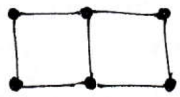
Глава. Теория графов.

Мы переходим к новой главе, в которой будем работать с дискретными объектами, которые наз-ся графами.

§ Базовые понятия теории графов.

Многие (ситуации) в задачах, возникающие на практике, в математике и теоретической информатике моделируются схемами, состоящими из конечного числа точек на плоскости и линий, которые соединяют некоторые пары из этих точек.



Например, точки на плоскости могут представлять людей, которые пришли на вечеринку, и линии соединяют двух человек, которые знают друг друга. Точки могут представлять перекрёстки в городе, а линии улицы. Такими схемами часто изображают городские транспортные сети, электротехнические схемы.

Если нам не важны длина, форма и другие свойства линий и мы обращаем внимание только на то какие пары точек соединены линией, а какие нет, то мы приходим к понятию графа.

Сам термин граф впервые появился в книге венгерского математика Денеша Кёнига в 1936 г, хотя начальные задачи теории графов восходят ещё к Леонарду Эйлеру, который работал в 18 в.

Пусть V - конечное и непустое мн-во. Символом $V^{(2)}$ будем обозначать множество всех неупорядоченных пар элементов из V:

$$V^{(2)} = \{\{u,v\} : u \in V \wedge v \in V \wedge u \neq v\}$$ - множество всех неупорядоченных пар разных элементов из V.

Примеры: 1) $V = \{a\}$.

$V^{(2)} = \varnothing$ (нельзя из одного элемента составить пару разных элементов).

2) $V = \{a,b\}$

$$V^{(2)} = \{\{a,b\}\}, \quad |V^{(2)}| = C_2^2 = 1.$$

3) $V = \{a,b,c\}$ (имея в наличии три элемента можно составить три пары

$$V^{(2)} = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\} \qquad |V^{(2)}| = C_3^2$$

4) $V = \{a,b,c,d\}$ (из четырёх элементов можно составить 6 пар)

$$V^{(2)} = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}. \qquad |V^{(2)}| = C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{2} = 6.$$

5) В общем случае из n элементов можно составить C_n^2 пар.

$$V = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \qquad |V^{(2)}| = C_n^2.$$

Опр. Графом наз-ся упорядоченная пара $G = (V,E)$, состоящая из произвольного конечного и непустого мн-ва объектов V и некоторого мн-ва $E \subseteq V^{(2)}$ пар этих объектов. Элементы мн-ва V наз-ся вершинами графа G, а пары вершин из E наз-ся рёбрами графа G.

Для того, чтобы определить (задать) граф G достаточно задать (определить) его мн-во вершин и мн-во рёбер. Традиционно, множество вершин графа G обозначается так $V(G)$, а множество рёбер графа G так $E(G)$.

Число вершин в графе G наз-ся порядком графа G и обозначается так $|G|$:

$$|G| = |V(G)|$$ - порядок графа G

(n,m)-графом наз-ся граф, в котором n вершин и m рёбер.

Если пара вершин u и v является ребром ребром $e=\{u,v\}\in E(G)$ графа G, то говорят, что

а) вершины u и v являются концевыми вершинами ребра e;

б) ребро e соединяет вершины u и v.

Две различные вершины $u,v\in V(G)$ называются смежными, если $\{u,v\}\in E(G)$ (пара вершин u и v является ребром графа G), и не смежными, в противном случае.

они являются концевыми вершинами одного и того же ребра

Два различных ребра e_1 и $e_2\in E(G)$ графа G называются смежными, если они имеют общую концевую вершину, т.е. $e_1\cap e_2\neq\varnothing$, и не смежными, в противном случае.

Вершина $u\in V(G)$ и ребро $e\in E(G)$ наз-ся инцидентными, если вершина u является концевой вершиной ребра e $(u\in e)$, и не инцидентными, в противном случае.

Окружением вершины $u\in V(G)$ наз-ся мн-во вершин $N(u)$ графа G, смежных с вершиной u. ~~Окружение вершины u обозначается так $N_G(u)$ или так $N(u)$, если из контекста ясно о каком графе G идёт речь.~~

$$N(u)=\{v\in V(G):\ \{u,v\}\in E(G)\}.$$

Замкнутым окружением вершины $u\in V(G)$ наз-ся мн-во $N[u]$ ~~вершин графа G~~, состоящее из вершины u и вершин графа G, смежных с u. ~~Замкнутое окружение вершины u обозначается так $N_G[u]$ или $N[u]$.~~

$$N[u]=\{u\}\cup N(u).$$

Степенью вершины $u\in V(G)$ наз-ся число вершин в её окружении (или число рёбер, в которые вершина u входит). Степень вершины u обозначается так $\deg_G(u)$ или так $\deg(u)$

$$\deg(u)=|N(u)|.$$

Примеры. В качестве примера рассмотрим граф G с множеством вершин

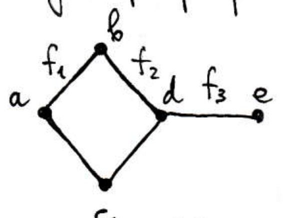
$$V(G)=\{a,b,c,d,e\}.$$

и множеством рёбер

$$E(G)=\{\{a,b\},\{b,d\},\{a,c\},\{c,d\},\{d,e\}\}.$$

Графы удобно изображать на плоскости. При этом вершины изображаются точками, а рёбра линиями, соединяющими соответствующие точки.

В графе G пять вершин. Рисуем пять точек по одной точке для каждой вершины. Для каждого ребра рисуем линию, соединяющую концевые вершины этого ребра



~~Рассмотрим ребро $f_1=\{a,b\}\in E(G)$ с концевыми вершинами a и b.~~ Рассмотрим ребро $\{a,b\}$. Обозначим его через f_1. Концевыми вершинами ребра f_1 являются вершины a и b.

Вершины a и b ~~также~~ являются смежными (т.к. пара $\{a,b\}$ является ребром)

Вершины b и d также смежны (поскольку эти вершины соединены ребром f_2).

Вершины a и d не смежны (т.к. пара $\{a,d\}$ не является ребром графа G, т.е. $\{a,d\}\notin$

Ребра f_1 и f_2 смежны (т.к. они имеют общую концевую вершину — вершину b).

Обозначим ребро $\{d,e\}$ через f_3. Ребра f_1 и f_3 не смежные (т.к. нет общей концевой вершины, т.е. $f_1\cap f_3=\varnothing$).

Вершина a и ребро f_1 инцидентны, т.к. вершина a является концевой вершиной ребра f_1.

Вершина a и ребро f_3 не инцидентны.

$N(a)=\{b,c\}$ (мн-во вершин, соединенных ребром с a) (окружение вершины a состоит из вершин, смежных с a, т.е. вершин b, c).
$N[a]=\{a,b,c\}$ (замкнутое окружение вершины a состоит из вершины a и вершин, смежных с a).

$N(d)=\{b,c,e\}$
$N[d]=\{d,b,c,e\}$.
$deg(a)=2$
$deg(d)=3$.

Граф $G=(V,E)$ наз-ся двудольным, если мн-во его вершин V можно разбить на два непересекающихся мн-ва V_1 и V_2 так, что в каждом ребре $\{v_1,v_2\}\in E$ одна вершина будет принадлежать мн-ву V_1, а другая – V_2.

V_1, V_2 наз-ся долями двудольного графа G

<u>Опр.</u> Вершина $u\in V(G)$ графа G наз-ся
а) изолированной, если $deg(u)=0$.
б) висячей, если $deg(u)=1$.
в) доминирующей, если $deg(u)=|G|-1$.

Рассмотрим простейшие классы графов. (важные типы графов)
1) Первый класс графов – класс полных графов. Граф G наз-ся полным, если любые две его вершины смежны, т.е. $E(G)=V(G)^{(2)}$ (мн-во рёбер графа состоит из всех возможных неупорядоченных пар разных вершин). Полный граф порядка n обозначается так K_n. $|E(K_n)|=|V(G)^{(2)}|=C_n^2$

K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

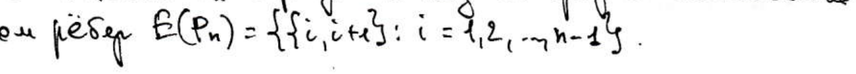
(полный граф порядка 1 представляет собой одновершинный граф)

2) Граф G наз-ся пустым, если в нём нет рёбер, т.е. $E(G)=\phi$ (мн-во рёбер графа – пустое мн-во). Пустой граф порядка n обозначается через O_n.

O_1 O_2 O_3 O_4 O_5.

Заметим, что в любом пустом графе все вершины изолированы.

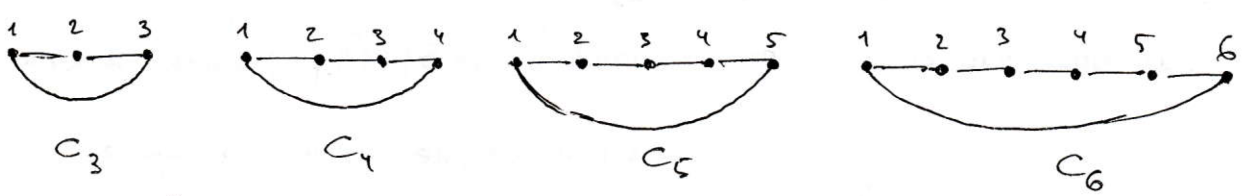
3) Простой цепью P_n порядка n наз-ся граф с множеством вершин $V(P_n)=\{1,2,\dots,n\}$ и множеством рёбер $E(P_n)=\{\{i,i+1\}: i=1,2,\dots,n-1\}$.



P_1 P_2 P_3 P_5

(простая цепь порядка 5 состоит из пяти вершин 1,2,3,4 и 5; вершины отличающиеся друг от друга на единицу и только они, соединены ребром)

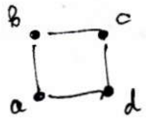
4) Простым циклом C_n порядка $n\geq 3$ наз-ся граф с множеством вершин $V(C_n)=\{1,2,\dots,n\}$ и множеством рёбер $E(C_n)=\{\{i,i+1\}: i=1,2,\dots,n-1\}\cup\{\{1,n\}\}$. $E(C_n)=E(P_n)\cup\{\{1,n\}\}$



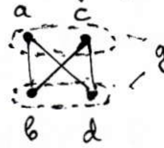
C_3 C_4 C_5 C_6

5) Граф наз-ся двудольным, если существует такое разбиение мн-ва его вершин на две непересекающиеся доли, что концевые вершины каждого ребра принадлежат разным частям. Двудольный граф можно определить и по-другому – в терминах раскраски его вершин ~~в два цвета~~ двумя цветами, скажем красным и синим. При этом граф наз-ся двудольным, если каждую его вершину можно окрасить красным или синим цветом так, чтобы любое ребро имело один конец красный, а другой синий.

Примеры: 1) C_4 – двудольный граф.



Разобьем мн-во вершин цикла на две доли. К одной доле отнесём вершины a, c. Две другие вершины b, d отнесём ко 2-й доле



доли

Каждое ребро графа соединяет вершины из разных долей.

2) C_3 – не двудольный граф. В графе три вершины, ~~любые из~~ любые две из которых соединены ребром. Как бы мы не разбили вершины этого графа на две доли в одной из долей окажется хотя бы две вершины, соединённые ребром.

Двудольный граф наз-ся полным двудольным, если каждая вершина одной доли смежна с каждой вершиной другой доли. Полный двудольный граф, доли которого состоят из p вершин и из q вершин обозначается $K_{p,q}$. Приведём примеры полных двудольных графов

$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{3,3}$

~~Посмотрим какие у нас имеются операции с помощью которых можно получать новые графы из имеющихся. Посмотрим какие у нас имеются инструменты для получения новых графов из имеющихся.~~

Опр. Пусть $G=(V,E)$ – граф порядка n. Произвольным образом упорядочим вершины графа G и обозначим их так

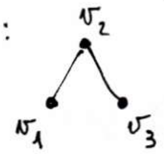
$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Матрицей смежности графа G наз-ся квадратная матрица $A(G) = (a_{ij})$ порядка n, в которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ 1, & \text{если } \{v_i, v_j\} \in E(G). \end{cases}$$

Матрица смежности любого графа является симметричной квадратной матрицей с нулями на главной диагонали.

Пример:



G

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Опр. Пусть $G=(V,E)$ – ~~граф~~ непустой ~~граф~~ (n,m)-граф. Произвольным образом упорядочим вершины и рёбра графа. Обозначим вершины графа так.

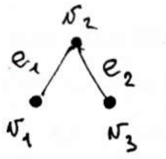
$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

а рёбра так

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}.$$

Матрицей инцидентности графа G наз-ся матрица $B(G) = (b_{ij})$ размера n на m, в которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна ребру } e_j. \\ 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j. \end{cases}$$

Пример: 

$$B(G) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

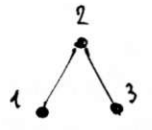
§ Помеченные и абстрактные графы.

Зададимся вопросом. Какие два графа считать равными, а какие два графа считать различными? На этот вопрос существует два ответа.

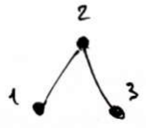
Первая идея, которая приходит на ум - это назвать два графа равными, если их мн-ва вершин и множества рёбер совпадают.

Опр. Графы G и H наз-ся равными (пишем $G = H$), если $V(G) = V(H)$ и $E(G) = E(H)$.

Примеры: 1)



=

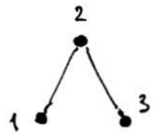


G $\qquad$ H

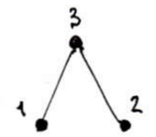
$V(G) = \{1,2,3\}$ $\qquad$ $V(H) = \{1,2,3\}$

$E(G) = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$ $\qquad$ $E(H) = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$

2)



$\neq$



$V(G) = \{1,2,3\}$ $\qquad$ $V(H) = \{1,2,3\}$

$E(G) = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$ $\qquad$ $E(H) = \{\{1,3\},\{3,2\}\}$.

Множества вершин этих графов совпадают. Однако мн-во рёбер этих графов таким свойством не обладают. В самом деле, в графе G есть ребро $\{1,2\}$, а в графе H этого ребра нет. Поэтому эти графы не равны.

В приведённых примерах каждая вершина графа отождествлена с одним из натуральных чисел. Каждой вершине графа приписано уникальное натуральное число, которое наз-ся меткой вершины. Мы различаем вершины по их меткам. Такое определение равенства графов существенно зависит от меток вершин. Рассмотрим второй пример - пример различных графов. Удалим все метки вершин в этих графах. Получим два графа, которые сложно назвать не равными. Фактически мы имеем два изображения одного и того же графа. Действительно, если мы наложим эти картинки друг на друга, то изображения совпадут.

Если вершинам графа приписаны метки и равенство графов понимается как равенство их множеств вершин и множеств рёбер, то о таких графах мы говорим как о помеченных графах.

Зачастую нам не важно каким вершинам какие метки приписаны, т.е. сами по себе вершины мы не различаем. Важно лишь то, что есть вершины рёбра между ними. С этих позиций мы считаем два графа равными (или как ещё говорят, изоморфными), если они могут быть изображены на плоскости так, что при наложении получившихся картинок друг на друга картинки совпадут.

Дадим формальное определение понятию изоморфизма графов. Будем говорить, что два графа изоморфны, если существует биективное соответствие между их вершинами, обладающее тем свойством, что две вершины соединены ребром в одном графе тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины соединены ребром в другом графе. Запишем определение.

Опр. Граф G наз-ся изоморфным графу H (пишем $G \cong H$), если существует изоморфизм графа G на граф H, т.е. биекция $f: V(G) \to V(H)$ (из мн-ва вершин графа G в мн-во вершин графа H), сохраняющая отношение смежности вершин: $\forall\, u,v \in V(G)$

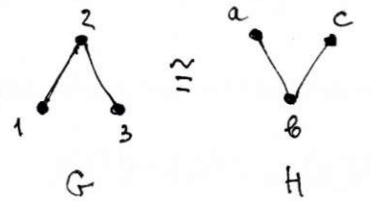
$$\{u,v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u),f(v)\} \in E(H).$$

(Вершины u и v смежны в графе G тогда и только тогда, когда их образы смежны в графе H).

Можно показать, что отношение изоморфизма графов является отношением эквивалент-ности. Все графы разбиваются на непересекающиеся классы так, что графы из одного кла-сса попарно изоморфны (т.е. их можно изобразить одним рисунком), а графы из разных классов неизоморфны. Класс изоморфных графов наз-ся абстрактным. Всюду далее под графом будем понимать абстрактный граф.

Приведём примеры пар изоморфных графов.

(1)

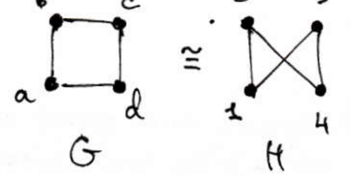


Графы G и H изоморфны. Соответствующий изоморфизм графа G на граф H имеет вид

$f(1)=a$,
$f(2)=b$,
$f(3)=c$.

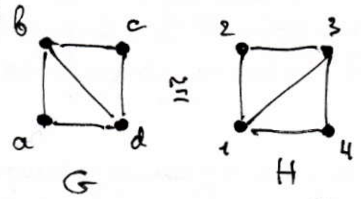
Нетрудно видеть, что отображение f является биекцией. При такой биекции пары смежных вершин переходят в пары смежных вершин, а пары несмежных вершин – в пары несмежных вершин.

(2)

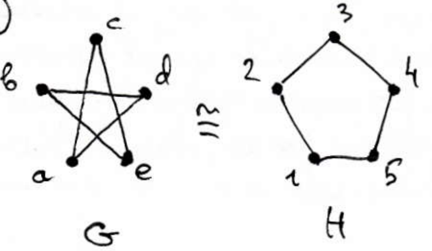


Попробуйте самостоятельно найти изоморфизм графа G на граф H.

(3)

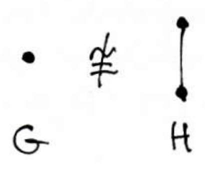


(4)



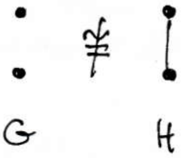
Приведём примеры пар неизоморфных графов. Для того, чтобы доказать, что два графа неизоморфны достаточно найти что-то, что есть в одном графе и нет в другом.

(1)



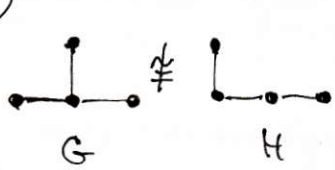
Если два графа изоморфны, то сущ-ет биекция из мн-ва вершин графа G в мн-во вершин графа H. Значит число вершин в графе G совпадает с числом вершин в графе H. В нашем случае графы G и H содержат разное число вершин. Значит они не изоморфны.

(2)



Поскольку изоморфные графы можно изобразить одним рисунком, то изоморфные графы содержат одинаковое число рёбер. В нашем случае графы G и H содержат разное число рёбер. Значит они не изоморфны

(3)

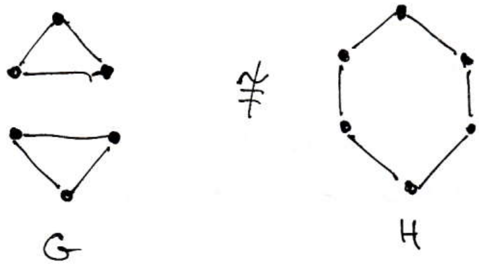


В графе G есть вершина степени 3. При изоморфизме эта вершина переходит в вершину степени 3 графа H. Заметим, что в графе H нет степени 3. Стало быть граф G не изоморфен графу H.

(4)

В графе G есть четыре вершины, которые образуют простой цикл порядка 4. При изоморфизме эти четыре вершины переходят в четыре вершины второго графа (графа H), которые также должны образовывать простой цикл порядка 4 в графе H. В графе H нет простых циклов порядка 4. Значит графы G и H неизоморфны.

(5)

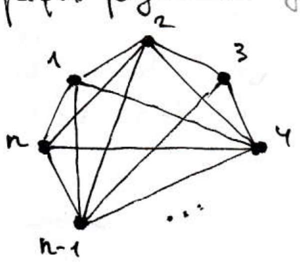


В графе G есть три вершины, которые образуют простой цикл порядка 3. При изоморфизме эти три вершины переходят в три вершины графа H, которые также должны образовывать простой цикл порядка 3 в графе H. Но в графе H нет простого цикла порядка 3. Значит графы G и H неизоморфны.

Естественным образом возникают вопросы. Сколько существует помеченных графов порядка n? Сколько существует абстрактных графов порядка n?

<u>Утв.</u> Число различных помеченных графов на множестве вершин $V=\{1,2,\dots,n\}$ равно $2^{C_n^2}$.

<u>Док-во</u>: Два помеченных графа на одном и том же множестве вершин V ($V(G)=V$, $V(H)=V$) различны, если мн-ва рёбер этих графов различны. Пуст. G и H – помеченные графы на мн-ве V. Тогда $G \neq H$, если $E(G) \neq E(H)$.



Рассмотрим полный граф на множестве вершин $\{1,2,\dots,n\}$. В полном графе C_n^2 рёбер.

Произвольным образом упорядочим рёбра этого графа и обозначим их через

$$e_1, e_2, \dots, e_{C_n^2}.$$

Пусть $G=(V,E)$ – произвольный помеченный граф с мн-вом вершин $\{1,2,\dots,n\}$. Ему поставим в соответствие набор из C_n^2 нулей и единиц

$$G \to \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{C_n^2} \in \{0,1\}^{C_n^2}$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{если } e_i \notin E(G) \\ 1, & \text{если } e_i \in E(G) \end{cases}$$

Такое соответствие устанавливает биекцию между мн-вом всех помеченных графов на мн-ве вершин $\{1,2,\dots,n\}$ и множеством наборов из C_n^2 нулей и единиц. Следовательно число всех помеченных графов на множестве вершин $\{1,2,\dots,n\}$ совпадает с числом всех наборов из C_n^2 нулей и единиц, которых $2^{C_n^2}$.

Пусть g_n – это число абстрактных графов порядка n. Точное число абстрактных графов порядка n неизвестно. Известна формула Пойа, дающая асимптотику числа g_n.

<u>Утв.</u> (формула Пойа).

$$g_n \sim 2^{C_n^2}/n!$$

(число абстрактных графов порядка n асимптотически равно $\frac{2^{C_n^2}}{n!}$); эта формула означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{2^{C_n^2}/n!} = 1.$$

(предел отношения g_n и величины $\frac{2^{C_n^2}}{n!}$ при n стремящемся к ∞ равен 1).

Примем это утверждение без доказательства.

§ Подграфы графа. Графовые операции.

Опр. Граф H наз-ся подграфом графа G, если $V(H)\subseteq V(G)$ и $E(H)\subseteq E(G)$.

Если граф H является подграфом графа G, то мы говорим, что граф H содержится в графе G.

Опр. Подграф H графа G наз-ся остовным подграфом, если $V(H)=V(G)$.

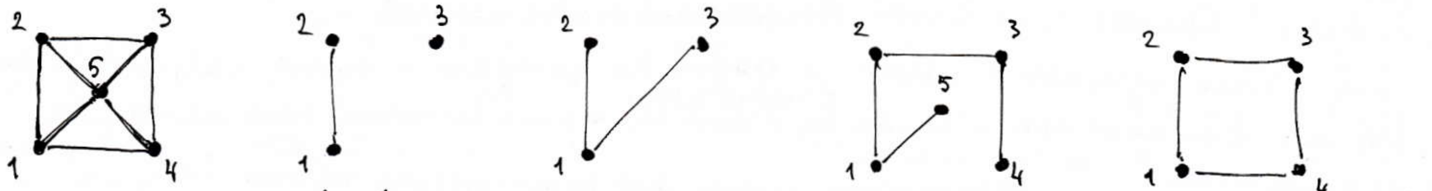
Опр. Пусть $G=(V,E)$ – граф и $X\subseteq V$, $X\neq\varnothing$. Подграф H графа G, в котором

$$V(H)=X$$

$$E(H)=\{\{u,v\}\in V(G): u\in X \wedge v\in X\}$$

(множество вершин совпадает с X, а множество рёбер состоит из всех рёбер графа G, обе концевые вершины которых принадлежат мн-ву X) наз-ся подграфом графа G, порождённым мн-вом вершин X, и обозначается так $H=G(X)$.

Примеры:



G

H_1 – подграф графа G ($V(H_1)\subseteq V(G)$) ($E(H_1)\subseteq E(G)$)

H_2 – не подграф графа G ($E(H_2)\nsubseteq E(G)$).

H_3 – остовный подграф графа G. ($V(H_3)=V(G)$ $E(H_3)\subseteq E(G)$)

H_4 – подграф графа G порождённый $\{1,2,3,4\}$ $H_4=G(\{1,2,3,4\})$.

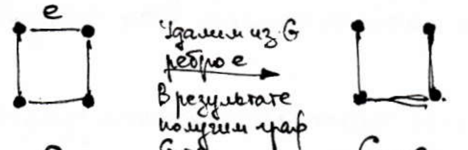
Посмотрим какие инструменты у нас есть для получения новых графов из имеющихся

① "Удаление ребра e". Пусть имеется непустой граф G, $E(G)\neq\varnothing$. Зафиксируем в графе G произвольное ребро e. Ребро e можно удалить из графа G. Граф, получаемый из графа G удалением ребра e, обозначается так $G-e$.

$$G-e=(V(G), E(G)\setminus\{e\}).$$

(множество вершин графа $G-e$ совпадает с множеством вершин графа G, а мн-во рёбер графа $G-e$, получается из мн-ва рёбер графа G удалением ребра e).

Пример:

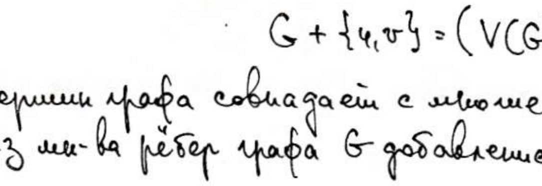


② "Добавление нового ребра". Пусть имеется неполный граф. Зафиксируем в графе G две различные несмежные вершины u,v, т.е. $\{u,v\}\notin E(G)$ и $u\neq v$. В граф G можно добавить ребро $\{u,v\}$. Граф, получаемый из графа G добавлением ребра $\{u,v\}$ обозначается так $G+\{u,v\}$:

$$G+\{u,v\}=(V(G), E(G)\cup\{\{u,v\}\})$$

(множество вершин графа совпадает с множеством вершин графа G, а множество рёбер графа получается из мн-ва рёбер графа G добавлением нового ребра $\{u,v\}$).

Пример:



③ Пусть G - граф, в котором есть хотя бы две вершины, т.е. $|G| \geq 2$. Выделим в этом графе вершину, скажем, вершину v. Вершину v можно удалить из графа G. Граф, получаемый из графа G удалением вершины v, обозначается так $G - v$:

При удалении вершины автоматически удаляются и все рёбра, инцидентные ей.

$$G - v = (V(G) \setminus \{v\}, \{e \in E(G) : v \notin e\}).$$

(множество вершин графа получается из мн-ва вершин графа G удалением вершины v, а мн-во рёбер графа получается из мн-ва рёбер графа G удалением всех рёбер инцидентных вершине v.

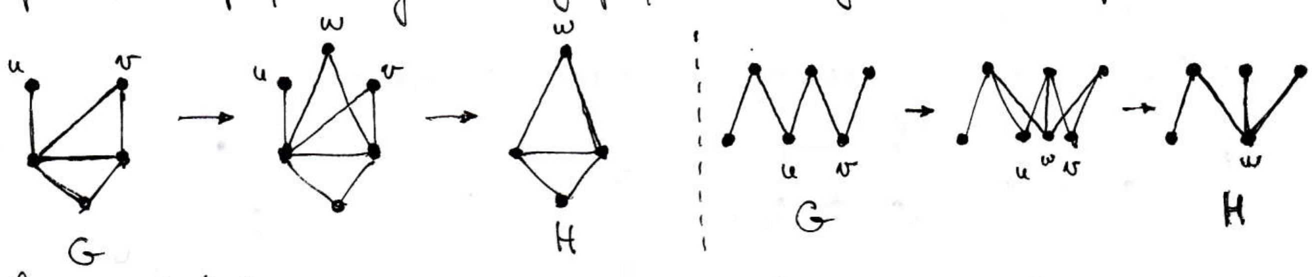
Пример:

④ "Отождествление вершин". Пусть G - граф, в котором имеется хотя бы две вершины, т.е. $|G| \geq 2$. Зафиксируем в графе G две различные вершины u и v. Рассмотрим граф H, который получается из графа G так:

1) добавим в граф новую вершину w, которую соединим рёбрами со всеми вершинами из окружений вершин u и v, т.е. $N(u) \cup N(v)$;
2) удалим из графа вершины u и v.

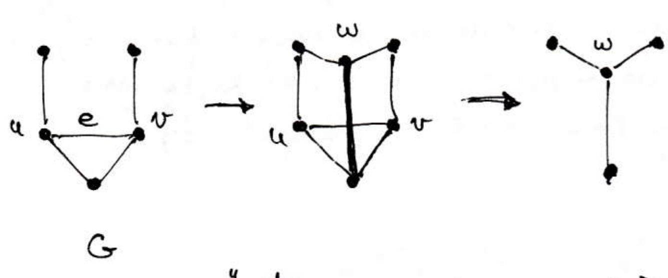
Будем говорить, что граф H получается из графа G отождествлением вершин u и v.

Пример:



⑤ "Стягивание ребра". Пусть имеется непустой граф G, т.е. $E(G) \neq \emptyset$. Зафиксируем в графе G произвольное ребро $e = \{u, v\}$. Стягивание ребра e в графе G представляет собой отождествление концевых вершин ребра e.

Пример:

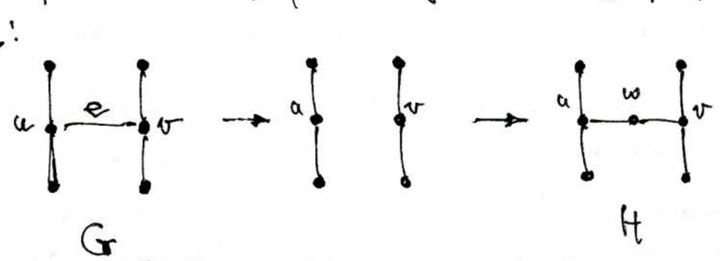


⑥ "Подразбиение ребра". Пусть имеется непустой граф G, т.е. $|E(G)| \neq 0$. Зафиксируем в графе G произвольное ребро $e = \{u, v\}$. Рассмотрим граф H, который получается из графа G так:

1) Удалим из графа G ребро e;
2) Добавим в граф новую вершину w, которую соединим рёбрами с вершинами u и v.

Будем говорить, что граф H получается из графа G подразбиением ребра e.

Пример:



Если отбросить все формальности, то подразбить ребро в графе означает нарисовать вершину на этом ребре.