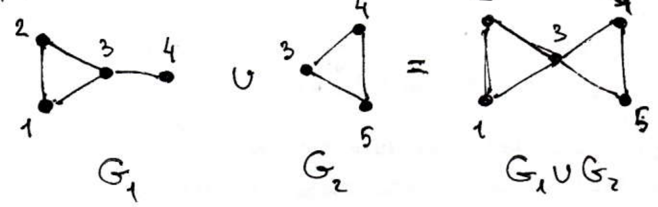
⑦ Пусть имеются графы G_1 и G_2. Объединением графов G_1 и G_2 наз-ся граф $G_1 \cup G_2$

$$G_1 \cup G_2 = \big(V(G_1) \cup V(G_2),\ E(G_1) \cup E(G_2)\big).$$

множество вершин результирующего графа представляет собой объединение мн-в вершин графов G_1 и G_2, а мн-во рёбер объединение мн-в рёбер...

Примеры:



В результате объединения графов G_1 и G_2 получается граф

⑧ Пусть имеются графы G_1 и G_2 такие, что $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Декартовым произведением графов G_1 и G_2 наз-ся граф $G_1 \times G_2$ ~~на~~ с множеством вершин

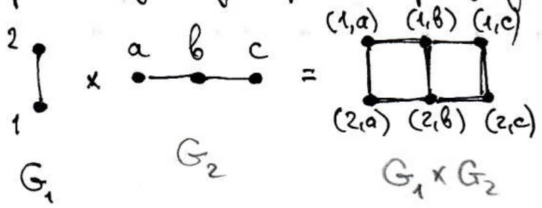
$$V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$$

и две вершины (u_1, u_2) и $(v_1, v_2) \in V(G_1 \times G_2)$ смежны тогда и только тогда, когда

1) $u_1 = v_1$ и $\{u_2, v_2\} \in E(G_2)$ или

2) $\{u_1, v_1\} \in E(G_1)$ и $u_2 = v_2$.

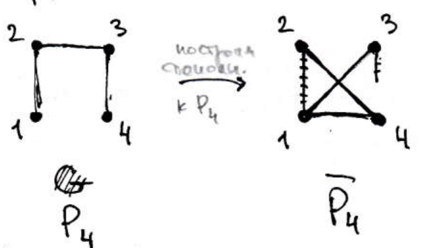
Пример: Найдём декартово произведение следующих двух графов:



(вершинами декартова произведения графов будут упорядоченные пары ... Соединяем ребром вершины, в которых первые компоненты совпадают, а вторые смежны в графе G_2. Также соединяем ребром вершины, в которых первые компоненты смежны в графе G_1, а вторые совпадают)

⑨ "Дополнение графа". Дополнением графа G (или дополнительным графом к графу G) наз-ся граф $\bar{G}$, в котором множество вершин $V(\bar{G}) = V(G)$ и $\{u, v\} \in E(\bar{G}) \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E(G)$ (две различные вершины u, v смежны в дополнении графа $G \Leftrightarrow$ они не смежны в графе G). Заметим, что дополнение графа G получается из графа G удалением всех рёбер, которые ~~не было~~ есть в графе G и добавлением всех рёбер, которых не было в графе G.

Примеры:

1) 

2) $\bar{O}_n = K_n$ 3) $\bar{K}_n = O_n$.

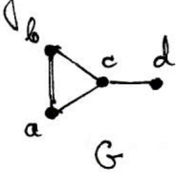
Опр. Граф ~~который~~, изоморфный своему дополнению, наз-ся самодополнительным.

Примеры: K_1, P_4, C_5 – самодополнительные графы.

§ Степени вершин графа. Графические последовательности.

G, $v \in V(G)$ $\deg(v) = |\{e \in E(G) : v \in e\}|$.

Напомним, что степень вершины v в графе – это число вершин, смежных с вершиной v. Другими словами, степень вершины v в графе равна числу рёбер графа, содержащих вершину v.



$\deg(a) = 2$ (степень вершины a равна 2, т.к. вершина a содержится в двух рёбрах)

$\deg(b) = 2$ (степень вершины b равна 2, т.к. вершина b содержит. в двух рёбрах, в ребре $\{a,b\}$ и $\{b,c\}$).

$\deg(c) = 3$ (степень вершины c равна 3, т.к. вершина c содержится в трёх рёбрах $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ и $\{c,d\}$).

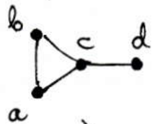
$\deg(d) = 1$ (степень вершины d равна 1, т.к. вершина d содержится в одном ребре $\{c,d\}$).

Опр. Список степеней вершин графа наз-ся степенной последовательностью графа.

[redacted] Изменяя порядок следования степеней вершин в списке мы будем получать различные последовательности, отличающиеся друг от друга только порядком следования чисел. Мы не будем различать последовательности, получающиеся друг из друга перестановкой элементов. Мы будем записывать степени вершин графа в степенной последовательности в порядке невозрастания, начиная с наибольших степеней:

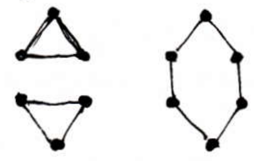
$(d_1, d_2, \dots, d_n)$ – степенная последов. графа $\Rightarrow d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$.

Пример:



$(3,2,2,1)$ – степен. последовательность

Изоморфные графы можно изобразить одним рисунком. Следовательно, (изоморфные графы имеют одинаковые степенные последовательности) степенные последовательности изоморфных графов совпадают. С другой стороны, графы с одинаковыми степенными последовательностями необязательно изоморфны. Рассмотрим два графа:



G_1 $\quad$ G_2

Оба графа имеют степенную последовательность $(2,2,2,2,2,2)$, но эти графы неизоморфны.

Лемма ("о рукопожатиях"). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу рёбер

$$\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = 2\cdot|E(G)|.$$

Док-во:

$\deg(v)$ = число рёбер, содержащих вершину v;
каждое ребро содержит две вершины;
каждое ребро вносит в сумму вклад, равный 2;
поэтому сумма равна удвоенному числу рёбер. $\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = \underbrace{2+2+\dots+2}_{|E(G)|} = 2\,|E(G)|$ ■

Эта лемма наз-ся леммой о рукопожатиях из-за аналогии между ребром, имеющим две концевые вершины, и рукопожатием, в котором участвуют две руки.

Следствие 1. Сумма степеней всех вершин графа – чётное число.

Следствие 2. В любом графе чётное число вершин нечётной степени.

Док-во:

$$\underbrace{\sum_{v\in V(G)} \deg(v)}_{\text{чётное}} = \overbrace{\sum_{\substack{v\in V(G)\\ \deg(v)\text{-нечёт}}} \deg(v)}^{\text{сумма нечётн. степен.}} + \underbrace{\overbrace{\sum_{\substack{v\in V(G)\\ \deg(v)\text{-чёт}}} \deg(v)}^{\text{сумма чётных ст.}}}_{\text{чётное}} \Rightarrow \sum_{\substack{v\in V(G)\\ \deg(v)\text{-нечёт}}} \deg(v) \text{ – чётное число}$$

Сумма нечётных чисел чётна. Следовательно, число слагаемых в сумме чётно. ■

Опр. Невозрастающая последовательность $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ целых неотрицательных чисел наз-ся графической, если существует граф G, степенная последовательность которого совпадает с d. При этом говорят, что граф G реализует последовательность d.

Примеры: 1) Последовательность $d=(2,2,1,1)$ – графическая. Эта последовательность реализуется графом

Очевидно, степенная последовательность этого графа совпадает с d.

2) Последовательность $d=(2,2,1)$ не графическая. От противного. Допустим, что последовательность графическая. Тогда существует граф, в котором три вершины степени 2, 2 и 1. В этом графе одна вершина нечётной степени, чего быть не может, поскольку в каждом графе число вершин нечётной степени чётно. Полученное противоречие доказывает неграфичность последовательности d.

Следствие 2 даёт нам необходимое условие графичности последовательности: если последовательность графическая, то в ней чётное число число нечётных чисел. Однако это условие не является достаточным.

Существует алгоритм, который позволяет определить является ли заданная последовательность графической. В основе этого алгоритма лежит следующий критерий графичности последовательности.

Теорема (критерий графичности). Пусть $d=(d_1,d_2,\dots,d_n)$ - последовательность целых неотрицательных чисел такая, что

$$n > d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$$

и последовательность d' получается из d удалением первого элемента d_1 и уменьшением на 1 ~~оставшихся первых~~ (следующих) d_1 членов:

$$d' = (d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n).$$

Последовательность d графическая тогда и только тогда, когда последовательность d' графическая.

Пример. Рассмотрим последовательность $d=(3,3,2,2,2,1,1)$. Удалим из последовательности первый элемент - элемент 3. После этого уменьшим на 1 ~~первые~~ (следующие 3) три элемента. Получим последовательность $d'=(2,1,1,2,1,1)$. Теорема утверждает, что последовательность d графическая $\Leftrightarrow$ последовательность d' графическая.

Док-во: "$\Leftarrow$" Пусть последовательность

$$d' = (\underset{\deg(v_2)}{\underset{\shortparallel}{d_2-1}}, \underset{\deg(v_3)}{\underset{\shortparallel}{d_3-1}}, \dots, d_{d_1+1}-1, \underset{\deg(v_{d_1+2})}{\underset{\shortparallel}{d_{d_1+2}}}, \dots, d_n)$$

графическая.

Это значит, что существует граф G', реализующий последовательность d'. Пусть вершинами графа G' являются вершины $v_2, v_3, \dots, v_n$. (Пусть граф G' состоит из вершин $v_2, v_3, \dots, v_n$).

Не теряя общности можно предполагать, что вершины графа проиндексированы так, что степени первых d_1 вершин графа равны первым d_1 членам последовательности.

Граф G' легко подправить так, что он будет реализовывать исходную последовательность d. Добавим в граф новую вершину v_1, которую соединим ребром с вершинами $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$. Убедимся, что степенная последовательность получившегося графа совпадает с последовательностью d.

Степень вершины v_1 равна d_1. Степени вершин $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ увеличатся на 1 и станут равными соответственно $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$. Степени остальных вершин не изменятся.

$$(d_1, d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}, d_{d_1+2}, \dots, d_n) = d.$$

Граф реализует последовательность d. Следовательно, последовательность d графическая.

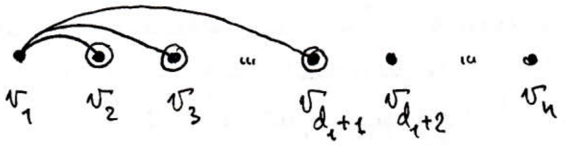
"$\Rightarrow$" Пусть теперь последовательность d является графической. Значит существует граф G, реализующий последовательность d

Пусть

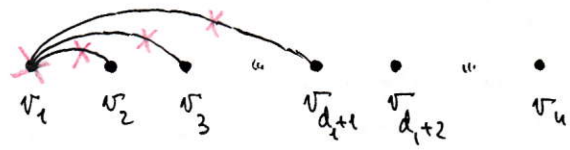
$$V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_{d_1+1}, v_{d_1+2}, \dots, v_n\} \quad \text{и} \quad \deg(v_i)=d_i, \text{ где } i=1,2,\dots,n.$$

Рассмотрим два случая по отдельности. В первом случае мы докажем, что последовательность d' графическая, а второй случай сведём к первому случаю.

Случай 1. Пусть в графе G вершина v_1 смежна с вершинами $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$. Картинка здесь такая



Граф G можно подправить так, что он будет реализовывать последовательность d'. Удалим из графа вершину v_1 вместе с инцидентными ей рёбрами.



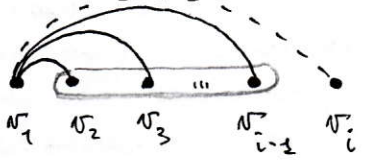
Убедимся, что степенная последовательность получившегося графа совпадает с последовательностью d'. Степени вершин $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ уменьшаться на 1 и станут равными d_2-1, $d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1$. Степени остальных вершин не изменяться

$$(d_2-1, d_3-1, \dots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \dots, d_n) = d'$$

Следовательно, d' - графическая последовательность.

Случай 2. Пусть в графе G вершина v_1 смежна не со всеми вершинами $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$. Подправим граф G так, чтобы его степенная последовательность не изменилась, а вершина v_1 стала смежной со всеми вершинами $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$. Тем самым мы случай 2 сведем к случаю 1, в котором мы уже доказали графичность последовательности d'.

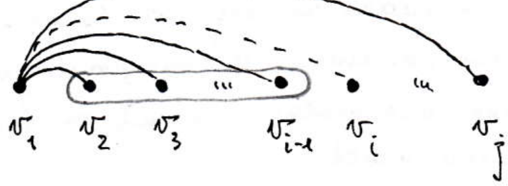
Пусть v_i - это вершина с минимальным индексом, не смежная с вершиной v_1, где $i \in \{2, 3, \dots, d_1+1\}$.



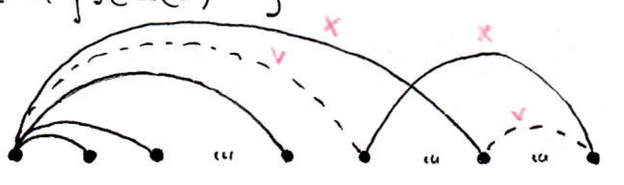
$$i \le d_1+1 \Rightarrow i-1 \le d_1 \Rightarrow |\{v_2, v_3, \dots, v_{i-1}\}| < d_1$$ (в мн-ве нумерация вершин начинается с 2

(С другой стороны $deg(v_i) < d_1$)

Вершина v_1 смежна с d_1 вершинами. Значит найдётся вершина v_j такая, что $j > i$ и $\{v_j, v_1\} \in E(G)$.



$$\left.\begin{array}{l} j > i \Rightarrow deg(v_j) \le deg(v_i) \\ \{v_1, v_i\} \notin E(G) \\ \{v_1, v_j\} \in E(G) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{найдётся вершина } v_k : \{v_k, v_i\} \in E(G) \text{ и } \{v_k, v_j\} \notin E(G).$$



Преобразуем граф:

$$G - \{v_1, v_j\} - \{v_i, v_k\} + \{v_1, v_i\} + \{v_j, v_k\}.$$

Степени вершин графа не изменялись. Почему? Мы из графа удалили два ребра и два ребра добавили. Концевыми вершинами этих рёбер являются вершины v_1, v_i, v_j, v_k. Поэтому степени могли измениться только у этих четырёх вершин.

Степень вершины v_1 не ~~меняется~~ изменилась, т.к. мы удалили одно ребро, содержащее вершину v_1, и добавили одно ребро, содержащее вершину v_1. Степень вершины v_i также не ~~меняется~~ изменилась, т.к. мы удалили одно ребро, содержащее вершину v_i, и добавили одно ребро, содержащее вершину v_i. Степень вершины v_j также не изменилась, поскольку мы удалили одно ребро, содержащее вершину v_j, и добавили одно ребро, содержащее вершину v_j. Аналогично, степень вершины v_k не изменилась, т.к. мы удалили одно ребро, содержащее вершину v_k, и добавили одно ребро, содержащее вершину v_k. Итак степенная последовательность графа не изменилась.

При этом вершина v_1 стала смежной с вершиной v_i. Используя такое преобразование можно добиться того, чтобы вершина v_1 была смежной с каждой вершиной $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$. Таким образом мы придём к случаю 1, в котором графичность последовательности d' доказана. ∎

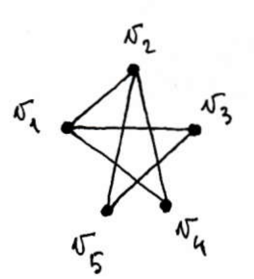
Алгоритм распознавания графических последовательностей состоит в следующем.

$$d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \longrightarrow d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n) \longrightarrow \dots$$
$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$$

На вход поступает последовательность n целых чисел, ~~расположенных в порядке невозрастания~~. Если среди элементов последовательности есть числа ~~больше~~ не меньше n или отрицательные числа, то ответ: последовательность d не графическая. Упорядочим элементы последовательности d по невозрастанию. Далее переходим к новой последовательности d', которая получается из последовательности d отбрасыванием первого элемента d_1 и уменьшением на 1 оставшихся первых d_1 элементов. Теперь работаем с последовательностью d'. С этой последовательностью проделываем те же действия, что и с последовательностью d. От последовательности d' переходим к последовательности d'' и т.д. Этот процесс рано или поздно закончится. ~~Каждый раз, переходя к новой последовательности мы отбрасываем один элемент последовательности~~ Следующая последовательность получается из предыдущей отбрасыванием одного элемента и уменьшением на 1 каких-то элементов. Поэтому на каком-то шаге получится последовательность, в которой есть хотя бы один отрицательный элемент или последовательность, состоящая из одних нулей. Если в конечном итоге получилась последовательность с отрицательными элементами, то все последовательности, включая исходную последовательность d, не графические. Если же получилась нулевая последовательность, то все последовательности, включая (изначальную) исходную последовательность d, графические.

Проиллюстрируем работу алгоритма на примере последовательности

$$d = (3, 3, 2, 2, 2)$$
$$v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5$$



$\downarrow$ Удаляем первый элем. 3 и уменьшаем на 1 первые элем. (при этом соединяем ребром вершину v_1 с вершинами v_2, v_3, v_4)

$$d' = (2, 1, 1, 2)$$
$$v_2\ v_3\ v_4\ v_5$$

расположим элементы последовательности в порядке невозрастания

$$d' = (2, 2, 1, 1)$$
$$v_5\ v_2\ v_3\ v_4$$

$\downarrow$

$$d'' = (1, 0, 1)$$
$$v_2\ v_3\ v_4$$

$$d'' = (1, 1, 0)$$
$$v_4\ v_2\ v_3$$

$\downarrow$

$d''' = (0, 0)$ Получили нулевую последовательность (следовательно, исходная последов. d, графическ.; более того мы построили ...