1 Формулы логики предикатов

1.1 Определения

Условимся обозначать предметные переменные строчными латинскими буквами возможно с индексами

$$a, b, c, \ldots, x, y, z, x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

а предикатные переменные прописными латинскими буквами (возможно с индексами) с последующей парой скобок, внутри которых указаны предметные переменные, относительно которых рассматриваются предикатные переменные

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\ - \ n\text{-местная предикатная переменная,} \\ Q(y_1, y_2, \ldots, y_m) &\ - \ m\text{-местная предикатная переменная,} \\ Z(z_1, z_2, \ldots, z_k) &\ - \ k\text{-местная предикатная переменная.} \end{aligned}$$

Для 0-местных предикатных переменных скобки опускаются для краткости записи.

Определение 1. *Формулой логики предикатов* называется выражение, которое можно получить с помощью конечного числа применений следующих правил:

а) всякая 0-местная предикатная переменная является формулой логики предикатов,

б) всякая n-местная предикатная переменная ($n \geq 1$) является формулой логики предикатов, в которой все предметные переменные обьявляются свободными,

в) если $\mathscr{A}$ является формулой логики предикатов, то выражение $(\overline{\mathscr{A}})$ является формулой логики предикатов, в которой свободными обьявляются те и только те предметные переменные, которые таковыми являются в формуле $\mathscr{A}$,

г) если $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ — формулы логики предикатов такие, что нет предметной переменной, которая свободна в одной формуле и не свободна в другой, то выражения $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}), (\mathscr{A} \cdot \mathscr{B}), (\mathscr{A} \to \mathscr{B}), (\mathscr{A} \sim \mathscr{B})$ — формулы логики предикатов, в которых свободными обьявляются те и только те предметные переменные, которые таковыми являются в формуле $\mathscr{A}$ или формуле $\mathscr{B}$,

д) если $\mathscr{A}$ — формула логики предикатов, в которой предметная переменная x является свободной, то выражения $(\forall x\, \mathscr{A})$ и $(\exists x\, \mathscr{A})$ —

формулы логики предикатов, в которых свободными обьявляются все предметные переменные, которые таковыми являются формуле $\mathscr{A}$ за исключением переменной x, которая обьявляется несвободной (связанной).

При этом в формулах логики предикатов $(\forall x\,\mathscr{A})$ и $(\exists x\,\mathscr{A})$ формула логики предикатов $\mathscr{A}$ называется *областью действия квантора*.

Примеры. Пусть $P, Q(x,y)$ и $R(x,y,z)$ — предикатные переменные. Согласно пунктам *а*) и *б*) определения

P – формула логики предикатов,

$Q(x,y)$ – формула логики предикатов; x и y – свободные переменные,

$R(x,y,z)$ – формула логики предикатов; x,y,z – свободные переменные.

В соответствии с пунктом *в*) выражение $(\overline{Q(x,y)})$ является формулой логики предикатов, в которой предметные переменные x и y свободные. На основании пункта *г*) выражение $((\overline{Q(x,y)}) \vee Q(x,y))$ является формулой логики предикатов, в которой переменные x и y свободные. По пункту *д*) выражения $(\forall x\, Q(x,y))$, $(\exists x\,(\forall z R(x,y,z)))$ являются формулами логики предикатов с единственной свободной предметной переменной — переменной y (переменные x и z связанные). При этом в обоих формулах действия всех кванторов распространяются до конца формулы.

Выражение

$$(\forall\, x(\underbrace{\exists\, xP(x,y)}_{\mathscr{A}}))$$

не является формулой логики предикатов, поскольку переменная x в формуле $\mathscr{A}$ не является свободной. Выражение

$$(\underbrace{Q(x,y)}_{\mathscr{A}} \vee \underbrace{(\forall\, xR(x,y,z))}_{\mathscr{B}})$$

не является формулой логики предикатов, поскольку предметная переменная x свободная в формуле $\mathscr{A}$ и не свободная в формуле $\mathscr{B}$.

По определению в формуле логики предикатов должны быть расставлены скобки. Для того, чтобы упростить запись формулы примем следующее соглашение. Условимся в формуле опускать внешние скобки, а также скобки, обрамляющие подформулу, стоящую под отрицанием.

Определение 2. Пусть A — произвольное непустое множество. *Интерпретацией формулы логики предикатов на множестве* A называется преобразование формулы в высказывание, при котором в формулу *а*) вместо каждой предикатной переменной подставляется конкретный предикат, определённый на множестве A,

б) вместо каждой свободной предметной переменной подставляется конкретный предмет из множества A.

Примеры. Приведём примеры интерпретаций формул логики предикатов.

1. Рассмотрим формулу логики предикатов

$$\forall x(\exists y\, P(x, y)). \tag{1}$$

Построим интерпретацию этой формулы на множестве A, состоящем из всех людей когда-либо живших или живущих в настоящий момент. Подставим в формулу вместо предикатной переменной $P(x, y)$ предикат «y является родителем x». Тогда формула (1) превратится в истинное высказывание

$\forall x\, \exists y\, (y$ является родителем $x) =$ «У каждого человека есть родитель»

2. Построим интерпретацию формулы логики предикатов $((\forall x\, P(x, y)) \to Q)$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Подставим в формулу вместо двухместной предикатной переменной $P(x, y)$ двухместный предикат «$x < y$», $x, y \in \mathbb{N}$, вместо нульместной предикатной переменной Q нульместный предикат «$2 = 4$» и вместо свободной предметной переменной y число $1 \in \mathbb{N}$. В результате получим истинное высказывание $(\forall x\, (x < 1)) \to (2 = 4)$, $x \in \mathbb{N}$.

1.2 Классы формул логики предикатов

Выделяют четыре типа формул логики предикатов относительно фиксированного множества A.

Определение 3. Пусть A — произвольное непустое множество. Формула логики предикатов называется

а) *выполнимой* на множестве A, если существует интерпретация этой формулы на множестве A, в результате которой получается истинное высказывание,

б) *тождественно истинной* на множестве A, если в результате любой интерпретации этой формулы на множестве A, получается истинное высказывание,

в) *тождественно ложной* на множестве A, если в результате любой интерпретации этой формулы на множестве A, получается ложное высказывание, г) *опровержимой* на множестве A, если существует интерпретация этой формулы на множестве A, в результате которой получается ложное высказывание.

Примеры.

1. Формула логики предикатов

$$\forall\, x P(x, y) \tag{2}$$

является выполнимой на множестве натуральных чисел. Для доказательства этого факта достаточно предъявить интерпретацию этой формулы на множестве натуральных чисел, в результате которой получается истинное высказывание. Подставим в формулу вместо предикатной переменной $P(x, y)$ предикат «$x \geq y$», вместо свободной предметной переменной y число 1. В результате получим истинное высказывание $\forall x\, (x \geq 1)$, $x \in \mathbb{N}$.

2. Формула логики предикатов (2) является опровержимой на множестве натуральных чисел. Для доказательства этого факта достаточно указать интерпретацию формулы (2) на множестве натуральных чисел, в результате которой получается ложное высказывание. Подставим в формулу вместо предикатной переменной $P(x, y)$ предикат «$x \leq y$», вместо свободной предметной переменной y число 1. В результате получим ложное высказывание $\forall x\, (x \leq 1)$, $x \in \mathbb{N}$.

3. Формула логики предикатов

$$P(x) \to P(x) \tag{3}$$

является тождественно истинной на множестве натуральных чисел. Докажем это. Воспользуемся методом от противного. Допустим, что формула (3) не является тождественно истинной на множестве натуральных чисел, т.е. найдутся предикат $\widetilde{P}(x)$, $x \in \mathbb{N}$, и натуральное число $\widetilde{x}$, которые при подстановке в формулу (3) обращают её в ложное высказывание

$$\widetilde{P}(\widetilde{x}) \to \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{Л} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{И} \wedge \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{Л}.$$

Получим противоречие с законом непротиворечивости, который утверждает, что нет высказывания, которое истинно и ложно одновременно. Стало быть наше изначальное предположение о том, что формула (3) не является тождественно истинной на множестве $\mathbb{N}$ не верно.

4. Формула логики предикатов

$$\overline{P(x)} \sim P(x) \tag{4}$$

является тождественно ложной на множестве $\mathbb{N}$. Докажем этот факт методом от противного. Допустим, что формула (4) не является тождественно ложной на множестве $\mathbb{N}$. Значит найдутся предикат $\widetilde{P}(x)$, $x \in \mathbb{N}$, и натуральное число $\widetilde{x}$, которые при подстановке в формулу обращают её в истинное высказывание

$$\overline{\widetilde{P}(\widetilde{x})} \sim \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{И}.$$

Здесь возможны только два случая, которые мы рассмотрим по отдельности

$$\begin{aligned} &a)\ \overline{\widetilde{P}(\widetilde{x})} = \text{И} \wedge \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{И} \ \Rightarrow\ \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{Л} \wedge \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{И} \text{ (противоречие)},\\ &б)\ \overline{\widetilde{P}(\widetilde{x})} = \text{Л} \wedge \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{Л} \ \Rightarrow\ \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{И} \wedge \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{Л} \text{ (противоречие)}.\end{aligned}$$

Мы рассмотрели все возможные случаи и в каждом из них получили противоречие с законом непротиворечивости. Стало быть наше изначальное предположение о том, что формула (4) на множестве $\mathbb{N}$ не является тождественно ложной не верно.

5. Формула логики предикатов $P(x) \to P(y)$ является тождественно истинной на множестве $\{1\}$ и опровержимой на множестве $\{1, 2\}$. Доказательство этого факта остаётся читателю в качестве упражнения.

Существуют формулы логики предикатов, которые на одних множествах являются тождественно истинными, а на других множествах нет. В логике предикатов важное значение имеют формулы, которые тождественно истинны на любом непустом множестве.

Определение 4. Формула логики предикатов называется *общезначимой*, если она тождественно истинна на любом непустом множестве.

Примеры. Покажем, что формула логики предикатов $P(x) \vee \overline{\forall y\, P(y)}$ является общезначимой. Допустим, что эта формула не общезначима, т.е. найдутся непустое множество A, предикат $\widetilde{P}(x)$, $x \in A$, и предмет $\widetilde{x} \in A$ такие, что

$$\widetilde{P}(\widetilde{x}) \vee \overline{\forall y\, \widetilde{P}(y)} = \text{Л} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{Л}, & (*)\\ \forall y\, \widetilde{P}(y) = \text{И}. & (**)\end{cases}$$

Из (**) следует, что предикат $\widetilde{P}(y)$ тождественно истинный. Значит предикат $\widetilde{P}(y)$ при подстановке в него вместо переменной y любого предмета из множества A обращается в истинное высказывание. Следовательно, $\widetilde{P}(\widetilde{x}) =$ И. Мы получили противоречие с (*).

Существуют общезначимые и необщезначимые формулы логики предикатов. Для того, чтобы уметь отличать первые от вторых нам нужен алгоритм, который по заданной формуле логики предикатов определяет общезначима она или нет. В 1936 г. американский математик Алонзо Чёрч доказал, что такого алгоритма не существует.

1.3 Равносильные формулы логики предикатов. Приведённая и нормальная формы записи формул логики предикатов.

Определение 5. Две формулы логики предикатов называются *равносильными на непустом множестве* A, если при подстановке в эти формулы вместо предикатных переменных любых предикатов, определённых на множестве A, формулы превращаются в равносильные предикаты.

Если формулы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ логики предикатов равносильны на любом непустом множестве, то мы говорим, что эти формулы *равносильны* и пишем $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$.

Теорема 1 (основные равносильности логики предикатов)**.**

1. *Замена символа предметной переменной*
   а) $\forall x\, P(x) \equiv \forall y\, P(y)$;
   б) $\exists x\, P(x) \equiv \exists y\, P(y)$;
2. *Законы де Моргана для кванторов*
   а) $\overline{\forall x\, P(x)} \equiv \exists x\, \overline{P(x)}$;
   б) $\overline{\exists x\, P(x)} \equiv \forall x\, \overline{P(x)}$;
3. *Законы пронесения кванторов через конъюнкцию и дизъюнкцию*
   а) $\forall x\, (P(x) \cdot Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \cdot (\forall x\, Q(x))$;
   б) $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, Q(x))$
   в) $\forall x\, (P(x) \vee Q) \equiv (\forall x\, P(x)) \vee Q$;
   г) $\exists x\, (P(x) \cdot Q) \equiv (\exists x\, P(x)) \cdot Q$;
4. *Законы пронесения кванторов через импликацию*
   а) $\forall x\, (P(x) \to Q) \equiv (\exists x\, P(x)) \to Q$;
   б) $\exists x\, (P(x) \to Q) \equiv (\forall x\, P(x)) \to Q$;
   в) $\forall x\, (Q \to P(x)) \equiv Q \to (\forall x\, P(x))$;
   г) $\exists x\, (Q \to P(x)) \equiv Q \to (\exists x\, P(x))$;
5. *Законы коммутативности для кванторов*

а) $\forall x\, \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y\, \forall x\, P(x,y)$;
б) $\exists x\, \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y\, \exists x\, P(x,y)$;

Доказательство. Докажем равносильность 2б). Подставим в обе части равносильности вместо предикатной переменной $P(x)$ произвольный конкретный предикат $\widetilde{P}(x)$, определённый на непустом множестве A. В результате получим два нульместных предиката, т.е. два высказывания

$$\overline{\exists x \widetilde{P}(x)} \text{ и } \forall x\, \overline{\widetilde{P}(x)}.$$

Наша цель — доказать, что истинностные значения этих высказываний совпадают.

$$\overline{\exists x\, \widetilde{P}(x)} = \text{И} \quad \Rightarrow \quad \exists x\, \widetilde{P}(x) = \text{Л} \ \Rightarrow \ \widetilde{P}(x) \text{ тождественно ложный} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \overline{\widetilde{P}(x)} \text{ тождественно истинный} \quad \Rightarrow \forall x\, \overline{\widetilde{P}(x)} = \text{И}.$$

$$\overline{\exists x\, \widetilde{P}(x)} = \text{Л} \quad \Rightarrow \quad \exists x\, \widetilde{P}(x) = \text{И} \ \Rightarrow \ \widetilde{P}(x) - \text{ выполнимый предикат} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \overline{\widetilde{P}(x)} - \text{ опровержимый предикат} \quad \Rightarrow \forall x\, \overline{\widetilde{P}(x)} = \text{Л}.$$

Докажем равносильность 3*г*).

Подставим в обе части равносильности вместо предикатной переменной $P(x)$ произвольный конкретный предикат $\widetilde{P}(x)$, определённый на произвольном непустом множестве A, а вместо предикатной переменной Q произвольное высказывание $\widetilde{Q}$. В результате получим два нульместных предиката, т.е. два высказывания

$$\exists x\, (\widetilde{P}(x) \cdot \widetilde{Q}) \text{ и } (\exists x\, \widetilde{P}(x)) \cdot \widetilde{Q}.$$

Наша цель — доказать, что истинностные значения этих высказываний совпадают.

Случай 1. Пусть $\exists x\, (\widetilde{P}(x) \cdot \widetilde{Q}) = \text{И}$. Тогда одноместный предикат $\widetilde{P}(x) \cdot \widetilde{Q}$ выполним, т.е. найдётся предмет $\widetilde{x} \in A$ такой, что

$$\widetilde{P}(\widetilde{x}) \cdot \widetilde{Q} = \text{И} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{И и } \widetilde{Q} = \text{И}.$$

Предикат $\widetilde{P}(x)$ выполним и $\exists x\, \widetilde{P}(x) = \text{И}$. Следовательно,

$$(\exists x\, \widetilde{P}(x)) \cdot \widetilde{Q} = \text{И}.$$

Случай 2. Пусть

$$\exists x\, (\widetilde{P}(x) \cdot \widetilde{Q}) = \text{Л}. \tag{5}$$

Мы хотим показать, что $(\exists x\, \widetilde{P}(x)) \cdot \widetilde{Q} = \text{Л}$. От противного. Допустим, что $(\exists x\, \widetilde{P}(x)) \cdot \widetilde{Q} = \text{И}$. Тогда $\exists x\, \widetilde{P}(x) = \text{И}$ и $\widetilde{Q} = \text{И}$. Предикат $\widetilde{P}(x)$ выполним, т.е. найдётся предмет $\widetilde{x} \in A$ такой, что

$$\widetilde{P}(\widetilde{x}) = \text{И} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{P}(\widetilde{x}) \cdot \widetilde{Q} = \text{И}.$$

Предикат $\widetilde{P}(x) \cdot \widetilde{Q}$ выполним. Значит $\exists x\, (\widetilde{P}(x) \cdot \widetilde{Q}) = \text{И}$, что противоречит (5).

$\square$

Существуют две стандартные формы записи формул логики предикатов: приведённая форма и нормальная форма.

Определение 6. Будем говорить, что формула логики предикатов находится в приведённой форме, если в ней из логических операций присутствуют только операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, причём отрицания распространяются только на предикатные переменные.

Определение 7. Будем говорить, что формула логики предикатов находится в нормальной форме, если она записана в приведённой форме и все её кванторы находятся в начале формулы, а области их действий распространяются до конца формулы.

Любую формулу логики предикатов можно привести и к приведённой форме, и к нормальной форме.

Примеры.

1. $\overline{(\forall x\, P(x)) \vee \exists x\, (Q(x) \to R(x))} \equiv \overline{\forall x\, P(x)} \cdot \overline{\exists x\, (Q(x) \to R(x))} \equiv (\exists x\, \overline{P(x)}) \cdot (\forall x\, \overline{Q(x) \to R(x)}) \equiv (\exists x\, \overline{P(x)}) \cdot (\forall x\, \overline{\overline{Q(x)} \vee R(x)}) \equiv (\exists x\, \overline{P(x)}) \cdot (\forall x\, (Q(x) \cdot \overline{R(x)}))$ − приведённая форма.
2. $(\forall x\, P(x)) \cdot (\forall y\, P(y)) \equiv (\forall x\, P(x)) \cdot (\forall x\, P(x)) \equiv \forall x\, P(x)$−нормальная форма.

2 Приложения логики предикатов

Логика предикатов применяется при анализе корректности рассуждений, в которых важную роль играет внутренняя стуктура элементарных высказываний. Поясним основную идею на следующем примере. Рассмотрим рассуждение

«Всякое целое число является рациональным, 1 — целое число. Следовательно, 1 — рациональное число.»

Введём два одноместных предиката

$$\begin{aligned} P(x) &= \text{«}x - \text{целое число»}, \\ Q(x) &= \text{«}x - \text{рациональное число»}, \end{aligned}$$

определённых на множестве вещественных чисел. Посылки рассуждения запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} \forall x\,(P(x) \to Q(x)), & (*) \\ P(1), & (**) \end{cases}$$

а заключение рассуждения — $Q(1)$.

Установим теперь правомерность рассуждения, т.е. убедимся, что при истинности посылок его заключение истинно.

Пусть (*) и (**) — истинные высказывания. Так как высказывание (*) истинно, то предикат $P(x) \to Q(x)$, $x \in \mathbb{R}$ является тождественно истинным, т.е. этот предикат при подстановке вместо переменной x любого её значения обращается в истинное высказывание. Подставим вместо x значение 1: $P(1) \to Q(1) = \text{И}$. Получаем

$$\begin{cases} P(1) \to Q(1) = \text{И}, \\ P(1) = \text{И}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q(1) = \text{И}.$$