Формула включений и исключений

1) Пусть A, B - конечные множества. Найти $|A \cup B|$ - ?

а) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$

б) $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2) Пусть A, B, C - конечные множ.. Найти $|A \cup B \cup C|$ - ?

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Теорема (формула включений и исключений):

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ - конечные множ., то

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < l \le n} |A_i \cap A_j \cap A_l| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

◊ по индукции:

$n = 1$: $|A_1| = |A_1|$

$n = 2$: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

$n \geq 3$: индукционное предполож:

Пусть формула верна для $(n-1)$-го множ.

$$|\underbrace{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})}_{A} \cup A_n| = |A \cup A_n| = |A| + |A_n| - |A \cap A_n| =$$

$$= |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n-1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}| + |A_n| - \sum_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_n \cap A_j \cap A_n| - \ldots + (-1)^{n-1+1+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|$$

☒

Задача: Каждый ученик обязан изучать 1 язык.

Нем. яз. = 6 чел.

Фр. яз. = 7 чел.

Англ. яз. = 8 чел.

Нем. + Фр. яз. = 3 чел

Нем. яз. + Англ. яз. = 4 чел.

Фран. + Англ. яз = 5 чел.

Нем. яз. + Фр. + Англ. = 1 чел.

Вопрос: Сколько студентов в группе?

Решение: A - множ. студентов, изучающих англ.
B - множ. студентов, изучающих нем.
C - множ. студентов, изучающих франц.

Надо найти $|A \cup B \cup C|$

По формуле включения и исключения:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 8 + 6 + 7 - 4 - 3 - 5 + 1 = \underline{10}$$

Ответ: 10

→ A - конечное множ., $A_1, A_2, \ldots, A_k$ - система подмнож. множества A.

$$|A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)| = |A| - \sum_{i=1}^{k} |A_i| + \sum_{1 \le i \le j \le k} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i \le j \le r \le k} |A_i \cap A_j \cap A_r| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|.$$

Рекурентные соотношения

1. Арифметическая прогрессия с начальным членом a_1 и разностью d — это последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которая задается рекурентным соотношением вида $a_n = a_{n-1} + d$

2. Геометрическая прогрессия с нач. членом b_1 и знаменателем q — это последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, которая задается рекурентным соотношением вида $b_n = b_{n-1} \cdot q$, $n \geq 2$

3.

Месяц	кол-во пар кроликов	
1	1	
2	1	
3	2	
4	3	
5	5	
6	8	. . .

1, 1, 2, 3, 5, 8, ... — послед. Фибоначчи.

f_n — кол-во пар кроликов, живущих в n месяце

$f_1 = 1$; $f_2 = 1$;

пусть $n \geq 3$: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Опр: Линейным однородным рекурентным соотношением k-ого порядка с постоянными коэффиц. — соотношение вида

$f_n = a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \ldots + a_{k-1} f_{n-k+1} + a_k f_{n-k}$, где

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ и $a_k \neq 0$

Пр: 1) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (числа Фибоначчи)
2) $f_n = f_{n-2} - f_{n-5}$ (5-ого порядка)

Пусть $k=2$: (*) $f_n = a_1 f_{n-1} + a_2 \cdot f_{n-2}$, $a_2 \neq 0$

$$f_n = \lambda^n$$

$$\lambda^n = a_1 \cdot \lambda^{n-1} + a_2 \cdot \lambda^{n-2} \quad ;/:\lambda^{n-2}$$

$\lambda = 0$ - корень. Предполагаем, $\lambda \neq 0$:

$$\lambda^2 = a_1 \cdot \lambda + a_2$$

характеристическое ур. рекуррентного соотношения (*) — $\lambda^2 - a_1 \lambda - a_2 = 0$

λ_1, λ_2 - корни

Теорема:

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда справедливо:

1) для $\forall$ чисел c_1, c_2 последовательность $f_1, f_2, \dots, f_n$
$f_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ удовлетворяют соотношению (*)
2) если последовательность чисел $f_1, f_2, \dots, f_n$ удовлетв. соотношению (*), то найдутся числа c_1, c_2:
$f_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$, $n \geq 1$

◇ без доказательства ⊠

Пр: $f_n = f_{n-1} + f_{n+2}$

$f_1 = f_2 = 1$

составим характеристическое ур. для (**)

$f_n = \lambda^n$; $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$ $;/:\lambda^{n-2}$

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$f_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

найдем c_1, c_2:

$$\begin{aligned} n=1: &\begin{cases} c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases} \\ n=2 & \end{aligned}$$

система имеет 1 реш.: $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Теорема

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, тогда:

1) $\forall$ комплексных чисел c_1, c_2 последовательность $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, задаваемая формулой $f_n = (c_1 \cdot n + c_2)\lambda^n$, удовлетворяет соотношению (*)

2) Если последоват. $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ удовлетворяет соотношению (*), то найдутся c_1, c_2: $-$ $f_n = (c_1 n + c_2)\cdot\lambda^n$

◇ без доказательства ☒

Теорема

1) Пусть $P_1(n)$ - произвольный многочлен степени $\leq k_1 - 1$; $P_2(n)$ - произвольный многочлен степени $\leq k_2 - 1$, ..., $P_r(n)$ - произвольный многочлен степени $\leq k_r - 1$. Тогда последовательн. $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ $f_n = \mu_1^n \cdot P_1(n) + \mu_2^n P_2(n) + \ldots + \mu_r^n P_r(n)$, где μ - корень характерист. многочлена, удовлетворяет соотношению (**)

2) Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ - последовательность, удовлетворяющая (**), тогда найдутся многочлены:

$P_1(n)$ степени $\leq k_1 - 1$
$P_2(n)$ степени $\leq k_2 - 1$
. . . .
$P_r(n)$ степени $\leq k_n - 1$

такие, что $f_n = \mu_1^n P_1(n) + \mu_2^n P_2(n) + \ldots + \mu_r^n P_r(n)$, $n \geq 1$

Булевые функции

§ Булев куб. Булевы функции

$\{0,1\}$, $n \in N$

Упорядоченный набор из n нулей и единиц – это упорядочен. набор $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, в котором каждая компонента $\alpha \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,n}$

кол-во компонентов n – длина набора

Пример:

1. $\alpha = 010$ – набор длины 3
2. $\beta = 0011$ – набор длины 4
3. $\gamma = 0000$ – нулевой набор длины 4.
4. $\delta = 1111$ – единичный набор длины 4.

Наборы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ назыв.:

1) равными, если $\alpha_i = \beta_i$, $i = \overline{1,n}$
2) соседними по i-ой компоненте, если они различаются ровно в одной компоненте, стоящей на этой позиции.
3) противоположными, если $\alpha_i \neq \beta_i$, $\forall i = \overline{1,n}$ (различаются в каждой компоненте)

Пр:
1. $\alpha = 0011$, $\beta = 0011$ $(\alpha = \beta)$
2. $\alpha = 0011$, $\beta = 0010$ (не равны, соседние)
3. $\alpha = 0011$, $\beta = 1100$ (противоположные)

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \leq \beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$, если $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = \overline{1,n}$

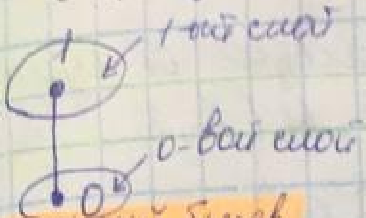
Пр:
1) $01 \leq 11$
2) 01 и 10 – не сравнимы

n-мерный булев куб – множество всех нулей и единиц $(\{0,1\}^n = \{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,n}\}$

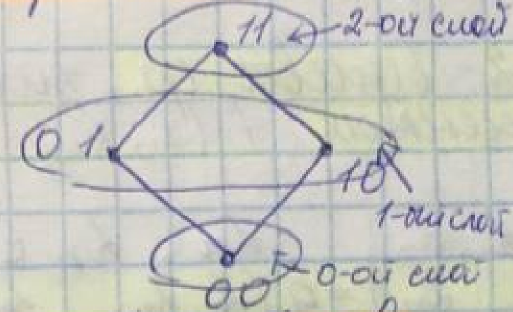
Пр
1) $\{0,1\}^1 = \{0,1\}$
2) $\{0,1\}^2 = \{00, 01, 10, 11\}$

3) $\{0,1\}^3 = \{000, 001, 011, 111, 100, 110, 010, 101\}$

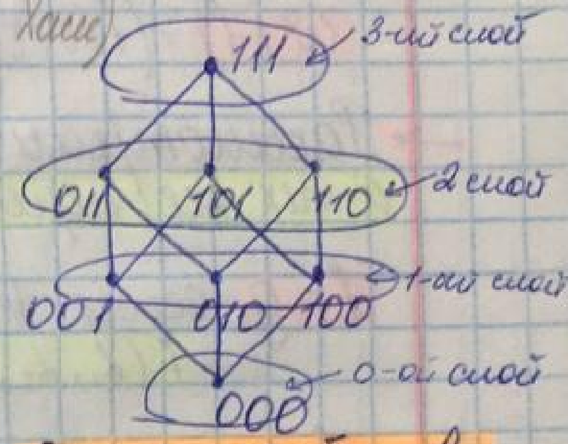
Изобразим графически (диаграмма Хассе)



1-мерный булев куб



2-мерный булев куб



3-мерный булев куб

0 — 0-мерный булев куб
1=0
n=0

k-ый слой n-мерного булевого куба – множество наборов этого куба, в котором ровно k единиц

$a, b, c, \ldots, x, y, z \in \{0,1\}$ – булевы переменные

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, зависящая от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – отображение (функция) f, которая переводит $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, т.е.

$$\{0,1\}^n \ni x_1, x_2 \ldots x_n \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}$$

Джордж Буль (1815–1864)

ТАБЛИЧНОЕ ЗАДАНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
2^n	0	0	...	0	0	$f(0,0,\ldots,0,0)$
	0	0	...	0	1	$f(0,0,\ldots,0,1)$
	0	0	...	1	0	$f(0,0,\ldots,1,0)$
	...					...
	1	1	...	1	0	$f(1,1,\ldots,1,0)$
	1	1	...	1	1	$f(1,1,\ldots,1,1)$

Набор значений булевой функции f

$\omega(f) = (f(0,0,\ldots,0), f(0,0,\ldots,1,0), \ldots f(1,1,\ldots,1))$

Рассмотрим 2-булевы ф., зависящих от одних и тех же переменных $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$f = g$, если $\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_n \in \{0,1\}^n$
$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$f \neq g$, если найдется $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, $\alpha_n \in \{0,1\}^n$
$f(\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$
$f \neq g \Leftrightarrow \omega(f) \neq \omega(g)$

Теорема:

Число различных булевых функций, зависящих от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равно $\boxed{2^{2^n}}$!

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \omega(f) = (\underbrace{f(\overset{2}{0}, \overset{2}{0}, \ldots, 0)}, \underbrace{f(0, \ldots, 1)}, \ldots, f(1, \ldots))$

По основному правилу комб. число всех возможных различных наборов значен. ф. $f = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^m,\ m = 2^n} = 2^{2^n}$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$g(x)$	$h(x)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

не числа, а обозначение
не переменные

$f_1(x) = 0$ – константа 0
$f_2(x) = 1$ – константа 1
$g(x) = x$ – тождественная функция
$h(x) = \bar{x}$ – отрицание

Элементарные булевы ф. от 2-ух переменных

x_1	x_2	$f_1(x_1,x_2)$	$f_2(x_1,x_2)$	$f_3(x_1,x_2)$	$f_4(x_1,x_2)$	$f_5(x_1,x_2)$	$f_6(x_1,x_2)$	$f_7(x_1,x_2)$	$f_8(x_1,x_2)$	$f_9(x_1,x_2)$
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0

$f_1(x_1, x_2) = 0$ – константа 0

$f_2(x_1, x_2) = 1$ – константа 1

$f_3(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$ – дизъюнкция (логич. слож.)

$f_4(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2$ – конъюнкция (логич. умнож.)

$f_5(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ = сложение по модулю 2

$f_6(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ = отрицание по модулю 2 (эквиваленция)

$f_7(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ – импликация

$f_9(x_1, x_2) = \overline{x_1 \vee x_2}$ – отрицание дизъюнкции (стрелка Пирса $= x_1 \downarrow x_2$)

$f_8(x_1, x_2) = \overline{x_1 \wedge x_2}$ – отрицание конъюнкции (штрих Шеффера $= x_1 / x_2$)

Существенные и не существенные переменные

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Пр 1:

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

обе переменные x_1, x_2 – не существенные (фиктивные)

Пр. 2

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

x_1 - существен. перем.
x_2 - фиктивная перем.

Пр. 3

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1, x_2 - существ. перем.

$x_2 = 0$: Если $x_1 = 0$, то $f(0,0) = 0$; Если $x_1 = 1$, то $f(1,0) = 1$ $\Rightarrow$ x_1 - сущ.

$x_1 = 0$: Если $x_2 = 0$, то $f(0,0) = 0$; Если $x_2 = 1$, то $f(0,1) = 1$ $\Rightarrow$ x_2 - существ.

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_i, если найдутся значения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$: $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$

Если булева ф. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_i, то перемен. x_i называется существенной переменной булевой ф. f.

В противном случае x_i называется несущественной (несущественной / фиктивной)

Рассмотрим булеву ф. $f(\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_m}_{\text{существенные}}, \underbrace{x_{m+1}, \ldots, x_n}_{\text{фиктивные}})$

Способы исключения фиктивной переменной из булевой ф.

1.) $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$
$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$

2) а) выбираем существ. переменную x_i, где $i \in \{1, \ldots, m\}$
б) Осуществляем замену: $x_{m+1} = i, \ldots, x_n = i$

$g(x_1, x_2, .., x_m) = f(x_1, x_2, ..., x_m, \underbrace{x_i, x_i, x_i}_{n-m})$, $i \in \{1, 2, .., m\}$

существенная фиктивная нет соседних но

Пр:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
1	0	0	1
1	0	1	0
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~

существенная

x_1	x_3	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Алгоритм удаления фиктивной перем. x_i состоит из вычеркивания из таблицы истинности всех строк, в которых $x_i = 0$ (или $x_i = 1$) и столбца x_i

Рассмотрим булеву ф. $f(x_1, x_2, .., x_m)$
Требуется добавить в f фиктивные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, .., x_n$

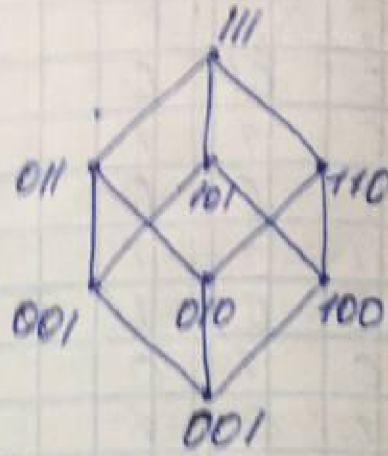
$$g(x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$$

Если есть булева ф. $f_1(\ )$, $f_2(\ )$, то с помощью добавления фиктивных переменных, переименования фиктивных перем., удаления фиктивных переменных мы всегда можем сделать так, чтобы функции $f_1(\ )$, $f_2(\ )$ зависели от одних и тех же переменных

Всюду далее мы будем считать две булевы ф. равными, если одну можно получить из другой с помощью переименования, удаления, добавления фиктивных переменных !

Графическое задание булевой функции.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



Реализация булевых функций булевыми формулами

(1) Замена переменных

$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots)$

Пр: $x_1 \oplus x_2 \to x_1 \oplus x_1$ – константа 0

(2) Суперпозиция функции:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_i(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{p_i}}),\ i = \overline{1,n} \end{array}\right\} \varphi(\cdot) = f(f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots$$

$\varphi(\cdot)$ получена с помощью суперпозиции функции ф. f и ф. $f_1, f_2, \dots, f_n$

Замечание:

Замена переменных – частный случай суперпозиции функции.

Рассмотрим $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \to \left[\begin{array}{l}\text{замена} \\ x_i \text{ на } y\end{array}\right.$

$= f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots x_n) \\ f_i(y) = y \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{суперпозиция } f \text{ и } f_i} f(x_1, x_2, \dots, \overbrace{f_i(y)}^{y}, \dots, x_n)$$

$= f(x_1, x_2, \dots, y, \dots)$

P_2 - множ. всех булевых ф.

Рассмотрим непустое подмножество F во множ. P_2 $(F \subseteq P_2)$

Опр: 1) Любая булева ф. из множества F - является булевой формулой над множ. F.

2) Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - булева ф. $\in F$ и A_i - это либо переменная, либо функция над множ. F, где $i = \overline{1,n}$, то суперпозиция ф. $f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ также является булевой формулой над множ. F.

3) Булевыми формулами над множ. F являются те и только те выражения, которые могут быть получены за конечное число применений пунктов 1 и 2.

Пр: $F = \{1, \overline{x}_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2\}$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ - переменные

$\underbrace{1}_{A_1}$ $\quad \overline{x}_1 \downarrow \underbrace{\overline{x}_3}_{A_2}$ $\quad \underbrace{x_1 x_2}_{B_2}$

$(A_1 \vee A_2) = (1 \vee \overline{x}_3) = B_1$ ← булева формула над множ. F

$$(B_1 \vee B_2) = ((\underbrace{\overset{A_1}{1} \vee \overset{A_2}{\overline{x}_3}}_{B_1}) \vee (\underbrace{x_1 \cdot x_2}_{B_2})) \leftarrow = \Phi$$

Говорят, что булева формула Φ реализует булеву функцию f, если придавая переменным, входящим в формулу Φ, различные значения и вычисляя значения получившегося выражения получим функцию f.

x_1	x_2	x_3	B_2	A_1	A_2	B_1	$\mathcal{A}$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1

← таблица истинности для формулы $\mathcal{A}$

столбец значений булевой функции, которая реализует булевой формулой

Булева формула, реализующая константу 1 – тавтология.

Булева формула, реализующая константу 0 – противоречие.

Булевы формулы, реализующие одну и ту же булеву функцию, назыв. равносильными ($\mathcal{A} \equiv B$) - равносильность

Равносильности в теории булевых функций

I группа: свойство констант

Пусть $\mathcal{A}$ - булева формула, тогда

$\mathcal{A} \vee 0 = \mathcal{A}$

$\mathcal{A} \vee 1 = 1$

$\mathcal{A} \cdot 0 = 0$

$\mathcal{A} \cdot 1 = \mathcal{A}$

$\mathcal{A} \vee \overline{\mathcal{A}} = 1$

$\mathcal{A} \cdot \overline{\mathcal{A}} = 0$

плюс по модулю (2)

$\mathcal{A} \oplus 1 = \overline{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A} \sim \mathcal{A} = 1$

II группа: Закон двойного отрицания

$\overline{\overline{x}} = x$

III группа: Свойства идемпотентности:

Если A – булева формула

$\mathcal{A} \cdot A = \mathcal{A}$

$A \vee A = A$

IV группа: свойства коммутативности

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$$
$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$
$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$$
$$x_1 \sim x_2 = x_2 \sim x_1$$

V группа: свойства ассоциативности:

$$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_2)$$
$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$$

VI группа: свойства дистрибутивности:

$$x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3)$$
$$x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$$
$$x_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \cdot x_3)$$

VII группа: правила де Моргана

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$
$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

◇ $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$ (с помощью фиксирования переменных)

зафиксируем переменную $x_1 = 0$;

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{0 \vee x_2} = \overline{x_2}$$
$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = \overline{0} \cdot \overline{x_2} = 1 \cdot \overline{x_2} = \overline{x_2}$$

$x_1 = 1$: $\overline{1 \vee x_2} = \overline{1} = 0$

$$\overline{1} \cdot \overline{x_2} = 0 \cdot \overline{x_2} = 0$$ ☒

$x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2}$

VIII группа:

$$x \oplus y = (\overline{x} \cdot y) \vee (x \cdot \overline{y})$$
$$x \to y = \overline{x} \vee y$$
$$x \sim y = (x \to y) \cdot (y \to x)$$
$$x \sim y = (\overline{x} \cdot \overline{y}) \vee (x \cdot y) = (\overline{x_1} \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2})$$

$\overline{x_1 \sim x_2} = x_1 \oplus x_2$

IX группа: Элементарные поглощения

Если $\mathcal{A}$ – булева формула, то

$$\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \cdot x) = \mathcal{A}$$

◇ $\underset{\mathcal{A} \cdot 1}{\mathcal{A}} \vee (\mathcal{A} \cdot x) = [(\mathcal{A} \vee \mathcal{A}) \cdot (\mathcal{A} \vee x)] = (\mathcal{A} \cdot 1) \vee (\mathcal{A} \cdot x) =$

$= \mathcal{A} \cdot (\underset{1}{\underbrace{1 \vee x}}) = \mathcal{A} \cdot 1 = \mathcal{A}$ ☒

X группа: Элементарное склеивание

A – булева формула, то

$$(A\cdot x)\vee(A\cdot\overline{x}) = A$$

◇ $(A\cdot x)\vee(A\cdot\overline{x}) = A(\underbrace{x\vee\overline{x}}_{1}) = A\cdot 1 = A$ ☒

XI группа: обобщённое склеивание:

Если A и B – булевы формулы, то

$$(A\cdot x)\vee(B\cdot\overline{x}) = (A\cdot x)\vee(B\cdot\overline{x})\vee(A\cdot B)$$

◇ $(A\cdot x)\vee(B\cdot\overline{x})\vee(\underbrace{A\cdot B}_{A\cdot B\cdot 1}) = (A\cdot x)\vee(B\cdot\overline{x})\vee(A\cdot B\cdot 1) =$

$= (A\cdot x)\vee(B\cdot\overline{x})\vee(A\cdot B\cdot(x\cdot\overline{x})) = (A\cdot x)\vee(B\cdot\overline{x})\vee$

$\vee(A\cdot B\cdot x)\vee(A\cdot B\cdot\overline{x}) = (A\cdot x)\cdot(\underbrace{1\cdot B}_{1})\vee B\overline{x}(\underbrace{1\cdot A}_{1}) =$

$= Ax\cdot 1\vee B\overline{x}\cdot 1 = Ax\vee B\overline{x}$ ☒

Равносильное преобразование булевой формулы – такое преобразование формулы, при котором некотор. подформула формула заменяется на равносильную ей.

Дизъюнктивно нормальная форма

Опр: Конъюнкция переменных (с отрицанием или без), взятых не более чем 1-ому разу называется элементарной конъюнкцией.

Ранг элементарной конъюнкции = кол-во переменных.

Пр: 1) $k(x_1, x_2, x_2, x_3) = x_1\cdot\overline{x_2}\cdot x_4$ – элементарная конъюнкция ранга 3.

2) $k(x_1, x_2, x_3) = \underline{\underline{x_1}}\cdot x_2\cdot\underline{\underline{\overline{x_1}}}$ – Не элементарная конъюнкция

Примем считать, что константа 1 - элементарная конъюнкция

$0 = x_1 \cdot \overline{x_1}$ - не элементарная конъюнкция.

Опр: Элементарная конъюнкция, содержащая каждую переменную ровно 1 раз называется **полной**.

Пр: 1) $k(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$ - полная элемент. конъюнкц.
2) $k(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \overline{x_2}$ - не полная элементар. конъюнкц.

Опр: Дизъюнкция различных элементарных конъюнкций

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = \underline{k_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \vee \underline{k_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \vee \ldots \vee \underline{k_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

попарно различные элементарные конъюнкции

m - длина ДНФ

называется **дизъюнктивно нормальной формой (ДНФ)**

Опр: ДНФ, состоящая из полных элементарных конъюнкций, называется **совершенно дизъюнктивно нормальной формой. (СДНФ)**

Пр: 1) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot \overline{x_2}) \vee x_3$ - ДНФ длины 2.
(не СДНФ)

2) $x_1 \to x_2 \equiv \overline{x_1} \cdot x_2$ - ДНФ длины 2.

3) $x_1 \to x_2 = (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_2)$ - ДНФ длины 3

Теорема: (О разложении булевой функции в дизъюнктивную форму по одной переменной):
Произвольную булеву ф. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \overline{x_1} \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n)$$

(конъюнкция старше дизъюнкции)

◊

1 случай: $x_1 = 0$
Левая часть: $f(0, x_2, \ldots, x_n)$
правая часть: $\underbrace{0 \cdot f(1, x_2, \ldots, x_n)}_{0} \vee \underbrace{\overline{0}}_{1} f(0, x_2, \ldots, x_n) =$

$= 0 \vee 1 \cdot f(0, x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots x_n)$

<u>2 случай:</u> $x_1 = 1$

л.ч: $f(1, x_2, \dots, x_n)$

п.ч: $1 \cdot f(1, x_2, \dots, x_n) \vee \underbrace{0 \cdot f(0, x_2, \dots, x_n)}_{0} =$

$= f(1, x_2, \dots, x_n) \vee 0 = f(1, x_2, \dots, x_n)$ $\boxtimes$

→ **Разложение булевой ф. по первым 2-ум перем. в дизъюнктивную форму**

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot f(1, x_2, \dots, x_n) \vee \overline{x_1} f(0, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= x_1 (x_2 \cdot f(1, 1, x_3, \dots, x_n) \vee \overline{x_2} \cdot f(1, 0, x_3, \dots, x_n)) \vee$$
$$\overline{x_1} (x_2 \cdot f(0, 1, x_3, \dots, x_n) \vee \overline{x_2} f(0, 0, x_3, \dots, x_n)) =$$
$$= x_1 x_2 \cdot f(1, 1, x_3, \dots, x_n) \vee x_1 \overline{x_2} \cdot f(1, 0, x_3, \dots, x_n) \vee$$
$$\vee \overline{x_1} x_2 \cdot f(0, 1, x_3, \dots, x_n) \vee \overline{x_1}\, \overline{x_2} f(0, 0, x_3, \dots, x_n)$$

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \overline{x}, \text{ если } \sigma = 0 \\ x, \text{ если } \sigma = 1 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \quad (*)$$

<u>Утв. 1:</u> $x^{\sigma} = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$

◇

x	σ	x^{σ}
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\boxtimes$

<u>Утв. 2:</u> $x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} = 1 \Leftrightarrow x_1 = \sigma_1, x_2 = \sigma_2, \dots, x_k = \sigma_k$

◇ $x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\sigma_k} = 1 \Leftrightarrow x_1^{\sigma_1} = 1, x_2^{\sigma_2} = 1, \dots, x_k^{\sigma_k} = 1 \Leftrightarrow$ (по 1-ому утверждению) $x_1 = \sigma_1, x_2 = \sigma_2, \dots, x_k = \sigma_k$ $\boxtimes$

Теорема (о разложении булевой ф. в дизъюнктивную форму по k переменным)

Произвольную булеву ф. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно представить в виде (*)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \dots \sigma_k} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, \dots,\ x_k = \alpha_k$

Л. ч. : $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$

П. ч. : $\bigvee_{\sigma_1, \dots, \sigma_k} \underbrace{\alpha_1^{\sigma_1} \cdot \alpha_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k}}_{1} \cdot f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = A$

[По утверждению (2): $\alpha_1^{\sigma_1} \cdot \alpha_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot \alpha_k^{\sigma_k} = 1 \iff \alpha_1 = \sigma_1,\ \alpha_2 = \sigma_2, \dots,\ \alpha_k = \sigma_k$]

$A = \cancel{1} \cdot f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$

Левая и правая части равны ⊠

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \dots \sigma_k} x_1^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_k} = f(\sigma_1, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

$$k = n: \ f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \dots \sigma_n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1, \dots, \sigma_n \\ f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\sigma_n} \text{ – СДНФ}$$

Теорема (о существовании и единственности представления булевой ф. в виде СДНФ)

Произвольную булеву ф., отличную от константы 0 единственным образом можно представить в виде СДНФ

Теорема: (о полноте системы булевых ф., состоящей из {–, •, ∨})

Любую булеву ф., необязательно отличную от константы 0, можно реализовать булевой формулой над множ. булевых ф. {•, ∨, –}

◇ Рассмотрим произвольную булеву ф. $f(x_1, .., x_n)$

I случай: Пусть ф. $f(x_1, x_2, .., x_n) \equiv 0$ ⇐ константа 0, тогда $f(x_1, .., x_n)$ представим в виде булевой формулы =

II случай: Пусть ф. $f(x_1, x_2, .., x_n) \neq 0$. Тогда $f(x_1, .., x_n)$

$$= \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, .. \sigma_n} (x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot .. \cdot x_n^{\sigma_n}) \Leftarrow \text{СДНФ}$$

Доказали. ⊠

КОНЪЮНКТИВНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Дизъюнкция переменных (с отрицанием или без) взятых по не более чем одному разу, назыв. элементарной дизъюнкцией.

Пр: ① $D(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \overline{x_2}$ – элементарная дизъюнкция ранга 2.

② $D(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_1}$ – не элементарная дизъюнкция

0 – элемент дизъюнкции ранга 0.

1 – $x_1 \vee \overline{x_1}$ – не элементарная дизъюнкция.

Элементарная дизъюнкция, содержащая каждую переменную ровно 1 раз, назыв. полной.

Пр: ① $D(x_1, x_2) = \overline{x_1} \vee x_2$ – полная элементарная дизъюнкция

② $D(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \vee x_3$ – неполная элементарная дизъюнкция

Конъюнкция различных элементарных дизъюнкций назыв. конъюнктивной нормальной формой. (КНФ)

КНФ, состоящая из полных элементарных дизъюнкций назыв. совершенной нормальной конъюнктивной формой (СКНФ)

Пр: ① $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_2)$ – КНФ, не СКНФ