1 Введение в дифференциальные уравнения

Определение 1. ***Дифференциальное уравнение*** *- уравнение, связывающее значение производных неизвестной функции (или ее дифференциал) со значением самой функции, независимой переменной и другими параметрами.*

$$F(t, x, x', ..., x^{(n)}) = 0, x = x(t), t \in I$$

Если искомая функция зависит от одной переменной, то это однородное дифференциальное уравнение. Если от нескольких, то это уравнение частных производных.

Определение 2. ***Решение ДУ*** *- функция (или семейство функций), заданная на интервале I, которая обращает ДУ в тождество.*

Замечание 1. *Каждое ДУ имеет бесконечное множество решений.*

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = f(t), t \in [a; b]$$

$$x(t) = \int f(t)dt + C = \int\limits_a^t f(\tau)d\tau$$

Пример 2.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{sin(t)}{t}$$

$$x(t) = \int \frac{sin(t)}{t}dt + C$$

Таким образом решение ДУ свелось к решений интеграла (квадратура).

Пример 3.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(t); t \in [a; b]$$

$$x(t) = x(t) = \int(\int g(s)ds + c_1)dt + c_2 = \int\limits_a^t \int\limits_a^\tau g(s)dsd\tau$$

Упражнение 1.

$$D^2x - x = 0$$

Определение 3. ***Общее решение ДУ*** *- выражение для решения, содержащее произвольные параметры.*

Определение 4. ***Частное решение ДУ*** *- общее решение с конкретными параметрами.*

Процесс построения решения ДУ, как правило, называется интегрированием.

Определение 5. ***Порядок ДУ*** *- порядок старшей производной в ДУ.*

В конкретных случаях значения параметров определяется из дополнительных (краевых) условий. Если эти условия относятся к одному значению аргумента, то они называются начальными ($x(t_0) = 1, x'(t) = 0$). Если же они относятся к различным значениям, то тогда граничными ($x(t_1) = \alpha, x(t_2) = \beta$).

Определение 6. ***Начальное условие (задача) Коши*** *- условие, задающее значение функции и $(n-1)$ ее первых производных.*

$$x' = f(t),\ x|_{t=s} = \xi$$

$$x = \int f(t)dt + C = F(t) + C$$

$$\xi = F(s) + C \Rightarrow C = \xi - F(s) \Rightarrow x = F(t) + \xi - F(s) = \int\limits_s^t f(\tau)d\tau + \xi$$

Последнее является формулой для нахождения решения задачи Коши.

2 Линейное однородное уравнение 1-го порядка с постоянными коэффицентами

Определение 1. ***Однородное ДУ***

$$x' - \lambda x = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \lambda dt$$

$$ln(x) = \lambda t + ln(C) \Rightarrow x = Ce^{\lambda t}$$

Определение 2. ***Линейное неоднородное уравнение***

$$x' - \lambda x = f(t), t \in I, x|_{t=s} = \xi$$

Теорема 1. *Поставленная задача однозначно разрешима $\forall s \in I, \forall \xi \in R$, и ее решение представляется в следующем виде:*

$$x(t) = \xi e^{\lambda(t-s)} + \int\limits_s^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau)d\tau$$

Доказательство.

$$(xe^{-\lambda t})' = x'e^{-\lambda t} - \lambda x e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}(x' - \lambda x)$$

$$e^{-\lambda t}(x' - \lambda x) = e^{-\lambda t} f(t)$$

$$(xe^{-\lambda t})' = e^{-\lambda t} f(t)$$

Введем замену переменной $u = xe^{-\lambda t}$

$$u' = e^{-\lambda t} \Rightarrow u(t) = \xi e^{-\lambda s} + \int\limits_s^t e^{-\lambda t} f(\tau) d\tau$$

$$u|_{t=s} = \xi e^{-\lambda s}$$

$$x = e^{\lambda t} u(t) = \xi e^{\lambda t} e^{-\lambda s} + \int\limits_s^t e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} f(\tau) d\tau = \xi e^{\lambda(t-s)} + \int\limits_s^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

■

Замечание 1. *Заменяя C на произвольную константу, получаем общее решение*

$$x(t) = Ce^{\lambda(t-s)} + I = Ce^{\lambda t} e^{-\lambda s} + e^{\lambda t} \int\limits_s^t e^{-\lambda \tau} f(\tau) d\tau = \widetilde{C} e^{\lambda t} + e^{\lambda t} \int\limits_s^t e^{-\lambda \tau} f(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$x(t) = e^{\lambda t} (\widetilde{C} + \int\limits_s^t e^{-\lambda \tau} f(\tau) d\tau)$$

Замечание 2. *Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.*
Общее решение однородного уравнения:

$$c = Ce\lambda t$$

Нахождение частного решения неоднородного уравнения:
1) $x_{\text{чн}}(t) = C(t) e^{\lambda t}$
2) $C(t)' e^{\lambda t} + C(t) \lambda e^{\lambda t} - C(t) \lambda e^{\lambda t} = f(t)$
$C(t)' = \frac{f(t) - C(t)\lambda e^{\lambda t} + C(t) \lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}} = f(t) e^{-\lambda t} \Rightarrow C(t) = \int f(t) e^{-\lambda t} dt$
$x(t) = f(t) e^{-\lambda t} + x_{\text{чн}}(t) = Ce^{\lambda t} + C(t) e^{\lambda t}$
3) $x(t) = uv, v : x' - \lambda x = 0 \Rightarrow v(t) = e^{\lambda t}$
$u' e\lambda t + u\lambda e\lambda t - u\lambda e\lambda t = f(t) \Rightarrow u' = e^{-\lambda t} f(t)$

Замечание 3. *Общее решение неоднородных ДУ представимо в виде* $x(t) = x_{oo} + x_{\text{чн}}(t)$

Доказательство.

$$x'_{\text{оо}} + x'_{\text{чн}} - \lambda x_{\text{оо}} + \lambda x_{\text{чн}} = f(t)$$

$$x'_{\text{оо}} - \lambda x_{\text{оо}} = 0$$

$$x'_{\text{чн}} - \lambda x_{\text{чн}} = f(t)$$

■

Пример 1. $x' + x = t$. Решить тремя способами.
1) $x(t) = C(t)e\lambda t = Ce^{-t}$
2) $x(t) = Ce^{-t} + C(t)e\lambda t$
$C'(t) = e^t(t-1)$
$x(t) = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}(t) = Ce^{-t} + e^{-t}(e^t(t-1))$
3) $x = uv, v : x' + x = 0 \Rightarrow v = e^{-1}$
$x = ue^{-1}$
$u'e^{-t} + ue^{-t} - ue^{-t} = t$
$u' = te^t \Rightarrow u = e^t(t-1) + \widetilde{C}$
$x = uv = Ce^{-t} + e^{-t}(e^t(t-1))$

3 Квазиполиномы

Определение 1. ***Квазиполином*** *- выражение вида:*

$$h(t) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t)e^{\gamma_j t}$$

Теорема 1. $h(t) \equiv 0 \Rightarrow P_j(t) \equiv 0, j = \overline{1, m}$

Доказательство.

$$m = 2 : P_1(t)e^{\gamma_1 t} + P_2(t)e^{\gamma_2 t} \equiv 0$$

$$deg(P_1) = m_1 \leq m_2 = deg(P_2)$$

$$e^{\gamma_1 t}(P_1(t) + P_2(t)e^{(\gamma_2 - \gamma_1)t}) \equiv 0$$

$$P_1(t) + P_2(t)e^{(\gamma_2 - \gamma_1)t} \equiv 0$$

Продифференцируем полученное выражение $m_1 + 1$ раз:

$$0 + Q_2(t)e^{(\gamma_2 - \gamma_1)t} \equiv 0$$

$P_2(t) = Q_2(t)$ имеют одну и ту же степень

$$Q_2(t) \equiv 0 \Rightarrow P_2(t) \equiv 0$$

■

Теорема 2 (Критерий совпадения двух квазиполиномов)**.** *Два квазиполинома освпадают тогда и только тогда, когда их коэффиценты равны.*

Доказательство.
$\Rightarrow$

$$h(t) = \sum_{i,j} P_{ij}e^{\gamma_i t}t^j, \ g(t) = \sum_{i,j} Q_{ij}e^{\gamma_i t}t^j$$

$$h(t) - g(t) = \sum_{i,j} (P_{ij} - Q_{ij}) e^{\gamma_i t} t^j \equiv 0$$

Из предыдущей теоремы вытекает, что $(P_{ij} - Q_{ij}) \equiv 0 \ \forall i, j = \overline{1, m}$
$\Leftarrow$

$$h(t) = \sum_{i,j} P_{ij} e^{\gamma_i t} t^j, \ g(t) = \sum_{i,j} Q_{ij} e^{\gamma_i t} t^j$$

$$h(t) - g(t) = \sum_{i,j} (P_{ij} - Q_{ij}) e^{\gamma_i t} t^j \equiv \sum_{i,j} 0 e^{\gamma_i t} t^j \equiv 0$$

■

Теорема 3. *Первообразная квазиполинома - квазиполином.*

$$h(t) = P_0(t) + \sum_{j=1}^{m} P_j(t) e^{\gamma_i t}$$

$$H(t) = tQ_0(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t) e^{\gamma_i t} + C - \textit{первообразная}$$

У P_jи Q_j степени совпадают, а коэффиценты взаимно-однозначно выражаются.

4 Линейное однородное уравнение 1-го порядка с квазиполиномами

Определение 1. ***Линейное ДУ 1-го порядка с квазиполиномами*** *- это уравнение вида:*

$$x' - \lambda x P_0(t) + \sum_{j=1}^{m} P_j(t) e^{\gamma_j t}, (\gamma_j \neq \lambda)$$

Теорема 1. *Общее решение такого уравнения задаётся квазиполиномом вида:*

$$x = Ce^{\lambda t} + tQ_0(t) e^{\lambda t} + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t) e^{\gamma_j t}$$

Доказательство.

$$x_{\text{чн}} = uv, \text{где } v = e^{\lambda t} \Rightarrow x = ue^{\lambda t}$$

$$(ue^{\lambda t})' - \lambda ue^{\lambda t} = u'e^{\lambda t} + \lambda ue^{\lambda t} - \lambda ue^{\lambda t} = u'e^{\lambda t}$$

$$u' = P_0(t) + \sum_{j=1}^{m} P_j(t) e^{(\gamma_j - \lambda)t}$$

$$u = \int P_0(t) + \sum_{j=1}^{m} P_j(t) e^{(\gamma_j - \lambda)t} dt$$

$$u = tQ_0(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)e^{(\gamma_j - \lambda)t}$$

$$x_{\text{чн}} = tQ_0(t)e^{\lambda t} + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)e^{\gamma_j t}$$

$$x = Ce^{\lambda t} + tQ_0(t)e^{\lambda t} + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)e^{\gamma_j t}$$

■

Замечание 1. *В случае, если $\gamma_j = \alpha + i\beta$, соответсвующий квазиполином имеет вид:*

$$(H_j(t)cos(\beta t) + \overline{H_j}sin(\beta t))e^{\alpha t}$$

Данный подход не требует процедуры интегрирования. При записи решения берем полный многочлен.

Пример 1.

$$x' - 2x = t^2e^{2t} + t^3e^t + tsin(t)$$

$$x_{\text{чн}} = t(At^2 + Bt + C)e^{2t} + (Dt^3 + Et^2 + Ft + C)e^t + (Ht + I)sin(t) + (Kt + L)cos(t)$$

5 Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффицентами

Определение 1. ***Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффицентами*** *- это ДУ вида*

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_0 x = 0.$$

Если обобщить оператор D определенным образом

$$D^0 x = x, D^1 x = x', ..., D^m x = D(D^{m-1}x),$$

то можно переписать данное уравнение в виде

$$D^n x + a_{n-1}D^{n-1}x + ... + a_0 D^0 x = 0.$$

Определение 2. ***Оператор*** L_n *- это выражение* $D^n x + a_{n-1}D^{n-1}x + ... + a_0 D^0 x$

Таким образом, уравнение можно привести к виду $L_n = 0$.

Оператор L_nявляется линейным, т.е. выполняются следующие равенства:

1) $L_n(x_1 + x_2) = L_n x_1 + L_n x_2$

2) $L_n(cx) = cL_n x$.

Упражнение 1. Проверить последнее утверждение.

Свойства линейного уравнения, порождённые линейностью оператора L_n:
1) Линейность множества решений

Доказательство.

$$x_1(t), ..., x_m(t) - \text{множество решений}$$

$$C_1x_1 + ... + C_mx_m - \text{линейная комбинация решений, тогда}$$

$$L_n(C_1x_1 + ... + C_mx_m) = C_1L_nx_1 + ... + C_mL_nx_m \equiv 0 \Rightarrow C_1x_1 + ... + C_mx_m - \text{решение.}$$

■

2) Принцип суперпозиции для неоднородного уравнения

$$L_nx_1(t) = f_1(t), ..., L_nx_k(t) = f_k(t) - \text{некоторые равенства, тогда}$$

$$x_1(t) + ... + x_k(t) - \text{решение уравнения } L_nx = f_1(t) + ... + f_k(t)$$

Доказательство.

$$x_1(t) + ... + x_k(t) - \text{решения}$$

$$L_n(x_1(t) + ... + x_k(t)) = L_nx_1(t) + ... + L_nx_k(t) = f_1(t) + ... + f_k(t).$$

■

3) Структура решений $L_nx(t) = f(t)$ имеет вид $x(t) = x_{\text{оо}}(t) + x_{\text{чн}}(t)$
Доказательство.

$$L_nx(t) = f(t) \Leftrightarrow L_n(x_{\text{оо}}(t) + x_{\text{чн}}(t)) = f(t) \Rightarrow L_nx_{\text{оо}}(t) + L_nx_{\text{чн}}(t) = 0 + f(t).$$

■

Определение 3. ***Стационар*** *- это оператор L_n с коэффицентом $a_i = const, i = \overline{1, n-1}$*

6 Факторизация оператора Ln

Пусть L_n - стационар.
Определение 1. ***Характеристический многочлен оператора*** *L_n - это многочлен $L = \nu^n + a_{n-1}\nu^{n-1} + ... + a_0$.*

Определение 2. ***Характирестические числа оператора*** *- корни характеристического многочлена*

$$L = (\nu - \nu_1)^{n_1}...(\nu - \nu_m)^{n_m}, n_1 + ... + n_m = n.$$

Теорема 1. $L_n = (D - \nu_1)^{n_1}...(D - \nu_m)^{n_m}$

Доказательство. $n = 2$

$$L = \nu^2 + a_1\nu + a_0, \nu_1 + \nu_2 = -a_1, \nu_2\nu_! = a_0$$

$$L_2 : D^2 + a_1 D + a_0 D^0 = D^2 - (\nu_1 + \nu_2)D + \nu_1\nu_2 = D^2 - \nu_1 D = \nu_2 D + \nu_1\nu_2 =$$

$$= (D^2 - \nu_1 D) - \nu_2(D - \nu_1 D^0) = D(D - \nu_1 D^0) = (D - \nu_1 D^0)(D - \nu_2 D^0).$$

∎

Упражнение 1. Факторизовать оператор $L_3 : D^3 - 4D^2 + 5D - 2$.

7 Начальная задача для линейного однородного стационарного уравнения

$$Ln(z) = 0$$

$$D^{n-1}z|_{t=s} = \xi_{n-1}, ..., D^0 z|_{t=s} = \xi_0$$

$$D^k z|_{t=s} = \xi_k, k = \overline{0, n-1}$$

Случай нулевых начальных коэффициентов времени (s=0).
Теорема 1. *Для любых начальных значений* $\xi_k \in C \to Lnz = 0, D^k z|_{t=0} = \xi_k, k = \overline{0, n-1}$ *начальная задача однозначно разрешима. Решение представимо в виде квазиполинома:* $z(t) = Q_1(t)e^{\gamma_1 t} + ... + Q_m e^{\gamma_m t}$, *причем его коэффициенты являются линейными формами начальных значений, а степень* $degQ_j \leq n - 1$. *Если корень простой, то* $degQ_j = 0$.

Доказательство. Для случая n=2.

Запишем факторизацию $L_2 z : (D - \vartheta_1)(D - \vartheta_2)z = 0$.

Начальные данные: $Dz|_{t=0} = \xi_i, z|_{t=0} = \xi_0$.

Введём замену переменных: $(D - \vartheta_1)\omega = 0$ - линейное однородное 1-го порядка.

$$\omega|_{t=0} = \xi_1 - \vartheta_2\xi_0 \to \omega(t) = (\xi_1 - \vartheta_2\xi_0)e^{\vartheta_1 t};$$

$$(D - \vartheta_2)z = (\xi_1 - \vartheta_2\xi_0)e^{\vartheta_1 t} \to z(t) = \xi_0 e^{\vartheta_2 t} + \int\limits_0^t e^{\vartheta_2(t-\tau)}\omega(\tau)d\tau =$$

$$= \xi_0 e^{\vartheta_2 t} + \int\limits_0^t e^{\vartheta_2(t-\tau)}(\xi_1 - \vartheta_2\xi_0)e^{\vartheta_1\tau}d\tau = \xi_0 e^{\vartheta_2 t} + e^{\vartheta_2 t}\int\limits_0^t (\xi_1 - \vartheta_2\xi_0)e^{(\vartheta_1 - \vartheta_2)\tau}d\tau;$$

$$1)\, \vartheta_1 = \vartheta_2 = I = t \to z(t) = \xi_0 e^{\vartheta_2 t} + t(\xi_1 - \vartheta_2\xi_0)e^{\vartheta_2 t} = e^{\vartheta_2 t}((1 - t\vartheta_2)\xi_0 + t\xi_1)$$

2) $\vartheta_1 \neq \vartheta_2 \to I = \dfrac{1}{\vartheta_1-\vartheta_2}(e^{(\vartheta_1-\vartheta_2)}t) - 1) \to z(t) = \xi_0 e^{\vartheta_2 t} + e^{\vartheta_2 t}(\xi_1 - \vartheta_2\xi_0)\dfrac{1}{\vartheta_1-\vartheta_2}(e^{(\vartheta_1-\vartheta_2)}t) - 1) =$

$$= e^{\vartheta_1 t}(\frac{1}{\vartheta_1-\vartheta_2}\xi_1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1-\vartheta_2}\xi_0) + e^{\vartheta_2 t}(\xi_0(1+\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1-\vartheta_2}) - \frac{1}{\vartheta_1-\vartheta_2}\xi_1).$$

Аналогично для больших n. ■

Упражнение 1. $(Dx - x)^2 = 0 \quad Dx|_{t=0} = 1 = \xi_1 \quad x|_{t=0} = 0 = \xi_0$

Рассмотрим следующую задачу: $L_2 z = 0, Dz|_{t=s} = \xi_1, z|_{t=s} = \xi_0$

$$L_2 z = (D-\nu_1)(D-\nu_2)z = 0, \omega = (D-\nu_2)z$$

Определение 1. ***Сдвиг*** $z(t)$ ***на величину*** s *- это функция* $\overline{z}(t) = z(t-s)$

Лемма 1. *Сдвиг квазиполинома также является квазиполиномом.*
Идея доказательства:

$$z(t) = P_j(t)e^{\vartheta_j t}$$
$$\overline{z}(t) = P_j(t-s)e^{\vartheta_j(t-s)} = e^{-\vartheta_j s}P_j(t-s)e^{\vartheta_j t}$$
$$a_1(t-s)^{m_1} + ...a_k(t-s)^{m_k} = Q_j(t)$$

Лемма 2. $\forall s$ *сдвиг решения также является решением.*
Идея доказательства:

$$\frac{d(z(t-s))}{d(t-s)} = \frac{d(z(t-s))}{dt}$$

Теорема 2. $\forall \xi_0, \xi_1 \in C, s \in R, z(t) = Q_1(t)e^{\vartheta_1 t} + Q_2(t)e^{\vartheta_2 t}$ *начальная задача разрешима. Её решение представимо в виде квазиполинома, где степени полиномов на 1 меньше кратности корня.*

Доказательство.

$$z_0(t), Dz_0|t=0 = \xi_1, z_0|t=0 = \xi_0$$
$$\overline{z}(t) = z_0(t-s) - \text{решение}$$
$$\overline{z}(t)|t=s = z_0(t-s)|t=s = z_0(0) = \xi_0$$
$$D\overline{z}(t)|t=s = Dz_0(t-s)|t=s = Dz_0(0) = \xi_1$$

■

Замечание 1. *При* $b > 2$ *доказательство аналогично.*

Следствие 1. $L_n z = 0 \Rightarrow D^k z|_{t=0} = 0, k = \overline{0, n-1}.$

Следствие 2. *Если коэффиценты уравнения действительные, то начальная задача разрешима в виде действительного квазиполинома.*

Упражнение 2. Проверить, посчитать и решить $D^2x + x = 0, Dx|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1, x|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1.$

8 Общее решение линейного однородного стационарного уравнения

При $n = 2$:

$$L_2 z = 0;$$
$$L_2 z = (D - \nu_1)(D - \nu_2) z = 0;$$
$$\omega = (D - \nu_2) z.$$

Теорема 1. *Общее решение уравнения является квазиполиномом* ($\nu_1 \neq \nu_2$) $z(t) = Q_1(t) e^{\nu_1 t} +$ $+ e^{\nu_2 t} = C_1 e^{\nu_1 t} + C_2 e^{\nu_2 t}$ *(при $n = 2$).*

Доказательство. $\nu_1 \neq \nu_2$:

$$\omega = (D - \nu_2) z;$$
$$(D - \nu_1)\omega = 0 \Rightarrow \omega = C_1 e^{\nu_1 t};$$
$$(D - \nu_2) z = \omega = C_1 e^{\nu_1 t} \Rightarrow z = e^{\nu_2 t};$$
$$\left(C_2 + \int e^{-\nu_2 \tau} \omega(\tau) d\tau\right) = e^{\nu_2 t};$$
$$\left(C_2 + C_1 \int e^{(\nu_1 - \nu_2)\tau} d\tau\right) = e^{\nu_2 t};$$
$$\left(_2 + C_1 \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} e^{(\nu_1 - \nu_2)t}\right) = C_2 e^{\nu_2 t} + \frac{C_1}{\nu_1 - \nu_2} e^{\nu_1 t} = C_2 e^{\nu_2 t} + \widetilde{C_1} e^{\nu_1 t}.$$

$\nu_1 = \nu_2$:

$$(D - \nu_1)\omega = 0 \Rightarrow \omega = C_1 e^{\nu_1 t};$$
$$z = e^{\nu_1 t}(C_2 + \int e^{-\nu_1 t} \omega(r) dr) = e^{\nu_1 t}(C_2 + C_1) \int e^{(\nu_1 - \nu) r} dr = e^{\nu_1 t}(C_2 + C_1 t) = e^{\nu t}(C_1 t + C_2).$$

■

9 Фундаментальная система решений линейных однородных уравнений

$Ln(z) = 0, z_j(t), j = \overline{1, n}, t \in I$ (n-1) раз дифференцируема.

Определение 1. ***Вронскианом*** *системы функций z_j называется*

$$W = \begin{vmatrix} z_1 & ... & z_n \\ Dz_1 & ... & Dz_n \\ & ... & \\ D^{n-1} z_1 & ... & D^{n-1} z_n \end{vmatrix}.$$

Теорема 1 (формула Остроградсткого-Лиувилля). *Если $z_1 ... z_n$ - решение линейного уравнения, то вронскиан $W(t) = W(s)\exp^{-a_{n-1}(t-s)}, s \in I$.*
Доказательство. *для n=2:*
$D^2z + a_1Dz + a_0z = 0, z_j(t), i = \overline{1,2} \to D^2z_j = -a_1Dz_j - a_0z_j$
1) Составим W(t):

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ Dz_1 & Dz_2 \end{vmatrix} = z_1Dz_2 - z_2Dz_1$$

2) Продифференцируем: $Dw(t) = Dz_1Dz_2 + z_1D^2z_2 - Dz_2Dz_1 - z_2D^2z_1 = z_1D^2z_2 - z_2D^2z_1$.
3) Подставим значения вторых производных: $z_1(-a_1Dz_2 - a_0z_2) - z_2(-a_1Dz_1 - a_0z_1)$.
4) Соберём слагаемые: $-a_1(z_1Dz_2 - z_2Dz_1) = -a_1w, w = w(s)\exp^{-a_1(t-s)}$. ■

Следствие 1. *Вронскиан системы решений $z_1 ... z_n$ может быть в двух состояниях: либо $\equiv$ 0, либо $\neq$ 0 ни в одной точке.*

Пример 1. $D^2z + z = 0, z_1 = sin(t), z_2 = 2019sin(t)$

$$W(t) = \begin{vmatrix} sin(t) & 2019sin(t) \\ cos(t) & 2019cos(t) \end{vmatrix} = 0$$

Определение 2. $z_1 ... z_n -$ ***линейно зависимы***, *если $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_1^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0 \to \alpha_1z_1 + ... + \alpha_nz_n \equiv 0$, в противном случае -* ***линейно независимы***.

Следствие 2. *Система функций линейно зависима, если одна из функций является линейной комбинацией остальных.*

Теорема 2. *Пусть $Lnz = 0$, тогда $z_1 ... z_n$ - линейно зависима $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I : W(t_0) = 0$.*
Доказательство. $\Rightarrow$

Пусть $z_1 ... z_n$ - линейно зависима, тогда, согласно следствию, одно решение выражается через остальные $z_1 = c_2z_2 + ... + c_nz_n$.
Составим вронскиан:

$$W(t) = \begin{vmatrix} c_1z_1 + ... + c_nz_n & z_2 & z_n \\ c_1Dz_1 + ... + c_nDz_n & ... & ... \\ ... & & \\ c_1D^{n-1}z_1 + ... + c_nD^{n-1}z_n & ... & ... \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftarrow$ *Пусть $\exists t_0 : W(t_0) = 0$*
Рассмотрим систему уравнений:

$$W(t_0)\begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} c_1 z_1 + ... + c_n z_n = 0 \\ ... \\ c_1 D^{n-1} z_1 + ... + c_n D^{n-1} z_n = 0 \end{cases} \rightarrow C_1^{(0)}, ..., C_n^{(0)}$$

Построим следующую функцию: $z(t) = C^{(0)} z_1(t) + ... + C^{(0)} z_n(t)$ *- решение.*
$t = t_0, z\Big|_{t=t_0} = 0, Dz\Big|_{t=t_0} = 0, ..., D^{n-1}z\Big|_{t=t_0} = 0 \rightarrow z(t) \equiv 0$ ■

10 Базис ФСР

Пусть $Ln(z) = 0$ и $\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}$ - решения, причем $D^k \varphi m\Big|_{t=0} = \delta m_k = \begin{cases} 1, m = k \\ 0, m \neq k \end{cases}$ $m, k = \overline{0, n-1}$

$$W = \begin{vmatrix} D^0\varphi_0, ..., D^0\varphi_{n-1} \\ D^1\varphi_0, ..., D^1\varphi_{n-1} \\ .... \\ D^{n-1}\varphi_0, ..., D^{n-1}\varphi_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Теорема 1. *Любое решение уравнения* $Lnz = 0$ *может быть предствалено в следующем виде:* $z(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \varphi_j(t), c_j = Dz_j\Big|_{t=0}$

Доказательство. Рассмотрим $Lnz = 0, D^k z|_{t=0} = c_k, k = \overline{0, n-1} \Rightarrow$ разрешима и записывается в таком виде. □

Множество решений такого уравнения является **линейным пространством**.

Определение 1. *Система функций называется **нормированной ФСР** при t=0. Сдвиг* $(\varphi_0(t-s), ..., \varphi_{n-1}(t-s))$ *- также является решением.*

Рассмотрим $Lnz = 0, D^k z|_{t=s} = \xi_k \rightarrow z(t) = \xi_0 \varphi_0(t-s) + ... + \xi_{n-1}\varphi_{n-1}(t-s)$.

Пример 1. $D^2x + Dx - 2x = 0$. Построить ФСР.
$\nu^2 + \nu - 2 = 0, \nu_{1,2} = [^{-2}_{1}$
$\varphi_0 = A\exp^{-2t} + B\exp^t, D^0\varphi_0|_{t=0} = 1, D^1\varphi_0|_{t=0} = 0 \rightarrow D\varphi_0 = -2A\exp^{-2t} + B\exp^t$
$\begin{cases} 1 = A + B & \rightarrow A = 1/3 \\ 0 = -2A + B & \rightarrow B = 2/3 \end{cases} \varphi_0 = 1/3\exp^{-2t} + 2/3\exp^t$
$\varphi_1 = C\exp^{-2t} + D\exp^t, \varphi_1|_{t=0} = 0, D^1\varphi_1|_{t=0} = 1, C = -1/3, D = 1/3$

11 Фазовая плоскость линейного однородного стационарного уравнения 2-го порядка

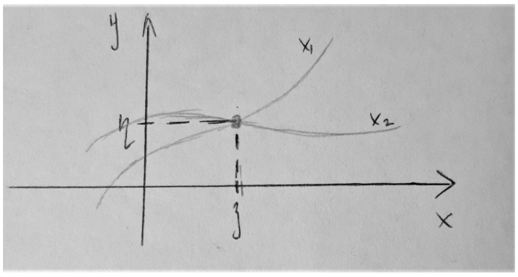
Определение 1. *График x(t), который можно представить в виде* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) = Dx(t) \end{cases}$ *называется* ***фазовым графиком***. $x \circ y$ *–* ***фазовая плоскость***.

Свойства:

1. Если решение постоянно, то фазовым графиком будет точка покоя, иначе параметрически заданные линии (x(t), y(t)).
2. Если есть решение, то сдвиг тоже будет решением$(x(t), \widetilde{x(t)} = x(t-s))$.

Пример 1. $\begin{cases} x = 2cost \\ y = x'' = -2sint \end{cases} \Rightarrow$ ф.гр $- r = \sqrt{2}$

Теорема 1. *Два фазовых графика либо не имеют общих точек, либо совпадают.*
Доказательство. *От противного. Пусть существует точка:*

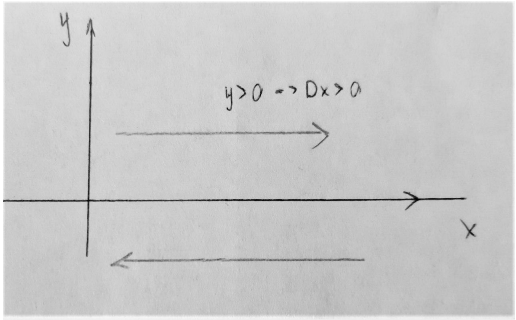


$x_1(s_1) = x_2(s_2) = \xi$
$y_1(s_1) = y_2(s_2) = \eta$
Рассмотрим сдвиг решения x_1 *на* $s_2 - s_1$*:* $\widetilde{x_1}(t) = x_1(t - s_2 + s_1)$(решение)
$\begin{cases} \widetilde{x_1}(t)|_{t=s_2} = x_1(s_1) = \xi \\ \widetilde{x_2}(t)|_{t=s_2} = \xi \end{cases} \to x_1 \equiv x_2?!$ ■

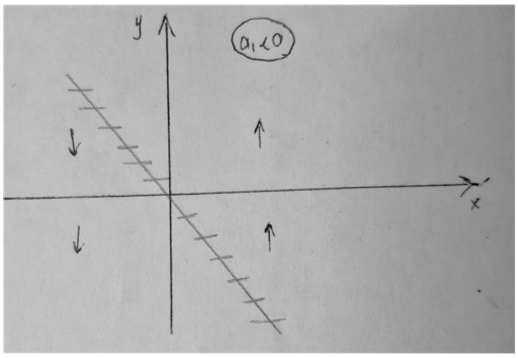
12 Общая схема расположения фазовых графиков

1. Точки покоя: $y = 0, x = \xi - const, Dy = D^2x = 0 \Rightarrow a_0x = 0 \Rightarrow (0,0)$ - т.покоя.

2. Выясним поведение фазовых графиков в верхней и нижней полуплоскостях:
   $y = Dx$



3. Найдём угловой коэффициент касательной к фазовому графику:
$k = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Dy(t)}{Dx(t)} = \dfrac{-a_1Dx(t) - a_0x(t)}{y(t)}$
$y(t) = 0 \to k = \infty$ - во всех точка графика касательная перпендикулярна оси x.
$-a_1Dx - a_0x = 0 \to k = 0$
$-a_1y - a_0x = 0 \to k = 0$

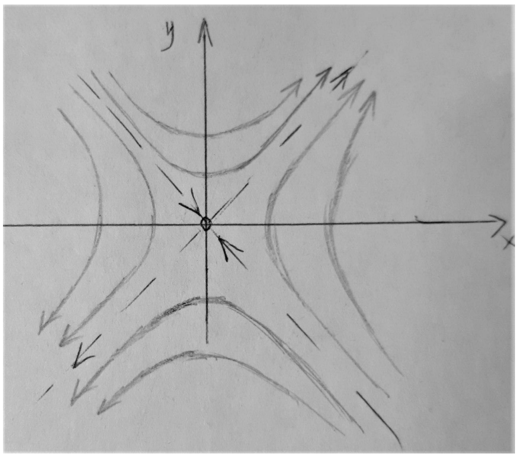


Прямая горизонтальных наклонов разделяет на 2 плоскости:
$\begin{cases} \text{нижняя} - a_1y - a_0x < 0 (Dy < 0) \\ \text{верхняя} - a_1y - a_0x > 0 (Dy > 0) \end{cases}$

4. При замене t на -t перед коэффициентом a_1 появляется минус, и все фазовые графики отражаются симметрично относительно оси x и изменяют направление на противоположное.

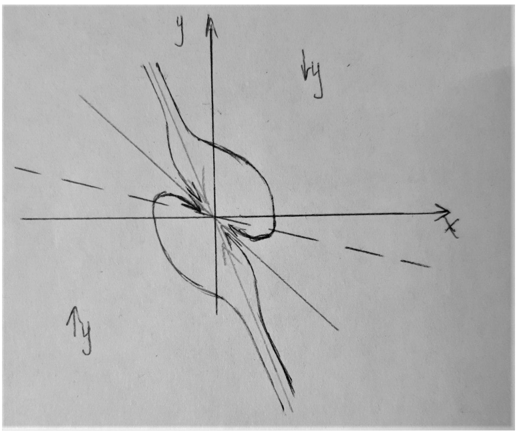
Перейдём к более детальному исследованию расположения фазовых графиков (с учётом коэффициентов или корней характеристического уравнения).

- Случай $a_0 = \vartheta_1\vartheta_2 \neq 0$
При $a_1 \geq$: 1) $\vartheta_1\vartheta_2 \in R$, $\vartheta_1 < 0, \vartheta_2 > 0$ $(a_0 < 0)$
$x = C_1 \exp^{\vartheta_1 t} + C_2 \exp^{\vartheta_2 t}$
$y = \vartheta_1 C_1 \exp^{\vartheta_1 t} + \vartheta_2 C_2 \exp^{\vartheta_2 t}$
$1a)$ $C_1 > 0, C_2 = 0 \to y = \vartheta_1 x (x > 0)$
$1b)$ $C_1 < 0, C_2 = 0 \to y = \vartheta_1 x (x < 0)$



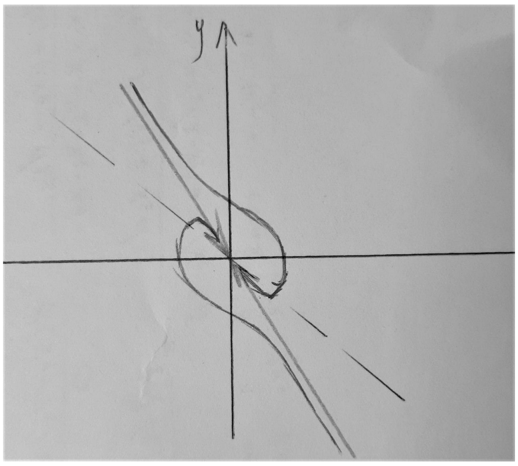
Точка покоя с указанным расположением в её окрестности фазового графика называется **седлом**.

- Случай $a_1 < 0$
  2a) $\vartheta_1, \vartheta_2 \in R, \quad \vartheta_1 < \vartheta_2 < 0$
  $x = C_1 \exp^{\vartheta_1 t} + C_2 \exp^{\vartheta_2 t}$
  $y = \vartheta_1 C_1 \exp^{\vartheta_1 t} + \vartheta_2 C_2 \exp^{\vartheta_2 t}$
  $k = \lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim \dfrac{\vartheta_1 C_1 \exp^{\vartheta_1 t} + \vartheta_2 C_2 \exp^{\vartheta_2 t}}{C_1 \exp^{\vartheta_1 t} + C_2 \exp^{\vartheta_2 t}} = \lim \dfrac{\exp^{\vartheta_2 t}(\vartheta_1 C_1 \exp^{(\vartheta_1 - \vartheta_2)t} + \vartheta_2 C_2)}{\exp^{\vartheta_2 t}(C_1 \exp^{(\vartheta_1 - \vartheta_2)t} + C_2)} = \vartheta_2$



Такое расположение фазового графика называется **бикритическим узлом**.

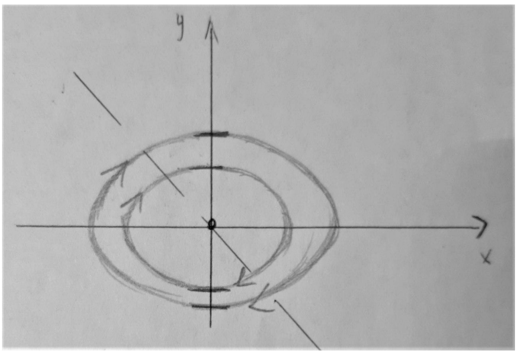
- Случай $\vartheta_1 = \vartheta_2 < 0$
  2b) $x = (C_1 t + C_2) \exp^{\vartheta t}$
  $y = C_1 \exp^{\vartheta t} + \vartheta (C_1 t + C_2) \exp^{\vartheta t} = (C_1 + \vartheta C_1 t + \vartheta C_2) \exp^{\vartheta t}$
  $k = \lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim \dfrac{(C_1 + \vartheta C_1 t + \vartheta C_2) \exp^{\vartheta t}}{(C_1 t + C_2) \exp^{\vartheta t}} = \vartheta$



Точка покоя с таким фазовым графиком называется **монокритическим узлом**.

- Случай $\vartheta_{1,2} = \lambda \pm i\mu, \lambda = 0$

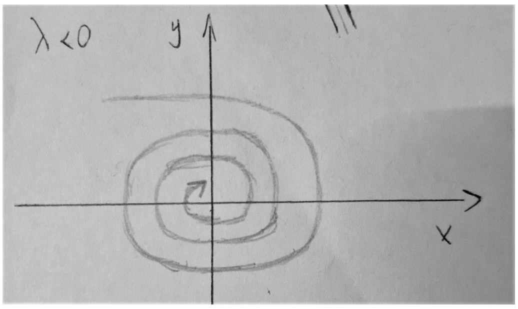
  3) $x = C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \mu t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \mu t) =$
  $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} sin(\mu t + \varphi) = \widetilde{C_1} \sin(\mu t + \widetilde{C_2})$
  $y = -C_1 \mu \sin(t\mu) + C_2 \mu \cos(t\mu) = \mu \widetilde{C_1} \cos(t\mu + \widetilde{C_2})$
  $\begin{cases} (\mu x(t))^2 = (\widetilde{C_1} \sin(\mu t + \widetilde{C_2}))^2 \\ (y(t))^2 = (\mu \widetilde{C_1} \cos(t\mu + \widetilde{C_2}))^2 \end{cases} \quad \mu^2 x^2 + y^2 = \widetilde{C_1}^2 \mu^2$
  $\frac{x^2}{\widetilde{C_1}^2} + \frac{y^2}{\widetilde{C_1}^2 \mu^2} = 1$



Точка покоя с таким фазовым графиком называется **центром**.

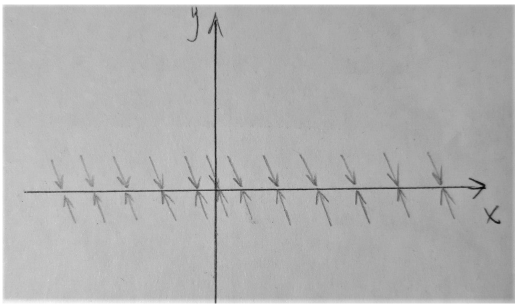
Замечание 1. *В данном случае линия горизонтальных наклонов совпадает с осью Oy.*

- Случай $\exp^{\vartheta t}(C_1 \cos \mu t + C_2 \sin \mu t) = \exp^{\vartheta t} \widetilde{C_1} \sin(\mu t + \widetilde{C_2})$



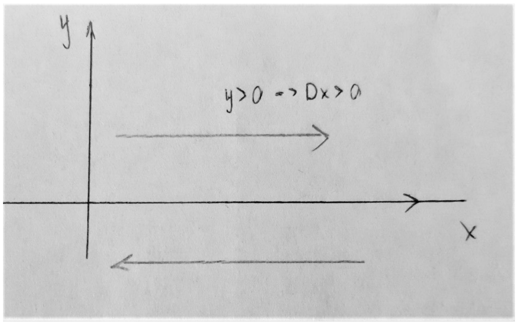
При таком расположении фазовых графиков точка покоя называется **фокусом (устойчивым)**.

- Случай $a_0 = 0$
  $D^2x + a_1 Dx = 0$
  $\vartheta^2 + a_1\vartheta = 0 \rightarrow \vartheta_1 < 0, \vartheta_2 = 0$
  $$\begin{cases} x = C_2 + C_1 \exp^{\vartheta_1 t} \\ y = C_1\vartheta_1 \exp^{\vartheta_1 t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vartheta_1 x = C_2\vartheta_1 + C_1\vartheta_1 \exp^{\vartheta_1 t} \\ y = C_1\vartheta_1 \exp^{\vartheta_1 t} \rightarrow y = \vartheta_1 x - C_2\vartheta_1 \end{cases}$$



$x = \xi - const, y = 0$. Такое расположение - **прямые покоя**.

- Случай $a_0 = a_1 = 0$
  $Dx = 0$
  $$\begin{cases} x = C_1 + C_2 t \\ y = C_2 \end{cases}$$



Такое расположение также называется **прямыми покоя**.

13 Линейное неоднородное стационарное уравнение

Функция Коши линейного оператора: $L_2 = (D-\nu_1)(D-\nu_2)$

Построим функцию Коши этого оператора:

$F(t) = \int e^{\nu_2 t-(\nu_2-\nu_1)\tau} d\tau \Rightarrow F(t-\tau) = \int_0^{t-\tau} e^{\nu_2(t-\tau)-(\nu_2-\nu_1)\tau_1} d\tau_1$ Поставим нулевую задачу для уравнения $L_2 x = 0$

$x|_{t=s} = 0 \qquad Dx|_{t=s} = 0$

Рассмотрим неоднородное уравнение: $L_2 x = f(t), t \in I$

Теорема 1.

Поставленная задача однозначно разрешима, причем решение задается формулой $x(t) = \int_s^t F(t-\tau)f(\tau)d\tau$

Доказательство.

$(D-\nu_1)(D-\nu_2)x = f(t)$

$(D-\nu_2)x = \omega$

$(D-\nu_1)\omega = f(t)$

$\omega(t) = \int_s^t e^{\nu_1(t-\tau)} f(\tau)d\tau$

$\omega(\sigma) = \int_s^\sigma e^{\nu_1(\sigma-\tau)} f(\tau)d\tau$

$x(t) = \int_s^t e^{\nu_2(t-\sigma)} e^{\nu_1(\sigma-\tau)} f(\tau)d\sigma = [\sigma-\tau=\tau_1] =$

$= \int_s^t d\tau(\int_\tau^t e^{\nu_2(t-\tau-\tau_1)} e^{\nu_1\tau_1} f(\tau)d\tau_1) = \int_s^t f(\tau)d\tau(\int_0^{t-\tau} e^{\nu_2(t-\tau)} e^{-(\nu_2-\nu_1)\tau_1} d\tau_1) =$

$= \int_s^t f(\tau)F(t-\tau)d\tau$ ■

Данный алгоритм является конструктивным Данный алгоритм затруднителен в построении функции Коши

Теорема 2 (для произвольного n)**.**

$F(t) \equiv \phi_{n-1}(t)$, *функция Коши совпадает с последним базисным решением*

Доказательство.

Для n=2: $\phi_1(t), \;\; \phi_1|_{t=0}, \;\; D\phi_1|_{t=0} = 1$

1. Возьмем функцию Коши и покажем, что она является решением

2. Покажем, что она удовлетворяет таким же начальным условиям

Исходя из этого, решения совпадают

$1)(D-\nu_1)(D-\nu_2)F = 0$

$(D-\nu_2)F = DF - \nu_2 F = \nu_2[F(t) = e^{\nu_2 t} I(t)] = \nu_2 e^{\nu_2 t} I(t) + e^{\nu_2 t} e^{(-\nu_2-\nu_1)t} - \nu_2 e^{\nu_2 t} I(t) =$

$= e^{\nu_1 t}$

производная от интеграла - подынтегральное выражение от верхнего предела.

$(D-\nu_1)e^{\nu_1 t} \equiv 0$

$2)F(t)|_{t=0} = \int_0^0 ... = 0 \qquad F'(t)|_{t=0} = ...|_{t=0} = 1 \qquad (I(t)|_{t=0} = 0)$ ■

Рассмотрим произвольную задачу Коши:

$L_n x = f \qquad D^0 x|_{t=s} = \xi_0, ..., D^{n-1}x|_{t=s} = \xi_{n-1}; \;\; \phi_0, ..., \phi_{n-1}$ – Базис

Теорема 3.
Поставленная задача однозначно разрешима, общее решение находится по формуле:

$$x(t) = \sum_k \xi_k \phi_k(t-s) + \int_s^t \phi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Доказательство.
$x = \phi + x^*, x^* = \int_0^t \phi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau$
$x^*|_{t=s} = 0$
$L_n x = L_n \phi + L_n x^* = f \Rightarrow \phi(t) = \sum_k \xi_k \phi_k(t-s)$
$D^k \phi|_{t=s} = \xi_k, k = \overline{0, n-1}$ ■

Замечание 1. *Если в формуле заменить ξ_k на c_k(произвольная const), то формула будет представлять общее решение.*

Мы можем сформулировать алгоритм решения с помощью функции Коши - метод Коши:

1) $L_n x = 0$ - берем соответствующее однородное уравнение

2) Строим для него нормированный базис $(\phi_0, ..., \phi_{n-1})$. Для частных решенеий достаточно ϕ_{n-1}

3) Подставляем функцию в формулу

Замечание 2. *Можно применять модификацию метода Коши*

$$x = x_{oo}(t) + x_{\text{чн}}(t)$$

Упражнение 1.
1)$D^2 x + 2Dx = sin(t)$
2)$D^2 x + x = t^2 \quad x|_{t=0} = Dx|_{t=0} = 0$

14 Метод вариации произвольных постоянных

$$L_n x = f(t).$$

Для решения уравнения применим метод, не требующий использования нормированного базиса.

Приведём конструктивное доказательство для $n = 2$.

$$D^2 x + a_1 Dx + a_0 x = f(t).$$

Возьмём какой-либо базис соответствующего однородного решения.

$$L_2 x = 0 \Rightarrow \psi_0(t), \psi_1(t) \Rightarrow x_{\text{оо}}(t) = c_0 \psi_0(t) + c_1 \psi_1(t).\ x_{\text{чн}} - ?$$

Для нахождения частного решения применим метод вариации произвольной постоянной, т.е. частные решения ищем в следующем виде:

$$x_{\text{чн}} = c_0(t)\psi_0(t) + c_1\psi_1(t);$$

$$Dx_{\text{чн}} = c_0\psi_0' + c_1\psi_1' + c_0'\psi_0 + c_1'\psi_1;$$

$$D^2x_{\text{чн}} = c_0\psi_0'' + c_1\psi_1'' + 2c_0'\psi_0' + 2c_1'\psi_1' + c_0''\psi_0 + c_1''\psi_1.$$

Выберем функции c_0 и c_1 таким образом, что

$$\begin{cases} c_0'\psi_0 + c_1'\psi_1 = 0, \\ c_0'\psi_0' + c_1'\psi_1' = f; \end{cases} \quad \Rightarrow c_0', c_1' - ? \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} \psi_0 & \psi_1 \\ \psi_0' & \psi_1' \end{vmatrix} \neq 0 - \text{Вронскиан базисных функций} \neq 0.$$

Решаем систему любым способом, находим c_0' и c_1'. Далее находим $c_0(t)$ и $c_1(t)$, по крайней мере в квадратурах.

Теорема 1. *Если функция f непрерывная и ψ_0, ψ_1 образуют базис соответсвующего решения, то функция $x_{\text{чн}}(t) = c_0(t)\psi_0(t) + c_1(t)\psi_1(t)$ является частным решением неоднородного уравнения, где функции c_0 и c_1 находятся из соотношения* (1).

Замечание 1. *Общее решение неоднородного уравнения есть сумма $x = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}}$.*

Замечание 2. *В случае большей размерности $n > 2$ система для определения функций c_0 и т.д. строится аналогичным образом.*

Упражнение 1. Выписать систему для определения функций c_0, c_1, c_2 для уравнения 3-го порядка.

Доказанная теорема даёт алгоритм построения частного решения методом Лагранжа.

1) Строим какой-либо базис соответствующего однородного уравнения

$L_nx = 0$: $\psi_0(t), \ldots, \psi_{n-1}(t)$. $x_{\text{оо}} = c_0\psi_0 + \ldots + c_{n-1}\psi_{n-1}$.

2) Записываем систему по образцу: $c_0', \ldots, c_{n-1}'$, находим эти производные, а затем и сами функции $c_0, \ldots, c_{n-1}$.

3) $x_{\text{чн}} = c_0()t\psi_0(t) + \ldots + c_{n-1}(t)\psi_{n-1}(t)$.

Пример 1. $D^2x - Dx = \frac{(2-t)e^t}{t^3}$ $(t > 0)$.

1) $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 1$. $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = e^t$. $x_{\text{оо}}(t) = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot e^t$.

2)

$$\begin{cases} c_0' \cdot 1 + c_1' \cdot e^t = 0, \\ c_0' \cdot 0' + c_1' \cdot e^t = \frac{(2-t)e^t}{t^3}; \end{cases} \quad \Rightarrow c_1' = \frac{2-t}{t^3}, c_1 = \int \frac{2-t}{t^3}dt = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}.$$

3) $x_{\text{чн}} = c_0(t) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right)e^t$. Аналогично находим c_0' и c_0.

Упражнение 2. Найти $x_{\text{чн}}$:

$$D^3x + Dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

15 Линейное стационарное уравнение с квазиполином

$L_n z = h(t)$. $h(t) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t)e^{\gamma_j t}$.

Ставим задачу найти частное решение такого уравнения. В силу принципа суперпозиции построение частного решения можно производить отдельно для каждого слагаемого квазиполинома. Поэтому построение сводится к задаче $L_n z = P(t)e^{\gamma t}$.

Теорема 1. *Уравнение с простейшим квазиполиномом имеет частное решение такого вида:* $z(t) = t^r Q(t)e^{\gamma t}$*, где* r *- кратность корня* $\gamma = \nu_i$*, где* γ *- контрольное число. Если* $\nu_i \neq \gamma \ \Rightarrow \ r = 0, \ deg(Q) = deg(P)$

Доказательство. Рассмотрим резонансные случаи, т.е. когда корни характеристического многочлена совпадают с контрольным числом γ.

$n = 2 : L_2 n = (D - \nu_1)(D - \nu_2)z = P(t)e^{\gamma t}$.

Доказательство разобьём на 4 этапа, в зависимости от совпадения корней с контрольным числом.

Случай 1: Резонансный случай совпадения одного корня.

$$\gamma = \nu_1, \ \gamma \neq \nu_2 \ \Rightarrow \ (D - \gamma)\underbrace{(D - \nu_2)z}_{W} = P(t)e^{\gamma t}$$

$$(D - \gamma)W = P(t)e^{\gamma t} \ (**) \ \Rightarrow \ W(t) = \int\limits_0^t e^{\gamma(t-\tau)}P(\tau)e^{\gamma\tau}d\tau = e^{\gamma t}\int\limits_0^t P(\tau)d\tau = e^{\gamma t}tQ^*(t)$$

$$(D - \nu_2)z = e^{\gamma t}tQ^*(t) \ \Rightarrow \ z(t) = \int\limits_0^t e^{\nu_2(t-\tau)}e^{\gamma\tau}\tau Q^*(\tau)d\tau = e^{\nu_2 t}\int\limits_0^t e^{-(\nu_2-\gamma)\tau}Q^*(\tau)\tau d\tau$$

Согласно свойству интеграла от независимого полинома получим:

$$z(t) = e^{\nu_2 t}e^{-(\nu_2-\gamma)t}Q(t)t = e^{\gamma t}tQ(t)$$

Что и требовалось доказать в случае 1.

Замечание 1. *Можно использовать несколько другой подход доказательства:*

Предварительно выпишем $(e^{-\lambda t}w)' = -\lambda e^{-\lambda t}w + e^{-\lambda t}w' = e^{-\lambda t}(w' - \lambda w)$*. Отсюда следует, что справедлива следующая формула:*

$$w' - \lambda w = e^{\lambda t}(e^{-\lambda t}w)'$$

Воспользуемся этой формулой в (**), тогда:

$$e^{\gamma t}(e^{-\gamma t}w)' = P(t)e^{\gamma t}$$

$$(e^{-\gamma t}w)' = P(t)$$

$$e^{-\gamma t}w = tQ(t) \ \Rightarrow \ w = e^{\gamma t}tQ(t)$$

Далее применяя эту формулу получим доказательство:

$$(D-\nu_2)z = e^{\gamma t}tQ(t)$$

$$e^{\nu_2 t}(e^{-\nu_2 t}z)' = e^{\gamma t}tQ(t)$$

$$z = e^{\gamma t}tQ(t)$$

Случай 2: $\gamma = \nu_2, \ \gamma \neq \nu_1$

Упражнение 1. Докажите данный случай самостоятельно, опираясь на случай 1.

Случай 3: $\gamma = \nu_1 = \nu_2$

Воспользуемся формулой из замечания $w' - \lambda w = e^{\lambda t}(e^{-\lambda t}w)'$ и получим:

$$(D-\gamma)\underbrace{(D-\gamma)z}_{(D-\gamma)z=w} = P(t)e^{\gamma t}$$

$$\text{По аналогии с 1 случаем } w = e^{\gamma t}tQ^*(t)$$

$$e^{\gamma t}(e^{-\gamma t}z)' = e^{\gamma t}tQ^*(t)$$

$$(e^{-\gamma t}z)' = tQ^*(t) \ \Rightarrow \ z = e^{\gamma t}t^2Q(t), \quad deg(Q^*(t)) = deg(Q(t))$$

Случай 4: $\gamma \ \neq \ \nu_1, \ \nu_2$ (не резонансный)

$$(D-\nu_1)(D-\nu_2)z = P(t)e^{\gamma t}$$

1 способ) Аналогично случаю 3.

2 способ) Формула из замечания:

$$(D-\nu_1)w = P(t)e^{\gamma t}$$

$$(e^{-\nu_1 t}w)' = P(t)e^{(\gamma-\nu_1)t}$$

$$e^{-\nu_1 t}w = Q^*(t)e^{(\gamma-\nu_1)t} \ \Rightarrow \ w = Q^*(t)e^{\gamma t}$$

$$(e^{-\nu_2 t}z)' = Q^*(t)e^{(\gamma-\nu_2)t}$$

$$e^{-\nu_2 t}z = Q(t)e^{(\gamma-\nu_2)t} \ \Rightarrow \ z = e^{\gamma t}Q(t)$$

Упражнение 2. Доказать для произвольного n не резонансный случай.

Вывод для $n = 2$:

$$z(t) = t^rQ(t)e^{\gamma t}, \text{ где } r = \begin{cases} 1, & \nu_1 = \gamma \ \ || \ \ \nu_2 = \gamma; \\ 2, & \nu_1 = \ \nu_2 \ = \ \gamma; \\ 0, & \nu_1, \ \nu_2 \ \neq \ \gamma. \end{cases}$$

■

Замечание 2. *Если коофициент оператора L_n дествительный и правая часть действительный квазиполином, т.е* $L_n x = (P(t)cos(\beta)t) + Q(t)sin(\beta t))e^{\gamma t}$, *то частное решение имеет вид* $x(t) = t^s(\overline{P}(t)cos(\beta)t) + \overline{Q}(t)sin(\beta t))e^{\gamma t}$, *где* $deg\overline{P}(t) \leq degP(t)$, $deg\overline{Q}(t) \leq degQ(t)$, *а* s *вычисляется так как* r *из предыдущей теоремы, при этом* $\gamma = \alpha \pm i\beta$.

Сформулируем правило Эйлера нахождения частного решения уравнения с квазиполиномом:

1) Находим корни $L_n x$, т.е $\nu_1, ..., nu_n$.

2) Строим контрольное число $\gamma = \alpha \pm i\beta \stackrel{?}{=} \nu_i, \ i = \overline{1, n}$

3) a) (совпадений нет) Решение представимо в виде такого же квазиполинома $*e^{\gamma t}$, только полного.

b) (есть s совпадений) Решение записывается в виде $t^s Q(t)e^{\gamma t}$, где $Q(t)$ - полный квазиполином с неопределёнными коэфициентами.

4) Подставляем в уравнение и методом неопределённых коэффициентов находим неизвестные коэффициенты.

Пример 1. $D^2x - x = e^t cos^2(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}cos(2t)e^t$

Решение $\nu_{1,2} = \pm 1$

$$x_{\text{чн}} = Ate^t + t^0(Bcos(2t) + Csin(2t))e^t$$

$$Dx_{\text{чн}} = Ae^t + Ate^t - 2Bsin(t)e^t + Bcos(2t)e^t + 2Ccos(2t)e^t + Csin(2t)e^t$$

$$D^2x_{\text{чн}} = 2Ae^t + Ate^t - 4Bcos(2t)e^t - 4Bsin(2t)e^t + Bcos(2t)e^t - 4Csin(2t)e^t + 4Ccos(2t)e^t + Csin(2t)e^t$$

Подставляя в исходное уравнение получим:

$$2Ae^t - 4Bcos(2t)e^t - 4Bsin(2t)e^t - 4Csin(2t)e^t + 4Ccos(2t)e^t = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}cos(2t)e^t$$

Отсюда $A = \frac{1}{4}$, $\begin{cases} -4B + 4C = \frac{1}{2} \\ -4B - 4C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{16} \\ C = \frac{1}{16} \end{cases}$

Тогда $x_{\text{чн}} = \frac{1}{4}te^t + (sin(2t) - cos(2t))\frac{1}{16}e^t$.

16 Свойства решений линейных стационарных уравнений

$$L_n x = f(t), \qquad t \in I$$

Пусть соответсвующее однородное уравнение имеет нормированный базис при t=0.

$$L_n x = 0 => \varphi_0(t), ..., \varphi_{n-1}(t)$$

$$D^k x|_{t=s} = \xi_k, k = \overline{0, n-1}$$

$$x(t, \xi_0, ..., \xi_{n-1}) = \sum_{n=0}^{n-1} \xi_k \varphi_k(t-s) + x_{\text{чн}}, \text{ где } x_{\text{чн}} = \int_0^t \varphi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

Свойства: 1) Дифференциорование решений по своим аргументам

Пусть $C^m(E)$ множество функций $x : E \to R$, имеющие на множестве E производные до m-го порядка.

Теорема 1. *Если функция m раз дифференцируема ($f \in C^{(m)}(I)$), тогда решение начальной задачи будет непрерывно дифференцируемо по всем своим аргументам $m + n$ раз.*

$$(x(t, \xi_0, ..., \xi_{n-1}) \in C^{n+m}) \quad (I * R^n)$$

Доказательство.

1-й этап(дифференцирование по начальным данным)

$\dfrac{dx}{d\xi_j} -?$

$\dfrac{dx}{d\xi_j} = \varphi_j(t-s) + 0$

$\dfrac{d^2x}{d\xi_j} = 0, ...$

Дифференцирование по независимой переменной

$\dfrac{d^kx}{dt^k} \Leftrightarrow$(в силу структуры функции φ_k, то любые производные существуют(φ_k-квазиполином)) и $\dfrac{d^kx_{\text{чн}}}{dt^k}$

$x_{\text{чн}}$-решение, $D^n x_{\text{чн}}(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k x_{\text{чн}}(t) + f(t)) \Rightarrow$ это тождество можно последовательно дифференцировать n раз

$D^{n+m} x_{\text{чн}}(t) = ... \Rightarrow x \in C^{n+m} \Rightarrow$ все решение можно дифференцировать n+m раз.

■

2)Непрерывная зависимость от начальных условий.

Наряду с исходной задачей рассмотрим:

$$D^k x|_{t=s} = \xi_k + \Delta\xi_k, k = \overline{0, n-1}$$

$$x(t, \xi_0 + Delta\xi_0, ..., \xi_{n-1} + \Delta\xi_{n-1})$$

$\Delta\xi = \sqrt{\sum \Delta\xi_k^2}$ - возмущение начальных данных

Определение 1. *Отклонением решения исходной и возмущенной задачи назовем* $\rho(t, \Delta\xi) = \rho(t, \xi_0 + \Delta\xi_0, ..., \xi_{n-1} + \Delta\xi_{n-1}) = \sum_{m=0}^{n-1} |D^m x(t, \xi) - D^m x(t, \xi + \Delta\xi)$

Заметим, что отклонение функции f не зависит от f(начальные данные), возникает вопрос, насколько величина возмущения влияет на величину отклонения

Определение 2. *Решение x(t) будем назвать непрерывно зависимым от начальных данных, от $x(t,\xi)$ - начальные данные*

$$\forall\epsilon > 0\ \ \exists\Delta\xi_k \in R,\ \ t \in I,\ \ \Delta\xi \le \delta => \rho(t,\Delta\xi) \le \epsilon$$

Теорема 2. *f(t)- непрерывна, $t \in I, I_1 \subset I$ -компакт $\Rightarrow$ $x(t,\xi)$ -непрерывно зависит от начальных данных.*

Доказательство.

$x(t+\Delta\xi) = \sum(\xi_k + \Delta\xi_k)\varphi_k(t-s) + x_{\text{чн}}$ - решение возмущенной задачи $=>$ $\rho(t,\xi)$ - не зависит от f, т.к. $\varphi_n(t-s)$ - квазиполином, $t \in I_1 \Rightarrow M = M(I_1)$

$|D^m\varphi_k| \le M,\ \ \rho(t,\Delta\xi) = \sum D^m|x(t,\xi+\Delta\xi) - x(t,\xi) = \sum(\xi_k+\Delta\xi_k)\varphi_k(t-s) + x_{\text{чн}} - \sum_{k=0}\xi_k\varphi_k(t-s) - x_{\text{чн}}(t) = \sum_{m=0}^{n-1}|D^m x(t,\xi) - D^m x(t,\xi+\Delta\xi)| = \sum D^m|x(t,\xi) - x(t,\xi+\Delta\xi)| = \sum_{m=0}^{n-1} D^m|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\xi_k\varphi_k(t-s)| \le 1)$

Промежуточный вывод: как видим,ρ не зависит от ξ_k(начальных данных) и правой части уравнения. Данная сумма содержит n^2 слагаемых

1) $\le max\Delta\xi_k N n^2 \le \Delta\xi M n^2 \le \delta M n^2 \le \epsilon\ \ \ \forall t \in I_1$

Выберем $\delta = \dfrac{\epsilon}{Mn^2}$

∎

Замечание:

Выбор I_1- существенное требование при доказательстве m(ограничение)

Пример 1. $Dx - x = 0,\ \ t \in I = [0,+\infty),\ \ \ x|_{t=0} = \xi_0 = 1$

$x(t) = e^t$

$x(t,\xi_0) = e^t$

$x(t,\xi_0+\Delta\xi) = (\xi_0+\Delta\xi)e^t$

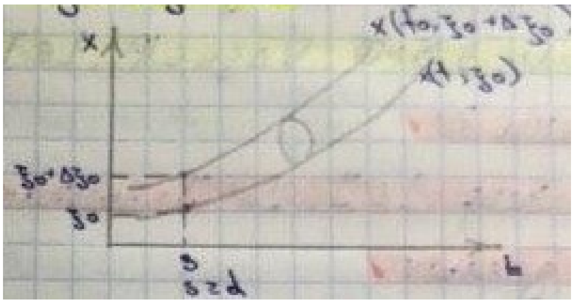
$\rho(t,\Delta\xi) = \Delta\xi\ \ \ t \to +\infty\ \ \ = 0$- непрерывной зависимости на всем луче нет, но есть на любом конктретном множестве

3) Устойчивость решения

Устойчивость - один из фундаментальных разделов теории ДУ. $L_n x = f,\ \ \ x|_{t=s} = \xi_0, ..., D^{n-1}x|_{t=s} = \xi_{n-1}$. Пусть $x(t,\xi_0,...,\xi_{n-1})$- решение этой задачи, $t \in I = [\alpha,+\infty)$

Определение 3. *Решение $x(t,\xi)$ будем называть устойчивым по Ляпунову, если оно непрерывно зависит от начальных данных на прямой, т.е.*

$$\forall\epsilon > 0,\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall|\Delta\xi| \le \delta => \rho(t,\xi) \le \epsilon$$



Если в какой-то момент отклонение небольшое, то дальше решения не разбегутся

Если устойчиво какое-то решение $x(t,\xi)$, то устойчивы все решения. Поэтому можно говорить об устойчивости уравнения

Устойчивость однородного уравнения равносильна устойчивости неоднородного уравнения(т.к. ρ не зависит от f)

Справедливы только для линейных уравнений

Теорема 3. *Критерий устойчивости стационарного уравнения*

Стационарное уравнения устойчиво $\Leftrightarrow Re\nu_j \leq 0, \quad j = \overline{1,n}$*(когда действительные части корней характеристического многочлена неположительны), причем все числа с нулевой действительной частью простые.*

Доказательство. $\Rightarrow$

Пусть $Re\nu_j \neq 0$. От противного: $\exists \nu_k = \alpha + i\beta, \alpha > 0 => |\delta_k e^{\alpha t} cos\beta t| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Пусть $Re\nu_j = 0$ От противного: $\exists \nu_k = \pm i\beta_k$, кратность $\alpha_k \geq 2 => |\delta_k t^{\alpha_{k-1}} cos\beta t| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\Leftarrow$

$x(t,\xi) = \sum \xi_k \varphi_k(t-s) + x_{\text{чн}}(t)$

$x(t,\xi+\Delta\xi) = \sum(\xi_k + \Delta\xi_k)\varphi_k(t-s) + x_{\text{чн}}(t)$

$=>\rho(t,\Delta\xi) = \sum_{m=0}^{n-1} |D^m x(t,\xi) - D^m x(t,\xi+\Delta\xi)| = sum_{m=0}^{n-1} D^n |x(t,\xi) - x(t,\xi+\Delta\xi)| = \sum_{m=0} D^m \sum_{k=0} |\Delta\xi_k \varphi_k(t-s)$

Отклонение является линейной формой относительно $\Delta\xi_k$ с некоторым коэффициентом.

$D^m \varphi_k(t-s) = (c_{mk} cos\beta_k t + d_{mk} s_m \beta_k t) t^{\alpha_k - 1} e^{\alpha_l t}$

1)$\alpha_k < 0 \Rightarrow |D^m \varphi_k(t-s)|$-ограничена $\Rightarrow \Delta\xi_k \leq \delta \Rightarrow \rho \leq \epsilon$

2) $\alpha_k = 0, \quad \pm i\beta_k = 1 \Rightarrow |D^m \varphi_k|$-ограничена $\Rightarrow \Delta\xi_k \leq \delta \Rightarrow \rho \leq \epsilon$ ∎

Пример 2. $D^3 x + d^2 x + 4Dx + 4x = t\sqrt{t^2 = 1} e^t sint$

$\nu^3 + \nu^2 + 4\nu + 4 = 0$

$\nu_1 = -1 \quad \nu_{2,3} = \pm i \Rightarrow$ устойчивы по Ляпунову

Гипотеза: $L_n, a_j \geq 0 \Leftrightarrow Re\nu_j < 0$

17 Асимптотическая устойчивость

Определение 1. *Если решение устойчиво и $\Delta\xi_k$ - мало и $\rho(t, \Delta\xi) \to 0$, то решешние называется асимптотически устойчивым.*

Теорема 1. *Решение линейного уравнения асимтотически устойчиво $\Leftrightarrow Re\nu_j < 0$*

Доказательство.

Пусть $Re\nu_j < 0$. От противного: $\exists \nu_k = \alpha \pm i\beta,\ \alpha \geq 0\ \Rightarrow$ при $\alpha > 0\quad |\delta_k e^{\alpha t} cos\beta t| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

при $\alpha = 0\ \ |\delta_k cos\beta t| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} |\delta_k| \to 0$

■

Теорема 2. ***Критерий Гурвица***

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & ... & 0 \\ ..... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_0 \end{vmatrix}$$

$Re\nu_j < 0 \Leftrightarrow$*главные миноры >0*

$a_j = 0, j < 0$

Пример 1. $D^4x + 2D^3x + 6D^2x + 5Dx - 6 = f(t) \quad n = 4$

Проверить устойчиво или нет:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

1>0

4-4=0

Ассимтотически не устойчиво

$\nu_1 = -1 \quad \nu_{2,3} = \pm 2i \quad d = 1 \Rightarrow$ устойчиво.

18 Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1. Системы нормальной формы

Несколько дифференциальных уравнений образуют систему,

Пример 1.

$$\begin{cases} D^2x_1 + D^2x_2 = 1 & x_1(t) \\ D^2x_1 + D^2x_2 = 0 & x_2(t) \end{cases} \quad \text{-не нормальная форма}$$

если при этом выполняются следующие условия:
1)Старшая производная каждой искомой функции входит только в одно уравнени
2)Каждое кравнение нарешимо относительно старших производных
то такая система имеет нормальную форму.
$D^{m_1}x_1 = f_1(x_1, Dx_1, ..., D^{m_1-1}x - 1, x_2, ..., x_n, ...)$
....
$D^{m_n}x_n = f_n(x_1, Dx_1, ..., D^{m_1-1}x_1, x_2, ..., x_n, Dx_n, ..., D^{m_n-1}x_n)$
Решением будет набор функций $x_1(t), ..., x_n(t)$.
Система в нормальной форме с помощью соответстветственных замен переменнох сводится к системе уравнений 1 порядка.

Пример 2.

$$\begin{cases} D^2x_1 = f_1(t, x_1[y_1], Dx_1[y_2], x_2[y_3], Dx_2[y_4], D^2x_2[y_5]) \\ D^3x_2 = f_2(t, x_1, Dx_1, x_2, Dx_2, D^2x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Dy_1 = y_2 \\ Dy_2 = f_1(t, y_1, ...) \\ Dy_3 = y_4 \\ Dy_4 = y_5 \\ Dy_5 = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_5) \end{cases}$$

Поэтому ограничемся изучением нормальных систем 1 порядка

2.Линейные системы нормальной формы

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + f_1 \\ ... \\ Dx_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + f_n \end{cases} \qquad a_J(t), f_i(t), t \in I$$

$x_1(t)...x_n(t)$

Определение 1. *Решением линейной системы будем называть семейство непрерывно дифференцируемых фунций, обращающих в тождество систему на I.*
Таким же образом можно рассматривать комплексно-значимые системы

$$Dz_k = C_{k_1}z_1 + ... + C_{k_n}z_n + h_k \quad k = \overline{1, n}$$

$z_k = x_k + iy_k$
Линейные системы можно записать в матричной форме:

$$Dx = A(t)x + f(t)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = (a_{i0})_1^n \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ ... \\ ... \\ f_n \end{pmatrix}$$

Производные и интегралы от векторов и матриц будем вычислять покомпонентно, например, если P(t)- матрица n*n, $P(t) = (p_{ij})m$,
то $D^m P = (D^m p_{ij}(t))_{n*n}$, $\int_s^t P(\tau)d\tau = (\int_s^t P(\tau)d\tau = (\int_s^t P_{ij}(\tau)d\tau)_{n*n}$
Если все a_{ij} - const, то система называется стационарной.

19 Линейные системы в нормальной форме

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} Dx_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = f_1, \\ Dx_2 = a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = f_2, \\ .... \\ Dx_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = f_n. \end{cases}$$

где $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $f_i = f_i(t)$, $x_i = x_i(t)$ $i, j = \overline{1, n}$,
определены на t $\in$ I

Определение 1. *Решением системы называется семейство функций $x_1(t)$, $x_2(t), ..., x_n(t)$ непрерывно дифференцируемых на I, которые на этом интервале обращают каждое уравненение в тождество.*

Можно так же рассматривать системы в комплекснозначной форме:

$$Dz_k = C_{k1}z_1 + ... + C_{kn}z_n + h_k, \text{ где } k = \overline{1, n}, \ z_k = x_k + iy_k$$

Достаточно часто линейные системы записывают в векторной(матричной) форме:

$$Dx = Ax + f, \text{ где } x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T, \ A = \{a_{ij}\}, \ f = (f_1, f_2..., f_n)^T$$

Производные и интегралы от векторов и матриц будем вычислять покомпонентно. Например, если $P(t)$ -матрица размера $n \times n$, то:

$$D^k P(t) = D^k(p_{ij}(t)) \text{ и } \int_s^t P(\tau)d\tau = \int_s^t p_{ij}(\tau)d\tau, \ i, j = \overline{1, n}$$

В случае, когда берём функцию от матрицы $(E^A, \sqrt{A})$ - наши правила уже не будут работать.

Если все $a_i j$ постоянны, то линейная однородная система называется постоянной (стационарной)

20 Решение линейных неоднородных систем

Рассмотрим следующую систему:

$$Dz = Cz(t) + h(t), \text{ где } \mathrm{C} = \{\mathrm{C}_{ij}\}, \ h = (h_1, h_2, ..., h_n)^T, \ z_k\Big|_{t=s} = \xi_k$$

Рассмотрим 4 случая для данной системы:

Случай 1 (диагональный)

$$C = diag(C_{11}, C_{22}, ..., C_{nn})$$

Отсюда $Dz_j = C_{jj}z_j + h_j, \ j = \overline{1,n} \Rightarrow z_j(t) = \xi_j e^{C_{jj}(t-s)} + \int\limits_s^t e^{C_{jj}(t-\tau)} h_j(\tau) d\tau$

Случай 2 (нижнетреугольный)

Теорема 1. *В нижнетреугольном случае начальная задача однозначно разрешима на интервале* $I \, \forall s \in I, \ \forall \xi_k \in C$

Доказательство. Выпишем первые два уравнения системы:

$$\begin{cases} Dz_1 = C_{11}z_1 + h_1, \\ Dz_2 = C_{21}z_1 + C_{22}z_2 + h_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Dz_n = C_{n1}z_1 + ... + C_{nn}z_n + h_n. \end{cases}$$

Будем решать по принципу " сверху-вниз " , тогда:

$$z_1 = \xi_1 e^{C_{11}(t-s)} + \int\limits_s^t e^{C_{11}(t-\tau)} h_1(\tau) d\tau$$

$$Dz_2 = C_{21}z_1 + C_{22}z_2 + h_2$$

Обозначим $C_{21}z_1 + h_2 = \widetilde{h_2}$, тогда:

$$Dz_2 = C_{22}z_2 + \widetilde{h_2}$$

$$z_2 = \xi_2 e^{C_{22}(t-s)} + \int\limits_s^t e^{C_{22}(t-\tau)} \widetilde{h_2}(\tau) d\tau$$

При $n > 2$ продолжается этот процесс до того как не найдём решение системы. ■

Случай 3 (верхнетреугольный)

Теорема 2. *В верхнетреугольном случае начальная задача однозначно разрешима на интервале* $I \, \forall s \in I, \ \forall \xi_k \in C$

Доказательство. Выпишем последние два уравнения системы:

$$\begin{cases} Dz_1 = C_{11}z_1 + ... + C_{1n}z_n + h_n, \\ .... \\ Dz_{n-1} = C_{n-1n-1}z_{n-1} + C_{n-1n}z_n + h_{n-1} \\ Dz_n = C_{nn}z_n + h_n. \end{cases}$$

Будем решать по принципу " снизу-вверх " тогда:

$$z_n = \xi_n e^{C_{nn}(t-s)} + \int\limits_s^t e^{C_{nn}(t-\tau)} h_n(\tau) d\tau$$

$$Dz_{n-1} = C_{n-1n}z_{n-1} + C_{nn}z_n + h_{n-1}$$

Обозначим $C_{nn}z_n + h_{n-1} = \widetilde{h}_{n-1}$, тогда:

$$Dz_{n-1} = C_{n-1n}z_{n-1} + \widetilde{h}_{n-1}$$

$$z_{n-1} = \xi_{n-1} e^{C_{n-1n}(t-s)} + \int\limits_s^t e^{C_{n-1n}(t-\tau)} \widetilde{h}_{n-1}(\tau) d\tau$$

При $n > 2$ идём далее, поднимаясь снизу-вверх, до того как не найдём решение системы. ■

Случай 4 (общий случай)

Теорема 3. *В общем случае начальная задача однозначно разрешима на интервале I $\forall s \in I$, $\forall \xi_k \in C$*

Доказательство.

$$Dz = Cz(t) + h(t), \text{ где } \mathrm{C} = \{\mathrm{C}_{ij}\}, \ h = (h_1, h_2, ..., h_n)^T$$

Пусть J_C - Жорданова нормальная форма матрицы C:

$$J_C = diag(J_1, J_2, ..., J_k), \text{ где } J_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \lambda_m & 1 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}, m = \overline{1, k}.$$

Отсюда следует, что для J_C - справедлив верхнетреугольный случай.

Рассмотрим S_C - трансформирующая матрица, т.е $S_C^{-1} C S_C = J_C$ (Матрица S составлена из собственных и присоединенных векторов)

Введём замену переменных $W = S_C^{-1} z$, тогда $z = S_C W$, отсюда получим:

$$S_C DW = CS_C W + h, \quad W\Big|_{t=s} = S_C^{-1}\xi$$

$$DW = S_C^{-1} C S_C W + S_C^{-1} h$$

$$DW = J_C W + \widetilde{h}$$

$$z(t) = S_C \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ ... \\ W_n(t) \end{pmatrix}$$

Упражнение 1. Провести доказательство для случая нижнетреугольной формы Жордана ($J_н = J_в^T$).

■

При решении конкретных систем с помощью приведения к ЖНФ необходимо найти транформирующую матрицу, привести ЖНФ, решить систему и вернуться к исходным переменным.

21 Сведение линейной системы к совокупности стационарных уравнений n-го порядка

Рассмотрим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} Dx_1 = ax_1 + bx_2 \\ Dx_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

$b \neq 0$, так как если $b = 0$ то действует теорема из приедыдущей главы о нижнетреугольной матрице.

$$b \neq 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{b} Dx_1 - \frac{a_1}{b_1} x_1$$

Кроме этого продифференцируем первое уравнение:

$$D^2 x_1 = aDx_1 + bDx_2 = aDx_1 + b(cx_1 + dx_2) = aDx_1 + b(cx_1 + d(\frac{1}{b} Dx_1 - \frac{a_1}{b_1} x_1))$$

$$D^2 x_1 - (a + d)Dx_1 + (bc - ad)x = 0 \Rightarrow \text{ найдём } x_1(t)\text{, а зная его, найдём } x_2(t).$$

Таким образом мы доказали следующее утверждение: *при $b \neq 0$ обе системы эквивалентны.*

Подобным образом можно решать и неоднородные системы.

.

22 Экспоненциальное представление решений линейных стационарных систем

Возьмём пространство R^n и зададим норму вектора и некоторые свойства:

$$\|x\| = \max \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0, x \in R^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$1)\ \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

$$2)\ \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$3)\ \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

$$4)\ \|A^m\| \leq \|A\|^m$$

Рассмотрим матричный ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A^m$. Этот ряд сходится тогди и только тогда. когда сходится ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{ij}^m$. А тогда из сходимости главной мажоранты будет следовать сходимость матричного ряда.

Рассмотрим $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m$, видим, что ряд совпадает с рядом тейлора для экспоненты, тогда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m = e^A$, отсюда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m t^m = e^{At}$.

Пример 1. Рассмотрим следующие матрицы и экспоненты в степени этих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,\ e^A = E + \frac{E}{1!} + \frac{E}{2!} + ... = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... & 0 \\ 0 & 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A}{2!} + ... = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В общем случае считать экспоненту матрицы гораздо сложнее. Покажем некоторые свойсва:

Свойство 1 $D(e^{At}) = AD(e^{At})$

Доказательство.

$$D(e^{At}) = D(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m t^m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m m t^{m-1} = A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m-1)} A^{m-1} t^{m-1} = A e^{At}$$

■

Свойство 2 Если A и B коммутирут между собой, т.е перестановочны ($AB = BA$)

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

В общем же случае $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Свойство 3 $e^{A+B} = e^A + e^B$ тогда и только тогда, когда матрицы A и B перестановочны.

Доказательство.

$$e^{A+B} = E + \frac{(A+B)}{1!} + \frac{(A+B)^2}{2!} + ... = E + A + B + \frac{A^2}{2!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{AB}{2!} + \frac{BA}{2!} =$$

$$= (E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + ...)(E + \frac{B}{1!} + \frac{B2}{2!} + ...) = e^A e^B$$

■

Свойство 4 $(e^A)^{-1} = e^{-A}, (e^{At})^{-1} = e^{-At}$

23 Правило Коши решения линейных стационарных систем

Рассмотрим ситему $Dx = Ax + f(x),\ t \in I,\ \overrightarrow{x}\big|_{t=s} = \overrightarrow{\xi}$

Теорема 1. *Начальная задача однозначно разрешима на I, причём её решение находится по следующей формуле:*

$$x = e^{A(t-s)}\xi + \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

Доказательство. Предварительно заметим, что $e^{A(t-s)} = e^{At}e^{-As}$, так как $A(t-s) = (t-s)A$

Продифференцируем равенство $x = e^{A(t-s)}\xi + \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$:

$$Dx = Ae^{A(t-s)}\xi + D(e^{At}\int\limits_s^t e^{-A\tau} f(\tau)d\tau) = Ae^{A(t-s)}\xi + Ae^{At}\int\limits_s^t e^{-A\tau} f(\tau)d\tau + e^{At}e^{-At}f(t) =$$

$$= Ae^{A(t-s)}\xi + A\int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau + f(t) = A(e^{A(t-s)}\xi + \int\limits_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau) + f(t) = Ax + f(t)$$

$$x\big|_{t=s} = \xi + \int\limits_s^s .... = \xi$$

■

Замечание 1. *Если $\overrightarrow{\xi}$ заменить на $\overrightarrow{C}$, то получим общее решение.*

Полученная формула предсавляет собой формулу Коши решеения ЛС, при этом множитель $e^{A(t-s)}$ - матрица Коши.

Вычисление матричной экспоненты в общем случае представляет значительные трудности. Тем не менее в некоторых частных случаях можно получить удобные формулы. Рассмотрим их:

Формула 1 $diagA = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$

Тогда $e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + ... = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}$ (см. предыдущий параграф)

Формула 2 Жорданова нормальная форма

Рассуждения проведём для одной клетки Жордана размерности d :

$$J_d(\nu) = \begin{pmatrix} \nu & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \nu & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = E_d(\nu) + F_d = \begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \nu & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что матрицы E и F перестановочны. Рассмотрим F_3:

$$F_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ясно, что матрицы будут нулевые начиная с $n = d$. Отсюда:

$$e^{F_3 t} = E + \frac{F_3 t}{1!} + \frac{F_3^2 t}{2!} + 0 = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично

$$e^{F_d t} = \begin{pmatrix} 1 & t & ... & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & ... & \frac{t^{d-2}}{(d-2)!} \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$e^{J_d t} = e^{E_d \nu t} e^{F_d t} = \begin{pmatrix} e^{\nu t} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\nu t} & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & e^{\nu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & ... & \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \\ 0 & 1 & ... & \frac{t^{d-2}}{(d-2)!} \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = e^{\nu t} e^{F_d t}$$

Теорема 2. *Пусть* $J_A = S^{-1}AS, \ J_A = diag[J_{d_1}(\nu_1), ..., J_{d_m}(\nu_m)]$, *тогда* $e^{At} = Se^{J_A t}S^{-1}$

Доказательство.

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m t^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (SJ_AS^{-1})^m t^m = \left[(SJ_As^{-1})^2 = SJ_A^2S^{-1} \right] =$$

$$= S \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} J_A^m t^m \right) S^{-1} = Se^{J_At}S^{-1}.$$

■

24 Базис решений линейной однородной стационарной системы

Рассмотрим систему $Dx = Ax$, где $x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t) - n$ решения системы. Составим из этих решений матрицу $X(t)$:

$$X(t) = \left(x^{(1)}(t)^T, x^{(2)}(t)^T, ..., x^{(n)}(t)^T \right)$$

Имеет место следующая теорема:
Теорема 1. $\forall t \in R \;\; detX(t) = X(s)e^{trA(t-s)}, \; s \in R, \; trA = a_{11} + ... + a_{nn}$

Доказательство. Докажем при $n = 2$:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) \\ \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix}$$

$$D(detX(t)) = \begin{vmatrix} Dx_1^{(1)} & Dx_1^{(2)} \\ \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \\ Dx_2^{(1)} & Dx_2^{(2)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} & a_{11}x_1^{(2)} + a_{12}x_2^{(2)} \\ \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \\ a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} & a_{21}x_1^{(2)} + a_{22}x_2^{(2)} \end{vmatrix} =$$

$$= ... = (a_{11} + a_{12})(x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)})) = trA * detX(t)$$

Отсюда $detX(t) = X(s)e^{trA(t-s)}$.

■

Таким образом доказан матричный аналог формулы Остроградского-Лювилля:

Если решения $x_1, ..., x_n$ ***- линейно зависимы, то*** $det X(t) \equiv 0 \ \forall t \in R$***, если решение*** x_1 ***- ЛНЗ и при некотором*** S $det(x(t)) \neq 0$***, то при всех*** S ***отличен от нуля.***

Если решения линейно независимы, то $X(t)$ - фундаментальная матрица, а решения - фундаментальная система решений.

Если для решения выполняется условие: $X^{(j)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 - \text{j-я} \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall j,$

то фундаментальная матрица называется нормированной при $t = 0, \ det X(t) = 1$.

25 Метод Эйлера построения решения линейной однородной стационарной системы

Рассмотрим систему:

$$Dx = Ax, \text{ где } \nu_k \text{ - собственное значение матрицы } A \text{ кратности } d_k.$$

Базисное решение будем искать в следующем виде:

$$x_{\nu_k}(t) = e^{\nu_k t}(\alpha_0 + \alpha_1 t + ... + \alpha_{d_{k-1}} t^{d_{k-1}})$$

Рассмотрим $x_{\nu_k}^{(0)}(t) = e^{\nu_k t}\alpha_0$. Подставляя $x_{\nu_k}^{(0)}(t)$ в исходную систему, получим:

$$\nu_k e^{\nu_k t}\alpha_0 = A e^{\nu_k t}\alpha_0 \ \Rightarrow \ (A - \nu_k E)\,\alpha_0 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_0 \text{ - собственный вектор.}$$

Теперь рассмотрим $x_{\nu_k}^{(1)}(t) = e^{\nu_k t}(\beta_0 + \beta_2 t)$. Подставляя $x_{\nu_k}^{(1)}(t)$ в исходную систему, получим:

$$\nu_k e^{\nu_k t}(\beta_0 + \beta_2 t) + e^{\nu_k t}\beta_2 = A e^{\nu_k t}(\beta_0 + \beta_2 t)$$

$$\nu_k(\beta_0 + \beta_2 t) + \beta_2 = A(\beta_0 + \beta_2 t)$$

$$\begin{cases} t^0 : \nu_k\beta_0 + \beta_1 = A\beta_0 \\ t^1 : \nu_k\beta_1 = A\beta_1 \ \Rightarrow (A - \nu_k E)\,\beta_1 = 0 \ \Rightarrow \beta_1 = \alpha_0 \text{ - собственный вектор.} \end{cases}$$

$$\text{Тогда } (A - \nu_k E)\beta_0 = \beta_1 = \alpha_0 \ \Rightarrow \ \beta_0 \text{ - первый присоединённый вектор}$$

Далее подобным образом находим остальные компоненты $x^{(i)}(t)$. Аналогично поступаем для нахождения базисного решения остальных собственных значений. Собирая все найденные решения, получаем базис.

Пример 1. $Dx = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \nu = 2,\ d = 3.$

Решение

$$dim(E - \nu A) = 1$$

Отсюда:

$$x^{(0)}_{\nu=2} = \alpha_0 e^{2t} \ \Rightarrow\ \alpha_0 = (1;2;1)^T$$

$$x^{(1)}_{\nu=2} = (\beta_0 + \beta_1 t)e^{2t} \ \Rightarrow\ \begin{cases} \beta_1 = \alpha_0 = (1;2;1)^T \\ (A - 2E)\beta_0 = \beta_1 \ \Rightarrow\ \beta_0 = (1;1;0)^T \end{cases}$$

Упражнение 1. Дорешать этот пример(найти $x^{(2)}_{\nu=2}$ и записать фундаментальную матрицу)

26 Метод вариации произвольных постоянных (правило Лагранжа). Решения неоднородной линейной системы

Этот метод применим, когда известно общее решение соответсвующей однородной системы:

$$Dx = Ax + \overrightarrow{f}(t)$$

Пусть $x_{\text{оо}(t)} = x(t)\overrightarrow{C}$, где $\overrightarrow{C}$ - произвольный вектор, $x(t)$ - решение однородной системы. Тогда $x_{\text{чн}(t)} = x(t)\overrightarrow{C}$, а $Dx_{\text{чн}(t)} = \dot{x}(t)C(t) + x(t)\dot{C}(t)$. Отсюда получим:

$$\dot{x}(t)C(t) + x(t)\dot{C}(t) = Ax(t)C(t) + f(t)$$

$$Ax(t)C(t) + x(t)\dot{C}(t) = Ax(t)C(t) + f(t)$$

$$x(t)\dot{C}(t) = f(t)$$

Так как $x(t)$ - фундаментальная матрица, то $\forall\ t\ \exists\ x^{-1}$.

$$\dot{C}(t) = x^{-1}(t)f(t)$$

$$C(t) = \int\limits_s^t x^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$

Отсюда $x(t) = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}} = x(t)(C + \int\limits_s^t x^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau)$.

Замечание 1. *Если $x(t)$ выбрать в виде матрицы Коши, т.е $x(t) = e^{A(t-s)}$, то получим известную формулу.*

Пример 1. $Dx = Ax + f(t),\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},\ f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix},\ \nu_1 = -2,\ \nu_2 = -1$

Решение

Построим базисное решение по Эйлеру:

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$x^{-1}(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ 2e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Отсюда $x_{\text{оо}} = x(t)C$, $x_{\text{чн}} = x(t)\tilde{C}$ тогда:

$$\tilde{C}(t) = \int\limits_s^t x^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} -e^t + 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Тогда $x(t) = x_{\text{оо}} + x_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \left(C + \begin{pmatrix} -e^t + 1 \\ t \end{pmatrix} \right)$.

27 Устойчивость решений линейных стационарных систем

$Dx = Ax + f(t), t \in I = [s; +\infty), f -$ непр$, x|_{t=s} = \xi \quad \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ x_i(t, \xi_1, ..., \xi_n)|_{t=s} = \xi_i \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$

Наряду с этим решением рассмотрим задачу с отклонением начальных данных:

$$x(t, \xi + \Delta\xi), x|_{t=s} = \xi + \Delta\xi$$

Определение 1. ***Отклонение решений*** $x(t, \xi)$ *и* $x(t, \xi + \Delta\xi)$ *назовем число* $\rho(t, \Delta\xi) =$ $= ||x(t, \xi + \Delta\xi) - x(t, \xi)||$

Ранее нами установлена следующая формула для решения задачи Коши:

$$x(t, \xi) = e^{A(t-s)}\xi + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau$$

Аналогично:

$$x(t, \xi + \Delta\xi) = e^{A(t-s)}(\xi + \Delta\xi) + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau$$

$\rho(t + \Delta\xi) = ||e^{A(t-s)}(\xi + \Delta\xi) + \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau - e^{A(t-s)}\xi - \int_s^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)d\tau|| = ||e^{A(t-s)}\Delta\xi||$

Значит отклонение не зависит от f и ξ

Определение 2. ***Решение*** $x(t,\xi)$***-непрерывно зависящие от начальных значений на компакте*** $I_1 \subset I$, *если* $\forall \varepsilon \geq 0, \exists \delta \geq 0, \forall \Delta\xi, t \in I, ||\Delta\xi|| \leq \delta \Rightarrow ||\Delta\rho(t,\Delta\xi)|| \leq \varepsilon$

Покажем,что $x(t,\xi)$ непрерывно зависит от начальных значений на I_1:
$\rho(t,\Delta\xi) = ||e^{A(t-s)}\Delta\xi||, \exists M = M(I_1) \Rightarrow ||e^{A(t-s)}|| \leq M \quad \forall s \in I_1$
Выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, тогда, $||\Delta\xi|| \leq \delta \Rightarrow \rho(t,\Delta\xi) \leq \varepsilon \quad \forall t \in I_1$

Определение 3. ***Решение*** $x(t)$ ***называется устойчивам по Ляпунову***, *если оно непрерывно зависит от начальных значений на* $t \in I$

Определение 4. *Если решение устойчиво и при достаточно малых* $\Delta\xi \quad \rho(t,\Delta\xi) \to 0$, *то оно* ***асимптотически устойчиво***.

Поскольку устойчивость одного решения равносильно устойчивости всех решений, то устойчивость решения отождествляют с устойчивостью системы

Следствие 1. *Линейная система устойчива* $\Leftrightarrow Rex_j \leq 0$, *причем, если = 0, то корни должны быть кратными*

Доказательство.
Доказательство основано на представлении базисных решений по методу Эйлера $x(t) = e^{\nu_n t}(\alpha_0 + \alpha_1 t + ... + \alpha_{\alpha_{n-1}} t^{\alpha_{n-1}})$ ■

28 Асимптотическая устойчивость

Следствие 1 (критерий асимптотической устойчивоси).
$Dx = Ax + f(t)$*- асимптотически устойчива* $\Leftrightarrow Re\lambda_j < 0$

Следствие 2.
$det(A - \lambda E) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0$*-характеристический многочлен и соответствующий ему гурвициан (det)* $\begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots\dots\dots & & a_0 \end{vmatrix}$
Действительъные части корней характеристического многочлена < 0 $\Leftrightarrow$ *главные миноры > 0*

Доказательство.
Без доказательства
■

Пример 1. Dx=Ax, A= $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$
det(A-λE) $= \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3$ - сложно искать корни
Составим гурвициан: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\lambda_i < 0 \Rightarrow$ асимптотически устойчива

29 Фазовая плоскость линеных однородных систем двух уравнений

n=2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$
$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$

Плоскость x_1Ox_2 назовем фазовой плоскостью уравнения, а $x_1(t), x_2(t)$ решения - фаовыми радикалами $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$

Заметим, что решение системы - точка покоя системы.

1) Составим характеристический многочлен матрицы коэффициентов.

$$|A - \nu E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \nu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22-\nu} \end{vmatrix} = (a_{11} - \nu)(a_{22} - \nu) - a_{21}a_{12} = \nu^2 - \nu(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$\sigma = trA, \quad D = |A|$

2)Построим вспомогательную матрицу B

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -D & \sigma \end{pmatrix} \quad |B - \nu E| = \begin{vmatrix} -\nu & 1 \\ -D & \sigma - \nu \end{vmatrix} = \nu^2 - \nu\sigma + D$$

Вывод: характеристический многочлен A и B совпадают $\Rightarrow$подобие а)$A \neq \nu E \ A \sim B$
$\exists$ T, $det(T) \neq 0, \quad T^{-1}AT = B$ (в частности матрица $A \sim J_a$)
$x = Ty$

$$TPy = ATy \Rightarrow Dy = T^{-1}ATy \Rightarrow Dy = By$$

Исходная и полученная сиситемы эквивалентны.(фазовые графики совпадают с точностью до линейного преобразования)

Запишем систему в координатной форме:

$$\begin{cases} Dy_1 &= y_2 \\ Dy_2 &= -\Delta y_1 + \sigma y_2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = Dy_1 \Rightarrow Dy_2 = D^2 y_1$$

$$\begin{cases} y_2 &= Dy_1 \\ Dy_2 &= \Delta y_1 - \sigma Dy_1 = 0 \end{cases}$$

$$\nu^2 - \sigma\nu + \Delta = 0$$

Таким образом изучение траектории исходной системы сводится у изучению поведения фазового графика стационарного уравнения.

1)**Седло**

$$\nu_1, \nu_2 \in R, \quad \nu < 0, \nu_2 > 0$$

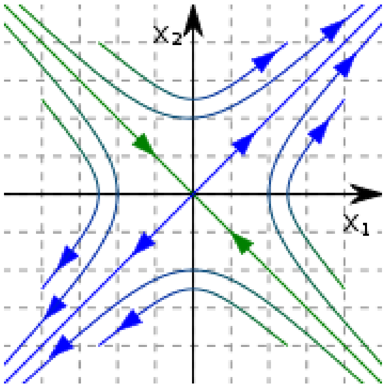


Рис. 1: Седло

2)**Бикритический узел**

$$\nu_1, \nu_2 \in R, \quad \nu_1 < 0, \nu_2 < 0, \;\; \nu_1 \neq \nu_2, \;\; \nu_1 < \nu_2$$

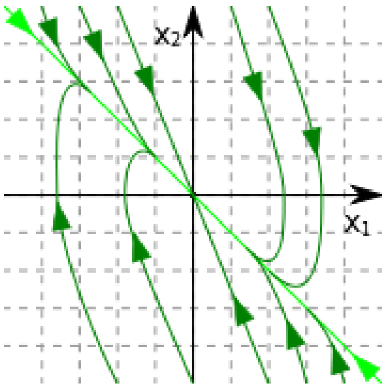


Рис. 2: Бикритический узел

3)**Монокритический узел**

$$\nu_1 = \nu_2 \quad \nu_1\nu_2 > 0$$

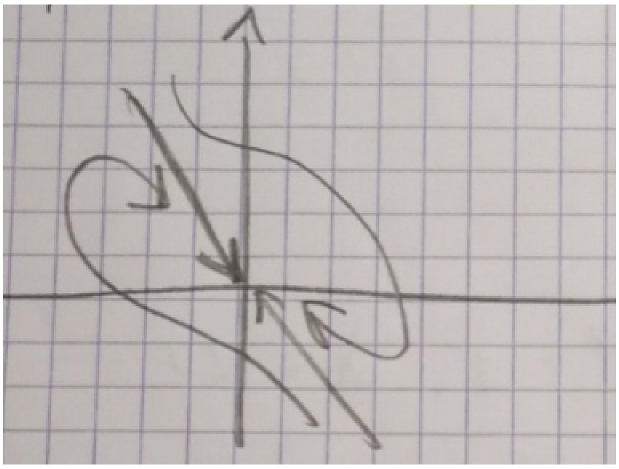


Рис. 3: Монокритический узел

4)**Фокус**

$$\nu = \alpha \pm \beta i \quad \alpha \neq 0 \quad \alpha < 0, \quad \beta \neq 0$$

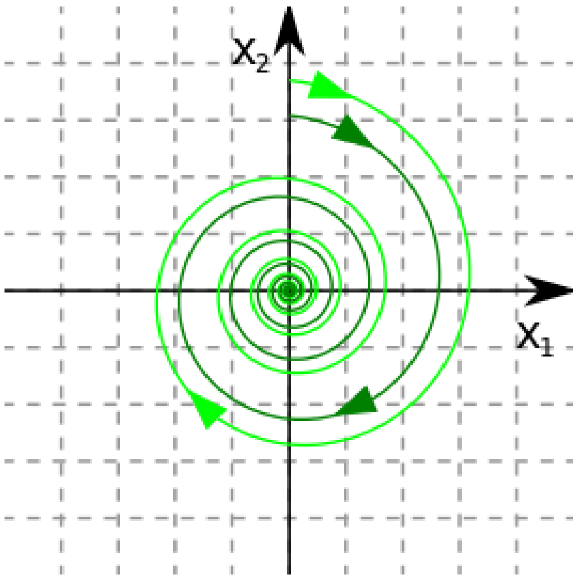


Рис. 4: Фокус

5)**Центр**

$$\alpha = 0 \quad \nu - \pm i\beta$$

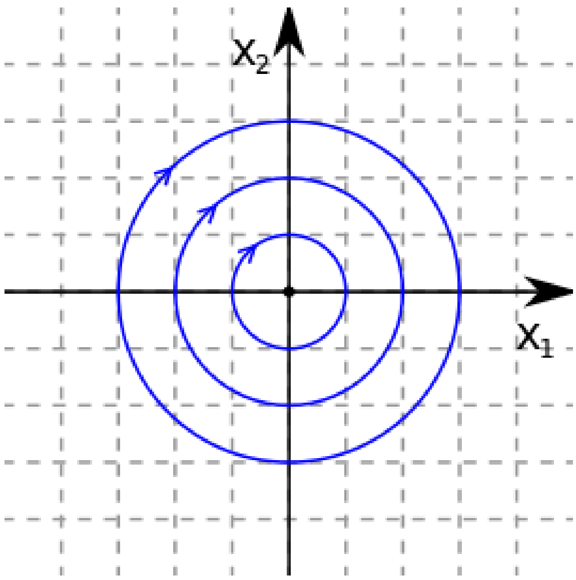


Рис. 5: Центр

Пусть $A = \lambda E \Rightarrow \begin{cases} Dx_1 & = \lambda x_1 \\ Dx_2 & = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 & = C_1 e^{\lambda t} \\ x_2 & = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$

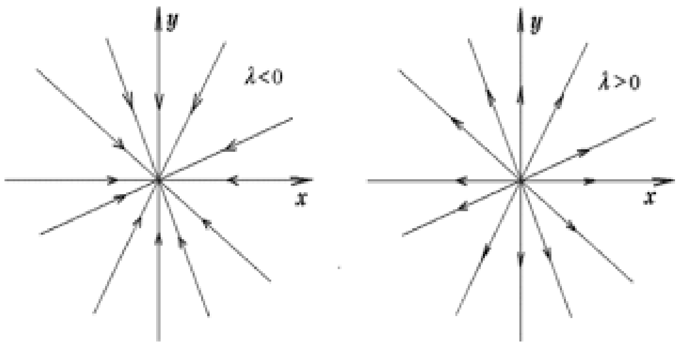
$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{C_2}{C_1} = C*$$

Если $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 \\ x_2 = C_2 \end{cases}$

Каждая точка фазовой плоскости является точкой покоя

a)$\lambda < 0$

b)$\lambda > 0$



Отметим, что a и b не встречаются в уравнениях

Пример 1. $Dx = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda E| = 0 => \lambda = \pm i$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Dy = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{cases} D^2 y_1 + 1 = 0 \\ D y_1 = y_2 \end{cases}$$

Это центр

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda E| = \lambda^2 - 1 => \lambda = \pm 1 \quad \sigma = 0 \quad \Delta = -1$

$$x = Ty \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

30 Элементарные дифференциальные уравнения

Уравнения 1-го порядка в нормальной дифференциальной форме

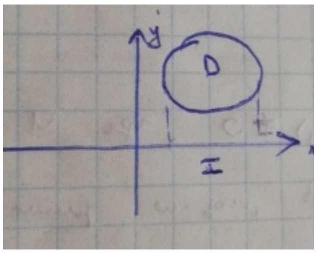
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (x,y) \in D \subset R^2 \quad D^2 + Q^2 \neq 0, \quad \forall x, y \in D$$

Пример 1.
1)$\dfrac{dx}{x^2+1} - dy = 0$
2)$dy - 2\sqrt{x}dx = 0$

Заметим, если $Q(x,y) \neq 0 \quad (x,y) \in D \Rightarrow \; y' = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$
Укажем возможные виды решения этих уравнений:

Определение 1. ***Решение в явном виде*** *называется непрерывная дифференциальная функция* $y = y(x) \quad x \in I$*, которая обращает уравнение в тождество*

Пример 2. $\dfrac{d}{x^2+1} - dy = 0, \quad D = R^2$
$y = arctgx + 1$



Определение 2. ***Решением в явном виде*** *называется непрерывная дифференциальная функция $y = y(x)$ (или $x = x(y)$), которая обращает уравнение 1 в тождество)*

Пример 3. $x(x^2 - 5y^2)dx + y(5x^2 - y^2)dy = 0$

$$xdx + ydy = 0 \quad \begin{cases} x = cos(t) \\ y = sin(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = cos(2t) + cos(t) \\ y = sin(2t) + sin(t) \end{cases}$$

Определение 3. *Соотношение вида $u(x, y) = 0, \quad u(x, y) \neq const$, где $u(x, y)$ называется* ***решением уравнения в неявном виде****, если ее дифференциал в силу уравнения равен нулю*

$$u'_x dx + u'_y dy = 0$$

$u'_x = P \quad u'_y = Q$

$$u \Rightarrow u(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^2 = 0$$

Определение 4. ***Геометрическая интерпритация уравнения:*** *Гладкая кривая, которая является графиком решения называется инетегральной кривой*

Классификация решений при их полноте

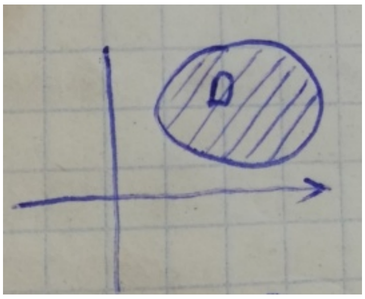
Определение 5. *Семейство решений уравнений, зависящий от постоянной $C \in \Gamma \subset R$ называется* ***общим решением в области D****, если $\forall C* \in \Gamma$ мы получаем решение уравнения.*

Общее решение может быть записано в одном из трех вариантов

$$y = y(x, c)$$

$$u = u(x, y, c) = 0$$

$$\begin{cases} x = x(t, c) \\ y = y(t, c) \end{cases}$$



Определение 6. *Всякое решение, получаемое из общего при конкретных значениях постоянной, называется* ***частным решением****.*

Определение 7. *Совокупность всех решений образуют* ***полное решение****.*

Пример 4. $dx + 2y\sqrt{x}dy = 0$
$2\sqrt{x} + y^2 - C = 0 \qquad C \gg 0$

Определение 8. *Если общее решение в нявной форме записано в виде: $u(x, y) = C$, то функция называется* ***общим интегралом уравнения****.*

$xdx + ydy = 0$
$x^2 + y^2 = C$
$x^2 + y^2$- общий интеграл.
Общий интеграл сохраняет постоянной значение вдоль интегральной кривой.

Фазовые точки будем подразделять на особые($P(\xi, \eta)$=$Q(\xi, \eta) = 0$), неособые ($P^2 + Q^2 \neq 0$)

Точка $M(\xi, \eta) \in D$

Определение 9. *Если через точку M проходит хотя бы одна инетгральная кривая, то это* ***точка существования****.*

Определение 10. *Точку M будем называть точкой* ***точкой единственности глобальной****, если существует интегральная криваяk k, проходящая через эту точку и все остальные кривые, которые проходят через эту точку, совпадают с k.*

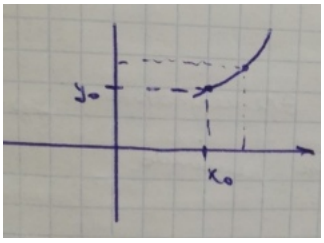
Определение 11. *Точка M -* ***точка единственности локальной****, если существует окрестность этой точки, где все интегральные кривые, проходящие через эту точку, совпадают в этой окрестности.*

Определение 12. *Точка M - называется* ***точкой ветвления****, если существует интегральные кривые k1,k2, проходящие через эту точку и имеющие общую касательную и отличные друг от друга в любой окретности этой точки.*

Определение 13. *Всякая точка ветвления является* ***точкой локальной неединственности****.*

31 Геометрический смысл уравнений 1-го порядка

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y) \quad y = y(x)$$



Правая часть задает поле направления

Метод изоклин(применяется для находления поля направлений)

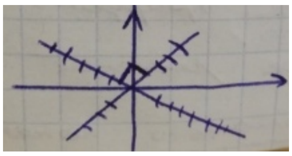
Изоклина - это линия вдоль которой поле иммет одно и то же направление.

Пример 1. $y' = -\dfrac{x}{y}$

$-\dfrac{x}{y} = C$

$y = -\dfrac{1}{C}x$

$y = kx$



32 Основные типы элементарных уравнений и подходы к их решению

Процесс построения решений называется интегрированием. Поэтому в ДУ этому придаётся более широкий смысл. Нахождение самих первообразных (вычисление интеграла) в ДУ называется квадратурой. Будем говорить, что уравнение интегрируемо в конечном виде, если его полное решение можно получить с помощью конечного числа операций.

Дифференциальное уравнение интегрируемо в квадратурах, если его полное решение можно построить с помощью конечного числа элементарных операций и квадратур.

$$Dx = \frac{\sin t}{t} \qquad x = \int \frac{\sin t}{t} dt + C.$$

Пример 1.

$$tx'' = x' \ln \frac{x'}{t};$$

$$1\,\text{шаг}: x' = y; \qquad 2\,\text{шаг}: ty' = y\ln\frac{y}{t}; \qquad 3\,\text{шаг}: y' = \frac{y}{t}\ln\frac{y}{t};$$

$$\frac{y}{t} = z \Rightarrow y = tz,\ y' = z + tz';$$

$$z + tz' = z\ln z;$$

$$tz' = z\ln z - z;$$

$$t\frac{dz}{dt} = z\ln z - z;$$

$$\frac{dz}{z\ln z - z} - \frac{dt}{t} = 0;$$

$$y = tz;\ y' = z + tz';$$

$$(y')^2 - 2y' + 1 = 0;\ (y' - 1)^2 = 0.$$

33 Процесс нахождения решений

Из элементарных уравнений будем выделять стандартные, для которых известны решения или мы можем их найти (линейное с постоянными коэффициентами, линейные системы с постоянными коэффициентаими 1-го порядка и т.д.).

При решении других уравнений мы в первую очередь пытаемся преобразовать их к стандартным. И, используя решение стандратных, пытаемся найти решение исходного (как в предыдущем примере).

Как и в случае алгебраических решений, возможны потери и появления новых решений.

Пример 1.

$$\sqrt{x'} = t \Rightarrow x' = t^2 \Rightarrow x = \frac{t^3}{3} + C.$$

В принципе, детальное обоснование каждого шага позволяет устранить проблемы, однако в большинстве случаев такой анализ может оказаться трудоёмким и громоздким.

Таким образом, построение решения ДУ состоит из 2 этапов:

1. нахождение общего решения;

2. анализ и корректировка решения.

Для решения будем прибегать к формальному интегрированию. Впоследствии будем учитсья корректировать найденные решения.

34 Уравнения с разделёнными переменными

Это наиболее простой тип дифференциальных уравнений

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0,\ P - I_x, Q - I_y$$

Полное решение этого уравнения записывается:

$$u(x, y) = \int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$

$$du = P(x)dx + Q(y)dy$$

Если для уравнения поставлена **задача Коши**, то

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

$$\int_{x_0}^{x} P(s)ds + \int_{y_0}^{y} Q(\tau)d\tau = 0$$

Пример 1. Имеется семейство линий на плоскости для любой точки. На этих линих выполняется: произведение квадрата расстояния до начала координат на абсциссу точки пересечения нормали с осью Ox, и это произведение равно кубу абсциссы самой точки.

35 Некоторые случаи преобразования уравнений

Рассмотрим уравнения в нормальной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Один из основных способов решения такого уравнения является умножение на функцию $\mu(x, y)$. В итоге, исходные уравнения преобразовываются к виду:

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0$$

Если $\mu(x, y)$ непрерывна, то решение исходного уравнения содержится в решении преобразованного. Обратное неверно (появляется проблема посторонних решений).
Если $\mu(x, y) \neq 0$ ни в одной точке, то решения исходного и полученного уравнений совпадают.

Упражнение 1.

$$xdx + ydy = 0,\ yxdx + y^2dy = 0$$

$$x^2 + y^2 = C,\ x^2 + y^2 = C,\ y = 0$$

Самая простая иллюстрация этого приема - это уравнение с разделяющимися переменными. **Уравнение с разделяющимися переменными** называется уравнение в нормальной форме, которое представимо в виде:

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0$$

$$\mu(x, y) = (P_2(y))^{-1}(Q_2(y))^{-1}$$

$\dfrac{P_1(x)}{Q_2(y)}dx + \dfrac{Q_1(x)}{P_2(y)}dy = 0$ - уравнение с разделенными переменными

36 Уравнения в полных дифференциалах

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,\ (x,y) \in D \subset R^2$$

Определение 1. *Если $\exists$ непрерывно дифференцируемая функция $u(x,y)$, что ее полный дифференциал $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, то это **уравнение в полных дифференицалах**.*

Пример 1.

$$2xdx + 2ydy = 0,\ \exists\ u(x,y) = x^2 + y^2$$

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0,\ \exists\ u(x,y) = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{4}$$

Теорема 1. *УПД, тогда его **общее решение** задается следующей формулой*

$$u(x,y) = C$$

Доказательство. *УПД $\Rightarrow \exists u(x,y),\ du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Rightarrow u(x,y) = C$* ■

Следствие 1. $(x_0, y_0) \in D$, *тогда* $u(x,y) = u(x_0,y_0), \quad y|_{x=x_0} = y_0$
Доказательство. *Пусть k - интегральная кривая, задающая решения*
Тогда $u(x(t), y(t)) = C_0, \quad u(x_0(t), y_0(t)) = C_0 \Rightarrow u(x,y) = u(x_0,y_0) \quad x = x(t), \quad y = y(t)$ ■

Пример 2.

$$2ydx + (x^2 - 2y)dy = 0$$

$$y(x^2 - y) = C$$

$$(0;0) \text{ - точка ветвления}$$

Особые точки требуют отдельного внимания

Теорема 2. *Начальная задача $y|_{x=x_0} = y_0$, причем $(x_0;y_0)$-не особая, будет однозначно разрешима.*
Доказательство. *Согласно следствию, решение начальной задачи задается формулой: $u(x,y) = u(x_0,y_0)$, поэтому однозначно разрешима, эквивалентна существованию единственности $y = y(x), x = x(y)$, т.е. функция $y(x)$ является неявным решением этого уравнения, поскольку $(x_0;y_0)$ не особая точка $|P(x_0,y_0)| + |Q(x_0,y_0)| = 0$, т.к. уравнение в полных дифференциалах.*
$P = u'_x, \;\; Q = u'_y$
$|u'_x(x_0,y_0)| + |u'_y(x_0,y_0)| \neq 0$
хотя бы 1 из них не нуль. Пусть $u'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Вернемся к соотношению
$u(x,y) - u(x_0,y_0) = 0$ *или* $F(x,y) = 0$
$F(x,y) = 0, \quad F'(y) \neq 0 \Rightarrow \exists y(x)$
Значит, по теореме о неявной функции: существует единственная функция $y(x)$ в окрестности. Таким образом показано, что в окрестности не особой точки задача однозначно разрешима ■

Вопрос 1. Как распознать уравнение полного дифференциала другими средстваи?

Теорема 3. *Пусть функции P и Q непрерывно дифференцируемы в окрестности D. Тогда уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ будет УПД $\Rightarrow$ тогда выполняются условия Эйлера $(P'_y = Q'_x)\forall$ точки области D. В таком случае общее решение задается формулой:*

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Доказательство. $\Rightarrow$) *Пусть УПД, то надо показать, что выполняется условие Эйлера, т.е., раз это УПД $\Rightarrow \exists u(x,y)$, что $u'_x = P, \quad u'_y = Q$. Т.к. и дифференцируема, возьмем еще раз смешанные производные:*
$u''_{xy} = P'_y, \quad u''_{yx} = Q'_x$
$\Leftarrow)P'_y = Q'_x$ *- условие Эйлера выполняется. Возьмем функцию $\omega = Pdx + Qdy$*
Покажем, что ω - полный дифференциал некоторой функции.
$u = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt$
$u'_x = P(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} P'_y(x,t)dt = P(x,y_0) + P(x,y) - P(x,y_0) = P(x,y)$
$u'_y = ... = Q(x,y)$
$\Rightarrow$ *функция и является полным дифференциалом функции ω* ■

37 Способы решения уравнений полных дифференциалов

1способ
Основан на использовании КРИ-2. Т.к. выполняется условие Эйлера $\Rightarrow$ интеграл не зависит от пути интегрирования.

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

Формула для решения **начальной задачи**:

$$u(x,y) = u(x_0,y_0), \ u(x,y,x_0,y_0) = 0.$$

Пример 1. $2xy^3dx + (5y^4 + 3x^2y^2 + 1)dy = 0$

2способ (без использования условия Эйлера)
Надо найти функцию $u(x,y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}$$

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \phi(y)$$

$$\left(\int P(x,y)dx + \phi(y)\right)'_y = Q(x,y)$$

$$\phi'(y) = Q(x,y) - \left(\int P(x,y)dx\right)'_y$$

$$\phi(y) = \int \left(Q(x,y) - \left(\int P(x,y)dx\right)'_y\right) dy$$

38 Интегрирующий множитель

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,\ (x,y) \in D,\ P'_y \neq Q'_x$$

Определение 1. $\mu(x,y) \neq 0$, *которая задана на некотором подмножестве из* D_1 *(*$D_1 \subset D$*) называется* ***интегрирующим множителем****, если при домножении на эту функцию уравнение становится в полных дифференциалах.*

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0 - \text{УПД}$$

Будем далее считать, что функции P и Q непрерывно дифференцируемые.

Теорема 1. $\mu(x,y)$*, непрерывно дифференцируемая в области D, является интегрирующим множителем* $\Leftrightarrow$ *она удовлетворяет уравнению*

$$\mu(x,y) = \frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}Q - \frac{\partial\mu}{\partial y}P}{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}\ (1)$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ - УПД. Значит, для него выполняется условие Эйлера.

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial\mu}{\partial x}Q - \frac{\partial\mu}{\partial y}P$$

$$\mu(x,y) = \frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}Q - \frac{\partial\mu}{\partial y}P}{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

$\Leftarrow$) Если

$$\mu(x,y) = \frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}Q - \frac{\partial\mu}{\partial y}P}{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial\mu}{\partial x}Q - \frac{\partial\mu}{\partial y}P$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Значит, выполняется условие Эйлера $\Rightarrow$ это УПД $\mu P dx + \mu Q dy = 0$. ■

Следствие 1. *Если интегрирующий множитель зависит только от одной переменной* ($\mu = \mu(x)$, $Q \neq 0$)*, то* $-\frac{Q}{Q'_x - P'_y}$ *не зависит от* y.

Доказательство. $\Rightarrow$) По предыдущей теореме интегрирующий множитель удовлетворяет уравнению (1). Получим

$$\mu = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial x} Q}{P'_y - Q'_x}$$

$$\frac{\mu}{\frac{\partial \mu}{\partial x}} = \frac{Q}{P'_y - Q'_x}$$

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} ln|\mu| = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}$$

$$ln|\mu| = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx$$

$$\mu = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx}$$

■

Упражнение 1. Рассмотреть случай $\mu = \mu(y)$.

Замечание 1. *В той части области* D_1*, где* $\mu(x, y) = 0$ *могут появиться дополнительные решения.*

Упражнение 2. $(2xy^2 - 3y^2)dx + (7 - 3y^2)dy = 0$, $\mu = \frac{1}{y^2}$.

Упражнение 3. $(3y^2 - x)dx + (2y^3 - 6xy)dy = 0$, $\mu \sim (x^2 + y^2)^2$.

39 Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение 1. ***Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка*** *в нормальной форме имеет вид*

$$(p(x)y + q(x))dx + r(x)dy = 0.$$

Это уравнение может быть записано в эквивалентных формах:

$$r(x)y' + p(x)y + q(x) = 0;$$

$$y' + \frac{p(x)y}{r(x)} + \frac{q(x)}{r(x)} = 0.$$

Коэффициенты p *и* q *непрерывны, а коэффициент* r *непрерывно дифференцируемый и обращается в ноль только в конечных точках.*

1 способ (использование интегрирующего множителя)
$\mu = \mu(x)$. Домножим на интегрирующий множитель.

$$(\mu p y + q\mu)dx + \mu r dy = 0;$$

$$\mu p + 0 = -\mu'_x r - \mu r'_y = 0;$$

$$\mu' = \frac{\mu p - \mu r'}{r} = \frac{\mu(p - r')}{r};$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{p - r'}{r} = \frac{p}{r} - \frac{r'}{r} \Rightarrow (\ln(\mu))' = -(\ln(r))' + \ln(e^{\frac{p}{r}}) \Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{r(x)} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau}$$

$$dx\left(\frac{1}{r(x)} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau} p(x) y\right) + \frac{1}{r(x)} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau} q(x)dx + e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau} = 0;$$

$$\int_{x_0}^{x} dt\left(\frac{1}{r(t)} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau} p(t) y\right) + \frac{1}{r(x)} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau} q(t)dt + \int_{y_0}^{y} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau} dt = C;$$

$$y_0 = 0; \int_{x_0}^{x} \frac{1}{r(t)} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau} q(t)dt + y e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau} = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau}\left(C - \int_{x_0}^{x} \frac{1}{r(t)} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau} q(t)dt\right).$$

Замечание 1. *Если стоит задача Коши, то* $y|_{x=x_0} = y_0$ *его решение находится по той же самой формуле* $y = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau}\left(y_0 - \int_{x_0}^{x} \frac{1}{r(t)} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau} q(t)dt\right)$.

Замечание 2. *Если уравнение разрешимо относительно проивзодной* $(y' + P(x)y = Q(x))$, *то общее решение находится по следующей формуле:* $P(x)\frac{p}{r}$, $Q(x) = \frac{q}{r}$

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}\left(C - \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} Q(t)dt\right).$$

2 способ (метод Лагранжа)
Сначала рассматриваем соответствующее однородное уравнение ($q = 0$):
1) $q(x) = 0 \Rightarrow p(x)ydx + r(x)dy = 0$.
Имеем УРП:

$$\frac{p(x)}{q(x)}dx + \frac{1}{y}dy = 0;$$

$$\ln|y| + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau = \ln C;$$

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau}.$$

Для нахождения частного решения выполним вариацию произвольной постоянной.

$$y(x) = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{p(\tau)}{r(\tau)} d\tau};$$

$$dy = \left[C'(x)e^{-\int_{x_0}^x \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau} + C(x)e^{-\int_{x_0}^x \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau} \cdot \left(-\frac{p(x)}{r(x)}\right)\right] dx.$$

2)

$$\left(p(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^x \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau} + q(x)dx + r(x)\left[C'(x)e^{-\int_{x_0}^x \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau} + C(x)e^{-\int_{x_0}^x \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau} \cdot \left(-\frac{p(x)}{r(x)}\right)\right]\right) dx = 0;$$

$$q(x) + r(x)C'(x)e^{-\int_{x_0}^x \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau} = \widetilde{C};$$

$$C'(x) = -\frac{q(x)}{r(x)}e^{\int_{x_0}^x \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau} + C_1;$$

$$C(x) = \int \left(-\frac{q(x)}{r(x)}e^{\int_{x_0}^x \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau} + C_1\right) dx;$$

$$y = \left(\int -\left(\frac{q(x)}{r(x)}e^{\int_{x_0}^x \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau} + C_1\right) dx\right) e^{\int_{x_0}^x \frac{p(\tau)}{r(\tau)}}.$$

Подставим найденное $C(x)$, получим решение.

3 способ (метод Бернулли)

$$y = u(x)v(x);$$

$$dy = u'_x dx v(x) + u(x)v'_x dx;$$

$$p(x)u(x)v(x) + q(x) + r(x)(u'_x v(x) + u(x)v'_x) = 0;$$

$$puv + q + ru'v + ruv' = 0;$$

$$ru'v + (pv + rv')u + q = 0;$$

$$pv + rv' = 0 \Rightarrow v = e^{\int \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau};$$

$$\frac{v'}{v} = -\frac{p}{r};$$

$$u' = -\frac{q}{rv} = -\frac{q(x)}{r(x)}e^{\int \frac{p(x)}{r(x)}dx} \Rightarrow u(x) = -\int \frac{q(x)}{r(x)}e^{\int \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau}dx + C;$$

$$y(x) = e^{\int \frac{p(x)}{r(x)}dx}\left(C - \int \frac{q(x)}{r(x)}e^{\int \frac{p(\tau)}{r(\tau)}d\tau}dx\right).$$

Замечание 3. *В некоторых случаях уравнение может быть нелинейным по y, но линейным по x. Например, $\widetilde{r}(y)dx + (\widetilde{p}(y)x - \widetilde{q}(y))dy = 0$.*

Пример 1.

$$dx + (2e^y + x)dy = 0 \Rightarrow x' + x = -2e^y \Rightarrow \frac{dx}{dy} + 2e^y + x = 0;\ x = x(y).$$

Найти убывающую непрерывно дифференцируемую функцию, график которой лежит в первой четверти, проходит через точку $(1, 1)$, и площадь треугольника, образованного касательной, осью Ox и радиус-вектором к точке касания, постоянна и равна 1.

40 Замена переменных в ДУ

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,\ (x,y) \in D$$

$$x = \phi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ (u,v) \in D_1$$

Определение 1. *Биективное отображение $D_1 \to D$ называется* ***диффеоморфизмом****, если выполняется следующее условие*

$$J(u,v) = \frac{D(\phi,\psi)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0\ \forall u,v$$

Свойства:

1. Множество D - область.
2. $J : D \to D_1$ тоже является диффеоморфизмом.
3. Интегральные кривые области D_1 переходят в интегральную кривую области D.
4. Угол между пересекающимися соответствующимися интегральными кривыми сохраняется $\Rightarrow$ Любая интегральная кривая исходного уравнения переходит в интегральную кривую преобразованного уравнения.

Пример 1.

$$(y+x)dx + (y-x)dy = 0$$

$$\left(\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{y}{x} - 1\right)dy = 0$$

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ x = v \end{cases} \quad \begin{cases} y = ux = uv \\ x = v \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ v & u \end{vmatrix} = -v$$

$$(uv - v)(udv - vdu) = 0$$

$$uv(u-1)dv + v^2(u-1)du = 0$$

$$\frac{dv}{v} + \frac{u+1}{u^2+1}du = 0$$

41 Уравнения, преобразуемые к линейным с помощью замены переменных

1) Однородные уравнения

Определение 1. *Уравнение* ***однородное****, если функция p и q являются однородными одной и той же степени, т.е.*

$$P(xt, yt) = t^k P(x, y), Q(xt, yt) = t^k Q(x, y), \quad k \neq 0, \quad \forall \quad x, y, dx, dy \in D$$

Пример 1. $x^2 + y^2 = 0$

Для решения введем замену (стационарную)

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow dy = xdu + udx$$

$$P(x, ux)dx + Q(x, ux)(xdu + udx) = 0$$

$$(P(x, ux) + Q(x, ux)u)dx + Q(x, ux)xdu = 0$$

$$x^k(P(1, u) + Q(1, u)u)dx + x^{k+1}Q(1, u)du = 0$$

$$(P(1, u) + Q(1, u)u)dx + xQ(1, u)du = 0 \text{ - линейна относительно x.}$$

Пример 2. Найти семейство линий Iой четверти, что Δ, образованная: касательной, отрезком оси Оу, отсекаемым этой касательной, и радиус-вектором в точку касания образуют равнобедренный треугольник.

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$A(x_A; 0) \Rightarrow OA = |y_0 - y_0' x_0| = y_A$$

$$|AM| = \sqrt{1 + (y_0')^2}$$

$$y^2 - 2xy \cdot y' - x^2 = 0$$

2) Уравнения, приводящие к однородным.

$$f_1(a_1x + b_1y + c_1)dx + f_2(a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

или

$$y' = -\frac{f_1(...)}{f_2(...)} \sim F(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2})$$

а) Рассмотрим сначала вырожденный случай:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_2x + b_2y = k(a_1x + b_1y)$$

$$f_1(a_1x + d_1y + c_1)dx + f_2(a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

$$f_1(a_1x + d_1y + c_1)dx + f_2(k(a_1x + b_1y) + c_2)dy = 0$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = u \\ x = v \end{cases} \text{ - Такая замена является диффеоморфизмом}$$

$$f_1(u + c_1)dv + f_2(ku + c_2)dy = \frac{1}{b_1}(du - a_1dx) = 0$$

Б) Невырожденный случай

$$f_1(a_1x + b_1y + c_1)dx + f_2(a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases} (\alpha, \beta) \text{ - решение}$$

Введем замену:

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$f_1(a_1(u + \alpha) + b_1(v + \beta) + c_1)d(u + \alpha) + f_2(a_2(u + a) + b_2(v + \beta) + c_2)d(v + \beta) = 0$$

$$f_1(a_1u + b_1v + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1))du + f_2(a_2u + b_2v + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2))dv = 0$$

Учитывая, что (α, β) - решение, $f_2(a_2u + b_2v)du + f_2(a_2u + b_2v)dv = 0$
Полученное уравнение является однородным. Алгоритм нахождения его решения $H(u, v, C) = 0$ приведен нами ранее. Возвращаясь к переменным x и y имеем решение исходного уравнения $H(x - \alpha, y - \beta, C) = 0$.

Пример 3.

$$(y + x - 1)dy + (2x - y + 3)dx = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 1 = 0 \\ 2\alpha - \beta + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{5}{3}$$

$$x = u - \frac{2}{3}, \quad y = u + \frac{5}{3}$$

$$(u + v)dv + (2u - v)du = 0 \text{ - однородное.}$$

42 Уравнение Бернулли

Определение 1. *Рассмотрим дифференциальное уравнение в нормальной форме вида*

$$(p(x)y + q(x)y^m)dx + r(x)dy = 0,$$

коэффициенты которого определены и непрерывны на некотором промежутке I вещественной прямой, причём функция $r(x)$ имеет конечное число нуле, m - некоторое рациональное число. Такое уравнение называется ***уравнением Бернулли (УБ) по переменной y****. Оно может быть записано в эквивалентном виде:*

$$r(x)y^{'} + p(x)y = q(x)y^m$$

Упражнение 1. Выяснить возможность интегрирования данного уравнения в случае m=0.

Упражнение 2. Выяснить возможность интегрирования данного уравнения в случае m=1.

Далее будем считать, что m отлично от нуля и единицы. Выполним замену переменной y по формуле:

$$u = y^{1-m}$$

Отсюда предварительно найдём $y = u^{\frac{1}{1-m}}, dy = \frac{1}{1-m}u^{\frac{1}{1-m}-1}du$
Подставляя эти величины в УБ, имеем

$$(p(x)u^{\frac{1}{1-m}} + q(x)(u^{\frac{1}{1-m}})^m)dx + r(x)\frac{1}{1-m}u^{\frac{1}{1-m}-1}du = 0,$$

откуда после элементарных преобразований получаем

$$u^{\frac{1}{1-m}-1}(p(x)u + q(x))dx + r(x)\frac{1}{1-m}du = 0$$

Из полученного равенства находим, что

$$u = 0 \quad \text{и} \quad (p(x)u + q(x))dx + r(x)\frac{1}{1-m}du = 0$$

Первое из полученных уравнений в силу замены даёт тривиальное решение исходного УБ

$$y = y(x) = 0,$$

второе является линейным относительно переменной x. Для нахождения его решения $u = u(x)$ применяем любой из способов, изученных нами для линейных уравнений. Затем, возвращаясь к исходным переменным, получаем ещё одно решение УБ $y = u^{\frac{1}{1-m}}(x)$.

Утверждение 1. *УБ приводится к линеному уравнению. Решением УБ является совокупность функций*

$$y = y(x) = 0,\ y = u^{\frac{1}{1-m}}(x)$$

Замечание 1. *В некоторых случаях дифференциальное уравнение может не быть УБ по переменной y, но являться УБ по переменной x.*

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$ydx - (x^2 lny - x)dy = 0$$

Нетрудно заметить, что в силу наличия логарифма от y данное уравнение не может быть УБ по этой переменной. Запишем его в виде:

$$yx^{'} - x = lnyx^2.$$

Как видим, это УБ относительно переменной x, где m=2. Одно из его решений находим сразу $x = x(y) = 0$. Далее, считая, что $x \neq 0$, в дополнение к рассмотренному выше подходу, при решении конкретных уравнений представляется более удобным предварительно разделить обе части уравнения на x^2.

$$\frac{1}{x^2}yx^{'} - \frac{1}{x} = lny.$$

Далее выполним замену переменной x

$$u = x^{1-m} = \frac{1}{x},$$

т.е

$$x = \frac{1}{u}, \quad x^{'} = -\frac{1}{u^2}u^{'}.$$

Теперь понятен смысл деления обеих частей уравнения, т.к

$$\frac{1}{x^2} = u^2, \quad x^{'} = -x^2u^{'}, \quad \frac{1}{x^2}yx^{'} = -yu^{'}.$$

Тогда уравнение примет вид

$$-yu^{'} - u = lny$$

или

$$u^{'} + \frac{1}{y}u = -\frac{lny}{y}.$$

Упражнение 3. Определить тип полученного д.у и завершить решение примера.

43 Уравнение Рикатти

Определение 1. *Рассмотрим дифференциальное уравнение в нормальной форме вида*

$$(p(x)y^2 + q(x)y + r(x))dx + s(x)dy = 0,$$

коэффиценты которого определены и неприрывны на некотором множетсве вещественной прямой. Такое уравнение называется ***уравнением Риккати*** *(УР). Иногда его записывают в виде, разрешенном относительно производной:*

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

Упражнение 1. Являются ли приведенные записи УР равносильными?

Уравнение Риккати в общем случае не является элементарным. Более того, оно не является элементарным даже в простейшем, так называемом, каноническом виде

$$y' = \pm y^2 + R(x)$$

Вопрос 1. Какое ДУ называется элементарным?

Тем не менее, покажем как приводить УР (при некоторых ограничениях) к каноническому виду.

Шаг 1. (коэффицент при старшей степени равен ± 1)

Введем замену переменной

$$y = \alpha(x)u,$$

где $\alpha(x)$ - некоторая функция, откуда получаем $y' = \alpha' u + \alpha u'$. Тогда УР в разрешенном относительно производной виде преобразуется к уравнению

$$u' = P(x)\alpha(x)u^2 + \frac{Q(x) - \alpha'(x)}{\alpha(x)}u + \frac{R(x)}{\alpha(x)}.$$

Упражнение 2. Проверить промежуточные выкладки этого фрагмента самостоятельно.

Выбор функции

$$\alpha(x) = \pm\frac{1}{P(x)}$$

позволяет записать последнее уравнение в требуемом для нас на данном шаге виде

$$u' = \pm u^2 + \widetilde{Q}(x)u + \widetilde{R}(x), \text{где } \widetilde{Q}(x) = \frac{Q(x) - \alpha'(x)}{\alpha(x)}, \widetilde{R}(x) = \frac{R(x)}{\alpha(x)}$$

Упражнение 3. Проверить рассуждение шага 1 для уравнение

$$y' = xy^2 - \frac{2x+1}{x}y + \frac{1}{x}$$

Шаг 2. (отсутствие линейного члена)

Выполним замену переменной

$$y = v + \beta(x),$$

где $\beta(x)$ - некоторая функция, откуда получаем $y' + \beta'(x)$. Тогда УР в разрешенном относительно производной виде преобразуется к уравнению

$$v' + \beta'(x) = P(x)(v(x) + \beta(x))^2 + Q(x)(v(x) + \beta(x)) + R(x)$$

или

$$v' = P(x)v^2 + (Q(x) + 2P(x)\beta(x))v + R(x) + P(x)\beta^2(x) - Q(x)\beta(x) - \beta'(x).$$

Выбор функции

$$\beta(x) = -\frac{Q(x)}{2P(x)}$$

позволяет записать последнее уравнение в требуемом для нас на данном шаге виде

$$v' = P(x)v^2 + R(x) + P(x)\beta^2(x) - Q(x)\beta(x) - \beta'(x)$$

Вопрос 2. Какие ограничения следует наложить на коэффиценты УР для корректности шага 1 и шага 2? Как это связано с упражнением 1?

Упражнение 4. Проверить рассуждения шага 2 для уравнения

$$y' = y^2 - 2x^3y + x^4 + 2x + 1.$$

Вывод: комбинация шагов 1 и 2 приводит УР (для $P(x) \neq 0$) к каноническому виду.

Некоторые случаи интегрируемости УР

Теорема 1. *Если известно одно частное решение УР, то полное семейство его решений строится по меньше мере в квадратурах.*

Доказательство. Пусть $y = y_0(x)$ - некотрое частное решение УР, т.е. выполняется тождество

$$y_0'(x) \equiv P(x)y_0^2(x) + Q(x)y_0(x) + R(x).$$

Выполним замену переменной

$$y = u + y_0(x).$$

Получаем, что $y' = u' + y_0'(x)$. Тогда УР в разрешенном относительно производной виде преобразуется к уравнению

$$u' + y_0'(x) = P(x)(u + y_0(x))^2 + Q(x)(u + y_0(x)) + R(x)$$

или

$$u' = -y_0^2(x) + P(x)y_0^2(x) + Q(x)y_0(x) + R(x) + (Q(x) + 2P(x)y_0^2(x))u + R(x) + P(x)u^2$$

Так как функция $y_0(x)$ является решением УР, то последнее уравнение примет вид

$$u' - (Q(x) + 2P(x)y_0^2(x))u = P(x)u^2$$

В итоге имеем УБ при $m = 2$. Как установлено нами ранее, это уравнение интегрируется в квадратурах, т.е. существует его решение $u = u(x)$. Тогда полное решение УР найдем с учетом замены в виде $y = u(x) + y_0(x)$. ■

Пример 1. Возьмем УР вида

$$y' = y^2 + xy + x - 1.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что это уравнение имеет частное решение $y_0 = 1$. Замена переменной $y = u + 1$ приводит данное УР к уравнению

$$u' = (u + 1)^2 + x(u + 1) + x - 1 \Rightarrow u' + (2 - x)u = u^2$$

Полученное уравнение является УБ при $m = 2$, что, с учетом ранее изученного материала, позволяет завершить решение самостоятельно.

Упражнение 5. Пусть $y = y_1(x)$ - некоторое частное решение УР. Пользуясь алгоритмом доказательства теоремы выполнить в КР замену зависимой переменной

$$y = u + \frac{1}{y_1(x)}$$

и установить вид полученного уравнения.

Как видим, знание частного решения УР позволяет решить это уравнение. Однако в общем случае вопрос поиска частного решения является открытым. Тем не менее в некоторых случаях это удается сделать.

Теорема 2. *Пусть алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами*

$$At^2 + (B+1)t + C = 0$$

относительно переменной t допускает хотя бы один действительный корень $t = t_1$ (т.е. его дискриминант неотрицателен). Тогда УР вида

$$y' = Ay^2 + B\frac{y}{x} + C\frac{1}{x^2}$$

имеет частное решение

$$y_1(x) = \frac{t_1}{x}$$

Доказательство. Выполним непосредственную проверку требуемого факта. Предварительно найдем производную частного решения

$$(y_1(x))' = (\frac{t_1}{x})' = -\frac{t_1}{x^2}$$

и подставим ее в функцию $y_1(x)$ в данное УР

$$-\frac{t_1}{x^2} = A(\frac{t_1}{x})^2 y^2 + B(\frac{t_1}{x})\frac{1}{x} + C\frac{1}{x^2}$$

откуда после приведения подобных слагаемых получаем

$$At_1^2 + (B+1)t_1 + C = 0,$$

т.е. функция $\frac{t_1}{x}$ является частным решением. ■

Упражнение 6. Записать полное решение данного в теореме 2 УР.

В отдельных случаях удается преобразовать УР к известным уравнениям.

Теорема 3. *УР вида*

$$y' = A\frac{y^2}{x^2} + 0.5\frac{y}{x} + C$$

заменой зависимой переменной

$$y = u\sqrt{x}$$

приводится к УРП.

Доказательство. Выполним указанную замену переменных, где

$$y' = u'\sqrt{x} + u\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Тогда данное УР имеет вид

$$u'\sqrt{x} + u\frac{1}{2\sqrt{x}} = A\frac{u\sqrt{x}}{x^2} + 0.5\frac{u\sqrt{x}}{x} + C,$$

откуда после несложных преобразования получаем УРП

$$\sqrt{x}du - A(u^2 + C)dx = 0,$$

или

$$\frac{1}{A(u^2 + C)}du - \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0$$

что, с одной стороны завершает доказательство, а с другой - объясняет смысл введенной аббревиатуры. ■

Вопрос 3. Является ли значение коэффицента A принципиальным для структуры решения?

Упражнение 7. Исследовать вид решения полученного УРП в зависимости от коэффицента C.

Укажем еще один вид УР, которое можно преобразовать к уже известным уравнениям.

Теорема 4. *УР вида*

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x^2}$$

заменой зависимой переменной

$$y = \frac{1}{u}$$

приводится к ОУ.

Доказательство. По аналогии с предыдущей теоремой, т.е. непосредственной подстановкой, предполагается провести самостоятельно в качестве упражнения 8. ■

Замечание 1. *Вполне естественно, что приведенный перечень некоторыз случаев интегрируемости УР не является исчерпывающим.*

Пример 2. Пусть дано следующее уравнение

$$y' = y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Почти очевидно, что это УР в весьма схожем случае, указанном в теореме 2, в котором $A = B = C = 1$. Для того, чтобы полностью убедиться в этом, составим алгебраическое уравнение вида

$$At^2 + (B + 1)t + C = t^2 + 2t + 1 = 0$$

Уравнение имеет действительный корень $t = -1$. Тогда функция $y_1(x) = \frac{1}{x}$ будет являться частным решением данного УР. Следовательно, согласно теореме 1, это уравнение интегрируется в квадратурах. Для подтверждения этого необходимо выполнить замену зависимой переменной в соответствии с доказательством.

44 Тема «Исследование уравнений 1-го порядка в нормальной дифференциальной форме»

Будем рассматривать дифференциальное уравнение 1-го порядка в нормальной дифференциальной форме

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (x,y) \in D \subset R^2.$$

Проведем исследование решений этого уравнения

I.Побочные решения

Допустим, что в результате некоторых формальных операций над данным уравнением получено соотношение

$$\Phi(x,y,C) = 0, \qquad C\text{–}const,$$

которое, возможно, описывает общее решение уравнения. При этом, естественно, возникает вопрос: любая ли функция $y = y(x)$, удовлетворяющая этому соотношению, будет решением исходного уравнения (интегральной кривой)? Другими словами, этот вопрос означает возможность наличия побочных (посторонних) решений. Поэтому необходимо выполнить корректировку полученного решения в направлении исключения посторонних решений. Укажем некоторые приемы, позволяющие это сделать.

Пусть $G \subset OxyC$ – множество задания функции трех переменных $\Phi(x,y,C)$ при некоторых допустимых значениях C, а $D_{\text{ф}}$ – проекция множества G на плоскость OXY.

Вопрос 1. Каким может быть взаимное расположение множеств D и $D_{\text{ф}}$?

Вопрос 2. Каково соотношение решения ДУ и описываемой им интегральной кривой?

Случай i1 Пусть какие-то интегральные кривые, описываемые соотношением $\Phi(x,y,C) = 0$, при некоторых допустимых значениях постоянной C, не лежат полностью в пересечении множеств $D \cap D_{\text{ф}}$. Тогда эти интегральные кривые отвечают посторонним решениям.

Упражнение 1. Аргументировать (пояснить, доказать) этот факт самостоятельно. Демонстрацией такого случая служит:

Пример 1.

$$\frac{x}{\sqrt{y}}dx + \sqrt{y}dy = 0$$

Упражнение 2. Определить тип этого уравнения. Показать, что в результате его преобразования и интегрирования можно получить соотношение, возможно, являющееся общим решением

$$x^2 + y^2 - C = 0, \qquad C - const$$

Этим соотношением описываются три вида кривых: семейство окружностей и семейства полуокружностей (верхних и нижних).

Упражнение 3. Выписать для этого уравнения множества G, D, $D_{\text{ф}}$, $D \cap D_{\text{ф}}$ и на основании их взаимного расположения показать, что семейства окружностей и полуокружностей нижних отвечают посторонним решениям. Сделать схематический чертеж.

Таким образом, истинным решением данного ДУ является семейство верхних полуокружностей $x^2 + y^2 - C = 0,\ C > 0,\ y > 0$.

Вопрос 3. Можно ли взять $C = 0$?

Случай i2 В некоторых случаях возможно расположение кривых, отвечающих посторонним решениям из соотношения $\Phi(x, y, C) = 0,\ C - const,$, целиком во множестве $D \cap D_{\text{ф}}$ при некотором $C = C_0$. Тогда следует проверить выполнение условий.

$$\Phi(x, y, C_0) = 0$$
$$det \begin{pmatrix} P(x, y) & Q(x, y) \\ \Phi'_x(x, y, C_0) & \Phi'_y(x, y, C_0) \end{pmatrix} = 0$$

Интегральные кривые, которые удовлетворяют первому из них, но не удовлетворяют второму – отвечают побочным решениям.

Аргументация. Этот факт вытекает из следующих рассуждений. Пусть $x = x(t)$,$y = y(t),\ t \in I$ – параметрическое представления нетривиального решения ДУ. Тогда при любом указанном t имеет место равенство

$$\Phi(x(t), y(t), C_0) = 0.$$

Продифференцируем это равенство

$$\Phi'_x(x(t), y(t), C_0)dx(t) + \Phi'_y(x(t), y(t), C_0)dy(t) = 0.$$

С другой стороны, поскольку $x = x(t),\ y = y(t)\ t \in I$ – решение исходного ДУ, то выполняется равенство

$$P(x(t), y(t))dx(t) + Q(x(t), y(t))dy(t) = 0.$$

В итоге получаем $x = x(t),\ y = y(t)\ t \in I$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} P(x(t),y(t))dx(t) + Q(x(t),y(t))dy(t) = 0. \\ \Phi'_x(x(t),y(t),C_0)dx(t) + \Phi'_y(x(t),y(t),C_0)dy(t) = 0. \end{cases}$$

которая является линейной однородной относительно дифференциалов решения с определителем

$$det \begin{pmatrix} P(x,y) & Q(x,y) \\ \Phi'_x(x,y,C_0) & \Phi'_y(x,y,C_0) \end{pmatrix}$$

Поскольку эта система имеет нетривиальное решение, т.е

$$|dx(t)| + |dy(t)| \neq 0$$

то ее определитель должен быть равен нулю, что и следовало показать.

Пример 2. Возьмем ДУ

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} + dx = 0, \qquad y > 0.$$

Упражнение 4. Определить тип ДУ и указать способ нахождения его решения.

С учетом выполнения упражнения 4 формальными операциями ($P(x,y) = 1,\ Q(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$) находим

$$x + \sqrt{y} = C, \ \ C - const$$

откуда получаем

$$y = (C - x)^2 \quad \text{или} \quad y = (x - C)^2$$

Последние два равенства задают соответственно два семейства кривых

$$\sqrt{y} = x - C \quad \text{или} \quad \sqrt{y} = x - C(**)$$

Проверим условия для семейства (*). Предварительно запишем его в виде

$$\Phi_1(x,y,C) = x + \sqrt{y} - C = 0$$

и вычислим определитель

$$det \begin{pmatrix} P(x,y) & Q(x,y) \\ \Phi'_1x(x,y,C_0) & \Phi'_1y(x,y,C_0) \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix} = 0.$$

Условия выполняются. Значит, это семейство задает истинное решение.

Упражнение 5. Исследовать семейство (**).

II. Особые решения

Для дальнейшего рассмотрения следует сначала ответить на

Вопрос 4. Какие точки решения ДУ называются точками существования, единственности, неединственности, ветвления ?

Определение 1. *Решение ДУ, которому соответствует график, состоящий из точек ветвления, называется* ***особым***

Пример 3. Возьмем ДУ

$$2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0.$$

Для него множество D – горизонтальная полоса плоскости от -1 до $+1$. Если $y \neq \pm 1$,то уравнение преобразуется к виду

$$2xdx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$$

откуда находим его общее решение

$$x^2 - \sqrt{1-y^2} = C,$$

которое будет общим и для исходного уравнения

Упражнение 6. Исследовать оставшийся случай $y = \pm 1$, т.е. будет ли это решением.

Вопрос 5. Можно ли получить найденное в упр. 5 решение $y = \pm 1$ из общего решения при каких либо значениях произвольной постоянной?

Изучим поведение графиков около прямой $y = \pm 1$. Возьмем на ней произвольную точку $(x_0, +1)$. Угловой коэффициент этой прямой во всех таких точках равен нулю. Найдем угловой коэффициент интегральной кривой, определяемой из общего решения, в точке $(x_0, +1)$ Для этого (памятуя о геом. смысле производной) выразим производную из данного ДУ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Эта производная в точке $(x_0, +1)$ равна нулю.

Таким образом, через точку $(x_0, +1)$ проходит два решения с одинаковой касательной, т.е. это точка ветвления решения. В силу произвольного выбора такой точки, все остальные точки прямой $y = \pm 1$ будут также точками ветвления. Это означает, согласно определению, что решение $y = \pm 1$ является особым, т.к состоит из точек ветвления.

Упражнение 7. Аналогично исследовать случай $y = -1$

III.Огибающая семейства решений.

Пусть $\Phi(x, y, C) = 0,\ C - const$ – однопараметрическое семейство кривых.

Определение 2. ***Огибающей*** *данного семейства называется некоторая кривая* $y = \varphi(x)$*, которая в каждой своей точке касается одной из кривой семейства, причем в разных точках – разных кривых.*

Определение 3. *Геометрическое место точек плоскости, удовлетворяющее соотношениям*

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \Phi'_C(x, y, C) = 0$$

называется ***дискриминантной кривой*** *данного семейства* $\Phi(x, y, C) = 0$.

Сформулируем очевидное

Утверждение 1. *Дискриминантная кривая семейства включает в себя огибающую, а также, возможно, особые точки (т.е. точки, в которых* $\Phi'_x = \Phi'_y = 0$*)*

Следствие 1. *Дискриминантная кривая будет огибающей, если на ней нет особых точек.*

Пример 4. Возьмем семейство эллипсов

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(1-c)^2} = 1$$

где c из интервала $(0, 1)$ Найдем дискриминантную кривую этого семейства. Согласно определению, составим соотношения

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{(1-c)^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{c^3} + \frac{y^2}{(1-c)^3} = 0 \quad (2).$$

Сначала из второго найдем

$$c = \frac{x^{2/3}}{x^{2/3} + x^{2/3}}$$

и подставляя в первое после преобразований получаем дискриминантную кривую

$$x^{2/3} + x^{2/3} = 1$$

Вопрос 6. Выяснить название полученной кривой.

Вопрос 7. Будет ли она огибающей?

Вопрос 8. Всякое ли однопараметрическое семейство имеет дискриминантную кривую?

(hint: в случае затруднения рассмотреть семейства: $y = C,\ x^2 + y^2 = C$)

Обратимся теперь к исходному уравнению

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (x,y) \in D \subset R^2,$$

для которого $\Phi(x,y,C) = 0, \quad C{-}const,$ – семейство интегральных кривых (т.е. при каждом значении произвольной постоянной имеем интегральную кривую). Из определений 2,3 вытекает, что, если это семейство имеет огибающую $y = \varphi(x)$, то она является особым решением., т.к. состоит из точек ветвления.

Таким образом, можно указать **примерный алгоритм** нахождения особых решений ДУ с помощью огибающей:

1) Найти семейство интегральных кривых

2) Составить соотношения (2)

3) Найти из них дискриминантную кривую

4) Проверить, нет ли на ней особых точек. Если этого нет, то она будет огибающей семейства, а, значит, и особым решением.

Для закрепления рассмотрим

Пример 5. Возьмем ДУ

$$yy' = \sqrt{2020^2 - y^2}$$

Применим алгоритм. Проводя необходимые преобразования, находим семейство интегральных кривых

$$(x - C)^2 + y^2 = 2020^2$$

Составим соотношения (2)

$$(x - C)^2 + y^2 = 2020^2 \text{и} - 2(x - C) = 0,$$

из которых находим дискриминантные кривые $y = \pm 2020$ Выясним, есть ли на них особые точки. Эти точки должны быть решениями системы

$$\Phi'_x = -2(x - C) = 0, \;\; \Phi'_y = 2y = 0,$$

которая действительно имеет решение (и не одно!) $x = C, \quad y = 0$. Но эти точки не лежат на дискриминантных кривых $y = \pm 2020$. Значит, дискриминантные кривые $y = \pm 2020$ являются огибающими, т.е. особыми решениями.

Упражнение 8. Сделать чертеж к примеру 4.

IV.Составные (склеенные) решения

Укажем еще один специфический вид решений ДУ. Пусть $\Phi(x, y, C) = 0$ – общее решение в неявном виде некоторого ДУ в нормальной форме и L–совокупность интегральных кривых, определяемых этим общим решением.

Допустим, что через точку M проходят две (их может быть и больше) интегральные кривые L_1иL_2 (которые не совпадают в некоторой ее окрестности) с одной и той же касательной в этой точке. Это означает, что $M-$ точка ветвления решений. Тогда из частей этих кривых можно составить новую кривую L_{12} следующим образом: сначала берем часть кривой L_1 до точки M, а затем приклеиваем к ней (ввиду одного углового коэффициента) часть кривой L_2 , лежащей после точки M. Кривая L_{12} также будет интегральной кривой.

Определение 4. *Решение ДУ, которое определяет интегральную кривую L_{12} называют* ***составным (склеенным).***

Пополняя семейство L всевозможными составными решениями (в т.ч. и в других точках ветвления), получим новое расширенное семейство, которое приводит к полному решению ДУ.

Для закрепления материала рассмотрим

Пример 6. Возьмем несложное ДУ

$$2020ydx - xdy = 0$$

воспользуемся готовым ответом

$$y = Cx^{2020}, \ \ C - const$$

при $C = 0$ – это ось абсцисс. В частности, начало координат будет точкой ветвления, т.к. все кривые семейства в этой точке имеют одну и ту же касательную.

В таком случае составные решения можно склеивать следующим образом:

–из ветвей **различных** парабол (одна часть – ветвь одной параболы в левой полуплоскости, а другая – ветвь второй параболы в правой полуплоскости);

–из верви параболы в левой полуплоскости и положительной полуоси (и наоборот). При желании эту процедуру можно описать аналитически (формулами).

Затем пополняем решение $y = Cx^{2020}$ $C - const$ такими всевозможными составными решениями и получим полное решение данного ДУ.

45 Уравнения в общей форме

Уравнения 1-го порядка в общей форме (УОФ) имеют вид

$$F(x, y, y') = 0, \, (x, y, y') \in D \subset R^3,$$

где функция F задана в области D. Фактически это уравнение, не разрешенное относительно производной.

Определение 1. *Непрерывно дифференцируемая функция $y = y(x)$, $x \in I$, обращающая данное уравнение в тождество, называется его* ***решением****.*

Вопрос 1. Пусть дана непрерывная скалярная функция двух переменных $f(x, y)$. Сколько различных значений может принимать эта функция в каждой фиксированной точке своей области задания? Как изменится ситуация, если слово "функция"заменить на зивисимость?

Существенным отличием такого уравнения от рассматриваемого нами ранее уравнения, разрешенного относительно производной, вида

$$y' = f(x, y)$$

состоит в том, что в каждой фиксированной точке своей области определения правая часть этого уравнения задает только одно значение. Имея в виду геометрический смысл такого уравнения, это означает, что в каждой точке правая часть задает единственный наклон касательной к интегральной кривой.

Вопрос 2. Означает ли последнее, что через каждую точку проходит только одна интегральная кривая?

В нашем же случае УОФ может задавать несколько наклонов (касательных) в одной точке.

Пример 1. Возьмем ДУ

$$(y')^2 - x^2 = 0,$$

которое запишем в виде

$$(y' - x)(y' + x) = 0,$$

откуда находим $y' = \pm x$. Это означает, что в любой точке плоскости (x, y) задается два различных наклона интегральных кривых (величины этих наклонов равны значениям $\pm x$, за исключением начала координат).

Сформулируем **задачу Коши для УОФ**: найти такое решение, которое удовлетворяет следующим условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0' \text{ (задается требуемый наклон)},\ F(x_0, y_0, y_0') = 0.$$

Вполне естественно, что при этом возникает проблема числа решений, удовлетворяющих таким условиям. В частности, могут появляться особые решения.

Подходы к поиску особых решений:

1. **Анализ общего решения $\Phi(x, y, C) = 0$.**

   Для этого, как и ранее, составляем систему соотношений

$$\Phi(x, y, C) = 0 \text{ и } \Phi_C'(x, y, C) = 0,$$

из которой, путём исключения произвольной постоянной, находим дискриминантную кривую. Если на этой кривой нет особых точек ($\Phi_x'^2 + \Phi_y'^2 \neq 0$), то она будет огибающей данного семейства, т.е. задавать особое решение.

2. **Анализ вида уравнения.**
   Попытаемся установить факты нарушения единственности решения задачи Коши. Один из них - невыполнение условий теоремы о сущестовавании неявно заданной функции (в нашем случае это существование производной y', как неявной функции в соотношении $F(x, y, y') = 0$).
   Для этого составляем систему соотношений
   $$F(x, y, y') = 0 \text{ и } F'_{y'}(x, y, y') = 0,$$
   из которой исключаем саму производную.

Замечание 1. *На практике удобнее выполнить параметризацию*

$$y' = p, \;\; F(x, y, p) = 0, \;\; F'_p(x, y, p) = 0$$

Вопрос 3. Чем аргументируется такой подход?

Отметим, что в некоторых случаях исходное уравнение может быть записано в общей дифференциальной форме

$$H(x, y, dx, dy) = 0.$$

Пример 2. Возьмем ДУ

$$xy(dx^2 + dy^2) + (x^2 + y^2)dxdy = 0.$$

Запишем его в виде

$$xdx(ydx + xdy) + ydy(ydx + xdy) = 0,$$

откуда получаем

$$(xdx + ydy)(ydx + xdy) = 0.$$

Тогда исходное УОФ распадется на два уравнения

$$xdx + ydy = 0, \;\; ydx + xdy = 0,$$

решая которые находим два семейства решений

$$x^2 + y^2 = C_1 \text{ и } xy = C_2.$$

Заметим, что пара прямых $y = \pm x$ состоит из точек ветвления (особое решение). Для получения полного решения к данным семействам следует добавить составные решения, образованные частями ветвей гипербол и дуг полуокружностей.

Упражнение 1. Сделать чертеж к примеру 2.

Способы решения УОФ:

1) Один из подходов основывается на разрешении уравнения относительно производной. Для этого рассматриваем данное уравнение относительно переменной y' (для удобства можно положить $y' = p$) и применяем с этой целью все известные приемы для обычных уравнений. В результате исходное уравнение может записаться в виде совокупности нескольких уравнений $y' = f_1(x, y), \ldots, y' = f_k(x, y)$. В таком случае полным решением будет объединение решений этих уравнений.

В частности такой способ пригоден для алгебраических относительно производной уравнений

$$(y')^n + a_{n-1}(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + a_1(x,y)y' + a_0(x,y) = 0.$$

Пример 3. Возьмем УОФ

$$y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0.$$

Выполним группировку слагаемых

$$(y'^3 - xy'^2) - (4yy' - 4xy) = 0.$$

Вынесем общие множители за скобки

$$y'^2(y' - x) - 4y(y' - x) = 0$$

и представим в виде произведения

$$(y' - 2\sqrt{y})(y' + 2\sqrt{y})(y' - x) = 0.$$

В результате выполненных преобразований получаем совокупность трех уравнений

$$y' - 2\sqrt{y} = 0,\ y' + 2\sqrt{y} = 0,\ y' - x = 0,$$

последовательно решая которые, находим следующие семейства решений

$$\sqrt{y} = x + C_1,\ \ -\sqrt{y} = x + C_2,\ y = \frac{x^2}{2} + C_3.$$

В отличие от рассматриваемых ранее ситуаций, общее решение можно записать в виде произведения

$$(\sqrt{y} - x - C_1)(-\sqrt{y} - x - C_2)(y - \frac{x^2}{2} - C_3) = 0.$$

Вопрос 4. Все ли решения найдены? Будут ли здесь особые, составные решения?

Упражнение 2. Сделать чертеж к примеру 3.

Упражнение 3. Для УОФ $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ найти общее решение (исследовать на предмет наличия особых, составных решений).

2) Другой поход к интегрированию УОФ основывается на методе введения параметра. Допустим, что для уравнения $F(x, y, y') = 0$ известны функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $p = p(u, v)$ (u, v - новые переменные, p - параметр) такие, что

$$F(x(u, v), y(u, v), p(u, v)) = 0.$$

Используем основное соотношение $dy = y'_x dx = p dx$, $p = y'_x$. Поскольку $dy = y'_u du + y'_v dv$, $dx = x'_u du + x'_v dv$, то основное соотношение примет вид $y'_u du + y'_v dv = p(x'_u du + x'_v dv)$, откуда, после перегруппировки слагаемых, получаем $(y'_u - px'_u)du = (px'_v - y'_v)dv$. Из полученного соотношения выразим новую производную

$$\frac{dv}{du} = \frac{y'_u - px'_u}{px'_v - y'_v}$$

т.е. имеем уравнение, разрешенное относительно производной.

Вопрос 5. Можно ли этот метод считать универсальным, т.е. пригодным в общем случае?

Укажем случаи, в которых метод введения параметра достаточно эффективен:

- УОФ разрешено относительно переменной y, т.е. $y = \phi(x, y')$.

  Применяем описанный метод. Обратим внимание на тот факт, что для такого уравнения параметризация не требует дополнительно введения новых переменных (т.е. u, v). Сначала полагаем в уравнении $y' = p$ (вводим параметр)

  $$y = \phi(x, p).$$

  Продифференцируем это равентсво

  $$dy = \phi'_x(x, p)dx + \phi'_p(x, p)dp.$$

  Возьмем основное соотношение

  $$dy = y'_x dx = p dx,\ \ p = y'_x.$$

  Из последних двух равенств следует равенство их правых частей

  $$\phi'_x(x, p)dx + \phi'_p(x, p)dp = p dx,$$

  откуда, после перегруппировки слагаемых, получаем

  $$(\phi'_x(x, p) - p)dx + \phi'_p(x, p)dp.$$

  Далее возможны два подслучая. Если $\phi'_x(x, p) - p \neq 0$, то полученное уравнение разрешимо относительно производной

  $$\frac{dx}{dp} = \frac{\phi'_p(x, p)}{\phi'_x(x, p) - p}.$$

Пусть оно имеет решение $X(p,C)$ (т.е. интегрируемо в квадратурах). Подслучай $\phi'_x(x,p)=p$ исследуется отдельно. Тогда решение УОФ, разрешенного относительно зависимой переменной, находим в параметрическом виде

$$x = X(p,C), y = \phi(x,p) = \phi(X(p,C),p).$$

Пример 4. Возьмём ДУ

$$y = x(e^{y'} + y'),$$

т.е. разрешенное относительно переменной y уравнение. Вводя параметр p, получим уравнение

$$y = x(e^p + p),$$

дифференцируя которое имеем

$$dy = x(e^p + 1)dp + (e^p + p)dx.$$

С другой стороны, с учетом введения параметра из основного соотношения имеем

$$dy = pdx.$$

Из последних двух равенств находим

$$pdx = x(e^p + 1)dp + (e^p + p)dx)$$

или

$$x(e^p + 1)dp + e^p dx = 0,$$

т.е. поскольку $e^p \neq 0$

$$\frac{dx}{dp} = x\frac{e^p + 1}{e^p}.$$

В итоге получили ДУ, интегрируя которое найдем

$$x = Ce^{-p+e^{-p}} \ (x \neq 0, C > 0).$$

Заметим, что $x = 0$ также является решением. Его можно получить из общего, если добавить $C = 0$. Поэтому общее решение запишем в виде

$$x = Ce^{-p+e^{-p}}.$$

Окончательно решение данного, разрешенного относительно переменной y, уравнения найдем в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = Ce^{-p+e^{-p}}, \\ y = x(e^p + p) = Ce^{-p+e^{-p}}(e^p + p), \\ C \geq 0. \end{cases}$$

- УОФ разрешено относительно переменной x, т.е. $x = \psi(y, y')$.

  Для такого уравнения параметризация также не требует дополнительнго введения новых переменных (т.е. u,v). Сначала в уравнении вводим параметр $y' = p$, тогда $x = \psi(y, p)$. Продифференцируем это равенство

$$dx = \psi'_y(y,p)dy + x = \psi'_p(y,p)dp.$$

Возьмем основное соотношение

$$dy = y'_x dx = pdx \Rightarrow dx = \frac{1}{p}dy \ (p \neq 0).$$

Из последних двух равенств следует равенство их правых частей

$$\frac{1}{p}dy = \psi'_y(y,p)dy + \psi'_p(y,p)dp,$$

откуда после перегруппировки слагаемых получаем

$$\left(\frac{1}{p} - \psi'_y(y,p)\right) dy = \psi'_p(x,p)dp.$$

Выразив производную, получим

$$\frac{dy}{dp} = \frac{\psi'_p(x,p)}{\frac{1}{p} - \psi'_y(y,p)}dp \ (\frac{1}{p} - \psi'_y(y,p) \neq 0).$$

Если это уравнение разрешимо в квадратурах и $y = Y(p, C)$ - его решение, то решение исходного УОФ, разрешенного относительно независимой переменной, запишется в параметрическом виде

$$y = Y(p,C), \ x = \psi(y,p) = \psi(Y(p,C),p).$$

Для полноты исследования останется рассмотреть ситуации, когда

$$p = y'_x = 0 \text{ и } \frac{1}{p} - \psi'_y(y,p) = 0.$$

Пример 5. Возьмем ДУ

$$x = y'lny',$$

которое разрешено относительно независимой переменной. Вводя параметр $y' = p > 0$, получим уравнение

$$x = plnp,$$

дифференцируя которое имеем

$$dx = \left(lnp + p\frac{1}{p}\right) dp = (lnp + 1)dp.$$

С другой стороны, с учетом введения параметра, из основного соотношения имеем

$$dy = pdx \Rightarrow dx = \frac{1}{p}dy.$$

Из последних двух равенств находим

$$\frac{1}{p}dy = (lnp + 1)dp \Rightarrow dy = p(lnp + 1)dp$$

В итоге получили ДУ, интегрируя которое найдем

$$y = \frac{p^2 lnp}{2} + \frac{p^2}{4} + C.$$

Решение данного ДУ, разрешенного относительно переменной x, запишем в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = plnp, \\ y = \frac{p^2 lnp}{2} + \frac{p^2}{4} + C. \end{cases}$$

- Неполное УОФ (не содержит y), т.е. $F(x, y') = 0$.
  В отличие от предыдущих случаев, здесь непосредственная параметризация не усматривается. Поэтому подбираем параметр t и вспомогательные функции

$$x = \phi(t),\ y' = p(t)$$

таким образом, чтобы они удовлетворяли данному уравнению

$$F(x(t), p(t)) = 0.$$

После этого снова возвращаемся к вспомогательным функциям, которые распишем несколько подробнее (с учётом основного соотношения и сложной функции x)

$$x = \phi(t),\ dy = p(t)dx = p(t)\phi' dt,$$

откуда находим общее решение в параметрическом виде (по меньшей мере в квадратурах)

$$x = \phi(t),\ y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} p(s)\phi'(s)ds + C.$$

Пример 6. Возьмем ДУ

$$y' lny' - xy'^2 = 0,$$

которое не зависит от переменной y. Представим его в виде произведения

$$y'(lny' - xy') = 0,$$

откуда получаем совокупность уравнений

$$y' = 0,\ lny' - xy' = 0.$$

Упражнение 4. Попытаться решить первое из этих уравнений и записать для такого случая решение исходного уравнения.

Далее акцентируем внимание на втором из уравнений, которое также не содержит переменной y. Для него возникает проблема параметризации, которая выше не обсуждалась. Сама по себе в общем случае она не тривиальна.

Вопрос 6. Параметризация единственна? Дополнительная проблема состоит в том, чтобы подобрать функции не только с формальной стороны, но и довести до конца интегрирование.

Если в нашем случае попробуем неподсредственно взять $x = t$, то для нахождения $p = y'$ требуется решить трансцендентное уравнение $lnp - xp = 0$. Поэтому попытаемся "нейтрализовать"этот логарифм экспонентой, полагая $p = e^t$. Тогда исходное уравнение примет вид $t - xe^t = 0$, откуда находим $x = te^{-t}$. Таким образом, желаемая параметризация имеет вид

$$x = \phi(t) = te^{-t},\ y' = p(t) = e^t.$$

С учетом основного соотношения и того, что x - сложная функция, получаем

$$x = \phi(t) = te^{-t},\ dy = p(t)dx = p(t)\phi'(t)dt = e^t(te^{-t})'dt = (e^t(e^{-t} - te^{-t}))dt = (1-t)dt,$$

откуда находим общее решение в параметрическом виде (даже в квадратурах)

$$x = te^{-t},\ y(t) = \int\limits_{t_0}^{t}(1-s)ds = t - \frac{t^2}{2} + C.$$

Полное решение данного примера записывается с учетом упражнения 4.

- Неполное УОФ (не содержит x), т.е. $G(y, y') = 0$.
  Здесь также непосредственная параметризация не усматривается. Поэтому подбираем параметр t и вспомогательные функции

$$y = \psi(t),\ y' = p(t)$$

таким образом, чтобы они удовлетворяли данному уравнению

$$G(x(t), p(t)) = 0.$$

После этого снова возвращаемся к вспомогательным функциям, которые распишем несколько подробнее (с учётом основного соотношения)

$$y = \psi(t),\ dy = p(t)dx.$$

Продифференцировав первую из функций, получим

$$dy = \psi'(t)dt,\ dy = p(t)dx,$$

откуда, приравнивая правые части, находим

$$\psi'(t)dt = p(t)dx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\psi'(t)}{p(t)}\ (p(t) \neq 0) \Rightarrow x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)}{p(s)}ds + C$$

Тогда общее решение исходного неполного УОФ запишется в параметрическом виде (по меньшей мере в квадратурах)

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\psi'(s)}{p(s)}ds + C,\ y(t) = \psi(t)\ (p(t) \neq 0).$$

Для полноты исследования останется выяснить, будет ли решение в оставшемся случае $p = y'_x = 0 \Rightarrow y = const = C_1$.

Вопрос 7. Что для этого нужно сделать?

Некоторые специальные типы УОФ, решаемые методом введения параметра:

1. Уравнение Лагранжа (УЛ)
   Это УОФ следующего вида
   $$y = x\psi(y') + \phi(y').$$
   Как видим, это уравнение, разрешенное относительно переменной y, более того - оно линейно по x. Для построения его решения применим метод введения параметра. Полагая $y' = p$, получим уравнение
   $$y = x\psi(p) + \phi(p).$$
   Продифференцируем это равенство
   $$dy = \psi(p)dx + (x\psi'_p(p) + \phi'(p))dp.$$
   Возьмем далее основное соотношение
   $$dy = y'_x dx = pdx,\ p = y'_x.$$
   Из последних двух равенств следует равенство их правых частей
   $$\psi(p)dx + (x\psi'_p(p) + \phi'_p(p))dp = pdx,$$
   откуда после перегруппировки слагаемых получаем
   $$(p - \psi(p))dx = (x\psi'_p(p) + \phi'(p))dp(*)$$

Далее возможны два подслучая.

1) Если $p - \psi(p) \neq 0$, то полученное уравнение не только разрешимо относительно производной, но и является линейным (относительно x)

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\psi'_p(p)}{p - \psi(p)} x = \frac{\psi'(p)}{p - \psi(p)}$$

Как известно нам ранее, оно имеет решение $x = X(p, C)$ (по меньшей мере в квадратурах). Тогда решение УЛ находим в параметрическом виде

$$x = X(p, C),\ y = x\psi(p) + \phi(p) = X(p, C)\psi(p) + \phi(p).$$

2) Подслучай $p - \psi(p) = 0$ исследует отдельно. Пусть существуют значения параметра $p = \alpha_k$ такие, что выполняется равенство $p - \psi(p) = \alpha_k - \psi(\alpha_k) = 0$. Тогда для таких значений α_k равенство (*) верно. Подставляя $y' = p = \alpha_k$ в УЛ, находим дополнительное решение

$$y = x\psi(\alpha_k) + \phi(\alpha_k).$$

Вывод: УЛ имеет общее решение

$$x = X(p, C),\ y = x\psi(p) + \phi(p) = X(p, C)\psi(p) + \phi(p).$$

кроме этого может быть дополнительное $y = x\psi(\alpha_k) + \phi(\alpha_k)$ (необходима проверка)

Пример 7. Возьмём УЛ

$$y = 2xy' + y'^2.$$

Введем параметр

$$y = 2xp + p^2.$$

Продифференцируем это равенство

$$dy = 2pdx + (2p + 2x)dp.$$

Возьмем далее основное соотношение

$$dy = y'_x dx = pdx,\ p = y'_x.$$

Из последних двух равенств следует равенство их правых частей

$$2pdx + (2p + 2x)dp = pdx$$

откуда после перегруппировки слагаемых получаем

$$pdx + (2p + 2x)dp = 0\ (*)$$

Далее возможны два подслучая. 1) Если $p \neq 0$, то полученное уравнение является линейным (относительно x)

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} x = 2$$

Упражнение 5. Найти решение последнего уравнения.

После этого можем записать общее решение данного УЛ в параметрическом виде

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3},\ y = 2p\left(\frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}\right) + p^2 = \frac{2C}{p} - \frac{4p^2}{3} + p^2.$$

2. Проверим случай $p - 2p = 0$, т.е. $p = 0$. Существует только одно значение параметра $p = \alpha_k = 0$, которое удовлетворяет этому уравнению. Воспользуемся параметризацией $y' = p = \alpha_k = 0$. Из этого ДУ находим дополнительные решения УЛ

$$y = \alpha_k x + C_k = C_1.$$

Заметим, что это решение, как частное, не содержится в найденном выше общем решении ни при каком значении произвольной постоянной. Поэтому оно будет дополнительным решением. Итак, полным решение данного УЛ будет совокупность решений

$$y = C_1 \text{ и } x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3},\ y = \frac{2C}{p} - \frac{4p^2}{3} + p^2.$$

2. Уравнение Клеро (УК)

   Это УОФ следующего вида

$$y = xy' + \phi(y').$$

Как видим, это частный случай УЛ. Для построения его решения применим метод введения параметра. Полагая $y' = p$, получим уравнение

$$y = xp + \phi(p).$$

Продифференцируем это равенство

$$dy = pdx + xdp + \phi'(p)dp = pdx + (x + \phi'(p))dp.$$

Возьмем далее основное соотношение

$$dy = y'_x dx = pdx,\ p = y'_x.$$

Из последних двух равенств следует равенство их правых частей

$$pdx + (x + \phi'(p))dp = pdx,$$

откуда после приведения подобных слагаемых получаем

$$(x + \phi'(p))dp = 0.$$

Полученное уравнение является совокупностью двух уравнений

$$dp = 0 \text{ и } x + \phi'(p) = 0.$$

Решая первое, имеем выражение для параметра $p = C$, что позволяет записать общее решение УК, как семейство прямых

$$x = xp + \phi(p) = xC + \phi(c) \text{ или } y - xC - \phi(C) = 0$$

Используя второе из уравнений, имеем

$$x = -\phi'(p), \; y = xp + \phi(p).$$

Вопрос 8. Как находилась огибающая семейства кривых?

Заметим, что производная по параметру первого соотношения совпадает со вторым. Этот факт наводит на мысль о том, что решение $y = xp+\phi(p)$, где $x+\phi'(p) = 0$, может быть особым. Поэтому необходимо провести его исседование стандартным способом. Сначала составляем системы соотношений

$$\Phi(x, y, C) = y - xC - \phi(C) = 0 \text{ и } \Phi'_c(x, y, C) = -(x + \phi'(C)) = 0.$$

Вопрос 9. Видим совпадение?

Исключая параметр из которой находим дискриминантную кривую $y = \phi(x)$. Для того чтобы она была огибающей данного семейства (т.е. особым решением), на ней не должно быть особых точек, т.е. $\Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C) = C^2 + 1 \neq 0$.

Ввиду возможного наличия посторонних решений, останется выяснить вопрос: действительно ли $y = \phi(x)$ - решение УК? Если это так, то $y = \phi(x)$ - особое решение УК (состоит из точек ветвления).

Вывод: УК имеет общее решение (семейство решений)

$$y = xp + \phi(p) = xC + \phi(C),$$

при этом решение $y = \phi(x)$ может быть особым решением (огибающей семейства, в таком случае появятся ещё составные решения).

Пример 8. Возьмем УК

$$y = xy' + y' + y'^2.$$

Полагая $y' = p$ получим уравнение

$$y = xp + p + p^2.$$

Продифференуирем это равенство

$$dy = pdx + xdp + (1 + 2p)dp = pdx + (x + 1 + 2p)dp.$$

Возьмем далее основное соотношение

$$dy = y'_x dx = pdx, \; p = y'_x.$$

Из последних двух равенств следует равенство их правых частей

$$pdx + (x + 1 + 2p)dp = pdx,$$

откуда после приведения подобных слагаемых получаем

$$(x + 1 + 2p)dp = 0.$$

Полученное уравнение является совокупностью двух уравнений

$$dp = 0 \text{ и } x + 1 + 2p = 0.$$

Решая первое, имеем выражение для параметра $p = C$, что позволяет записать общее решение УК, как семейство прямых

$$x = xp + p + p^2 = xC + C + C^2 \text{ или } y - Cx - C - C^2 = 0$$

Кроме этого, как отмечено выше, система соотношений

$$\Phi(x, y, C) = y - Cx - C - C^2 = 0 \text{ и } \Phi'_c(x, y, C) = -(x + 1 + 2C) = 0$$

может определять особое решение. Исключая параметр $C = -\frac{1}{2}(x + 1)$, находим дискриминантную кривую

$$y = -\frac{1}{2}(x + 1)x - \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1}{4}(x + 1)^2 = -\frac{1}{4}(x + 1)^2.$$

Эта функция удовлетворяет данному УК, поэтому является его особым решением. Полным решением будет объединение общего особого и всевозможных составных решений.

Некоторые прикладные задачи, приводящие к УОФ:

1. Задача об ортогональных траекториях (на плоскости, в декарт. коорд.)
   Пусть задано однопараметрическое семейство плоских кривых $\Phi(x, y, C) = 0$.

Определение 2. ***Ортогональной траекторией*** *данного семейства называется кривая L, пересекающая все линии данного семейства перпендикулярно.*

Поставим задачу нахождения уравнения кривой L. Построим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C)y' = 0 \end{cases}$$

Исключаем параметр C. Получаем ДУ, описывающее данное семейство

$$F(x, y, y') = 0$$

Искомая кривая проходит через точки линий данного семейства, т.е. (x,y), но под прямым углом. Это значит, что произведение угловых коэффициентов и их касательных в точке (x,y) равно -1. Поэтому угловой коэффициент искомой линии будет $-\frac{1}{y'}$. Следовательно, уравнение ортогональных траекторий имеет вид

$$F(x, y, \frac{1}{y'}) = 0$$

Пример 9. Дано семейство кривых $y = C_1x^2$ (сделать чертеж).

Упражнение 6. Выяснить корректность данной задачи при $C_1 = 0$.

Будем считать, что $C_1 > 0$. Составим ДУ данного семейства построением системы

$$\begin{cases} y = C_1x^2 \\ 2C_1x + y' = 0 \end{cases}$$

откуда исключением параметра

$$C_1 = \frac{y}{x^2} \ (x \neq 0)$$

находим

$$\frac{1}{2}xy' = y$$

Тогда, с учетом перпендикулярности, ДУ ортогональных траекторий имеет вид

$$-\frac{x}{2y'} = y$$

или

$$2yy' + x = 0$$

Несмотря на то, что получили УОФ, его можно привести к уравнению в нормальной форме (определить его тип самостоятельно). После этого находим решение этого ДУ

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = C \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = C,$$

которое задает искомые ортогональные треткории (изобразить их на исходном чертеже).

Вопрос 10. Выше было введено дополнительное ограничение ($x \neq 0$). Почему?

Упражнение 7. Рассмотреть случай $C_1 < 0$.

2. Задача об изогональных траекториях

Определение 3. ***Изогональной траекторией однопараметрического семейства*** *называется кривая K, пересекающая все его линии под заданным углом α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}$).*

Если $\Phi(x, y, C) = 0$ - заданное семейство плоских линий и $F(x, y, y') = 0$ его ДУ, а α - угол пересечения линий и изогональных траекторий, то угол пересечения соответствующих касательных также равен α. Пусть $k_1 = y'$ - угловой коэффициент линии семейства в некоторой произвольной точке.

Тогда угловой коэффициент k_2 изогональной траектории, проходящей через эту точку, найдем из формулы угла между их касательными

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_2 - y'}{1 + k_2 y'}$$

или

$$(1 + k_2 y')tg\alpha = k_2 - y',$$

откуда следует, что

$$k_2(y' tg\alpha - 1) = -tg\alpha - y',$$

т.е.

$$k_2 = \frac{y' + tg\alpha}{1 - y' tg\alpha}$$

В итоге получаем уравнение искомого семейства траекторий

$$F\left(x, y, \frac{y' + tg\alpha}{1 - y' tg\alpha}\right) = 0$$

46 Элементарные уравнения n-го порядка

Уравнение n-го порядка в общей форме имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

левая часть которого определена в некоторой области D пространства R^{n+2} своих аргументов. Дадим понятние решения такого уравнения.

Определение 1. *Решением данного уравнения будем называть функцию $y = y(x)$, n раз дифференцируемую на промежутке $I \subseteq R$ и обращающую уравнение в тождество.*

Наряду с решением уравнения используется также следующее, исторически сложившееся, понятие.

Определение 2. *Функция $\omega = \omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ называется* ***первым интегралом данного уравнения****, если она отлична от константы в некоторой подобласти $D_1 \subset D$ и обращается в постоянную вдоль решения $y = y(x)$, т.е.*

$$\omega = \omega(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = const.$$

Основным подходом к решению указанных уравнений является понижение их порядка. Для этого нам понадобится

Теорема 1. *Пусть* $\omega = \omega(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ *— непрерывно дифференцируемая функция на некотором множестве из пространства* R^{n+1}. *Если выполняется тождество*

$$\omega'_x + \omega'_{y_0} y_1 + \omega'_{y_1} y_2 + \ldots + \omega'_{y_{n-1}} y_n \equiv F(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$$

для всех аргуметов $x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ *из множества задания, то исходное уравнение равносильно уравнению на единицу меньшего порядка*

$$\omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}) = C, C - const.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $y = y(x)$ является решением уравнения. Тогда она удовлетворяет тождетсву

$$0 = F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^n(x)),$$

которое с учётом условия теоремы (справа-налево) принимает вид

$$0 = \omega'_x + \omega'_{y_0} y_1 + \omega'_{y_1} y_2 + \ldots + \omega'_{y_{n-1}} y_n.$$

Полученное выражение представляет собой полную производную функции ω, т.е.

$$0 = \frac{d}{dx}\omega(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)).$$

Это означает, что функция является решением уравнения (n-1)-го порядка

$$\omega(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) = C.$$

Достаточность. Если функция $y = y(x)$ является решением уравнения

$$\omega(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) = C,$$

то выполняется цепочка равенств (принимая во внимание условие теоремы справа-налево):

$$0 = \frac{d}{dx}\omega(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) = \omega'_x + \omega'_y y'(x) + \omega'_{y'} y''(x) + \ldots + \omega'_{y^{(n-1)}} y^n(x) =$$

$$= F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^n(x)),$$

т.е. функция $y = y(x)$ является решением исходного уравнения.

■

Выделим некоторые классы уравнений n-го порядка, для которых предложенный подход является достаточно конструктивным.

Уравнения в точных производных

Определение 3. *Исходное уравнение называется* ***уравнение в точных производных*** *(УТП), если оно имеет первый интеграл*

$$\omega = \omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

.

Из определения следует, что УТП равносильно уравнению (n-1)-го порядка

$$\omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = C,$$

т.е. допускает понижение порядка на единицу. Естественно, что при этом возникает весьма нетривиальная задача поиска первого интеграла. Для иллюстрации приведём

Пример 1. Возьмём ДУ второго порядка

$$y''(1 + y'^2)^{-3/2} - 2020 = 0.$$

Упражнение 1. Проверить, что это уравнение имеет первый интеграл

$$\omega(x, y, y') = y'(1 + y'^2)^{-1/2} - 2020.$$

Тогда согласно теореме данное уравнение сводится к уравнению первого порядка

$$y'(1 + y'^2)^{-1/2} - 2020 = C_1.$$

В полученном уравнении введём параметр

$$y' = tgt \Rightarrow \sin t = 2020x + C_1 \Rightarrow x = \frac{\sin t - C_1}{2020}.$$

С другой стороны, используя основное соотношение, имеем

$$dy = tgtdx,$$

следовательно,

$$dy = tgt\frac{1}{2020}\cos tdt \Rightarrow y = -\frac{1}{2020}\cos t + C_2.$$

В итоге находим решение данного уравнения в параметрическом виде

$$x = \frac{\sin t - C_1}{2020}, y = -\frac{1}{2020}\cos t + C_2.$$

Неполные уравнения, допускающие понижение порядка

Уравнение не содержит искомой функции и её первых производных

Считаем, что уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0 (k \le n).$$

Выполеним замену

$$y^{(k)} = z \Rightarrow y^{(k+1)} = z', \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тогда исходное уравнение сводится к ДУ порядка $n - k$:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0,$$

т.е. допускает понидение порядка на k единиц.

Допустим, что удалось найти общее решение полученнеого уравнения

$$z = Z(x, C_1, \dots, C_{n-k}).$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$y^{(k)} = Z(x, C_1, \dots, C_{n-k}),$$

и его общее решение находится (по меньшей мере в квадратурах) поэтапным интегрированием

$$y^{(k-1)}(x, C_1, \dots, C_{n-k+1}) = \int Z(x, C_1, \dots, C_{n-k})dx + C_{n-k+1}, \dots,$$

$$y(x, C_1, \dots, C_{n-k+1}, \dots C_n) = \int y'(x, C_1, \dots, C_{n-k+1}, \dots, C_{n-1})dx + C_n.$$

Для закрепления рассмотрим

Пример 2. Возьмём ДУ третьего порядка

$$xy''' - y'' + xy'' = 0.$$

Как видим, это уравнение не содержит искомой функции и её первой производной. Выполним замену

$$y'' = z \Rightarrow y''' = z'.$$

Тогда данное уравнение сводится к ДУ первого порядка

$$xz' - z + xz = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{dz}{z} = \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx (x \ne 0).$$

Итегрируя это уравнение, находим его общее решение

$$z = C_1 x e^{-x} (C_1 > 0 - const).$$

Заметим, что $z = 0$ также является решением, причём оно содержится в общем при $C_1 = 0$.

Далее с учётом замены имеем ДУ второго порядка

$$y'' = C_1 x e^{-x},$$

из которого пошагово получаем

$$y'(x) = \int C_1 x e^{-x} dx + C_2,$$

$$y(x) = \int y'(x) dx + C_3 = \int \left(\int C_1 s e^{-s} ds + C_2 \right) dx + C_3.$$

Упражнение 2. Завершить решение примера самостоятельно.

Уравнение не содержит явно независимую переменную

Считаем, что уравнение имеет вид

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Выполним замену искомой функции

$$y'_x = z = z(y) = H_0(z).$$

Учитывая, что z — сложная функция ($z = z(y(x))$), последовательно находим

$$y''(z(y))'_x = z'_y y'_x = z'z = H_2(z, z'),$$

$$y''' = (z'(y))'_x = (z'(y)z(y))'_x = z''_y y'_x y'_x + z'(y)(z(y))'_x =$$
$$z''z^2 + z'z'_y y'_x = z''z^2 + z'^2 z = H_3(z, z', z'').$$

Аналогично по индукции можно показать, что

$$y^{(k)} = H_k(z, z', \ldots, z^{(k-1)}).$$

Тогда исходное уравнение сводится к ДУ порядка $n - 1$

$$F(x, z, H_1, \ldots, H_{n-1}) = \widetilde{F}(z, z', \ldots, z^{(k-1)}) = 0,$$

т.е. допускает понижение порядка на единицу.

Допустим, что удалось найти общее решение полученного уравнения

$$z = \widetilde{Z}(x, C_1, \ldots, C_{n-1}).$$

Тогда поиск общего решения исходного уравнения сводится к интегрированию ДУ первого порядка
$$y' = \widetilde{Z}(x, C_1, \ldots, C_{n-1}),$$
откуда находим
$$y(x, C_1, \ldots, C_n) = \int \widetilde{Z}(x, C_1, \ldots, C_{n-1})dx + C_n$$
или
$$y(x, C_1, \ldots, C_n) = \int_{x_0}^{x} \widetilde{Z}(s, C_1, \ldots, C_{n-1})ds + C_n.$$

Такого рода ДУ описывают колебания математического маятника (малые углы отклонения).

Пример 3. Запишем ДУ колебаний маятника длины l при малых углах $\alpha = \alpha(t)$ его отклонения от вертикали (до 8^o):
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + k\sin\alpha = 0 \left(k = \frac{g}{l}\right).$$
Заметим, что время t явно не входит в данное уравнение. Поэтому выполним замену искомой функции
$$\alpha'_x = z.$$
Тогда
$$\alpha'' = (z(\alpha))'_x = z'_\alpha \alpha'_t = z'z,$$
и уравнение примет вид
$$z'z = -k\sin\alpha$$
или в силу малости углов
$$z'z = -k\alpha.$$

Вопрос: Каким образом отличается интегрирование последних двух уравнений?

Находим общее решение полученного уравнения
$$z = \sqrt{2k(\cos\alpha - \cos\alpha_0)},$$
где α_0 — начальное отклонение маятника. Далее, возвращаясь к исходной переменной, имеем ДУ первого порядка
$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{2k}\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}.$$
Общее решение полученного ДУ найдём в квадратурах
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2k}} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{ds}{\sqrt{\cos s - \cos\alpha_0}} = t - t_0,$$
где t — начальное время.

Уравнение, однородное относительно искомой функции и её производных

Считаем, что уравнение имеет вид

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

причём выполняется условие

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Выполним замену искомой функции:

$$\frac{y'}{y} = z = z(x) \Rightarrow y' = yz,$$

где z — новая искомая функция. Далее последовательно находим

$$y'' = (yz)'_x = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z') = yG_2(z, z'),$$

$$y''' = (y(z^2 + z'))'_x = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = yz(z^2 + z') + y(2zz' + z'') =$$

$$= y(z(z^2 + z') + 2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'') = yG_3(z, z', z'').$$

Аналогично получаем

$$y^{(n)} = yG_n(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}).$$

Тогда исходное уравнение с учётом его специфики сводится к ДУ порядка $n - 1$:

$$F(x, y \cdot 1, yz, yG_1, \dots, yG_n) = y^m F(x, 1, z, G_1, \dots, G_n) =$$

$$= y^m F(x, 1, z, G_1(z), \dots, G_n(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)})) = 0,$$

т.е. допускает понижение порядка на единицу.

Очевидно, что это уравнение имеет тривиальное решение $y = 0$. Допустим, что удалось найти и общее решение полученного уравнения:

$$z = \widetilde{Z}(z, C_1, \dots, C_{n-1}).$$

Тогда поиск общего решения исходного уравнения сводится к интегрированию ДУ первого порядка:

$$\frac{y'}{y} = \widetilde{Z}(z, C_1, \dots, C_{n-1}),$$

откуда находим

$$y(z, C_1, \dots, C_n) = C_n e^{\int \widetilde{Z}(z, C_1, \dots, C_{n-1}) dx}.$$

Заметим, что полученное выше тривиальное решение дополнительным не будет, т.к. оно содержится в общем при $C_n = 0$.

Рассмотрим геометрическое приложение ДУ подобного типа.

Вопрос: Как определяется центр масс плоской фигуры?

Упражнение 3. Составить ДУ семейства кривых таких, что ордината любой точки кривой равна ординате центра масс криволинейной трапеции, образованной самой кривой, осями координат и ординатой этой точки.

Пример 4. Найти уравнение семейства кривых, описанного в упражнении 3. ДУ такого семейства имеет вид:

$$4y'^2 - yy'' = 0.$$

Упражнение 4. Показать, что это уравнение является однородным относительно искомой функции и её производных.

Принимая во внимание итог упражнения 4, выполним замену искомой функции:

$$y' = yz,$$

где z — новая искомая функция. Далее находим

$$y'' = (yz)'_x = y(z^2 + z').$$

Тогда исходное уравнение с учётом его специфики сводится к ДУ первого порядка

$$4y^2z^2 = y^2(z^2 + z'),$$

откуда имеем

$$y = 0,\ 3z^2 = z'.$$

Очевидно, что тривиальное решение $y = 0$ не удовлетворяет условию задачи. Второе из полученных уравнений имеет общее решение

$$-\frac{1}{z} = 3x + C_1 \Rightarrow z = -\frac{1}{3x + C_1}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем ДУ первого порядка

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{3x + C_1}.$$

Определение типа этого ДУ и построение его общего решения остаётся в качестве упражнения.

Обобщённо однородное уравнение

(уравнение, однородное относительно независимой переменной, зависимой переменной и их дифференциалов, t>0)

Исходное уравнение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

можно также записать в дифференциальное форме:

$$P(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots, d^nx, d^ny) = 0.$$

Считаем, что функция P является однородной относительно всех своих аргументов, т.е.

$$P(tu, tv, tu_1, tv_1, \ldots, tu_n, tv_n) = t^m P(u, v, u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n).$$

В отличие от предыдущих случаев, выполним в том числе и замену независимой переменной

$$x = e^\tau \Rightarrow \ln x = \tau$$

и

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx = ze^\tau,$$

где z — новая зависимая переменная, а τ — новая независимая переменная. Далее последовательно находим

$$y' = y'_x = y'_\tau \tau'_x = (zx)'_\tau \frac{1}{x} = (zx)'_\tau e^{-\tau} =$$
$$= (z'_\tau x + zx'_\tau)e^{-\tau} = (z'e^\tau + ze^\tau)e^{-\tau} = z' + z.$$

После вычисления остальных производных и подстановки всех найденных значений с учётом однородности получим уравнение, не содержащее независимой переменной.

47 Общая теория систем ДУ

1. Существование и единственность решения задачи Коши

Рассмотрим систему в нормальной дифференциальной форме:

$$Dx = f(t, x),\ (t, x) \in G \subset R^{n+1},$$

правая часть которой определена в некоторой области G пространства R^{n+1} своих аргументов. Дадим понятие решения такой системы.

Определение 1. *Решением данной системы дифференциальных уравнений будем называть дифференцируемую вектор-функцию $x : I \to R^n$, обращающую систему в тождество на некотором промежутке $I \subseteq R$.*

Возьмем сужение решения системы на промежуток $I_1 \subseteq I$ и обозначим его через $\widetilde{x}$. Каждое $\widetilde{x}$ так же является решением системы.

Определение 2. *Если решение $x(t)$ не является сужением никакого другого решения (отличного от него), то* ***такое решение называется продолженным*** *(или непродолжаемым).*

Задача Коши для данной системы ДУ ставится следующим образом:

$$Dx = f(t,x),\ (t,x) \in G \subset R^{n+1},\ x|_{t=s} = \xi,\ s \in I,$$

т.е необходимо найти решение системы, проходящее через заданную точку.

1.1 *Интегральный критерий разрешимости задачи Коши.*

Теорема 1. *Пусть правая часть системы непрерывна в указанной области. Тогда непрерывная функция $x : I \to R^n$ является решением задачи Коши тогда и только тогда, когда выполняется интегральное тождество*

$$x(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, x(\tau))d\tau,\ \forall t \in I$$

Доказательство. *Необходимость:* Пусть функция $x(t)$ является решением задачи Коши. Тогда выполняется тождество $Dx(t) = f(t, x(t))$ и условие $x(t)|_{s=t} = \xi$. Проинтегрируем обе части этого тождества от s до t:

$$\int_s^t Dx(\tau)d\tau = \int_s^t f(\tau, x(\tau))d\tau,$$

откуда получаем:

$$x(t) - x(s) = \int_s^t f(\tau, x(\tau))d\tau,\ \text{где}\ x(t)|_{t=s} = x(s) = \xi,$$

что и доказывает необходимость.

Достаточность: Пусть выполняется интегральное тождество. Так как по предположению вектор-функции $f(t,x)$ и $x(t)$ непрерывны, то непрерывной будет и их композиция $f(t, x(t))$. поэтому интеграл в правой части условия является дифференцируемой функцией. Следовательно, дифференцируема и левая часть интегрального тождества, т.е $x(t)$ дифференцируема.

Продифференцируем обе части интегральнго тождества:

$$D(x(t)) = D(\xi + \int_s^t f(\tau, x(\tau))d\tau),$$

откуда находим:

$$x(t) = D(\int_s^t f(\tau, x(\tau))d\tau) = f(t,x)t' - f(t,x)s' = f(t,x).$$

Это означает, что функция $x(t)$ является решением системы. Далее заметим, что:

$$x(s) = \xi + \int_s^t f(\tau, x(\tau))d\tau = \xi,$$

т.е выполняется начальное условие.

Так как функция $x(t)$ является решением системы и удовлетворяет начальному условию, то она является решением поставленной задачи Коши. Достаточность, а вместе с ней и теорема доказаны. ■

При исследовании ДУ часто возникают задачи, приводящие к специальным дифференциальным и интегральным неравенствам. Одним из них является следующее утверждение, позволяющее ограничить некоторую функцию, удовлетворяющую определённому дифференциальному или интегральному неравенству, решением соответствующего дифференциального или интегрального уравнения.

Лемма 1. ***Лемма Гронуолла (Гронуолла-Беллмана)*** *Если неотрицательная функция $u : [a, b] \to R$ удовлетворяет интегральному неравенству*

$$u(t) \leq \alpha + \left| \int_s^t \beta u(\tau) d\tau \right|, \ \alpha > 0, \ \forall t \in [a, b], \ s \in [a, b],$$

то имеет место оценка

$$u(t) \leq \alpha e^{-|\beta(t-s)|}, \ \forall t \in [a, b], \ s \in [a, b].$$

Доказательство. Возьмём произвольное $t \in [a, b], \ s \in [a, b]$. Для определённости будем считать, что $a \leq s \leq t \leq b$. Тогда исходное неравенство леммы можно записать в виде (без внешнего модуля):

$$u(t) \leq \alpha + \left| \int_s^t \beta u(\tau) d\tau \right| \leq \alpha + \int_s^t |\beta| u(\tau) d\tau.$$

Введём вспомогательную функцию(взяв в качестве ее правую часть последнего неравенства):

$$v(t) = \alpha + \int_s^t |\beta| u(\tau) d\tau,$$

при этом, очевидно, что

$$u(t) \leq v(t), \ v(s) = \alpha + \int_s^s |\beta| u(\tau) d\tau = \alpha$$

Продифференцируем обе части равенства для функции $v(t)$:

$$D(v(t)) = D(\alpha + \int_s^t |\beta| u(\tau) d\tau),$$

$$D(v(t)) = D(\int_s^t |\beta| u(\tau) d\tau) = |\beta|((u(t)t' - u(t)s')) = |\beta| u(t),$$

откуда принимая во внимание установленную выше оценку $(u(t) \leq v(t))$, получим неравенсто:

$$D(v(t)) = |\beta| u(t) \leq |\beta| v(t) \Rightarrow D(v(t)) - |\beta| v(t) \leq 0.$$

Полученное неравенство запишем в виде

$$e^{|\beta|t}D(e^{-|\beta|t}v(t)) \leq 0 \Rightarrow D(e^{-|\beta|t}v(t))$$

Значит, функция $e^{-|\beta|t}v(t)$ является невозрастающей на отрезке $[s,b]$ $(s \leq b)$. Поэтому

$$e^{-|\beta|s}v(s) \geq e^{-|\beta|t}v(t)\ \forall t \in [s,b] \Rightarrow v(t) \leq e^{-|\beta|s}e^{|\beta|t}v(s) = e^{-|\beta|(s-t)}\alpha.$$

Окончательно с учётом того, что $u(t) \leq v(t)$ и $s \leq t$, имеем:

$$u(t) \leq v(t) \leq e^{-|\beta|(s-t)}\alpha \Rightarrow u(t) \leq \alpha e^{-|\beta(t-s)}$$

что и требовалось доказать. ■

1.2 *Липшицевы функции(условие Липшица).*

Определение 3. ***Функция*** $f(t,x),\ t \in I \subseteq R,\ x \in E \subseteq R^n$ ***такая, что*** $f : I \times E \to R^n$ ***называется липшицевой*** *на области* $I \times E$ *по аргументу* x*, если она удовлетворяет условию Липшица:*

$$\|f(t,x'') - f(t,x')\| \leq L\|x'' - x'\|\ \forall x', x'' \in E, \forall t \in I,$$

при этом число L *- константа Липшица.*

В дальнейшем для определённости будем брать евклидову норму вектора, т.е:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Если условие Липшица выполняется для функции только в некоторой окрестности точки (t,x), то такую функцию будем называть локально липшицевой. Следует отметить, что непостредственная проверка условия Липшица, вообще говоря, вызывает затруднения. Поэтому используются различные достаточные условия липшицевости функции. В частности, имеет место следующий признак:

Признак липшицевости функции

Пусть $E \subseteq R^n$ - выпуклое множество. Если для вектор-функции $f(t,x) = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$ существуют ограниченные частные производные $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leq K_{ij}$ $(i,j = \overline{1,n})$ $\forall (t,x) \in I \times E$, то функция $f(t,x)$ является липшицевой на указанной области.

Доказательство. (Докажем для скалярного случая $i,j = \overline{1,n},\ K_ij = K$).

Выполнив оценки, используя формулу конечных приращений, получим требуемое:

$$\|f(t,x'') - f(t,x')\| = f'(\xi)\|x'' - x'\| \leq K\|x'' - x'\|\ \forall x', x'' \in E, \forall t \in I$$

■

Вопрос 1: Формула конечных приращений?

Вопрос 2: Может ли функция быть липшицевой если не выполняется признак?

Упражнение 1. Для функции $f(t,x) = |x|+t$ проверить как признак, так и само условие Липшица.

Существование решения задачи Коши.

Ответ на вопрос о разрешимости задачи Коши(без учёта единственности) дает следующая теорема:

Теорема 2. ***Теорема Пеано***

Пусть вектор-функция $f(t,x)$ непрерывна на области $I \times E$ и точка $(s,\xi) \in I \times E$. Тогда задача Коши имеет решение, определенное, по меньшей мере, на некотором отрезке $[s-\delta, s+\delta]$.

Естественно, что при этом остаются в стороне вопросы единственности, реализация которых потребует дополнительных ограничений на правую часть системы.

Однозначная разрешимость задачи Коши.(локально)

Теорема 3. ***Теорема Пикара***

Пусть вектор функция $f(t,x)$ непрерывна на области $I \times E$ и является липшицевой по переменной x в некоторой окрестности точки $(s,\xi) \in I \times E$. Тогда задача Коши $Dx = f(t,x),\ x|_{t=s} = \xi$ имеет единственное решение, определённое, по меньшей мере, на некотором отрезке $[s-h, s+h]$, причем ее решение может быть построено методом последовательных приближений:

$$x^{(0)}(t) = \xi,\ x^{(1)}(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, x^{(0)}(\tau))d\tau, ...,\ x^{(m)}(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, x^{(m-1)}(\tau))d\tau,\ x(t) = \lim x^{(m)}(t).$$

Доказательство. разобьём на несколько шагов

i. Выберем число ρ таким, чтобы замкнутое множество

$$V_p = \{(t,x) : |t-s| \le \rho,\ |x-\xi| \le \rho\}$$

содержалось в окрестности U точки (s,ξ) , т.е. $V_\rho \subseteq U$. Так как правая часть системы непрерывна на компакте V_ρ, то она на нем ограничена, т.е. существует такое число M, что имеет место оценка:

$$|f(t,x)| \le M,\ \forall (t,x) \in V_\rho$$

ii. Положим $h = \min\{\rho, \frac{\rho}{M}\}$. Тогда все последующие приближения будут определены на отрезке $[s-h, s+h]$. Более того они останутся во множестве V_ρ, поскольку выполняются оценки (с учетом выбора ρ и h)

$$|x^{(0)}(t) - \xi| = 0 \le \rho,$$

....

$$|x^{(m)}(t)-\xi| = \left|\int_s^t f(\tau, x^{(m-1)}(\tau))d\tau\right| \le M|t-s| \le \rho$$

iii. Оценим разность двух итераций последовательных приближений (строго это можно показать методом МИ учитывая условие Липшица)

$$\left|x^{(m)}(t)-x(m-1)(t)\right| = \left|\xi + int_s^t f(\tau, x^{(m-1)}(\tau))d\tau - \xi - int_s^t f(\tau, x^{(m-2)}(\tau))d\tau\right| \le$$

$$\le int_s^t \left|f(\tau, x^{(m-1)}(\tau)) - f(\tau, x^{(m-2)}(\tau))\right| d\tau \le ML^{m-1}\frac{|t-s|^m}{m!} \ \forall t \in [s-h, s+h].$$

iv. Последнее означает, что функциональный ряд:

$$\xi + \sum_{m=1}^{\infty}(x^{(m)}(t) - x^{(m-1)}(t), \forall t \in [s-h, s+h]$$

имеет числовую мажоранту $\xi + \sum_{m=1}^{\infty} ML^{m-1}\frac{|t-s|^m}{m!}$. Поэтому по признаку Вейерштрасса этот ряд сходится равномерно на указанном множестве.

v. Далее заметим, что все частичные суммы построенного функционального ряда равны m-ой итерации (т.к. все промежуточные слагаемые попарно уничтожаются), т.е.

$$\xi + \sum_{m=1}^{m}(x^{(m)}(t) - x^{(m-1)}(t)) = ... = x^{(m)}(t).$$

В силу доказанной сходимости существует предел частичных сумм, что обосновывает предельный переход

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)}(t) = \lim_{m\to\infty} \xi + \int_s^t f(\tau, x(m-1)(\tau))d\tau,$$

$$x(t) = \xi + \int_s^t f(\tau, x(\tau))d\tau \ \forall t \in [s-h, s+h].$$

Это означает, что функция $x(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству. Значит, на основании интегрального критерия она является решением задачи Коши на отрезке $[s-h, s+h]$. Таким образом существование и вид решения доказаны.

vi. Единственность докажем методом от противного. Допустим, что наряду с построенным задача Коши имеет еще одно решение $x^*(t)$, отличное от $x(t)$. Функция $y = y(x)$ является решением исходного уравнения. Будем считать, что это решение определено на некотором отрезке $[s-h^*, s+h^*]$. Для всех t из общей окрестности $|t-s| \le \min\{h, h^*\}$, используя интегральный критерий, оценим разность

$$|x(t)-x^*(t)| = ... = \left|\int_s^t f(\tau, x(\tau))d\tau - \int_s^t f(\tau, x^*(\tau))d\tau\right| \le$$

$$\le \int_s^t \left|f(\tau, x(\tau))d\tau - \int_s^t f(\tau, x^*(\tau))\right| d\tau \le \ \{\text{применяем условие Липшица}\} \le$$

$$L\int_s^t |x(\tau)-x^*(\tau)|d\tau \le \ \{\text{применяем лемму Гроноулла при } \alpha = 0\} \ \le 0 * e^{\cdots} = 0$$

Значит, наше допущение неверно и решения совпадают (*более точно:* одно из них является сужением другого). Единственность, а вместе с ней и теорема доказаны. ■

Упражнение 2. Детально расписать шаг **iii**.

Упражнение 3. Расписать применение леммы Гронуолла на последнем шаге.

Пример 1. Возьмем задачу Коши (для скалярного уравнения)

$$x' = x^{2020} + t^{2020} = f(t, x) \; x(1) = 0$$

и выясним ее разрешимость и единственность.

Так как в окрестности точки $(1, 0)$ правая часть непрерывна, то согласно теореме Пеано поставленная задача разрешима. Более того, функция $f(t, x)$ является липшицевой (по признаку), т.к. существует её ограниченная частная производная по x в любой окрестности данной точки. Поэтому согласно теореме Пикара поставленная задача Коши однозначно разрешима.

Вопрос 3: Можно ли найти точное решение?

Упражнение 4. Выписать несколько итераций для построения решения задачи Коши методом последовательных приближений.

48 Линейные системы ДУ с переменными коэффициентами

Разрешимость задачи Коши.

Рассмотрим систему линейных нестационарных ДУ в векторной форме

$$Dx = A(t) + f(t), \quad t \in I \subset R, \quad x \in G \subset R^n,$$

где $A(t)$- матрица $n \times n$ и $f(t)$ n-вектор-функция непрерывны на I. Вопрос о разрешимости соответствующей задачи Коши

$$Dx = A(t)x + f(t), \qquad x|_{t=s} = \xi$$

можно изучать на основе доказанной нами ранее теоремы Пикара. Однако для линейных систем можно привести несколько более интересный результат. Имеет место

Теорема 1. *Для линейных систем задача Коши для любых $s \in I$ и $\xi \in R$ однозначно разрешима (т.е. глобально).*

Доказательство За отправную точку возьмем т. Пикара. Для этого проверим липшицевость правой части линейной системы. Предварительно заметим, что поскольку матрица коэффициентов непрерывна на I, то ее норма ограничена, т.е. $||A|| = L < \infty$. Возьмем произвольные $x', x'' \in G$ и выполним оценки

$$|A(t)x'' + f(t) - A(t)x'' - f(t)| = |A(t)(x'' - x') \leq ||A||(x'' - x) = L(x'' - x').$$

Как видим условие Липшица имеет место, т.е. задача Коши имеет решение (глобально). Для завершения доказательства остается выполнить

Упражнение 1. Используя последний этап доказательства т. Пикара аналогично доказать единственность решения задачи Коши для линейных систем.

Структура общего решения.

Отметим, что общее решение линейной нестационарной системы (как и для стационарных систем) представляется в следующем виде

$$x(t) = x_{oo}(t) + x_{\text{чн}}(t)$$

где в привычных нам обозначениях: $x_{oo}(t)$ - – общее решение соответствующей однородной (при f(t)=0) системы (при f(t)=0), а $x_{\text{чн}}(t)$ – какое либо частное решение неоднородной системы.

Упражнение 2. Доказать этот факт.

Совокупность n линейно независимых частных решений $x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)$ линейной однородной системы образует базис пространства ее решений ($x^{(i)}(t)$ – вектор-столбцы, их линейная комбинация дает любое решение).

Определение 1. *Матрица X(t), столбцами которой являются такие линейно независимые решения.*

$$X(t) = (x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t))$$

*называется **фундаментальной** матрицей линейной однородной системы.*

Общее решение однородной системы можно записать в виде

$$x_{oo}(t) = X(t)C,$$

где C – произвольный постоянный вектор.

Метод Лагранжа.

К сожалению универсальных методов интегрирования линейных нестационарных систем нет. Однако, если известна фундаментальная матрица, то для нахождения частного решения, по меньшей мере в квадратурах (а вместе с этим и общего) линейной неоднородной системы можно применять метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Аналогично, как и ранее, частное решение ищем в виде

$$x_{\text{чн}}(t) = X(t)C(t)$$

где некоторая вектор-функция c(t) подлежит определению. Подставим это выражение в систему

$$D(X(t)C(t)) = A(t)X(t)C(t) + f(t)$$

откуда получаем

$$DX(t)C(t) + X(t)DC(t) = A(t)X(t)C(t) + f(t),$$

т.е.

$$(DX(t) - A(t)X(t)C(t) + X(t)DC(t) = f(t)$$

Так как X(t) – решение однородной системы, то последнее равенство примет вид

$$0 + X(t)DC(t) = f(t)$$

Тогда в силу невырожденности фундаментальной матрицы имеем

$$DC(t) = X(t)^{-1} f(t),$$

откуда находим требуемое

$$C(t) = \int_s^t X(\tau)^{-1} f(\tau) d\tau$$

Приводимые системы.

Среди множества линейных однородных систем выделяют класс так называемых приводимых по Ляпунову систем. Под такими понимают системы, которые с помощью линейной обратимой замены переменных можно привести к стационарной системе, которые мы умеем интегрировать.

Упражнение 3. С помощью замены $x = L(t)y, \;\; detL(t) \neq 0 \quad \forall t$ найти матрицу коэффициентов (которая должна быть постоянной) преобразованной системы. Выявить проблемы такого подхода. К приводимым системам относят линейные системы с периодической матрицей коэффициентов

$$Dx(t) = A(t)x, \quad A(t+w) = A(t) \quad \forall t,$$

при этом также остается проблема поиска матрицы преобразования.

49 Интегрируемость систем в нормальной форме

Будем рассматривать систему д.у первого порядка в нормальной форме:

$Dx_i = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ или $Dx = f(t,x), f_i : Q \to R, G \subset R^{n+1}$ в предположении разрешимости задачи Коши: $\forall (s, \xi) \in G \; \exists x(t), x|_{t=s} = \xi$.

Если система содержит производные более высокого порядка, то обозначая их за новые переменные, мы придём к системе уравнений 1-го порядка. Естественно, что при этом повысится размерность системы.

Под решением, как обычно, понимаем дифференцируемую функцию $x(t)$, обращающую систему в тождество на $I \subset R$.

Определение 1. *Векторная функция $\varphi(t, C_1, ..., C_n)$ (или совокупность $\varphi_k(t, C_1, ..., C_n), k = \overline{1,4}$) называют **общим решением** на области G, если система $x = \varphi(t, C_1, ..., C_n)$ разрешима относительно $C_1, ..., C_n$ и при найденных фиксированных значениях произвольных постоянных получаем частное решение.*

Определение 2. *Функция $\Phi(t, x)$ дифференцируема и отлична от постоянной на любой подобласти(? участков постоянства), называется **первым интегралом системы**, если $\forall$ решение x(t) имеет $\Phi(t, x(t)) - const$(вдоль решений).*

*Если Φ не зависит от t, то это **стационарный** интеграл. В силу определения график каждого решения лежит на поверхности уровня: $\Phi(t, x) = C$, а график решения проходит через точку $(s, \xi) \in$ поверхности $\Phi(t, x_1, ..., x_n) = C_0 = \Phi(s, \xi)$.*

Отметим, что термин "интеграл"неоднозначен $(\Phi, \Phi = C)$. Это объясняется тем, что он использовался в параллельно развивающихся областях, в него вкладывали несколько иной смысл.

Пример 1. Покажем, что функция $\Phi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ является первым интегралом системы

$$\begin{cases} Dx_1 = x_2 \\ Dx_2 = -x_1. \end{cases}$$

Путём сведения к д.у 2-го порядка:

$$\begin{cases} D^2x_1 = Dx_2 = -x_1 \\ x_2 = Dx_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1 cost + C_2 sint \\ x_2 = -C_1 sint + C_2 cost \end{cases} \text{- общее решение}$$

Подставим $\Phi(x_1(t), x_2(t)) = (...)^2 + (...)^2 = ... = C_1^2 + C_2^2 = C$ - первый интеграл.

Естественно, что такой способ проверки не является конструктивным, поскольку требует знание решения.

Теорема 1. *Функция $\Phi(t, x)$ является первым интегралом системы $\Leftrightarrow$ выполняется тождество:* $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} f_1 + ... + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} f_n \equiv 0 \ \forall (t, x) \in G$

Доказательство.

$\Rightarrow$ Пусть (s,ξ) - любая точка, через которую проходит решение $x(t)$, т.е $x(s) = \xi$. Т.к Φ - первый интеграл, то

$$\Phi(t, x(t)) = C \Rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = \Phi_t' + \Phi_{x_1}' f_1 ... \overset{t}{\equiv} 0$$

откуда в силу произвольности точки (s, ξ) следует справедливость тождества.
$\Leftarrow$ Обратно, пусть выполняется тождество $\forall$ решений x(t):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} f_1(t, x(t)) + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} f_n \equiv 0$$

.

Тогда: $0 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} Dx_1 + ... + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} Dx_n = D\Phi(t, x(t)) \Rightarrow \Phi$ - первый интеграл, т.е $\Phi(t, x(t)) \equiv const$. ■

На предыдущем примере: $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} f_1 + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} f_2 = 0 + 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1) \equiv 0 \Rightarrow \Phi(t, x) = x_1^2 + x_2^2$ - первый интеграл.

Теперь закономерно возникает вопрос: как находить первые интегралы системы?

Теорема 2. *Пусть выражение $\phi_1(x)dx_1 + ... + \phi_n(x)dx_n$ является дифференциалом некоторой функции $\Phi(t, x)$ и $\phi_1 f_1 + ... + \phi_n f_n = 0$, $\forall (t, x) \in G$. Тогда Φ - первый интеграл системы.*

Доказательство. Согласно условия теоремы $\exists \Phi :\ d\Phi = \phi_1(x)dx_1 + ... + \phi_n(x)dx_n$, откуда следует, что $\phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Rightarrow d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n$. С другой стороны $dx_i = f_i \Rightarrow d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} f_1 + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} f_n = \phi_1 f_1 + ... + \phi_n f_n =$ [**по условиию**] $= 0$, т.е. $d\Phi = 0 \Rightarrow \Phi = const$ ■
Эта теорема дает один из методов построения первых интегралов, который состоит в нахождении так называемых интегрируемых комбинаций: $\phi_1 f_1 + ... + \phi_n f_n = 0$, посредством применения алгебраических операций к уравнениям системы.

Пример 2. На основе предыдущего:

$$Dx_1 = x_2, Dx_2 = -x_1 \Rightarrow x_1 Dx_1 + x_2 Dx_2 = x_1x_2 + x_2(-x_1) = 0$$

$$-\textbf{интегрируемая комбинация},\ d(x_1^2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = C - \textbf{первый интеграл}$$

50 Редукция системы

Знание одного первого интеграла позволяет понизить размерность системы (редуцировать). Действительно, из соотношения $\Phi(t, x_1, ..., x_n) = C$ можно выразить одну из переменных через другие и подставить в систему. Получим новую систему меньшей размерности (для этого $\frac{\forall \Phi}{\forall x_k} \neq 0$).
Пример 1.

$$Dx_1 = x_2, Dx_2 = -x_1.$$

Ранее получили, что $x_1^2 + x_2^2 = C$ - первый интеграл. Выразим $x_2 = \pm\sqrt{c - x_1^2}$, и подставим в первое уравнение:

$$Dx_1 = \pm\sqrt{c - x_1^2} - \textbf{уравнение первого порядка} \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{C} sin(t),\ x_2 = \sqrt{C} cos(t)$$

51 Базис первых интегралов

Первые интегралы $\Phi_1(x), \Phi_2(x)...\Phi_m(x)$ называют функционально независимыми на $G \subset R^{(m+1)}$, если $\forall x \in G$ ранг матрицы якоби равен количеству функций m:

$$rank \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\Phi_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} = m$$

Совокупность n независимых первых интегралов образует базис, если любой первый интеграл ϕ можно представить в виде: $\Phi = H(\Phi_1, \Phi_2...\Phi_n)$, где H - произвольная дифференцируемая функция.

Пример 1. Являются ли функции $\Phi_1 = x_1 + x_3$, $\Phi_2 = x_2cos(t) - x_3sin(t)$, $\Phi_3 = x_2sin(t) + x_3cos(t)$ базисом?

Построим матрицу якоби для данных функций и найдем ее ранг:

$$det(J) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & cos(t) & -sin(t) \\ 0 & sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \forall t rank(J) = 3$$

Отметим, что достаточное условие существования базиса первых интегралов - однозначное разрешение задачи Коши. Необходимое и достаточное условие - однозначное разрешение задачи оши и неприрывная дифференцируемость этого решения по ???

52 Дифференциальная система в симметричной форме

Рассмотрим систему, в которой явно отсутсвует независимая переменная: $Dx = f(x)$ или $Dx_i = f_i(x_1, x_2...x_n)$ Такие системы называются автономными или стационарными. Их удобно записывать в симметрической форме:

$$dt = \frac{dx_1}{f_1(x} = ... = \frac{dx_n}{f_n(x}$$

Для нахождения интегрированных комбинаций используем свойство пропорций:

$$\frac{dx_1}{f_1} = ... = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{\phi_1 dx_1 + ... + \phi_n dx_n}{\phi_1 f_1 + ... + \phi_n f_n}$$

Согласно т. 2, если $\phi_1 dx_1 + ... + \phi_n dx_n$ является некоторой неприрывной функцией Φ и $\phi_1 f_1 + ... + \phi_n f_n = 0$, то Φ - первый интеграл.

Для разрешения системы в симметричной форме надо найти $n - 1$ независимых интегралов.

Если система неавтономная, то можно поднять размерность, положив $t = x_{n+1}$, а переменную t в операторе D заменить на τ:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = f_1(x_{n+1}, x_1, ...x_n) \\ ... \\ \frac{dx_{n+1}}{d\tau} = f_{n+1}(x_{n+1}, x_1, ...x_n) \end{cases}$$

53 Исследование устойчивости решений дифференциальных систем методом функций Ляпунова

1. Необходимые определения.

Рассмотрим систему ДУ в нормальной векторной форме

$$Dx = f(t, x)\ (t, x) \in G \subseteq R^{n+1},\ t \geq s$$

$$f(t, x) = col(f_1(t, x), ..., f_n(t, x)),\ ||x_n|| \leq r$$

правая часть которой определена и непрерывны в G и удовлетворяет условию существования и единственности решения задачи Коши

$$Dx = f(t, x),\ x|_{t=s} = \xi$$

Решение поставленной задачи обозначим через $x = x(t, s, \xi)$. Будем считать, что данная система имеет тривиальное решение $x \equiv 0$, т.е. $f(t, 0) \equiv 0\ \forall t \geq s$.

Вопрос 1. Такое предположение является существенным ограничением?

Аргументация: пусть $x_1(t)$ - какое-либо решение исходной системы, выполнив переход к новым переменным: $y = x - x_1(t)$, получим новую систему:

$$D(y + x_1(t)) = f(t, y + x_1(t)).$$

Так как справедливо тождество:

$$Dx_1(t) \equiv f(t, x_1(t)),$$

то последняя система имеет тривиальное решение: $y \equiv 0$.

Введем теперь необходимые в дальнейшем понятия.

Определение 1. *Решение $x = (t, s, \xi)$ называется* ***устойчивым по Ляпунову*** *(вправо, т.е. $t \geq s$), если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ такое, что } \forall t \geq s,\ \forall \Delta\xi \in R^n$$

$$\text{из } ||\Delta\xi|| \leq \delta \Rightarrow ||x(t, s, \xi + \Delta\xi) - x(t, s, \xi)|| \leq \xi$$

Упражнение 1. Сделать схематический чертеж.

Данное определение устойчивости означает, что малым изменениям начальных данных отвечает малое изменение решения. Как отмечалось ранее, понятие устойчивости имеет фундаментальное значение как для теории ДУ, так и ее приложений.

Определение 2. *Решение $x = x(t, s, \xi)$ называется* ***асимптотически устойчивым****, если оно устойчиво по Ляпунову и выполняется дополнительное условие:*

$$\text{из } ||\Delta\xi|| \leq \delta \Rightarrow ||x(t, s, \xi + \Delta\xi) - x(t, s, \xi)|| \leq \xi$$

Упражнение 2. Сделать схематический чертеж.

Вполне естественно, что непосредственное исследование устойчивости по определению вызывает серьезные трудности.

Вопрос 2. Почему?

Достаточно серьезной альтернативой этому является метод функций Ляпунова, поскольку он не требует знания решения.

Определение 3. *Скалярная функция $V(t, x)$, $(t, x) \in G$ называется* ***знакоположительной*** *в G, если $V(t, x) \geq 0$, причем $V(t, x) > 0$ при $||x|| \neq 0$ и $V(t, x) = 0$ при $||x|| = 0$, т.е. она всюду положительна, за исключением нуля.*

Определение 4. *Скалярная функция $V(t, x)$, $(t, x) \in G$ называется* ***положительно-определенной*** *в G, если существует знакоположительная функция $W(x)$ такая, что $V(t, x) \geq W(x) > 0$ при $||x|| \neq 0$ и $V(t, 0) = W(0) = 0$ при $||x|| = 0$, т.е. она фактически отделена от нуля при ненулевых значениях.*

Вопрос 3. В чем принципиальная разница этих двух понятий?

Аналогично определяются знакоотрицательные и отрицательно-определенные функции.

Упражнение 3. Дать определения 5 и 6 знакоотрицательных и отрицательно-определенные функций.

Для пояснения рассмотрим:

Пример 1. Возьмем скалярную функцию, зависящую от параметра

$$V(t, x) = x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2 cos(t)$$

При $\alpha = 1$ имеем:

$V(t, x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 cos(t) \geq x_1^2 + x_2^2 - 2|x_1||x_2| \geq (x_1 - x_2)^2 \geq 0$, т.е. функция будет знакоположительной.

Упражнение 4. Исследовать случай $\alpha = -1$

При $\alpha \neq \pm 1$ имеем:

$$V(t,x) = x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2 cos(t) \geq x_1^2 + x_2^2 - 2|\alpha||x_1||x_2| \geq$$

$$\text{[применяем неравенство Коши]}\ x_1^2 + x_2^2 - |\alpha|(x_1^2 + x_2^2) = (1 - |\alpha|)(x_1^2 + x_2^2) =$$

$$= W(x_1, x_2), \text{ где } V(t,0) = W(0) = 0, V(t,x) \geq W(x) > 0 \text{ при } ||x|| \neq 0,$$

т.е. функция будет положительно-определенной.

Определение 5. *Знакоположительная непрерывно дифференцируемая функция V(x) (не зависит от времени) называется **функцией Ляпунова** заданной системы, если выполняется неравенство:*

$$\frac{\delta V}{\delta x_1} f_1(t,x) + ... + \frac{\delta V}{\delta x_n} f_n(t,x) \leq 0 \ \forall t \geq s, \ ||x|| \leq r$$

(т.е. ее производная в силу системы знакоотрицательна).

Теорема 1. *Если для исходной системы существует функция Ляпунова $v(x)$, то нулевое решение этой системы является устойчивым по Ляпунову.*

Доказательство.*Доказательство разобъем на несколько шагов:*

1)Возьмем положительное $0 < \varepsilon < r$ и обозначим сферу с центром в начале координат соответствующего радиус через

$$S_\varepsilon : ||x|| = \varepsilon \ (S_\varepsilon \subset S)$$

Поскольку функция $V(x)$ положительна и непрерывна на S_ε, то она на этой сфере имеет некоторое минимальное значение $m > 0$, т.е. $||V(x)|| > m$(сделать чертеж).

Кроме того, из непрерывности функции $V(x)$ (по меньшей мере она изменяется от 0 до m) следует, что

$$\exists \delta, \ 0 < \delta < \varepsilon < r, \ \text{такое что } \forall x, \ ||x|| \leq \delta$$

имеет место оценка $V(x) \leq 0.5m$.

2)Пусть $||\xi|| \leq \delta$. Возьмем решение $x = x(t,s,\xi)$ при $t = s$, т.е. $x = x(s,s,\xi)$. Покажем, что траектория этого решения лежит целиком в шаре, ограниченном сферой S_ε, т.е. не достигает границы

$$||x(t,s,\xi)|| < \varepsilon, \ \forall s \leq t < +\infty.$$

Допустим противное. Это значит, что последняя строгая оценка выполняется не для всех указанных значений t. Пусть среди них найдется $t_1 > s$ такое, что решение

достигает границы, т.е. $x(t_1, s, \xi)|| = \varepsilon$.
Исследуем поведение функции Ляпунова вдоль этого решения. По условию теоремы:

$$\frac{\delta V}{\delta x_1} f_1(t,x) + ... + \frac{\delta V}{\delta x_1} f_n(t,x) = \frac{\delta V}{\delta x_1}\frac{\delta x_1}{\delta t} + ... + \frac{\delta V}{\delta x_n}\frac{\delta x_n}{\delta t} = \frac{dV}{dt} \leq 0.$$

Следовательно, функция $V(x)$ *невозрастающая*

$$t_1 > s \Rightarrow V(x(t_1, s, \xi)) \leq V(x(s, s, \xi)).$$

Кроме этого, с учетом установленного ранее, имеет место цепочка неравенств:

$$m \leq V(x(t_1, s, \xi)) \leq V(x(s, s, \xi)) = V(\xi) \leq 0.5m.$$

Получили противоречие. Значит наше допущение неверно и

$$||x(t, s, \xi)|| = ||x(t, s, \xi) - 0|| < \varepsilon \;\forall s \leq t \leq +\infty,$$

т.е. тривиальное решение $x(t) = 0$ *устойчиво. Теорема доказана.* ■

Следствие 1. *Если система имеет стационарный интеграл* $\Phi(x) = C$, *положительный в проколотой окрестности нуля, то тривиальное решение устойчиво.*

Упражнение 5. Доказать следствие (*hint:* в качестве функции Ляпунова взять функцию $\Phi(x)$).

Метод функций Ляпунова позволяет исследовать и асимптотическую устойчивость. Имеет место (без док-ва).

Теорема 2. *Если для системы существует положительно-определенная функция* $V(x)$ *такая, что выполняется неравенство:*

$$\frac{\delta V}{\delta x_1} f_1(t,x) + ... + \frac{\delta V}{\delta x_1} f_n(t,x) \leq -w(x) \;\forall t \geq s,\; ||x|| \leq r,$$

то нулевое решение системы асимптотически устойчиво.

Для иллюстрации рассмотрим

Пример 2. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы уравнений

$$Dx_1 = x_2 sin(t) - x_1^3,\; Dx_2 = -x_1 sin(t) - x_2^3$$

Возьмем функцию $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Она непрерывно дифферен-цируема и знакоположительна ($V > 0$ при $x \neq 0$ и в нуле обращается в нуль). Определим знак производной этой функции в силу системы

$$\frac{\delta V}{\delta x_1} f_1(t,x) + \frac{\delta V}{\delta x_2} f_2(t,x) =$$
$$= 2x_1(x_2 sin(t) - x_1^3) + 2x_2(-x_1 sin(t) - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4) \leq 0 \;\forall x_1, x_2$$

Значит, выбранная функция является функцией Ляпунова. Поэтому согласно теореме 1 тривиальное решение $x_1 = x_2 = 0$ системы устойчиво.

Упражнение 6. Исследовать асимптотическую устойчивость

($hint$: взять $w(x) = 2(x_1^4 + x_2^4)$).

Как видим, предложенный подход требует знания специальных функций $V(x)$, для построения которых общих методов нет.

54 Уравнения с частными производными

Линейные однородные уравнения с частными производными 1-го порядка.

Уравнения вида

$$f_1(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + f_n(x_1, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

называют линеными однородными уравнениями с частными производными 1-го порядка относительно неизвестной функции $u = u(x_1, ..., x_n)$. Такое уравнение очень тесно связано с ОДУ.

Справедлива(без док-ва)

Теорема 1. *Дифференцируемая по своим аргументам функция $u = u(x_1, ..., x_n)$ является решением данного уравнения тогда и только тогда, когда она - первый интеграл системы в нормальной дифференциальной форме*

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{f_n(x_1, ..., x_n)}$$

Построив базис первых интегралов $u_1(x_1, ..., x_n), ..., u_{n-1}(x_1, ..., x_n)$ этой системы, общее решение исходного уравнения в частных производных можно записать в виде $U = H(u_1, ..., u_{n-1})$, где $H(u_1, ..., u_{n-1})$ - произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

Пример 1. Возьмем уравнение

$$x_2\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial u}{\partial x_2} + x_1x_2\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \ (x_1, x_2, x_3 > 0, u = u(x_1, x_2, x_3))$$

Оно является линейным однородным уравнением с частными производыми 1-го порядка. Запишем соответствующую ему систему в нормальной дифференциальной форме

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_2x_3}.$$

Составляя две интегрируемые комбинации:

$$\frac{x_1dx_1 - x_2dx_2}{x_1x_2 - x_2x_1} = \frac{d(x_1^2 - x_2^2)}{0}$$

и

$$\frac{dx_1}{x_2} - \frac{\frac{dx_3}{x_3}}{x_2} = \frac{dx_1}{x_2} - \frac{lnx_3}{x_2} = \frac{d(x_1 - lnx_3)}{x_2} = 0,$$

находим соответственно два первых интеграла

$$u_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2, \ u_2(x_1, x_2) = x_1 - lnx_3.$$

Упражнение 1. Проверить, используя ранг якобиана, что функции u_1, u_2 независимы.

Тогда общее решение данного уравнения в частных производных можно записать в виде $U = H(u_1, u_2)$, где $H(u_1, u_2)$ - произвольная дифференцируемая функция двух переменных.

Задача Коши для исходного уравнения состоит в нахождении его решения $u = u(x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющего условию

$$u|_{x_s=a} = \varphi(x_1, ..., x_{s-1}, x_{s+1}, ..., x_n)$$

с заданной функцией φ от $n-1$ переменной. Далее, для упрощения записи без ограничения общности можно считать, что $s = 1$, т.е последнее условие имеет вид

$$u|_{x_1=a} = \varphi(x_2, ..., x_n).$$

Для решения задачи Коши воспользуемся алгоритмом:

1. запишем соответствующую систему в нормальной дифференциальной форме:

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{f_n(x_1, ..., x_n)}$$

2. построим базис первых интегралов $u_1(x_1, ..., x_n), ..., u_{n-1}(x_1, ..., x_n)$ этой системы

3. составим функциональную систему уравнений

$$u_1(a, x_2, ..., x_n) = C_1, ..., u_{n-1}(a, x_2, ..., x_n) = C_{n-1}$$

4. рещаем эту систему относительно независимых переменных $x_1, ..., x_n$(с учетом начального условия)

$$x_1 = a,\ x_2 = F_2(C_1, ..., C_{n-1}), ..., x_n = F_n(C_1, ..., C_{n-1})$$

5. принимая во внимание найденные величины, записываем решение задачи Коши

$$u = \varphi(F_2(C_1, ..., C_{n-1}), ..., F_{n-1}(C_1, ..., C_{n-1}))$$

6. подставляя в последнее равенство вместо величин $C_i, i = 1, .., n-1$ их значения из п.3), найдём искомое решение

$$u = \varphi(F_2(u_1(a, x_2, ..., x_n), ..., u_{n-1}(a, x_2, ..., x_n)), ..., F_n(u_1(a, x_2, ..., x_n), ..., u_{n-1}(a, x_2, ..., x_n)))$$