos \alpha dS = \iint_S z \cos \beta dS = 0, \quad \iint_S z \cos \gamma dS = \iiint_T dx dy dz = V,$$

где V — объем тела T .

Окончательно получаем $\mathbf{F} = k\mu V = kP$, где P — вес тела T . ►

Рассмотрим несколько примеров на применение формулы Стокса (9).

198. Пусть γ — замкнутый контур, расположенный в плоскости, заданной уравнением $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ и ограничивающий площадку S , $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали \mathbf{n} к плоскости. Найти

$$I = \oint_{\gamma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

где контур γ пробегается в положительном направлении.

◀ В обозначениях формулы Стокса имеем

$$P = z \cos \beta - y \cos \gamma, \quad Q = x \cos \gamma - z \cos \alpha, \quad R = y \cos \alpha - x \cos \beta.$$

Применив формулу Стокса (9), получим

$$I = 2 \iint_S \cos \alpha dy dz + \cos \beta dz dx + \cos \gamma dx dy = 2 \iint_S (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) dS = 2 \iint_S dS = 2B,$$

где B — площадь площадки S . ▶

Применяя формулу Стокса (9), вычислить интегралы:

199. $I = \oint_{\gamma} y dx + z dy + x dz$, где γ — окружность, полученная в результате пересечения

сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ с плоскостью S_1 , заданной уравнением $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

◀ Применим формулу Стокса, взяв в ней в качестве поверхности круг S_2 радиуса a , лежащий в плоскости S_1 . Получим

$$I = - \iint_{S_2} dy dz + dz dx + dx dy = - \iint_{S_2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали n к плоскости S_1 . Так как вектор n и орт k оси Oz образуют острый угол, то в каждой из формул для вычисления $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ перед радикалом в знаменателе следует взять знак “+”. Прибавив во внимание, что $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, имеем

$$I = -\sqrt{3} \iint_{S_2} dS = -\sqrt{3}\pi a^2,$$

так как площадь круга S_2 равна πa^2 . ▶

200. $I = \int_{\gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, где γ — кривая, полученная в результате

пересечения поверхности S цилиндра $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, z \in \mathbb{R}\}$ с плоскостью S_1 , заданной уравнением $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1, a > 0, h > 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

◀ По формуле Стокса (9) имеем

$$I = -2 \iint_{S_2} dy dz + dz dx + dx dy = -2 \iint_{S_2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS,$$

где $S_2 = T \cap S_1$ — множество всех точек эллипса

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \right\},$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали n к плоскости S_1 . Множество точек S_2 проектируется на круг $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Поскольку нормаль к плоскости S_1 образует острый угол с ортом k оси Oz , то в каждой из формул

$$\cos \alpha = \frac{-z'_x}{\pm \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-z'_y}{\pm \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$

перед радикалом в знаменателе следует взять знак “+”. Переходя от поверхностного интеграла к двойному и принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$, получим

$$I = 2 \iint_D (z'_x(x, y) + z'_y(x, y) - 1) dx dy.$$

Так как на множестве S_1 выполняется равенство $z = h - \frac{h}{a}x$, то $z'_x = -\frac{h}{a}$, $z'_y = 0$. Следовательно,

$$I = -2 \iint_D \left(1 + \frac{h}{a}\right) dx dy = -2 \left(1 + \frac{h}{a}\right) \pi a^2 = -2\pi a(a+h). \blacktriangleright$$

201. $I = \oint_{\gamma} (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, где γ — кривая, полученная

в результате пересечения полусферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, z > 0\}$ и поверхности $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2rx, z \in \mathbb{R}\}$, $0 < r < R$, пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне полусферы S наименьшая область остается слева.

◀ Применив формулу Стокса, получим поверхностный интеграл

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{S_2} (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy = \\ &= 2 \iint_{S_2} ((y - z) \cos \alpha + (z - x) \cos \beta + (x - y) \cos \gamma) dS, \end{aligned}$$

где S_2 — кусок полусферы S , вырезанный из нее поверхностью S_1 , $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали n к S_2 . На множестве S_2 выполнены равенства $z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$, $z'_x = \frac{R-x}{z}$, $z'_y = -\frac{y}{z}$. Так как вектор n и орт k оси Oz образуют острый угол, то в формулах для вычисления $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ перед радикалом в знаменателе следует взять знак “+”. Принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy$, получим

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_D ((y - z(x, y))(-z'_x(x, y)) + (z(x, y) - x)(-z'_y(x, y)) + (x - y)) dx dy = \\ &= 2 \iint_D \left(\frac{(y - z(x, y))(x - R) + (z(x, y) - x)y}{z(x, y)} + x - y \right) dx dy = 2R \iint_D \left(1 - \frac{y}{z(x, y)} \right) dx dy, \end{aligned}$$

где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2rx\}$. Поскольку

$$\iint_D \frac{y}{z(x, y)} dx dy = \int_0^r dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} \frac{y dy}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}} = \int_0^r \left(\sqrt{2Rx-x^2-y^2} \Big|_{y=-\sqrt{2rx-x^2}}^{y=\sqrt{2rx-x^2}} \right) dx = 0,$$

то окончательно имеем

$$I = 2R \iint_D dx dy = 2\pi Rr^2. \blacktriangleright$$

202. $I = \oint_{\gamma} y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz$, где γ — замкнутая кривая, заданная уравнениями $x = a \cos t$, $y = a \cos 2t$, $z = a \cos 3t$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t .

◀ При изменении t от 0 до π подвижная точка $M = (x, y, z)$ пробегает часть кривой γ от точки $M_0 = (a, a, a)$ до точки $M_1 = (-a, a, -a)$, а при изменении t от π до 2π точка M пробегает ту же самую часть кривой γ в противоположном направлении — от точки M_1 до точки M_0 . Таким образом, точки замкнутой кривой γ взаимно накладываются, и эта кривая не ограничивает никакой поверхности. Следовательно, $I = 0$. \blacktriangleright

Упражнения для самостоятельной работы

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

139. $I = \oint_{\gamma} xy^2 dy - x^2 y dx$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$.

140. $I = \oint_{\gamma} (x+y) dx - (x-y) dy$, где $\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$.

141. $I = \oint_{\gamma} e^{-(x^2+y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$.

142. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $(x, y) \mapsto F(x, y)$, чтобы криволинейный интеграл

$$\int_{A \cap B} F(x, y) (y dx + x dy)$$

не зависел от вида пути интегрирования?

143. Вычислить $I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2}$, если $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ и простой замкнутый контур γ окружает начало координат ($ad - bc \neq 0$).

144. Вычислить интеграл I (см. предыдущую задачу), если $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$ и простой контур γ окружает начало координат, причем кривые, определяемые уравнениями $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$, имеют несколько простых точек пересечения внутри контура γ .

145. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой γ , заданной уравнением

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m, \quad a > 0, \quad n > 0, \quad m > 0.$$

146. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox простого замкнутого контура γ , расположенного в верхней полуплоскости $y \geq 0$, равен

$$V = -\pi \oint_{\gamma} y^2 dx.$$

Применяя формулу Остроградского, преобразовать следующие поверхностные интегралы, если гладкая поверхность S ограничивает конечный объем V и $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали n к поверхности S :

147. $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$. 148. $\iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS$.

149. $\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS$.

150. Вычислить интеграл $I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, где S — внешняя сторона границы куба $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$.

151. Найти объем тела T , ограниченного поверхностью S , заданной уравнениями $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = -u + a \cos v$, $u \geq 0$, $a > 0$, и плоскостями $x = 0$, $z = 0$.

152. Доказать формулу

$$\iiint_K \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\widehat{r, n}) dS,$$

где S — край компакта K , n — внешняя единичная нормаль к поверхности S в точке (ξ, η, ζ) , $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (y - \eta)^2 + (\zeta - z)^2}$ и $r = (\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$ — радиус-вектор, идущий от точки (x, y, z) к точке (ξ, η, ζ) .

153. Вычислить интеграл $\int_{\gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz$, где $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$: а) непосредственно; б) используя формулу Стокса (в качестве поверхности S взять полусферу, заданную уравнением $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$). Интегрирование по окружности γ вести в положительном направлении.

154. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл $\oint_{\gamma} y \, dx + z \, dy + x \, dz$,

где γ — окружность, полученная в результате пересечения сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ с плоскостью, заданной уравнением $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

155. Вычислить интеграл

$$\int_{A \rightarrow B} (x^2 - yz) \, dx + (y^2 - xz) \, dy + (z^2 - xy) \, dz,$$

взятый по отрезку винтовой линии, заданной уравнениями $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = \frac{h}{2\pi} \varphi$, от точки $A = (a, 0, 0)$ до точки $B = (a, 0, h)$.

Применяя формулу Стокса, вычислить интегралы:

156. $I = \oint_{\gamma} (y + z) \, dx + (z + x) \, dy + (x + y) \, dz$, где γ — эллипс, заданный уравнениями $x = a \sin^2 t$, $y = 2a \sin t \cos t$, $z = a \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$, пробегаемый в направлении возрастания параметра t .

157. $I = \oint_{\gamma} (y^2 - z^2) \, dx + (z^2 - x^2) \, dy + (x^2 - y^2) \, dz$, где γ — сечение поверхности куба $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$ плоскостью, заданной уравнением $x + y + z = \frac{3}{2}a$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

§ 6. Элементы векторного анализа

6.1. Скалярные и векторные поля.

Если каждой точке M пространства \mathbb{R}^m , $m \geq 1$, или некоторой области этого пространства поставлено в соответствие некоторое число $f(M)$, то говорят, что задано скалярное поле f (например, поле давления в атмосфере, поле плотности сплошного распределения массы в объеме V и т. д.).

Если каждой точке M пространства \mathbb{R}^m , $m \geq 1$, или области этого пространства поставлено в соответствие некоторый вектор $u(M)$, то говорят, что задано векторное поле u (например, поле тяготения системы масс или силошного распределения массы в ограниченном объеме, поле плотности импульса, поле плотности тока, поле магнитных сил и т. п.).

6.2. Плотность аддитивной функции областей. Восстановление аддитивной функции по ее плотности.

Пусть $\Phi(K)$ — аддитивная функция компакта K , т.е. функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi(K_1 \cup K_2) = \Phi(K_1) + \Phi(K_2)$$

для любых двух компактов без общих внутренних точек. Число

$$\varphi(M) = \lim_{K \rightarrow M} \frac{\Phi(K)}{\mu K}, \quad (1)$$

где μK — мера компакта K , называется *плотностью функции* Φ в точке $M \in K$.

Если плотность $\varphi(M)$ аддитивной функции областей Φ непрерывна или кусочно-непрерывна на компакте K , то

$$\Phi(K) = \int_K \varphi(x) \, dx. \quad (2)$$

6.3. Дифференциальный оператор Гамильтона.

Пусть $\{\varphi(M), u(M), \dots\}$ — множество скалярных и векторных полей, имеющих непрерывные производные по всем координатам, и пусть $T(p) = T(p; \varphi(M), u(M), \dots)$ — некоторое выражение, имеющее смысл скаляра или вектора, линейное относительно произвольного вектора p :

$$T(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = \alpha_1 T(p_1) + \alpha_2 T(p_2),$$

где α_1, α_2 — произвольные действительные числа.

Пусть $p = ai + bj + ck$. Тогда, в силу линейности T , имеем

$$T(p) = aT(i) + bT(j) + cT(k). \quad (1)$$

Полагаем

$$T(\nabla) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} T(i) + \frac{\partial}{\partial y} T(j) + \frac{\partial}{\partial z} T(k), \quad (2)$$

заменяя в (1) компоненты вектора p символами дифференцирования по x, y и z соответственно.

Символ ∇ (набла) называется *дифференциальным оператором Гамильтона*.

В векторном анализе наиболее важными выражениями T , о которых упоминалось выше, являются:

- а) $T(p; \varphi) = p\varphi$ (φ — скалярное поле);
- б) $T(p; u) = \langle p, u \rangle$ (скалярное произведение);
- в) $T(p; u) = [p, u]$ (векторное произведение).

На основании (2) получаем:

- а) $T(\nabla) = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} i + \frac{\partial\varphi}{\partial y} j + \frac{\partial\varphi}{\partial z} k;$
- б) $T(\nabla) = \langle \nabla, u \rangle = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, если $u = (P, Q, R);$
- в) $T(\nabla) = [\nabla, u] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k.$

Вектор в правой части а) называется *градиентом скалярного поля* φ . Выражение в правой части б) называется *расходимостью* (или *дивергенцией*) *векторного поля* u . Вектор в правой части в) называется *вихрем* (или *ротором*) *векторного поля* u .

6.4. Производная скалярного поля по направлению. Градиент скалярного поля.

Пусть φ — скалярное поле, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, γ — гладкая кривая, лежащая в Ω и проходящая через фиксированную точку $M_0 \in \Omega$, Δl — длина дуги кривой от точки M_0 до точки M . Если при $M \rightarrow M_0$ существует конечный предел отношения

$$\frac{\Delta\varphi(M_0)}{\Delta l} = \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\Delta l},$$

то он называется *производной скалярного поля* φ в точке M_0 вдоль кривой γ и обозначается $\frac{\partial\varphi}{\partial l}(M_0)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}(M_0) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\Delta l}. \quad (1)$$

Если функция φ дифференцируема в точке M_0 , то ее производная вдоль кривой γ существует и для всех кривых, выходящих из точки M_0 с одной и той же касательной $\tau = (\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$, значение этой производной одно и то же, а сама производная называется *производной по данному направлению* τ и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}(M_0) = \langle \text{grad } \varphi(M_0), \tau \rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0) \cos \alpha_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0) \cos \beta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M_0) \cos \gamma_1. \quad (2)$$

Вектор $\text{grad } \varphi(M_0) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M_0) \right)$ направлен из точки M_0 в сторону быстрейшего возрастания скалярного поля φ , а его евклидова норма равна абсолютной величине производной поля φ в этом направлении.

На гладкой поверхности уровня $\varphi(M) = C$, $C = \text{const}$, касательная плоскость к поверхности в точке M_0 ортогональна вектору $\text{grad } \varphi(M_0)$.

6.5. Потенциальные векторные поля. Циркуляция векторного поля.

Любое векторное поле \mathbf{u} , совпадающее с полем градиента некоторого скалярного поля φ , называется *потенциальным*, а функцию φ называют в этом случае *потенциалом поля \mathbf{u}* .

Если вектор поля \mathbf{u} имеет физический смысл силы, то потенциал φ этого поля имеет физический смысл работы. Работа A силы \mathbf{u} на гладкой или кусочно-гладкой кривой γ , соединяющей точку M_0 с точкой M_1 , вычисляется по формуле

$$A = \int_{\gamma} \langle \mathbf{u}, \tau \rangle dl, \quad (1)$$

где τ — единичный касательный вектор к кривой γ .

В силу условия $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi$, из (1) получаем

$$A = \int_{M_0 M_1} \langle \operatorname{grad} \varphi, \tau \rangle dl = \int_{M_0 M_1} \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = \varphi(M_1) - \varphi(M_0), \quad (2)$$

т.е. работа силы на пути $M_0 M_1$ равна разности потенциалов в точках M_1 и M_0 .

Если \mathbf{u} — произвольное непрерывное векторное поле, то интеграл по замкнутому контуру

$$\oint_{\gamma} \langle \mathbf{u}, \tau \rangle dl \quad (3)$$

называется *циркуляцией поля \mathbf{u} по контуру γ* .

Циркуляция непрерывного потенциального векторного поля \mathbf{u} по всякому замкнутому контуру γ , лежащему в односвязной области, равна нулю. Справедливо и обратное утверждение: если циркуляция непрерывного векторного поля \mathbf{u} равна нулю по любому замкнутому контуру γ , лежащему в односвязной области, то поле \mathbf{u} потенциально.

6.6. Поток и расходимость векторного поля.

Пусть S — конечная гладкая или кусочно-гладкая поверхность, \mathbf{u} — векторное поле, заданное в области Ω , содержащей все точки поверхности S . Выражение

$$w(\mathbf{u}; S) = \iint_S \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle dS, \quad (1)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали, характеризующий сторону поверхности, называется *потоком поля \mathbf{u} через поверхность S* . Вычисление потока является линейной операцией. Если поверхность S , ограничивающая область Ω , замкнута и при стягивании области Ω в точку M существует конечный предел

$$\lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{w(\mathbf{u}; S)}{\mu \Omega},$$

где $\mu \Omega$ — жорданова мера множества Ω , то он называется *расходимостью* или *дивергенцией векторного поля \mathbf{u} в точке $M \in \Omega$* и обозначается $\operatorname{div} \mathbf{u}(M)$:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(M) = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{\mu \Omega} \iint_S \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle dS. \quad (2)$$

Таким образом, по определению $\operatorname{div} \mathbf{u}(M)$ есть плотность аддитивной функции областей — потока векторного поля \mathbf{u} через замкнутую поверхность S . Если компоненты поля $\mathbf{u} = (P, Q, R)$ имеют в области Ω непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$, то справедлива формула

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M), \quad (3)$$

получаемая на основании формулы (2), формулы Остроградского и теоремы о среднем:

Ранее, в п.6.3, показали, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = \langle \nabla, \mathbf{u} \rangle$, где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона.

6.7. Вихрь векторного поля.

Пусть u — непрерывное векторное поле, заданное в конечной области Ω с гладкой или кусочно-гладкой границей S , $n(M)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке M . Вектор-функция

$$Q(\Omega) = \iint_S [n, u] dS \quad (1)$$

называется циркуляцией поля u по границе области Ω . Если существует конечный предел

$$q(P) = \lim_{\Omega \rightarrow P} \frac{Q(\Omega)}{\mu\Omega}, \quad (2)$$

то вектор q называется *вихрем* или *ротором поля* u в точке $P \in \Omega$ и обозначается $\operatorname{rot} u(P)$:

$$\operatorname{rot} u(P) = \lim_{\Omega \rightarrow P} \frac{1}{\mu\Omega} \iint_S [n, u] dS, \quad (3)$$

где $\mu\Omega$ — жорданова мера множества Ω .

Таким образом, по определению, $\operatorname{rot} u(P)$ есть плотность аддитивной функции областей — циркуляции векторного поля u по границе области Ω .

Если компоненты поля $u = (P, Q, R)$ имеют непрерывные частные производные по переменным x, y и z , то вихрь поля u в точке $P' \in \Omega$ можно вычислить по формуле

$$\operatorname{rot} u(P') = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k. \quad (4)$$

В п.6.3 было показано, что $\operatorname{rot} u = [\nabla, u]$.

Классические формулы Остроградского и Стокса в обозначениях векторного анализа принимают соответственно вид

$$\iiint_{\Omega \cup S} \operatorname{div} u dx dy dz = \iint_S \langle u, n \rangle dS, \quad (5)$$

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} u, n \rangle dS = \oint_{\gamma} \langle u, \tau \rangle dl. \quad (6)$$

Определение. Если в каждой точке M области Ω выполняется равенство $\operatorname{rot} u(M) = 0$, то поле u называется *безвихревым*.

Теорема. В односвязной области всякое безвихревое поле потенциально.

6.8. Дифференциальные операции первого порядка.

В выражениях $T(\nabla; \varphi, u, \dots)$, рассмотренных в п.6.3, можно производить любые тождественные преобразования, допускаемые правилами линейной алгебры, считая при этом символ ∇ вектором, например:

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi_1 + \varphi_2) &= \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2, \\ \langle \nabla, u_1 + u_2 \rangle &= \langle \nabla, u_1 \rangle + \langle \nabla, u_2 \rangle, \\ [\nabla, u_1 + u_2] &= [\nabla, u_1] + [\nabla, u_2]. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема. Если оператор ∇ действует на произведение (численное, скалярное, векторное) двух величин, то результат можно представить как сумму двух слагаемых того же вида, в каждом из которых ∇ действует на один из сомножителей и не действует на другой, аналогично правилу обычного дифференцирования произведения двух числовых функций.

203. Пусть $u = xy - z^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Найти величину и направление $\operatorname{grad} u$ в точке $M = (-9, 12, 10)$. Чему равна производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ в направлении биссектрисы координатного угла xOy ?

◀ Используя определение градиента скалярного поля, получаем

$$\operatorname{grad} u(M) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M) \right) = (12, -9, -20), \quad \|\operatorname{grad} u(M)\| = \sqrt{12^2 + 9^2 + 20^2} = 25.$$

Направление $\operatorname{grad} u(M)$ определяется вектором

$$e(M) = \frac{\operatorname{grad} u(M)}{\|\operatorname{grad} u(M)\|} = \left(\frac{12}{25}, -\frac{9}{25}, -\frac{4}{5} \right) = (\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1).$$

Единичный вектор τ , выходящий из начала координат в направлении биссектрисы первого координатного угла, имеет вид $\tau = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$. Согласно формуле (2), п. 6.4, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \langle \operatorname{grad} u(M), \tau \rangle = \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

204. В каких точках пространства $Oxyz$ градиент поля $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: а) перпендикулярен к оси Oz ; б) параллелен оси Oz ; в) равен нулю?

◀ Из определения градиента скалярного поля следует, что $\operatorname{grad} u(x, y, z) = (3(x^2 - yz), 3(y^2 - xz), 3(z^2 - xy))$. В случае а) имеем $\langle \operatorname{grad} u, k \rangle = 3(z^2 - xy) = 0$, откуда $z^2 = xy$.

В случае б) вектор $\operatorname{grad} u(x, y, z)$ коллинеарен орту k оси Oz , вследствие чего в каждой точке искомого множества должны одновременно выполняться равенства $x^2 - yz = 0$, $y^2 - xz = 0$. Исключив из них z , найдем $x^3 - y^3 = 0$, откуда $x = y$ и $x^2 + xy + y^2 = 0$. Второе равенство выполняется лишь в случае, когда $x = y = 0$. Подставляя $x = y$ в любое из исходных равенств, получаем, что $x = y = z$. Следовательно, градиент скалярного поля u параллелен оси Oz в точках $x = y = 0$ и в точках $x = y = z$.

В случае в) получаем равенства $x^2 - yz = 0$, $y^2 - xz = 0$, $z^2 - xy = 0$, которые должны выполняться одновременно. Используя результат, полученный при рассмотрении случая б), имеем $x = y = z$. ▶

205. Дано скалярное поле $u = \ln \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. В каких точках пространства $Oxyz$ выполняется равенство $\|\operatorname{grad} u\| = 1$?

◀ Принимая во внимание равенства $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r^2}$, получаем $\|\operatorname{grad} u\| = \frac{1}{r}$.

Равенство $\|\operatorname{grad} u\| = 1$ выполняется на сфере единичного радиуса с центром в точке $M = (a, b, c)$, т.е. на множестве точек $r = 1$. ▶

206. Найти косинус угла α между градиентами поля $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $A = (1, 2, 2)$ и $B = (-3, 1, 0)$.

◀ Косинус угла α вычислим по формуле

$$\cos \alpha = \frac{\langle \operatorname{grad} u(A), \operatorname{grad} u(B) \rangle}{\|\operatorname{grad} u(A)\| \|\operatorname{grad} u(B)\|}.$$

Обозначив $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, последовательно получим

$$u = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{r^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{r^4}, \quad r(A) = 3, \quad r(B) = \sqrt{10},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = \frac{7}{81}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A) = -\frac{4}{81}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(A) = -\frac{4}{81}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(B) = -\frac{2}{25}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(B) = \frac{3}{50}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(B) = 0,$$

$$\langle \operatorname{grad} u(A), \operatorname{grad} u(B) \rangle = -\frac{4}{405}, \quad \|\operatorname{grad} u(A)\| \|\operatorname{grad} u(B)\| = \frac{1}{90}, \quad \cos \alpha = -\frac{4}{405} : \frac{1}{90} = -\frac{8}{9}. \blacktriangleright$$

207. Вычислить: а) $\operatorname{grad} r$; б) $\operatorname{grad} r^2$; в) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

◀ Рассмотрим скалярное поле $\varphi(M) = f(r)$, $r \in \mathbb{R}$, где f — дифференцируемая функция. Его поверхности уровня — сферы с центром в начале координат $O = (0, 0, 0)$. Градиент поля

φ направлен по нормали к сфере, т.е. по радиусу OM . Функция f возрастает, если $f'(r) > 0$, и убывает, если $f'(r) < 0$, поэтому вектор $\operatorname{grad} f(r)$ направлен в сторону возрастания r , если $f'(r) > 0$, и в сторону убывания r , если $f'(r) < 0$, причем $\|\operatorname{grad} f(r)\| = |f'(r)|$. В силу сказанного выше, имеем

$$\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r} r,$$

где $r = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M = (x, y, z)$.

В случае а) $f'(r) = 1$, поэтому $\operatorname{grad} r = \frac{r}{r} = e(O, M)$. В случае б) $f'(r) = 2r$, поэтому $\operatorname{grad} r^2 = 2r$. В случае в) $f'(r) = -\frac{1}{r^2}$, в силу чего $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{r}{r^3}$. ►

208. Доказать формулу $\nabla^2(uv) = u\nabla^2v + v\nabla^2u + 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle$, где $\nabla^2 = \langle \nabla \cdot \nabla \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

◀ Записав $\nabla^2(uv) = \langle \nabla, \nabla(uv) \rangle$ и воспользовавшись правилами действий оператором Гамильтона, получим

$$\begin{aligned} \nabla(uv) &= v\nabla u + u\nabla v, \quad \langle \nabla, \nabla(uv) \rangle = \langle \nabla, v\nabla u \rangle + \langle \nabla, u\nabla v \rangle = \\ &= v\nabla^2 u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle + u\nabla^2 v + \langle \nabla v, \nabla u \rangle = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

209. Доказать, что если функция u дифференцируема в выпуклой области $V \subset \mathbb{R}^3$ и $\|\operatorname{grad} u\| \leq M$, где $M = \text{const}$, то для любых точек A и B из V имеем $|u(A) - u(B)| \leq M\rho(A, B)$, где $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B .

◀ Обозначив $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (x_1, y_1, z_1)$, $P = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ и используя свойство дифференцируемости функции u , получим

$$|u(A) - u(B)| = |du(\xi)|, \quad \xi \in V.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} |du(\xi)| &= \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi)(x_0 - x_1) + \frac{\partial u}{\partial y}(\xi)(y_0 - y_1) + \frac{\partial u}{\partial z}(\xi)(z_0 - z_1) \right| = \\ &= |\langle \operatorname{grad} u(\xi), P \rangle| \leq \|\operatorname{grad} u(\xi)\| \|P\| = \|\operatorname{grad} u(\xi)\| \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2} = \\ &= \|\operatorname{grad} u(\xi)\| \rho(A, B) \leq M \rho(A, B), \end{aligned}$$

то $|u(A) - u(B)| \leq M \rho(A, B)$. ►

210. Найти производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, в данной точке $M = (x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора r этой точки. В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

◀ По формуле (2), п.6.4, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M) = \left\langle \operatorname{grad} u(M), \frac{r}{r} \right\rangle = \frac{1}{r} \langle \operatorname{grad} u(M), r \rangle = \frac{1}{r} \left(\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} + \frac{2z^2}{c^2} \right) = \frac{2}{r} u(M),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Из условия $\frac{\partial u}{\partial e}(M) = \|\operatorname{grad} u(M)\|$ получаем $\frac{\|\operatorname{grad} u(M)\|}{\|\operatorname{grad} u(M)\|} = \frac{r}{r}$. Последнее равенство, как легко проверить, выполняется, если $a = b = c$. ►

211. Найти дивергенцию поля $u = \frac{-ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M = (3, 4, 5)$. Чему приближенно равен поток вектора u через бесконечно малую сферу

$$S_\epsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = \epsilon^2\}?$$

◀ С помощью формулы (3), п.6.6, получаем

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\operatorname{div} u(M) = \frac{18}{125}.$$

Дивергенция поля u является плотностью аддитивной функции областей — потока $w(u; S)$, для восстановления которого следует применить формулу (2), п.6.2:

$$w(u; S) = \iiint_T \operatorname{div} u(x, y, z) dx dy dz,$$

где $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 \leq \varepsilon^2\}$.

Поскольку шар бесконечно мал, т.е. $\varepsilon \rightarrow +0$, то можем взять $\operatorname{div} u(x, y, z) \approx \operatorname{div} u(M) = \frac{18}{125}$. При этом получим

$$w(u; S) \approx \iiint_T \operatorname{div} u(M) dx dy dz = \frac{18}{125} \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = \frac{24}{125} \pi \varepsilon^3. \blacktriangleright$$

212. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В каком случае $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = 0$?

◀ В примере 207 получена формула $\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r} r$ в предположении, что функция f дифференцируема. Здесь будем считать, что она дважды дифференцируема. Обозначив $\frac{f'(r)}{r} = \varphi(r)$, запишем упомянутую формулу в виде $\operatorname{grad} f(r) = \varphi(r)r$, где $r = (x, y, z)$.

Пользуясь оператором ∇ и правилами действий с ним, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) &= \langle \nabla, \varphi(r)r \rangle = \langle r, \nabla \varphi(r) \rangle + \varphi(r) \langle \nabla, r \rangle = \\ &= \langle r, \operatorname{grad} \varphi(r) \rangle + \varphi(r) \operatorname{div} r = \langle r, \operatorname{grad} \varphi(r) \rangle + 3\varphi(r), \end{aligned}$$

так как $\operatorname{div} r = 3$. Принимая во внимание равенства $\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\varphi'(r)}{r} r$, $\langle r, \operatorname{grad} \varphi \rangle = \left\langle r, \frac{\varphi'(r)}{r} r \right\rangle = \frac{\varphi'(r)}{r} r^2 = r\varphi'(r)$, находим

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = r\varphi'(r) + 3\varphi(r) = f''(r) - \frac{f'(r)}{r} + \frac{3f'(r)}{r} = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r},$$

так как $\varphi'(r) = \frac{f''(r)}{r} + \frac{f'(r)}{r^2}$.

Приравнивая $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$ к нулю, получим дифференциальное уравнение $(rf'(r))' + f'(r) = 0$, решая которое, находим $rf'(r) + f(r) = c_1$. Применив метод вариации произвольной постоянной, окончательно получим $f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные. ▶

213. Найти: а) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

◀ Применив оператор ∇ , получим:

а) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) = \langle \nabla, u \operatorname{grad} u \rangle = \langle \operatorname{grad} u, \nabla u \rangle + u \langle \nabla, \operatorname{grad} u \rangle = \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u \rangle + u \langle \nabla, \nabla u \rangle = |\operatorname{grad} u|^2 + u \nabla^2 u = |\operatorname{grad} u|^2 + u \Delta u$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \langle \nabla, u \operatorname{grad} v \rangle = \langle \operatorname{grad} v, \nabla u \rangle + u \langle \nabla, \operatorname{grad} v \rangle = \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle + u \Delta v$. ▶

214. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси Oz против хода часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω . Найти расходимость вектора скорости v и вектора ускорения w в точке $M = (x, y, z)$ пространства в данный момент времени.

◀ Линейная скорость v частицы жидкости в точке M равна вектору $v = [\omega, r]$, где $\omega = \omega k$, $r = ix + jy + kz$. Получаем

$$v = j\omega x - i\omega y, \quad \operatorname{div} v(M) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = 0.$$

Ускорение $w(x, y, z)$ выражается формулой

$$w = [\omega, v] = [\omega, [\omega, r]] = \omega \langle \omega, r \rangle - r \langle \omega, \omega \rangle = k\omega^2 z - \omega^2 r = -\omega^2(ix + jy).$$

Согласно формуле (3), п.6.6, имеем

$$\operatorname{div} w(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega^2 x) + \frac{\partial}{\partial y}(-\omega^2 y) = -2\omega^2. \blacktriangleright$$

215. Найти дивергенцию гравитационного силового поля, создаваемого системой притягивающих центров.

◀ Рассмотрим векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{P})$, созданное системой материальных точек m_j , $j = \overline{1, n}$, помещенных в точках M_j , $j = \overline{1, n}$. Это поле задано формулой

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r^3(\mathbf{P}, M_j)} \mathbf{r}(\mathbf{P}, M_j), \quad \mathbf{P} \neq M_j,$$

где $\mathbf{r}(\mathbf{P}, M_j)$ — радиус-вектор, проведенный из точки \mathbf{P} в точку M_j , $r(\mathbf{P}, M_j)$ — его длина. Поскольку вычисление дивергенции является линейной операцией, то

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^n \operatorname{div} \left(\frac{m_j}{r^3(\mathbf{P}, M_j)} \mathbf{r}(\mathbf{P}, M_j) \right).$$

Таким образом, задача свелась к вычислению расходности поля $F_j(\mathbf{P}) = \varphi_j(r)r$, где $\varphi_j(r) = \frac{m_j}{r^3(\mathbf{P}, M_j)}$, рассмотренного в примере 212. Там было показано, что $\operatorname{div} F_j(\mathbf{P}) = r\varphi'_j(r) + 3\varphi_j(r)$. Подставив сюда $r\varphi'_j(r) = -3\frac{m_j}{r^3}$, получим

$$\operatorname{div} F_j(\mathbf{P}) = -\frac{3m_j}{r} + \frac{3m_j}{r} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{P}) = 0.$$

Результат объясняется тем, что поле тяготения не имеет источников вне масс m_j , в силу чего мощность источников этого поля, характеризуемая расходностью, равна нулю. ►

216. Доказать формулу $\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{u}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{u} + [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{u}]$.

◀ Применив оператор Гамильтона, находим

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{u}) = [\nabla, \varphi \mathbf{u}] = [\nabla, \varphi \mathbf{u}_c] + [\nabla, \varphi_c \mathbf{u}],$$

где значок “с” указывает, что оператор набла на данный объект не действует. Если объект, на который оператор ∇ не действует, находится позади ∇ , то будем индекс “с” опускать. Имеем

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{u}) = -[\mathbf{u}, \nabla \varphi] + \varphi [\nabla, \mathbf{u}] = -[\mathbf{u}, \operatorname{grad} \varphi] + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{u} = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{u} + [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{u}]. \blacktriangleright$$

217. Найти $\operatorname{rot}(f(r)\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

◀ На основании формулы, доказанной в примере 216, имеем: $\operatorname{rot}(f(r)\mathbf{r}) = [\nabla, f(r)\mathbf{r}] = f(r)\operatorname{rot}\mathbf{r} + [\operatorname{grad} f(r), \mathbf{r}]$. С помощью формулы (4), п.6.7, находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Решая пример 207, мы нашли, что $\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$. Таким образом, окончательно имеем:

$$\operatorname{rot}(f(r)\mathbf{r}) = \left[\frac{f'(r)}{r} \mathbf{r}, \mathbf{r} \right] = 0. \blacktriangleright$$

218. Найти а) $\operatorname{rot} c f(r)$; б) $\operatorname{rot}[c, f(r)\mathbf{r}]$ (c — постоянный вектор).

◀ а) Пользуясь обозначениями и правилами, которые были применены при решении примера 216, получаем:

$$\operatorname{rot} c f(r) = [\nabla, c f(r)] = [\nabla, c f_c(r)] + [\nabla, c_c f(r)] = f(r)[\nabla, c] - [c, \nabla f(r)] =$$

$$= f(r) \operatorname{rot} c + [\operatorname{grad} f(r), c] = \left[\frac{f'(r)}{r} \mathbf{r}, c \right] = \frac{f'(r)}{r} [\mathbf{r}, c].$$

б) Воспользуемся известной формулой векторной алгебры: $[a, [b, c]] = b\langle a, c \rangle - c\langle a, b \rangle$.

Действуя оператором ∇ на вектор $[c, R]$, где $R = f(r)r$, находим:

$$\text{rot} [c, R] = [\nabla, [c, R]] = [\nabla, [c, R_c]] + [\nabla, [c_c, R]] =$$

$$= c\langle \nabla, R_c \rangle - R\langle \nabla, c \rangle + c\langle \nabla, R \rangle - R\langle \nabla, c_c \rangle = \langle R, \nabla \rangle c - R\langle \nabla, c \rangle + c\langle \nabla, R \rangle - \langle c, \nabla \rangle R = \\ = \langle R, \nabla \rangle c - R \operatorname{div} c + c \operatorname{div} R - \langle c, \nabla \rangle R.$$

Так как c — постоянный вектор, то справедливы равенства

$$\langle R, \nabla \rangle c = f(r) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) c = f(r) \left(x \frac{\partial c}{\partial x} + y \frac{\partial c}{\partial y} + z \frac{\partial c}{\partial z} \right) = 0, \quad \operatorname{div} c = 0,$$

в силу которых

$$\text{rot} [c, R] = c \operatorname{div} R - \langle c, \nabla \rangle R. \quad (*)$$

При решении примера 212 мы нашли $\operatorname{div} R = rf'(r) + 3f(r)$. Чтобы решить пример до конца, требуется вычислить $\langle c, \nabla \rangle R$. Пусть вектор c имеет вид $c = (\alpha, \beta, \gamma)$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \langle c, \nabla \rangle R &= \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \right) f(r)r = \\ &= \alpha \left(\frac{f'(r)}{r} xr + if(r) \right) + \beta \left(\frac{f'(r)}{r} yr + jf(r) \right) + \gamma \left(\frac{f'(r)}{r} zr + kf(r) \right) = \\ &= f(r)c + \frac{f'(r)}{r} r \langle c, r \rangle. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (*), находим:

$$\begin{aligned} \text{rot} [c, f(r)r] &= c (rf'(r) + 3f(r)) - f(r)c - \frac{f'(r)}{r} r \langle c, r \rangle = \\ &= 2f(r)c + \frac{f'(r)}{r} c \langle r, r \rangle - \frac{f'(r)}{r} r \langle c, r \rangle = 2f(r)c + \frac{f'(r)}{r} (c \langle r, r \rangle - r \langle c, r \rangle). \end{aligned} \blacktriangleright$$

219. Доказать формулу $\operatorname{div} [R_1, R_2] = \langle R_2, \text{rot} R_1 \rangle - \langle R_1, \text{rot} R_2 \rangle$.

◀ Действуя по той же схеме, что и при решении примеров 216—218, получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [R_1, R_2] &= \langle \nabla, [R_1, R_2] \rangle = \langle \nabla, [R_1, R_2^c] \rangle + \langle \nabla, [R_1^c, R_2] \rangle = \\ &= \langle R_2, [\nabla, R_1] \rangle - \langle R_1, [\nabla, R_2] \rangle = \langle R_2, \text{rot} R_1 \rangle - \langle R_1, \text{rot} R_2 \rangle. \end{aligned}$$

(воспользовались известным правилом векторной алгебры для смешанного произведения: $\langle a, [b, c] \rangle = \langle b, [c, a] \rangle = \langle c, [a, b] \rangle$). ▶

220. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ с постоянной угловой скоростью ω . Найти вихрь вектора линейной скорости v в точке пространства $M = (x, y, z)$ в данный момент времени.

◀ Направление вектора угловой скорости ω совпадает с направлением e , поэтому $\omega = \omega e$. Вектор линейной скорости v частицы жидкости в точке M определяется формулой $v = [\omega, r]$, где $r = (x, y, z)$.

Для вычисления вихря векторного поля скоростей v воспользуемся формулой, полученной при решении примера 218, полагая в ней $c = \omega$, $f(r) = 1$. Находим: $\text{rot } v = 2\omega$. ▶

221. Найти поток вектора $r = (x, y, z)$: а) через боковую поверхность конуса $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2; 0 \leq z \leq h\}$; б) через основание этого конуса.

◀ Для вычисления потока воспользуемся формулой (1), п. 6.6, которая в данном случае принимает вид:

$$w(r; S) = \iint_S \langle n(M), r(M) \rangle dS.$$

В случае а) единичный вектор нормали в каждой точке на боковой поверхности S_6 конуса ортогонален к вектору r , вследствие чего $w(r; S_6) = 0$.

В случае б) единичный вектор нормали коллинеарен орту k в каждой точке основания S_0 конуса, поэтому получаем:

$$w(r; S_0) = \iint_{S_0} z dS = h \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} dx dy = \pi h^3. \blacktriangleright$$

222. Найти поток радиуса-вектора r через поверхность, уравнение которой $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$).

◀ Поверхность S конуса замкнута, поэтому здесь проще всего воспользоваться формулой восстановления аддитивной функции областей (в данном случае потока) с помощью формулы (2), п. 6.2:

$$w(r; S) = \iiint_V \operatorname{div} r dx dy dz.$$

Очевидно, $\operatorname{div} r = 3$, в силу чего имеем:

$$w(r; S) = 3 \iiint_V dx dy dz = 3Q,$$

где Q — численное значение объема тела V . Тело V — прямой круговой конус, высота которого и радиус основания равны 1, поэтому $Q = \frac{\pi}{3}$. Окончательно получаем: $w(r; S) = \pi$. ▶

223. Найти поток вектора $R = x^3 i + y^3 j + z^3 k$ через сферу, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

◀ Как и при решении предыдущего примера, воспользуемся формулой

$$w(R; S) = \iiint_V \operatorname{div} R dx dy dz,$$

где V — замкнутый шар $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq x\}$. Подставив в интеграл значение $\operatorname{div} R = 3(x^2 + y^2 + z^2)$, получим:

$$w(R; S) = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Перейдем в интеграле к сферическим координатам. После замены найдем:

$$\begin{aligned} w(R; S) &= 3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin \theta \cos \varphi} \rho^4 d\rho = \frac{3}{5} \int_0^\pi \sin^6 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{12}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{12}{5} \frac{5!!}{6!!} \frac{\pi}{2} \frac{4!!}{5!!} = \frac{\pi}{5}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

224. Найти поток вектора $u = \frac{m}{r^3} r$ (m — постоянная) через замкнутую поверхность S , окружающую начало координат.

◀ По определению потока имеем (считая поверхность гладкой или кусочно-гладкой):

$$w(u; S) = \iint_S \langle u, n \rangle dS = m \iint_S \left(\frac{x}{r^3} \cos \alpha + \frac{y}{r^3} \cos \beta + \frac{z}{r^3} \cos \gamma \right) dS.$$

Решение примера свелось к вычислению интеграла Гаусса (см. пример 186), когда замкнутая поверхность окружает фиксированную точку (в данном случае начало координат). Таким образом, $w(u; S) = 4\pi m$. ▶

225. Найти поток вектора $F(r) = \sum_{i=1}^n \text{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right)$, где e_i — постоянные и r_i —

расстояния точек M_i (источников) от переменной точки $M(r)$, через замкнутую поверхность S , окружающую точки M_i ($i = 1, n$). ▶

◀ Векторное поле $u(r)$, рассмотренное в предыдущем примере, можно представить в виде $u(r) = \text{grad} \left(-\frac{m}{r} \right)$, вследствие чего приходим к выводу, что рассматриваемое поле $F(r)$ является суммой полей вида $u(r)$, для которых $m = \frac{e_i}{4\pi}$. На основании решения предыдущего примера можно сразу записать:

$$w(F; S) = \sum_{i=1}^n 4\pi \frac{e_i}{4\pi} = \sum_{i=1}^n e_i. ▶$$

226. Найти работу вектора $F = r$ вдоль отрезка винтовой линии $r = ia \cos t + ja \sin t + kb t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). ▶

◀ Работу поля F вычислим с помощью формулы (1), п.6.5. Найдем единичный касательный вектор τ в каждой точке кривой:

$$\tau = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t, a \cos t, b).$$

Таким образом, получим

$$A = b^2 \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2 b^2$$

(приняв во внимание равенства $\langle F, \tau \rangle = \frac{b^2 t}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt$). ▶

227. Найти работу поля $R = \frac{i}{y} + \frac{j}{z} + \frac{k}{x}$ вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $M = (1, 1, 1)$ и $N = (2, 4, 8)$.

◀ Очевидно, $\tau = \frac{1}{\|MN\|}(1, 3, 7) = \left(\frac{1}{\sqrt{59}}, \frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{7}{\sqrt{59}} \right)$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором \overrightarrow{MN} , в силу чего имеем:

$$\langle R, \tau \rangle = \frac{1}{\sqrt{59}} \left(\frac{1}{y} + \frac{3}{z} + \frac{7}{x} \right).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки M и N , имеет вид $x - 1 = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{7}$, и мы можем параметризовать эту прямую, выбрав в качестве параметра переменную x . При этом получим: $x = x$, $y = 3x - 2$, $z = 7x - 6$, $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{59} dx$,

$$\begin{aligned} A &= \int_{MN} \langle R, \tau \rangle dl = \int_1^2 \left(\frac{1}{3x-2} + \frac{3}{7x-6} + \frac{7}{x} \right) dx = \\ &= \left. \left(\frac{1}{3} \ln(3x-2) + \frac{3}{7} \ln(7x-6) + 7 \ln x \right) \right|_1^2 = \frac{188}{21} \ln 2. ▶ \end{aligned}$$

228. Найти работу поля $R = (y+z)i + (z+x)j + (x+y)k$ вдоль меньшей дуги окружности большого круга сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25\}$, если эта дуга соединяет точки $M = (3, 4, 0)$ и $N = (0, 0, 5)$.

◀ Рассматриваемая дуга лежит в плоскости, уравнение которой $y = \frac{4}{3}x$, и представляет собой четверть окружности радиуса 5. Параметризуем эту кривую, выбрав в качестве параметра угол φ , образованный радиусом-вектором точки кривой, лежащим в упомянутой выше плоскости, с его проекцией на плоскость xOy . Тогда параметрические уравнения данной дуги будут иметь вид $x = 3\cos\varphi$, $y = 4\cos\varphi$, $z = 5\sin\varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), и единичный касательный вектор τ в каждой ее точке будет выражаться формулой

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 + (z'(\varphi))^2}} (x'(\varphi), y'(\varphi), z'(\varphi)) = \left(-\frac{3}{5}\sin\varphi, -\frac{4}{5}\sin\varphi, \cos\varphi \right).$$

Вектор R на данной дуге принимает вид

$$R = (4\cos\varphi + 5\sin\varphi)i + (5\sin\varphi + 3\cos\varphi)j + (7\cos\varphi)k,$$

поэтому имеем: $\langle R, \tau \rangle = 7\cos 2\varphi - \frac{12}{5}\sin 2\varphi$. Применив формулу (1), п. 6.5, и приняв во внимание равенство $dl = 5d\varphi$, получим:

$$A = \int_{MN} \langle R, \tau \rangle dl = 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(7\cos 2\varphi - \frac{12}{5}\sin 2\varphi \right) d\varphi = 5 \left(\frac{7}{2}\sin 2\varphi + \frac{6}{5}\cos 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -12. ▶$$

229. Найти циркуляцию Γ вектора $R = -yi + xj + ck$ (c — постоянная): а) вдоль окружности $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$; б) вдоль окружности $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2)^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.

◀ Циркуляция поля R вдоль замкнутого контура γ равна, по определению, интегралу

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \langle R, \tau \rangle dl.$$

В случае а) возьмем параметрические уравнения окружности в виде $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = 0$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Тогда получим: $\tau = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $R = -i\sin\varphi + j\cos\varphi + kc$, $\langle R, \tau \rangle = 1$, $dl = d\varphi$,

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \langle R, \tau \rangle dl = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

В случае б) параметрические уравнения окружности берем в виде $x = 2 + \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $z = 0$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). При этом получаем: $\tau = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $R = -i\sin\varphi + j(2 + \cos\varphi) + kc$, $\langle R, \tau \rangle = 1 + 2\cos\varphi$, $dl = d\varphi$,

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi) d\varphi = 2\pi. ▶$$

230. Найти циркуляцию Γ вектора $R = \operatorname{grad} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)$ вдоль контура γ в двух случаях:
а) γ не окружает оси Oz ; б) γ окружает ось Oz .

◀ Поле R — потенциальное, поэтому в случае а) его циркуляция Γ вдоль любого контура, не содержащего особых точек функции $(x, y) \mapsto \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, равна нулю.

В случае б) имеем:

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \langle R, \tau \rangle dl = \oint_{\gamma} \left\langle \operatorname{grad} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right), \tau \right\rangle dl = \oint_{\gamma} \frac{\partial}{\partial l} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) dl = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{\gamma}$$

(напомним читателю, что выражение $\langle \operatorname{grad} \varphi, \tau \rangle$, где τ — единичный касательный вектор к некоторой кривой, равно производной скалярного поля φ вдоль этой кривой).

Обозначив $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta$, получаем, что циркуляция поля R по замкнутому контуру γ равна приращению угла θ при его обходе. При каждом полном обходе угол θ получает приращение

2π (так как контур Γ окружает ось Oz и его проекция на плоскость xOy окружает начало координат), поэтому в общем случае $\Gamma = 2\pi n$, где n — число полных обходов контура Γ вокруг оси Oz . ►

231. Дано векторное поле $R = \frac{y}{\sqrt{z}}i - \frac{x}{\sqrt{z}}j + \sqrt{xy}k$. Вычислить $\text{rot } R$ в точке $M = (1, 1, 1)$ и найти приближенно циркуляцию Γ поля вдоль бесконечно малой окружности $L = S \cap T$, где $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2\}$, T — плоскость, заданная уравнением $(x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

◀ Применив формулу (4), п. 6.7, получим:

$$\begin{aligned}\text{rot } R &= \left(\frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{xy}) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{x}{\sqrt{z}} \right) \right) i + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{\sqrt{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{xy}) \right) j + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{\sqrt{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{z}} \right) \right) k = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{x}{z\sqrt{z}} \right) i - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right) j - \frac{2}{\sqrt{z}} k.\end{aligned}$$

$$\text{rot } R(M) = -j - 2k.$$

Циркуляцию Γ поля R вдоль заданной окружности вычислим с помощью формулы Стокса

$$\Gamma = \iint_{\sigma} \langle n, \text{rot } R \rangle d\sigma,$$

где σ — кусок плоскости T , ограниченный окружностью L . На плоскости T имеем: $z = 1 - \frac{1}{\cos\gamma}((x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta)$, $z'_x = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $z'_y = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\langle n, \text{rot } R(M) \rangle = -\cos\beta - 2\cos\gamma$.

Подставив скалярное произведение под знак интеграла, найдем:

$$\Gamma \approx - \iint_{\sigma} (\cos\beta + 2\cos\gamma) d\sigma = -(\cos\beta + 2\cos\gamma)\pi\varepsilon^2,$$

так как σ — круг радиуса ε , лежащий в рассматриваемой плоскости T . ►

232. Показать, что поле $R = yz(2x+y+z)i + xz(x+2y+z)j + xy(x+y+2z)k$ потенциальное и найти его потенциал.

◀ Поле потенциально, поскольку $\text{rot } R = 0$ (убедиться в этом предоставляем читателю). В силу потенциальности поля R , имеем: $R = \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}i + \frac{\partial \varphi}{\partial y}j + \frac{\partial \varphi}{\partial z}k$.

Из равенств $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = yz(2x+y+z)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = xz(x+2y+z)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = xy(x+y+2z)$ находим: $\varphi(x, y, z) = xyz(x+y+z) + \psi(y, z)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = xz(x+2y+z) = xz(x+2y+z) + \frac{\partial \psi}{\partial y}$, откуда $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, $\psi = \Phi(z)$.

Из равенства $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = xy(x+y+2z) = xy(x+y+2z) + \Phi'(z)$ получаем: $\Phi'(z) = 0$, $\Phi(z) = C$, где $C = \text{const}$.

Окончательно имеем: $\varphi(x, y, z) = xyz(x+y+z) + C$, где C — произвольная постоянная. ►

233. Найти потенциал гравитационного поля $R = -\frac{m}{r^3}r$, создаваемого массой m , находящейся в начале координат.

◀ Принимая во внимание равенство $R = \text{grad } \frac{m}{r}$, находим потенциал φ поля R : $\varphi = \frac{m}{r}$. ►

Упражнения для самостоятельной работы

158. Найти угол φ между градиентами функции $u = \arctg \frac{x}{y}$ в точках $M_1 = (1, 1)$ и $M_2 = (-1, -1)$.

159. Найти производную скалярного поля $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, в направлении $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. В каком случае эта производная равна нулю?

160. Найти производную поля u в направлении градиента поля v . В каком случае эта производная будет равна нулю?

161. Найти

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

162. Вычислить $\operatorname{div}(f(r)c)$, где c — постоянный вектор.163. Найти $\operatorname{div}(f(r)r)$. В каком случае дивергенция этого вектора равна нулю?164. Найти поток вектора $\mathbf{u} = xyi + yzj + zxk$ через часть сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, лежащую в первом октанте.165. Найти поток вектора $\mathbf{u} = yzi + xzj + xyk$ через боковую поверхность пирамиды с вершиной в точке $P = (0, 0, 2)$, основанием которой служит треугольник с вершинами $O = (0, 0, 0)$, $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$.166. Доказать, что: а) $\operatorname{rot}(u + v) = \operatorname{rot} u + \operatorname{rot} v$; б) $\operatorname{rot}(vu) = v \operatorname{rot} u + [\operatorname{grad} v, u]$.167. Найти направление и величину $\operatorname{rot} u$ в точке $M = (1, 2, -2)$, если $u = \frac{y}{z}i + \frac{z}{x}j + \frac{x}{y}k$.168. Найти $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi)$.169. Движущаяся несжимаемая жидкость заполняет область Ω . Предполагая, что в области Ω отсутствуют источники и стоки, вывести уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho v) = 0,$$

где $\rho = \rho(x, y, z)$ — плотность жидкости, v — вектор скорости, t — время.

170. Вычислить работу силового поля

$$\mathbf{F} = yi + xj + (x + y + z)k$$

вдоль отрезка AB прямой, проходящей через точки $M_1 = (2, 3, 4)$ и $M_2 = (3, 4, 5)$.171. Доказать, что поле $u = f(r)r$, где f — непрерывная функция, является потенциальным. Найти потенциал этого поля.

§ 7. Запись основных дифференциальных операций векторного анализа в ортогональных криволинейных координатах

7.1. Криволинейные координаты в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . Параметры Ламе.

Если в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 введена система координат q_1, q_2, q_3 посредством формул

$$x = x(q), \quad y = y(q), \quad z = z(q), \quad q = (q_1, q_2, q_3), \quad (1)$$

связывающих декартовы координаты x, y, z точки $M \in \mathbb{R}^3$ с координатами q_1, q_2, q_3 , то ее называют *криволинейной системой координат*. При этом координаты q_i ($i = 1, 2, 3$) называют *криволинейными*.

Предположим, что отображение $\Phi = (x(q), y(q), z(q))$, $q \in \mathbb{R}^3$, порожданное системой равенств (1), является C^1 -диффеоморфизмом \mathbb{R}^3 на \mathbb{R}^3 (т.е. Φ непрерывно дифференцируемое вместе с отображением Φ^{-1}).

Определение 1. Криволинейная система координат q_1, q_2, q_3 называется *ортогональной*, если векторы $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q)$ ($i = 1, 2, 3$) взаимно ортогональны:

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q) \right\rangle = 0. \quad (2)$$

Сферическая и цилиндрическая системы координат в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 являются *ортогональными криволинейными системами*.

Действительно, если $\Phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta)$, $\rho \geq 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$, и $\Psi(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$, $\rho \geq 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$, то имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, -\rho \sin \theta),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, 0),$$

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = (0, 0, 1),$$

$$\left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\rangle = 0.$$

Если система криволинейных координат q_1, q_2, q_3 ортогональна, то векторы $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$ ($i = 1, 2, 3$) образуют базис пространства \mathbb{R}^3 , и базис $\left\{ e_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q); i = 1, 2, 3 \right\}$, где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$, является ортонормированным. Функции H_i называются параметрами Ламе. Базис $\{e_i; i = 1, 2, 3\}$ и параметры Ламе изменяются при переходе от точки к точке.

Если в ортогональной криволинейной системе координат q_1, q_2, q_3 одна координата фиксирована, то отображение Φ определяет многообразие класса C^1 размерности $p = 2$ — гладкую поверхность, которую будем называть координатной поверхностью. В пространстве \mathbb{R}^3 существует три семейства координатных поверхностей. Через каждую фиксированную точку евклидова пространства \mathbb{R}^3 проходит по одной поверхности каждого из трех семейств.

Рассмотрим элементарную ячейку, образованную тремя смежными координатными поверхностями, и обозначим dl_1, dl_2, dl_3 длины ребер ячейки. Имеем

$$dl_1 = H_1 dq_1, \quad dl_2 = H_2 dq_2, \quad dl_3 = H_3 dq_3, \quad (3)$$

где H_i ($i = 1, 2, 3$) — параметры Ламе.

Действительно,

$$dl_i = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} dq_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Вычислим параметры Ламе для случаев перехода от декартовой прямоугольной системы координат к сферической и цилиндрической системам координат.

При переходе к сферической системе координат имеем

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2} = \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta} = 1, \quad (4)$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho, \quad (5)$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} = \rho \sin \theta, \quad (6)$$

а при переходе к цилиндрической системе координат получим

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \quad (7)$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi} = \rho, \quad (8)$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1} = 1, \quad (9)$$

Определение 2. Элементом объема dV в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 , соответствующим приращениям dq_i координат q_i ($i = 1, 2, 3$) в точке $q = (q_1, q_2, q_3)$, называется объем параллелепипеда, построенного на векторах $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q) dq_i$.

Согласно этому определению имеем

$$dV(q) = \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q) dq_1, \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q) dq_2, \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q) dq_3 \right)}, \quad (10)$$

где $\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q) dq_1, \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q) dq_2, \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q) dq_3 \right)$ — определитель Грама от векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q) dq_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Принимая во внимание ортогональность векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q) dq_i$ ($i = 1, 2, 3$), получим

$$\begin{aligned} dV(q) &= \sqrt{\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q) \right\rangle \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q) \right\rangle \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q) \right\rangle} dq_1 dq_2 dq_3 = \\ &= H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя определение 2 и формулы (4)–(11), можно получить известные выражения для элементов объема в сферической и цилиндрической системах координат:

$$dV(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi, \quad dV(\rho, \varphi, z) = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (12)$$

Параметры Ламе называют *масштабными множителями*. Координатные линии, вдоль каждой из которых изменяется лишь один параметр, можно представить как кривые в пространстве \mathbb{R}^3 , на которые нанесены шкалы этих параметров. Параметры Ламе H_i на этих кривых преобразуют параметры q_i в длины дуг соответствующих кривых.

7.2. Градиент скалярного поля.

Пусть в области $D' \subset \mathbb{R}^3$ задано дифференцируемое скалярное поле $q \mapsto u(q)$. Компонентами вектора $\text{grad } u(q)$ в базисе $\left\{ e_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q); i = 1, 2, 3 \right\}$ являются его проекции $\frac{\partial u}{\partial e_i}(q) = \langle \text{grad } u(q), e_i \rangle$ на направления, определяемые векторами e_i . Поскольку $\langle \text{grad } u(q), e_i \rangle = \frac{1}{H_i} \left\langle \text{grad } u(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q) \right\rangle = \frac{1}{H_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}(q)$, то справедливо представление

$$\text{grad } u(q) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}(q) e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}(q) e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}(q) e_3. \quad (1)$$

В частности, в сферической и цилиндрической системах координат вектор-градиент скалярного поля u имеет следующие представления:

$$\text{grad } u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) e_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) e_\varphi, \quad (2)$$

$$\text{grad } u(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \varphi, z) e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \varphi, z) e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}(\rho, \varphi, z) e_z, \quad (3)$$

где $\{e_\rho, e_\theta, e_\varphi\}, \{e_\rho, e_\varphi, e_z\}$ — ортонормированные базисы, порождаемые отображениями $\Phi'(\rho, \theta, \varphi)$ и $\Psi'(\rho, \varphi, z)$ (см. п. 7.1).

7.3. Расходимость и вихрь векторного поля.

Для записи операций расходимости и вихря векторного поля $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{q})$, $\mathbf{q} \in D'$, в криволинейных координатах нам понадобятся некоторые вспомогательные вычисления.

Полагая в формуле (1), п. 7.2, $u = q_1$, получим

$$\operatorname{grad} q_1 = \frac{1}{H_1} e_1. \quad (1)$$

Взяв операцию вихря от обеих частей равенства (1) и принимая во внимание, что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} q_1 = 0$, имеем

$$\operatorname{rot} \frac{1}{H_1} e_1 = \left[\nabla, \frac{e_1}{H_1} \right] = \frac{1}{H_1} [\nabla, e_1] - \left[e_1, \nabla \frac{1}{H_1} \right] = \frac{1}{H_1} \operatorname{rot} e_1 + \left[\operatorname{grad} \frac{1}{H_1}, e_1 \right] = 0. \quad (2)$$

Согласно формуле (1), п. 7.2, находим

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \frac{1}{H_1} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1} \right) e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{H_1} \right) e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{1}{H_1} \right) e_3 = \\ &= -\frac{1}{H_1^2} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_3 \right) = -\frac{1}{H_1^2} \operatorname{grad} H_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, равенство (2) принимает вид

$$\frac{1}{H_1} \operatorname{rot} e_1 - \frac{1}{H_1^2} [\operatorname{grad} H_1, e_1] = 0. \quad (4)$$

Следовательно, $\operatorname{rot} e_1 = \frac{1}{H_1} [\operatorname{grad} H_1, e_1]$. Поскольку $[\operatorname{grad} H_1, e_1] = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_3$, то

$$\operatorname{rot} e_1 = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_3. \quad (5)$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\operatorname{rot} e_2 = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} e_3 - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} e_1, \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} e_3 = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} e_1 - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} e_2. \quad (7)$$

Вычислим теперь расходимости векторов e_1 , e_2 , e_3 посредством формулы $\operatorname{div} [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \langle \nabla, [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \operatorname{rot} \mathbf{u}_1 \rangle - \langle \mathbf{u}_1, \operatorname{rot} \mathbf{u}_2 \rangle$, полученной при решении примера 219. Приняв во внимание, что $e_1 = [e_2, e_3]$, $e_2 = [e_3, e_1]$, $e_3 = [e_1, e_2]$, имеем:

$$\operatorname{div} e_1 = \langle e_3, \operatorname{rot} e_2 \rangle - \langle e_2, \operatorname{rot} e_3 \rangle = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} e_2 = \langle e_1, \operatorname{rot} e_3 \rangle - \langle e_3, \operatorname{rot} e_1 \rangle = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \quad (9)$$

$$\operatorname{div} e_3 = \langle e_2, \operatorname{rot} e_1 \rangle - \langle e_1, \operatorname{rot} e_2 \rangle = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3}. \quad (10)$$

Если $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, то, в силу линейности операции вычисления расходимости, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} (u_1 e_1) + \operatorname{div} (u_2 e_2) + \operatorname{div} (u_3 e_3) = \langle \nabla, u_1 e_1 \rangle + \langle \nabla, u_2 e_2 \rangle + \langle \nabla, u_3 e_3 \rangle =$$

$$= u_1 \operatorname{div} e_1 + u_2 \operatorname{div} e_2 + u_3 \operatorname{div} e_3 + \langle e_1, \operatorname{grad} u_1 \rangle + \langle e_2, \operatorname{grad} u_2 \rangle + \langle e_3, \operatorname{grad} u_3 \rangle =$$

$$= \frac{u_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{u_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} +$$

$$+ \frac{u_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{u_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial q_3} =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (u_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (u_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (u_3 H_1 H_2) \right). \quad (11)$$

Если в формуле (11) взять $u = \operatorname{grad} v$, то получим следующее выражение для оператора Лапласа в криволинейных ортогональных координатах:

$$\Delta v = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial v}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial v}{\partial q_3} \right) \right). \quad (12)$$

Для вычисления вихря векторного поля u воспользуемся линейностью этой операции, формулами (5)–(7), примером 216 и формулой (1), п.7.2:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u &= \operatorname{rot}(u_1 e_1) + \operatorname{rot}(u_2 e_2) + \operatorname{rot}(u_3 e_3) = \\ &= u_1 \operatorname{rot} e_1 + u_2 \operatorname{rot} e_2 + u_3 \operatorname{rot} e_3 + [\operatorname{grad} u_1, e_1] + [\operatorname{grad} u_2, e_2] + [\operatorname{grad} u_3, e_3] = \\ &= \frac{u_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_3 + \frac{u_2}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} e_3 - \frac{u_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} e_1 + \\ &\quad + \frac{u_3}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} e_1 - \frac{u_3}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} e_3 + \\ &\quad + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} e_3 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_2}{\partial q_3} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial q_2} e_1 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial q_1} e_2 = \\ &= \frac{1}{H_3 H_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 u_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 u_2) \right) e_1 + \frac{1}{H_3 H_1} \left(\frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 u_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_3) \right) e_2 + \\ &\quad + \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 u_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 u_1) \right) e_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение (11) можно рассматривать как результат применения формулы Остроградского к параллелепипеду K , стороны которого равны смещениям вдоль координатных линий, соответствующих приращениям dq_i ($i = 1, 2, 3$), а выражение (13) — как результат применения теоремы Стокса к трем парам граней того же параллелепипеда:

$$\operatorname{div} u(q) = \lim_{K \rightarrow q} \frac{1}{\mu K} \iint_S \langle n, u \rangle dS, \quad \langle \operatorname{rot} u, n \rangle = \lim_{S \rightarrow q} \frac{1}{\mu S} \oint_L \langle \tau, u \rangle dl,$$

где $\mu K = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$ — объем параллелепипеда, S — его граница, n — вектор внешней единичной нормали к поверхности S , μS — площадь поверхности S , L — объединение контуров, ограничивающих грани параллелепипеда, τ — единичный касательный к L вектор. При этом следует принять во внимание, что векторы внешней единичной нормали n на гранях параллелепипеда K и векторы τ , касательные к кривой L , совпадают с векторами базиса $\{e_i; i = 1, 2, 3\}$ или противоположны им.

Для вычисления расходности и вихря векторного поля $u = (u_1, u_2, u_3)$ в сферической и цилиндрической системах координат воспользуемся формулами (4)–(9), п.7.1, и формулами (11), (13) этого пункта. Имеем

$$\operatorname{div} u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_1) + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_2 \sin \theta) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi}, \quad (14)$$

$$\operatorname{div} u(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_1) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (u_3 \sin \theta) - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) e_\rho + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_3) \right) e_\theta + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) e_\varphi, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\operatorname{rot} u(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) e_\rho + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial \rho} \right) e_\varphi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) e_z. \quad (17)$$

Если $(\rho, \theta, \varphi) \mapsto u(\rho, \theta, \varphi)$ и $(\rho, \varphi, z) \mapsto v(\rho, \varphi, z)$ — дважды дифференцируемые скалярные поля, то, применив формулу (12) этого пункта и используя формулы (4)–(9), п.7.1.

получим запись оператора Лапласа в сферических и цилиндрических координатах:

$$\Delta u = \langle \nabla, \nabla u \rangle = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad (18)$$

$$\Delta v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (19)$$

234. Вычислить $\operatorname{grad} u$, где $u(\rho, \theta, \varphi) = 3\rho^2 \sin \theta + e^\rho \cos \varphi - \rho$.

◀ Применим формулу (2), п. 7.2. Получим

$$\operatorname{grad} u(\rho, \theta, \varphi) = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \left(6\rho \sin \theta + e^\rho \cos \varphi - 1, 3\rho \cos \theta, -\frac{e^\rho \sin \varphi}{\rho \sin \theta} \right). \blacktriangleright$$

235. Вычислить $\operatorname{grad} u$, где $u(\rho, \varphi, z) = \rho^2 + 2\rho \cos \varphi - e^z \sin \varphi$.

◀ Согласно формуле (3), п. 7.2, имеем

$$\operatorname{grad} u(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(2(\rho + \cos \varphi), -\left(2 \sin \varphi + \frac{e^z \cos \varphi}{\rho} \right), e^z \sin \varphi \right). \blacktriangleright$$

236. Вычислить $\operatorname{div} u$, если $u = (u_1, u_2, u_3) = \left(\rho^2, -2 \cos^2 \varphi, \frac{\varphi}{\rho^2 + 1} \right)$.

◀ Применив формулу (14), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_1) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_2 \sin \theta) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^4) - \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (2 \cos^2 \varphi \sin \theta) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\varphi}{\rho^2 + 1} \right) = \\ &= 4\rho - \frac{2}{\rho} \cos^2 \varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\rho(\rho^2 + 1) \sin \theta}. \end{aligned} \blacktriangleright$$

237. Вычислить $\operatorname{div} u$, где $u = (u_1, u_2, u_3) = (\varphi \operatorname{arctg} \rho, 2, -z^2 e^z)$.

◀ Согласно формуле (15), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_1) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \varphi \operatorname{arctg} \rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2) - \frac{\partial}{\partial z} (z^2 e^z) = \\ &= \frac{\varphi}{\rho} \left(\operatorname{arctg} \rho + \frac{\rho}{1 + \rho^2} \right) + 2ze^z + z^2 e^z. \end{aligned} \blacktriangleright$$

238. Найти $\operatorname{rot} u$, если $u = (u_1, u_2, u_3) = (\rho^2, 2 \cos \theta, -\varphi)$.

◀ Применим формулу (16). Получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u(\rho, \theta, \varphi) &= \\ &= \left(\frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (u_3 \sin \theta) - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right), \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_3), \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) = \\ &= \left(-\frac{\varphi}{\rho} \operatorname{ctg} \theta, \frac{\varphi}{\rho}, \frac{2 \cos \theta}{\rho} \right). \end{aligned} \blacktriangleright$$

239. Вычислить $\operatorname{rot} u$. где $u = (u_1, u_2, u_3) = \left(\cos \varphi, -\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho^2 \right)$.

◀ Согласно формуле (17), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{u}(\rho, \varphi, z) &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho^2) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sin \varphi}{\rho} \right), \frac{\partial}{\partial z} (\cos \varphi) - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2), \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (-\cos \varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi) \right) = \\ &= \left(0, -2\rho, \frac{\sin \varphi}{\rho} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

240. Доказать, что векторное поле $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{2 \cos \theta}{\rho^3}, \frac{\sin \theta}{\rho^3}, 0 \right)$ потенциальное.

◀ Поскольку класс потенциальных векторных полей совпадает с классом безвихревых полей, то достаточно показать, что $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$. Применив формулу (16), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{u}(\rho, \theta, \varphi) &= \\ &= \left(\frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (0 \cdot \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin \theta}{\rho^3} \right) \right), \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{2 \cos \theta}{\rho^3} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (0 \cdot \rho), \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\sin \theta}{\rho^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{2 \cos \theta}{\rho^3} \right) \right) = \\ &= \left(0, 0, -\frac{2 \sin \theta}{\rho^4} + \frac{2 \sin \theta}{\rho^4} \right) = (0, 0, 0). \blacksquare \end{aligned}$$

241. Найти поток векторного поля $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (\rho^2 \theta, \rho e^{2\theta}, 0)$ через внешнюю сторону верхней полусферы S радиуса R с центром в начале координат.

◀ Пусть σ — часть координатной поверхности $q_1 = C$, где $C = \text{const}$, ограниченная координатными линиями

$$q_1 = \alpha_1, q_2 = \alpha_2 \quad (\alpha_1 < \alpha_2); \quad q_3 = \beta_1, q_3 = \beta_2 \quad (\beta_1 < \beta_2).$$

Тогда поток вектора $\mathbf{u}(q_1, q_2, q_3) = (u_1(q_1, q_2, q_3), u_2(q_1, q_2, q_3), u_3(q_1, q_2, q_3))$ через поверхность σ в направлении вектора e_1 вычисляется по формуле

$$w(\sigma; \mathbf{u}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} u_1(C, q_2, q_3) H_2(C, q_2, q_3) H_3(C, q_2, q_3) dq_2 dq_3. \quad (20)$$

Полусфера S является частью координатной поверхности $\rho = \text{const}$, т.е. $\rho = R$. На поверхности S имеем

$$q_1 = \rho = R, q_2 = \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, q_3 = \varphi, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Принимая во внимание, что в сферических координатах

$$H_1 = H_\rho = 1, \quad H_2 = H_\theta = \rho, \quad H_3 = H_\varphi = \rho \sin \varphi,$$

по формуле (20) получаем

$$w(S; \mathbf{u}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} R^4 \theta \sin \theta d\varphi = 2\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta d\theta = 2\pi R^4. \blacksquare$$

242. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (\rho, z, 0)$ через замкнутую поверхность S , образованную плоскостями, уравнения которых $z = 0$, $z = 1$, и цилиндром, уравнение которого $\rho = 1$.

◀ Воспользуемся формулой Остроградского

$$w(S; \mathbf{u}) = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV.$$

Согласно формуле (15), имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 2.$$

Таким образом,

$$w(S; \mathbf{u}) = 2 \iiint_V dV = 2|V| = 2\pi,$$

поскольку объем цилиндра равен π . ►

Упражнения для самостоятельной работы

172. Найти градиенты скалярных полей:

а) $u = \rho \cos \varphi + z \sin^2 \varphi - 3\rho$; б) $u = \rho^2 \cos \theta$; в) $u = C \frac{\cos \theta}{\rho^2}$, $C = \text{const}$.

173. Вычислить расходимости векторных полей \mathbf{u} :

а) $\mathbf{u} = (\rho, z \sin \varphi, e^\varphi \cos z)$; б) $\mathbf{u} = \left(\frac{2 \cos \theta}{\rho^3}, \frac{\sin \theta}{\rho^3}, 0 \right)$.

174. Вычислить роторы векторных полей:

а) $\mathbf{u} = (2\rho + \alpha \cos \varphi, -\alpha \sin \theta, \rho \cos \theta)$, $\alpha = \text{const}$; б) $\mathbf{u} = \left(\sin \varphi, \frac{\cos \varphi}{\rho}, -\rho z \right)$.

175. Вычислить поток векторного поля \mathbf{u} через заданную поверхность S , если $\mathbf{u} = (\rho, -\cos \varphi, z)$, S — замкнутая поверхность, образованная цилиндром, уравнение которого $\rho = 2$, и плоскостями, уравнения которых $z = 0$, $z = 2$.

Ответы

Глава 1

2. Непрерывна. 3. Непрерывна. 4. Непрерывна при $y \neq 0$. 5. 1. 6. 0. 7. $\frac{1}{e} (\frac{\pi}{2} - 1)$.
 8. 0. 14. Непрерывно дифференцируема. 15. Непрерывно дифференцируема при $y \neq 0$.
 18. Равномерно. 19. Равномерно. 20. Равномерно. 21. Равномерно. 22. Неравномерно.
 23. Неравномерно. 24. Неравномерно. 25. Неравномерно. 26. 1. 27. $\frac{\pi}{2}$. 28. 0. 31. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x+a} dx$.
 32. $\frac{\pi}{3} |\alpha|^3$. 33. $\frac{\pi a}{2} - \frac{\pi a^2}{8}$ при $0 \leq a < 2$; $\frac{\pi}{2}$ при $a \geq 2$. 34. $\frac{\pi}{4}$. 35. $\frac{\pi}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}$. 36. $\pi (e^{-|\alpha|} - \frac{1}{2})$.
 37. $\frac{1}{2} \ln(1 + a^2)$. 38. $\sqrt{\pi} \frac{d}{da} \left(\frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})}{a \Gamma(\frac{a}{2})} \right)$. 39. $\frac{d}{da} (\Gamma(a+1))$. 40. $\frac{1}{|\alpha|} \int_0^b e^{-\frac{b^2}{|\alpha|}} db_2 \int_0^{b_2} e^{\frac{b_1^2}{|\alpha|}} db_1$.
 41. $\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 42. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 43. 0. 44. 0. 47. $\frac{\sqrt{3}}{60\pi} \Gamma^3(\frac{1}{3})$. 48. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 49. $\frac{\pi}{5 \sin \frac{2\pi}{5}}$.
 50. $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)3^k(k+1)!(k+6)!}{(2k+8)!}$. 51. $\frac{45}{256}$. 55. $\frac{\sin \lambda}{\lambda^2} - \frac{\cos \lambda}{\lambda}$. 56. $\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} (1 + \cos \lambda \pi)$. 57. $\frac{\sin 2\pi \lambda}{\lambda^2 - 1}$.
 58. $\frac{\sin \lambda}{\lambda^2} - \frac{\cos \lambda}{\lambda} + \frac{\sin 2\lambda + \lambda \cos 2\lambda}{e^2(1 + \lambda^2)}$. 59. $\frac{\sin \lambda \pi}{\lambda}$. 60. $\frac{\sin \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^2} + \frac{\cos \lambda - \lambda \sin \lambda}{e(1 + \lambda^2)}$. 61. $\frac{\cos \lambda \frac{\pi}{2} - 1}{\lambda^2}$.
 62. $i\lambda \bar{f}(\lambda); -\lambda^2 \bar{f}(\lambda)$. 63. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\lambda) e^{i\lambda x}}{1 + 3i\lambda - \lambda^2} d\lambda$.

Глава 2

1. 9,88. Точное значение $2\pi(7 - \sqrt{24})$. 2. $\delta < 0,00022$. 5. Отрицательный. 6. $\int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.
 7. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$. 8. $\int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx$.
 9. $\int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx$.
 10. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^a f(u \cos v, u \sin v) u du$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_a^b f(u \cos v, \sin v) u du$. 11. $\int_{\frac{a}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} dv \int_0^{\frac{a}{1-v}} f(u - uv, uv) u du$.
 12. $\frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{b}{a\alpha+b}} dv \int_0^{\frac{a\alpha}{1-v}} uf((1-v)\frac{u}{\alpha}, uv) du + \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{b}{a\alpha+b}}^1 dv \int_0^{\frac{b}{v}} uf((1-v)\frac{u}{\alpha}, uv) du$.
 13. $3 \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho \cos^3 \varphi, \rho \sin^3 \varphi) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi$. 14. $y = uv, x = v$. 15. а) Перейти к полярным координатам; б) положить $x^2 = u, y^2 = v$. 16. $\frac{1}{3}$. 17. $\frac{p^5}{21}$. 18. $(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}) a^{\frac{3}{2}}$. 19. $14a^4$.
 20. $\frac{35}{12}\pi a^4$. 21. $-6\pi^2$. 22. $\frac{\pi}{2}$. 23. $\frac{1}{364}$. 24. $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$. 25. $\frac{\pi}{6}$. 26. $\frac{\pi}{10}$. 27. 0, если одно из чисел m, n, p нечетное; $\frac{4\pi}{m+n+p+3} \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, если m, n, p четные. 28. $\frac{m}{3}$. 29. $\frac{m(3m+1)}{12}$.

30. $\frac{a^m}{m!}$. 31. $\frac{2}{(m-1)!(2m+1)}$. 33. $U = \frac{16}{15}\pi^2\mu_0^2r^5$. 34. Сходится при $p < 1$. 35. Сходится при $p < 1$. 36. Сходится при $p < 1$. 37. Сходится при $p < 1$. 38. $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$, $p > q > 1$. 39. $\frac{\pi}{p-1}$, $p > 1$. 40. $\frac{1}{2}$. 41. $\frac{\pi}{2}$. 42. $\frac{\pi ab}{e}$. 43. $-\frac{\pi e a^2 b^2}{2(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$. 44. $\frac{\pi}{2}$. 45. $2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right)$, $p < 1$. 46. $\pi^{\frac{3}{2}}$.
47. $\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}$, где $\Delta = \det(a_{ij})$. 50. $\frac{3a^2}{16}(4\pi - 1 - 3\sqrt{3})$. 51. $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$. 52. $\frac{\pi a^2}{2}$. 53. $\frac{\pi ab}{\sqrt{2}}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 54. $\frac{ab}{12}$. 55. $\frac{a^5 b}{10 h^4}$. 56. $\frac{21\pi ab}{256}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 57. $\frac{ab}{42}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 58. $\frac{2}{3}(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{n^3} - \sqrt{m^3})$. 59. $\frac{1}{3}(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{m} - \sqrt{n})p$, где $p = a + b + m + n + \sqrt{ab} + \sqrt{mn}$. 60. $\frac{\pi a^2}{4}$. 61. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1 + \sqrt{2})$. 62. $\frac{1}{1260}\frac{(ab)^5}{c^8}$. 63. $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$. 64. $\frac{65ab}{108}$. 65. πab^2 . 66. $\frac{\pi ac^2}{2}$. 67. $\frac{\pi}{32}$. 68. 2π . 69. $\frac{4a^3}{9\sqrt{a}}$. 70. $\frac{3\pi}{8}(a+b)$. 71. $\pi abc\frac{k}{k+1}$. 72. $\frac{\pi}{12}\left(\frac{ab}{c}\right)^3$. 73. $\frac{8}{35}$. 74. $\left(\frac{\pi}{8} - \frac{4}{15}\right)abc$. 75. $\frac{am}{192}(a+m)(3a^2 - 5am + 3m^2)$. 76. $\frac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2} - 1)$. 77. $8a^2$. 78. $\frac{a^2}{9}(20 - 3\pi)$. 79. $2a^2$. 80. $\frac{\pi}{6}(3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10}))$. 81. $\frac{abc}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1}\left(\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{c^3}\right)$. 82. $\frac{4}{3}ab(2\sqrt{2} - 1)\arctg\sqrt{\frac{a}{b}}$. 83. $\frac{5}{9}ab$. 84. $\frac{\pi a^3}{8}$. 85. $\frac{2}{3}\pi a^3$. 86. $\frac{4\pi abc^7}{21h^6}$. 87. $2\pi^2(1-\alpha^2)abc$. 88. $\frac{abch}{60}\frac{5c+4h}{(c+h)^2}$. 89. $\frac{2\pi h}{\Delta}$. 90. $\frac{1}{2}$. 91. $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$. 92. $\frac{\pi^2}{4}abc$. 93. $\frac{8}{5}\pi abc$. 94. $\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 95. $\frac{abc}{554400}$. 96. $\frac{abc}{3}$. 97. $\frac{abc}{1680}$. 98. $\frac{4}{3}\pi a^3$. 99. $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}, \frac{1}{4}\right)$. 100. $\left(\frac{3\pi a}{64}, \frac{3\pi b}{64}\right)$. 101. $\left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5}\right)$. 102. $\left(\frac{a^2 b}{14 c^2}, \frac{a b^2}{14 c^2}\right)$. 103. $\left(\frac{\pi a}{8}, \frac{\pi a}{8}\right)$. 104. $I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_y = \frac{|b_1^3 - b_2^3|}{12}$, $b = |b_1 - b_2|$. 105. $I_x = \frac{21}{32}\pi a^4$, $I_y = \frac{49}{32}\pi a^4$. 106. $I_x = I_y = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$. 107. $I_x = I_y = \frac{9a^4}{8}$. 108. $I_\alpha = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}$. 109. $(0, 0, \frac{3h}{4})$. 110. $\left(\frac{9\pi a}{8(3\pi-4)}, 0, 0\right)$. 111. $(0, 0, \frac{7c}{30})$. 112. $(0, 0, \frac{3a}{8})$. 113. $(1, 1, \frac{5}{3})$. 114. $I_{xy} = \frac{\pi}{5}abc^3$, $I_{yz} = \frac{\pi}{20}a^3bc$, $I_{xz} = \frac{\pi}{20}ab^3c$. 115. $I_{xy} = \frac{2}{225}abc^3(15\pi - 16)$, $I_{yz} = \frac{2}{1575}a^3bc(105\pi - 92)$, $I_{xz} = \frac{2}{1575}ab^3c(105\pi - 272)$. 116. $I_{xy} = \frac{7}{2}\pi abc^3$, $I_{yz} = \frac{4}{3}\pi a^3bc$, $I_{xz} = \frac{4}{3}\pi ab^3c$. 117. $u = \pi\mu_0\left(a^2\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2-z}}\right| + (h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2} + z\sqrt{a^2+z^2} - ((h-z)|h-z|+z|z|)\right)$. 118. $F = (0, 0, -\pi k\mu_0 r \sin^2 \alpha)$. 119. $\sqrt{5}\ln 2$. 120. $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$. 121. $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$. 122. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left((1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$. 123. $\frac{1}{3}\left((x_2^2+1)^{\frac{3}{2}} - (x_1^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)$. 124. $(1+e^{-t})\sqrt{3}$. 125. $\frac{8}{15}k\sqrt{2}\left(3\pi^2 - 1)(2\pi^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + 1\right)$. 126. $\frac{98}{81}p^2$. 127. 3. 128. $\frac{3}{16}\pi a^3\sqrt{a}$. 129. 13. 132. $u = \ln|x-y| + \frac{y}{x-y} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + C$. 133. $u = \frac{2x}{x-yz} + C$. 134. $2\pi \operatorname{arctg} \frac{H}{R}$. 135. $\frac{2\pi a}{c(n-2)}\left(\frac{1}{(c-a)^{n-2}} - \frac{1}{(c+a)^{n-2}}\right)$, $n \neq 2$. 136. $R^2 H \left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8}\right)$. 137. $\frac{\pi}{8}$. 138. 0. 139. $\frac{\pi a^4}{2}$. 140. $-2\pi ab$. 141. 0. 142. $\frac{\partial}{\partial x}(xF(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(yF(x, y))$. 143. $\operatorname{sgn}(ad - bc)$. 144. $\sum \operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}$, где сумма распространяется на все точки пересечения кривых, определяемых уравнениями $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, лежащие внутренне контура γ . 145. $\frac{a^2}{2}B(2m+1, 2n+1)$. 147. $3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$. 148. $2 \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 149. $\iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dx dy dz$. 150. $3a^4$. 151. $\frac{2a^3}{9}$. 153. $-\frac{\pi R^6}{8}$. 154. $-\pi a^2\sqrt{3}$. 155. $\frac{h^3}{3}$. 156. 0. 157. $-\frac{9a^3}{2}$. 158. $\varphi = \pi$. 159. $\frac{\partial u}{\partial e} = -\frac{\cos(e, r)}{r^2}$; $\frac{\partial u}{\partial e} = 0$, если $e \perp r$. 160. $\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle}{|\operatorname{grad} v|}$; $\frac{\partial u}{\partial e} = 0$, если $\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$. 161. 0. 162. $\frac{f'(r)}{r}\langle c, r \rangle$. 163. $3f(r) + rf'(r)$; $f(r) = \frac{C}{r^3}$, $C = \text{const}$. 164. $\frac{3\pi}{16}$. 165. $\frac{1}{6}$. 167. $\operatorname{rot} u(M) = -\frac{5}{4}i - j + \frac{5}{2}k$, $|\operatorname{rot} u(M)| = \frac{1}{4}\sqrt{141}$. 168. 0. 170. $\frac{33}{2}$. 171. $u(x, y, z) = \int_{r_0}^r tf(t) dt$,

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 172. а) $\left(\cos \varphi - 3^\rho \ln 3, \frac{z}{\rho} \sin 2\varphi - \sin \varphi, \sin^2 \varphi \right)$; б) $(2\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta, 0)$;
 в) $\left(-C \frac{2 \cos \theta}{\rho^3}, -C \frac{\sin \theta}{\rho^3}, 0 \right)$. 173. а) $2 + \frac{z}{\rho} \cos \varphi - e^\varphi \sin z$; б) 0. 174. а) $\left(\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}, -\left(2 \cos \theta + \frac{a \sin \varphi}{\rho \sin \theta} \right), -\frac{a \sin \theta}{\rho} \right)$; б) $\left(0, z, -\frac{\cos \varphi}{\rho} \right)$. 175. 24π .

Оглавление

Глава 1. Интегралы, зависящие от параметра	3
§1. Собственные интегралы, зависящие от параметра	3
§2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов	15
§3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла	34
§4. Эйлеровы интегралы	51
§5. Интегральная формула Фурье	60
Глава 2. Кратные и криволинейные интегралы	68
§1. Интеграл Римана на компакте. Приведение кратных интегралов к повторным и их вычисление	68
§2. Несобственные кратные интегралы	99
§3. Приложение кратных интегралов к решению задач геометрии и физики ...	112
§4. Интегрирование на многообразиях	148
§5. Формулы Остроградского, Грина и Стокса	184
§6. Элементы векторного анализа	201
§7. Запись основных дифференциальных операций векторного анализа в ортогональных криволинейных координатах	214
Ответы	222

Издательство УРСС предлагает Вам свои лучшие книги:

-
- Шкин Е.В., Шкина Г.Е. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели. (Гуманитариям о математике).
- Киселев А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И. и др. Вся высшая математика. Т. 1–6.
- Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
- Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Векторный анализ.
- Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения.
- Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.
- Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление.
- Боровков А.А. Теория вероятностей.
- Боровков А.А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов.
- Шкин Е.В. От игр к играм.
- Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 7-е изд., испр. 2000.
- Гнеденко Б.В. Очерк по истории теории вероятностей.
- Гнеденко Б.В. О математике.
- Самарский А.А., Вабишевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам.
- Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И., Подшивлов Е.В., Черных А.И., Шапиро Д.А., Шапиро Е.Г. Задачи по математическим методам физики.
- Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
- Арнольд В.И. Математические методы классической механики.
- Квасников И.А. Молекулярная физика.
- Жукарев А.С., Матвеев А.Н., Петерсон В.К. Задачи повышенной сложности в курсе общей физики.

**Ляшко Иван Иванович, Боярчук Алексей Климентьевич,
Гай Яков Гаврилович, Головач Григорий Петрович**

Справочное пособие по высшей математике. Т. 3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы. — М.: Едиториал УРСС, 2001. — 224 с.

ISBN 5-354-00019-X

«Справочное пособие по высшей математике» выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 3 по содержанию соответствует второй половине второго тома «Справочного пособия по математическому анализу». В нем рассматриваются интегралы, зависящие от параметра, кратные и криволинейные интегралы, а также элементы векторного анализа.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и работников физико-математических, экономических и инженерно-технических специальностей, специалистов по прикладной математике, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.